REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE -
FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : 072/Mag/2007
N° de série : 006/MAT/2007

MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION
DU
DIPLOME DE MAGISTERE
EN
MATHEMATIQUES

« Phénomènes Chaotiques dans des Systèmes Dynamiques Dissipatifs»

par

KESMIA MOUNIRA

Spécialité : **MATHEMATIQUES**

OPTION : **TOPOLOGIE ALGEBRIQUE**

Devant le jury :

RAHMANI F. L.	M.C.	Université Mentouri Constantine	Président
BOUGHABA S.	M.C.	Université Mentouri Constantine	Rapporteur
ZITOUNI M.	Pr.	U.S.T.H.B. Alger	Examinateur
BENKAFADAR N. M.	Pr.	Université Mentouri Constantine	Examinateur

Soutenu le 04 Mars 2007

REMERCIEMENTS

En tout premier lieu je tiens à remercier chaleureusement
Mademoiselle BOUGHABA Soraya
qui m'a guidée et soutenue
tout au long de mon travail de recherche,
aussi bien par ses précieux conseils et sa rigueur
que par sa disponibilité.
Qu'elle trouve ici l'expression de toute ma gratitude.

Je remercie vivement
Monsieur RAHMANI Fouad Lazhar
d'avoir accepté de présider le jury.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait
le Professeur ZITOUNI Mohamed
en acceptant de lire et de juger ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance
au Professeur BENKAFADAR Nasreddine M.
pour l'intérêt qu'il manifeste en examinant ce travail.

Je tiens également à remercier
toute ma famille ainsi que mes amies
pour leur soutien moral qui ne s'est jamais démenti.

Table des matières

I INTRODUCTION GENERALE **4**

II SYSTEMES DYNAMIQUES ET CHAOS **8**

1 Notions fondamentales du dynamique **9**

1.1 Systèmes continus 9

1.1.1 Définitions et propriétés des flots continus 9

1.1.2 Stabilité et point d'équilibre 13

1.1.3 Systèmes non linéaires & linéarisation 15

1.2 Systèmes discrets 19

1.2.1 Stabilité d'un système discret au voisinage d'un point d'équilibre 20

1.2.2 La section de Poincaré 21

1.3 Systèmes Conservatifs et Systèmes Dissipatifs 23

1.3.1 Définitions et caractérisations 23

1.3.2 Théorème de divergence (Liouville) 24

1.3.3 La fonction de *Lyapunov* 25

1.3.4 Principe d'invariance 27

1.3.5 Attracteurs et bassins d'attractions 27

2 Dynamique non linéaire et chaos **34**

2.1 Notion de chaos 34

2.1.1 Système dynamique non linéaire et sensibilité aux conditions initiales . . 35

2.2 Notion de Bifurcation 39

2.2.1 Différentes types de bifurcations dans les systèmes continus 40
2.2.2 Scénario de transition vers le chaos 44

3 Mesurer et caractériser le chaos **47**
3.1 Exposant de Lyapunov 48
3.1.1 Cas des systèmes discrets unidimensionnels 48
3.1.2 Cas des systèmes discrets multidimensionnels 52
3.1.3 Cas des systèmes continus multidimensionnels 54
3.1.4 Exposant de Lyapunov et le diagramme de bifurcation 55
3.1.5 La méthode **QR** pour calculer les exposants de Lyapunov d'un système itératif 56
3.1.6 Calcule numérique du plus grand exposant de Lyapunov 57
3.2 L'entropie 58
3.2.1 L'entropie du système dynamique 58
3.2.2 L'entropie et l'espace des phases 59
3.2.3 La K-entropie et exposant de Lyapunov 62
3.3 Les mécanismes du chaos : étirement et repliement 63
3.4 Fractales et la théorie du chaos 65
3.4.1 Propriétés des fractales 69
3.5 Les dimensions fractales 69
3.5.1 Dimension de Kolmogorov 70
3.5.2 Dimension de Hausdorff-Besicovitch 72
3.5.3 Dimension de Lyapunov 75
3.5.4 Dimension de corrélation 77

III CHAOS ET CARDIOLOGIE **82**

4 Application du chaos à la cardiologie **83**
4.1 Séries temporelles 84
4.2 Reconstruction de l'attracteur « méthode des retards » 85
4.3 Application de la « méthode des retards » sur l'ECG 90

4.4 Intérêt de l'application des outils du chaos 90
4.5 Dimension de corrélation 91
4.5.1 Estimation de la dimension de corrélation pour des signaux ECG 93
4.6 Exposant de Lyapunov 94
4.6.1 Estimation de plus grand exposant de Lyapunov pour des signaux ECG . 98
4.7 La variabilité de la fréquence cardiaque (HRV) 100
4.7.1 Anatomie fractale du coeur 106
4.8 La variabilité du rythme cardiaque (ECG) 106
4.8.1 L'arythmie cardiaque 114
4.8.2 Traitement des arythmies cardiaques 116
4.9 Méthodes d'analyse non linéaire de la variabilité de la fréquence cardiaque (HRV) 116
4.9.1 Méthode DFA (Detrended Fluctuation Analysis) 119
4.9.2 Méthode de "Spatial Filling Index" 123

5 Conclusions et Perspectives **131**

IV Bibliographie **138**

Première partie

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

« L'univers est un livre dont les mathématiques seraient le langage »...

Cette phrase de Galilée tend à se vérifier au fil du temps et de l'évolution des théories mathématiques. Ainsi on parvient à décrire de plus en plus de phénomènes de l'univers qu'ils soient physiques, biologiques, écologiques, économiques, ... par différentes lois et entités mathématiques.

La modélisation mathématique de la dynamique non linéaire permet de comprendre l'évolution des systèmes concrets, qui présentent des dynamiques complexes. C'est-à-dire qu'ils sont rarement strictement périodiques mais fluctuent de façon irrégulière et instable au cours du temps et présentent des aspects apparemment « aléatoires ». Ce genre de comportement a longtemps été expliqué par des processus stochastiques venant s'ajouter à des dynamiques linéaires. Des explications ont été apportées à ces phénomènes grâce à l'avènement des systèmes dynamiques non linéaires et particulièrement de la notion de chaos déterministe, qui trouve ses fondements dans l'article de Lorenz (1963)

Ainsi les techniques dynamiques non linéaires sont basées sur le concept du chaos dont la théorie a pour objet des phénomènes naturels qui échappent à toute prévision à long terme, comme les phénomènes météorologiques.

Depuis lors, cette théorie a fait son apparition dans de multiples domaines dont la physique, la chimie, l'économie, l'écologie, la psychologie, la médecine, et plus spécialement <u>la biologie</u>, objet du présent travail, où il semble prouvé que la dynamique chaotique de certains organes, tels <u>le cœur</u>, leur assure une bonne adaptabilité à une brusque sollicitation...

Le présent mémoire se décompose en 5 chapitres. Dans le premier chapitre on introduit les notions fondamentales sur les systèmes dynamiques, notions nécessaires à la présentation et à la compréhension des éléments de la théorie du Chaos déterministe objet du chapitre 2.

Quant au troisième chapitre il est consacré aux outils et aux quantités disponibles servant a caractériser un régime chaotique tels que les exposants de Lyapounov quantifiant l'imprédictibilité, les dimensions fractales rendant compte de la structure des attracteurs étranges dans l'espace des phases ou encore l'entropie.

Au chapitre 4 on aborde l'application de la théorie du chaos à la biologie plus particulièrement à l'étude du système cardiaque, le but étant de pouvoir représenter et décrire l'état d'un cœur sain et l'état d'un cœur malade. Le système cardiaque est un système dynamique biologique complexe dont le comportement est plus compliqué en présence d'une arythmie. Ces dernières années, sachant que ces pathologies sont l'une des causes majeures de mortalité dans les pays développés, la recherche s'est attachée tant à leur traitement qu'à leur détection avant qu'elles ne deviennent un danger immédiat pour la vie du patient.

L'étude abordée dans le cadre de ce travail de recherche consiste en une application des outils de la théorie du chaos déterministe afin d'établir des diagnostics à partir des séries temporelles issues des deux signaux que sont l'électrocardiogramme (ECG) et la variabilité de fréquence cardiaque (HRV).

La plupart des techniques employées pour analyser et extraire des informations sur le système cardiaque sont issues de l'analyse linéaire. On cite l'analyse des signaux de l'électrocardiogramme (ECG) par la fonction d'auto corrélation, l'analyse fréquentielle, la transformation par ondelettes, ou encore le filtrage adaptatif.

Les résultats de ces méthodes sont passablement bons sachant que la dynamique fondamentale non linéaire du signal ECG est ignorée et partant, la quantité d'informations sur le signal est très limitée.

Toutefois les développements récents de l'analyse non linéaire, et plus particulièrement des techniques de la théorie de chaos déterministe, ont fourni diverses méthodes plus adéquates pour l'étude et la compréhension mathématique de la complexité du système cardiaque. Ainsi plusieurs outils de la théorie dynamique chaotique peuvent être employés comme la dimension de corrélation, les exposants de Lyapounov, l'entropie de corrélation, etc. Ces mesures ont été employées pour la description de comportement du signal de l'ECG.

Il est montré par une analyse sur le signal de la variabilité de fréquence cardiaque (HRV), qu'un cœur en bonne santé présente une dynamique chaotique, qu'il y a présence d'une structure fractale dans le signal (HRV), et que la bifurcation de l'état chaotique vers une dynamique périodique définit l'apparition d'une arythmie. Par ailleurs une étude sur l'électrocardiogramme (ECG), signal qui modélise l'activité électrique du cœur, fait apparaître que les arythmies sont une forme du chaos.

L'application de la théorie du Chaos à la cardiologie est encore à ses balbutiements. On donne au dernier chapitre un éventail de questions ouvertes, de recherches en cours et de perspectives dans le domaine <u>de l'application de la théorie du Chaos à la cardiologie</u>.

Deuxième partie

SYSTEMES DYNAMIQUES ET CHAOS

Chapitre 1

Notions fondamentales du dynamique

Un système dynamique déterministe est un système évoluant avec le temps ; en suivant une loi, qui peut être décrite par un ensemble fini d'équations qui peut prendre des formes mathématiques diverses : équations différentielles ordinaires (autonomes ou non), équations aux dérivées partielles, application (inversible ou non). En général, la loi d'évolution est locale, l'évolution du système est donnée à chaque instant. On cherche à connaître l'évolution globale du système, en particulier son comportement quand le temps tend vers l'infini. Les variations météorologiques, les populations animales, les rythmes cardiaques et, certaines pathologies du cerveau sont des exemples sur les systèmes dynamiques.

1.1 Systèmes continus

1.1.1 Définitions et propriétés des flots continus

Définition 1 : *Espace d'état, Degré de liberté*

L'espace d'état (ou des phases) est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique. On peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à un moment donné. Le degré de liberté caractérise l'espace d'état. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état, c'est à dire le nombre de variables qui le caractérisent.

Par exemple, l'espace des phases d'un balancier d'une horloge est construit à partir des variables vitesse et angle par rapport à la verticale et, dont le degré de liberté est égal à 2.

Définition 2 : *Le flot continu*

On appelle "flot" l'action du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur l'espace des phases noté M. Le flot est la donnée d'une application Φ définie par :

$$\begin{array}{ccccccc} \Phi & : & \mathbb{R} & \times & M & \rightarrow & M \\ & & (t & , & x) & \longmapsto & \Phi\ (t,x) = \Phi_t\ (x) \end{array}$$

et qui vérifie deux axiomes :

1. Axiome de neutralité

$$\Phi(0,x) = x \quad \forall x \in M$$

2. Axiome d'associativité

$$\Phi(t+s,x) = \Phi(s,\Phi_t(x)) \quad \forall\ t,s \in \mathbb{R}, \forall x \in M$$

Exemple 1 : *Mouvement rectiligne*

Le flot d'un mouvement rectiligne uniforme est donné par : $\Phi_t(x) = x(0) + v(0)t, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$x(0)$: position initiale, $v(0)$: vitesse initiale, t : temps.

En effet, les deux axiomes sont vérifiés

$$\begin{aligned} \Phi\ (0,x) &= x \\ \Phi\ _s(\Phi_t(x)) &= \Phi\ (s,\ \Phi_t(x)) \\ &= (x(0)+v(0).t)+v(0).s \\ &= x(0)+v(0).(s+t) \\ &= \Phi(s+t,x). \end{aligned}$$

Propriétés

1. Puisque le groupe additif $\mathbb{R}$ agit sur l'espace des phases M, par le flot Φ on peut définir deux concepts :

a) L'orbite d'un point x de M, noté $\theta(x)$, défini par :

$$\theta(x) = \{\Phi_t(x), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

$\theta(x)$ est un sous ensemble de l'espace des phases M.

b) Le stabilisateur d'un point x de M, noté $St(x)$, défini par :

$$St(x) = \{t \in \mathbb{R}, \Phi_t(x) = x\}$$

2. L'action du groupe $\mathbb{R}$ sur M par le flot Φ nous permet de faire une partition de l'espace des phases M en des orbites vérifiant :

♦ $\theta(x) \neq \varnothing, \forall x \in M$, signifie l'existence d'une orbite dans M pour une condition initiale.

♦ $\theta(x) \cap \theta(y) = \varnothing : x \neq y, \forall x, y \in M$, c'est la non intersection des orbites dans l'espace des phases.

♦ $\cup_{x \in M} \theta(x) = M$.

À partir des trois propriétés l'ensemble $\sum = \{\theta(x)\}_{x \in M}$, forme une partition de M.

Il existe une relation d'équivalence $\Re$ associée à $\sum$

$$\begin{aligned} (x \Re x\prime) &\iff \exists\, t \in \mathbb{R} \;/\; x\prime = \Phi_t(x) \\ &\iff \text{sont sur la même orbite} \end{aligned}$$

3. $\mathbb{R}$ admet une représentation dans M, il existe un homomorphisme Ψ tel que :

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : \mathbb{R} & \rightarrow & (B\,(M, M), \circ) \\ & t & \longmapsto & \Psi(t) = \Phi_t \end{array}$$

Où : $B(M, M)$ est l'ensemble des bijections de M.

Si le système est réversible l'application bijective $\Phi_t : M \longrightarrow M$ admet une inverse $(\Phi_t)^{-1}$ telle que :

$$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$$

4. Φ_t est de classe $C^1, \forall t \in \mathbb{R}$.
5. Si le système est irréversible, l'ensemble $\{\Phi_t,\ t \in \mathbb{R}^*\}$ est appelé semi -groupe.
6. Un point d'équilibre ou point fixe x^* du système est un point pour lequel : $St(x^*) = \mathbb{R}$.
7. Un point périodique x_p du système est un point pour lequel :

$$St(x_p) = \{np,\ n \in \mathbb{Z},\ p \text{ est le période du mouvement}\}.$$

Définition 3 : *Action libre*

L'action du flot Φ sur M est dite libre si :

$$St(x) = \{0_{\mathbb{R}}\}, \forall x \in M.$$

Définition 4 : *Action transitive*

L'action du flot Φ sur M est dite transitive, s'il existe une seule orbite ; autrement dit : $\sum = \{M\}$.

$$\sum = \{M\} \iff \forall x,\ x' \in M,\ \exists\, t \in \mathbb{R} :\ x' = \Phi_t(x).$$

La dynamique d'un système dissipatif (voir la section ci-dessous) dans l'espace des phases M, après une longue durée est attiré vers une seule orbite $\theta\ (x_0)$ d'une condition initiale $x_0 \in M$, cette orbite est appelée attracteur (voir la section ci-dessous). L'action du flot Φ sur l'attracteur est transitive et elle est libre uniquement sur les attracteurs étranges, elle n'est plus libre pour les attracteurs suivants : points, cycles limites, et les tores parce que : $St(x) \neq \{0_{\mathbb{R}}\}$.

Définition 5 : *Champ de vecteurs*

Le champ de vecteurs F sur M associe à chaque point $x \in M$ un vecteur $F(x)$ admettant ce point pour origine tel que :

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x)\,|_{t=0} = F(x)$$

Définition 6 : *Système continu*

Le système continu est la donnée d'un ensemble d'équations différentielles ordinaires du premier ordre définies par :

$$\dot{x} = F(x,\ t,\ \lambda), (\dot{x} = \frac{dx}{dt})$$

oú : $x \in M$, et F est le champ de vecteurs définie sur M, et λ un paramètre.

Exemple 2 : *La chute libre*

La chute libre d'un corps, d'une hauteur peu élevée x. Le bilan des forces permet de connaître l'accélération. Celle-ci est constante.

Le flot est défini par l'équation : $\ddot{x} = g$ équivalente au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g \end{cases}$$

L'orbite d'une condition initiale x_0 est définie par : $\theta(x) = \left\{x/x = \frac{1}{2}gt^2, t \geq 0\right\}$et l'espace des phases M est définie par : $M = \{(x, y)/x : \text{hauteur},\ y : \text{vitesse}\}$.

1.1.2 Stabilité et point d'équilibre

Définition 7 : *Etat d'équilibre*

Un système physique est en état d'équilibre, s'il présente des propriétés constantes.

Autrement dit : un système est en état d'équilibre x^* si $F(x^*,\ t, \lambda) = 0$ (physiquement si la vitesse est nulle en un point x^*).

Définition 8 : *Système stable*

Un système, qui a une propriété de revenir à son état d'équilibre après une perturbation, est dit stable.

Définition 9 : *Stabilité au sens de Lyapunov*

Une solution x^* est dite stable au sens de Lyapunov si :

$$\forall \zeta \rangle 0, \exists \delta \rangle 0 : \|x(0) - x^*\| \langle \delta \Longrightarrow \|x(t) - x^*\| \langle \zeta$$

Définition 10 : *Stabilité asymptotique*

Une solution x^*est dite asymptotiquement stable si :

$$\exists\delta\rangle 0 : \|x(0) - x^*\| \langle\delta \implies \lim_{t\to+\infty} x(t) = x^*$$

Définition 11 : *Instabilité*

Une solution x^*est dite instable s'il n'est pas stable :

$$\exists\zeta\rangle 0, \forall\delta\rangle 0 : \|x(0) - x^*\| \langle\delta, \ et \ \|x(t) - x^*\|\rangle\zeta$$

Un point d'équilibre x^* est stable (resp. asymptotiquement stable) si toute les trajectoires issues d'une condition initiale $x(0)$, sont proches de x^*, restent proches de x^* (resp. s'approchent jusqu'à sur x^*) lorsque le temps $t \to +\infty$. En revanche, si les trajectoires s'éloignent de x^* le système est instable en x^*.

Définition 12 : *Systèmes autonomes et non autonomes*

Soit le système d'équations différentielles $\dot{x} = F(x, t, \lambda)$, x étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (espace de phases), F est le champ de vecteurs (fonction de l'état x, du temps t, et du paramètre λ), quand F ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de x :

$$F = F(x\ (t))$$

le système est dit "autonome". Dans le cas contraire, lorsque F dépend explicitement du temps, on a affaire à un système "non autonome".

Le passage d'un système non autonome à un système autonome

Soit le système non autonome :

$$\dot{x} = F(x, t), \text{ tel que : } x = (x_1,\ x_2, .., \ x_n),\ F = (f_1,\ f_2, .., \ f_n)$$

on suppose que les f_i sont de classe C^n $(n \geq 1)$ en x et en t, donc $x_i(t) \in C^1$.

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t,\ x_1,\ x_2, .., \ x_n)$$

on a :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \end{cases}$$

Pour passer du système non autonome ci-dessus à un système autonome, on change le variable t, posant $t = x_{n+1}$, donc : $\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1$, d'où le système :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \end{cases}$$

on obtient,

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,\ x_2, .., \ x_n,\ x_{n+1})$$

alors : $\dot{x} = F(x)$, tel que : $x = (x_1,\ x_2, .., \ x_n,\ x_{n+1})$.

1.1.3 Systèmes non linéaires & linéarisation

On considère le système d'équations différentielles autonomes non linéaires :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, \lambda) \\ F(x^*) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

tel que le système évolue dans $\mathbb{R}^n$, F est une fonction suffisamment dérivable

on note :

$$A = \frac{\partial F}{\partial x}\,|_{x=x^*}$$

A est appelée matrice jacobienne de F en x^* .

Le comportement des orbites au voisinage du point d'équilibre x^* est lié aux valeurs propres de A :

* Si $Re(\lambda_i)\langle 0$, pour $\forall\lambda_i$, le point d'équilibre x^*est asymptotiquement stable.

* Si $Re(\lambda_i) \leq 0$,pour $\forall\lambda_i$, x^* est stable au sens de Lyapunov.

* Si $\exists\lambda_i \in \mathbb{R}$, tel que : $Re(\lambda_i)\rangle 0$, x^* est instable.

La linéarisation du champ de vecteurs F au point d'équilibre x^* est déterminée par le développement de Taylor de $F(x)$ au voisinage de x^* :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x^*) + \frac{\partial F}{\partial x}|_{x^*}(x - x^*) + R(x - x^*) \\ \text{tel que} &: F(x^*) = 0 \quad \text{et } \frac{\partial F}{\partial x}|_{x^*} = A \end{aligned}$$

dans le cas général $x^* = 0$, donc : $F(x) = Ax + R(x)$.

Les solutions du système non linéaire (1.1) et celles du système linearisé $\dot{x} = Ax$ peuvent être mises en correspondance dans certains cas.

Définition 13 : *Points d'équilibre*

1) Un point d'équilibre x^* est dit point "hyperbolique" si la matrice A n'a pas de valeur propre nulle ou imaginaire.

2) Un point d'équilibre x^* est dit point "selle" si le nombre des valeurs propres positives est égal à celui des valeurs propres négatives.

3) Un point d'équilibre x^* est dit point "noeud" si toutes les valeurs propres ont le même signe.

4) Un point d'équilibre x^* est dit point "foyer" si des valeurs propres sont des paires complexes conjuguées.

Théorème 1 : (Hartmann –Grobman)[26]

Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un C^1 difféomorphisme avec un point d'équilibre x^* hyperbolique. Alors il existe un homéomorphisme h d'un voisinage du point d'équilibre $x^* \in U$ dans $\mathbb{R}^n$ $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, mettant en correspondance les trajectoires du système non linéaire et celles du système linearisé $\dot{z} = Az$. En particulier :

$$h(x^*) = 0 \text{ et } h(F(x)) = Ah(x), \forall x \in U$$

Définition 14 : *Les variétés stables et instables*

On définit les variétés stable et instable localement de x^* : $W^S(x^*), W^u(x^*)$ par:

$$\begin{aligned}
W^S_{loc}(x^*) &= \{x \in U/\Phi_t(x) \longrightarrow x^* \text{ si } t \longrightarrow +\infty \text{ et } \Phi_t(x) \in U \text{ pour } \forall t \geq 0\ \} \\
W^u_{loc}(x^*) &= \{x \in U/\Phi_t(x) \longrightarrow x^* \text{ si } t \longrightarrow -\infty \text{ et } \Phi_t(x) \in U \text{ pour } \forall t \geq 0\ \}
\end{aligned}$$

où : $U \subset \mathbb{R}^n$, est un voisinage du point fixe x^*.

Définition 15 : *Les variétés globales*

Les variétés invariantes $W^S_{loc}(x^*)$, $W^u_{loc}(x^*)$ ont des variétés globales W^s, W^u sont définies par :

$$\begin{aligned}
W^s(x^*) &= \bigcup_{t\leq 0} \Phi_t(W^S_{loc}(x^*)) \\
W^u(x^*) &= \bigcup_{t\geq 0} \Phi_t(W^u_{loc}(x^*))
\end{aligned}$$

Définition 16 : *Variété invariante*

Une variété W est dite invariante par le flot Φ_t si $\Phi_t(W) \subset W$.

Propriété

Si le système $\dot{x} = F(x)$ a un point d'équilibre hyperbolique x^*, alors il existe deux variétés localement stables et instables de même dimension n_s, n_u avec les sous espaces propres E^s, E^u du système linearisé, telles que $W^S_{loc}(x^*)$ et $W^u_{loc}(x^*)$ sont tangentes à E^s, E^u en x^*.

Définition 17 : *Points limites des trajectoires*

1) Le point "*limite* ϖ" d'une trajectoire $x(x_0, t)$ est un point a de l'espace des phases. Tous les états successifs du système qui évoluent sur la trajectoire $x(x_0, t)$ tendent vers a si $t \to +\infty$.

2) Le point "*limite* α" d'une trajectoire $x(x_0, t)$ est un point b de l'espace de phases. Tous les états successifs du système qui évoluent sur la trajectoire $x(x_0, t)$ tendent vers b si $t \to -\infty$.

Exemple 3 : *Équation de Duffing*

L'équation $\ddot{x} + \delta\dot{x} - x + x^3 = 0$ $(0\langle\delta\langle 2\sqrt{2})$ c'est une équation d'ordre 2 équivalente à un système de deux équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x_1 \\ \dot{x}_1 & = & x_1 - x_1^3 - \delta x_2 \end{cases}$$

ayant pour points d'équilibre $(0,0), (\pm 1, 0)$. Le système linearisé est le suivant :

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^2 & -\delta \end{pmatrix} z$$

Les valeurs propres du jacobien au point d'équilibre $(0,0)$ sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 + 4}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

donc $(0,0)$ est un point selle hyperbolique.

Les valeurs propres du jacobien au point d'équilibre $(\pm 1, 0)$ sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-\delta - i\sqrt{-(\delta^2 - 8)}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-\delta + i\sqrt{-(\delta^2 - 8)}}{2} \end{aligned}$$

Alors $(\pm 1, 0)$ sont des foyers asymptotiquement stables.

D'après le théorème (Hartmann –Grobman), le portrait de phases du système non-linéaire de Duffing est homéomorphe avec le portait de phases du système linearisé aux points d'équilibre hyperboliques : $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$.

1.2 Systèmes discrets

Le système discret est la donnée d'un ensemble d'équations algébriques définies par une application itérative Φ qui associe l'état du système à un instant t_i par l'état suivant à l'instant t_{i+1} pour $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & M & \longrightarrow & M \\ & x(t_i) & \longmapsto & x(t_{i+1}) \end{array} \tag{1.2}$$

où : $\Phi\ (x\ (t_i)) = x\ (t_{i+1})$

En notant : $x(t_i) = x_i$, $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Phi(x_i) = x_{i+1},\ i \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

ainsi : $\Phi^i(x) = (\Phi \circ \Phi \circ .... \circ \Phi)(x)$ est la i^{eme} itérée de x dans l'espace des phases M.

En guise d'exemple sur le flot discret celui modélisant la variation des populations animales défini par l'application logistique :

$$\begin{array}{cccc} f & : [0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ & x_i & \longmapsto & x_{i+1} = ax_i(1-x_i), \forall i \in \mathbb{N} \end{array}$$

De manière générale, les notions développées pour les flots continus ont des analogues pour les flots discrets. Il y a d'ailleurs une façon évidente de déduire d'un flot continu $t \longmapsto \Phi_t$ un flot discret $i \longrightarrow \Phi_{i\tau}$, il suffit de discrétiser l'intégrale de champ F de (1.2) par un pas de temps τ choisi convenablement

$$x_{i+1} = x_i + \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} F(x,t)dt$$

L'utilité de ce genre de système discret apparaît dans la section de Poincaré (voir la section suivante), qui permet d'étudier les systèmes dynamiques continus - manifestant un comportement chaotique (voir chapitre 2) - de dimension supérieure ou égale à 3. En revanche, les systèmes discrets peuvent avoir ce comportement pour n'importe quelle dimension ≥ 1. Ainsi les simulations numériques des applications itératives sont plus simples que celles des systèmes différentiels continus.

1.2.1 Stabilité d'un système discret au voisinage d'un point d'équilibre

Le cas linéaire :

$$x_i \longmapsto f(x_i) = Ax_i, \ x_i \in \mathbb{R}^n$$

Comme pour les systèmes différentiels linéaires la détermination des orbites de l'application itérative linéaire passe par l'étude des valeurs propres de A.

Le point fixe $x^* = 0$ d'une application linéaire Ax est asymptotiquement stable si est seulement si : les valeurs propres de la matrice A sont de module $\langle$ 1, si au moins une valeur propre à module $\rangle 1$ alors le point d'équilibre $x^* = 0$ est instable. Si les valeurs propres de la matrice A sont de module $\neq 1$, alors le point fixe x^*est un point fixe hyperbolique et l'application $x \longmapsto Ax$ est appelée application hyperbolique.

Le cas non linéaire :

$$x_i = f(x_i), \ x_i \in \mathbb{R}^n$$

Définition 18 : *Point hyperbolique*

Un point d'équilibre x^* de f est dit hyperbolique si l'application linéaire

$$x_i \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x_i=x^*} \ , \ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

n'a pas de valeur propre de module =1.

Soit une application $f \in C^1$ ayant x^* comme point d'équilibre, si toutes les valeurs propres de la matrice ont un module $\langle 1$ alors x^* est asymptotiquement stable. Si au moins une valeur propre a un module $\rangle 1$ alors x^* est instable.

L'application itérative du second ordre :

$$y_{n+1} = ay_n(1 - y_{n-1}), \alpha \in \mathbb{R}$$

équivalente au système

$$\begin{cases} f(x_1) & = & x_2 \\ f(x_{2)} & = & \alpha x_2(1-x_1) \end{cases}$$

a deux points fixes $(0,0),(1-\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha})$

* au point fixe $(0,0)$ le jacobien est

$$Df_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = 0, \;\; \lambda_2 = \alpha$$

si $\alpha \langle\ 1$, alors $(0,0)$ est asymptotiquement stable.

* au point $(1-\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha})$ le jacobien est

$$Df_{(1-\frac{1}{\alpha},\,1-\frac{1}{\alpha})} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1\text{-}\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

possède deux valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5-4\alpha})$$

si : $1\langle a \langle 2$ on a : $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, le point fixe n'est pas hyperbolique.

1.2.2 La section de Poincaré

Soit un système différentiel autonome : $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 19 : *La section de Poincaré*

Soit un système différentiel autonome $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

La section de Poincaré est une hypersurface $\sum$ de dimension $n-1$ localement transverse au champ de vecteurs f au point x^*.

Définition 20 : *Application de premier retour*

L'application de premier retour noté Φ, définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi & : & U \rightarrow \sum \\ U & : & \text{voisinage de } x^*(U \subseteq \sum) \\ M & \longmapsto & M' = \Phi(M) \end{array}$$

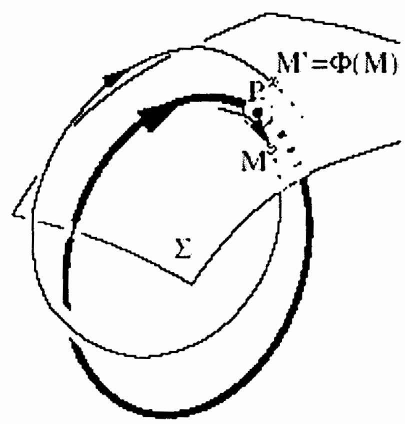


Figure 1.1 : Section de Poincaré et application de premier retour Φ qui relie M à $\sum$, la trajectoire suivie est $\{M, M'\}$ avec $M' = \Phi(M)$. [35]

Intérêt pratique :

L'utilisation de la section de Poincaré dans l'étude de systèmes dynamiques permet principalement de :

1) Ramener l'étude de l'évolution de système différentiel de dimension n à celle d'un système d'équation algébrique de dimension $n-1$.

2) Simplifier l'étude de la stabilité des points d'équilibres, des cycles limites.....

3) Déterminer le comportement dynamique du système (périodique, quasi-périodique, chaotique).

4) Visualiser les mécanismes du chaos.

1.3 Systèmes Conservatifs et Systèmes Dissipatifs

En mécanique, on distingue deux classes de systèmes : les systèmes dissipatifs et les systèmes conservatifs. Dans les systèmes qualifiés de dissipatifs, «le frottement» entraîne une diminution continuelle de l'énergie. La présence d'une «friction interne» dans les systèmes dissipatifs a pour corollaire l'existence d'un «attracteur» c'est- à- dire d'une limite asymptotique (pour $t \longrightarrow +\infty$) des solutions. Les systèmes sans frottements, dits conservatifs ou *Hamiltoniens* ont leur intérêt et leur utilité propres. Il relève de leur étude l'absence d'attracteur, les trajectoires évoluent sur des surfaces d'énergie constante [7].

1.3.1 Définitions et caractérisations

Un système qui conserve son énergie totale dans son évolution est dit conservatif, son comportement est décrit par une fonction de "*Hamilton*", constante dans le temps, elle représente dans ce cas l'énergie E du système, et grâce à elle, on donne la modélisation mathématique des systèmes conservatifs :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{1.4}$$

d'où : $H(x, y) = E =$ constante.

Exemple 4 : *Oxillateur harmonique est un exemple de système conservatif*

il est défini par le système : $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

Le système admet la quantité d'énergie (énergie du pendule) : $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ comme constante du mouvement $\frac{dH}{dt} = 0$.

La propriété importante de ce système est la dynamique réversible ; c'est -à- dire : l'invariance par renversement du temps. Ce qui correspond dans l'espace des phases à la conservation des aires (ou des volumes). Par contre, un système dissipatif perd son énergie totale pendant son évolution et est caractérisé par l'irréversibilité du temps, et par l'absence de "*Hamiltonien*". Cependant pour certains systèmes dissipatifs, il existe une fonction de variable dynamique, la fonction de "*Lyapunov*", positive et décroissante de façon monotone au cours du temps. Une telle fonction sur laquelle peut s'appuyer l'étude de ces systèmes n'existe pas toujours. Dans l'espace des phases la contraction des aires (ou des volumes) fait que les trajectoires de phase sont attirées vers une figure géométrique appelée «attracteur» [7].

