

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI – CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :

Série :

MEMOIRE



Présenté pour obtenir le diplôme de
MAGISTER EN MATHEMATIQUES

THEME

**ETUDE VARIATIONNELLE DU CONTACT SANS FROTTEMENT ENTRE UN
CORPS ELASTIQUE ET UNE FONDATION RIGIDE**

OPTION
Analyse Non Linéaire

PAR
KAOUACHE SMAIL

Devant les jury :

• Mr H. Mekias	Prof.	Univ. F. A. Sétif	Président
• Mr B. Teniou	M. C.	Univ. M.Constantine	Rapporteur
• Mr A. Ayadi	M. C.	Univ. M.Constantine	Examineur
• Mr M. Deghdak	M. C.	Univ. M.Constantine	Examineur
• Mr K. Messaoudi	M. C.	Univ. Batna	Examineur

Soutenu le : ... / ... / 2003

الإهداء

إلى والدي العزيزين: عزا لدين و جميلة.
إلى إخوتي وأخواتي و كل أفراد أسرتي...
إلى كل الأحباب و الأصدقاء.....
إلى كل من نفث حبره في سبيل العلم و المعرفة...
إلى هؤلاء و أولئك، أهدي هذا العمل المتواضع.

كعواش اسما عيل.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance, ainsi que mes vifs remerciements à l'honorable monsieur T. Boudjemaa d'avoir accepté de diriger mon travail, par ses importants conseils et par le sacrifice de son précieux temps, en dépit de ses multiples responsabilités.

Je remercie aussi monsieur H. Mekias qui a bien voulu accepter d'être le président de ce jury.

Mes sincères remerciements vont également à monsieur A. Ayadi, M. Deghdak, et K. Messaoudi pour avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.

4.2 Les espaces fonctionnels.....	47
4.2.1 Les espaces de distributions.....	47
4.2.2 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	49
4.2.3 Espaces liés à l'opérateur déformation.....	51
4.2.4 Espaces liés à l'opérateur divergence.....	54

INTRODUCTION

Les phénomènes de contact sont nombreux et jouent un rôle important dans la structure des systèmes mécaniques. Le contact des plaquettes avec le disque de frein, du train d'atterrissage d'un avion avec une piste, des pistons avec la chemise, du train avec les rails, les frottement des plaques tectoniques, l'écoulement de la lave lors d'une éruption volcanique, le contact entre une roue de voiture et une route, ne sont que quelques exemples, parmi bien d'autres, qui montrent que les problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide sont abondants en industrie et dans la vie quotidienne. Vu l'importance de ces phénomènes, des études considérables ont été consacrées à la mécanique de contact. Ces études touchent la modélisation, l'analyse mathématique ainsi que l'approximation numérique.

Les problèmes de contact sans frottement entre un corps déformable et une fondation rigide ont été étudiés par plusieurs auteurs pour différentes lois de comportement, on peut citer les travaux [6, 12].

L'analyse mathématique des problèmes de contact devient encore plus compliquée si on considère des lois de comportement non linéaires. Des formulations variationnelles et des résultats d'existences et d'unicité ont été obtenus dans [1, 3, 20] dans le cas élastique, viscoplastique et viscoélastique.

Pour l'analyse mathématique appliquée à la mécanique de contact, on pourra lire [13, 17, 18]. En ce qui concerne l'analyse numérique on peut regarder [7, 10] et plus récemment [11, 16]. Le but de ce mémoire est l'étude mathématique d'un problème de contact entre un corps élastique et une fondation rigide. La modélisation des problèmes de contact d'un corps déformable avec une base, dépend essentiellement des propriétés mécanique du matériau ainsi que des conditions aux limites de contact. Dans ce mémoire nous considérons une loi de comportement non linéaire pour un matériau élastique, dans le processus statique et avec l'hypothèse des petites transformations. Les conditions de contact sont celles de Signorini.

La méthode utilisée pour étudier ce problème est la suivante:

Nous commençons par la modélisation du problème mécanique et après avoir précisé les hypothèses sur les données du problème nous présentons une analyse variationnelle et numérique pour résoudre ce problème.

Les résultats que nous obtenons concernent l'existence et l'unicité des solutions des prob-

variationnelles, l'équivalence entre ces formulations variationnelles, la dépendance de la solution par rapport au paramètre donné et enfin les estimations abstraites d'erreurs suivant un schéma d'approximation numérique.

Ce mémoire est composé de trois chapitres et une annexe. Il est structuré de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension du problème mécanique qui sera étudié. Nous rappelons quelques principes et résultats fondamentaux de la théorie des milieux continus, nous définissons les tenseurs des contraintes et des déformations, les lois de comportement élastique et enfin les conditions aux limites de contact sans frottement qui conduisent au problème élastique de Signorini.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le problème de contact sans frottement entre un corps élastique et une fondation rigide. Les modèles mathématiques correspondants sont formulés en fonction des inéquations variationnelles elliptiques. Les conditions aux limites de contact sont celle de Signorini. Nous donnons, après avoir posé le problème mécanique, deux formulations variationnelles. Ensuite nous établissons un résultat d'existence et d'unicité pour chacune de ces deux formulations variationnelles. On poursuit avec un résultat d'équivalence entre ces deux formulations variationnelles et on étudie ensuite la dépendance de la solution faible par rapport à un paramètre introduit dans la loi de comportement élastique et on termine avec une application.

Dans le troisième chapitre, nous donnons une méthode d'approximation numérique du problème. On propose un schéma de discretisation de la solution faible du problème mécanique et on montre que cette solution approchée converge vers la solution faible ensuite on donne les estimations abstraites d'erreurs.

Dans l'annexe on présente quelques résultats classiques sur l'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert, notamment le théorème d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques. Nous rappelons aussi les espaces fonctionnels et quelques outils de l'analyse fonctionnel qui seront utiles pour l'étude mathématique du problème mécanique. Signalons enfin que dans ce mémoire nous avons adopté la convention usuelle de sommation sur l'indice répété.

Notations

Dans les définitions qui suivent nous adoptons les notations d'Einstein. On note par:

Ω	un domaine de $IR^N (N = 1, 2, 3)$.
Γ	la frontière de Ω .
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
$\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$	une partie mssurable de Γ .
S_N	l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur IR^N .
I_N	le tenseur identité du seconde ordre sur IR^N .
0_N	le zéro de IR^N et celui de S_N .
C	une constante générique strictement positive.
$p.p$	presque partout.
$ \cdot $	la norme dans IR^N et S_N .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
u_ν, u_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel u définies sur $\overline{\Omega}$.
$mes\Gamma_1$	la mesure de lebesgue $(N - 1)$ dimensionnelle de Γ_1 .
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions indéfiniment déffrentiables et à support compact inclu dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions.
$D = \{\varphi = (\varphi_i) / \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}(\Omega)^N$.	
$D' = \mathcal{D}'(\Omega)^N$.	
$\mathcal{D} = \{\varphi = (\varphi_{ij}) / \varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega), i, j = \overline{1, N}\} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N \times N}$.	
$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N \times N}$.	
H	l'espace $L^2(\Omega)^N$.
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{N \times N}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^N$.
$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / Div\sigma \in H\}$.	
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ .

$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$ l'application trace pour les fonctions vectorielles.

$\gamma_\nu : \mathcal{H}_1 \rightarrow H_\Gamma$ l'application trace pour les fonctions tensorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes:

$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ le produit scalaire dans H .

$|\cdot|_H$ la norme dans H .

H' l'espace dual de H .

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ le produit de dualité entre H' et H .

$x_n \rightarrow x$ la convergence forte de la suite (x_n) vers x dans H .

Chapitre 1

INTRODUCTION A LA MECANIQUE DU CONTACT

Le but de ce chapitre est d'établir le modèle mathématique qui décrit le mouvement des milieux continus déformables sous l'action des forces extérieures; c'est-à-dire trouver le système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) associé à des conditions aux limites.

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base de la mécanique des milieux continus. Ces rappels porteront sur le tenseur des déformations, le tenseur des contraintes, les équations de mouvement ainsi que la loi de comportement élastique. Nous présentons aussi les conditions aux limites de déplacement-traction et les conditions aux limites de contact sans frottement. Pour plus de détails sur ces notions nous indiquons les travaux [2, 14, 22].

1.1 Géométrie de la déformation

1.1.1 Définition d'un milieu continu

Un milieu continu est un corps qui occupe à chaque instant t un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) en respectant la continuité de la matière (ni interpénétration, ni formation de cavité).

1.2 Tenseur des déformations

Soit Ω un ouvert de IR^N ($N = 1, 2, 3$) occupé par le corps élastique dans son état non déformé. On suppose que Ω est borné de frontière Γ régulière.

Soit P une particule matérielle du corps Ω et soient $X = (X_i)$ ses coordonnées à l'instant $t = 0$ et $x = (x_i)$ les coordonnées à l'instant $t > 0$ de cette même particule (voir fig.1.1).

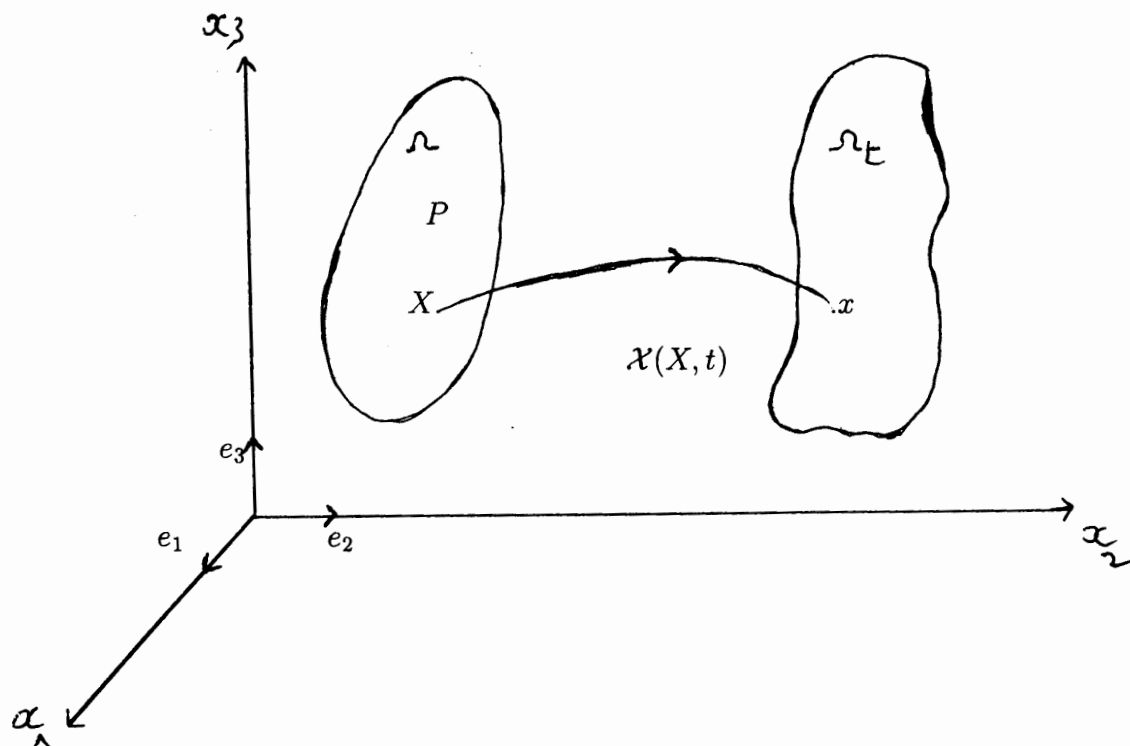


Fig1.1. Visualisation du champ des déplacements.

le mouvement du milieu continu est déterminé par la position courante x de chaque particule matérielle comme fonction de la position de référence X et du temps t . C'est donc une famille de fonctions $\mathcal{X}(\cdot, t) : \Omega \times IR_+ \rightarrow IR^N$ ($N = 1, 2, 3$), qui vérifie:

$$x(X, t) = \mathcal{X}(X, t) = X + u(X, t) \quad \forall X \in \Omega, t > 0 \quad (1.1)$$

Remarque 1.1 Le champ u défini par (1.1) s'appelle champ des déplacements.

