



DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N° d'ordre: 254/DS/2018

N° de série: 14/Math/2018

Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

**ETUDE DE SYSTEMES DYNAMIQUES
CHAOTIQUES.**

ANALYSE ET APPLICATIONS

**Application à la Dynamique de la
Physiologie Cardiaque**

Présentée par KESMIA Mounira

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

devant le jury :

- ❖ **HAMEIDA Ali** *Maître de Conférences (A) à l'Université Mentouri Constantine 1* **Président**
- ❖ **BOUGHABA Soraya** *Maître de Conférences (A) à l'Université Mentouri Constantine 1* **Rapporteur**
- ❖ **AYADI Abdelhamid** *Professeur à l'Université Larbi ben M'Hidi de Oum-EL-Bouaghi* **Examineur**
- ❖ **ABDELOUAHAB Med Salah** *Maître de Conférences (A) au Centre universitaire de Mila* **Examineur**
- ❖ **MARHOUN Ahmed Lakhdar** *Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique Constantine* **Examineur**

Soutenue le 13 Décembre 2018



Remerciements

En tout premier lieu je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Mademoiselle Soraya BOUGHABA, qui a dirigé et encadré mes travaux, qui m'a guidée et soutenue tout au long de mon travail de recherche par ses précieux conseils, par sa rigueur et sa disponibilité.

Qu'elle trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercier Mr Ali HAMEIDA pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider mon jury de thèse.

J'adresse mes vifs remerciements à Messieurs AYADI Abdelhamid, Mohamed-Salah ABDELOUAHAB et Ahmed Lakhdar MARHOUN pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de lire et de juger cette thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Sabir JACQUIR du Laboratoire LE2I de Dijon, pour m'avoir accueillie au sein de cette institution lors de mes stages et d'avoir mis toute sa maîtrise de l'outil informatique au service d'un thème de recherche passionnant et prometteur.

Je tiens aussi à remercier le Professeur Michael R. GUEVARA, de l'Université McGill de Montréal, qui a toujours eu l'amabilité de répondre à nos questions.

Mes remerciements ne seraient pas complets si je ne rendais pas hommage à tous les personnels du département de Mathématiques de l'Université de Constantine sans lesquels cette soutenance n'aurait pu se tenir.

J'aimerais exprimer toute ma gratitude tout particulièrement à mes parents et à mon mari pour leur inestimable soutien moral.

Un grand merci à mes amies pour leurs encouragements et pour leur amitié qui ne s'est jamais démentie.

Table des matières

| | | |
|-----------|--|-----------|
| I | INTRODUCTION GÉNÉRALE | 5 |
| 0.1 | Prédictibilité, Déterminisme et Chaos | 6 |
| 0.1.1 | Henri Poincaré, père de la théorie des systèmes dynamiques | 7 |
| 0.1.2 | Systèmes dynamiques, chaos déterministe et rythmes physiologiques | 11 |
| 0.2 | Contrôle du chaos | 12 |
| 0.3 | Chaos cardiaque et rythmes cardiaques | 14 |
| 0.4 | Contexte et plan de la thèse | 17 |
| | | |
| II | SYSTÈMES DYNAMIQUES NON LINÉAIRES ET THÉORIE DU CHAOS | 22 |
| 1 | Éléments fondamentaux de la dynamique non linéaire et du chaos | 23 |
| 1.1 | Systèmes dynamiques et physiologie | 24 |
| 1.2 | Généralités | 24 |
| 1.3 | Définitions et propriétés des systèmes dynamiques | 27 |
| 1.4 | Section de Poincaré | 42 |
| 1.5 | Attracteur. Bassin d'attraction | 45 |
| 1.5.1 | Types d'attracteurs | 46 |
| 1.6 | Stabilité des systèmes non linéaires | 52 |

| | |
|---|-----------|
| 1.6.1 Variétés stable, instable et centrale | 57 |
| 1.7 Bifurcations | 63 |
| 1.8 Routes vers le chaos | 66 |
| 1.9 Définition du chaos | 67 |
| 1.10 Chaos et stabilité des orbites | 69 |
| 2 Mesure et quantification du chaos | 71 |
| 2.1 Exposants de Lyapunov | 72 |
| 2.2 Entropie | 77 |
| 2.3 Dimensions fractales | 80 |
| 2.4 Le chaos en physiologie | 86 |