Exemple 5 : *Le pendule amorti est un exemple de système dissipatif*

Sa dynamique est décrite par le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x - \gamma y \\ & (\gamma \neq 0) \end{cases}$$

où γ : coefficient d'amortissement du mouvement

1.3.2 Théorème de divergence (Liouville)

Théorème 2 [17] :

Soit Φ_t le flot de $f(x) = \frac{dx}{dt}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^n(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$; soit V_0 un volume initial de l'espace des phases au temps $t = 0$, soit $V(t) = \Phi_t(V_0)$: l'image de V par Φ_t, on a :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{V_0} divf\ dx_1 dx_2.........dx_n \text{ et } divf = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

L'évolution d'un volume initial V_0 de l'espace de phases par le flot continu est donnée par la loi exponentielle :

$$V(t) = e^{(divf)\cdot t} \cdot V_0$$

et pour un flot discret par :

$$V_n = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^n \cdot V_0$$

(où : $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ est le déterminant de Jacobien)

* Si : $divf = 0$; le système continu est conservatif (resp. $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 1$, pour le cas discret)

* Si : $divf \langle 0$; le système continu est dissipatif (resp. $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \langle 1$, pour le cas discret)

Exemple 6 : *Système de Lorenz (système continu)*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xy \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$

le système de Lorenz est dissipatif et sa diveregence vaut :

$$div f = -(\sigma + b + 1) \langle 0$$

Exemple 7 : *L'application logistique (système discret)*

$$x_{i+1} = ax_i(1 - x_i),\ \forall i \in \mathbb{N}$$

puisque $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = |a|$ alors :

* si $|a| = 1 \implies$ le système est conservatif.

* si $|a| \langle 1 \implies$ le système est dissipatif

Définition 21 : *Système différentiel dissipatif*

1) Le système différentiel : $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ est dissipatif s'il existe un sous espace borné B de $\mathbb{R}^n$ tel que $B \subset \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\ t_0$ (un temps dépendant de x_0 et de B) $\forall t \geq t_0 : \Phi_t(x_0) \in B$ tel que :

$$\omega(U) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma^+(\Phi(t,x))}$$

2) L'ensemble $\omega-$*limite* de U ($U \subset \mathbb{R}^n$) sous le flot $\dot{x} = f(x)$ est défini par l'ensemble : des orbites positives passant par toute condition initiale $x_0 \in U$.

3) Un ensemble A est dit *attracteur global* d'un système dissipatif si A est compact, connexe, invariant et $\omega(U) \subset A$ pour tout U ensemble borné.

Propriété : Le système dissipatif a un *attracteur global* unique.

1.3.3 La fonction de *Lyapunov*

Définition 22 : *La fonction de Lyapunov*

Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $(0,0) \in U$. Une fonction $V \in C^1(U)$ à valeurs réelles :

$$\begin{array}{rcccc} V & : & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & V(x) \end{array}$$

La fonction V est dite définie positive sur U si :

1) $V(0) = 0$

2) $V(x) \rangle 0$ pour $\forall x \in U$ avec $x \neq (0, 0)$.

La fonction V est dit définie négative si $(-V)$ est définie positive. L'ensemble $V^{-1}(k)$ est appelé **courbe de niveau** tel que :

$$V^{-1}(k) = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ V(x) = k\} \ (\forall k \rangle 0)$$

La variation de la fonction de Lyapunov V par rapport aux trajectoires du système dissipatif permet d'étudier la stabilité de l'origine, et d'estimer son bassin d'attraction.

Théorème 3 : (Lyapunov) [17]

Soit le système différentiel $\dot{x} = f(x)$ ayant l'origine 0 pour point d'équilibre, et V est une fonction à valeurs réelles définie positive C^1 sur un voisinage U de 0.

1) Si $\dot{V} \leq 0$, $\forall x \in U - \{0\}$, alors l'origine est stable.

2) Si $\dot{V} \langle 0$, $\forall x \in U - \{0\}$, alors l'origine est asymptotiquement stable.

3) Si $\dot{V} \rangle 0$, $\forall x \in U - \{0\}$, alors l'origine est instable.

Définition 23 : *Fonction stricte de Lyapunov*

Une fonction définie positive V sur un voisinage ouvert U de l'origine est dite : fonction de *Lyapunov* pour $\dot{x} = f(x)$

1) Si $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in U - \{0\}$.

2) Si $\dot{V}(x) \langle 0$, $\forall x \in U - \{0\}$, V est appelée fonction stricte de *Lyapunov.*

Exemple 8 : *Le pendule*

Le pendule évolue dans $\mathbb{R}^2$ selon la loi suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & \frac{-g}{l} \sin x_1 \end{cases}$$

la fonction de *Lyapunov* au voisinage de 0 est donnée par :

$$V(x, y) = \frac{1}{2} l^2 y^2 + gl(1 - \cos x)$$

elle satisfait les conditions du théorème de *Lyapunov* dans un voisinage de l'origine $\dot{V}(x) = 0$

donc l'origine est stable.

1.3.4 Principe d'invariance

Théorème 4 [16] :

a) Soit V une fonction à valeurs réelles et $U = \left\{x \in \mathbb{R}^2,\ V(x)\langle k\right\}, k \in \mathbb{R}$, tel que V est continue sur $\overline{U}$ et C^1 sur U, $\dot{V}(x) \leq 0$, $\forall x \in U$, et soit $S = \left\{x \in U, \dot{V}(x) = 0\right\}$, M est le plus grand ensemble invariant de S. Alors : chaque orbite positive qui part de U et reste bornée, a son ensemble $\omega - limite$ dans M.

b) Soit $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que : $V(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \longrightarrow +\infty$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V} \leq 0$.

Alors toute orbite positive est bornée et a son ensemble $\omega-$*limite* dans M le plus grand ensemble invariant inclus dans l'ensemble : $\left\{x \in \mathbb{R}^2, \dot{V}(x) = 0\right\}$.

1.3.5 Attracteurs et bassins d'attractions

Définition 24 : *Attracteur*

Un attracteur A est un objet géométrique dans l'espace des phases M, considéré comme la limite asymptotique des solutions (pour $t \longrightarrow +\infty$) partant de toute condition initiale située dans un bassin d'attraction qui est un domaine de volume non nul.

Propriétés

Les propriétés de l'attracteur sont :

Propriété 1 : *l'attracteur est invariant.*

Une fois entrée dans l'attracteur, la trajectoire n'en sort plus, A est un sous ensemble de M invariant par le flot : $\Phi_t(A) = A$.

Propriété 2 : *l'attracteur est indécomposable.*

On passe de tout état x de A à tout y de A au moyen d'une orbite de x; $\Phi_t(x)$, de longueur finie, partant de x est aboutissant en y. On dit que : A est un ensemble indécomposable, autrement dit : on peut choisir $x\prime \in A, \forall x \in A$, pour un temps convenable la trajectoire $\Phi_t(x)$ passe très prés de $x\prime$.

Propriété 3 :

Le flot doit être "*topologiquement transitif*" (ie l'action du groupe additif $\mathbb{R}$ sur A est transitive) c'est à dire que la trajectoire visite toutes les parties de son attracteur. On exprime cette propriété de la manière suivante :

$$\forall U, \text{ et } V \text{ ouverts} \subset A, \exists t : \Phi_t(U) \cap V \neq \varnothing$$

Propriété 4 : *l'attracteur a un bassin d'attraction*

Le bassin d'attraction B d'un attracteur A pour le flot Φ_t est l'ensemble des conditions initiales au départ desquelles la trajectoire ira s'enfermer dans A. L'attracteur A est le plus petit ensemble compact de son bassin B.

Le bassin d'attraction B est déterminé par :

$$B = \left\{ x \in M / \lim_{t \to \infty} \inf_{y \in A} |\Phi_t(x) - y| = 0 \right\}.$$

Différentes types d'attracteurs

Les trajectoires associées à des régimes dynamiques différents parcourent des objets géométriques de nature différente : point fixe, cycle limite, tore invariant ou bien attracteur étrange. Par contre, les états d'une dynamique aléatoire se répartissent au hasard dans l'espace des phases (Fig :1.2.a et Fig : 1.2.b).

* **Le point fixe** : il correspond à un état stationnaire du système (pas d'évolution).

* **Le cycle limite** : il est associé à un comportement périodique du système (Fig : 1.3.a et Fig : 1.3.b).

* **Attracteur quasi périodique** : il est représenté par un objet semblable à un tore dans un espace de phases de dimension ≥ 3. Les trajectoires évoluent sur le tore, lorsqu'il y a plusieurs fréquences indépendantes (Fig : 1.4.a et Fig : 1.4.b).

* **Attracteur étrange** : est un attracteur associé aux systèmes chaotiques dissipatifs (voir la section suivante) appelé étrange en raison de l'étrangeté du comportement imprévisible et infiniment complexe à toutes les échelles de sa structure. La première découverte du concept d'attracteur étrange revient au météorologue *Edward Lorenz* en 1963 puis élaboré au plan

mathématique en 1971 par *D.Ruelle* et *F.Takens* en tant qu'élément clef de la compréhension des comportements irréguliers décrits par des équations déterministes telle que la turbulence des fluides. La révolution de l'attracteur étrange nécessite une observation prolongée dans le temps et une connaissance du système. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat des opérations d'étirements et repliements d'un cycle de l'espace des phases, répété un nombre infini de fois (pour des modèles d'attracteurs étranges (Fig : 1.5.b , Fig :1.6.a et Fig : 1.6 b).

Propriétés de l'attracteur étranges

Un attracteur étrange manifeste les propriétés suivantes :

♦ **L'autosimilarité :**

le motif géométrique se répète sur des échelles de plus en plus petites quelle que soit l'échelle à laquelle on regarde cette structure, l'aspect parait identique.

♦ **La sensibilité aux conditions initiales (SCI) :**

deux trajectoires initialement très voisines de l'espace des phases s'écartent l'une de l'autre et divergent de façon exponentielle au cours du temps, mais cette divergence ne peut pas être indéfinie car l'attracteur est de diamètre fini.

♦ **La dimension fractale :**

la dimension d de l'attracteur étrange est non entière. Elle doit être strictement supérieure à 2 pour que la SCI ait lieu, et vu que le volume de l'attracteur étrange est nul, alors $d \langle 3$. De plus il affiche une certaine stabilité face à une perturbation.

♦ **L'étirement et le repliement :**

L'attracteur étrange est invariant par l'étirement et le repliement pour plusieurs itérations. Si le système est de dimension 3, l'étirement de l'attracteur par le flot se fait dans une direction, le repliement dans une autre direction, et un comportement périodique selon la troisième direction.

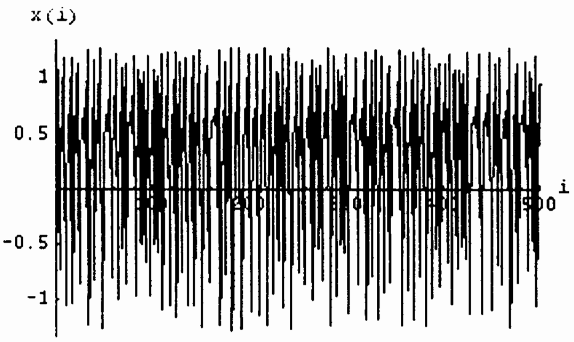


Figure 1.2.a : Signal aléatoire.

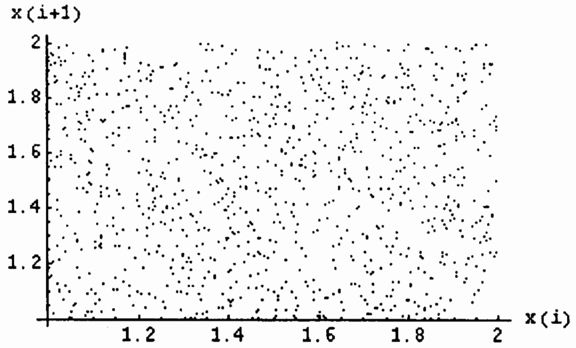


Figure 1.2.b : Portrait de phases de système aléatoire, les états se sont répartis au hasard.

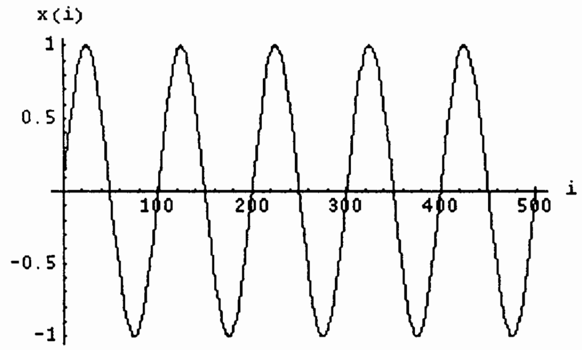


Figure 1.3.a : Signal périodique

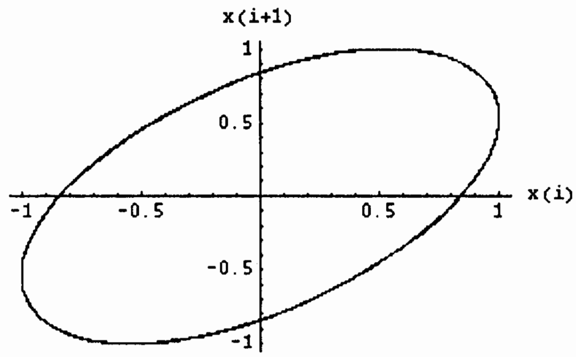


Figure 1.3.b : Portrait de phases d'un système Périodique

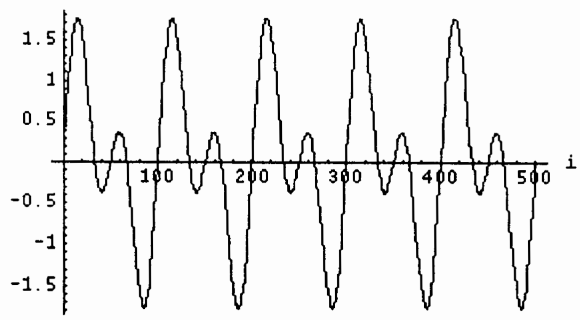


Figure 1.4.a : Signal quasi-périodique.

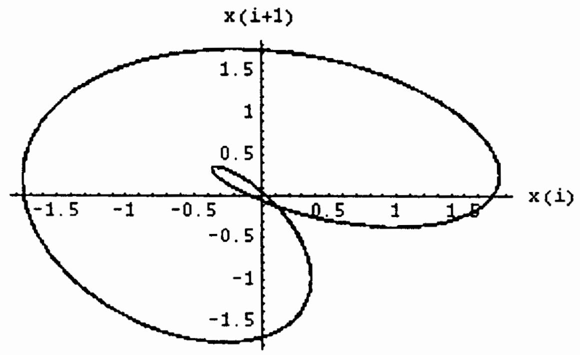


Figure 1.4.b: Portait de phases d'un système quasi-périodique.

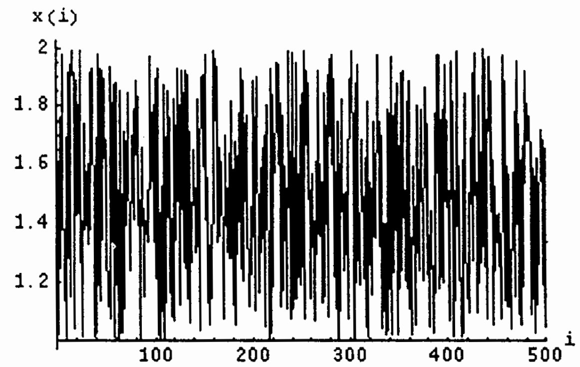


Figure 1.5.a : Signal Chaotique de système de Hénon.

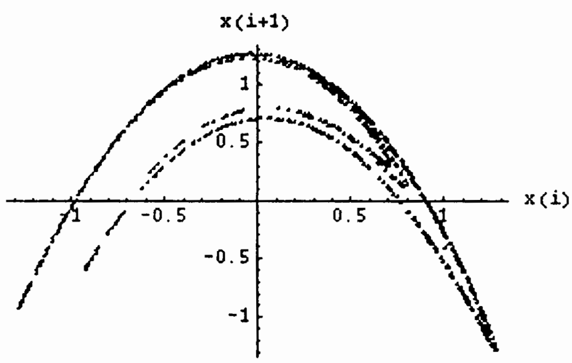


Figure 1.5.b : Attracteur étrange de Hénon (système itératif).

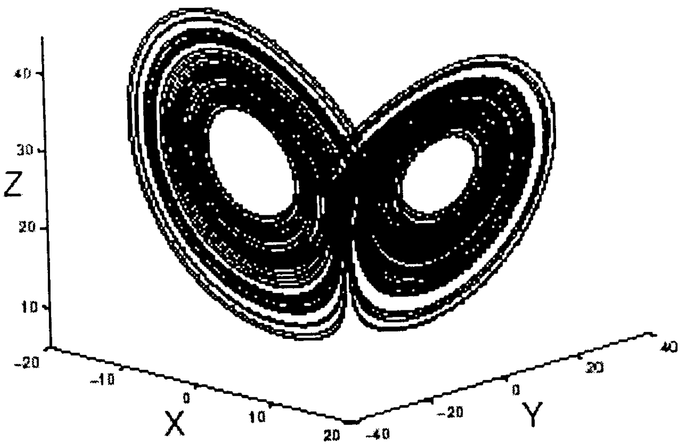


Figure 1.6.a: Attracteur de Lorenz (système continu)

$$\begin{cases} \dot{x} &= 10(y-x) \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

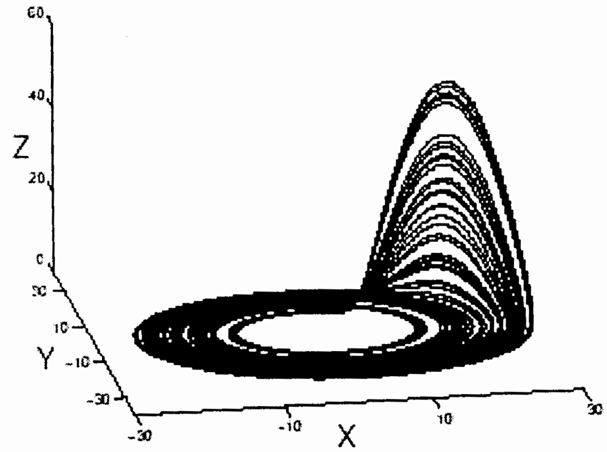


Figure 1.6.b : Attracteur de Rossler (système continu)

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= x + 0.1y \\ \dot{z} &= 0.1 + (x - 18)z \end{cases}$$

Chapitre 2

Dynamique non linéaire et chaos

Parmi les systèmes dissipatifs instables, certains ont un comportement qualifié de **chaotique.** Qu'est- ce que **le chaos** ?.

2.1 Notion de chaos

Il n'est pas rare d'entendre quelqu'un qualifier une situation de chaotique. Cette qualification porte par nature l'idée que cette situation relève du désordre ou de la plus grande confusion. Cependant cette définition généralement admise n'est pas suffisante.

Ce paragraphe a pour but de présenter **la théorie du Chaos** et d'introduire les notions essentielles. Il n'existe pas de définition rigoureuse du chaos mais par chaos, il faut admettre la notion de "*phénomène imprévisible et erratique*". Cette notion dérive notamment des idées de Landau sur les turbulences. Un tel phénomène est observable dans le tirage du Loto où le grand nombre de boules, de palette de brassage et de chocs individuels des boules induisent un très grand nombre de variables dynamiques de façon telle qu'il soit impossible de prévoir, à l'avance, le résultat du tirage ou de prévoir après le tirage d'un numéro le numéro suivant. Cependant, depuis une vingtaine d'années, on attribue le terme chaos à des *"comportements erratiques qui sont liés à des systèmes simples pouvant être régis par un petit nombre de variables entre lesquelles les relations décrivant leur évolution peuvent être écrites. Ces systèmes sont donc déterministes bien qu'imprévisibles à long terme"*.

On le définit parfois également comme un *"comportement complexe, apériodique et irrégulier* *d'apparence aléatoire, mais comportant un ordre latent".*

D'après *Edward Lorenz "un système agité par des forces où seules existent trois fréquences indépendantes peut se déstabiliser, ces mouvements devenant alors totalement irréguliers et erratiques"*. Pour identifier leur origine déterministe on a pris l'habitude de qualifier ces comportements de "**chaotiques**" alors l'adjectif "**aléatoire**" est plus généralement réservé aux autres comportements erratiques.

Ruelle précise que **le chaos** est "*un comportement effectivement* ***imprévisible à long terme*** *survenant dans un système dynamique à cause d'une* ***sensibilité aux conditions initiales*** **(S.C.I)**". Selon *Jacques Herman*, il peut également être produit "*par un système récursif déterministe non linéaire*" ; le système non-linéaire est "**déterministe**" parce que toutes ses variables sont fixées et calculables.

Il est également "**récursif**" parce qu'il admet ses propres résultats dans un système de fonctions itérées.

Le chaos tel que le scientifique le comprend ne signifie pas "absence d'ordre", il se rattache plutôt à une notion d'imprévisibilité, d'impossibilité de prévoir à long terme. Parce que l'état final dépend de manière si sensible de l'état initial.

2.1.1 Système dynamique non linéaire et sensibilité aux conditions initiales

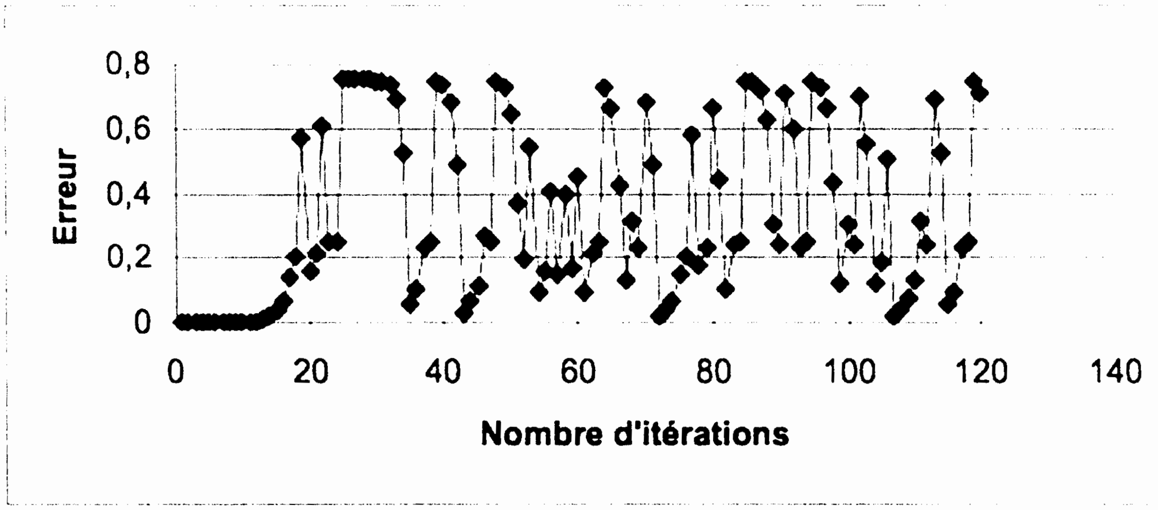
Dans un système non-linéaire, un changement dans l'état initial n'implique pas nécessairement un changement proportionnel à l'état suivant (contrairement aux systèmes linéaires). Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il ne perde ses propriétés. Un système non linéaire n'est en général pas soluble, plus on tente de le décomposer plus la complexité interne se révèle. La non linéarité signifie que les effets obtenus sont sans commune mesure avec leur causes.

La sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)) est une caractéristique fondamentale des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques. Si on change l'état de départ du système on s'attend à ce que l'évolution générale du système soit également modifiée (Fig : 2.1). Par exemple, si une pierre d'une certaine masse est projetée avec une certaine vitesse initiale d'un certain point, le changement de la masse, du point du départ ou de la vitesse initiale va provoquer un changement de trajectoire. Dans bon nombre de systèmes dynamiques une petite erreur sur les conditions initiales va conduire à une erreur énorme sur les états suivants du système. Une des théories illustrant cette sensibilité est "l'effet papillon", mise en évidence par le météorologiste *Edward Lorenz*. Pour la petite histoire, "l'effet papillon " veut qu'une perturbation minime telle qu'un battement d'aile de papillon puisse, après un long moment par amplification exponentielle déclencher un cyclone. Cet exemple illustre bien ce que sous-entend la théorie du chaos : un non-sens de la prédiction à long terme dû à l'impossibilité de contrôler toutes les perturbations pouvant exister au niveau de nombreux systèmes et de leur environnement. Ainsi, au regard du système météorologique mondial, un simple battement d'ailes de papillon à un endroit du globe peut créer à un autre endroit, distant de plusieurs milliers de kilomètres du premier des conditions météorologiques différentes. La sensibilité aux conditions initiales est une caractéristique fondamentale du chaos et elle magnifie même les plus petites erreurs.

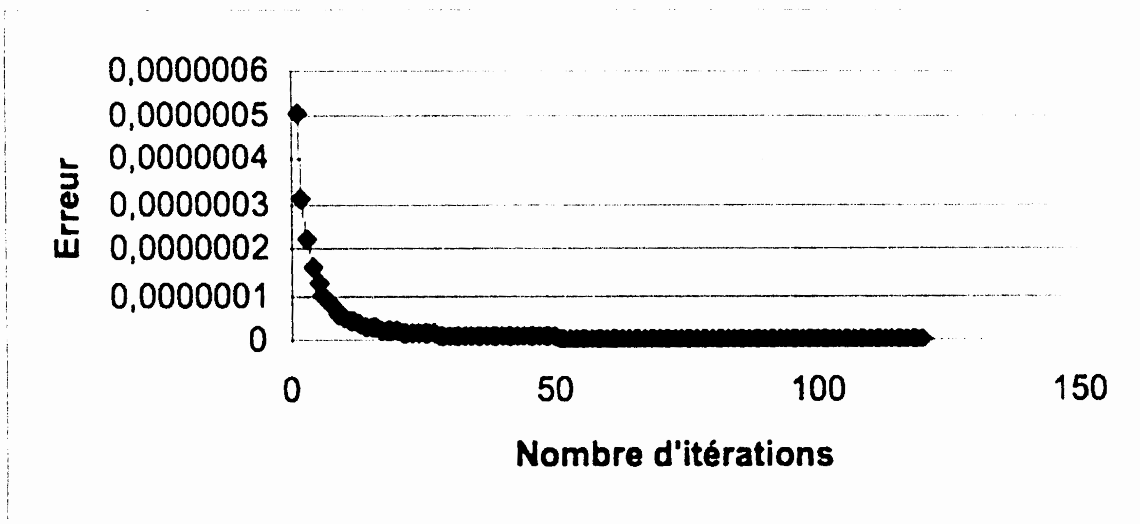
Le processus logistique

$$x_{n+1} = kx_n(1 - x_n), 0 \leq x_n \leq 1 \text{ et } k = 4$$

est un exemple de système déterministe exhibant un comportement chaotique ; sensible aux conditions initiales (Graphique 1). On peut voir que l'erreur demeure faible pendant les 15 premières itérations environ, avant d'exploser ensuite. Par comparaison, le même processus se montre parfaitement convergent et déterministe quand ($k = 1$) (Graphique 2).



Graphique 1 : Courbe de la valeur absolue de l'écart entre la série de référence et la série erronée au cours des 120 premières itérations du processus logistique ($k = 4$) avec ($x_0 = 0.75$) et écart initial $\varepsilon = 10^{-6}$.



Graphique 2 : Courbe de la valeur absolue de l'écart entre série de référence et série erroné au cours des 120, première itérations du processus logistique ($k= 1$) avec ($x_0 = 0.75$) et écart initial $\varepsilon = 10^{-6}$.

L'illustration suivante est le résultat d'une simulation numérique de ce que nous venons de dire sur la sensibilité aux conditions initiales :

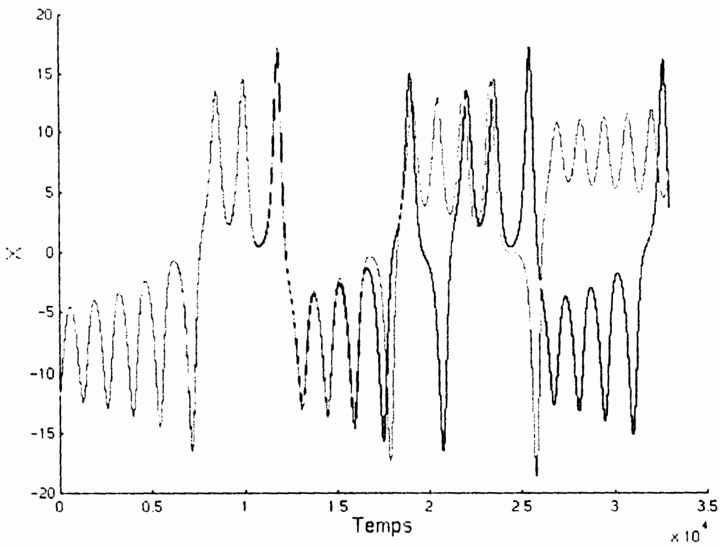


Figure 2.1 : Schématisation de l'évolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches d'un système chaotique

Chaos et déterminisme

La découverte des systèmes chaotiques réconcilie les notions apparemment antinomiques de chaos et de déterminisme. En effet, des systèmes décrits par des équations "très simples" obéissent à des lois parfaitement déterministes et pourtant leur comportement est totalement imprévisible. Cette imprévisibilité n'est pas le fruit du hasard (ces systèmes n'obéissent pas à la loi des grands nombres comme le tirage du Loto), mais de la sensibilité aux conditions initiales. Ils sont déterministes, parce que des effets objectifs et précisément mesurables et repérables déterminent la suite des événements. Ils sont chaotiques, parce que nous ne savons pas du tout ce qui va se passer, malgré la connaissance que nous avons de toutes les données qui déterminent les événements. Ainsi, bien qu'émanant d'un modèle mathématique déterministe, le comportement des systèmes chaotiques est imprévisible et erratique. Un phénomène régi par des équations déterministes peut être imprévisible.

2.2 Notion de Bifurcation

L'étude d'un système dans l'espace paramétrique montre parfois un changement qualitatif du comportement du système lorsque les paramètres du modèle varient. Une orbite peut devenir stable ou instable et des attracteurs peuvent apparaître ou disparaître. On peut en particulier passer d'un cycle limite à un attracteur chaotique. Ce changement qualitatif du comportement est appelé "**bifurcation**" et l'étude globale des bifurcations donne un diagramme de bifurcations. Il est souvent fort intéressant de tracer le diagramme de bifurcations d'un système car cela permet de visualiser son évolution vers le chaos en fonction d'un paramètre (dit paramètre de bifurcation ou de contrôle).

Voir un exemple du diagramme de bifurcations de l'application logistique :

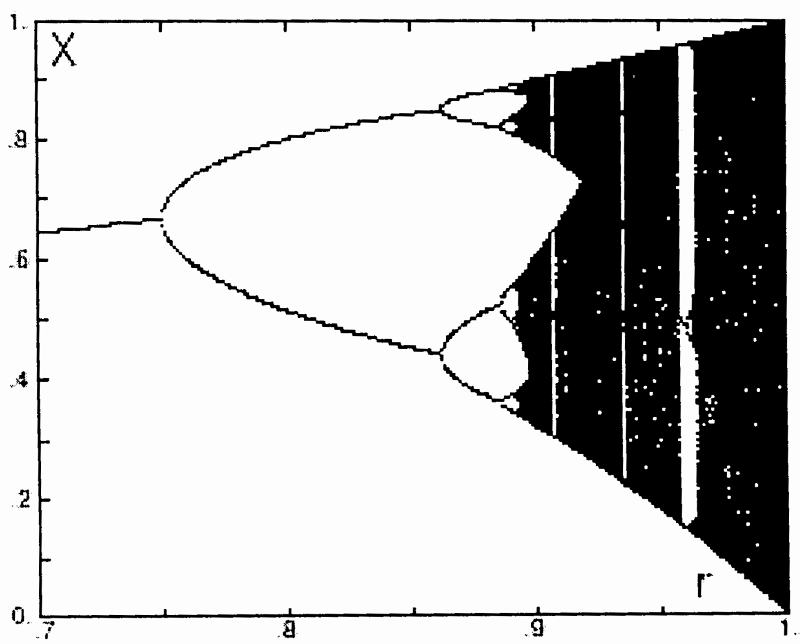


Figure 2.2 : Diagramme de bifurcation de l'itération logistique $x_{n+1} = 4rx_n(1-x_n)$ **(r : paramètre de contrôle ou de bifurcation)**

Le diagramme de bifurcation correspondant est présenté sur la figure (2.2). Pour $r \langle 0.75$, la solution est périodique de période 1.

Pour $0.75 \langle r \langle 0.862....$, domaine de stabilité de la période 2, on trouve deux points visités alternativement, puis viennent les périodes 4, $2^3, \ldots.., 2^k$, avec $k \to \infty$. Le chaos au sens introduit par *Ruelle et Takens* apparaît pour $r \rangle r_\infty = 0.862.....$

2.2.1 Différentes types de bifurcations dans les systèmes continus

Soit le système continu $\dot{x} = f(x, \lambda)$ où $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p$, dont le système admet des points fixes ou on peut avoir des solutions périodiques pour l'équation $f(x, \lambda) = 0$.