Le gradient de $\mathcal{X}$ par rapport aux coordonnées de la variable X définit un champ tensoriel sur

Ω noté par F et on a:

$$F = (F_{ij}) = \nabla_X \mathcal{X}.$$

F s'appelle tenseur gradient de la déformation.

Maintenant on suppose que $\mathcal{X}(\cdot, t)$ est une application bijective et continue; donc son application réciproque $\mathcal{X}^{-1}(\cdot, t) : \Omega_t \rightarrow \Omega$ existe et donnée par:

$$X = \mathcal{X}^{-1}(x, t) \quad (1.2)$$

Au mouvement $\mathcal{X}$ on associe le champ des vitesses et le champ des accélérations définis respectivement par:

$$v = \dot{u} = \frac{d\mathcal{X}}{dt}(X, t) \quad (1.3)$$

$$a = \ddot{u} = \frac{d^2\mathcal{X}}{dt^2}(X, t) \quad (1.4)$$

Soit H également le gradient de u par rapport aux coordonnées de la variable X . C'est-à-dire:

$$H = (H_{ij}) = \nabla_X u$$

Où $\nabla_X u = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$.

On déduit que $F = I_N + H$.

Nous introduisons encore les notations suivantes:

$$C = FF^T = I_N + H + H^T + HH^T.$$

où H^T désigne la transposée de H .

Le tenseur C défini précédemment s'appelle tenseur des dilatations (tenseur des déformations de Cauchy).

$$G = \frac{1}{2} (C - I_N)$$

En composantes on a:

$$G_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Le tenseur G n'est pas linéaire par rapport aux composantes du vecteur de déplacement u . Dans ce qui suit, nous nous intéressons aux mouvements caractérisés par un vecteur de déplacement $u(X, t)$ qui varie lentement avec X . C'est-à-dire les dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ sont considérées petites "c'est l'hypothèse des petites transformations".

Dans ce cas les termes $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ sont négligés et le tenseur G devient un tenseur linéaire ε défini par:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (H + H^T) \quad (1.5)$$

Le tenseur ε défini par (1.5) s'appelle le tenseur des déformations linéarisé.

1.3 Tenseur des contraintes

Soit le système matériel soumis à des forces de volumes $f(., t) : \Omega_t \rightarrow IR^N$ et de surface $h : \Gamma_t \rightarrow IR^N$, de la configuration déformée Ω_t et soit le champ de vecteur $\tau(., t)$ tel que $\tau(., t) : \Omega_t \times \Sigma_1 \rightarrow IR^N$ où $\Sigma_1 = \{ \nu \in IR^N / |\nu| = 1 \}$ est la sphère unité de IR^N .

Si $x \in \Gamma_t$ et ν est la normale extérieure unitaire à Γ_t au point x , alors par définition on a:

$$h(x, t) ds = \tau(x, \nu, t) ds$$

Remarque 1.2 Le vecteur $\tau(x, \nu, t)$ défini précédemment s'appelle vecteur contrainte de Cauchy au point x . D'après le théorème de Cauchy; ce vecteur est linéaire par rapport à $\nu \in \Sigma$; donc il existe un champ de tenseurs $\sigma(., t) : \Omega_t \rightarrow M_N$ tel que:

$$\tau(x, \nu, t) = \sigma^T(x, t) \nu, \forall x \in \Omega_t, \quad t > 0$$

où M_N ($N = 1, 2, 3$) est l'espace des matrices carrées d'ordre $N \times N$.

De plus σ est un tenseur symétrique; c'est-à-dire:

$$\sigma(x, t) = \sigma^T(x, t), \forall x \in \Omega_t, \quad \nu \in \Sigma_1, \quad t > 0$$

Le tenseur $\sigma(x, t)$ défini précédemment s'appelle tenseur des contraintes de Cauchy au point $x \in \Omega_t$.

1.4 Equation de mouvement

En utilisant la loi fondamentale de la dynamique, exprimant l'équivalence du torseur des forces extérieurs et du torseur des accélérations appliquées au système matériel Ω et en utilisant la loi de conservation de la masse, on obtient l'équation de mouvement suivante:

$$\text{Div}\sigma + f = \rho\ddot{u} \text{ dans } \Omega_t \quad \forall t > 0. \quad (1.6)$$

où $\rho(., t) : \Omega_t \rightarrow IR_+$ est la densité de la masse au point x à l'instant $t > 0$.

Div désigne l'opérateur de divergence. C'est-à-dire: $\text{Div}\sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, pour tout $i, j = 1, 2, 3$.

L'équation (1.6) est valable dans la configuration déformée Ω_t qui est elle même inconnue. Donc (1.6) ne peut pas être utilisée telle quelle; d'où la nécessité de la réécrire dans la configuration de référence Ω .

Maintenant on suppose que σ , u et f sont des fonctions définies sur $\Omega \times [0, T]$.

On prouve avec certaines hypothèses et avec un changement de notation (voir [2]) que l'équation (1.6) devient:

$$\text{Div}\sigma + f = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (1.7)$$

Remarque 1.3 L'équation (1.7) est dite équation de mouvement dans le cas dynamique.

Si $\ddot{u} = 0$ (le cas statique) ou si $\rho\ddot{u}$ est négligeable (le cas quasistatique), l'équation (1.7) devient:

$$\text{Div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (1.8)$$

L'équation (1.8) est dite équation d'équilibre.

En général, dans la théorie de l'élasticité linéaire, les inconnues du problème sont le champ des contraintes σ et le champ des déplacements u qui vérifient l'équation (1.6).

Pour $N = 3$, les équations (1.7) (dans le cas dynamique) ou (1.8) (dans le cas statique ou quasistatique) constituent au total trois relations scalaires. Les fonctions inconnues sont au nombre de neuf: les trois composantes (u_i) du champ de déplacement et les six composantes (σ_{ij}) du tenseur des contraintes. Il est évident, que du point de vue mathématiques, il est bien improbable qu'avec trois équations on puisse déterminer neuf inconnues. Du point de vue physique, il faut remarquer que les lois de conservations énoncées sont des lois universelles, valables pour tous les solides. Donc les équations (1.7) ou (1.8) obtenues à partir de ces lois suffisaient à déterminer toutes les inconnues, cela signifierait que soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques, ceci est naturellement absurde. Alors les lois de conservation étant insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on désigne sous le vocable de **"lois de comportement"** et **"Conditions aux limites"**.

1.5 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu, bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance; leur origine est souvent expérimentale et c'est toutes une série d'essais qu'il faut réaliser pour établir une loi de comportement. D'une manière générale, les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations ε et leurs dérivées $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

Nous présentons ci-dessous les lois de comportement élastique.

1.5.1 Loi de comportement élastique

soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et connexe et soient σ le tenseur des contraintes et ε le tenseur des déformations.

La loi de comportement élastique linéaire est de la forme:

$$\sigma = \mathcal{E} \varepsilon$$

En composantes:

$$\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh} \varepsilon_{ij} \quad (1.9)$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre.

Les composantes $\mathcal{E}_{ijkh}$ s'appellent coefficients d'élasticité, elles sont indépendantes du tenseur des déformations ε . Dans le cas homogène et isotrope (c'est-à-dire le cas où toutes les directions autour d'un point sont matériellement équivalentes) les coefficients $\mathcal{E}_{ijkh}$ sont des constantes et elles sont donnés par (voir [2] p 95):

$$\mathcal{E}_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \quad (1.10)$$

où les scalaires λ, μ sont les coefficients de Lamé; et δ_{ij} est le tenseur de Kronecker.

Dans la théorie d'élasticité linéaire, $\mathcal{E}$ est un tenseur symétrique et défini positif. C'est-à-dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \mathcal{E} \tau_1 \tau_2 = \tau_1 \mathcal{E} \tau_2 \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in S_N. \\ (ii) \exists c > 0 \text{ tel que: } \mathcal{E} \tau \tau \geq c |\tau|^2 \quad \forall \tau \in S_N. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

En général une loi de comportement élastique est de la forme:

$$\sigma = F(\varepsilon) \quad (1.12)$$

où F est une application linéaire ou non-linéaire. Mais malheureusement cette loi de comportement ne pas modéliser les phénomènes de fluage et de relaxation, d'où la nécessité d'introduire d'autres lois de comportement, par exemple les lois de comportement viscoplastiques et viscoélastiques.

Remarque 1.4 Dans le problème qu'on va étudier, nous allons considérer une loi de com-

portement élastique de la forme:

$$\sigma = F(\varepsilon, \theta).$$

où θ est un paramètre donné qui peut être la température, l'humidité ou tout autre effet qui peut influencer sur les propriétés mécaniques du matériau.

1.6 Conditions aux limites

A fin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un corps déformable donné par l'équation de mouvement (1.7) (ou l'équation d'équilibre (1.8)) et la loi de comportement, il faut encore préciser les conditions aux limites.

Les conditions aux limites étudiées dans ce travail sont les conditions aux limites de déplacement-traction et les conditions aux limites de contact sans frottement.

1.6.1 Conditions aux limites de déplacement-traction

Soit Ω un domaine de IR^N dont la frontière Γ , supposée suffisamment régulière est divisée en deux parties disjointes Γ_1 et Γ_2 , et soit ν le vecteur normale unitaire extérieur à Γ .

On considère les conditions aux limites suivantes:

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.13)$$

$$\sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (1.14)$$

La condition aux limites (1.13) est dite condition aux limites de déplacement; sa signification consiste en ce que le champ des déplacements u est imposé sur Γ_1 , la fonction g est donnée. La condition aux limite (1.14) est dite condition aux limites de traction; sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma \nu$ est imposé sur Γ_2 et la fonction h qui représente la densité des forces surfaciques est donnée aussi.