L'étude des bifurcations est focalisée sur une région volontairement limitée autour d'une solution donnée. On développe la fonction f en série de Taylor au voisinage du point d'équilibre faisant un changement de variable pour obtenir un nombre restreint d'équations différentielles dépendant d'un seul paramètre.

On considère le point d'équilibre à l'origine. L'équation différentielle prend la structure nommée : *forme normale.*

Les formes normales sont de 4 types [5] :

1) **Noeud-col** $\longrightarrow \dot{x} = \lambda - x^2$.

2) **Transcritique** $\longrightarrow \dot{x} = \lambda x - x^2$.

3) **Fourche** $\longrightarrow \dot{x} = \lambda x - x^3$.

4) **Hopf**$\longrightarrow \dot{z} = (\lambda + i\gamma)z - z\,|z|^2$, $z \in \mathbb{C}$.

Il y a deux types de bifurcation :

1) **Bifurcation supercritique (ou normale)** : si on trouve le signe (-) dans les termes non linéaires de la forme normale, c'est le cas d'une bifurcation supercritique.

2) **Bifurcation sous critique :** si on change le signe des termes non linéaires de la formes normale, on a un état inverse de la bifurcation supercritique.

Les conventions des représentations graphiques seront les suivantes :

1) **Bifurcation noeud-col** ($\dot{x} = \lambda - x^2$)

♦ Les points d'équilibre : $x = \pm\sqrt{\lambda}$ ($\lambda \rangle 0$) .

♦ Il n'existe aucune solution stable ou non pour $\lambda \langle 0$.

♦ La bifurcation apparaît en $\lambda = 0$. Pour $\lambda \rangle 0$, il y a deux point fixes ; l'un stable et l'autre instable (Fig : 2.3, changement de l'état x en fonction du paramètre du contrôle p, $\overline{p}$: point de bifurcation)

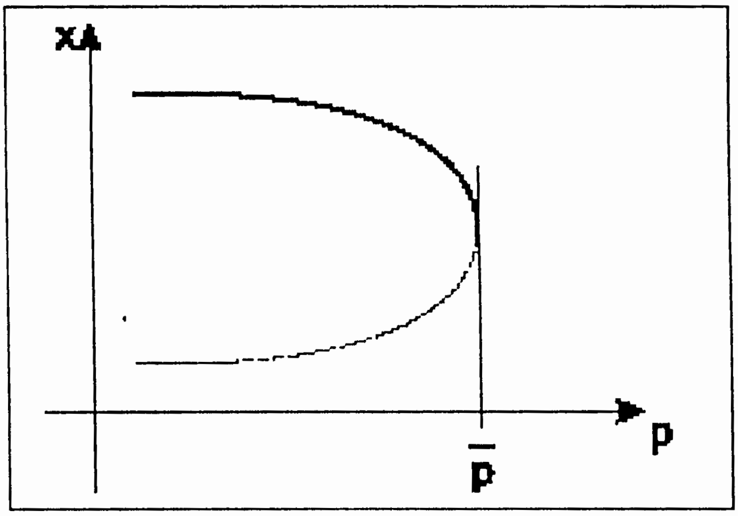


Figure 2.3 : Bifurcation noeud-col

2) **Bifurcation transcritique** ($\dot{x} = \lambda x - x^2$)

♦ Les points d'équilibre : $x = 0$ et $x = \lambda$.

♦ Il y a un échange de stabilité entre les points fixes.

♦ $x = 0$ stable pour $\lambda \langle 0$ et instable pour $\lambda \rangle 0$ tandis le contraire pour $x = \lambda$ (Fig : 2.4, changement de l'état x en fonction du paramètre du contrôle p, $\overline{p}$: point de bifurcation))

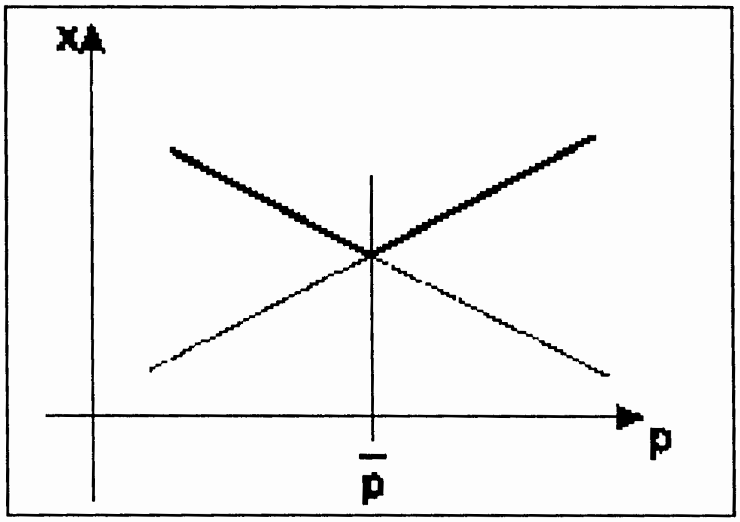


Figure 2.4 : Bifurcation transcritique

3) Bifurcation fourche ($\dot{x} = \lambda x - x^3$)

♦ Les points fixes : $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{\lambda}$ ($\lambda \rangle 0$).

♦ C'est une bifurcation symétrique.

♦ $x = 0$ est l'unique point fixe stable si $\lambda \langle 0$.

♦ $x = 0$ bifurque en trois points au $\lambda = 0$; l'un instable et deux symétriques stables (Fig : 2.5, changement de l'état x en fonction du paramètre du contrôle p, $\overline{p}$: point de bifurcation))

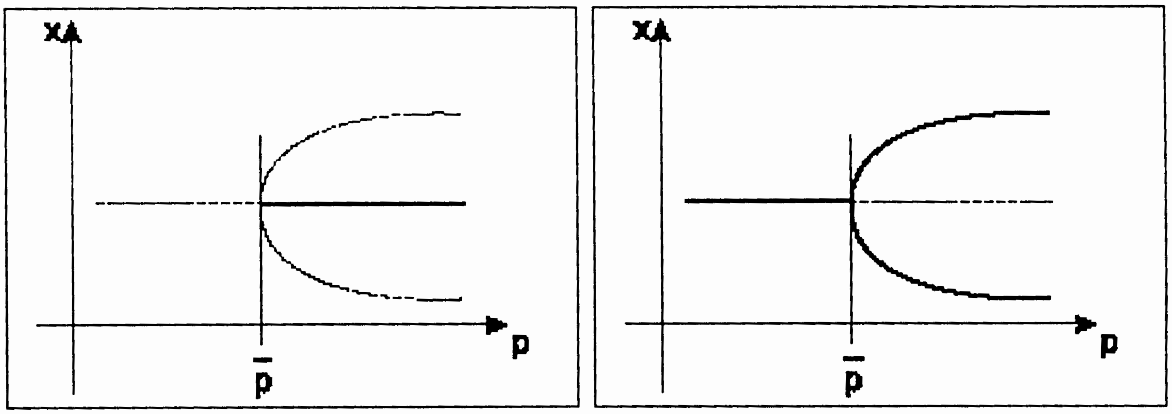


Figure 2.5 : Bifurcation fourche supercritique (à gauche) souscritique (à droite).

4) **Bifurcation de Hopf** ($\dot{z} = (\lambda + i\gamma)z - z\,|z|^2\,, z \in \mathbb{C}, \gamma$ **constante**)

La bifurcation de Hopf qui gouverne l'apparition d'oscillations présente le même caractère universel que la bifurcation fourche (équivalente complexe). Elle conduit à l'introduction d'une première fréquence (ω_1) dans le système. Dans l'espace des phases, il lui correspond un cycle limite dont il convient d'étudier la stabilité du cycle au moyen d'une section de Poincaré.

♦ $z = 0$ est une solution stationnaire.

♦ Il existe une autre solution telle que $|z|^2 = x^2 + y^2 = \lambda$

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[\lambda - (x^2 + y^2)\right] x - \gamma y \\ \dot{y} = \gamma x + \left[\lambda - (x^2 + y^2)\right] y \end{cases}$$

♦ Pour une valeur critique du paramètre, un point fixe peut bifurque en un cycle limite (Fig : 2.6, changement de l'état (x_1, x_2) en fonction du paramètre du contrôle p, $\overline{p}$: point de bifurcation).

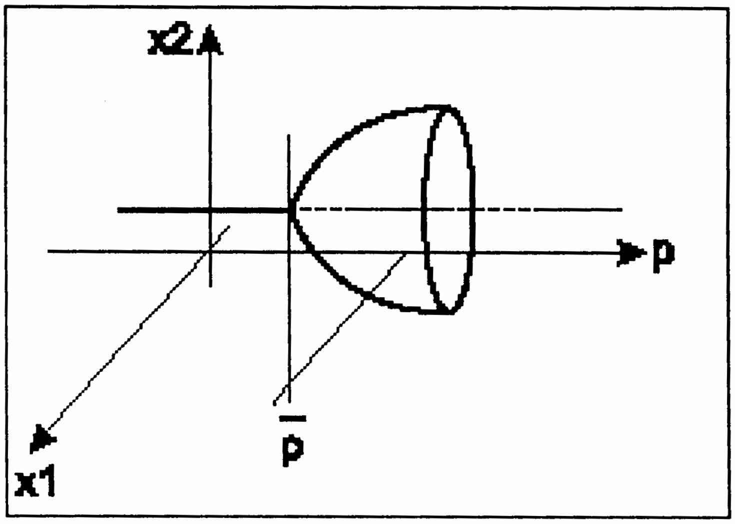


Figure 2.6 : Diagramme de bifurcation de Hopf (supercritique)

2.2.2 Scénario de transition vers le chaos

À la question du comment le chaos intervient, la théorie répond en montrant l'existence de plusieurs scénarios issus de la déstabilisation d'un cycle limite. **La théorie de Landau** fut la première théorie proposée, en 1944. L'idée d'une cascade de bifurcations introduisant une complexité croissante dans le système et faisant apparaître le chaos comme résultat d'accumulation infinie de bifurcations.

Les orbites périodiques jouent un rôle important dans de nombreux scénarios de transition vers le chaos. Dans le cas de **scénario de doublement de période (scénario de Feigenbaum)**, la variation d'un paramètre de contrôle fait passer le système par une suite de "bifurcations" chacune correspondant à l'apparition d'une orbite de période double de la précédente, qui devient alors instable. La suite infinie des valeurs du paramètre de contrôle correspondant à ces bifurcations converge de manière géométrique vers une valeur critique au-delà de laquelle peuvent être observés des régimes chaotiques, qui n'apparaissent donc que lorsque un nombre infini d'orbites périodiques ont été créées.

Le scénario de doublement de période (ou sous-harmonique) présenter dans le diagramme de l'application logistique a été mis en évidence et analysé vers 1978 par *Feigenbaum* (la figure 2.2

illustre le cascade de doublement de période pour l'application logistique). En explorant les zones de paramètres au delà de la transition, on observe en général une alternance de zones chaotiques et de "fenêtres périodiques" où le système suit un comportement régulier. Ces différentes orbites périodiques ne disparaissent pas lorsque l'on revient à un comportement chaotique : devenues instables, ces orbites restent présentes dans l'attracteur ou dans son voisinage.

Le scénario de quasi-périodicité (scénario de Ruelle et Takens) a été proposé en 1971 par *Ruelle et Takens,* la variation d'un paramètre de contrôle fait passer par un (ou plusieurs) régime(s) quasi-périodique(s).

Le scénario de l'intermittence (Manneville et Pomeau) a été étudié par *P.Manneville* et *Y.Pomeau* à partir de 1979. En considérant λ_i seuil d'intermittence du paramètre de contrôle de λ. Si $\lambda \leq \lambda_i$, le système a un comportement périodique, et pour $\lambda \geq \lambda_i$, ce régime est interrompu par intermittence par des bouffées chaotiques. La fréquence de ces intermittences chaotiques va croître à mesurer que λ augmente jusqu'à ce que le régime devienne entièrement chaotique.

Typiquement les étapes ultérieures mettant en jeu l'apparition d'une seconde fréquence (ω_2) et les différents scénarios de transition vers le chaos dépendent de la valeur du rapport $\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Le scénario de *Ruelle* et *Takens* (1971) correspond au cas α irrationnel ($\notin \mathbb{Q}$); au contraire lorsque $\alpha = \frac{p}{q}$ avec q suffisamment petit, on obtient un scénario sous-harmonique et notamment lorsque $q = 2$, la cascade de doublement de période. Pour développer cette étude il est naturel de travailler sur une itération puisque s'agissant de l'instabilité d'un cycle, on a le droit de se ramener à l'application de premier retour issue de la section de *Poincaré.* Les figures (2.7 / a, b, c, d)) illustrent le cascade de doublement de période en perspective dans l'espace des variables (x, y, z) du système de Lorenz montrant que les cycles de période 2T, 4T,....correspond à des dédoublement successifs d'un même cycles de période T [35].

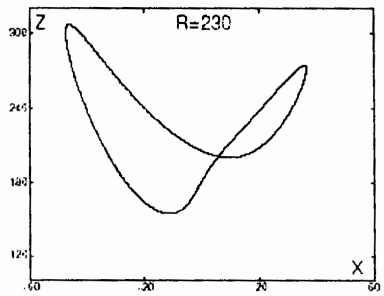


Figure 2.7 (a) : Cycle de période T, pour R = 230

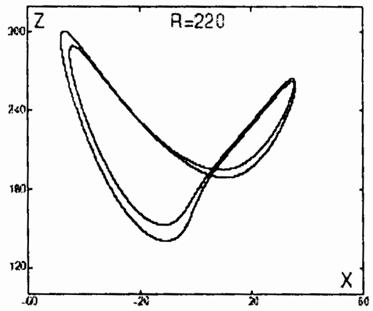


Figure 2.7 (b): Cycle de période 2T, pour R= 220

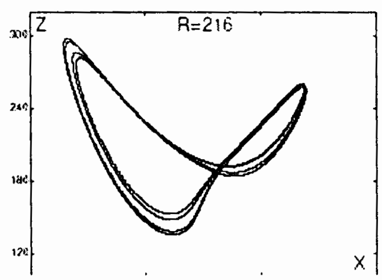


Figure 2.7 (c): Cycle de période 4T, pour R = 210

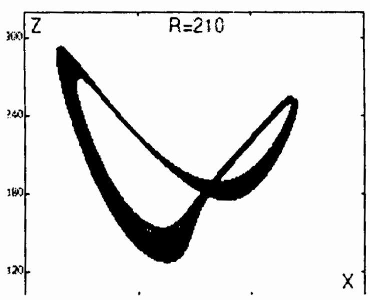


Figure 2.7 (d): Orbite chaotique de Lorenz pour R =210

Figure 2.7 (a, b, c, d) : La cascade sous harmonique de système de Lorenz [35]

Chapitre 3

Mesurer et caractériser le chaos

Dans cette partie, on cherche à caractériser un système dynamique chaotique de manière quantitative présentant des outils mathématiques : les exposants de Lyapunov et l'entropie de Kolmogorov quantifiant l'imprédictibilité à long terme et les dimensions fractales rendant compte la structure géométrique des attracteurs étranges dans l'espace des phases. Les outils du chaos sont des outils capables de rendre intelligible l'évolution temporelle de phénomènes complexes. Si un système est chaotique alors on doit pouvoir trouver un petit nombre de variables et quelques équations simples permettant une description de ce phénomène complexe. Une prédiction à court terme est alors possible mais à long terme l'évolution est indéterminée.

La mesure du chaos nous apporte donc des données sur un système complexe :

♦ La non prédictibilité de son évolution (due à l'incapacité de mesurer les perturbations apportées à l'ensemble des conditions initiales) et à l'impossibilité de déterminer le degré de précision pour l'ensembles de conditions initiales.

♦ Le nombre de variables indépendantes responsables de l'évolution du système peut être évalué en calculant la dimension fractale de l'attracteur qui régit le système.

♦ La Distinction entre le chaos déterministe et un comportement aléatoire.

♦ La corrélation entre le changement des quantités et les variations du comportement physique du système.

3.1 Exposant de Lyapunov

Pour étudier la stabilité des attracteurs du système dynamique non linéaire autonome $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^p$, on doit :

1) Calculer les valeurs propres de la matrice Jacobienne de f pour les points fixes.

2) Calculer les valeurs propres de la matrice de Floquet de l'application premier retour de f pour les cycles limites.

3) Calculer les exposants de Lyapunov de f pour les attracteurs étranges.

Lyapunov, dans ses études, s'attachait à déterminer si une solution d'un système dynamique pouvait être stable ou non quel que soit le temps d'observation. Les méthodes utilisées pour étudier la stabilité des systèmes linéaires ne convenaient pas du fait de la non linéarité des modèles et de l'existence d'une sensibilité aux conditions initiales. Lyapunov s'est donc intéressé à définir une autre méthode permettant d'établir ou non cette stabilité en étudiant notamment les divergences dues aux erreurs par l'étude des divergences entre les orbites du système.

Les exposants de Lyapunov mesurent la sensibilité aux conditions initiales du système. Donc ils permettent une mesure du taux de divergence des orbites voisines, et Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases. Par ailleurs, parmi les exposants retenus pour un système donné on considère généralement l'exposant le plus élevé.

D'une manière générale, Lyapunov part de la formule suivante :

$$\left|\frac{d_n}{d_0}\right| = \left|\frac{d_n}{d_{n-1}}\right| \left|\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}\right| \cdots\cdots \left|\frac{d_1}{d_0}\right| . D\prime o\grave{u} : \frac{1}{n} \ln \left|\frac{d_n}{d_0}\right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{d_i}{d_{i-1}}.$$

$\frac{d_i}{d_{i-1}}$décrit en fait de quelle façon une petite erreur d_i à la i^{ième} itération, est augmentée ou diminuée dans l'itération suivante. Lyapunov a montré ensuite que cette erreur tendait vers une limite "Exposant de Lyapunov".

3.1.1 Cas des systèmes discrets unidimensionnels

Soit une application discrète f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui applique x_n sur x_{n+1}. On choisit deux conditions initiales très proches, soit x_0 et x'_0 séparées d'une distance d_0,et on regarde comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. On sait que :

$$d_0 = |x'_0 - x_0|$$

après une itération d_0 devient d_1

$$d_1 = |x'_1 - x_1|$$

après n itérations la distance évolue à d_n

$$d_n = |x'_n - x_n|$$

$\frac{d_1}{d_0}$: décrit l'évolution de l'erreur d_1 dans la $1^{iére}$ itération

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{|x'_1 - x_1|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0}$$

pour d_0 infinitésimale

$$\lim_{d_0 \to 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \to 0} \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0} = |f'(x_0)|$$

On suppose que les deux trajectoires $x\,(x_0, t)$ et $x\,(x'_0,\, t)$ s'écartent à un rythme exponentiel dans la $1^{iére}$ itération . On pourra alors trouver un réel $\lambda(x_1)$ tel qu'après 1 itération :

$$\lim_{d_0 \to 0} \frac{d_1}{d_0} = e^{\lambda(x_1)}$$

par comparaison avec la limite précédente

$$e^{\lambda(x_1)} = |f'(x_0)|$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\lambda(x_1) = \log |f'(x_0)|$$

$\lambda\,(x_1)$ est appelé exposant de Lyapunov local [27], qui mesure la divergence ou la convergence après la $1^{iére}$ itération.

L'évolution de l'erreur après n itérations :

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{|x'_n - x_n|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x'_0) - f^n(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0}$$

pour d_0 infinitésimale

$$\lim_{d_0 \to 0} \frac{d_n}{d_0} = \lim_{d_0 \to 0} \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0} = \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

L'erreur d_n tend vers une limite, un réel λ, qui représente l'exposant de Lyapunov.

$$\lim_{d_0 \to 0} \frac{d_n}{d_0} = e^{\lambda n}$$

d'où :

$$e^{\lambda n} \doteq \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| \implies \log e^{\lambda n} \doteq \log \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

par conséquent

$$\lambda \doteq \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

Finalement, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda \doteq \frac{1}{n} \log \left| \frac{df(f^{n-1}(x_0))}{dx} \right| = \ldots = \frac{1}{n} \log |f'(x_{n-1})|\,|f'(x_{n-2})| \ldots |f'(x_1)|\,|f'(x_0)|$$

$$\lambda \doteq \frac{1}{n} \log \Pi_{i=0}^{i=n-1} \left| \acute{f}(x_i) \right|$$

on conclut :

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \log \left| \acute{f}(x_i) \right| \tag{3.1}$$

avec la notation :

$$\acute{f}(x_i) = \frac{df}{dx} |_{x=x_i}$$

Appliquant la formule (3.1) pour $x_i = x^*$tel que x* est un point d'équilibre, il faut que :

$$\lambda = \log |\gamma| \text{ où } \gamma = \acute{f}(x^*)$$

★ Si $|\gamma| \langle 1 \Longrightarrow \lambda \langle 0$, alors x^* est asymptotiquement stable et la trajectoire issue d'une condition initiale $x_0(i.e\ \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$) est asymptotiquement stable au voisinage de x^*.

★ Si $|\gamma| = 1 \Longrightarrow \lambda = 0$, x^* est stable et par conséquent la trajectoire issue de x_0 est périodique donc stable .

★ Si $|\gamma| \rangle 1 \Longrightarrow \lambda \rangle 0$, x^*est instable ainsi que la trajectoire issue de x_0.

En résumé : Soient x_0 est une condition initiale, $B(x^*, \varepsilon)$ est un voisinage du point d'équilibre x^*.

♦ Si $x_0 \in B(x^*, \varepsilon)$ alors l'exposant de Lyapunov $\lambda = \log |\gamma|$.

♦ Si $x_0 \notin B(x^*, \varepsilon)$ alors l'exposant de Lyapunov λ est la moyenne de divergence exponentielle donnée par :

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \ln \left| \acute{f}(x_i) \right|.$$

Exemple 9 : *l'application logistique*

$$f(x_i) = 4x_i(1 - x_i) \quad , x_i \in [0, 1] .$$

On applique la formule (3.1) pour calculer l'exposant de Lyapunov de f. Il faut que :

$$\lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |4(1 - 2x_i)|$$

Alors : $\lambda = \log 2 \rangle 0$ d'où un comportement chaotique

3.1.2 Cas des systèmes discrets multidimensionnels

f est une application discrète de $\mathbb{R}^p$dans $\mathbb{R}^p$: $x_{n+1} = f(x_n)$

Comme précédemment on s'intéresse à :

$$f^n(x_0 + d_0) - f^n(x) \tilde{=} d_0 e^{n\lambda}$$

En écrivant un développement en série limitée d'ordre 1 de $f^n(x_0)$ au voisinage de x' on a :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &= f^n(x_0) - f^n(x'_0) \\ &\tilde{=} \frac{df^n(x_0)}{dx}(x_0 - x'_0) \\ &\tilde{=} J(x_0)J(x_1)\cdots J(x_n)(x_0 - x'_0) \\ &\tilde{=} \prod_{i=0}^{n} J(x_i)(x_0 - x'_0) \end{aligned}$$

On note : $\prod_{I=0}^{n} J(x_i)$ par $J^n(x_0)$, ainsi : $x_n - x'_n \tilde{=} J^n(x_0)(x_0 - x'_0)$
où : $J^n(x_0)$ représente la matrice Jacobienne de $f^n(.)$ au point x_0 . Il s'agit d'une matrice carrée $p \times p$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible. P_p telle que :

$D_p^n = P_p^{-1} J^n P_p$ où D_p^n est la matrice diagonale des valeurs propres $q_i(f^k(x_0))$ $(i = 1, ., p)$ de J^n .

On définit alors les p exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log q_i(f^k(x_0)) \tag{3.2}$$

λ_i représente l'exposant de Lyapunov associé à la trajectoire issue de x_0 dans la i^{ieme} direction.

Ainsi :

$$\begin{aligned} x_n - x'_n &= (J(x^*))^n(x_0 - x'_0), \text{ tel que } x^* \text{est un point d'équilibre.} \\ \text{d'où} &: \left\|x_{i,n} - x_{i,n'}\right\| = [q_i(x^*)]^n \left\|x_{i,0} - x'_{i,0}\right\| \ldots\ldots \blacktriangledown \end{aligned}$$

et puisque :

$$\left\|x_{i,n}-x_{i,n'}\right\|=e^{\lambda_i n}\left\|x_{i,0}-x'_{i,0}\right\|$$

par comparaison avec l'égalité ▼ on obtient $e^{\lambda_i n}=[q_i(x^*)]^n$.

D'où :

$$\lambda_i=\log q_i(x^*), i=1,2,....,p$$

Exemple 10 : *La transformation de boulanger*

La transformation de boulanger (figure 3.1) sur $E=[0,1]\times[0,1]$ définie par :

$$f:\left\{\begin{array}{lll} x & \longmapsto & 2x(\operatorname{mod} 1) \\ y & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{2}ay & \text{pour} & 0\leq x\langle\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(ay+1) & \text{pour} & \frac{1}{2}\leq x\langle 1 \end{array}\right. \quad (0\leq a\leq 1) \end{array}\right.$$

(0,0) est le seul point fixe de f dont le jacobien J est donnée par : $J=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{a}{2}\end{pmatrix}$

Les valeurs propres de J de $f^n(x_0)$ au point $x_0=(0,0)$ sont : $q_1(f^n(x_0))=2$ et $q_2(f^n(x_0))=\frac{a}{2}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

Appliquant la limite (3.2) dans deux directions on obtient les exposants de Lyapunov

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\log 2 \\ \lambda_2 &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\log\frac{a}{2} \end{aligned}$$

D'où : $\lambda_1=\log 2$ et $\lambda_2=\log\frac{a}{2}$

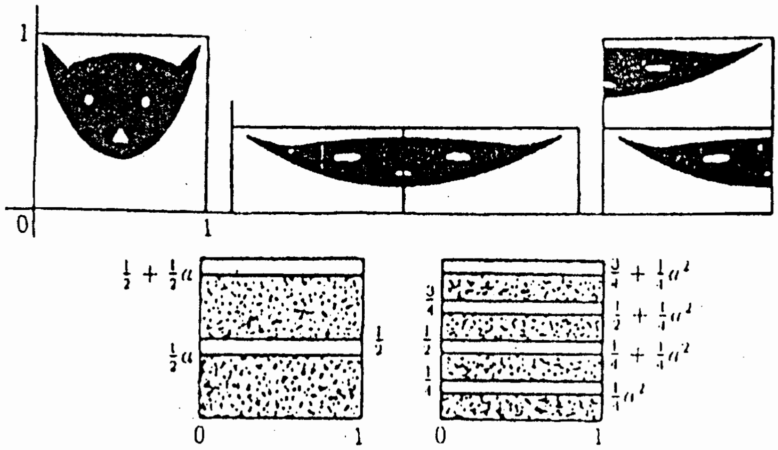


Figure 3.1 : Transformation de boulanger $f(E)$ pour $a = 1$ (en haut), $f(E)$ et $f^2(E)$ pour $0\langle a\langle 1$ (en bas)[9]

3.1.3 Cas des systèmes continus multidimensionnels

Pour un système différentiel de dimension n définie par f tel que :

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad / \; t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R}^n$$

L'exposant de Lyapunov dans la direction i est donnée par :

$$\lambda_i = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|x_i(t) - x_i'(t)\|}{\|x_i(0) - x_i'(0)\|} \tag{3.3}$$

Exemple 11 : *Système de lorenz*

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = 28x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \frac{8}{3}z \end{cases}$$

Les exposants de Lyapunov pour une condition initiale x_0 choisie sont :

$$\lambda_1 \tilde{=} 2.16, \;\; \lambda_2 \tilde{=} 0.00, \;\; \lambda_3 \tilde{=} -32.40.$$

Les exposants de Lyapunov permettent donc de quantifier la sensibilité aux conditions initiales mais aussi de séparer les comportements instables et/ou chaotiques des comportements stables et prévisibles. Si un exposant est strictement positif, alors la S.C.I. est très grande et le système peut être considéré comme chaotique. Par contre, s'ils sont tous négatifs ou égaux à zéro, on est en présence d'un phénomène stable ou périodique. Pour une application tridimensionnelle on peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de Lyapunov dans le tableau suivant :

Type d'attracteur	**Signe des exposants de Lyapunov**
point fixe	$(-,-,-)$
Cycle limite	$(0,-,-)$
Tore	$(0,0,-)$
Attracteur étrange	$(+,0,-)$

Il faut surtout retenir que pour un système dissipatif on a : $\sum \lambda_i \langle 0$ et que l'un des exposants de Lyapunov soit strictement positif pour que le système soit considéré comme chaotique.

3.1.4 Exposant de Lyapunov et le diagramme de bifurcation

Prenons le système associé à la formule logistique $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$ et $x_0 = 1/2$. La figure 3.2 met en relation pour cette formule, l'exposant de Lyapunov (en bleu) et le diagramme de bifurcation (en vert) pour des valeurs de r variant de 0 à 4. On voit très bien que les valeurs négatives de l'exposant de Lyapunov correspondent aux valeurs r pour lesquelles le système se stabilise avec le temps. Plus la valeur absolue de l'exposant négatif de Lyapunov est grande, plus le système sera stable. Inversement pour les valeurs positives, le système passe dans une phase chaotique et devient sensible à de petites variations de sa condition initiale x_0.

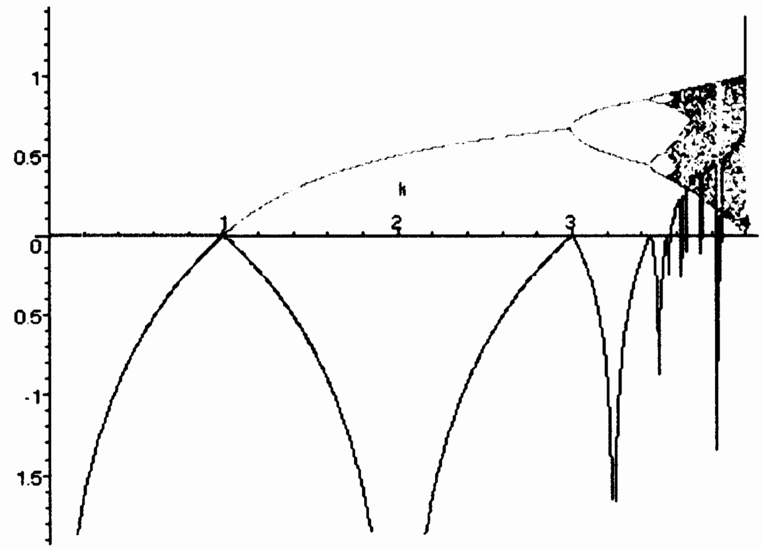


Figure 3.2: Diagramme de bifurcation de l'application logistique.

3.1.5 La méthode QR pour calculer les exposants de Lyapunov d'un système itératif

Pour calculer les exposants de Lyapunov on peut utiliser un programme (MATLAB) qui permet de vérifier le comportement chaotique du système en fonction du paramètre du contrôle système. Il est basé sur la définition mathématique des exposants donnée ci-dessus :

$$\lambda_i = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log q_i(f^k(x_0))$$

avec : $i = 1, ..., p$ et $q_i(f^k(x_0))$ les valeurs propres de la matrice Jacobienne. La difficulté du calcul des exposants repose en fait sur la détermination des valeurs propres de la matrice Jacobienne. Le programme utilise la méthode dite de factorisation QR pour calculer les valeurs propres. La méthode consiste à décomposer une matrice J en un produit d'une matrice orthogonale Q par une matrice triangulaire supérieure R.

Théorème 5 [3] :

Si J est une matrice inversible, de valeurs propres réelles différentes, la suite $(J^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée des valeurs propres de J.

3.1.6 Calcule numérique du plus grand exposant de Lyapunov

La détermination du plus grand exposant de Lyapunov est faite numériquement. L'idée principale est la suivante pour un système $\dot{x} = f(x, c)$ [11]

1) On considère un intervalle de temps fini $[t_0,\ t]$, $t \in \mathbb{R}$.

2) On le décompose en de petits intervalles de même longueur.

$$[t_0,t] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [t_k, t_{k+1}] \quad \text{telque : } t_{k+1} - t_k = h, \forall k \in \mathbb{N}$$

3) On intègre obtenant les points $x(t_k)$ de la trajectoire de référence x^* issue de $x(0)$ et au fur à mesure on doit trouver $x'(t_k)$ les points de la trajectoire voisine issue de la condition initiale $x(0) + \overrightarrow{\partial x_0}$ et à la $k^{iéme}$itération $x'(t_k) = x(t_k) + \overrightarrow{\partial x_k}, \forall k \in \mathbb{N}$.

4) On procède à la linéarisation du système au voisinage de $x^*(t)$ la trajectoire de référence $(\frac{\partial F}{\partial x}\big]_{x^*(t)})$.

5) On calcule le Jacobien en tout point $x(t_k)$ de $x^*(t)$ c'est à dire $\frac{\partial F}{\partial x}\big]_{x^*(t_k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.

6) On calcule la divergence en chaque pas :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\partial x_1} &= \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_0)} \cdot \overrightarrow{\partial x_0} \\
\overrightarrow{\partial x_2} &= \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_1)} \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_0)} \cdot \overrightarrow{\partial x_0} \\
\overrightarrow{\partial x_3} &= \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_2)} \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_1)} \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_0)} \cdot \overrightarrow{\partial x_0} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overrightarrow{\partial x_n} &= \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_n)} \cdots\cdots\cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_2)} \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_1)} \frac{\partial F}{\partial x}\Big]_{x(t_0)} \cdot \overrightarrow{\partial x_0}
\end{aligned}$$

Posant : $J_n = \frac{\partial F}{\partial x}\big]_{x(t_n)} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial x}\big]_{x(t_2)} \frac{\partial F}{\partial x}\big]_{x(t_1)} \frac{\partial F}{\partial x}\big]_{x(t_0)}$.

Le plus grand exposant de Lyapunov est donné par la moyenne sur n itérations en fonction du paramètre c :

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2n} \ln tr \left[\tilde{J}_n \cdot J_n \right]$$

3.2 L'entropie

L'entropie est une notion fut introduite en mécanique statistique, en thermodynamique et dans la théorie de l'information. On définit parfois l'entropie comme la mesure du désordre d'un système ou de sa prédictibilité. Dans tout processus l'entropie reste constante ou augmente, et, si elle augmente, le processus est irréversible; par le fait que le nombre d'états possible au final est si grand qu'il ne peut y avoir de "retour en arrière". L'entropie est considérée comme une fonction d'état d'un système croissante jusqu'à un maximum lorsque le système atteint un état d'équilibre, En guise d'exemple : un processus instable est ordonné et atteint le désordre moléculaire à l'équilibre thermodynamique si l'entropie tend à son maximum. Cherchant les liens entre information, entropie et déterminisme, Shannon, Weiner et Von Neumann ont proposé que l'entropie soit compensée par une croissance en information. Au milieu des années 50, Kolmogorov proposait d'après les travaux de J.Sinai et N.S Krylov, une définition de l'entropie appelée (entropie par unité de temps) puis rapidement (entropie de Kolmogorov). Cette entropie a la propriété d'être positive dans les systèmes dynamiques et permet de mesurer la complexité du comportement d'un tel système. A la fin des années 70, Robert Shaw avait décrit l'entropie par : si l'ensemble des états accessibles au système varie en fonction polynomiale du temps le taux (de la quantité d'information) se rapproche de zéro et l'évolution du système demeure prévisible. Au contraire, lorsque la fonction est exponentielle croissante du temps le système est chaotique.

3.2.1 L'entropie du système dynamique

L'idée de la définition de l'entropie d'un système dynamique est la suivante : supposant que la condition initiale du système n'est pas connue avec une précision infinie, mais que le comportement que l'on va observer en faisant évoluer le système va nous informer de mieux en mieux sur l'état de départ dans l'espace des phases. Cette information sur l'ensemble des trajectoires permet de reconstituer le point de départ.

La quantité moyenne d'information qu'on gagne en faisant évoluer le processus (ou à chaque itération) est **l'entropie du système**. La notion d'information repose sur deux idées :

1. Un évènement rare apporte plus d'information qu'un évènement fréquent.

2. Les informations fournies par des évènements indépendant s'ajoutent, par exemple : connaître l'état d'un système à un instant t c'est connaître sa position et connaître sa vitesse. Considérons un système qui peut prendre un état de propabilité p ; cela revient à dire qu'il passe une fraction p de temps dans cet état, et le système lui apporte une information égale à :

$$S = \log \frac{1}{p} \qquad \blacklozenge$$

La quantité $\frac{1}{p}$ mesure la rareté d'un évènement. C'est un nombre supérieur ou égale à 1. Un évènement qui n'arrive presque jamais a une rareté très grande, donc une infinité d'informations un évènement qui arrive presque toujours a une rareté de 1, donc l'information est nulle.

L'entropie est l'information reçue par un système en moyenne. Si on appelle p_i la probabilité pour que le système soit dans l'état i (pour i allant de 1 à n, tel que n est le nombre d'états possibles) on trouve la célèbre formule :

$$S = -\sum_{i=1}^{i=n} p_i \log p_i. \qquad \blacklozenge\blacklozenge$$

La formule $\blacklozenge\blacklozenge$ et la généralisation de $\blacklozenge$ si les états ne sont pas équiprobables.

3.2.2 L'entropie et l'espace des phases :

La notion fondamentale de l'entropie est basée sur le calcul des états accessibles du système sous certaines considérations [27] et pour cela, Kolmogorov et Sinaï ont proposé de quadriller l'espace des phases en des cellules élémentaires de même diamètre. Pour les systèmes dissipatifs divisant seulement la région contenant l'attracteur, on calcule p_i, la possibilité qu'une trajectoire issue d'une cellule C_0 soit dans la i^{eme}cellule C_i tel que : M est le nombre de conditions prises dans C_0, M_i est le nombre de points de trajectoires situées en C_i sachant que la région d'évolution est divisée en m cellules .

L'entropie S_i après n unités de temps est donnée par :

$$S_n = -\sum_{i=1}^{i=m} p_i \log p_i. \tag{3.4}$$

dans la théorie de l'information la trajectoire est considérée comme un message [34], les cellules de la partition sont associés aux lettres de l'alphabet, parfois un texte est une suite finie de lettres 0 et 1. L'entropie d'un texte peut êtres calculée à partir de la fréquence des 0 et des 1. Elle est maximale lorsque les 0 et les 1 apparaissent avec la même probabilité. Elle est minimale et vaut 0, lorsque le texte ne contient que des 0 (ou que de 1) [34]. Le système d'équations différentielles régissant la représentation dans l'espace des phases suppose que le système soit considéré comme réversible dans le sens où aucune information n'est perdue au cours du temps. Dans les systèmes dissipatifs l'information sur les conditions initiales est perdue, Shaw écrit sur le principe d'incertitude :..." nous assurons qu'il existe un bloc de taille minimale dans l'espace des phases, qui est une constante physique de la nature. Si deux orbites (les trajectoires dans cet espace des phases) devaient arriver dans un tel bloc, on ne pourrait plus les distinguer et l'information représentée dans leurs origines séparées serait perdue".... Si le système est chaotique, l'information est créée, c'est dans le sens qu'un ensemble d'états initiaux indiscernables [11] (a une certaine précision ε prés) sur l'attracteur aboutit de façon non prédictible à une multitude d'états finaux, on a quelque sorte un enrichissement de l'information. Une variation infinitésimale des conditions initiales provoque un comportement radicalement différent du système donc un changement de l'information que l'on a sur un système. Dans le cas d'un système parfaitement connu et modélisé même une infinité de mesures infiniment rapprochée traitées par une puissance de calcul infinie ne suffiraient pas à empêcher une divergence exponentielle croissante entre la prévision et la réalité ; c'est la sensibilité aux conditions initiales. Le taux de la création de l'information est mesuré par l'entropie de Kolmogorov – Sinaï (ou la K- entropie).

La K- entropie K_n après n unités de temps est définie par :

$$K_n = \frac{1}{\tau}(S_{n+1} - S_n) \tag{3.5}$$

K_n est le taux de changement de l'entropie allant de $t = n\tau$ à $t = (n+1)\tau$ (τ :unité de temps), la valeur moyenne de la K-entropie sur tout l'attracteur (soit une long durée) divisé en des cellules de diamètre ε est donnée par :

$$\begin{aligned} K_n &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^{N} (S_{n+1} - S_n) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0) \end{aligned} \tag{3.6}$$

la partition doit être plus fine pour que chaque cellule contienne un seul point. Cela nous permet de suivre la trajectoire point par point et ainsi faire en sorte que la K-entropie soit indépendante du choix de la partition, donc on réduit la taille des cellules en prenant $\varepsilon \to 0$. De plus la description de la dynamique devant être la plus précise possible on fait tendre l'unité de temps vers 0, ce qui conduit à la définition suivante :

$$K = \lim_{\tau\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0) \tag{3.7}$$

La positivité de la K-entropie renseigne sur l'état chaotique du système donc sur son imprévisibilité à long terme.

Exemple 12 : *La K-entropie de l'application dyadique* [34]

$$x_{n+1} = 2x_n (mod 1)$$

On doit faire une partition de l'intervalle $[0, 1]$ en M intervalles de longeur $\frac{1}{M}$

Un message a une lettre a pour entropie $S_1 = \log M$. Pour passer d'un « message à une lettre » aux «message à deux lettres», l'intervalle de longueur $\frac{1}{M}$ auquel appartenait la condition initiale x_0 se trouve étiré d'un facteur 2 ($x_1 = 2x_0$) et alors :

$$S_2 = -\sum_{i=1}^{2m} P_i \log p_i = -(2M)(\frac{1}{2M}) \log(\frac{1}{2M}) = \log 2M$$

d'où :

$$S_2 = \log 2 + \log M$$

Les trajectoires en itirant le système k fois s'exprime comme des messages à k lettres ($2^k M$

messages de même probabilité), l'écart après k itération est $\delta x_k = 2^k \delta x_0$.

Alors :

$$S_k = -\sum_{i=1}^{2^k m} P_i \log p_i = -(2^k M)(\frac{1}{2^k M}) \log(\frac{1}{2^k M}) = \log 2^k M$$

d'où :

$$S_k = k \log 2 + \log M.$$

la définition de la K-entropie conduit à :

$$K = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}(S_k - S_1) \qquad \text{d'où :} \quad K = \log 2.$$

On découvre ici qu'il y'a une relation entre la K-entropie et exposant de Lyapunov.

3.2.3 La K-entropie et exposant de Lyapunov

On recouvre la région de l'attracteur par un nombre fini de cellules, N_0 est le nombre de cellules initiales évoluant après n unité de temps en N_n cellules visitées par les trajectoires, le nombre des cellules augmente exponentiellement avec le temps et on aura : $N_n = e^{\lambda_i n \tau} N_0$, λ_i exposant de Lyapunov positif dans une direction i, l'entropie est donnée par la formule précédente :

$$S_n = -\sum_{i=1}^{i=m} p_i \log p_i$$

la probabilité p_i est supposée uniforme m désigne le nombre de cellules de la partition [27], alors : $S_n = \log N_n$.

La K-entropie est vaut :

$$\begin{aligned}
K &= \lim_{\tau \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\tau}(S_n - S_0) \\
&= \lim_{\tau \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\tau}(\log N_n - \log N_0) \\
&= \lim_{\tau \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\tau} \log(\frac{N_n}{N_0}) \\
&= \lim_{\tau \to 0} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\tau} e^{\lambda_i n \tau}
\end{aligned}$$

d'où : $K = \lambda_i$.

Par conséquent; si l 'étirement se fait dans seule direction la K-entropie est donnée par l'exposant de Lyapunov positif donc : $K = \lambda_i$ et si l'étirement se fait dans plusieurs directions, soient $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_k$ les exposants de Lyapunov positifs, sous certains conditions (théorème de Pesin) [11], la K-entropie est donnée par :

$$K = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

3.3 Les mécanismes du chaos : étirement et repliement

La section de Poincaré permet de comprendre comment un système chaotique, peut, tout en restant confiné dans une région bornée de l'espace des phases, être imprédictible. En examinant les intersections de l'attracteur avec des plans de section disposés successivement on s'aperçoit que deux transformations géométriques complémentaires sont à l'oeuvre (Fig : 3.3).

L'une, **l'étirement**, éloigne les trajectoires proches, expliquant ainsi "la sensibilité aux conditions initiales". La seconde, **le repliement,** ramène l'une sur l'autre des trajectoires situées à des extrémités opposées de l'attracteur, maintenant la dynamique dans une région de volume fini ce qui explique **la structure fractale** (infiniment feuilletée) des attracteurs étranges. Le repliement induit par les non linéarités du système, est donc le responsable du caractère fractale.

Le modèle de Hénon qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & y_k + 1 - a x_k^2 \\ y_{k+1} & = & b x_k \end{cases}$$

C'est un système dissipatif chaotique qui, dans son principe réalise les opérations schématisées sur la figure 3.4.

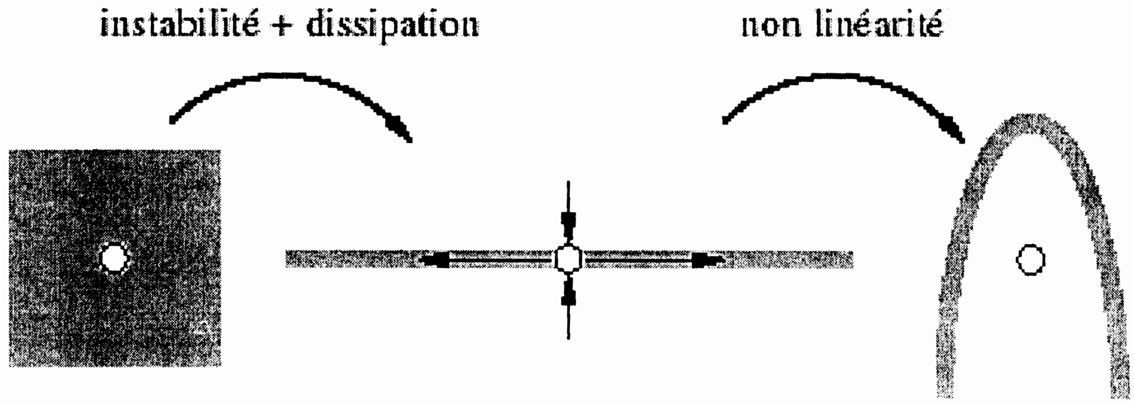


Figure 3.3 : Génériquement, un système dynamique instable dissipatif et non-linéaire étire mais comprime plus qu'il n'étire, tout en repliant son espace des phases.

L'attracteur obtenu en itérant une condition initiale est présenté pour $a = 1,4$ et $b = 0,3$ sur la figure 3.4 (zoom). Sa partie gauche le montre dans son ensemble alors que la structure de type fractale est illustrée sur la partie droite. On y voit des lignes continues qui correspondent à la direction d'instabilité le long de l'attracteur.

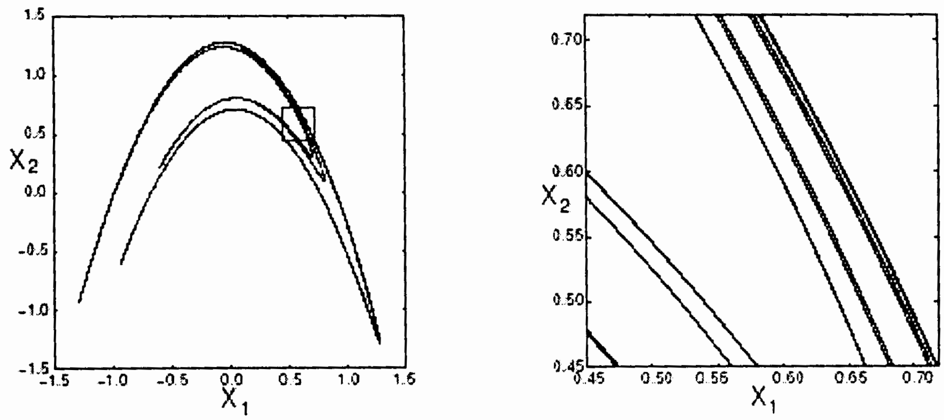


Figure 3.4 : Modèle de Hénon : attracteur et zoom illustrant la structure fractale.

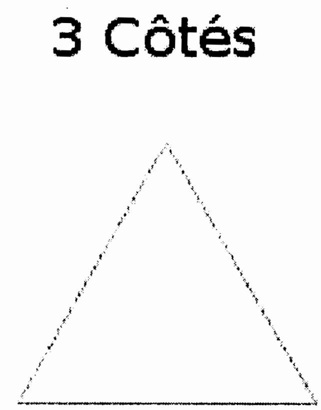
3.4 Fractales et la théorie du chaos

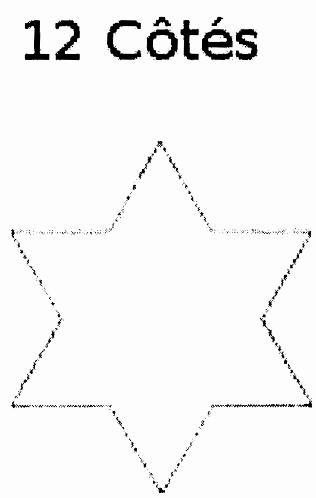
Notion de fractales

Ce mot a été crée par Benoît Mandelbrot (Mathématicien français) pour un de ses ouvrages en 1975. Ce mot provient du latin "fractus" qui signifie brisé. Généralement, toutes les formes géométriques dites classiques (cercle, triangle...) perdent leur agencement quand on exerce un agrandissement. Lors d'un "zoom" sur un des côtés d'un rectangle, par exemple, ce côté n'est absolument pas significatif de la figure à laquelle il appartient. Si on observe juste ce côté, on ne peut pas dire à quelle figure il appartient et on ne peut tracer la figure ou l'objet en ne voyant que lui. Par contre, un objet fractal est un objet qui maintient un agencement détaillé, et ce malgré qu'on agrandisse une de ses parties, et sur un registre d'échelles consécutif, on parle alors "d'autosimilarité". L'intérêt est évident pour des objets comportant des caractéristiques se répétant sur toutes les échelles. Ce concept a été créé dans le but de cerner les mécanismes et les objets fragmentés. Ces objets se trouvent dans la nature (flocon de neige, les nuages, les arbres, les ramifications des branches......).

Exemple d'un fractale : flocon de Von Koch

Commençons avec un exemple : le flocon de Von Koch.[17]





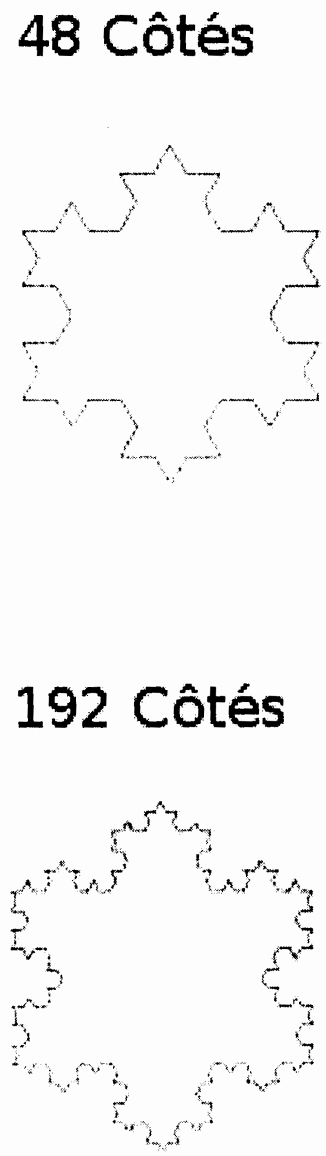


Figure 3.5 : Flocon de Von Koch

La construction de cette structure montre le nombre de côtés croît exponentiellement, on peut donc vite arriver, à partir d'une figure simple à des objets complètement fragmentés, et dont les éléments ne ressemblent plus à des côtés. Pour tracer la courbe de Von Koch, il faut simplement tracer un triangle équilatéral, puis refaire un triangle équilatéral sur chacun des trois côtés du triangle initial. Pour cela, il suffit de faire ce nouveau triangle à la place du tiers central. A partir de là, c'est toujours la même méthode, on crée un nouveau triangle sur chaque côté de chaque nouveau triangle jusqu'à l'infini. A chaque nouvelle itération, le nombre de côtés croît et on remarque alors une autosimilarité des parties de la courbe. Cette courbe de Von Koch appelée communément "flocon de Von Koch" date de 1904 et a été publiée dans un article titré « Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire ».

L'étoile de Von Koch est une courbe fermée de **longueur infinie** entourant une **surface finie**. En effet, la longueur de la courbe de Von Koch est :

$$L = 3 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \longrightarrow \infty$$

Comme conditions initiales on a :

$L_1 = 3x$ (x est la longueur du côté) après n itérations $L_{n+1} = \frac{4}{3} L_n$.

L_n est donc une suite géométrique de premier terme $L_1 = 3x$ et de raison $q = \frac{4}{3}$.

On a donc : $L_n = 3\times \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

La limite de cette suite = longueur de la courbe = $+\infty$

Soit S_n la surface entourée par l'étoile de Von Koch à l'étape n, $n = 0, 1, 2, ...$on a en posant $\alpha = \frac{4}{9}$:

$$\begin{aligned}
S_0 &= \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ surface d'un triangle équilatérale de côté 1,} \\
S_1 &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) S_0, \\
S_2 &= S_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2, \ S_2 = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha\right) S_0. \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_n &= S_{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2}, \ S_n = \left(1 + \frac{1}{3}\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1}\right)\right) S_0.
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$S = \lim_{t \to \infty} S_n = \left(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\alpha}\right) S_0 = \frac{8}{5} S_0.$$

Alors : la fractale de Von Koch occupe une **surface finie.**

La dimension de la courbe de Von Koch n'est pas entière comme cela sera expliqué au paragraphe suivant.

3.4.1 Propriétés des fractales

Un objet fractal a deux propriétés fondamentales :

1) **L'autosimilarité** ; le motif géométrique se répète sur des échelles de plus en plus petites. Quelle que soit l'échelle à laquelle on regarde cette structure, l'aspect parait identique.

2) Les fractals mathématiques tels que la courbe de Von Koch, l'ensemble de Cantor, le triangle de Seirpinsky,..., et les attracteurs étranges ont une dimension non entière ; c'est **la dimension fractale.**

3.5 Les dimensions fractales

Un volume est un objet de dimension euclidienne 3, on sait que l'on a besoin de trois variables pour situer la position d'un point sur ce volume. C'est ce qu'on appelle la dimension euclidienne du volume. La dimension euclidienne d'un objet quelconque, un objet étant considéré ici comme un ensemble de points, on doit simplement comptabiliser le nombre minimum de variables qui sont nécessaire pour pouvoir situer la position d'un point quelconque de cet objet.

Les fractales sont des courbes complexes dont la dimension dite dimension fractale (car non entière) est un nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation, donc de complexité.

3.5.1 Dimension de Kolmogorov

Soit un ensemble de points situés dans un espace à n dimensions. On recouvre cet ensemble par des cubes de côté r. Soit $N(r)$ le nombre minimal de cubes nécessaires à cette opération (Fig : 3.6)

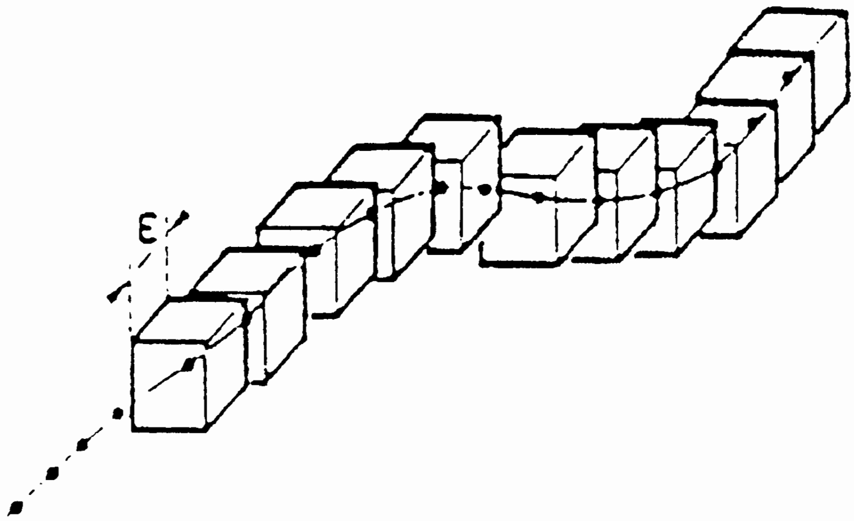


Figure 3.6 : Illustration du principe du recouvrement d'un objet (ensemble de point) par des cubes de côté ε [7]

Par définition, la dimension de Kolmogorov d_K est la limite, si elle existe, de l'expression :

$$d_K = -\lim_{r\to 0} \frac{\log N(r)}{\log r}$$

Quand $r \longrightarrow 0$, chaque cube doit contenir un point, le nombre de cubes augmente. Autrement dit, pour r petit, le nombre de boules nécessaires pour recouvrir l'ensemble des points varie avec r comme r^{-D}.

Exemple 13 : *Dimension de Kolmogorov d'un "segment"* [17]

Si l'ensemble est celui des points d'un segment de longueur l, le nombre minimal de petits segments du longeur r suffisant pour le recouvrement est égal à : $N(r) = \frac{l}{r}$.

D'où :

$$\begin{aligned} d_K &= -\lim_{r\to 0} \frac{\log \frac{l}{r}}{\log r} \\ d_K &= -\lim_{r\to 0} \frac{\log l - \log r}{\log r} \end{aligned}$$

Lorsque $r \to 0$, le terme log l devient négligeable devant $-\log r$.

Donc

$$d_K = +\lim_{r\to 0} \frac{\log r}{\log r}$$

On conclut : $d_K = 1$.

Exemple 14 : *Dimension de Kolmogorov d'une "surface"* [17]

Soit l'ensemble des points d'une surface d'aire S.

Le nombre de cercles de rayon r qui servent à recouvrir la surface est egal à :

$$N(r) = Sr^2$$

La limite

$$\begin{aligned} d_K &= -\lim_{r\to 0} \frac{\log Sr^2}{\log r} \\ &= -\lim_{r\to 0} \frac{\log S - 2\log r}{\log r} \\ &= +\lim_{r\to 0} \frac{2\log r}{\log r} \quad (\log S \text{ est négligeable devant } \ln r \text{ quand } r \to 0). \end{aligned}$$

Par conséquent : $d_K = 2$.

Exemple 15 : *Dimension de Kolmogorov du flocon "Von Koch"* [17]

Le tableau suivant permet de calculer la dimension fractale de l'étoile de Von koch :

n	N(r)	r
0	3	1
1	3×4	$\frac{1}{3}$
2	3×4^2	$\frac{1}{3^2}$
.	.	.
.	.	.
n	3×4^n	3^{-n}

On en déduit :

$$D_K = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(3\times4^n)}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} \tilde{=} 1.2618.$$

3.5.2 Dimension de Hausdorff-Besicovitch

Si U est un ensemble de $\mathbb{R}^n$, le diamètre de U est défini par :

$$|U| = \sup\{|x-y| \ : x, y \in U\}.$$

Soit A$\subset \mathbb{R}^n$, considérant un recouvrement fini de A par des ensembles U_i de diamètre plus petit qu'un ε donné, autrement dit : $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$: avec

$$0\langle|U_i|\langle\varepsilon.soit : \mu_d(A,\varepsilon) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^d, |U_i|\langle\varepsilon\right\}$$

Dans la pratique les U_i sont des boules de diamètre ε.

La mesure de Hausdorff d-dimensionnelle est définie par :

$$\mu_d(A) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_d(A,\varepsilon)$$

Hausdorff a démontré qu'il existe un réel d_H unique tel que :

$$\mu_d(A) = \begin{cases} 0 & d\rangle d_H \\ +\infty & d\langle d_H \end{cases}$$

d_H est appelé la dimension de Hausdorff de l'ensemble A, la dimension de Hausdorff est en général, très difficile à calculer cependant dans beaucoup de cas, elle est égale à la dimension de Kolmogorov.

Exemple 16 : *Dimension de Hausdorff de l'ensemble de "Cantor"* [17]

L'ensemble de Cantor est obtenu en enlevant au segment unité son tiers central puis on répète cette opération sur les deux segments restants et on riétére indéfiniment ce processus (Fig : 3.7). L'ensemble K des points restants s'appelle l'ensemble de Cantor. Pour définir K, on définit d'abord une séquence de sous -ensembles K_n :

$$\begin{aligned} K_0 &= [0,1] \\ K_1 &= \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right] \\ K_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K_n &= \left[0,\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \cup \left[2(\frac{1}{3})^n,(\frac{1}{3})^{n-1}\right] \cup \ldots\ldots \cup \left[1-(\frac{1}{3})^n,1\right] \end{aligned}$$

K_n est la réunion de 2^n intervalles fermés de longueur 3^{-n} avec :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \subset K_{n+1} \subset K_n \subset \ldots\ldots \subset K_2 \subset K_1 \subset K_0 = [0,1]$$

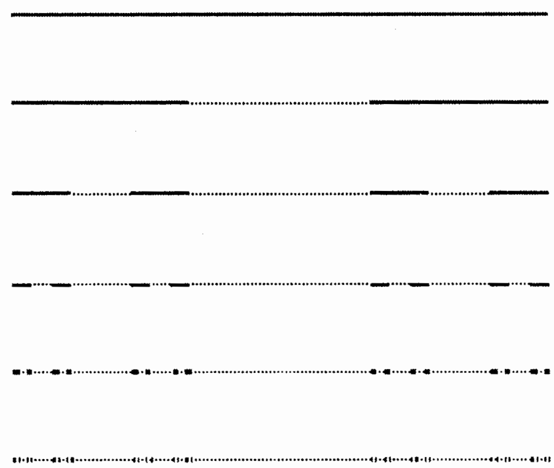


Figure 3.7 : Construction de l'ensemble de Cantor [9]

la dimension de Kolmogorov d_K est égale à : $d_K = \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0.6309 \langle 1$.

$$\begin{aligned}
\mu_d(K,\varepsilon) &= \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(3^{-n}\right)^d, 3^{-n}\langle\varepsilon\right\} \\
&= \inf\left\{2^n\left(3^{-n}\right)^d, 3^{-n}\langle\varepsilon\right\}
\end{aligned}$$

$\varepsilon \longrightarrow 0$ implique $n \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\mu_d(K) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_d(K,\varepsilon) \\
&= \lim_{n\to\infty} 2^n\left(3^{-n}\right)^d \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3^d}\right)^n
\end{aligned}$$

Sachant que $d_H = d_K = \frac{\log 2}{\log 3}$, on en déduit :

$$\mu_{d_H}(K) \leq \lim_{t\to\infty} 2^n\left(3^{-n}\right)^{d_H} = 1.$$

3.5.3 Dimension de Lyapunov

On considère un système itératif chaotique de dimension 2. Il admet deux exposants l'un positif et l'autre négatif, soit $\lambda_1 \rangle 0$ et $\lambda_2 \langle 0$.Traçant un carré C de coté L dans la région de l'attracteur étrange, dans ce cas une direction du carré sera contractée d'un facteur $e^{\lambda_2 t}$ et l'autre sera dilatée d'un facteur $e^{\lambda_1 t}$. L'aire de C varie comme :

$$C(t) = C = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Soit $N(t)$ le nombre de carrés de côté $\varepsilon = L\ e^{\lambda_2 t}$ qui recouvrent $C(t)$.

On a :

$$N(t) = \frac{L^2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}}{L^2 e^{2\lambda_2 t}} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

On définit la dimension de Lyapunov d_L par analogie avec la dimension de Kolmogorov comme :

$$\begin{aligned} d_L &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}}{\log L e^{\lambda_2 t}} \\ &= -\lim_{t\to+\infty} \frac{(\lambda_1-\lambda_2)t}{\log L - \lambda_2 t} \qquad (\log L \text{ est négligeable devant } \lambda_2 t) \\ &= -\lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda_1 t - \lambda_2 t}{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

D'où :

$$d_L = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Exemple 17 : *La transformation de boulanger* [17]

Domaine de définition $E = [0,1] \times [0,1]$ l'application f de la transformation de boulanger est définie au § 3.1.2 .

On a : $\lambda_1 = \log 2$ et $\lambda_2 = \log\left(\frac{a}{2}\right)$ $(0 \leq a \leq 1)$ (Fig : 3.1)

donc :

$$d_L = 1 - \frac{\log 2}{\log a - \log 2}$$

En effet, pour la transformation de boulanger, la dimension suivant la direction x est $d_x = 1$ (car $N(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon}$) et suivant la direction y, on a le tableau suivant :

n	**N(ε)**	ε
0	1	a
1	2	$\frac{a}{2}$
2	2^2	$\frac{a^2}{2^2}$
3	2^3	$\frac{a^3}{2^3}$
...	...	...
...	...	...
n	2^n	$\frac{a^n}{2^n}$

On en déduit, la dimension fractale suivant la direction y :

$$\begin{aligned} d_y &= -\lim_{n \to +\infty} \frac{\log 2^n}{\log \frac{a^n}{2^n}} \\ &= \frac{\log 2}{\log 2 - \log a} \end{aligned}$$

Puisque $d(A \times B) = d(A) + d(B)$, d'où :

$$\begin{aligned} d &= d_x + d_y \\ &= 1 + \frac{\log 2}{\log 2 - \log a} \\ &= d_L \end{aligned}$$

Exemple 18 : *L'application de Hénon* [17]

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & y_k + 1 - a x_k^2 \\ y_{k+1} & = & b x_k \end{cases}$$

$d_L = 1 + \frac{0.604}{2.341}$ (pour les exposants : $\lambda_1 = 0.604$, $\lambda_2 = -0.341$)

3.5.4 Dimension de corrélation

L'idée principale de la dimension de corrélation est la suivante : plus un ensemble est de dimension élevée, plus rapidement le nombre de points voisins d'un point donné de cet ensemble augmentera avec la distance à ce point. Encore faut- il pouvoir évaluer le nombre des points voisins, s'ils se trouvent dans une boule de rayon donné, on fait varier après les centres des boules de même dimension dans l'espace des phases.

La fonction de corrélation détermine la probabilité de trouver deux paires de points dans une même boule de rayon r, pour des valeurs très petites de r. La fonction de corrélation évolue exponentiellement avec r dont l'exposant est la dimension de corrélation.

On doit suivre les étapes suivantes pour définir et calculer la dimension de corrélation [7], [11], [27], [34] :

1) à partir d'une trajectoire de l'attracteur reconstruit (voir la reconstruction d'un attracteur dans le chapitre 4), choisissons N points fini.

2) on fixe un point $i \in N$ points, soit le nombre, noté $N_i(r)$ de points situés dans la boule de rayon r centré sur i On dit qu'il existe une corrélation entre les points qui sont dans la même boule; c'est à dire deux paires de points i, j dont la distance est inférieur à r; autrement dit : $\|\overrightarrow{x}_i - \overrightarrow{x}_j\| \langle r$, sont en corrélation.