1.6.2 Conditions aux limites de contact sans frottement

On considère un corps élastique dont les particules matérielles occupent un domaine Ω de $\mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) et dont la frontière Γ , supposée suffisamment régulière est divisée en trois parties disjointes deux à deux : $\Gamma = \bigcup_{i=1}^3 \bar{\Gamma}_i$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \forall i \neq j$.

Sur les portions Γ_1 et Γ_2 , nous imposons les conditions aux limites de déplacement-traction (1.13) et (1.14); c'est-à-dire le champ des déplacements u est connu sur Γ_1 et le vecteur contrainte de Cauchy $\sigma\nu$ est connu sur Γ_2 .

Sur la partie Γ_3 , nous supposons que le corps déformable Ω est susceptible d'entrer en contact avec une base rigide S . Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de Γ_3 est restreint à cause de la présence du solide S de telle sorte qu'avant l'application des forces externes, la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à S dans la direction de la normale $\nu(x)$ est connue et notée par $s(x)$ (voir fig.1.2).

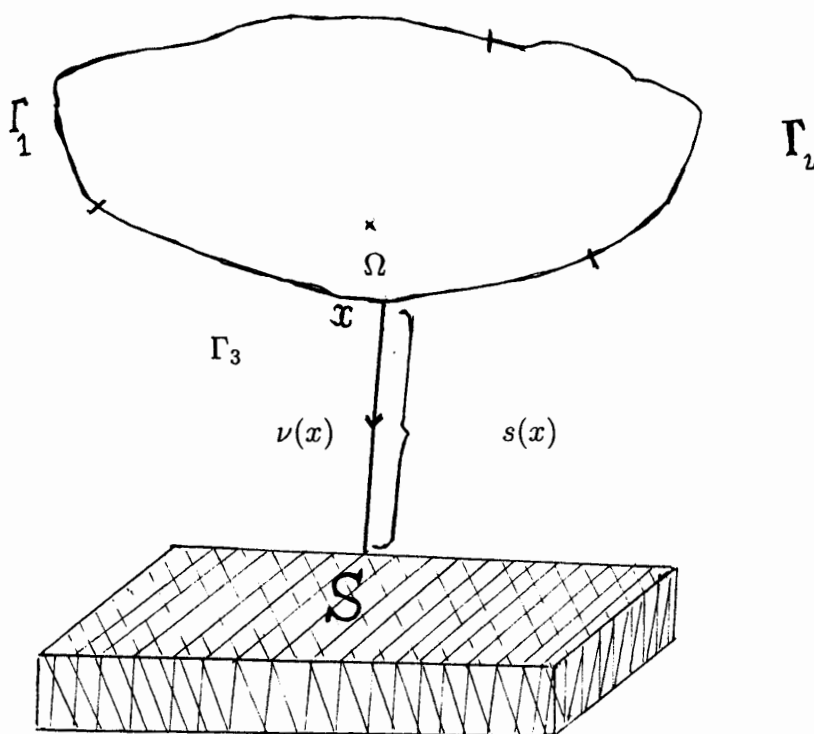


Fig.1.2. Contact d'un corps déformable avec une base rigide.

Soit $u_\nu = u \cdot \nu$ la composante du déplacement u dans la direction de ν . Nous supposons que le contact entre le corps déformable Ω et la base rigide S se produit sans frottement;

c'est-à-dire que les mouvements tangentiels sont libres.

Le contact entre le corps déformable et la base rigide a lieu si et seulement si: $u_\nu = s$. Puisque S est un solide rigide, alors le corps Ω ne peut pas pénétrer le solide rigide S . Par conséquent:

$$u_\nu \leq s \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.15)$$

Pour les points $x \in \Gamma_3$ telle que $u_\nu < s$, il n'existe pas de contact entre le corps Ω et la base rigide S ; donc le vecteur de contrainte de Cauchy $\sigma\nu$ s'annule et on a:

$$u_\nu < s, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.16)$$

où σ_τ est la composante tangentielle du vecteur $\sigma\nu$ et σ_ν la composante normale du vecteur $\sigma\nu$.

Pour les points $x \in \Gamma_3$ tel que $u_\nu = s$ (le contact entre Ω et S a lieu), dans ce cas la base S exerce une pression $-\sigma_\nu$ (principe de l'action et la réaction) dans la direction normale orientée vers Ω . Donc on a:

$$u_\nu = s, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.17)$$

D'une manière condensée, on peut résumer les conditions (1.16) et (1.17) comme suit:

$$u_\nu \leq s, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - s) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.18)$$

Les conditions aux limites (1.18) sont appelées les conditions de Signorini.

Chapitre 2

PROBLEME ELASTIQUE DE CONTACT SANS FROTTEMENT

Dans ce chapitre, on étudie un problème de contact sans frottement d'un corps déformable, sous l'action des forces volumiques et surfaciques, avec une base rigide. Ce problème connu sous le nom de “ problème de Signorini ”, a été étudié dans [6, 9, 12] pour des matériaux ayant une loi de comportement élastique linéaire et dans [8, 14, 15, 21, 22] pour des matériaux viscoplastiques et viscoélastiques.

Notre but ici est l'étude variationnelle du problème de Signorini pour des matériaux élastiques ayant une loi de comportement non linéaire de la forme:

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

Dans cette étude, on utilise les propriétés des opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Ce chapitre est structuré comme suit:

On modélise tout d'abord le problème mécanique, ensuite on donne deux formulations variationnelles (PV₁) et (PV₂) pour ce problème mécanique. Dans la première formulation variationnelle, la seule inconnue est le champ des déplacements u , tandis que dans la deuxième formulation variationnelle; la seule inconnue est le champ des contraintes σ .

Pour le problème variationnel (PV₁), nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité de la solution en utilisant un théorème d'existence et d'unicité sur les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce. Nous prouvons aussi un résultat d'existence et d'unicité

de la solution pour le problème variationnel (PV₂), en utilisant les mêmes arguments. De plus, nous étudions le lien qui existe entre ces deux solutions variationnelles, ainsi qu'un résultat de dépendance de la solution variationnelle par rapport au paramètre donné.

2.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses

Dans cette partie, on va formuler le problème de contact sans frottement entre un corps élastique et une base rigide, dans le cas statique.

On se donne un corps élastique occupant un domaine Ω de IR^N ($N = 1, 2, 3$) dont la frontière Γ , supposée suffisamment régulière, est dévisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telle que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$.

On suppose que le champ des déplacements u s'annule sur Γ_1 , que des tractions superficielles h s'appliquent sur Γ_2 et que des forces volumiques f agissent sur Ω . On suppose aussi que le corps élastique repose sur une fondation rigide par la partie Γ_3 de sa frontière et que ce contact se produit sans frottement.

On précise en outre que la loi de comportement du corps Ω est de la forme:

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

où F est une fonction non linéaire et θ est un paramètre donné.

Sous ces conditions, on peut formuler le problème mécanique de la manière suivante:

Problème (P): Trouver le champ des déplacements $u = (u_i) : \Omega \rightarrow IR^N$ et le champ des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij}) : \Omega \rightarrow S_N$ tels que:

$$\text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.3)$$

$$\sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (2.4)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.5)$$

Ce problème décrit l'équilibre d'un corps élastique qui occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et qui obéit à la loi de comportement (2.2), soumis à des conditions aux limites mixtes. En effet, (2.1) représente l'équation d'équilibre, où f sont les forces volumiques, (2.2) représente la loi de comportement, (2.3) et (2.4) représentent les conditions aux limites de déplacement-traction et finalement (2.5) représentent les conditions aux limites de contact sans frottement (conditions de Signorini).

Hypothèses:

Pour l'étude du problème (2.1)-(2.5), on suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

$$\left\{ \begin{array}{l} F : \Omega \times S_N \times \mathbb{R}^K \rightarrow S_N \text{ telle que:} \\ (a) \text{ Il existe } m > 0 \text{ tel que } (F(x, \varepsilon_1, \theta) - F(x, \varepsilon_2, \theta))(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2. \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^K. \\ (b) \text{ Il existe } L_1, L_2 > 0 \text{ telles que } |F(x, \varepsilon_1, \theta_1) - F(x, \varepsilon_2, \theta_2)| \leq \\ \quad \leq L_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + L_2 |\theta_1 - \theta_2| \text{ p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^K. \\ (c) F(x, 0_N, 0_K) = 0_N. \\ (d) \text{ La fonction } x \mapsto F(x, \varepsilon, \theta) \text{ est mesurable Lebesgue} \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in S_N, \forall \theta \in \mathbb{R}^K \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$f \in H \quad (2.7)$$

$$h \in L^2(\Gamma_2)^N \quad (2.8)$$

$$\theta \in L^2(\Omega)^k \quad (2.9)$$

Sous ces hypothèses, on a les remarques suivantes:

Remarque 2.1 L'hypothèse (2.6) nous permet de considérer l'opérateur $\tilde{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ défini par:

$$\tilde{F}(\varepsilon, \theta)(x) = F(x, \varepsilon(x), \theta(x)) \forall \varepsilon \in \mathcal{H}, p.p. x \in \Omega.$$

En effet, si $\varepsilon \in \mathcal{H}$ en utilisant les hypothèses (2.6), il résulte que:

$$\int_{\Omega} |\tilde{F}(\varepsilon, \theta)(x)|_{\mathcal{H}}^2 dx = \int_{\Omega} |F(x, \varepsilon(x), \theta)|_{\mathcal{H}}^2 dx \leq \int_{\Omega} (L_1 |\varepsilon|_{\mathcal{H}} + L_2 |\theta|_{L^2(\Omega)^k})^2 dx < +\infty.$$

Donc, $\tilde{F}(\varepsilon, \theta) \in \mathcal{H}$. Par simplicité, dans la suite on va utiliser la notation F au lieu de $\tilde{F}$. On remarque également que d'après les hypothèses (2.6), l'opérateur $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz par rapport à ε et θ ; c'est-à-dire:

$$\langle F(\varepsilon_1, \theta) - F(\varepsilon_2, \theta), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle_{\mathcal{H}} \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}}^2 \quad (2.10)$$

$$|F(\varepsilon_1, \theta_1) - F(\varepsilon_2, \theta_2)|_{\mathcal{H}} \leq L_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}} + L_2 |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^k} \quad (2.11)$$

Donc, il résulte que F est inversible et son inverse F^{-1} est aussi un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

Remarque 2.2 Les hypothèses (2.7) et (2.8) sont des hypothèses de régularité sur les données f et h ; ce sont des hypothèses nécessaires pour que le problème mécanique (2.1)-(2.5) ait une solution ayant la régularité: $u \in H_1$ et $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Maintenant on définit le sous-espace fermé V de H_1 par:

$$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (2.12)$$

où $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^N$ est l'application de trace vérifiant l'égalité:

$$\gamma u = u_\Gamma \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N.$$

On munit l'espace V du produit scalaire suivant:

$$\langle u, v \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (2.13)$$

et la norme associée à ce produit scalaire sera notée par $|\cdot|_V$. Puisque les normes $|\cdot|_V$ et $|\cdot|_{H_1}$ sont équivalentes sur V (grâce à l'inégalité de Korn); on déduit alors que V muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

Soit l'application:

$$v \mapsto \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V.$$

Des inégalités:

$$|v|_H \leq |v|_{H_1}, \quad |\gamma v|_{L^2(\Omega)^N} \leq |v|_{H_1} \quad \forall v \in H_1.$$

on déduit que cette application est une forme linéaire et continue sur V ; alors le théorème de Riesz-Fréchet entraîne l'existence d'un élément unique $L \in V$ tel que:

$$\langle L, v \rangle_V = \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V \quad (2.14)$$

On définit respectivement l'ensemble des "déplacements admissible" U_{ad} et l'ensemble des "contraintes admissible" Σ_{ad} par:

$$U_{ad} = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (2.15)$$

$$\Sigma_{ad} = \{\tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}\} \quad (2.16)$$

2.1.1 Formulations variationnelles

Dans ce qui suit, on va donner deux formulations variationnelles (PV_1) et (PV_2) au problème mécanique(P). Dans la première formulation (PV_1), la seule inconnue est le champ des déplacements u , tandis que dans la deuxième formulation (PV_2), la seule inconnue est le champ des contraintes σ .

Lemme 2.1 *Supposons que les hypothèses (2.6)-(2.8) sont satisfaites. Si le problème (2.1)-(2.5) possède une solution régulière (u, σ) , alors:*

$$u \in U_{ad}, \quad \langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.17)$$

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle \varepsilon(u), \tau - \sigma \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (2.18)$$

Preuve.

Placons-nous dans les hypothèses du lemme précédent. L'appartenance de u à U_{ad} résulte de (2.3), (2.5) et (2.15).

Soit maintenant $v \in U_{ad}$. En utilisant (5.46) (voir Annexe), il vient:

$$\begin{aligned} \langle \gamma_\nu \sigma, \gamma v - \gamma u \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} &= \int_{\Gamma} \sigma \nu (v - u) ds = \\ &= \int_{\Gamma_1} \sigma \nu (v - u) ds + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu (v - u) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu (v - u) ds \end{aligned}$$

D'après (2.3), (2.15) et (2.4) il résulte que $v - u = 0$ sur Γ_1 et $\sigma \nu = h$ sur Γ_2 .

Par conséquent on a:

$$\langle \gamma_\nu \sigma, \gamma v - \gamma u \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_{\Gamma_2} h(v - u) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu (v - u) ds. \quad (2.19)$$

Soient (u_ν, u_τ) , (v_ν, v_τ) et $(\sigma_\nu, \sigma_\tau)$ les composantes des vecteurs u , v et $\sigma \nu$ dans le système orthonormé (ν, τ) . En utilisant (2.5) et (2.15), il résulte:

$$\sigma \nu (v - u) = \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau (v_\tau - u_\tau) = \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) = \sigma_\nu v_\nu \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Par conséquent, (2.19) devient:

$$\langle \gamma_\nu \sigma, \gamma v - \gamma u \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} \geq \int_{\Gamma_2} h(v - u) ds \quad (2.20)$$

En utilisant maintenant (2.1) et (5.47) (voir Annexe), il resulte:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \gamma_\nu \sigma, \gamma v - \gamma u \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} + \langle f, v - u \rangle_H$$

D'où par (2.20) il vient:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle f, v - u \rangle_H + \langle h, \gamma v - \gamma u \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad (2.21)$$

L'inégalité (2.17) résulte maintenant de (2.14) et (2.21).

En prenant $v = 2u \in U_{ad}$, puis $v = 0 \in U_{ad}$ dans (2.17) on obtient:

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L, u \rangle_V \quad (2.22)$$

Soit $\tau \in \Sigma_{ad}$. Par définition on a:

$$\langle \tau, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, u \rangle_V \quad (2.23)$$

De (2.22) et (2.23) il résulte:

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \quad (2.24)$$

En outre, d'après (2.22) on a:

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L, u \rangle_V$$

et d'après (2.17), on a:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u \rangle_V$$

Par addition on obtient:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

C'est-à-dire:

$$\sigma \in \Sigma_{ad} \tag{2.25}$$

L'inégalité (2.18) résulte maintenant de (2.24) et (2.25). ■

Remarque 2.3 *Compte tenu du lemme précédent et de la loi de comportement (2.2), nous sommes conduits à étudier les deux formulations variationnelles suivantes pour le problème mécanique (P).*

Problème (PV₁): Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow H_1$ tel que:

$$u \in U_{ad}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \tag{2.26}$$

Problème (PV₂): Trouver le champ des contraintes $\sigma : \Omega \rightarrow \mathcal{H}_1$ tel que:

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \tag{2.27}$$

2.2 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie, on donne deux résultats d'existence et d'unicité correspondants aux problèmes variationnelles (PV₁) et (PV₂).

Théorème 2.1 *Supposons que les hypothèses (2.6)-(2.8) sont satisfaites et que mes $\Gamma_1 > 0$. Alors le problème (PV₁) admet une solution unique $u \in H_1$.*

Preuve.

Pour tout $w \in V$ fixé et pour tout $\theta \in L^2(\mathbf{N})^k$ fixé, l'application $v \mapsto \langle F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$ est une forme linéaire et continue sur l'espace V . Par conséquent, le théorème de Riesz-Fréchet

entraîne l'existence d'un élément unique $Aw \in V$ tel que:

$$\langle Aw, v \rangle_V = \langle F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall w, v \in V \quad (2.28)$$

En utilisant (2.10) on obtient:

$$\langle Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2 \rangle_V \geq m \|\varepsilon(w_1) - \varepsilon(w_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall w_1, w_2 \in V$$

D'après l'inégalité de Korn il vient:

$$\langle Aw_1 - Aw_2, w_1 - w_2 \rangle_V \geq C \|w_1 - w_2\|_V^2 \quad \forall w_1, w_2 \in V \quad (2.29)$$

C'est-à-dire l'opérateur A est fortement monotone.

De même, pour tout w_1, w_2 et $v \in V$, d'après (2.28) et (2.11) on a:

$$\begin{aligned} |\langle Aw_1 - Aw_2, v \rangle_V| &\leq |\langle F(\varepsilon(w_1), \theta) - F(\varepsilon(w_2), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|F(\varepsilon(w_1), \theta) - F(\varepsilon(w_2), \theta)\|_{\mathcal{H}} \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq L \|w_1 - w_2\|_V \|v\|_V \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Donc:

$$\|Aw_1 - Aw_2\|_V \leq L \|w_1 - w_2\|_V \quad \forall w_1, w_2 \in V \quad (2.30)$$

C'est-à-dire l'opérateur A est de Lipschitz.

En plus, $0 \in U_{ad}$, donc l'ensemble U_{ad} est non vide.

Il est facile de voir aussi que U_{ad} est un ensemble convexe fermé de H_1 .

Maintenant le théorème (4.3) (voir Annexe) sur les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce entraîne l'existence d'un élément unique $u \in V$ tel que:

$$u \in U_{ad}, \quad \langle Au, v - u \rangle_V \geq \langle L, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.31)$$

C'est-à-dire:

$$u \in U_{ad}, \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

■

Théorème 2.2 *Supposons que les hypothèses (2.6)-(2.8) sont satisfaites et que mes $\Gamma_1 > 0$. Alors le problème (PV_2) admet une solution unique $\sigma \in \mathcal{H}_1$.*

Preuve.

L'application $v \mapsto \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V$, est une forme linéaire et continue sur V , donc il résulte grâce au théorème de Riesz-Fréchet l'existence d'un élément unique $L \in V$ tel que:

$$\langle L, v \rangle_V = \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V$$

Comme:

$$\langle \varepsilon(L), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L, v \rangle_V \quad \forall L, v \in V$$

Alors, $\varepsilon(L) \in \Sigma_{ad}$; donc $\Sigma_{ad} \neq \emptyset$.

Il est facile de voir que Σ_{ad} est un ensemble convexe fermé de $\mathcal{H}$.

En outre, l'opérateur $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est fortement monotone et de Lipschitz. Donc son inverse F^{-1} est également fortement monotone et de Lipschitz.

Alors, le théorème (4.3) (voir Annexe) sur les inéquations variationnelles elliptiques de première espèce entraîne l'existence d'un élément unique $\sigma \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

Reste à montrer $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Nous avons déjà $\sigma \in \Sigma_{ad} \subset \mathcal{H}$ et:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

En posant $v = \pm\varphi$ et $\varphi \in D(\Omega)^N$ dans cette dernière inégalité et en utilisant (2.14), il résulte que:

$$\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L, \varphi \rangle_V = \langle f, \varphi \rangle_H + \langle h, \gamma\varphi \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}$$

C'est-à-dire:

$$\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, \varphi \rangle_H \quad \forall \varphi \in D(\Omega)^N \quad (2.32)$$

D'où $\text{Div} \sigma = -f \in H$. Puisque $\sigma \in \mathcal{H}$, il résulte $\sigma \in \mathcal{H}_1$; ce qui achève la démonstration. ■

2.3 Equivalence des deux formulations variationnelles

On va commencer cette section par un résultat faisant le lien entre les solutions respectives des problèmes variationnelles (PV_1) et (PV_2) . On a le résultat suivant:

Théorème 2.3 *Supposons que les hypothèses (2.6)-(2.8) sont satisfaites et soit (u, σ) une couple de fonctions telles que $u \in V$ et $\sigma \in \mathcal{H}_1$. Alors, la vérification de deux parmi les trois assertions suivantes entraîne la troisième.*

- (1) *u est la solution du problème (PV_1) obtenue dans le théorème (2.1).*
- (2) *σ est la solution du problème (PV_2) obtenue dans le théorème (2.2).*
- (3) *u et σ sont liées par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$.*

Preuve.

(i) (1)+(3) $\Rightarrow$ (2).

Soit u la solution du problème (PV_1) et u, σ vérifient:

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta).$$

En utilisant (2.26) et la loi de comportement (2.2), on déduit:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.33)$$

En prenant $v = 2u$ et $v = 0$ dans l'inégalité (2.33), il résulte:

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L, u \rangle_V \quad \forall u \in U_{ad} \quad (2.34)$$

Moyennant maintenant (2.33), (2.34) et (2.16), il s'ensuit:

$$\sigma \in \Sigma_{ad} \quad (2.35)$$

Soit $\tau \in \Sigma_{ad}$. Par définition on a:

$$\langle \tau, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, u \rangle_V \quad (2.36)$$

De (2.34) et (2.36) il résulte:

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}$$

Il vient:

$$\langle \tau - \sigma, F^{-1}(\sigma, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \quad (2.37)$$

De (2.35) et (2.37), on déduit que σ est la solution du problème (PV₂).