3) on définit la fonction de corrélation, noté $C^p(r)$, telle que p est la dimension de l'espace de reconstruction. Une telle fonction peut s'écrire :

$$C^p(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} P_i(r)$$

$P_i(r)$ est la probabilité de point situé à une distance inférieur à r du i^{eme} point, d'où :

$$P_i(r) = \frac{N_i(r)}{N-1}$$

par substitution dans la formule de la fonction de corrélation, on obtient :

$$C^p(r) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{N_i(r)}{N-1} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}N_i(r)$$

Soit encore :

$$C^p(r) = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1, i\neq j}^{N} H(r - \|\overrightarrow{x}_i - \overrightarrow{x}_j\|)$$

$H(x)$ est la fonction d' Heavside, τ est le temps de retard et le vecteur $\overrightarrow{x}_i$ défini par :

$$\overrightarrow{x}_i = [x(t+(i-1)\tau),\ x(t+(i-2)\tau), ..., x(t+(p+i-2)\tau)]$$

La fonction de corrélation s'écrit donc :

$$C^p(r) = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, i\neq j}^{N} H(r - \|\overrightarrow{x}_i - \overrightarrow{x}_j\|)$$

parce qu'il faut compter la somme de tous les points dans des boules centrées sur tous les points de la trajectoire, sachant que :

$$\|\overrightarrow{x}_i - \overrightarrow{x}_j\| = \max_k |x(t_i + k\tau) - x(t_j + k\tau)|$$

La caractérisation de l'attracteur tout entier nécessite le passage à la limite sur N.

Soit :

$$C^p(r) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\sum_{j=1, i\neq j}^{N} H(r - \|\overrightarrow{x}_i - \overrightarrow{x}_j\|)$$

D'après la loi de puissance $N(r) \eqsim r^{\nu}$ (ν est une dimension fractale), ainsi

$$C^p(r) = kN(r), k \in \mathbb{R}$$

donc :

$$C^p(r) = kr^\nu$$

Cela signifie que le nombre de points corrélés va croître lorsque r augmente, on note d_c la dimension de corrélation, alors : $d_c = \nu$.En appliquant le logarithme à $C^p(r) = kr^{d_c}$, on obtient

$$\log C^p(r) = \log k + d_c \log r \qquad \blacklozenge$$

$$\Longrightarrow\ d_c = \frac{\log C^p(r) - \log k}{\log r}$$

lorsque $r \longrightarrow 0$, le terme $\log k$ devient négligeable devant $\log C^p(r)$ ($\log C^p(r) \to -\infty$)
On définit la dimension de corrélation d_c par :

$$d_c = \lim_{r \to 0} \frac{\log C^p(r)}{\log r}$$

D'après l'égalité $\blacklozenge$: $\log C^p(r)$ est une fonction linéaire de $\log r$

$$\log C^p(r) = f(\log r)$$

Par dérivation on a

$$f'(\log r) = (\log k + d_c \ \log r)'$$

Alors :

$$f'(\log r) = d_c$$

D'où : d_c la dimension de corrélation est égale à la valeur de la pente de la région linéaire de la courbe de la fonction log $C^p(r) = f(\log r)$.

Caractérisation du régime chaotique

La dimension de corrélation correspond à une mesure de la dimension de l'attracteur reconstruit du système étudié. En d'autre termes, à l'aide de cette méthode on peut calculer la dimension de l'attracteur du système étudié et ainsi déterminer si oui ou non il est construit de manière fractale. Si à l'issue du calcul, on obtient une valeur positive non entière, cela signifie le système possède un attracteur étrange.

Concrètement, le principe de la méthode repose sur les corrélations entre les points de la série temporelle (voir le chapitre suivant).

La dimension de corrélation d_c est déduite de la pente de la région linéaire du graphe de la fonction $\log C^p(r) = f(\log r)$ [5], [27], [11], [34]. La variation de l'exposant d_c avec la dimension p de l'espace de reconstruction, renseigne sur la dynamique du système. Dans le cas d'un comportement aléatoire, d_c augmente linéairement avec p [7]. Par contre; pour un régime chaotique, il existe une saturation très nette de d_c,elle devient indépendante de p, et l'attracteur correspondant étrange (Fig : 3.8). Le résultat de ce type de traitement démontre le caractère déterministe du chaos étudié, et fixe par ailleurs une borne supérieure au nombre de degrés de liberté du système

Exemple 19 : *Dimension de corrélation de l'attracteur de Hénon* [7]

La valeur de d_c de l'attracteur Hénon que l'on peut déduire, suivant la méthode de calcul ci-dessus est :

$$d_c = 1.25 \pm 0.05$$

compatible avec la dimension de Kolmogorov de l'attracteur Hénon d_K calculée à partir de sa définition.

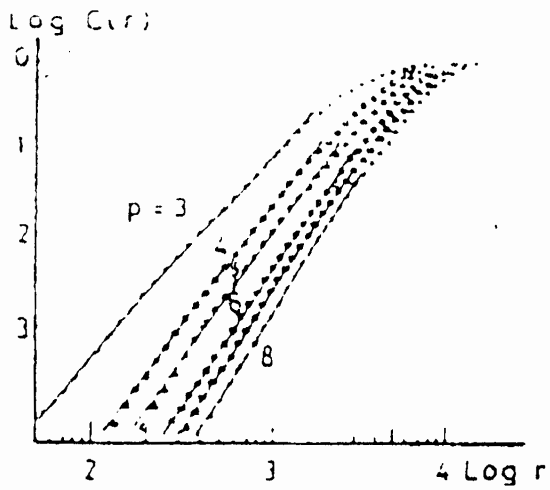


Figure 3.8 : Caractéristique logC(r) / logr de l'état chaotique de la convection Rayleigh-Bénard au déla d'une dimension d'espace de reconstruction p = 4. La pente de la caractéristique cesse d'augmenter (D'aprés B.Malraison, P.Atten, P.Bergé, M.Dubois) [7]

Troisième partie

CHAOS ET CARDIOLOGIE

Chapitre 4

Application du chaos à la cardiologie

Pour les systèmes non linéaires, la proportionnalité n'a pas lieu : les petits changements peuvent avoir des effets dramatiques et imprévisibles. Une complication supplémentaire est que des systèmes non linéaires composés de sous systèmes multiples ne peuvent pas être compris en analysant ces composants individuellement. Toute stratégie de réduction échoue parce que les composants d'un réseau non linéaire agissent l'un sur l'autre, c.-à-d., ils sont couplés. Par exemple la combinaison des mouvements vibratoires (interférences) des cellules d'un stimulateur cardiaque, leur accouplement non linéaire produit des comportements qui défient l'explication en utilisant les modèles (linéaires) traditionnels (Fig. 4.4) [19] , [20].

L'analyse de la variabilité de fréquence cardiaque HRV (variation des intervalles battement à battement) est basée sur le concept que les fluctuations rapides peuvent spécifiquement refléter des changements d'activité cardiaque. Elle prouve que la structure produisant du signal n'est pas simplement linéaire, mais comporte également des contributions non linéaires. Ces signaux sont essentiellement mobiles ; peuvent contenir des indicateurs de la maladie courante, ou même des avertissements au sujet des maladies imminentes. Les indicateurs ou bio-signaux sont non stationnaires peuvent se produire au hasard dans l'échelle du temps. Cependant, étudier et indiquer exactement des anomalies dans des données volumineuses rassemblées est un travail laborieux. [18].

Le traitement des maladies cardiaques par la théorie du chaos est un sujet d'intérêt croissant. Le diagnostic visuel de l'électrocardiogramme (ECG) est une méthode d'analyse de l'activité électrique du cœur. La variabilité de fréquence cardiaque (HRV), qui désigne la variation des intervalles de battement à battement, est un autre traitement graphique, mais l'ECG et l'HRV ont leurs limites, certaines informations sur le rythme cardiaque étant cachées à l'œil humain qui examine ces graphiques.

La variabilité du rythme cardiaque change en fonction de l'état du patient. Donc, les modifications observées sont dans une certaine mesure fonction de la pathologie cardiaque.

Ces dernières années, on pensait que la variabilité de rythme cardiaque possédait une structure chaotique. L'utilité pratique des outils du chaos dans le cadre de l'étude du rythme cardiaque tels que : le plus grand exposant de Lyapunov, entropie de Kolmogorov et les dimensions fractales.... reste une question ouverte dans le domaine de la recherche.

Le but de ce travail est donc de présenter deux approches d'analyse non linéaire qui sont basées sur le concept du chaos. La première approche applique les quantificateurs du chaos sur différents ECG de patients atteints de différentes anomalies. La seconde approche utilise les séries temporelles cardiaques RR, pour distinguer entre l'état d'un cœur sain et l'état d'un cœur malade. La distinction entre les différentes maladies cardiaques, s'appuie sur la nature chaotique des séries RR.

4.1 Séries temporelles

L'observation expérimentale d'un système dynamique se fait généralement par une série temporelle qui peut être pensée comme une séquence d'observations faite au travers d'une fonction de mesure. Si le signal $x(t)$ est une telle fonction, la série temporelle est une discrétisation (traitée numériquement) du signal $x(t)$ utilisant un intervalle de temps régulier, noté τ. De ce fait on détermine la série de mesures : $x(t)$, $x(t+\tau)$, $x(t+2\tau)$, ...où τ est «le temps de retard» convenablement choisi. En d'autres termes, on serait en droit de traiter comme étant des variables indépendantes, le $x(t)$ et ce même signal à des instants différents. Par exemple : la position du pendule est un signal temporel qui ne permet pas de décrire l'état du pendule. Mais en lui associant la vitesse on obtient un ensemble de deux variables qui suffisent à décrire l'état du pendule. On aurait pu tout aussi bien remplacer la vitesse $\dot{x}(t)$ par une autre variable $x(t+\tau)$, et l'accélération $\ddot{x}(t)$ par $x(t+2\tau)$. La connaissance de deux valeurs successives de la position de pendule permet de décrire son état, s'agissant d'un système à deux degrés de liberté.

Plus généralement, il a été démontré que la connaissance de n valeurs successives du signal d'un système à n degrés de liberté permet de décrire l'état de ce système, à condition de bien choisir le retard entre deux valeurs successives.

Un système dynamique est modélisé par la donnée d'un état et une loi d'évolution qui est un ensemble d'équations. Dans le cas du coeur comme système dynamique, les informations disponibles sur le système sont un ensemble de mesures du signal ECG. Il n'y a aucune description mathématique de la dynamique fondamentale du coeur. C'est-à-dire, on traite seulement les séries temporelles, le nombre total des variables d'état n'étant pas connu. Par conséquent, pour étudier la dynamique d'un tel système, nous devons d'abord reconstruire l'attracteur dans l'espace d'états avec un choix convenable de la dimension de plongement ainsi que du délai de retard.

4.2 Reconstruction de l'attracteur « méthode des retards »

Pour visualiser un signal temporel sous la forme d'un attracteur dans un espace des phases, il faut connaître à chaque instant t_i, sa série temporelle de longueur m : $x(t_i), x(t_i+\tau), x(t_i+2\tau)$, ... $x(t_i + (m-1)\tau)$. Ensuite, on fabrique les points $Y(t_i)$ de l'attracteur en leur attribuant comme coordonnées les m valeurs successives de la série temporelle, c'est-à-dire,

$$Y(t_i) = [x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \ldots, x(t_i + (m-1)\tau)]$$

où m est dite « dimension de plongement ». La technique consiste à « plonger » une suite de valeurs du signal

$$\{x(t_1), x(t_2), .., x(t_n), \ldots\}$$

dans un espace de dimension m par « la méthode des retards » :

$$P : \{x(t_i)\}_{i\geq 0} \rightarrow \{Y(t_i) = [x(t_i), x(t_i+\tau), x(t_i+2\tau), \ldots, x(t_i+(m-1)\tau)]\}_{i\geq 0}$$

Une suite de points du signal $\{x(t_i)\}_{i\geq 0}$ est associée à une suite de points $\{Y(t_i)\}_{i\geq 0}$ d'une trajectoire reconstruite avec un choix « judicieux » de la dimension m, on peut reconstruire l'attracteur du système dynamique à partir d'une seule trajectoire laissant le signal évoluer sans le perturber pendant un temps suffisamment long.

La reconstruction de l'attracteur par la « la méthode des retards » ne veut pas dire que la représentation obtenue dans un tel espace est en tout point identique à l'attracteur dans l'espace des phases, mais seulement que cette représentation conserve les propriétés topologiques de l'attracteur originel [7], permettant ainsi l'application des outils de détection du chaos. Il a été démontré que les exposants de Lyapunov calculés à partir des attracteurs reconstruits aux mêmes valeurs que ceux calculés à partir des attracteurs originaux.

De plus la visualisation des séries temporelles dans l'espace des phases de reconstruction donne une information visuelle sur le type d'attracteur que l'on observe.

La reconstruction de l'attracteur nécessite la détermination de deux paramètres, le temps de retards τ et la dimension de plongement m [46] , [34].

(1) Le choix du temps de retard τ

• Si τ est choisi trop faible les coordonnées successives des points $Y(t_i)$ deviennent très liées entre elles, entraînant des corrélations forte entre les coordonnées des points $Y(t_i)$ et l'attracteur est tiré le long d'une diagonale (voir un exemple sur l'attracteur de Lorenz, Fig : 4.1 a).

• Si τ est choisi trop élevé les coordonnées successives des points $Y(t_i)$ risquent au contraire d'être trop décorrélée entre elles conduisant à un ensemble des valeurs aléatoires les unes par rapport aux autres, et conduisant à l'observation d'intersections de l'attracteur reconstruit avec lui même (Fig : 4.1 c).

• Donc, τ est choisi de telle sorte que les coordonnées des points $Y(t_i)$ soient non corrélées et indépendantes les unes des autres (Fig : 4.1 b).

Pour ces raisons, deux mesures sont utilisées pour déterminer le délai optimal, à savoir le premier zéro de la fonction d'auto corrélation temporelle et le premier minimum local de l'information mutuelle [46].

La fonction d'auto corrélation qui rend compte des corrélation linéaires, est :

$$C(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \int_{t=0}^{t=T} x(t)x(t+\tau)dt$$

On peut utiliser la formule suivante :

$$C(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \frac{\sum_i [(x(t_i) - \bar{x})(x(t_i+\tau) - \bar{x})]}{s^2(x)}$$

où s et $\bar{x}$ sont respectivement l'écart type et la moyenne des données. L'information mutuelle prend en compte les corrélations non linéaires, et l'on doit calculer :

$$S(\tau) = -\sum_{ij} p_{ij}(\tau) \ln \frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j}$$

où p_i est la probabilité de trouver une valeur de la série temporelle dans le $i^{éme}$ intervalle, $p_{ij}(\tau)$ est la probabilité associée pour qu'une observation tombe dans le $i^{éme}$ intervalle et qu'au temps τ plus tard elle tombe dans le $j^{éme}$ intervalle. En théorie, cette expression n'a pas une dépendance systématique de la taille des éléments partitionnés et peut facilement être calculée. D'après la littérature il semble raisonnable, si l'information mutuelle montre un minimum pour une certaine valeur de τ, que celui-ci soit un bon candidat pour être le délai temporel. Cependant, ceci n'est pas toujours vrai, surtout lorsque la dimension de plongement dépasse 2. De plus, toutes les applications ne fonctionnent pas de façon optimale avec un même délai [46].

(2) Le choix de la dimension de plongement

Si l'attracteur originel a pour dimension fractale d_f pour le plonger dans un espace de reconstruction de dimension m, il a été démontré que la condition suffisante de choisir m est : $m = 2d_f$.

Pour étudier la structure géométrique de l'attracteur en le reconstruisant dans des dimensions croissantes de m.

• Si la dimension de plongement m est trop petite, l'attracteur présentera des intersections avec lui-même, des points spatialement voisins sur l'attracteur (mais pas nécessairement temporellement voisins) sont soit de vrais voisins dus à la dynamique du système, soit de faux voisins dus aux intersections avec lui-même (Fig : 4.2).

• Dans une dimension plus grande, où les intersections avec lui-même ont disparu, les faux voisins disparaissent.

On essaie de trouver une valeur seuil de m pour laquelle aucun faux voisin, noté FNN n'est identifié lorsque l'on augmente la dimension m. Cette approche a été mise en algorithme notamment par Kennel et al. (1992). Il tient compte des données bruitées et se base sur l'hypothèse que le bruit augmente l'estimation de la dimension de plongement [46].

L'algorithme est le suivant, pour chaque point $Y(t_i)$ dans l'espace de reconstruction on cherche son plus proche voisin $Y(t_j)$ dans l'espace de dimension m. On calcule la distance $\|Y(t_i) - Y(t_j)\|$ puis on calcule pour chaque point le quotient

$$\frac{\|Y(t_{i+1}) - Y(t_{j+1})\|}{\|Y(t_i) - Y(t_j)\|}$$

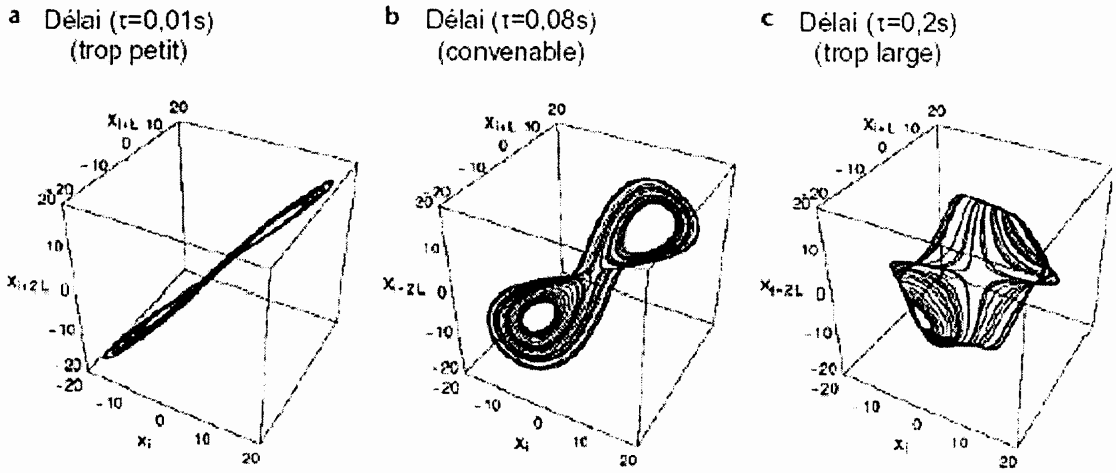


Figure 4.1 : Espace de phases reconstruit à partir de la variable x de l'attracteur de Lorenz (dimension de plongement m = 3). Le délai de retard τ est fixé à 0.01s (a), à 0.08s (b) et 0.2s (c) [46].

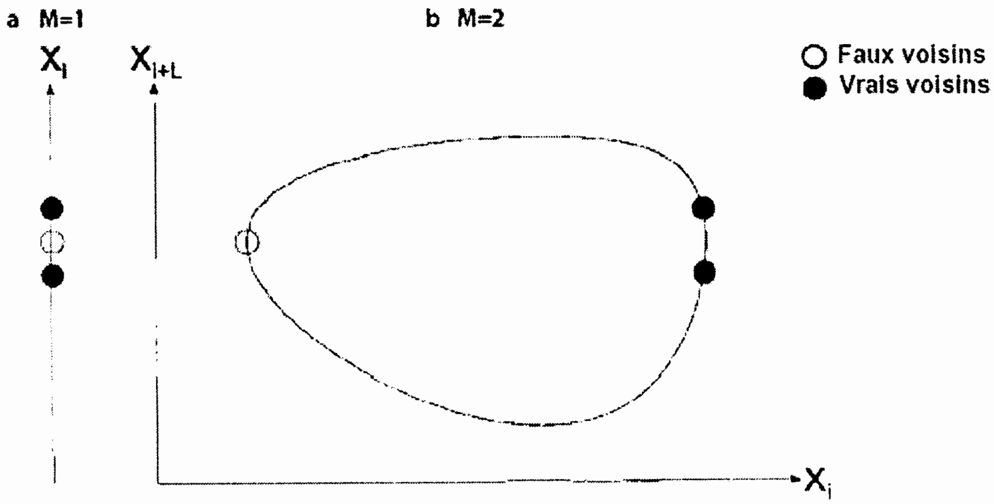


Figure 4.2 : Représentation schématique du concept de faux (plus proches) voisins. Le plongement d'un cycle limite à deux dimensions (b) dans une dimension de plongement trop petite (a, m = 1) entraîne l'apparition de faux voisins, ceux-ci ne sont pas voisins dans l'espace de phases originel [46].

4.3 Application de la « méthode des retards » sur l'ECG

A partir des séries temporelles de différents signaux ECG représentant l'état normal et des modèles d'arythmies cardiaques, on reconstruit dans un espace des phases les attracteurs représentatifs du système cardiaque respectant les étapes suivantes pour tous les attracteurs :

1. On représente graphiquement l'auto corrélation $C(\tau)$, fonction du délai temporel (τ), d'où, le premier zéro de la fonction auto corrélation est déterminé.

2. Le premier minimum local de $S(\tau)$, l'information mutuelle, du délai temporel (τ), est déterminé graphiquement.

3. Les étapes précédentes permettent un choix convenable de la valeur de (τ), temps de retard pour tous les sujets.

4. On détermine la dimension de plongement m, utilisant le nombre de FNN, pour des dimensions allant de 1 à m, c'est-à-dire en augmentant m par pas de 1 jusqu a ce que le nombre de FNN tombent pratiquement à zéro. Utilisant l'algorithme de Hegger et al.(1999) le résultat est donné graphiquement en pourcentage de FNN.

4.4 Intérêt de l'application des outils du chaos

Deux problèmes sont à poser :

1. Un quantificateur du chaos, peut-il décrire le comportement cardiaque modélisé par les séries temporelles du signal ECG ?
   Pour cela, sur des données réelles des signaux ECG, de base de données d'arythmie de MIT-BIH [49], présentées dans les articles [39], [14], [37], [50] on a utilisé des outils de la quantification du chaos, principalement le plus grand exposant de Lyapunov et la dimension de corrélation.

2. Peut-on valider l'hypothèse que le système cardiaque soit un système chaotique ?
   Cette dernière question est traitée par la « méthode des retards », reconstruire des attracteurs pour les signaux ECG indiquant l'état normal du rythme cardiaque et les différents types d'arythmies et des estimations du chaos sont calculés dont les estimateurs de chaos positifs, alors on peut présumer que le système cardiaque n'est pas périodique,

ni aléatoire, il est de type chaotique déterministe. C'est-à-dire, sensible aux condition initiales, imprévisible à long terme.

4.5 Dimension de corrélation

On cherche à quantifier précisément du comportement chaotique de l'ECG, par la « dimension de corrélation ». Il s'agit alors d'une quantification de la complexité de l'information corrélée, c'est-à-dire **non aléatoire** contenue dans le signal ECG.

La dimension de corrélation appliquée à une série temporelle va permettre d'affirmer que cette série répond à une dynamique imprévisible à long terme. la dimension de corrélation d_c ou $d(m, r)$ dépend de la dimension de plongement m et de la distance r entre les points de l'attracteur reconstruit, sachant que le délai τ et m sont bien choisis.

L'algorithme de Grasse Berger-Procacia va reconstruire dans l'espace des phases les points issus de la série temporelle que constitue l'ECG. Notant $x(t)$, par « la méthode des retards » les points

$$Y(t_i) = [x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \ldots, x(t_i + (m-1)\tau)]$$

l'intégrale de corrélation $C(r)$ est alors calculée, la formule est donnée (chapitre 3) par :

$$C_m(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} H(r - \|\mathbf{Y}(t_i) - \mathbf{Y}(t_j)\|)$$

avec $H(.) = 1$ pour des arguments positifs et égale à zéro pour les arguments négatifs. $C_m(r)$ est le nombre de points de l'espace de phase reconstruit appartenant à une m-sphére de rayon r. Avec L'intégrale de corrélation $C(r)$, on examine les propriétés [46] suivantes :

1. La propriété d'autosimilarité d'un attracteur.

2. Pour des signaux non bornés, stochastiques l'intégrale de corrélation $C(r)$ - pour un espace de m-dimension - est attendue d'être à l'échelle de $C_m(r) \sim r^m$ car la trajectoire remplit uniformément la m-sphére de rayon r.

3. Pour des signaux bornés, il existe un exposant d'échelle finie ν tel que : $C_m(r) \sim r^\nu$ ($\nu(m)$, si ν a une valeur non-entière on s'attend à un attracteur avec une géométrie fractale, cependant l'algorithme de la dimension de corrélation a l'avantage d'être facilement applicable.

4. La « dimension de corrélation » découle ainsi directement de l'intégrale de corrélation $C(r)$ et s'exprime selon la formule :

$$d_m(r) = \frac{\log C_m(r)}{\log r}$$

En fait la valeur de la $d_m(r)$ retenue est la valeur de la pente de la courbe $\frac{\log C_m(r)}{\log r}$dans sa portion jugée linéaire. La diversité des méthodes utilisées pour détecter la portion linéaire de l'intégrale de corrélation et calculer sa pente est en partie responsable de la diversité des résultats du calcul de $d_m(r)$. Cette diversité provient du fait qu'un certain nombre de facteurs (bruit de la mesure, nombre de points de la fenêtre trop limité, signal contenant plusieurs attracteurs de dimensions différentes, ou signal ne contenant aucun attracteur, etc.....) peuvent affecter l'allure de cette courbe jusqu'à lui retirer toute linéarité.

Signification mathématique de « dimension de corrélation »

On peut interpréter par l'analyse la dimension de corrélation $d_m(r)$:

1. La quantification de la complexité de l'information la plus corrélée du signal que cette information soit d'origine linéaire ou non linéaire.

2. Les séries temporelles ne sont ni stochastiques ni non bornées puisque l'estimation de $d_m(r)$ est bien plus petite que m.

3. L'observation à différentes échelles (r) de l'attracteur reconstruit doit révéler des structures similaires. Si l'échelle d'observation r est plus grande que la taille de l'attracteur, de telles structure ne seront plus visibles impliquant $d_m(r) = 0$. A l'opposé, lorsque r devient trop petit, la distribution des points dans la m-sphère entraîne des instabilités sur la courbe de $d_m(r)$ en fonction de r. La dimension de corrélation $d_m(r)$ doit donc se faire pour des valeurs de r petites mais comprises entre ces deux extrêmes.

4. La valeur non entière de la dimension de corrélation $d_m(r)$ indique la structure fractale de l'attracteur reconstruit ainsi que l'irrégularité de la série temporelle.

5. Si la valeur de la dimension de corrélation $d_m(r)$ est entière alors la dynamique de la série temporelle est périodique ou quasi-périodique.

6. Elle donne une estimation du degré de liberté du système.

7. La variation de la valeur de la dimension de corrélation $d_m(r)$ pour différents intervalles de la série temporelle indique la présence de chaos [13].

4.5.1 Estimation de la dimension de corrélation pour des signaux ECG

Il est possible d'affirmer l'existence d'une dynamique chaotique de l'activité électrique cardiaque sur la base du calcul de la $d_m(r)$. En guise d'exemple, l'étude présentée dans l'article [39], traitant cinq ECG : les réalisations proposées ont été employées pour calculer ces dispositifs pour un grand nombre de signaux d'ECG indépendants appartenant à cinq types différents de signal d'ECG d'une base de données d'arythmies du MIT-BIH [49]. Les résultats sont étudiés pour détecter le chaos. Dans cet article, les cinq types différents sont la normale (NR), le couplet ventriculaire (VC), la tachycardie ventriculaire (VT), la fibrillation bigeminy (VB) et la fibrillation ventriculaire (VF). Chaque type est représenté par 64 signaux indépendants, chaque signal est de longueur 3 secondes. Les signaux de VF prélevés sont 250 échantillons/s, alors que les autres sont 360 échantillons /s. Les résultats du calcul de $d_m(r)$ pour des classes de différents ECG sont montrés dans le Tableau 4.1, on observe que la dimension $d_m(r)$ de corrélation est une valeur non entière. Les résultats soutiennent généralement l'hypothèse que l'activité électrique cardiaque reflète un comportement dynamique bas dimensionnel du système.

Pour estimer une valeur appropriée pour le délai de retard τ, on a suggéré de choisir la valeur à laquelle la fonction d'auto corrélation atteint 0, 1/e, 0.5, ou 0.1, ou comme valeur à laquelle du premier minimum local de la fonction mutuelle de l'information. Ici, on a suivi une autre approche où la longueur de la fenêtre de temps est employée pour calculer τ. En particulier, la longueur de la fenêtre de temps (W) est définie par le temps mesuré par chaque vecteur de plongement $W = (m - 1)\tau$. Après la détermination de m en utilisant la FFN, on a choisi la fenêtre optimale de temps (W) comme longueur de fenêtre. Dans cet article, le premier zéro de FNN correspond à $m = 8$ et la fenêtre optimale est de longueur 583 ms (c.-à-d., 210 échantillons à 360 échantillons/ s). En conséquence, le délai τ est estimé à 83 ms. Les résultats de calcul de d_m pour différentes classes d'ECG sont présentés dans le Tableau 4.1.

Type	Dimension de corrélation d_m
NR	3.27 ± 0.42
VC	2.54 ± 0.39
VT	3.07 ± 0.52
VB	2.71 ± 0.40
VF	2.93 ± 0.71

Tableau 4.1 : Résultats de calcul de la dimension de corrélation d_m pour différentes classes d'ECG [39]

1. Tous les types d'arythmies étudiés et l'état normal du cœur ont une dimension de corrélation non entière, donc la physiologie cardiaque a une dynamique apériodique ou irrégulière

2. Les attracteurs reconstruits des cinq types différents de signal d'ECG ont une structure fractale.

3. La dimension de corrélation de l'état normal du cœur (NR) plus élevée que celle des arythmies peut s'expliquer par la complixité de la structure de l'attracteur reconstruit.

4. On peut estimer le degré de liberté n du système cardiaque à $n \geq 4$.

4.6 Exposant de Lyapunov

Pour rappel la Sensibilité aux Conditions Initiales est l'une des facettes d'un système chaotique. Elle se traduit dans l'espace des phases par l'instabilité des trajectoires sur l'attracteur.

Les exposants de Lyapounov mesurent cette Sensibilité aux Conditions Initiales et sont définis comme le taux moyen de divergence à long terme d'états (de trajectoires) initialement proches.

Si un système possède au moins un exposant de Lyapounov positif alors le système est chaotique. Plus cet exposant est grand et plus la «chaoticité» du système [39], et donc la perte de prédictibilité à long terme, est importante.

En considérant les exposants de Lyapounov ordonnés du plus grand au plus petit tels que :

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ où $\lambda_1$et λ_n correspondent au taux le plus fort respectivement d'étirement et de contraction suivant les axes principaux.

Le plus grand exposant de Lyapounov, λ_1 , est considéré comme un estimateur ou une mesure du comportement chaotique dominant d'un système. Les différentes approches pour le calcul de ces exposants reposent sur certaines de leurs propriétés intrinsèques :

♦ Par exemple sachant que ces exposants caractérisent la stabilité d'un système déterministe, ceux-ci sont exprimés par le logarithme des valeurs absolues des valeurs propres du système linéarisé en chaque point de l'attracteur. Il devient alors nécessaire de déterminer le Jacobien du système.

♦ De même qu'en raison de l'étirement des trajectoires suivant une coordonnée il est impératif qu'un système chaotique ait son plus grand exposant de Lyapounov positif.

On note que pour calculer les exposants à partir des séries temporelles il existe des algorithmes qui se calquent sur les approches précitées à savoir :

★L'algorithme de Briggs (1990) qui permet l'estimation du Jacobien.

★Les algorithmes de Wolf (1985), de Rosenstein (1993), de Kantz (1994) qui étudient l'expansion suivant les axes principaux et permettent ainsi de calculer le plus grand exposant de Lyapounov.

Procédés basés sur l'étude de l'étirement suivant axes principaux

1) Algorithme de Wolf [46]

Pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov $\lambda_1$on considère l'évolution à long terme d'une seule paire d'orbites voisines, l'algorithme de Wolf peut être décrit par les étapes suivantes :

1) À partir de séries temporelles, on reconstruit l'attracteur par "la méthode des retards".

2) On choisit un point initial x_0 de l'attracteur reconstruit, et son plus proche voisin x'_0 (au sens de la distance euclidienne).

3) On définit une longueur $L(t_0)$ initiale entre x_0 et x'_0 .

4) L'évolution dans le temps du système à partir du point initial x_0 définit la trajectoire $x(x_0, t)$.

5) On observe l'évolution de la longueur $L(t_0)$ le long de l'attracteur, au temps t_1, $L(t_0)$

évolue pour devenir $L'(t_1)$, ce temps t_1 ne doit pas être trop grand pour éviter les repliements possibles des deux trajectoires $x(x_0, t)$, $x'(x'_0, t)$.

6) On choisit un nouveau point, $y(t_1)$, satisfaisant deux critères : la distance entre $L(t_1)$ entre $x(t_1)$ et $y(t_1)$ doit être petite (Fig : 4.3).

7) Une fois un tel point trouvé, cette procédure est, de façon itérative répétée le long de la trajectoire de référence, en d'autres termes tout au long de la série temporelle.

Le plus grand exposant de Lyapunov $\lambda_1$est alors calculé comme étant :

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_K - t_0} \sum_{k=1}^{K} \log \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})}$$

où K le nombre total de pas de remplacement.

.2) Algorithme de Kantz et de Rosenstein [46] Cette approche s'intéresse à la croissance exponentielle des erreurs sans présupposer le déterminisme. L'idée de base est que des trajectoires voisines peuvent ne pas diverger exactement en suivant une loi exponentielle si on considère chaque trajectoire individuellement. En revanche, en moyenne, elles divergent exponentiellement . On suit les étapes suivantes :

1) On reconstruit l'attracteur.