(ii) **(2)+(3)⇒(1).**

Soit σ la solution du problème (PV₂) et u, σ vérifient:

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta).$$

Nous introduisons les notations suivantes:

$$\Sigma_0 = \{ \tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad} \} \quad (2.38)$$

$$\tilde{\sigma} = \varepsilon(L) \quad (2.39)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - \tilde{\sigma} \quad (2.40)$$

On remarque alors que $\sigma \in \Sigma_{ad} \Leftrightarrow \bar{\sigma} \in \Sigma_0$. C'est-à-dire:

$$\Sigma_{ad} = \tilde{\sigma} + \Sigma_0 \quad (2.41)$$

Montrons maintenant que u est la solution du problème (PV_1) . Prouvons tout d'abord que $u \in U_{ad}$. Pour cela, supposons que $u \notin U_{ad}$ et notons par Pu la projection de u sur le convexe fermé U_{ad} . On obtient:

$$\langle Pu - u, v \rangle_V \geq \langle Pu - u, Pu \rangle_V > \langle Pu - u, u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

Alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\langle Pu - u, v \rangle_V > \alpha > \langle Pu - u, u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.42)$$

Soit $\tilde{\tau}$ l'élément donné par:

$$\tilde{\tau} = \varepsilon(Pu - u) \in \mathcal{H} \quad (2.43)$$

Moyennant (2.42), (2.43) et le produit scalaire (2.13); on obtient:

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha > \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.44)$$

En posant $v = 0$ dans l'inégalité précédente, on a:

$$\alpha < 0.$$

Supposons à présent qu'il existe $w \in U_{ad}$, tel que:

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} < 0 \quad (2.45)$$

Sachant que $\lambda w \in U_{ad}$ pour tout $\lambda \geq 0$, il vient d'après (2.44) que:

$$\lambda \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha \quad \forall \lambda \geq 0$$

En passant à la limite lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$. On obtient $\alpha \leq -\infty$. Ceci constitue une contradiction avec le fait que $\alpha \in \mathbb{R}$. ainsi, on conclut donc que:

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall w \in U_{ad}$$

Ce qui signifie moyennant (2.38), que $\tilde{\tau} \in \Sigma_0$.

En utilisant (2.41), on déduit:

$$\tilde{\tau} + \tilde{\sigma} \in \Sigma_{ad}.$$

où $\tilde{\sigma}$ est donnée par (2.39).

Comme σ est solution du problème (PV₂), on a:

$$\langle \varepsilon(u), \tau - \sigma \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \quad (2.46)$$

En appliquant (2.46) pour $\tau = \tilde{\tau} + \tilde{\sigma} \in \Sigma_{ad}$, on obtient:

$$\langle \varepsilon(u), \tilde{\tau} \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle \varepsilon(u), \sigma - \tilde{\sigma} \rangle_{\mathcal{H}}$$

Ce qui entraînent d'après (2.44) et (2.45) que:

$$\langle \varepsilon(u), \sigma - \tilde{\sigma} \rangle_{\mathcal{H}} < 0 \quad (2.47)$$

D'autre part, on a $\sigma - \tilde{\sigma} \in \Sigma_0$. Donc par définition, on a:

$$\langle \varepsilon(u), \sigma - \tilde{\sigma} \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad (2.48)$$

Les inéquations (2.47) et (2.48) sont en contradiction. Ainsi, il s'ensuit que:

$$u \in U_{ad} \quad (2.49)$$

En tenant compte maintenant des définitions (2.13) et (2.39), il vient:

$$\langle \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.50)$$

Ce qui implique $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{ad}$.

En posant $\tau = \tilde{\sigma}$ dans (2.27), il vient:

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle L, v \rangle_V \quad (2.51)$$

Sachant d'autre part que $\sigma \in \Sigma_{ad}$ et $u \in U_{ad}$, on obtient aussi:

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v \rangle_V \quad (2.52)$$

On conclut alors à partir de (2.51) et (2.52) à l'égalité:

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.53)$$

De plus sachant que $\sigma \in \Sigma_{ad}$, il résulte de:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.54)$$

De (2.53) et (2.54) on déduit:

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.55)$$

(2.55) et (2.49) entraînent que u est solution du problème (PV₁).

(iii) **(1)+(2) $\Rightarrow$ (3).**

Soit u la solution du problème (PV_1) et σ la solution du problème (PV_2) . On pose:

$$\tilde{\sigma} = F(\varepsilon(u), \theta) \in \mathcal{H}$$

D'après l'étape (i), $\tilde{\sigma}$ est solution du problème (PV_2) ; mais d'après l'unicité de la solution du problème (PV_2) , il résulte $\sigma = \tilde{\sigma}$. D'où:

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \in \mathcal{H}$$

■

Remarque 2.4 *Les interprétations mécaniques du théorème précédent sont les suivantes:*

- 1) *Si le champ des déplacements u est la solution du problème (PV_1) , alors il existe un champ des contraintes σ lié à u par la loi de comportement $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$, et de plus σ est la solution du problème (PV_2) .*
- 2) *Si le champ des contraintes σ est la solution du problème (PV_2) , alors il existe un champ des déplacements u lié à σ par la loi de comportement $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$, et de plus u est la solution du problème (PV_1) .*
- 3) *Si le champ des déplacements u est la solution du problème (PV_1) et si le champ des contraintes σ est la solution du problème (PV_2) , alors u et σ sont liés par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$.*

2.4 Dépendance de la solution par rapport au paramètre donné

Dans ce qui suit, on va étudier la dépendance de la solution du problème mécanique (P) par rapport au paramètre donné θ .

Théorème 2.4 *Sous les hypothèses (2.6)-(2.9), soit (u_i, σ_i) la solution variationnelle du problème mécanique (P), associée au paramètre θ_i ($i = 1, 2$). Alors, il existe une constante*

positive C qui dépend de Ω , Γ_1 et F telle que:

$$|u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\gamma_{\Gamma_1}} \leq C |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^k}$$

Preuve.

Soient (u_i, σ_i) solution faible du problème mécanique (P) associée au paramètre $\theta_i \in L^2(\mathfrak{N})^k$.

Alors, on a:

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta_1), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u_1 \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.56)$$

$$\langle F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u_2 \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.57)$$

En posant maintenant $v = u_2$ dans (2.56) puis $v = u_1$ dans (2.57), il vient:

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

Donc:

$$\begin{cases} \langle F(\varepsilon(u_1), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_1), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ \langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \end{cases}$$

De l'inégalité précédente, il résulte:

$$\begin{cases} |\langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - F(\varepsilon(u_1), \theta_1), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \\ \leq |\langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}}| \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothèse (2.6) dans le membre droit de cette dernière inégalité puis l'hypothèse (2.6) et l'inégalité de Korn dans son membre gauche, on obtient:

$$cm |u_1 - u_2|_{H_1} \leq L_2 |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^k}$$

C'est-à-dire:

$$|u_1 - u_2|_{H_1} \leq C |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^k} \quad (2.58)$$

D'autre part, on a:

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} = |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} = |F(\varepsilon(u_1), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2)|_{\mathcal{H}}$$

En utilisant l'hypothèse (2.6) et l'inégalité (2.58), il vient:

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq C |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^k} \quad (2.59)$$

L'inégalité cherchée résulte maintenant de (2.58) et (2.59). ■

Remarque 2.5 *Le théorème précédent montre que des petites perturbations dans le paramètre θ n'entraînent que des petites perturbations dans la solution (u, σ) du problème mécanique (P).*

Application (Cas unidimensionnel):

Soit une barre métallique de longueur $L = 1$, fixée en $x = 0$ et soumise à son poids et susceptible de contacter le sole (S).

Nous supposons que la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à (S) est connue et notée par $s(x)$.

On pose $\Omega = [0, 1]; \Gamma_1 = \{0\}; \Gamma_2 = \Phi; \Gamma_3 = \{1\}$ (voir fig.2.1).

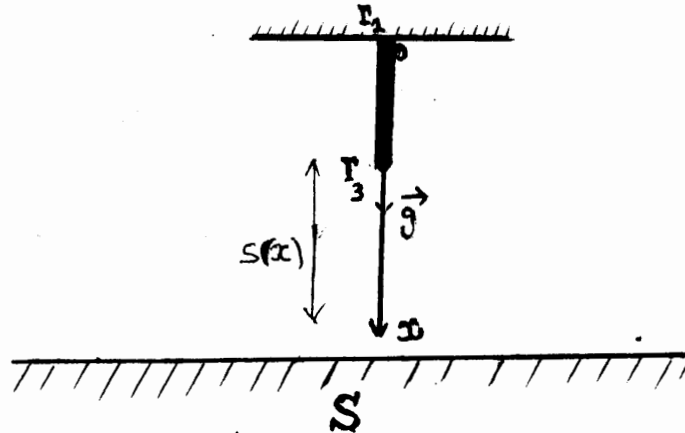


Fig.2.1. contact d'une barre métallique avec le sole.

Formulation du problème: Trouver le champ des déplacements $u :]0, 1[\rightarrow IR$ et le champ des contraintes $\sigma :]0, 1[\rightarrow IR$ tels que:

$$\frac{d\sigma}{dx} + g = 0 \quad \text{dans }]0, 1[\quad (2.60)$$

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) = E\varepsilon(u) + f(\theta) \quad \text{dans }]0, 1[\quad (2.61)$$

$$u(0, \theta) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.62)$$

$$u(1, \theta) \leq s, \quad \sigma(1, \theta) \leq 0, \quad \sigma(1, \theta)(u(1, \theta) - s) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.63)$$

où E est le module de young, θ est la température, g est l'accélération de la force de gravité et $f : IR \rightarrow IR$ est définie par: $f(\theta) = k(\theta - \theta_0)$.

Solution:

De (2.60), il vient:

$$\sigma(x, \theta) = -gx + \alpha \quad (2.64)$$

D'autre part:

$$\sigma(x, \theta) = E\varepsilon(u) + f(\theta) = E\frac{du}{dx} + f(\theta) \quad (2.65)$$

De (2.64) et (2.65), il vient:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{g}{E}x + \frac{1}{E}(\alpha - f(\theta))$$

Donc:

$$u(x, \theta) = -\frac{1}{2E}gx^2 + \frac{1}{E}(\alpha - f(\theta))x + \beta$$

Comme $0 = u(0, \theta) = \beta$, on obtient:

$$u(x, \theta) = -\frac{1}{2E}gx^2 + \frac{1}{E}(\alpha - f(\theta))x \quad (2.66)$$

De plus, en utilisant la relation (2.63), on aboutit à:

$$u(1, \theta) \leq s \Leftrightarrow -\frac{1}{2E}g + \frac{1}{E}(\alpha - f(\theta)) \leq s.$$

$$\sigma(1, \theta) \leq 0 \Leftrightarrow -g + \alpha \leq 0.$$

$$\sigma(1, \theta)(u(1, \theta) - s) = 0 \Leftrightarrow (-g + \alpha)\left(-\frac{1}{2E}g + \frac{1}{E}(\alpha - f(\theta)) - s\right) = 0. \quad (2.67)$$

La relation (2.67) entraîne que:

$$(\alpha = g) \text{ ou } \left(\alpha = \frac{g}{2} + Es + f(\theta)\right).$$

i) Si $\alpha = g$, les relations (2.64) et (2.66) deviennent:

$$\begin{cases} u(x, \theta) = -\frac{1}{2E}gx^2 + \frac{1}{E}(g - f(\theta))x \\ \sigma(x, \theta) = -gx + g \end{cases} \quad (2.68)$$

Dans ce cas: $u(1, \theta) \leq s$ et $\sigma(1, \theta) = 0$; c'est-à-dire:

$$s \geq \frac{1}{2E}(g - 2f(\theta)).$$

ii) Si $\alpha = \frac{g}{2} + Es + f(\theta)$, les relations (2.64) et (2.66) deviennent:

$$\begin{cases} u(x, \theta) = -\frac{1}{2}gx^2 + \frac{1}{E}(\frac{g}{2} + Es)x \\ \sigma(x, \theta) = -gx + \frac{g}{2} + Es + f(\theta) \end{cases} \quad (2.69)$$

Dans ce cas: $\sigma(1, \theta) \leq 0$ et $u(1, \theta) = s$; c'est-à-dire:

$$s \leq \frac{1}{2E}(g - 2f(\theta))$$

Si $s = \frac{1}{2E}(g - 2f(\theta))$, alors les deux solutions (2.68) et (2.69) coïncident.

Remarque 2.6 Pour $\alpha = g$, la barre métallique est libre; et pour $\alpha = \frac{g}{2} + Es + f(\theta)$, la barre métallique est en contact avec le sole.

Chapitre 3

Approximation numérique du problème de contact sans frottement

Dans ce chapitre, on propose une méthode d'approximation numérique de la solution variationnelle du problème (PV_1) , étudié dans le deuxième chapitre.

3.1 Approximation numérique du problème

Dans cette section, nous présentons un schéma d'approximation du problème variationnelle (PV_1) . Nous supposons que les hypothèses (2.6)-(2.9) sont vérifiées et que V^h et $\mathcal{H}^h$ sont respectivement deux sous-espaces de dimensions finies de V et $\mathcal{H}$, où $h > 0$ est un paramètre de discrétisation. On note aussi par $U_{ad}^h \subset V^h$, un sous-espace de dimension finie de l'espace des déplacements admissibles U_{ad} . Nous supposons que $\varepsilon(V^h) \subset \mathcal{H}^h$.

Un schéma de discrétisation du problème variationnelle (PV_1) est donné par le problème suivant:

Problème (PV_1^h) : trouver u^h tel que:

$$u^h \in U_{ad}^h, \langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u^h) \rangle_{\mathcal{H}^h} \geq \langle L, v^h - u^h \rangle_{V^h} \quad \forall v^h \in U_{ad}^h \quad (3.1)$$

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (2.6)-(2.8), le problème approché (PV_1^h) admet une solution unique $u^h \in H_1$.*

Preuve.

Ce résultat peut s'obtenir par une application directe du théorème (2.1), puisque V^h est un

sous-espace de dimension finie de l'espace de Hilbert V .

Notre but maintenant est de trouver les estimations aux erreurs $|u - u^h|_{H_1}$, $|\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}$.

On a le résultat suivant: ■

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses (2.6)-(2.8), il existe une constante $C > 0$ indépendante du sous-espace V^h telle que:*

$$|u - u^h|_V^2 + |\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \inf_{v^h \in V^h} (|u - v^h|_V^2 + |u - v^h|_V).$$

Preuve.

On rappelle que pour tout $v \in U_{ad}$, on a:

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

Donc, pour $v = u^h$ on aura:

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(u^h) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, u^h - u \rangle_V$$

qu'on peut écrire sous la forme:

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(u) - \varepsilon(u^h) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle L, u - u^h \rangle_V \quad (3.2)$$

De l'inéquation (3.1), on a:

$$\langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u^h) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v^h - u^h \rangle_V$$

Donc:

$$\begin{aligned} \langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u^h) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ &+ \langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(u) - \varepsilon(u^h) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle L, v^h - u^h \rangle_V. \end{aligned}$$

D'où:

$$\langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(u) - \varepsilon(u^h) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(v^h) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle L, u^h - v^h \rangle_V \quad (3.3)$$

Moyennant (3.2) et (3.3), on obtient:

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta) - F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(u) - \varepsilon(u^h) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle F(\varepsilon(u^h), \theta), \varepsilon(u^h) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle L, u - u^h \rangle_V.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que $|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \leq |v|_V$ dans le membre droite de cette dernière inégalité, puis le fait que F est un opérateur fortement monotone et en utilisant l'inégalité de Korn dans son membre gauche, on obtient:

$$M |u - u^h|_V^2 \leq |F(\varepsilon(u^h), \theta)|_{\mathcal{H}} |v^h - u|_V + |L|_V |v^h - u|_V \quad (3.4)$$

De plus, on a:

$$\begin{aligned} |F(\varepsilon(u^h), \theta)|_{\mathcal{H}} &\leq |F(\varepsilon(u^h), \theta) - F(\varepsilon(u), \theta)|_{\mathcal{H}} + |F(\varepsilon(u), \theta)|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq L_1 |\varepsilon(u^h) - \varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} + |F(\varepsilon(u), \theta)|_{\mathcal{H}} \leq L_1 |u^h - u|_V + |F(\varepsilon(u), \theta)|_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

(3.4) et (3.5) entraînent que:

$$M |u - u^h|_V^2 \leq L_1 |u^h - u|_V |v^h - u|_V + |L|_V |v^h - u|_V + |F(\varepsilon(u), \theta)|_{\mathcal{H}} |v^h - u|_V$$

En utilisant le fait que:

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}$$

On aboutit à:

$$M |u - u^h|_V^2 \leq \frac{1}{2} L_1 (|u^h - u|_V^2 + |v^h - u|_V^2) + C_1 |v^h - u|_V$$

Où $C_1 = |L|_V + |F(\varepsilon(u), \theta)|_{\mathcal{H}}$

Supposons que $(M - \frac{1}{2} L_1) > 0$, donc:

$$|u - u^h|_V^2 \leq C(|v^h - u|_V^2 + |v^h - u|_V) \quad \forall v^h \in V^h.$$

Alors:

$$|u - u^h|_V^2 \leq C \inf_{v^h \in V^h} (|v^h - u|_V^2 + |v^h - u|_V) \quad (3.6)$$

D'autre part, on a:

$$\sigma^h = F(\varepsilon(u^h), \theta) \text{ et } \sigma = F(\varepsilon(u), \theta).$$

Alors:

$$|\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}^2 = |F(\varepsilon(u), \theta) - F(\varepsilon(u^h), \theta)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_2 |\varepsilon(u) - \varepsilon(u^h)|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_2 |u - u^h|_V^2$$

En utilisant (3.6), il résulte:

$$|\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \inf_{v^h \in V^h} (|v^h - u|_V^2 + |v^h - u|_V) \quad (3.7)$$

De (3.6) et (3.7), il vient:

$$|u - u^h|_V^2 + |\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \inf_{v^h \in V^h} (|v^h - u|_V^2 + |v^h - u|_V) \quad (3.8)$$

■

Remarque 3.1 : *Le théorème précédent montre que le problème de l valuation de l'erreur $|u - u^h|_V^2 + |\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}^2$ se ramène à un problème dévaluation de la quantité $\inf_{v^h \in V^h} (|v^h - u|_V^2 + |v^h - u|_V)$.*

3.2 Analyse de la convergence

Dans cette section, on analyse la convergence du problème approché (PV₁^h) vers le problème (PV₁).

Pour cela, on introduit l'hypothèse suivante:

Hypothèse (HP₁):

Il existe un sous-espace $V_0 \subset V$ dense dans V et une fonction $\alpha(h) \geq 0$ tels que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$$

et

$$\inf_{v^h \in V^h} |v - v^h|_V \leq \alpha(h) |v|_{V_0} \quad \forall v \in V.$$

Maintenant on peut étudier la convergence du problème (PV_1^h) vers le problème (PV_1) .

Théorème 3.3 *Soient u (respectivement σ) la solution du problème (PV_1) , (respectivement (PV_2)) et u^h (respectivement σ^h) la solution du problème (PV_1^h) , (respectivement (PV_2^h)) correspondant à la discrétisation du problème (PV_1) . Alors, sous l'hypothèse (HP_1) , on a le résultat suivant:*

$$|u - u^h|_V^2 + |\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}^2 \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0. \quad (3.9)$$

Preuve.

Comme V_0 est dense dans V , donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $\bar{u}$ de V_0 tel que:

$$|u - \bar{u}|_V \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

De plus, on a:

$$|v^h - u|_V \leq |v^h - \bar{u}|_V + |\bar{u} - u|_V$$

Donc:

$$\inf_{v^h \in V^h} |v^h - u|_V \leq |\bar{u} - u|_V + \inf_{v^h \in V^h} |v^h - \bar{u}|_V \quad (3.11)$$

De (3.10), (3.11) et l'hypothèse (HP_1) , il résulte:

$$\inf_{v^h \in V^h} |v^h - u|_V \leq \varepsilon + \alpha(h) |\bar{u}|_{V_0} \quad (3.12)$$

En passant à la limite, quand h tend vers 0, on obtient:

$$\inf_{v^h \in V^h} |v^h - u|_V \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Le théorème (3.2) et la relation (3.13) entraînent que:

$$|u - u^h|_V^2 + |\sigma - \sigma^h|_{\mathcal{H}}^2 \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

■

ANNEXE

Dans cette partie, on va rappeler quelques résultats fréquemment utilisés dans notre travail. Elle est divisée en deux sections. La première est consacrée aux éléments d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert qui sont utilisés dans l'étude des problèmes élastiques. On y présente ici des résultats sur les opérateurs fortement monotones et les inéquations variationnelles elliptiques. La deuxième section est consacrée aux espaces fonctionnels. On introduit ici des espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence et on présente leurs principales propriétés, notamment le théorème de trace. Pour plus de détails sur cette partie, on peut lire [4, 5, 14, 19, 20, 22].

4.1 Eléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

4.1.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soient H un espace vectoriel réel et $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ un produit scalaire sur H . On note par $|\cdot|_H$ l'application de H dans $\mathbb{R}_+$ définie par:

$$|u|_H = \langle u, u \rangle_H^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

et on rappelle que $|\cdot|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle u, v \rangle_H| \leq |u|_H |v|_H \quad \forall u, v \in H.$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (4.1).

Dans la suite, on va supposer que H est un espace de Hilbert.