2) Considérant $x^*(x_0, t)$ une trajectoire de référence, cherchant les points x_i qui sont les voisins de chaque points $x_i^* \in x^*(x_0, t)$ dont chaque paire de voisins (x_i^*, x_i) peut être considérée comme étant des conditions initiales de trajectoires différentes.

3) On considère la distance $d_0 = x_i^* - x_i$ comme une erreur qui croit exponentiellement avec le temps, après une itération $d_1 = x_{i+1}^* - x_{i+1}$ si on trouve $d_t = d_0 e^{\lambda_1 t}$

alors λ_1 est le plus grand exposant de Lyapunov.

$$X(\varepsilon,\ m,\ t) = \ln(\frac{1}{|U_i|} \sum_{x_i \in U_i} |x_{i+k}^* - x_{i+k}|)$$

Si $X(\varepsilon,\ m,\ t)$ présente une augmentation linéaire dont la pente est identique pour tous les m plus grands qu'un m_0 et pour des valeurs de ε raisonnables alors cette pente peut être considérée comme le plus grand exposant de Lyapunov.

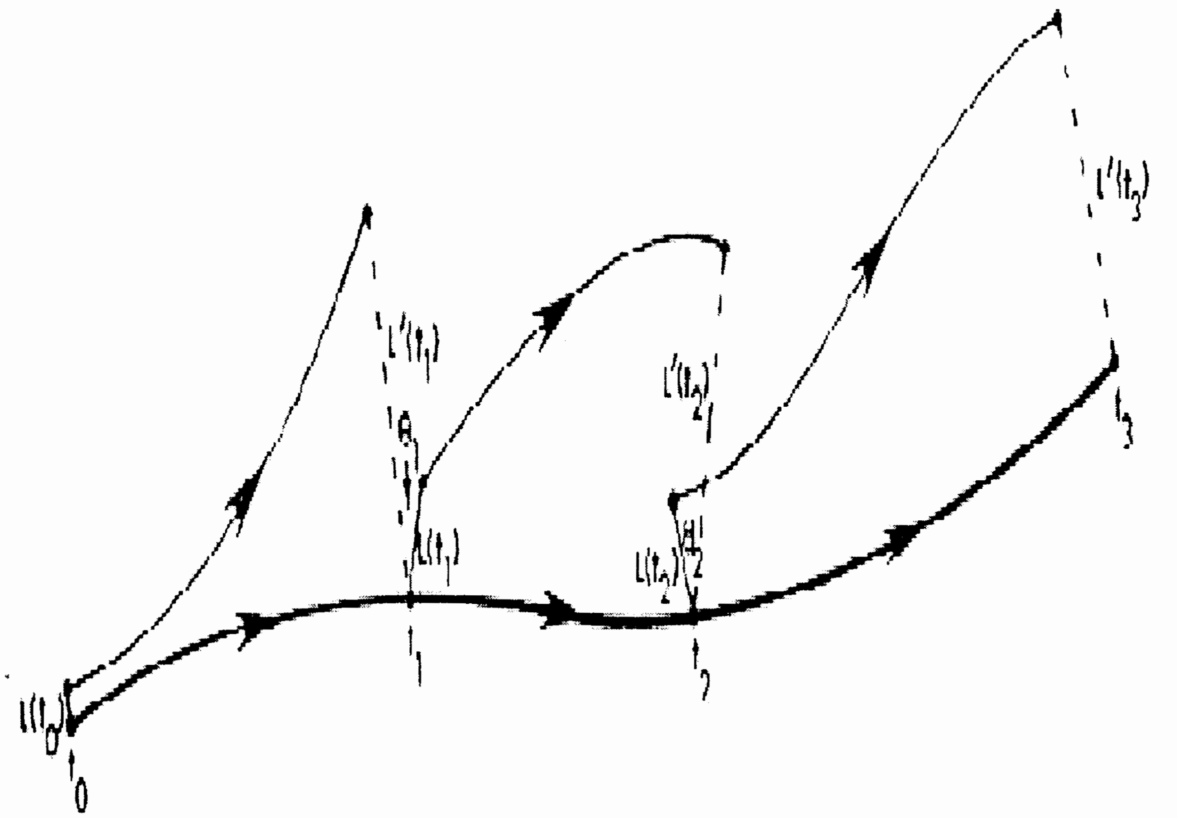


Figure 4.3 : Représentation de la procédure d'évolution et de remplacement pour estimer le plus grand exposant de Lyapunov à partir des données expérimentales. D'après Wolf et al. (1985) [46].

Procédés basés sur l'estimation des Jacobien

Algorithme de Briggs [46]

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1) On reconstruit l'attracteur dans un espace de dimension de plongement égale à m.

2) On considère un vecteur $x(1)$ et recherchant les vecteurs voisins $x(i)$ tel que $i = 1, \ldots, b$ et $b \geq m$.

3) On définit une matrice T_1, qui - au sens des moindres carrées - établit la meilleure correspondance entre les vecteurs $\delta x(i, 1) \approxeq x(i) - x(1)(i = 1, \ldots, b)$ et leurs images après un pas de temps. Cette matrice, qui est normalement linéaire, peut être approximée par un polynôme d'ordre supérieur. Cette matrice T_1est l'approximation de la matrice Jacobienne J_1 du système sous-jacent à $x(1)$. Ce processus est alors répété pour $x(2)$, $x(3)$,... etc.

4) On peut multiplier la recherche d'un certain nombre de telles matrices et ainsi trouver les exposants de Lyapunov.

4.6.1 Estimation de plus grand exposant de Lyapunov pour des signaux ECG

Il est possible dans certains cas de montrer l'existence d'une dynamique chaotique de l'activité électrique cardiaque en calculant le plus grand exposant de Lyapunov de ce système. Soit l'étude [39], traitant cinq ECG, Les réalisations proposées ont été employées pour calculer le plus grand exposant de Lyapunov λ_1 pour un grand nombre de signaux d'ECG indépendants correspondant à cinq types différents de signaux d'ECG de la Base de données d'arythmies du MIT-BIH [49]. Dans cet article, les cinq types différents comprenant l'état normal (NR), les arythmies (VC), (VT),(VB) et (VF), et chaque type était représenté par 64 signaux indépendants, chaque signal est de longueur 3 secondes. L'algorithme utilisé est celui de Wolf.. Les résultats de calcul de λ_1 pour différentes classes de ECG sont présentés dans le Tableau 4.2.

Type	Plus grand exposant de Lyapunov λ_1
NR	8.18 ± 3.63
VC	17.36 ± 3.68
VT	13.55 ± 7.24
VB	12.11 ± 5.40
VF	13.20 ± 4.45

Tableau 4.2 : Résultats de calcul du plus grand exposant de Lyapunov λ_1 pour différentes classes d'ECG [39].

1. Le plus grand exposant de Lyapunov λ_1 est positif dans l'état normal en présence des anomalies, et par conséquent l'activité électrique du cœur présente une dynamique chaotique.

2. Un cœur malade est plus chaotique qu'un cœur sain.

3. La positivité du plus grand exposant de Lyapunov λ_1 caractérise la sensibilité aux conditions initiales du système cardiaque donc l'imprévisibilité à long terme.

4. Le manque de séparation entre VB et VT et VF en leurs valeurs λ_1 peut être expliqué par l'observation clinique que VB peut mener à VT dans certaines conditions.

Conclusion :

Le système cardiaque modélisé par la série temporelle du signal ECG est un système dynamique dissipatif chaotique, imprévisible à long terme car il est sensible aux conditions initiales. Ainsi l'attracteur reconstruit est un attracteur étrange.

4.7 La variabilité de la fréquence cardiaque (HRV)

En médecine, la physiologie cardiaque est considérée comme un modèle chaotique, le chaos est considéré comme un signe de bonne santé du cœur. En effet, Ary.L.Goldberger [19], [20], Subia [42] , [43] , M.Laurent [33] ont proposé que la fréquence cardiaque (les battements de cœur par minute « b/m ») représentant les anomalies causant la mort subite soit non chaotiques, à savoir périodiques. La mort soudaine peut être considéré comme une bifurcation à l'intérieur du chaos.

La figure (4.4) représente selon différentes échelles de temps, les fluctuations de l'activité cardiaque (battement de coeur) mesurée en continu d'un individu sain. L'activité apparaît être irrégulière, et on observe le phénomène à l échelle de la minute, de la dizaine ou même de la centaine de minutes. Cependant, l'irrégularité d'un rythme quel qu'il soit n'est pas en soit suffisante pour caractériser un phénomène chaotique et on va voir qu'il existe un ordre caché du sein du chaos [19], [20] .

Une indication plus convaincante quant à la nature chaotique d'un rythme cardiaque sain est donnée par la représentation comparative, dans un plan $(x_i,\ x_{i+1})$ de l'activité d'un cœur sain et de celle du muscle cardiaque présentant différentes pathologies (figures 4.5 / 4.6 / 4.7).

Un cœur malade possède un rythme plus régulier que celui du cœur sain [19], [20], [42], [43] , [22]. Plus précisément, le rythme (battement de cœur) d'un coeur malade semble fluctuer autour d'un attracteur ponctuel (en haut) ou cyclique (au milieu) alors que celui de cœur sain (en bas) pourrait témoigner de l'existence d'un attracteur étrange [33].

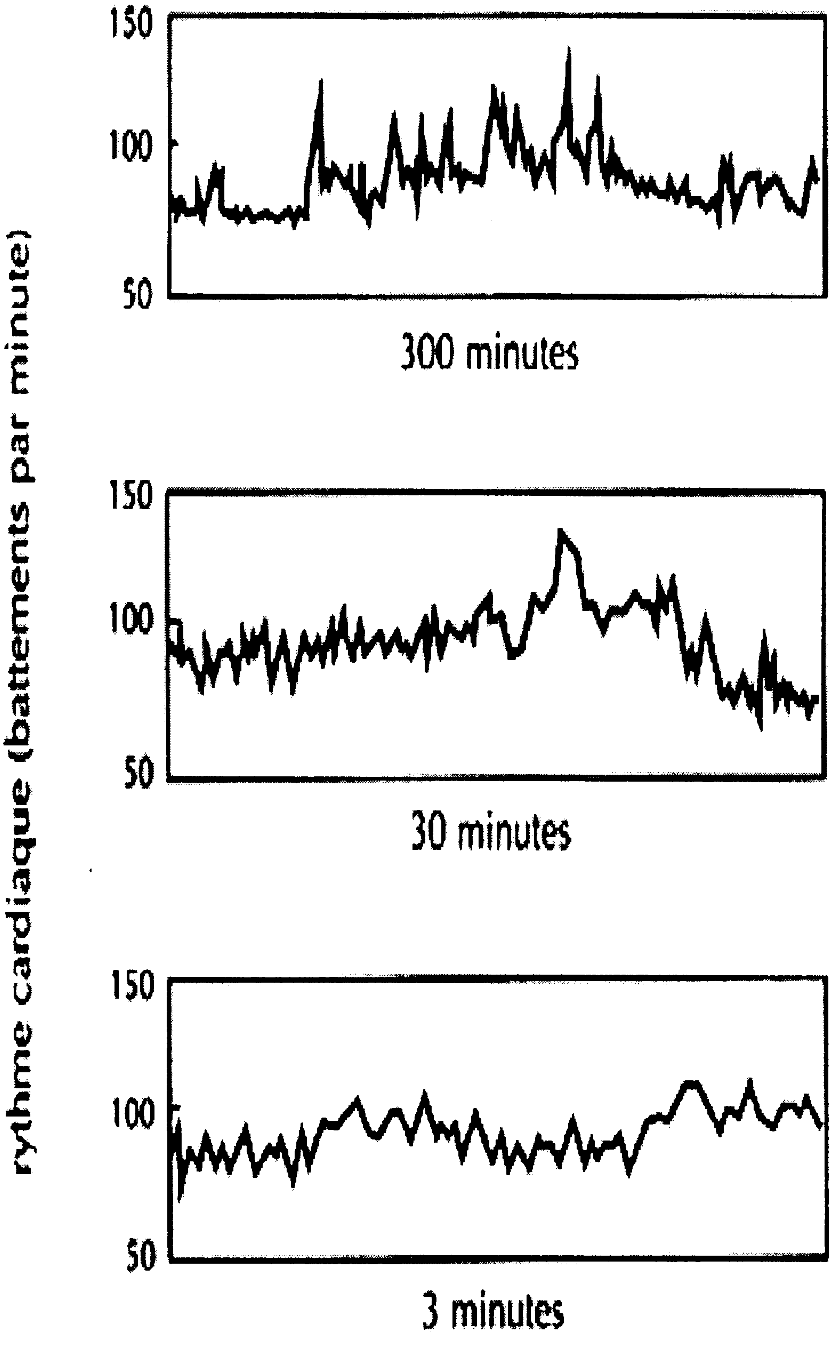


Figure 4.4 : Rythme cardiaque (battement de cœur par minute) d'un cœur sain, représentation selon différentes échelles de temps [33].

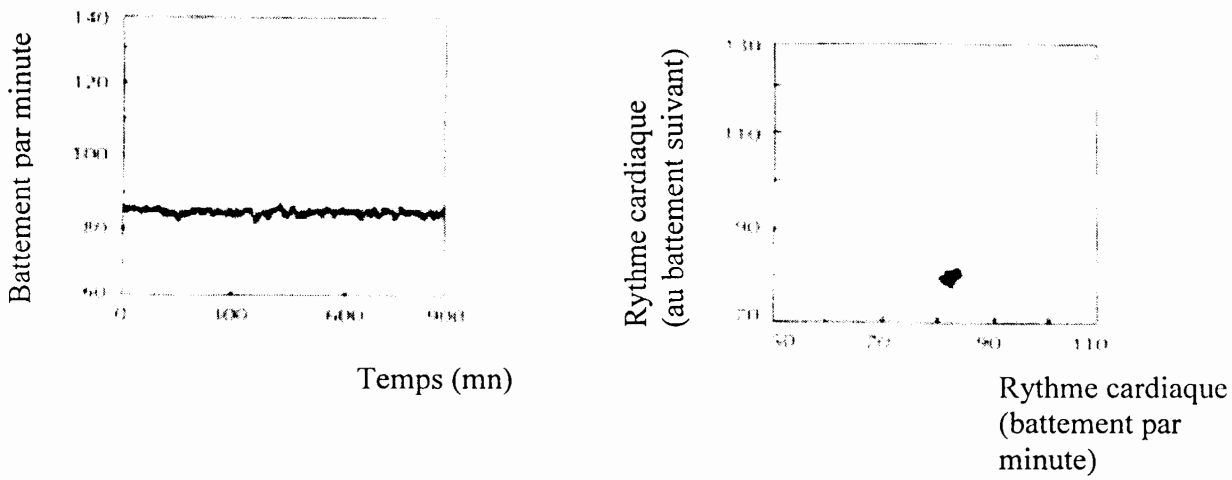


Figure 4.5: À gauche, le signal de la fréquence cardiaque d'un cœur malade. Les mesures de la série temporelle de telle arythmie sont effectuées, 13heures, avant l'arrêt cardiaque. À droite la reconstruction de l'attracteur à partir de série temporelle de la fréquence cardiaque d'un tel cœur malade dans l'espace des phases (x_i, x_{i+1}) [33].

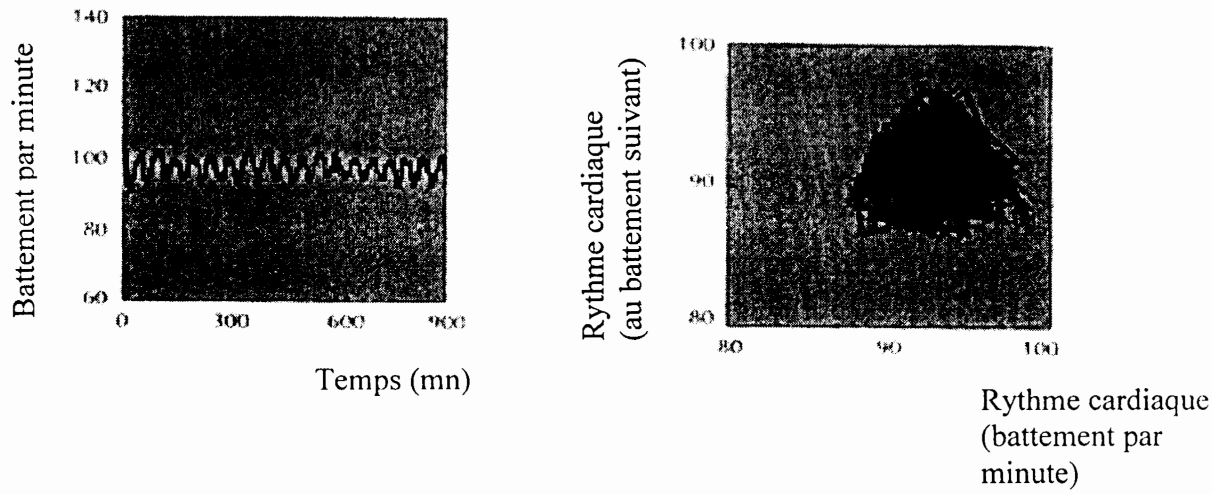


Figure 4.6: À gauche, le signal de la fréquence cardiaque d'un cœur malade atteint une autre pathologie. Les mesures de la série temporelle de telle arythmie sont effectuées, 8heures, avant l'arrêt cardiaque. À droite la reconstruction de l'attracteur associé dans l'espace des phases (x_i, x_{i+1}) [33].

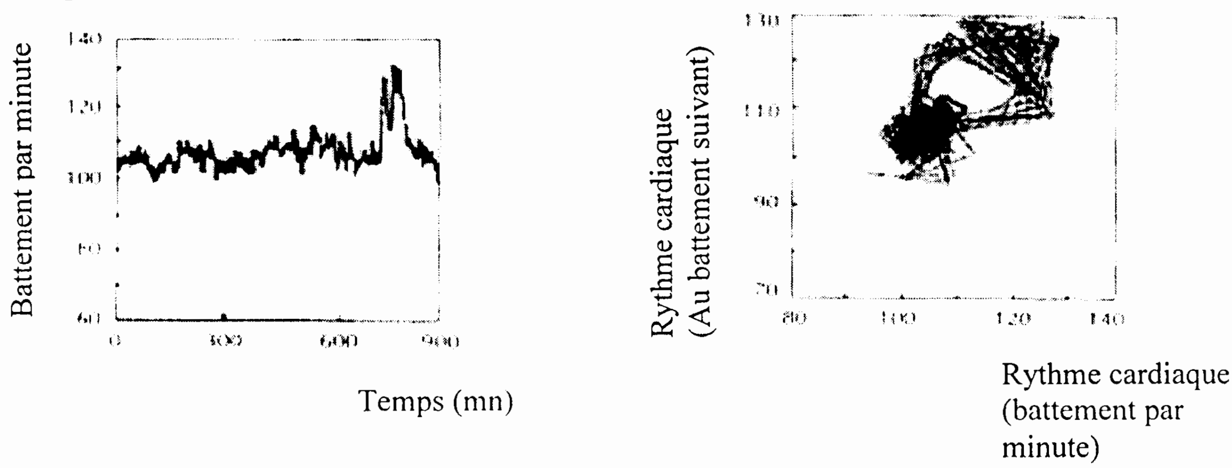


Figure 4.7 : À gauche, le signal de la fréquence cardiaque d'un cœur en bonne santé. À droite la reconstruction de l'attracteur associé dans l'espace des phases (x_i, x_{i+1}) [33].

Le concept d'une série temporelle

Pour apprécier la pertinence clinique générale de la dynamique du battement du coeur, on considère le problème suivant : quelle est la meilleure manière de comparer un ordre des mesures obtenues à partir de deux sujets ?. Les cliniciens comptent principalement sur une comparaison des moyennes en utilisant les essais statistiques appropriés. Les limitations des analyses traditionnelles deviennent évidentes en évaluant les données dans la figure 4.**9**, montrant le rythme du sinus de la fréquence cardiaque d'un sujet en bonne santé avec celui d'un arrêt de coeur congestif. L'enregistrement du signal instantané de n'importe quel système sur une période continue d'observations produit une «série temporelle». Ce qui est remarquable dans cet exemple est que ces deux séries ont des moyennes presque identiques. Cependant, l'inspection visuelle indique que les deux ordres de l'affichage des données ont une organisation nettement différente. La trace saine de battements du coeur montre un type de bruit complexe de la variabilité, tandis que la trace du patient présentant une crise cardiaque indique des oscillations périodiques dans la fréquence cardiaque répétant environ 1 cycle/minute ($\tilde{}$.02 hertz). L'analyse de la série temporelle concerne la mesure de l'ordre des points de repères ; la dynamique non-linéaire fournit un arrangement plus profond des mécanismes des modèles et des différences de ce type dans les figures 4.8 / 4.9 / 4.10 [19].

Alors, le battement d'un coeur sain montre des fluctuations fortement complexes et apparemment imprévisibles même dans des conditions équilibrées. En revanche, le modèle de fréquence cardiaque du sujet qui fera une décompensation cardiaque montre les oscillations lentes et périodiques.

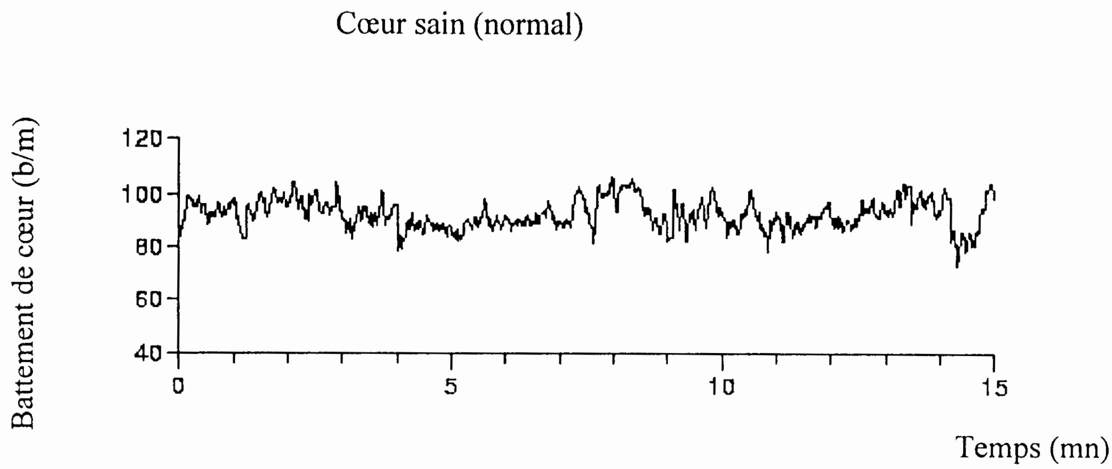


Figure 4.8 : Série temporelle de la fréquence cardiaque d'un sujet en bonne santé [19].

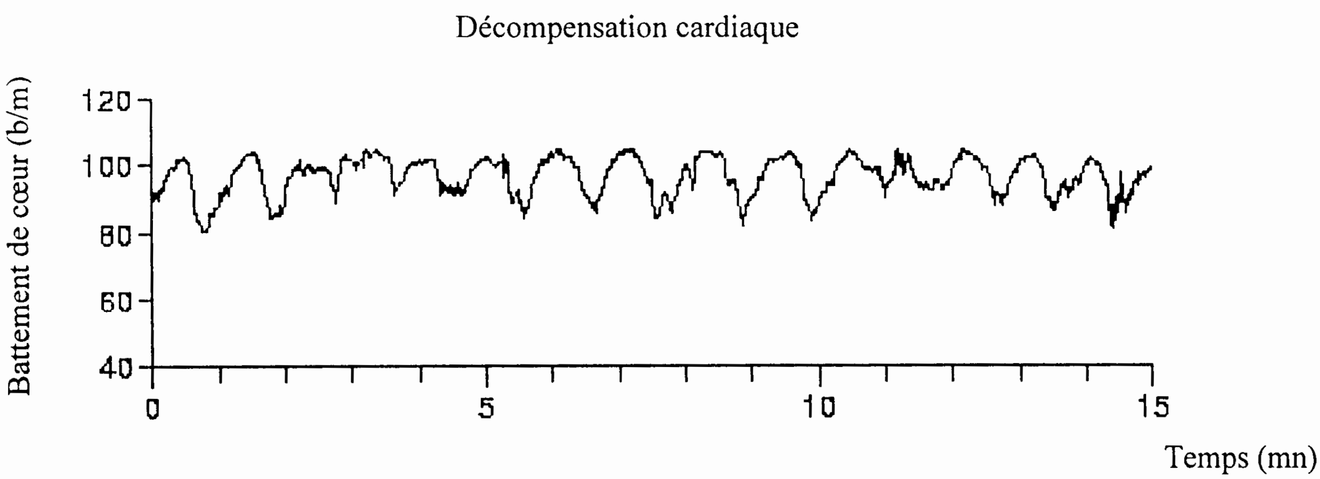


Figure 4.9: Série temporelle de la fréquence cardiaque d'un patient présentant la décompensation cardiaque [19].

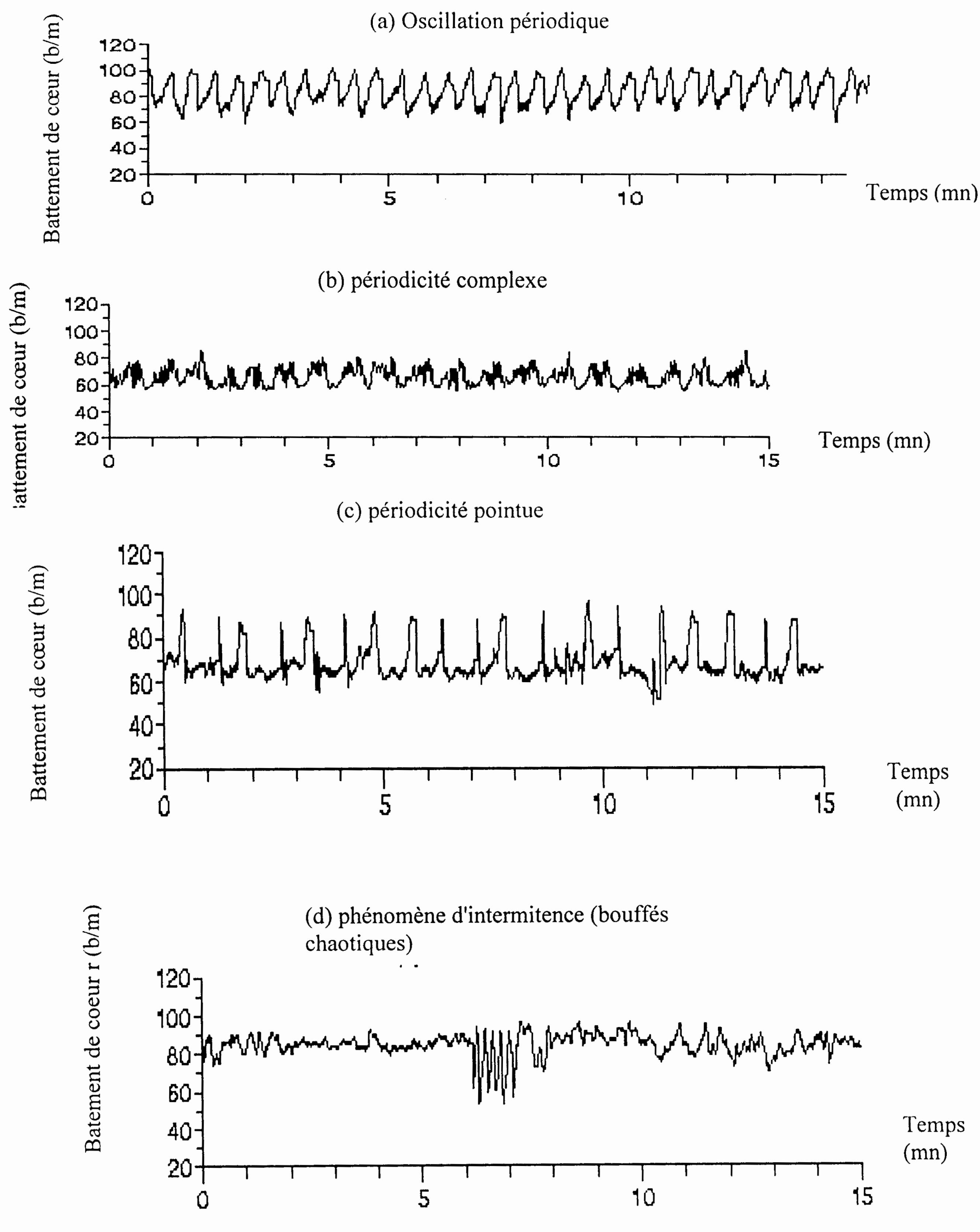


Figure 4.10 : Exemples de la dynamique non linéaire du battement de coeur. Les panneaux (a, b et c) sont des sujets avec le syndrome obstructif d'apnée de sommeil. Le panneau (d) est un sujet en bonne santé [19].

4.7.1 Anatomie fractale du coeur

Un certain nombre de structures cardio-pulmonaires sont d'aspect fractal. Les exemples des anatomies auto similaires incluent les arbres artériels et veineux, certains paquets du muscle cardiaque, ainsi que l'arbre de Purkinje. D'un point de vue mécanique, toutes ces structures cardio-pulmonaires auto similaires remplissent une fonction physiologique commune : le transport rapide et efficace dans un système complexe. Dans le système ventriculaire, cas de conduction électrique, la quantité transportée est le stimulus électrique réglant la synchronisation de la contraction cardiaque. L'arbre trachéo-bronchite de structure fractale fournit une énorme superficie pour l'échange des gaz à l'interface vasculaire alvéolaire, couplant les fonctions pulmonaire et cardiaque. La géométrie fractale est à la base également d'autres aspects importants de fonction cardiaque. Il a été démontré d'une manière élégante comment l'organisation fractale du tissu connectif dans les feuillets de la valve aortique se relie à la distribution efficace des forces mécaniques.

Une variété d'autres systèmes d'organes contiennent des structures fractales qui remplissent des fonctions liées à la distribution de l'information (système nerveux), l'absorption nutritive (tube digestif), ainsi qu'à la collecte et du transport (système de conduit biliaire) [19].

4.8 La variabilité du rythme cardiaque (ECG)

Cœur et Système électrique

Le coeur est situé au centre du thorax. C'est un muscle qui a comme rôle de pomper le sang à travers tout le corps, afin de nourrir les cellules. Il pompe environ 5 à 6 litres de sang par minute. Pour assurer son rôle de pompe, le coeur doit se contracter, se décontracter et ainsi de suite. Ces mouvements correspondent aux battements de notre coeur. Un coeur sain bat entre 60 et 80 fois par minute au repos. Il peut augmenter ou diminuer sa fréquence selon notre niveau d'activité, de stress et selon la prise de médicaments.

Le coeur est principalement composé de 4 cavités ou parties. Au niveau supérieur, on retrouve côte à côte l'oreillette droite et gauche et au niveau inférieur, le ventricule droit et gauche (Fig : 4.11 cœur). Ces quatre cavités, constituées de muscle, servent de réservoir au sang et c'est à partir de celles-ci que le sang est propulsé dans tout l'organisme.

Afin de pouvoir battre, le coeur est muni d'un système électrique que l'on appelle **système de conduction électrique du coeur**. En fait, on peut dire que le coeur est une pompe à deux temps qui fabrique sa propre électricité. L'électricité alors produite fait contracter les oreillettes et les ventricules. C'est donc grâce à celle-ci que le coeur bat 24 heures sur 24.

1. Aorte

2. Veine cave supérieure

3. Nœud sinusal

4. Oreillette gauche

5. Oreillette droite

6. Valve tricuspide

7. Veine cave inférieure

8. Ventricule droit

9. Valve aortique

10. Nœud atrio-ventriculaire

11. Valve mitrale

12. Système de His-Bündel

13. Fibres conductrices de Purkinje

14. Ventricule gauche

15. Muscle cardiaque

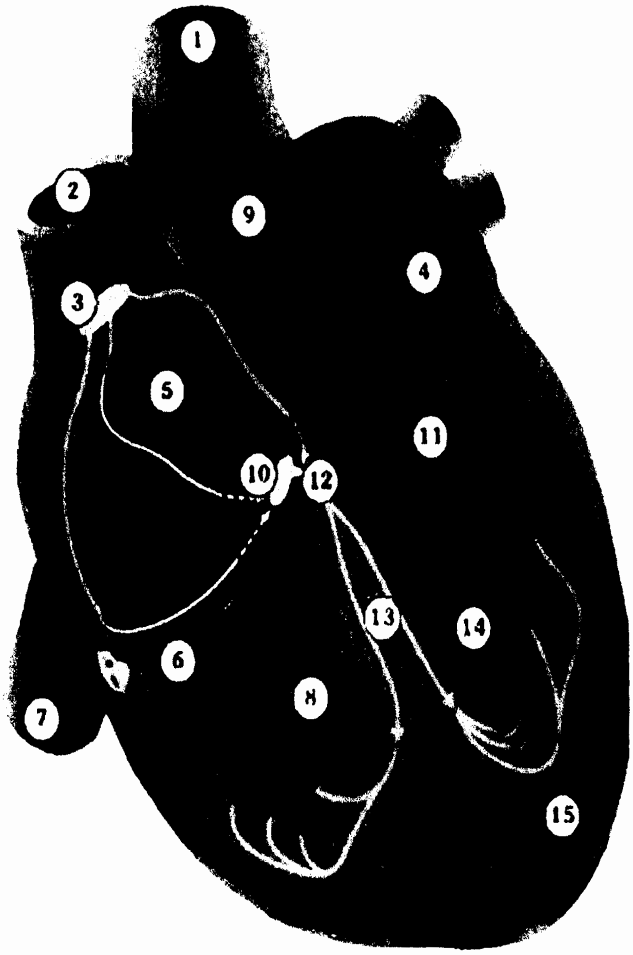


Figure 4.11: Cœur humain.

Le courant électrique prend naissance dans le «noeud sinusal» (Fig : 4.12 et Fig : 4.13), situé à la partie haute de l'oreillette droite. Ainsi, il envoie et contrôle les impulsions pour que le coeur batte de 60 à 80 fois par minute. Le noeud sinusal est, en quelque sorte, à l'image d'une centrale électrique. Il est le producteur et l'initiateur du courant. En fait, il correspond à la plus haute puissance de la production de l'énergie électrique.

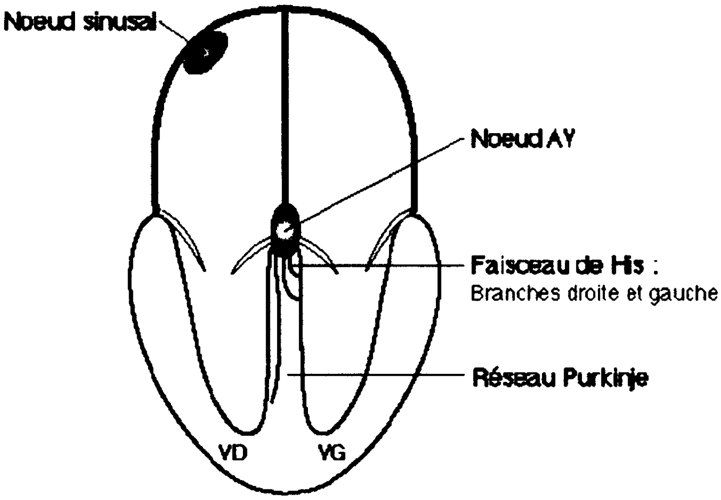


Figure 4.12 : Le tissu nodale

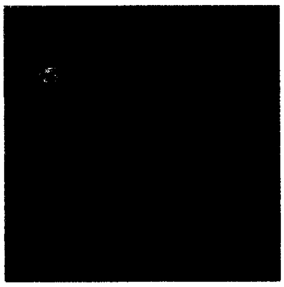


Figure 4.13 : Le nœud S-A (stimulateur cardiaque naturel) crée un courant électrique

Après avoir été engendré dans le noeud sinusal, le courant électrique parcourt les deux oreillettes, en active leur contraction (Fig : 4.14), et favorise le passage du sang des oreillettes vers les ventricules.

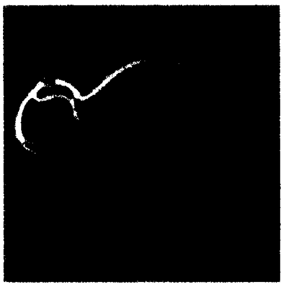


Figure 4.14 : Le courant électrique suit des trajets électriques naturels dans les deux oreillettes. Le déplacement de l'électricité oblige les oreillettes à se contracter, ce qui permet de pousser le sang dans les ventricules

Puis, l'électricité poursuit son chemin pour se rendre dans un autre site, le «noeud auriculo-ventriculaire» (noeud AV) (Fig : 4.15). On peut le comparer à l'opérateur de la "centrale électrique du coeur". À partir de son poste de régulation, l'opérateur règle la puissance du courant électrique pour en contrôler sa vitesse et sa direction. Tout comme l'opérateur, le noeud auriculo-ventriculaire reçoit le courant électrique, en contrôle sa vitesse et le dirige vers le faisceau de His et ensuite au réseau de Purkinje (Fig : 4.16).

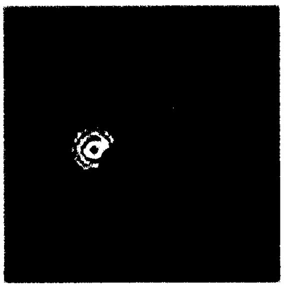


Figure 4.15 : Le courant électrique atteint le nœud A-V (pont électrique). À cet endroit, le courant fait une pause pour donner au ventricule le temps de se remplir de sang.

Le faisceau de His comporte deux branches, une droite et une gauche. Ces deux branches longent la paroi septale des deux ventricules. Le réseau de Purkinje est situé à l'intérieur des parois ventriculaires.

Le faisceau de His, comme une boîte électrique, veille à la division du courant pour le distribuer ensuite aux fils électriques. Les branches et les fibres du réseau de Purkinje jouent ce rôle de fils électriques et ont pour fonction d'amener le courant au pourtour et à l'intérieur des deux ventricules, pour en activer leur contraction et le passage du sang dans l'organisme.

C'est ainsi que prend fin le trajet du courant électrique. Chaque parcours du système de conduction électrique du coeur entraîne un battement cardiaque. Et puis le cycle recommence. Une nouvelle impulsion naît dans le noeud sinusal et initie à nouveau une étincelle électrique qui reprendra le cheminement déjà décrit.

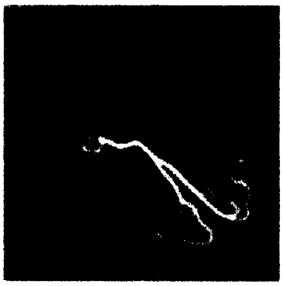


Figure 4.16 : Le courant électrique se répand dans le système de His-Purkinje. Le déplacement de l'électricité oblige les ventricules à se contracter et à pousser le sang vers les poumons et le reste du corps.

Présentation d'un Electrocardiogramme (ECG)

Un ECG est un enregistrement de l'activité électrique cardiaque. Il donne des informations sur la synchronicité de l'activation des oreillettes avec ventricules.

L'électrocardiographie traite l'activité électrique du coeur. On considère l'ECG comme un signal représentatif de la physiologie cardiaque, utile pour en diagnostiquer les désordres. L'état de santé cardiaque est généralement reflété dans la forme d'onde d'ECG et de la fréquence cardiaque. Il peut contenir les indicateurs importants à la nature des maladies affectant le coeur. Par conséquent, pour le diagnostic efficace, l'étude du modèle d'ECG peut devoir être effectuée sur plusieurs heures.

L'ECG s'est aisément imposé comme outil de base pour la mesure du rythme cardiaque, et ce essentiellement pour deux raisons.

D'une part, L'ECG est un signal facile à acquérir, il suffit de placer quelques électrodes sur la peau du patient et d'enregistrer le signal électrique obtenu.

D'autre part, le tracé ECG d'une révolution cardiaque présente des ondes et un pic. Chaque onde donne une information sur le fonctionnement du cœur (Fig : 4.17) :

• L'onde P indique que le courant électrique se répand dans les oreillettes, ce qu'on appelle *excitation atriale*.

• L'onde Q indique que le déplacement de l'électricité oblige les oreillettes à se contracter, c'est la *systole atriale*.

• L'onde R indique que les oreillettes se relâchent, c'est la *diastole atriale*.

• L'onde S indique que le courant électrique atteint le système de His-Purkinje, c'est *l'excitation ventriculaire*.

• L'onde T indique que les ventricules se contractent, c'est la *systole ventriculaire*.

• L'onde U indique que les ventricules se relâchent, c'est la *diastole ventriculaire*.

Généralement, et dans beaucoup d'ouvrages, l'onde P est associée à la contraction des oreillettes, le complexe QRS représente la contraction des ventricules et l'onde T indique le relâchement ventriculaire.

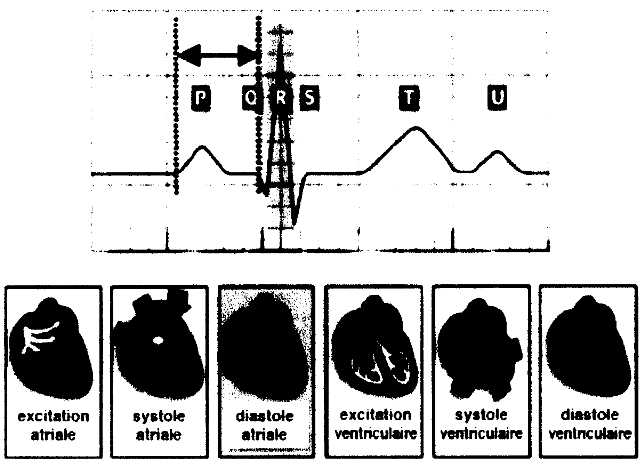


Figure 4.17 : Différentes phases du cycle cardiaque.

Problèmes du système électrique du cœur

Bradycardie Le cœur bat plus lentement qu'à la normale – c'est-à-dire moins de 60 battements par minute. Par conséquent, le cœur risque de ne pas pomper suffisamment de sang pour satisfaire les besoins de notre corps et nous risquons de nous sentir fatigué ou d'avoir des vertiges.

Tachycardie Le cœur bat plus vite qu'à la normale – c'est-à-dire plus de 80 battements par minute. S'ils ne sont pas traités, certains types de tachycardie peuvent entraîner la mort subite cardiaque (MSC).

Fibrillation : La fibrillation est caractérisée par une désynchronisation totale entre les cellules que se soit l'étage atrial ou ventriculaire. Chaque cellule est activée pour son propre compte, la perte du synchronisme induit alors la perte de toute activité mécanique, qu'il s'agisse de la systole auriculaire, ou systole ventriculaire.

La fibrillation peut être primaire, c'est-à-dire non précédée d'un trouble du rythme, ou secondaire, par transformation d'une tachycardie quel qu'on soit le mécanisme.

Fibrillation atriale : Les cavités supérieures du cœur (les oreillettes) palpitent entre 300 et 600 fois par minute. Elles ne se contractent presque jamais entièrement, donc du sang peut rester à l'intérieur, à chaque battement de cœur. Le sang accumulé pourrait coaguler et augmenter notre risque d'accident vasculaire cérébral.

La fibrillation atriale est causée par une multitude d'impulsions provoquant une sorte de «tempête électrique» au niveau des oreillettes. Ces stimulations multiples font vibrer les oreillettes au détriment de la contraction des ventricules. Toute activité synchronisée a disparu et par conséquent l'effet mécanique, c'est-à-dire la contraction coordonnée des oreillettes, n'a plus lieu. Le cœur perd environ 20% de sa force. Le ventricule peut momentanément compenser cette perte, mais à long terme l'épuisement de ses forces contractiles peut conduire à l'insuffisance cardiaque (un morceau de muscle cardiaque mort).

Fibrillation ventriculaire : Elle est en général, la manifestation d'un dysfonctionnement majeur du muscle cardiaque. C'est une désynchronisation des battements ventriculaires et de la contraction auriculaire. Donc une diminution du pompage du sang.

La fibrillation ventriculaire apparaît lorsque des impulsions électriques générées par les ventricules du cœur interfèrent avec les impulsions générées par le nœud sinusal.

Mort subite cardiaque (MSC) ou arrêt cardiaque : le cœur s'arrête complètement de battre et de pomper le sang. La MSC est soudaine et inattendue. Il s'agit d'une urgence médicale qui se termine par la mort si elle n'est pas traitée rapidement.

4.8.1 L'arythmie cardiaque

Chez certaines personnes, on peut observer des irrégularités dans le système électrique du coeur. Ce trouble fréquemment rencontré s'appelle «l'arythmie cardiaque». On pourrait définir l'arythmie comme étant un dérèglement dans le système de conduction électrique du coeur.

Quelquefois, le noeud sinusal envoie des impulsions électriques qui se bloquent au cours de leur trajet à travers le coeur. C'est ce qu'on appelle un « bloc intracardiaque ». Les battements deviennent alors très lents ou irréguliers. D'autres fois, les impulsions électriques prennent naissance dans un autre site que le noeud sinusal, soit au niveau des oreillettes ou des ventricules. On appelle ce ou ces sites «foyer(s) ectopique(s)» (Fig : 4.18). Les battements deviennent alors trop rapides et/ou irréguliers.

Une autre cause fréquente d'arythmie est secondaire à une connexion additionnelle entre les cavités cardiaques (faisceau accessoire). L'électricité en empruntant cette voie anormale conduit à un circuit anormal. (Wolf-Parkinson-White).

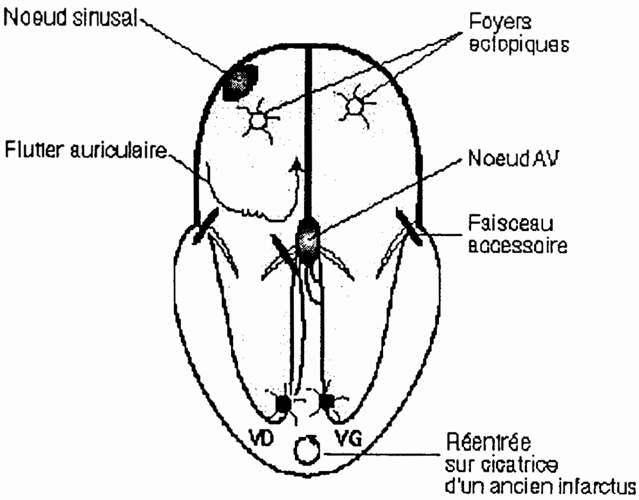


Figure 4.18 : Trouble de rythme cardiaque (arythmie)

Et finalement, chez les patients avec antécédents d'infarctus (crise cardiaque), l'électricité peut être initiée anormalement au pourtour de la cicatrice et causer des arythmies au niveau des ventricules.

Chez un patient en bonne santé, les ondes auriculaires et ventriculaire se suivent régulièrement à une fréquence d'environ 70 par minutes. Par contre, suite à une maladie ou pour des raisons inconnues, on peut observer un rythme normal suivi d'un battement différent, qu'on appelle une *extrasystole*. Celles-ci sont des battements qui sont causées par une activité anormale mais pas nécessairement dangereuse. Mais parfois, surtout suite à une maladie cardiaque majeure comme un infarctus, on peut développer une fibrillation, qui peut survenir autant aux ventricules qu'aux oreillettes. Ainsi, si une fibrillation survient aux ventricules, au lieu de voir sur l'ECG une activité électrique régulière, on voit une activité sinusoïdale irrégulière. Ceci est causé comme cela a été cité au dessus par les foyers ectopiques (zones électriques) qui traversent le cœur ; celui-ci ne pompe alors pas le sang. Si on ne régularise pas le tout très rapidement, habituellement par un choc électrique, le patient risque de mourir. Par contre, lorsque la fibrillation survient aux oreillettes, celles-ci battent irrégulièrement mais les ventricules, pour leur part, continuent de battre régulièrement lorsque l'impulsion se rend aux ventricules. Alors, lorsqu'il s'agit de fibrillation auriculaire au sein des oreillettes, ce n'est pas dangereux, bien que cela puisse être incommodant.

La théorie du chaos nous permet de comprendre mathématiquement comment une irrégularité totale peut survenir

4.8.2 Traitement des arythmies cardiaques

Le but de **l'utilisation de la théorie du chaos dans l'étude des arythmies cardiaques** est d'essayer de comprendre les règles mathématiques sous-jacentes aux arythmies ventriculaires et auriculaires, qui sont une forme de chaos dans l'activité électrique du cœur. **L'objectif donc est de tenter de prévenir ces arythmies.** Un des aspects essentiels de la théorie de chaos est que le développement du chaos dans une situation particulière, tel que l'arythmie cardiaque dépend des conditions initiales. Donc, si chez un malade on observe un changement dans les conditions initiales, par exemple une extrasystole ventriculaire, elle provoquera alors une fibrillation ventriculaire, **soit un état de chaos.** Des mathématiciens travaillent assidûment au développement de règles mathématiques qui pourraient expliquer comment cela passe de façon à nous permettre de donner une sorte de stimulus à au moment donné dans **le but de changer la résultante chaotique et potentiellement prévenir une dégénération en arythmie cardiaque.** Ce stimulus serait un stimulus artificiel et intelligent qu'on appliquerait à un moment critique suivant le premier battement. **L'objectif est de voir un retour vers la situation normale.**

La compréhension des aspects mathématiques qui expliquent comment le chaos survient au niveau cardiaque, permettrait de le prévenir.

4.9 Méthodes d'analyse non linéaire de la variabilité de la fréquence cardiaque (HRV)

Le tracé ECG d'une révolution cardiaque présente le pic marqué R. Ce pic haut et étroit, qui correspond à la contraction des ventricules, est aisément localisable avec grande précision. L'intervalle du temps RR entre deux pics (figure 4.19) donne accès au temps

de révolution cardiaque et la suite des temps RR, ou série temporelle RR, permet de connaître l'évolution du rythme cardiaque d'un patient.

La série RR est un signal discret RR(n) volumineux (environ 100 000 valeurs pour un ECG de 24h) que l'on peut soumettre à des méthodes de traitement du série temporelle dans le but de dégager des différence entre les séries RR de patient sains et celles de patient malades.

Si les battements du cœur étaient parfaitement réguliers, la série RR donnerait lieu à un signal constant (figure 4.20) [4]. La figure (4.21) révèle qu'il n'en est pas ainsi et que la série RR soumise à des fluctuations importantes.

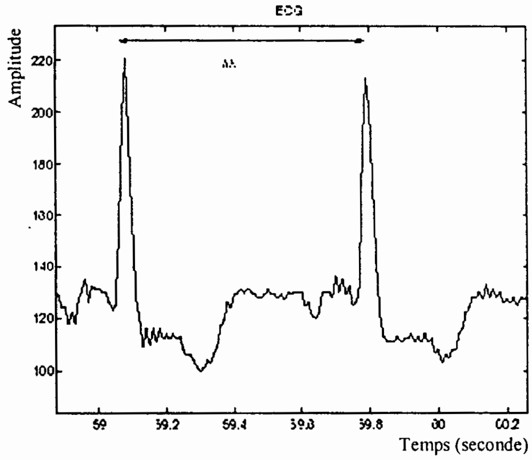


Figure 4.19 : Espace RR [2]

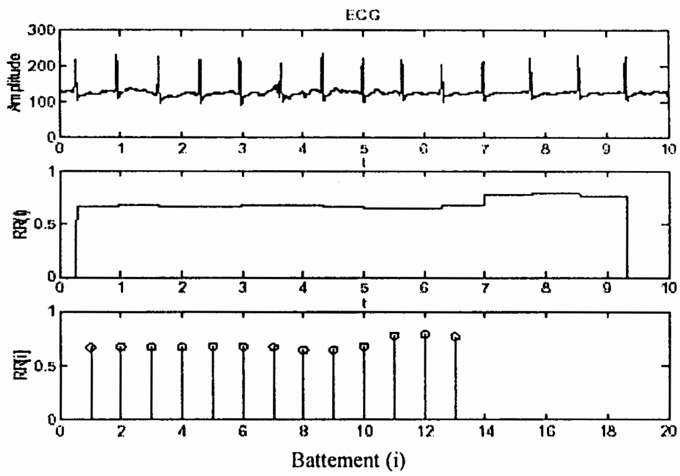


Figure 4.20 : En haut : signal ECG. Au centre, signal RR (t). En bas, la série RR (i) [4]

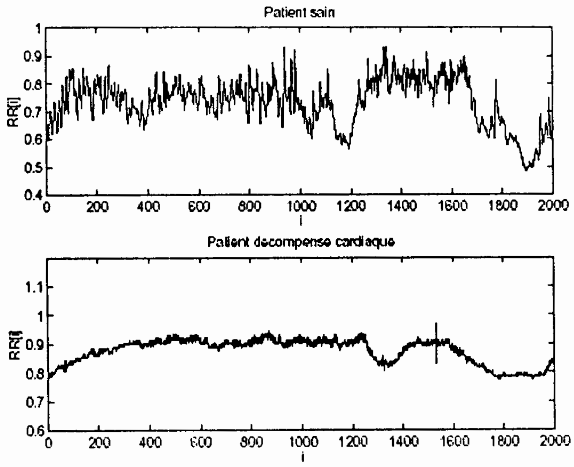


Figure 4.21 : Au-dessus : portion de la série RR d'un patient sain. En dessous, portion de la série RR d'un patient présentant une décompensation cardiaque [2]

Les premières méthodes utilisées par les cardiologues étaient les méthodes classiques du traitement de la série temporelle, tantôt statistiques (calcul de différents paramètres statistiques de position et de dispersion sur la série RR, tels l'écart-type popularisé par Klieger), tantôt fréquentielle (distribution spectrale de l'énergie dans les basses et hautes fréquences) (Task Force 1996, Bilge 1997).

Par la suite, le développement de la théorie du chaos a introduit une série de nouveaux tests essentiellement destinés à découvrir le déterminisme d'une série temporelle et à en évaluer la complexité. Citons la reconstruction du portrait de phases, les sections de Poincaré, les exposants de Lyapunov et l'entropie de Kolmogorov.

On s'intéresse à l'étude de la loi qui gouverne l'évolution des corrélations à long terme dans les fluctuations de la série RR. [2], [4].

Des études récentes ont en effet montré un comportement en loi de puissance dans de nombreuses séries temporelles biologiques (¨Peng 1996). Un tel comportement traduit une absence de temps caractéristique (ou une invariance d'échelle) qui peut être interprété comme un indice favorable à la survie de l'organisme vivant dans la mesure où elle traduit une puissance du système par rapport à son environnement

On présente des méthodes non linéaires du traitement de la série temporelle cardiaque RR :

1) méthode DFA (Detrended Fluctuation analysis) proposé dans [2], [4]

2) méthode de l'index Filling spatial paramètre de l'espace de phases [10].

4.9.1 Méthode DFA (Detrended Fluctuation Analysis)

La méthode d'étude s'appuie sur la fonction DFA (Detrended Fluctuation analysis) proposé dans Peng (1994) et appliquée au rythme cardiaque dans Peng (1996). les fonctions DFA de différentes séries RR sont approximées par des lois de puissance n^{α} et des différences sont observées entre les indices α de patient sains et ceux de patient malades. En outre, la définition d'un paramètre, appelé « résidu », destiné à mesurer l'écart entre une fonction DFA donné et son approximation en loi de puissance. Un « résidu » important traduit en effet une adaptabilité réduite du cœur à des perturbations extérieures.. En particulier, un « résidu » élevé est obtenu chez des patients décédés ou greffés, confirmant après un lien possible entre la sévérité de la maladie et présence de temps caractéristiques [2].

Définition de la DFA

La méthode de calcul de la fonction DFA (notée F-DFA ou simplement $F(n)$) et de ses coefficients caractéristiques (noté α-DFA), est présentée dans un article de Peng (1996) [2].

On considère une série $RR(i), i = 1, \ldots .N$, la série des intervalles de temps entre les contractions ventriculaires d'un cœur, dont on veux calculer la DFA.

On commence par calculer l'intégrale indéfinie de RR selon :

$$y(k) = \sum_{i=1}^{i=N} (RR(i) - \overline{RR})$$

où $\overline{RR}$ est la moyenne de RR évaluée sur la série. Ensuite, on divise $y(k)$ en fenêtres d'égale longueur n. En général, il n'est pas possible de répartir exactement les N points de la série en fenêtres de longueur n, on note par $\widetilde{N}$ le plus grand multiple de n inférieur ou égal à N. Dans chaque fenêtre, un segment de droite est adapté aux données $y(k)$ au sens de moindres carrés, et on appelle $y_n(k)$, $k = 1, \ldots, \widetilde{N}$, le signal formé par l'ensemble de ces segments successifs (figure 4.22, où $n = 200$). On peut alors, dans chaque fenêtre, retirer la tendance linéaire locale de la série (« to detrend »), en soustrayant $y_n(k)$ de la série $y(k)$.

A chaque valeur de n, on associe la valeur de F-DFA, calculée par

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{N}^2} \sum_k [y(k) - y_n(k)]^2}$$

Elle caractérise la fluctuation (au sens de la racine de la valeur quadratique moyenne) de l'intégrale indéfinie de $RR(i)$, corrigée de sa tendance («detrended»).

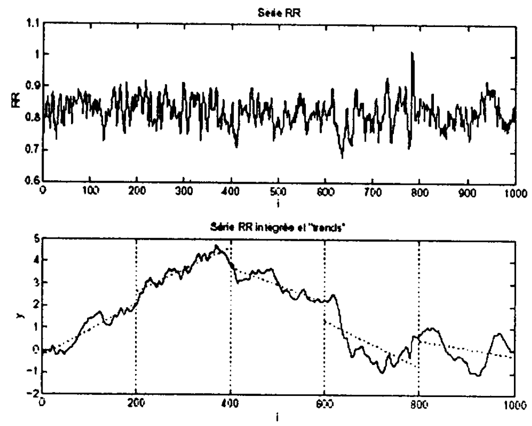


Figure 4.22 :Calcule de la fonction DFA

En haut, la série RR d'une pathologie.

En bas, la série intégrée RR pour calculer la fonction DFA [2].

Les α-DFA

L'étape suivante consiste à rechercher la loi en puissance $\gamma^{n\alpha}$ qui approxime le mieux la fonction $F(n)$. Pour cela, on recherche la droite qui approxime, au sens des moindre carrés, le graphe de $\log F$ en fonction de $\log n$. La pente de cette droite fournit le coefficient α-DFA.

Les résidus

La démarche conduisant à la définition des α-DFA partait du principe que la fonction DFA liée à une série RR suit assez fidèlement une loi de puissance.

Les lois en puissance, de forme générale $F\ (n) = \gamma^{n\alpha}$ jouissent de la propriété suivante (Stanley 1993). L'absence de temps caractéristique est un atout dans les systèmes biologiques, car elle permet d'éviter le phénomène de «mode-locking» de nature à restreindre les capacités de réponse fonctionnelle des organismes (Peng 1996) [2].

Dès lors, il parait opportun de rechercher à quantifier la rigueur avec laquelle la fonction

DFA suit une loi de puissance. C'est pour ça qu'on définit un nouveau paramètre, le « résidu », comme l'écart-type résiduel de l'approximation au sens des moindres carrés à laquelle on se livre pour obtenir le coefficient α-DFA :

$$\text{résidu} = \sqrt{\sum \left[\log F(n) - \alpha \log n - \log \gamma\right]^2}$$

L'idée est la suivante : un grand résidu caractérise une fonction DFA qui s'éloigne fort d'une loi de puissance, révélant la présence de temps caractéristique et une mauvaise adaptabilité de la fonction cardiaque.

DFA et décompensation cardiaque

Les cardiologues ont montré que les patients souffrant de décompensation cardiaque ont des α petits et des α grands pour un patient en bonne santé. Ils ont appliqué la DFA à un groupe de décompensations cardiaques dans un double but : vérifier la corrélation observée par Peng (1996) entre les indices DFA et la décompensation cardiaque, et tenter de dégager une corrélation entre les indices tirés de la DFA et de la mortalité des patients, avec une attention particulière portée au paramètre « résidu ».

Le portrait de phases de reconstruction de la série *RR* Le portrait de phases de reconstruction est un ensemble de trajectoires dans lequel chaque intervalle de *RR* est tracé en fonction du précédent. Il donne une représentation visuelle utile des données de *RR* en illustrant qualitativement avec des moyens graphiques le genre de variations de *RR* incluses dans l'enregistrement. La forme du portrait de phases peut être employée pour identifier des «attracteurs». Dans le comportement chaotique la forme d'attracteur ne prouve pas l'existence du chaos, mais indique que le comportement chaotique est probable.

L'étude statistique faite sur 38 patients atteints de décompensations cardiaques donne les résultats suivants (Absil 1998) [2] : Les paramètres tirés de la DFA se révèlent utiles en complément des paramètres physiologiques : le paramètre Weber mesure la consommation d'oxygène à l'effort et FE (la fraction éjectée du sang contenu dans le ventricule gauche lors de chaque battement de cœur) pour classer les patients en trois groupes :

G1. Décédés ou greffés (10 patients)

G2. Accident cardiaque (10 patients)

G3. Suivi normal (18 patients).

En cela, ils sont souvent plus efficaces que les paramètres classiques de quantification de la variabilité du rythme cardiaque, tels que SDNN (écart-type de la série RR) et LF (poids des basses fréquences dans la décompensation cardiaque).

Parmi les 38 patients étudiés, trois d'entre eux possèdent un résidu particulièrement élevé : 0.45, 0.40, 0.12, alors que les autres se situent sous 0.04. Les trois patients en question sont décédés ou ont été greffés (groupe G1). Cela veut donc dire que tous les patients chez qui on a mesuré un grand résidu ont du être greffés ou sont décédés ultérieurement.

Un grand « résidu » traduit un comportement $F(n)$ éloigné d'une loi de puissance, et serait signe d'une adaptabilité cardiaque réduite.

La technique DFA est une mesure de la présence ou de l'absence **des propriétés de corrélation fractale et a été validée pour les données de séries temporelles** (Peng 1995) [2], [4]. Elle a été développée pour caractériser des fluctuations sur des échelles de toutes les longueurs. Pour les sujets en bonne santé on a mesuré des valeurs d'exposant α prés de 1, indiquant que le comportement de fréquence cardiaque semble fractal. Il est rapporté que pour des patients atteints de maladies cardiaques et présentant un âge avancé il y a modification de la structure fractale.(Peng (1995), Ho (1997), Hausdorff (1995), Lyengar (1996)) [2], [4].

4.9.2 Méthode de "Spatial Filling Index"

La méthode est présentée dans l'article [18] ; "Spatial Filling Index" est **un paramètre de l'espace des phases reconstruit** de la variabilité de fréquence cardiaque, il sert à identifier l'arythmie cardiaque.

Dans ce travail, différents signaux de fréquence cardiaque sont analysés en utilisant la technique du "Spatial Filling Index".

Des données d'ECG pour l'analyse ont été obtenues à partir de la base de données d'arythmie de MIT-BIH [49]. Avant l'enregistrement, les signaux d'ECG ont été traités pour enlever le bruit dû à l'interférence de lignes à haute tension, à la respiration, aux tremblements musculaires, etc. Les crêtes de R d'ECG ont été détectées. Les données d'ECG contiennent huit classes différentes représentant huit maladies différentes. Le nombre d'ensembles de données choisis pour chacune des huit classes est donné dans le Tableau : 4.3 . La classe normale contient des ensembles de données des personnes où aucune anomalie cardiaque n'a été diagnostiquée. Les classes restantes sont appelées selon l'anomalie cardiaque diagnostiquée, la contraction ventriculaire prématurée (PVC), le bloc complet de coeur (CHB), le syndrome en difficulté de sinus (SSS), l'arrêt du coeur congestif (CHF), l'Ishemic/fibrillation cardiomyopathie (ISCDIL) et la fibrillation atriale (AF), et la fibrillation ventriculaire (VF)

Type	Nombre des données d'ensembles
Normale	60
PVC	60
CHB	20
SSS	20
CHF	40
ISCDIL	20
AF	35
VF	45

Tableau 4.3 : Nombre des sujets dans différents groupes [10]

Soit le signal être représenté par les coordonnées d'un point $X(k)$ dans l'espace de phases. Le comportement dynamique du signal est reconstruit par la succession de ces points $X(k)$ dans l'espace de phases. Les vecteurs $X(k)$ dans l'espace multidimensionnel de phases sont construits par des valeurs retardées par des valeurs de temps retard des séries temporelles, qui déterminent les coordonnées dans l'espace de phases :

$$X(k) = \{x(k), x((k+\tau), \ldots, x(k+\tau(m-1))\} \text{ pour } \quad k = 1, 2, \ldots, N-(m-1)\tau \ldots (1)$$

$X(k)$ est un point de la trajectoire dans l'espace de phases au temps k, $x(k+\tau)$ sont les coordonnées dans l'espace de phases correspondant aux valeurs retardées de la série temporelle,τ est le temps retard entre les points de la série temporelle considérée et m est la dimension de l'espace de phases de reconstruction.

À partir du signal donné $x(1), x(2), \ldots, x(n)$, une matrice A_m est obtenue comme

$$A_m = \begin{pmatrix} x(1) & x(1+\tau) & .... & x(1+(m-1)\tau \\ x(2) & x(2+\tau) & .... & x(2+(m-1)\tau \\ .... & .... & .... & .... \\ x(M) & x(M+\tau) & .... & x(N) \end{pmatrix} ...(2)$$

où m est la dimensions de M et lié à N par l'équation

$$M = N - (m-1)\tau ...(3)$$

pour le cas $m = 2$ la reconstruction de l'espace de phases est obtenue par la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} x(1) & x(1+\tau) \\ x(2) & x(2+\tau) \\ \cdots & \cdots \\ x(M) & x(N) \end{pmatrix} ...(4)$$

De même, les trois premières colonnes de la matrice A_3 représentent une reconstruction de l'espace de phases pour la dimension 3. Une matrice B_m est obtenue en divisant chaque élément de la matrice A_m par le $x_{\max}$ où

$$x_{\max} = |x \text{ maximum(k)}|\, 1 \leq k \leq N......(5)$$

La matrice B_2(dans deux dimensions) est par conséquent représentée par :

$$B_2 = A_2/x_{\max} = \begin{pmatrix} x(1)/x_{\max} & x(1+\tau)/x_{\max} \\ x(2)/x_{\max} & x(2+\tau)/x_{\max} \\ \cdots & \cdots \\ x(M)/x_{\max} & x(N)/x_{\max} \end{pmatrix} ...(6)$$

L'espace des phases de reconstruction en dimension 2 est déterminé par cette matrice. Le secteur de l'espace de phase est maintenant divisé en petits secteurs carrés. Alors le nombre de grilles dans l'espace normal de phase est $n = 2/R$. Une matrice C est maintenant obtenue avec pour éléments $c(i,j)$ dont le nombre est égal au nombre de points de l'espace de phase tombant dans une grille $g(i,j)$. La matrice C s'appelle la matrice de l'espace de phase et ses éléments sont divisés par m, où

$$m = \sum_{i;j=1}^{N} C(i,j) ......(7)$$

Cette division donne $P(i,j)$, la probabilité d'un point de l'espace de phase tombant dans une grille $g(i,j)$. Une matrice Q est maintenant constituée en ajustant chaque élément de P pour obtenir $q(i,j)$ comme éléments de Q. La somme d'éléments de la matrice Q est calculée :

$$S = \sum_{i,j=1}^{N} q(i,j) ....(8)$$

Le Spatial Filling Index η est défini comme :

$$\eta = \frac{S}{N^2}$$

Les reconstructions résultantes de l'espace de phases pour différents types de maladies sont montrés sur les schémas : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, les résultats de calcul de η , le Spatial Filling Index, pour différentes séries temporelles sont présentés dans le Tableau 4.4. .