Soit H' le dual de H , c'est -à-dire l'espace des formes linéaires et continues sur H muni de la norme:

$$|\varphi|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0_H}} \frac{|\langle \varphi, v \rangle_{H' \times H}|}{|v|_H}$$

Où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 4.1 (théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Pour tout $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que:

$$\langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H$$

De plus on a:

$$|\varphi|_{H'} = |f|_H.$$

Théorème 4.2 Soit $K \subset H$ un convexe fermé, non vide. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in K$ unique tel que:

$$|f - u|_H = \min_{v \in K} |f - v|_H \quad (4.2)$$

De plus, u est caractérisé par la propriété:

$$u \in K, \langle u, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K \quad (4.3)$$

Le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u défini par (4.2) ou (4.3).

On note $u = P_K f$, où $P_K : H \rightarrow K$ s'appelle l'opérateur de projection sur K .

Remarque 4.1 Soit $K \subset H$ un convexe fermé, non vide et P_K l'opérateur de projection sur K . Alors on a:

$$|P_K f_1 - P_K f_2|_H \leq |f_1 - f_2|_H \quad \forall f_1, f_2 \in H \quad (4.4)$$

4.1.2 Opérateur fortement monotone et inéquation variationnelle

Dans cette section, nous étudions quelques propriétés d'un opérateur fortement monotone et de Lipschitz dans un espace de Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert et $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire.

L'opérateur A est dit:

i) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que:

$$\langle Au - Av, v - u \rangle_H \geq m |u - v|_H^2 \quad \forall u, v \in H. \quad (4.5)$$

ii) de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que:

$$|Au - Av|_H \leq M |u - v|_H \quad \forall u, v \in H. \quad (4.6)$$

Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire, $f \in H$ et K une partie non-vide de H .

Un nombre considérable de problèmes aux limites ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un lien avec le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \text{ tel que:} \\ u \in K, \quad \langle Au, v \rangle_H \geq \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in K \end{cases} \quad (4.7)$$

Le problème (4.7) est appelé "inéquation variationnelle elliptique de première espèce".

Lemme 4.1 Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors A est inversible et son inverse A^{-1} est également fortement monotone et de Lipschitz.

Thorme 4.3 Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $K \subset H$ un convexe fermé non vide. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de première espèce

espèce admet une solution unique.

Le théorème précédent représente un résultat d'existence et d'unicité de la solution pour le problème (4.7).

4.2 Les espaces fonctionnels

4.2.1 Les espaces de distributions

Soit Ω un ouvert de IR^N . On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions réelles sur Ω qui sont indéfiniment dérivables et dont le support est compact et inclus dans Ω et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .

Nous introduisons également les espaces suivants:

$$D = \{ \varphi = (\varphi_i) / \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), i = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}(\Omega)^N.$$

$$\mathcal{D} = \{ \Phi = (\Phi_{ij}) / \Phi_{ij} = \Phi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega), i, j = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}(\Omega)_S^{N \times N}.$$

$$D' = \{ u = (u_i) / u_i \in \mathcal{D}'(\Omega), i = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$

$$\mathcal{D}' = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega), i, j = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}'(\Omega)_S^{N \times N}.$$

Les dualités entre les espaces D' et D , $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ seront notées respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$. Plus précisément on a:

$$\langle u, \varphi \rangle_{D' \times D} = \langle u_i, \varphi_i \rangle \quad (5.1)$$

$$\langle \sigma, \Phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle \sigma_{ij}, \Phi_{ij} \rangle \quad (5.2)$$

pour tout $u \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in D$, $\sigma \in \mathcal{D}'$ et $\Phi \in \mathcal{D}$ avec la convention usuelle de la sommation sur l'indice répété.

Soit ∂_i l'opérateur $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour les fonctions et pour les distributions. On a:

$$\langle \partial_i \theta, \Psi \rangle = -\langle \theta, \partial_i \Psi \rangle \quad \forall \theta \in \mathcal{D}'(\Omega), \Psi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (5.3)$$

On peut également introduire les opérateurs différentiels du premier ordre définis par:

$$\varepsilon : D \rightarrow \mathcal{D}, \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{ij}(\varphi)), \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \forall \varphi \in D \quad (5.4)$$

$$Div : \mathcal{D} \rightarrow D, Div \Phi = (\partial_j \Phi_{ij}) \quad \forall i = \overline{1, N}, \forall \Phi \in \mathcal{D} \quad (5.5)$$

On va utiliser les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces des distributions sur Ω :

$$\varepsilon : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}', \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \forall u \in \mathcal{D}' \quad (5.6)$$

$$Div : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}', Div \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \quad \forall i = \overline{1, N}, \forall \sigma \in \mathcal{D}' \quad (5.7)$$

En utilisant (5.3), on obtient facilement:

$$\langle \varepsilon(u), \Phi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = -\langle u, Div \Phi \rangle_{\mathcal{D}' \times D} \quad \forall u \in \mathcal{D}', \Phi \in \mathcal{D} \quad (5.8)$$

$$\langle Div \sigma, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times D} = -\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}', \varphi \in D \quad (5.9)$$

L'opérateur ε défini par (5.4) pour les fonctions et par (5.6) pour les distributions s'appelle **"opérateur déformation"**.

L'opérateur Div défini par (5.5) pour les fonctions et par (5.7) pour les distributions s'appelle

“opérateur divergence”.

Dans la suite, on va utiliser les espaces suivants:

$$H = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)^N.$$

$$\mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i, j = \overline{1, N}\} = L^2(\Omega)_S^{N \times N}.$$

Ces espaces H et $\mathcal{H}$ sont de Hilbert munis des produits scalaires respectifs:

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad (5.10)$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad (5.11)$$

Les normes associées aux produits scalaires (5.10) et (5.11) seront notées respectivement par $|\cdot|_H$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}}$.

Comme $L^2(\Omega)$ s'identifie à un sous espace de distributions sur Ω , alors on peut considérer $H \subset \mathcal{D}'$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$. Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur les espaces H et $\mathcal{H}$. Cela nous conduira à l'étude d'autres espaces fonctionnels.

4.2.2 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ . Nous supposons que Ω est un domaine à frontière Lipschitzienne, c'est-à-dire Γ est représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{N-1}$, Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ .

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N}\}$$

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (5.12)$$

et la norme associée:

$$|u|_{H^1(\Omega)} = (\langle u, u \rangle_{H^1(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \quad (5.13)$$

on a les résultats suivants:

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega) \quad (5.14)$$

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte (théorème de Rellich).} \quad (5.15)$$

Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$

telle que:

$$\gamma u = u|_{\Gamma} \quad \text{pour tout } u \in C^1(\overline{\Omega}) \quad (5.16)$$

Remarque 4.2 $L^2(\Gamma)$ représente l'espace des (classes de) fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application γ s'appelle application de trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$. L'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ n'est pas surjective. l'image de $H^1(\Omega)$ par cette application est notée $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; c'est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ qui est de Hilbert pour la structure transportée par γ . On a:

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \subset L^2(\Gamma) \text{ avec injection continue.} \quad (5.17)$$

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ est une application linéaire continue et surjective} \quad (5.18)$$

Soit maintenant $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace

fermé de $H^1(\Omega)$. On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$; c'est un espace de distributions sur Ω . On a les résultats suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le noyau de l'opérateur de trace est } H_0^1(\Omega). \\ \text{C'est-à-dire } H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \gamma u = 0\} \end{array} \right. \quad (5.19)$$

4.2.3 Espaces liés à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation défini par (5.6), il est naturel d'introduire l'espace:

$$H_1 = \{u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}.$$

Sur H_1 on considère le produit scalaire:

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (5.20)$$

Et la norme associée définie par:

$$|u|_{H_1}^2 = |u|_H^2 + |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}^2 \quad (5.21)$$

On obtient ainsi:

$$|u|_H \leq |u|_{H_1}. \quad (5.22)$$

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq |u|_{H_1} \quad (5.23)$$

Donc l'injection de H_1 dans H et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \rightarrow \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus. De même, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$ à des sous-espaces de D' et $\mathcal{D}$, en utilisant (5.8) on a:

$$\langle \varepsilon(u), \varphi \rangle_{D' \times D} + \langle u, \text{Div} \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H, \varphi \in \mathcal{D} \quad (5.24)$$

$$\langle \varepsilon(u), \varphi \rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, \text{Div} \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H_1, \varphi \in \mathcal{D} \quad (5.25)$$

Théorème 4.4 *L'espace H_1 muni du produit scalaire (5.20) est un espace de Hilbert.*

Soit maintenant $H^1(\Omega)^N$ l'espace de Hilbert produit défini par:

$$H^1(\Omega)^N = \{u = (u_i)/u_i \in H^1(\Omega), i = \overline{1, N}\}$$

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)^N} = \langle u_i, v_i \rangle_{H^1(\Omega)} \quad (5.26)$$

$$|u|_{H^1(\Omega)^N}^2 = \sum_{i=1, N} |u_i|_{H^1(\Omega)}^2 \quad (5.27)$$

Théorème 4.5 *On a l'égalité algébrique $H_1 = H^1(\Omega)^N$ et les normes définies par (5.21), (5.27) sont des normes équivalentes sur H_1 .*

Remarque 4.3 *En utilisant le théorème précédent, il résulte en particulier qu'il existe une constante $C > 0$ qui dépend en général de Ω telle que:*

$$|u|_H^2 + |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}^2 \geq C |u|_{H^1(\Omega)^N}^2 \quad \forall u \in H_1. \quad (5.28)$$

Compte tenu du théorème (4.5), toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transposées pour l'espace H_1 , par passage aux espaces produits. Plus précisément si on note respectivement par H_Γ et L_Γ^2 les espaces $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$ et $L^2(\Gamma)^N$, alors en utilisant (5.14)-(5.20) on obtient les résultats suivants:

$$C^1(\overline{\Omega})^N \text{ est dense dans } H_1. \quad (5.29)$$

$$H_1 \subset H \text{ avec injection compacte (théorème de Rellich).} \quad (5.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application linéaire et continue } \gamma : H_1 \rightarrow L^2_\Gamma \\ \text{telle que : } \gamma u = u|_\Gamma \text{ pour tout } u \in C^1(\overline{\Omega})^N. \end{array} \right. \quad (5.31)$$

$$H_\Gamma \subset L^2_\Gamma \text{ avec injection continue.} \quad (5.32)$$

$$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma \text{ est une application linéaire continue et surjective.} \quad (5.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le noyau de l'opérateur } \gamma \text{ est } H_0^1(\Omega)^N; \text{ c'est-à-dire:} \\ H_0^1(\Omega)^N = \{u \in H_1 / \gamma u = 0\}. \end{array} \right. \quad (5.34)$$

L'application γ définie par (5.31) s'appelle application de trace sur l'espace H_1 . Pour tout $u \in H_1$, l'élément $\gamma u \in H_\Gamma$ s'appelle la trace de u sur Γ . Parfois, par simplicité, on va noter $u|_\Gamma$ ou simplement u au lieu de γu . La continuité de γ donnée par (5.33) équivaut à l'existence d'une constante $C > 0$ qui dépend de Ω telle que:

$$|\gamma u|_{H_\Gamma} \leq C |u|_{H_1} \quad \forall u \in H_1. \quad (5.35)$$

Où $|\cdot|_{H_\Gamma}$ est la norme dans l'espace H_Γ .

Dans la suite, le dual de H_Γ sera noté H'_Γ et la norme sur H'_Γ ainsi que le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ seront notés par $|\cdot|_{H'_\Gamma}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$.

Dans le problème mécanique étudié dans ce mmoire, la frontière Γ est partitionnée en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 ; telles que $\text{mes } \Gamma_1 > 0$.

Nous aurons aussi besoin de l'espace V défini par:

$$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}.$$

Cet espace est un sous-espace fermé de H_1 .

Théorème 4.6 (inégalité de Korn). *Soit $\text{mes } \Gamma_1 > 0$. Alors, il existe une constante $C > 0$*

dépendant de Ω et Γ_1 telle que:

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq C |u|_{H_1} \quad \forall u \in V. \quad (5.36)$$

La démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [19 p. 79].

Sur V , nous considérons le produit scalaire défini par:

$$\langle u, v \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V \quad (5.37)$$

Soit $|\cdot|_V$ la norme associée à ce produit scalaire, c'est-à-dire:

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V \quad (5.38)$$

De l'inégalité de Korn (5.36) et de (5.23), il vient que $|v|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V , donc $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre le théorème de trace de sobolev, entraîne l'existence d'une constante $C_0 > 0$, dépendant de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que:

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_0 |v|_V \quad \forall v \in V \quad (5.39)$$

4.2.4 Espaces liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas de l'opérateur déformation il est naturel d'introduire l'espace $\mathcal{H}_1$ lié à l'opérateur divergence et définit par:

$$\mathcal{H}_1 = \{ \sigma \in \mathcal{H} / \text{Div} \sigma \in H \}.$$

Sur $\mathcal{H}_1$, on considère le produit scalaire:

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, \text{Div} \tau \rangle_H. \quad (5.40)$$

Et la norme associée définie par:

$$|\sigma|_{\mathcal{H}_1}^2 = |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 + |\text{Div} \sigma|_H^2 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1 \quad (5.41)$$

On obtient ainsi:

$$|\sigma|_{\mathcal{H}} \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1} \quad (5.42)$$

$$|Div\sigma|_H \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1} \quad (5.43)$$

Donc l'injection $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ et l'opérateur divergence $Div : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ sont des opérateurs continus. De plus, compte tenu de l'identification de H et $\mathcal{H}$ à des sous-espaces de D' et $\mathcal{D}'$, en utilisant (5.9) on a:

$$\langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} = -\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}, \varphi \in D \quad (5.44)$$

$$\langle Div\sigma, \varphi \rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \varphi \in D \quad (5.45)$$

Théorème 4.7 *L'espace $\mathcal{H}_1$ muni du produit scalaire (5.40) est un espace de Hilbert.*

On a le résultat suivant:

L'espace $C^1(\overline{\Omega})_S^{N \times N}$ défini par:

$$C^1(\overline{\Omega})_S^{N \times N} = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), i, j = \overline{1, N} \}$$

est dense dans $\mathcal{H}$. De plus, pour tout $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_S^{N \times N}$ on note par $\sigma\nu$ le vecteur de composantes $(\sigma_{ij}\nu_j)$, $i, j = \overline{1, N}$ où $\nu = (\nu_j)$ est la normale extérieur unitaire à Γ . Comme dans le cas de l'espace H_1 , on peut définir une application de trace pour l'espace $\mathcal{H}_1$ à l'aide de résultat suivant:

Théorème 4.8 *Il existe une application linéaire, continue et surjective $\gamma_\nu : \mathcal{H}_1 \rightarrow H_\Gamma$ telle que:*

$$\langle \gamma_\nu \sigma, \zeta \rangle_{H_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma \nu \zeta d\Gamma \quad (5.46)$$

pour tout $\zeta \in H_\Gamma$ et $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_S^{N \times N}$.

Conclusion :

Cette étude réalisée est une petite contribution dans les travaux de recherche menés durant ces deux dernières décennies dans le domaine de l'analyse variationnelle des problèmes de contact avec ou sans frottement entre un corps élastique (viscoélastique ou viscoplastique) et une fondation rigide ou déformable. Ce domaine n'est pas complètement investi, car les problèmes de contact thermoélastique, thermoviscoélastique et thermoviscoplastique, pour des matériaux ayant une loi de comportement non linéaire sont encore ouverts.

Signalons aussi que des études théoriques et numériques récentes sont faites dans le domaine de la recherche des solutions variationnelle lorsque la surface de contact n'est pas régulière et que la voie dans cette direction est loin d'être terminée.

Bibliographie

- [1] A. Amassad, M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* (1998), 55-72.
- [2] P. Ciarlet, *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris (1986).
- [3] S. Drabla, M. Sofonea and B. Teniou, Analysis of a frictionless contact problems for elastic bodies, *Annales Polonici Mathematici*, vol.69 (1988), p 75-88.
- [4] G. Duvaut and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and physics*. Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [5] G. Duvaut, J. L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod. Paris (1972).
- [6] I. Ekeland, R. Teman, *Convexe Analysis and Variational Problems*, in *Applied Mathematics, Classics*, 28.
- [7] J. R. Fernandez-Garcia, W. Hahn, M. Shilor, M. Sofonea, Numerical Analysis and simulation of quasistatic frictionless contact problems, *Int. J. Appl. math. Comp. Sci.* 11.(2001), p. 205-222.
- [8] G. Fichera, Boundary value problem unilateral constraints, *Encycl. of Physics*, Editeurs: S. Fluage, Springer-Verlag, Berlin, VI a / 2 1972.
- [9] G. Fichera, Probleme elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini ambiguo al contorno. *Atti:Acc. Naz. Lincei. Mem. Sez. 1.7* (8), p 71-140 (1964).
- [10] R. Glowinski, *Numerical Method for Nonlinear variational problems*, Springer-Verlag, New York (1984).

- [11] R. Glowinski, J. L. Lions and R. Trémoilières, Numerical Analysis of variational Inequalities, North-Holland Amsterdam (1981).
- [12] I. Halavaček, J. Haslinger, J. Necăs and Lovisěk, Solutions of variational Inequalities in Mechanics, Springer-Verlag, New York (1988).
- [13] J. Haslinger, I. Halavaček, Contact between elastic bodies. I. Continuous problem, Aplikace Matematiky, 25 (1980) p. 324-347.
- [14] I. R. Ionescu, and M. Sofonea, Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity, Oxford University Press. Oxford (1993).
- [15] J. Jarusek, Solvability of the variational inequality for a drum with a memory vibrating in the presence of an obstacle, Bollettino U.M.I., (7) 8-A (1994), p 113-122.
- [16] N. Kikuchi, J. T. Oden, Contact problems in Elasticity: A Study of variational Inequalities and Finite Element Methods, Philadelphia (1988).
- [17] D. Motreanu, M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials, Abstract and Applied Analysis, 4 (1999), p. 255-279.
- [18] J. Necăs, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris (1967).
- [19] J. Necăs and I. Halavaček, Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies: An Introduction, Elsevier, Amsterdam (1981).
- [20] M. Rochdi, B. Teniou, Frictional contact for nonlinear elastic materials. App. Math. and Comp. Sci. 3 (1998). 491-504.
- [21] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic contact problem with directional friction and damped response, Applicable Analysis, 68 (1998) p 409-492.
- [22] M. Sofonea, Problèmes Non-linéaires dans la théorie de l'Elasticité. Cours de magister de Mathématiques Appliquées. Université de Sétif. Algérie (1993).
- [23] B. Teniou, Etudes fonctionnelles des problèmes élasto-viscoplastique de contact, Thèse d'Etat, Univ. Mentouri-Constantine. Janvier (2000).

ملخص:

إن هدف هذه المذكرة هو دراسة مسألة الاتصال بدون احتكاك بين جسم مرن و قاعدة صلبة مع العلم أن قانون استجابة هذا الجسم غير خطي.

النتائج المحصل عليها تتعلق بوجود و وحدانية الحلول الضعيفة، التكافؤ بين الصيغ التغيرية، ارتباط الحل بوسيط معطى و كذلك التقديرات المجردة لأخطاء التقريب.

تحتوي هذه المذكرة ثلاثة فصول و ملحق. في الفصل الأول، نذكر ببعض النتائج الجوهرية لنظرية الأوساط المستمرة. في الفصل الثاني ندرس مسألة Signorini لجسم مرن أما الفصل الثالث فيخصص للتقريب العددي للحل الضعيف. و في الملحق، نذكر ببعض نتائج التحليل الدالي و المعادلات التفاضلية الجزئية التي استخدمت في دراسة مسألتنا.

الكلمات المفتاحية: المرونة، الاتصال بدون احتكاك، مسألة Signorini، مؤثر رتيب بقوة، الحل الضعيف.

Abstract

The object of this memory is the study of a problem of contact without friction, between a deformable body and a rigid base. We consider a nonlinear law of behavior for an elastic material. The results obtained relate to the existence and the low unicity of the solutions, equivalence between these formulations variational, the dependence of the solution compared to the parameter given as well as the abstract estimates of the errors of approximation, by using methods variational. This memory comprises three chapters and an appendix. In the first chapter, we recall some fundamental results of the theory of the continuous mediums. In the second chapter we study the problem of Signorini for an elastic material. The third chapter is devoted to the approximation of the weak solution. In the appendix, we recall some results of functional analysis and partial derivative equations which were useful for the study of our problem.

Key words elasticity, contact without friction, problem of Signorini, variational inequation, strongly monotonous operator, weak solution.

Résumé :

L'objet de ce mémoire est l'étude d'un problème de contact sans frottement, entre un corps déformable et une base rigide. Nous considérons une loi de comportement non linéaire pour un matériau élastique. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité des solutions faibles, l'équivalence entre ces formulations variationnelles, la dépendance de la solution par rapport au paramètre donné ainsi que les estimations abstraites des erreurs d'approximation, en utilisant des méthodes variationnelles. Ce mémoire comporte trois chapitres et une annexe. Au premier chapitre, nous rappelons quelques résultats fondamentaux de la théorie des milieux continus. Au second chapitre nous étudions le problème de Signorini pour un matériau élastique. Le troisième chapitre est consacré à l'approximation de la solution faible. Dans l'annexe, nous rappelons quelques résultats d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles qui ont servi pour l'étude de notre problème.

Mots clés : élasticité, contact sans frottement, problème de Signorini, inéquation variationnelle, opérateur fortement monotone, solution faible.