Type	**η-espace de phases**
SSS	1.56 ± 0.08
PVC	3.77 ± 11.82
CHB	7.07 ± 0.57
NORMALE	6.76 ± 1.61
CHF	7.71 ± 0.20
AF	2.26 ± 0.05
ISCDIL	7.44 ± 1.24
VF	3.77 ± 8.78

Tableau 4.4 : Résultats du calcul de η Spatial Filling Index pour différentes anomalies cardiaques

Le Spatial Filling Index diminue ou augmente selon la variation de RR. Cette valeur diminue pour les anomalies de la variation élevée de RR (VF, AF, SSS, PVC) et augmente pour CHB, CHF, ISCDIL, qui ont la basse variation de RR.

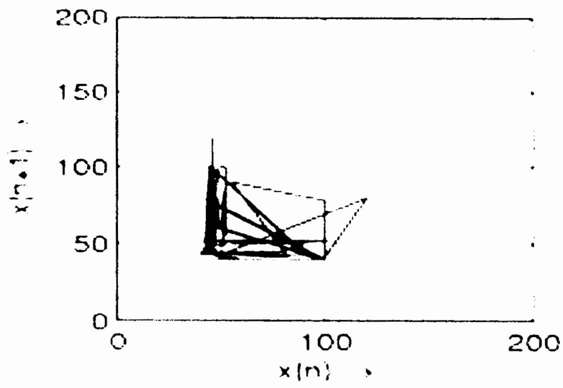


Schéma 1 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet qui représente SSS (syndrome en difficulté de sinus, Bradycardie&Tachycardie) il y a une variation continue de la fréquence cardiaque entre la bradycardie et la tachycardie. La reconstruction de trajectoire de l'espace de phase a réparti un plus grand secteur [18].

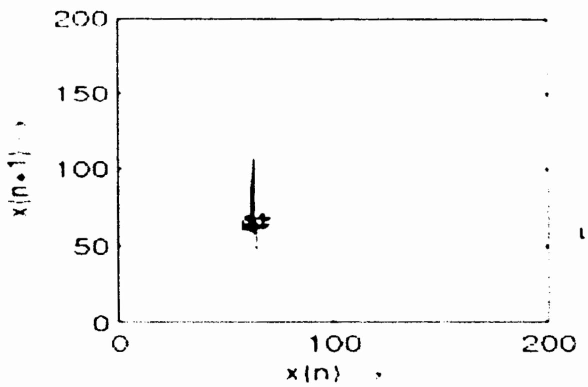


Schéma 2 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet qui représente le PVC (l'anomalie ectopique de battement) ; il y aurait un saut impulsif soudain dans la fréquence cardiaque. Ceci peut être dû à un battement Prématuré Ventriculaire dans le signal d'ECG. Ceci est indiqué comme une transitoire soudaine dans l'espace de phase de reconstruction [18].

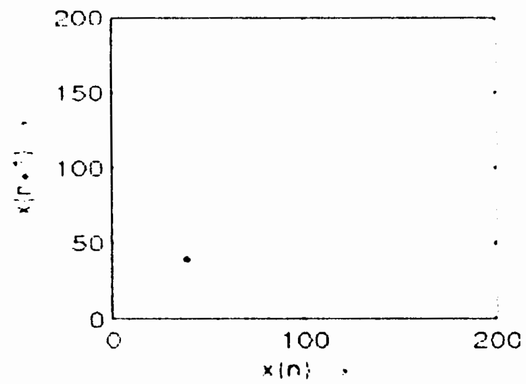


Schéma 3 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet qui représente CHB (bloc complet de cœur), comme noeud atrio ventriculaire n'envoie pas les signaux électriques rythmiquement aux ventricules, la fréquence cardiaque reste bas. La trajectoire de reconstruction de l'espace de phase réduit presque à un point, indiquant très peu changement avec du temps [18].

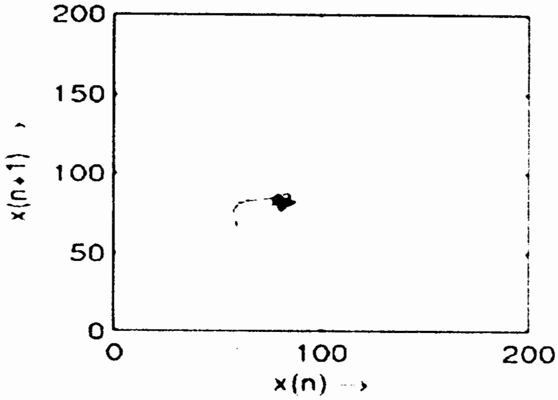


Schéma 4 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet normale. Pour des cas normaux, la trajectoire de reconstruction de l'espace de phase ressemble à un faisceau des points [18].

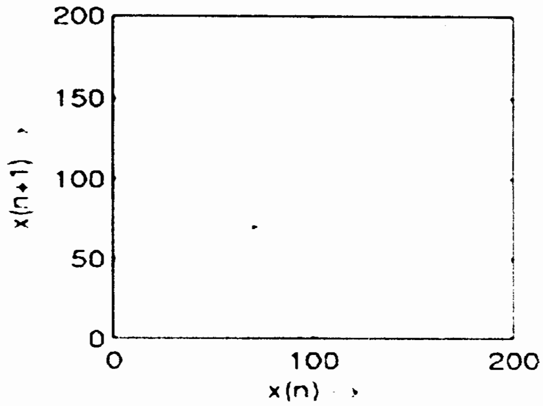


Schéma 5 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet qui représente CHF (l'arrêt du coeur congestif), la variation de fréquence cardiaque est inférieure et par conséquent la trajectoire de reconstruction de l'espace de phase étendue dans un secteur très petit [18].

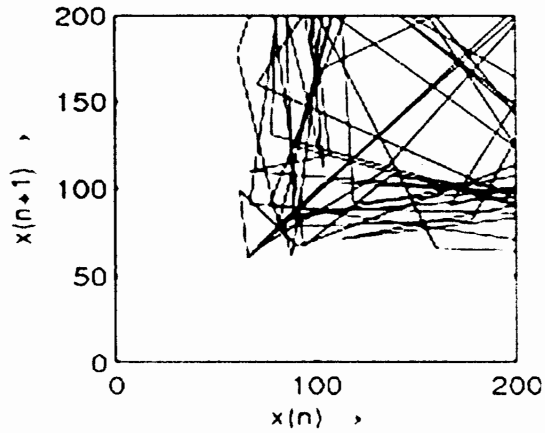


Schéma 6 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet qui représente AF. Dans la fibrillation atriale, le signal de fréquence cardiaque enregistre la variabilité fortement erratique ; ceci est dépeint comme dispersante des points dans la trajectoire de reconstruction de l'espace de phase [18].

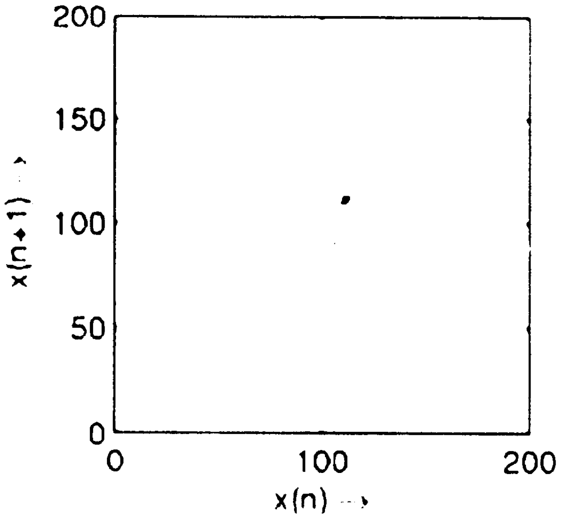


Schéma 7 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet qui représente le cardiomyopathie ischémique/dilatée, les ventricules ne peuvent pas pomper dehors le sang au degré normal. Ici la variation de fréquence cardiaque est très petite. Et par conséquent la parcelle de terrain de l'espace de phase sera presque un point [18].

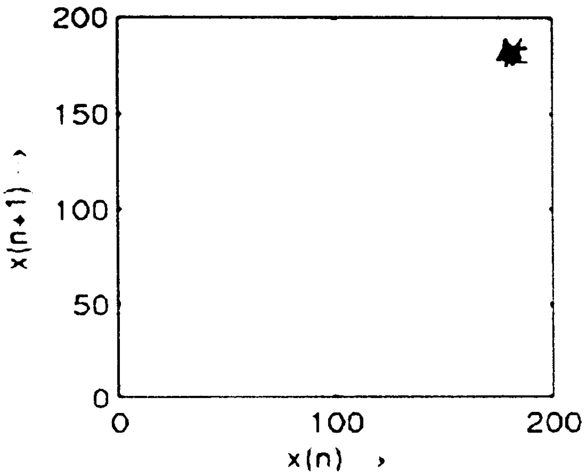


Schéma 8 : Espace de phases de reconstruction de fréquence cardiaque dans le sujet qui représente VF (fibrillation ventriculaire). L'espace de phase de reconstruction ressemble à ceia de la classe normale. En conclusion, dans VF, la variation de fréquence cardiaque est haute et par conséquent l'espace de phase est aléatoirement distribuée [18].

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans ce chapitre on esquisse les questions ouvertes qui prolongent le travail présenté, et par ailleurs on explicite certains sujets actuels de recherche sur l'application de la théorie du Chaos à la Cardiologie.

Dans un premier temps l'exposé des outils de la théorie des systèmes chaotiques a permis de comprendre leur portée lorsqu'ils sont appliqués à un domaine aussi vital que l'étude du système cardiaque.

En fait l'étude de la dynamique du cœur et celle des rythmes internes ont été les premières applications de la théorie du Chaos. Même David Ruelle s'est éloigné du formalisme mathématique pour spéculer sur le chaos dans le *cœur « Un système dynamique d'un intérêt vital pour chacun d'entre nous.... Il semble que l'on pourrait tirer grand bénéfice, au niveau médical, d'une étude d'un modèle mathématique qui reproduirait les divers régimes dynamiques du coeur »* écrivit – il.

Les biorythmes, dont le rythme cardiaque, sont – ils modélisés par le chaos déterministe ou sont – ils une expression d'un bruit simplement aléatoire au sens mathématique du terme ? La réponse est affirmative et aujourd'hui on convient que la plupart des biorythmes sont modélisés par le chaos déterministe, bien que non exempts d'un certain facteur de bruit aléatoire. Comme cela a été développé et illustré dans ce mémoire c'est justement ce chaos, à condition d'être quantifiable,

qui fournit une évaluation plus exacte de l'état de santé ou de la maladie ainsi qu'un diagnostic et/ou un pronostic qui seraient impossibles à déterminer par d'autres moyens de la médecine classique.

Suite au travail présenté dans ce mémoire il y a des questions qui s'imposent comme celle de savoir si l'on a tenté d'appliquer tous les outils et les techniques de la théorie du Chaos à la dynamique cardiaque, ou encore quelles sont leur limites dans leurs réponses aux problèmes de pathophysiologie?

AUTRES METHODES DE DETECTION DU CHAOS

Les méthodes de détection du Chaos en Cardiologie se développent parallèlement aux outils mathématiques et informatiques, ce qui explique qu'elles soient nombreuses[1] et que l'on n'en cite que quelques unes dont :

➢ « Noise Limit »

Dans la plupart des algorithmes de calcul des exposants de Lyapounov, très sensibles au bruit, on a du mal à distinguer chaos déterministe et bruit. Face à ce constat il a été proposé une méthode basée sur l'ajout de bruit pour mieux en révéler la dynamique chaotique. La méthode consiste à ajouter aux données expérimentales un bruit blanc et à en augmenter l'écart type jusqu'à ne plus détecter les non linéarités de ces données. La valeur de l'écart type est la limite du bruit (Noise Limite = NL). Ainsi une valeur NL > 0 indique la présence de chaos alors que NL = 0 indique que les données ne sont pas chaotiques.

➢ Entropie de Corrélation

On extrait d'un ensemble de données d'électrocardiogrammes des séries de R-pics et R-R intervalles. On procède à une reconstruction d'attracteurs à partir desquels on calcule l'intégrale de corrélation, et on en déduit l'entropie de corrélation.

---

[1] **Christini DJ, Collins JJ: (1996) "Using chaos control and tracking to suppress a pathological nonchaotic rhythm in a cardiac model". Phys Rev E;53:R49-R52.**

La positivité de l'entropie correspond à une perte d'information sur le système et confirme ainsi la dynamique chaotique.

Un mouvement périodique a une entropie nulle et un mouvement aléatoire une entropie infinie.

En se basant sur ces caractéristiques le calcul de l'entropie de corrélation à partir des données fournies par les ECG fait apparaître qu'elle est dans chaque cas positive, confirmant ainsi la nature chaotique de la dynamique cardiaque.

➢ Entropie approximative

L'étude des séries temporelles de saturation artérielle d'oxygène (SaO_2) par le biais de l'entropie approximative permet d'en extraire des informations sur le syndrome obstructif d'apnée du sommeil (OSA). En effet, cet outil du chaos qu'est l'entropie approximative est une alternative à l'entropie de Kolmogorov – Sinaï (K-S entropie). Celle – ci mesure le taux moyen d'information créée mais ne peut être utilisée pour des applications statistiques. En fait elle diverge vers l'infini dès que le signal est contaminé par un bruit de niveau bas contrairement à l'entropie approximative qui se distingue par sa robustesse pour mesurer l'information des séries temporelles.

On peut mentionner également l'entropie de Renyi dont les résultats sont appréciables.

AXES DE RECHERCHE

Parmi les lignes de recherches ouvertes pour une application concrète de la théorie du chaos on celles développées par les équipes de l'Université de Harvard, du Massachusetts Institute of Technology, de North of Texas University et du Hospital Beth Israel de Boston. (sous la direction de A.L. Goldberger, D. R. Rigney, B. J. West,) dont l'objectif est la détection, ou mieux l'anticipation, de certaines pathologies de la dynamique cardiaque.

La fréquence cardiaque jugée insuffisante pour caractériser l'état dynamique du cœur, les auteurs introduisent une deuxième variable importante: la tension artérielle. Comme pour la fréquence cardiaque il existe une variabilité de tension artérielle. Le problème est que, pour la détecter il est nécessaire de la mesurer de

battement à battement. Pour pallier à la difficulté de mesure cette pression artérielle on utilise la reconstruction du portrait de phases. Celle-ci est possible si l'on remplace la mesure traditionnelle de pression (mm de Hg) par une évaluation relative de la pression de battement à battement. Un dispositif enregistre simultanément la fréquence cardiaque et la tension artérielle de battement à battement.

Cela permet d'obtenir des résultats intéressants sur la caractérisation des arythmies ventriculaires.

Autre dynamique cardiaque analysée : la nature de la réponse ventriculaire dans la fibrillation atriale. Phénomène aléatoire ou chaos déterministe ?

Partant du fait que la signature caractéristique d'un comportement chaotique est la dépendance sensible aux conditions initiales, des techniques de la dynamique non linéaire sont appliquées à l'analyse de la variabilité de fréquence cardiaque pendant le rythme sinusal pour une stratification des risques[2].

On sait que les intervalles ventriculaires irréguliers dans la fibrillation atriale sont seulement décrits comme chaotiques mais ce fait n'a pas été prouvé au sens mathématique strict du terme. Aussi partant du fait que la variabilité réduite de fréquence cardiaque pendant la fibrillation atriale donne un risque cardiovasculaire accru[3], l'équipe de Stein a tenté de mieux comprendre la nature chaotique de la dynamique fondamentale de la réponse ventriculaire dans la fibrillation atriale[4].

---

[2] **Skinner, J. E., C. M. Pratt, and T. Vybiral. (1993) "A reduction in the correlation dimension of heartbeat intervals precedes imminent ventricular fibrillation in human subjects".** ***Am. Heart J.*** **125: 731-743**

[3] **Stein, K. M., J. S. Borer, C. Hochreiter, R. B. Devereux, and P. Kligfield. (1994) "Variability of the ventricular response in atrial fibrillation and prognosis in chronic nonischemic mitral regurgitation".** ***Am. J. Cardiol.*** **74: 906-911.**

[4] **Kenneth M. Stein, Jeff Walden, Neal Lippman, and Bruce B. Lerman (1999) « Ventricular response in atrial fibrillation: random or deterministic? » Vol. 277, Issue 2, H452-H458.**

Un algorithme prédictif non linéaire est développé en se basant sur une idée de Sugihara et May[5] et ce afin de mettre en évidence la sensibilité aux conditions initiales d'une série temporelle. L'algorithme est appliqué à un ensemble d'intervalles simulés RR et à l'analyse des ordres d'intervalle de RR obtenus chez des patients atteints de fibrillation atriale chronique.

Par ailleurs ce travail est complété par un algorithme conçu pour interpoler et corriger les effets d'une ectopie dans les calculs de la variabilité de fréquence cardiaque pendant le rythme sinusal.

Les résultats pour l'instant sont que la réponse ventriculaire dans la fibrillation atriale ne semble pas représenter le chaos au sens mathématique strict d'un système apériodique déterministe et qu'elle n'est pas complètement imprévisible. Ainsi la démonstration que la fibrillation atriale n'est pas un rythme chaotique confirme une fois de plus le potentiel considérable des outils de la théorie du Chaos pour l'analyse qualitative des systèmes dynamiques.

Ces résultats sont corroborés par le travail développé sur un modèle mathématique de la dynamique du noeud atrio-ventriculaire du coeur humain, basé sur des enregistrements d'activité électrique dans les oreillettes et des ventricules et dont le but est le contrôle de la réponse ventriculaire à la fibrillation atriale[6].

Comme cela a été exposé dans le présent mémoire d'autres méthodes peuvent être employées pour rechercher la preuve d'un comportement chaotique telles que :

- l'évaluation de la dimension de l'attracteur pour que le système soit analysé (une mesure de complexité / apériodicité)

- l'évaluation du plus grand exposant de Lyapunov du système.

---

[5] Sugihara, G., and R. M. May. (1990) "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series". *Nature* 344: 734-741.
[6] P. Jorgensen, C. Schafer (2002) "A Mathematical Model of Human Atrioventricular Nodal Function Incorporating Concealed Conduction" *Bulletin of Mathematical Biology,* 64, 1083–1099

L'autre application fondamentale de la théorie du Chaos est le

<u>CONTROLE DU CHAOS</u>:

Depuis les travaux de Garfinkel[7] pionnier du <u>Contrôle du Chaos cardiaque</u> un certain nombre d'études théoriques et expérimentales ont été réalisées pour contrôler les rythmes cardiaques irréguliers et ce par le biais de diverses méthodes de contrôle dynamique non linéaire.

La plupart des méthodes sont issues des travaux d'Ott, Grebogi, et York[8] (OGY) et permettent de convertir des oscillations apériodiques en oscillations périodiques.

La méthode de contrôle d'OGY tire profit une propriété du chaos dynamique : il y a un état d'équilibre instable inclus dans l'attracteur chaotique qui peut être détecté en utilisant un ensemble de données sans pour autant connaître le système.

En appréciant les propriétés de cet état d'équilibre instable on peut concevoir un algorithme pour <u>contrôler le comportement chaotique</u> du système et le stabiliser sur cet état par de très faibles perturbations d'un paramètre du système, dit paramètre de bifurcation ou de contrôle.

Dans cette étude Jordan et Christini[9] proposent une stratégie spécifique appelée contrôle adaptatif d'intervalles diastoliques (DI), pour contrôler la durée de potentiel d'action (APD). Spécifiquement, ils utilisent une relation dite de restitution dans un système cardiaque à savoir :APD actuel en fonction des DI précédents:

$$APD_{n+1} = f\ (DI_n)$$

La stabilité de ce système discret est analysée et permet de montrer comment maîtriser certains rythmes cardiaques irréguliers. Cependant puisque la seule thérapie efficace pour la fibrillation ventriculaire reste encore des chocs à haute énergie, il serait crucial de développer et d'obtenir par les <u>méthodes de contrôle</u>

---

7 Garfinkel A, Spano ML, Ditto WL,Weiss JN: (1992) "Controlling cardiac chaos". Science;257:1230-1235.

8 Ott E, Grebogi C, Yorke JA: (1990) "Controlling chaos". Phys Rev Lett.;64:1196-1199.

9 Jordan PN, Christini DJ: (2004) "Adaptive diastolic interval control of cardiac action potential duration alternans". J Cardiovasc Electrophysiol;15:1167-1175.

dynamique non linéaires des protocoles à énergie réduite pour gérer les arythmies cardiaques.

Il y a de beaucoup de chemin à faire avant que ces méthodes ne soient fructueuses en pratique. Et pour cause les méthodes de contrôle perturbent seulement l'intervalle d'excitation (probablement le seul paramètre accessible dans le système cardiaque[10]).

Ces études indiquent que la combinaison des méthodes non linéaires du contrôle dynamique du Chaos [11],[12],[13] et de la défibrillation peut donner naissance à de nouvelles stratégies thérapeutiques dans la traitement des arythmies cardiaques.

> **« En 1986 vous ne trouverez pas un seul livre de physiologie qui contienne le mot « fractal » mais je pense qu'en 1996 il n'y en aura pas un dans lequel ce mot ne figurera pas. »**
>
> **Ary L. GOLDBERGER**

---

[10] Qu Z, Garfinkel A: (2004) "Nonlinear dynamics of excitation and propagation in cardiac muscle". In Zipes DP, Jalife J, eds: *Cardiac Electrophysiology:From Cell to Bedside*. Fourth Edition. Philadelphia: WB Saunders, 327-335.

[11] ZHILIN QU, (2004) "Nonlinear Dynamic Control of Irregular Cardiac Rhythms"J. Cardiovasc Electrophysiol, Vol. 15, pp. 1186-1187

[12] Goldberger AL, Amaral LAN, Hausdorff JM, Ivanov PC,Peng CK, Stanley HE.(2002), "Fractal dynamics in physiology: alterations with disease and ageing". Proc Natl Acad Sci.; 99:2466–2472.

[13] Ivanov PC, Amaral LAN, Goldberger AL, Havlin S, Rosenblum,MG, Struzik ZR, Stanley HE. (1999) "Multifractality in human heartbeat dynamics." Nature399:461–465.

Quatrième partie

Bibliographie

Bibliographie

[1] V. Arnold, "Equations Différentielles Ordinaires ", Editions MIR-Moscou, 1974.

[2] P.A. Absil, R. Sepulchre, A.Bilge, P.Gérard "Analyse non linéaire des fluctuations du rythme cardiaque par la méthode DFA ", Institut d'électricité Montefiore B28, CHU de Liége, 4000 Liége Sart Tilman, Belgium, 1996.

[3] M. Ataei, A. Khaki-Sedigh, B. Lohmann, and C. Lucas "Estimating the Lyapunov-Exponents of chaotic time series : A model based Method", Institute of Automation, University of Bremen Otto-Hahn-Allee/NW1, D-28359, Bremen, Germany, 2003

[4] Pierre-Antoine. A.Bsil "Non linear analyse of cardiological signals towards clinical applications ", Adiploma thesis for the degree of Ingénieur Pysicien (Pysics Engineering), University of Liege, Belgium, in partial fulfillment. June 1998.

[5] Y. Ashkenazy, PCh. Ivanov, et al., "Decomposition of Heartbeat Time Series : Scaling Analysis of the Sign Sequence",University of Boston, USA, 2001.

[6] F. Alin, B.Robert, C. Goeldel, "Application de la théorie du chaos à l'approche expérimentale de la dynamique non linéaire d'un moteur pas à pas", LAM-UFR Science Exacte et Naturel, France, 2001.

[7] P. Bergé. Y. Pomeau.Ch.Vidal, "L'ordre dans le Chaos", Herman, 1984.

[8] P. Bergé. Y. Pomeau.Ch.Vidal,"L'espace chaotique", Herman, 1997.

[9] W. E. Boyce, R. C. Diprima, "Elementary Differential Equations", Troy, New York, 1976.

[10] Barbara, K. Kunz, "New world for Reflexology Research", Publication, Special Issue, vol 26, N 10, (http ://www.reflexology-research.com/Singapour), 2005

[11] S. Boughaba, "Phénomènes de Chaos Déterministe et de Turbulence. L'Attracteur Etrange de Chua : coexistence d'Attracteurs, Dynamique Symbolique et Confineurs", Thèse de doctorat d'état , Université Mentouri de Constantine, 2002.

[12] D.J. Christini, Leon Glass, "Introduction : Mapping and controle of complex cardiac arrythmias", American Institute of phisics, 2002.

[13] A.Casaleggio "Difference on the correlation Dimension of MIT-BIH ECG Database Recordings", ICE-CNR, Genova, Italy, IEEE, 1993 .

[14] A.Casaleggio, S. Braiotta, A. Corna "Study of Lyapunov Exponents of ECG signals from MIT-BIH Database", ICE-CNR, Genova, Italy", IEEE, 1995.

[15] D. Cysarz, H. Bettermann, and P. van Leeuwen "Entropies of short binary sequences in heart period dynamics", SPECIAL COMMUNICATION, Am J Physiol Heart Circ Physiol 278, Vol. 278, Issue 6, H2163-H2172, June 2000.

[16] Alin Chenciner "De la Mécanique céleste à la théorie des systèmes dynamiques, aller et retour Poincaré et la géométrisation de l'espace des phases", Université Paris VII-Denis Didort, France, 2002.

[17] Huyen DANG-Vu. Claudine DELCARTE, "Bifurcation et Chaos", *Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en pascal, Fortran et Mathematica* , Ellipses Edition, 2000.

[18] Oliver Faust, Rajendra Acharya U , SM Krishnan, and Lim Choo Min "Analysis of cardiac signals using spatial filling index and time-frequency domain" BioMedical Engineering OnLine 2006.

[19] Ary L. Goldberger "Nonlinear Dynamics, Fractals, and Chaos Theory : Implications for Neuroautonomic Heart Rate Control in health and disease", [Circulation Electronic Pages http ://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215] ;2000.

[20] Ary L. Goldberger "Nonlinear Dynamics, Fractals, and Chaos : Applications to cardiac electrophysiology", Annals of Biomedical Engineering.Vol 18. pp. 001-004. 1990.

[21] Alan Garfinkel, Peng-Sheng Chen, Donald O. Walter, Hrayr S. Karagueuzian, Boris Kogan, Steven J. Evans, Mikhail Karpoukhin, Chun Hwang, Takumi Uchida, Masamichi Gotoh, Obi Nwasokwa, Philip Sager, and James N. Weiss "Quasiperiodicity and Chaos in Cardiac

Fibrillation" J. Clin. Invest, The American Society for Clinical Investigation, Inc.Volume 99, Number 2, 305-314, 1997.

[22] Leon Glass, Michael R. Guevara, Alvin Shrier and Rafael Perez "Bifurcation and chaos in periodically stimulated oscillator". Physica 7D 89-101. North-Holland Publishing Company, 1983.

[23] Leon Glass, "Multistable spatiot temporal patterns of cardiac activity", Publication, University of Montreal, Canada, 2005.

[24] SE. Geneser, R.M. Kirby, FB. Sachse, "Sensitivity Analysis of Cardiac Electrophsiological Models Using Polynomial chaos", Publication, IEEE, University of Uthal, USA, 2006.

[25] James Gleick, "la théorie du chaos", Flammarion, 1991.

[26] Jack K. Hale. Huseying Koçak, "Dynamique and Bifurcation", Springer- Verlag New York, Inc, 1991.

[27] Robert C. Hilborn, "Chaos and Non- linear Dynamics and Bifurcation", *An introduction for Scientists and Engineers*, New York – Oxford University Press, 1994.

[28] Roberto Homero, Daniel Alvarez, Daniel Abasolo, Carlos Gomez , Felix Del Campo, Carlos Zamarron "Approximate Entropy from Overnight Pulse Oximetry for the Obstruvtive Sleep Apnea Syndrome", IEEE. Engineering in Medicine and Biology 27 th Annual Conference Shanghai, China, 2005.

[29] R. Hornero, D. Alvarey, et al., "Approximate Entropie from Overnight Pulse Oximetry for the 0bstructive Sleep Apnea Syndrom", IEEE, Engineering in Medecine and Biology 27 th Annual conference, China, 2005.

[30] Z. Ihara, "Design and performance of Lead Systems for the analysis of atrial signal components in the ECG", Thèse de Doctorat, Université de Sophia, Japon, 2006.

[31] David Kernick, "New perspectives for Cardiologie from Chaos theory", Br J Cardiol 2006.

[32] .Claesen, RI Kitney "Estimation of Largest Lyapunov Exponent of an RR Interval and its use as an Indicator of Decreased Autonomic Heart Rate Control", Imperial College, London, IEEE, 1994.

[33] Michel Laurent "Modèles et modélisation en biologie", Publications de l'Université Paris-Sud, Orsay, 2004.

[34] Paul Manneville, "Systèmes Dynamiques et Chaos", Publication, Ecole polytechnique, 1999.

[35] Paul Manneville, "Dynamiques Non- linear Appliquée au chaos et à son contrôle", DEA de Mécanique des fluides et des Transferts Paris VI Paris-Sud, Ecole polytechnique 2004.

[36] R. M. M. Mattheij, J. Molenaar, "Ordinary Differential Equations in Theory and Practice", England, 1996.

[37] Yang Mingjing "Correlation Dimensions and Entropy of Series in Electrocardiogram". Engineering in Medicine and Biology 27 th Annual Conference Shanghai, China, 2005.

[38] I. Maarad, "Attracteurs Etranges et comportement chaotique des systèmes dynamiques non linéaires : Attracteur de Lorenz", Thèse de Magister En Electronique,Université Mentouri de Constantine, 1997.

[39] Mohamed I. Owise, Ahmed H. Abou-Zied, Abou-Bakr M.Youssef, and Yassar M. Kadah "Study of Features Based on Non linear Dynamical Modeling in ECG Arrhythmia Detection and Classification" IEEE on biomedical, vol. 49, no. 7, 2002.

[40] I.Radoji, T. Gautama, "A comparison of two novel methode for characterisation of Heart rate variability Series", Biosingal, 2002.

[41] Raoul Robert, "L'effet papillon n'existe plus", Revue pour la science, 2001.

[42] .J.L. Subias "Applications of Chaos on theory Medecine", Area of Graphical Expression in Engineering. University of Zaragosa, Spain, 1992.

[43] J.L. Subias "A time series analysis algorithme for evaluating cardiac failures risk ". Area of Graphical Expression in Engineering. University of Zaragosa, Spain, 1994.

[44] PE. MC Sharry, BD. Malamaud, "Quantifying Self-Similarity in Cardiac Inter-Beat Interval Time Series", University of Oxford, 2005.

[45] PE. MC Sharry, "Nonlinear Dynamics and chaos", University of Oxford, 2006.

[46] Sylvain Thibault "L'étude des effets de modifications des conditions mécaniques ventilatoires permet-elle de mettre en évidence du chaos dans l'activité ventilatoire chez l'homme" Thèse de Doctorat de l'université Joseph Fourier. Spécialité : Modèles et Biologie, 2004.

[47] PE. MC Sharry, G.D.Clifford, L.Tarassenko, L.A. Smith "A dynamical Model for Generating Sythetic Electocardiogram Signals", IEEE, Biosignal, Vol.50, no 3, 2003.

[48] M.G, Signorini, "Chaos and Real World Nonlinear analysis of cardiovascular variability serie", Université de Milano, Italy, 2005.

[49] The MIT-BIH Arrythmia Databas,3 rd ed., Harvard- MIT Div. Health Sci . Technol., Cambridge, MA, 1997.

[50] X Zeng, R. Eykholt, and R. A. Pielke "Estimating the Lyapunov-Exponent Spectrum from Short Time Series of Low Precision", Physical Review letters, Volume 66,1991.

[51] R. Zou, J. Kneller, L.J. Leon, S. Nattel, "Devlopement of a computer algorithm for detection of phase singularities and initial application to analyze simulations of atrial fibrillation" ; American Institute of phisics, 2002.

Résumé

Ce mémoire a pour objet de présenter l'application de la théorie du chaos à la cardiologie, après une étude détaillée des outils fondamentaux de l'étude des systèmes dynamiques chaotiques : (Entropie, Dimensions fractales, Section de Poincaré, Bifurcation,…….)

L'intérêt de la théorie du chaos est de diagnostiquer et / ou prévenir certaines pathologies cardiaques.

Mots clefs

Chaos, Systèmes Dynamiques dissipatifs, Attracteurs, Attracteurs Etranges, Bifurcations, Séries Temporelles, Exposant de Lyapunov, Dimension de corrélation.