III THÉORIE DU CHAOS ET APPLICATION À LA DYNAMIQUE CARDIAQUE **89**

| | |
|---|-----------|
| 3 Analyse et contrôle du système cardiaque | 90 |
| 3.1 Dynamique non linéaire du système cardiaque | 90 |
| 3.1.1 Dynamique non linéaire de l'activité électrique du système cardiaque | 92 |
| 3.1.2 Dynamique non linéaire de l'activité électrique de la cellule cardiaque | 93 |
| 3.1.3 Potentiel de repos | 94 |
| 3.1.4 Potentiel d'action | 96 |
| 3.1.5 Restitution | 97 |
| 3.2 Arythmies cardiaques | 101 |
| 3.2.1 Réentrée | 102 |
| 3.2.2 Fibrillation ventriculaire | 102 |
| 3.2.3 Alternances : déclencheurs d'arythmies | 103 |
| 3.2.4 Défibrillation cardiaque | 103 |
| 3.2.5 Exemple illustratif | 106 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3 | Dynamique itérative de l'APD sans mémoire | 109 |
| 3.4 | Aperçu de la théorie du contrôle | 113 |
| 3.5 | Contrôle de l'itération chaotique de l'APD sans mémoire | 117 |
| 3.5.1 | La méthode (OGY) | 117 |
| 3.5.2 | Application de la méthode OGY sur le système de l'APD sans mémoire | 120 |
| 3.5.3 | Le contrôle prédictif | 129 |
| 3.5.4 | Application du contrôle prédictif sur le système de l'APD sans mémoire | 132 |
| 3.6 | Discussion | 135 |
| 4 | Nouvelle approche du contrôle de l'alternance cardiaque | 137 |
| 4.1 | Contexte, concepts et méthodes | 138 |
| 4.2 | Contrôle prédictif de l'alternance de l'APD sans mémoire | 141 |
| 4.2.1 | Approche mathématique | 142 |
| 4.2.2 | Résultats numériques | 144 |
| 4.2.3 | Influence du bruit | 153 |
| 4.3 | Discussion | 155 |
| 5 | Nouvelle stratégie de contrôle de la dynamique périodique | 157 |
| 5.1 | Le cas discret unidimensionnel | 158 |
| 5.1.1 | Principe de l'algorithme | 159 |
| 5.1.2 | Application au système discret de l'APD (sans mé- moire) | 163 |
| 5.1.3 | Application à l'équation logistique | 168 |
| 5.2 | Le cas discret multidimensionnel | 173 |
| 5.2.1 | Principe de l'algorithme | 173 |
| 5.2.2 | Application au système de Hénon | 176 |
| 5.3 | Discussion | 183 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6 | Nouveau modèle itératif de l'APD avec mémoire | 184 |
| 6.1 | Système itératif de la durée du potentiel d'action en dimension 2 | 185 |
| 6.2 | Stabilité du système | 187 |
| 6.3 | Attracteurs du système itératif de l'APD en dimension 2 | 189 |
| 6.4 | Transition vers le chaos | 194 |
| 6.4.1 | Le cas $a = 1$ | 195 |
| 6.4.2 | Le cas $a = 0.7$ | 198 |
| 6.4.3 | Le cas $a = 0.5$ | 200 |
| 6.4.4 | Le cas $a \geq 6.4$ | 202 |
| 6.5 | Quantification du chaos | 204 |
| 6.5.1 | Résultats numériques | 205 |
| 6.6 | Discussion | 206 |
| 7 | Dynamique non linéaire, chaos et physiologie : Conclusions et Perspectives | 209 |
| 7.1 | Dynamique non linéaire et complexité | 210 |
| 7.2 | Dynamique non linéaire : modélisation mathématique de la dynamique cardiaque | 212 |
| 7.3 | Dynamique non linéaire en neurophysiologie et neurosciences | 218 |
| 7.4 | Perspectives dans la dynamique non linéaire appliquée à la physiologie | 220 |
| | Bibliographie | 222 |



Première partie

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Tout est mouvement et la dynamique est constitutive de la nature.

0.1 Prédicibilité, Déterminisme et Chaos

De l'infiniment petit à l'infiniment grand, rien n'est absolument « figé », tout y est changement, évolution, et mouvement permanent. La notion d'évolution, entendue ici au sens de principe du changement du simple au complexe, est intégrée comme loi générique et universelle de la Science.

Partout, dans l'espace et le temps, à toute échelle, l'Univers manifeste une dynamique permanente comme si l'essence première du « mouvement » était un principe d'être coextensif de l'existence même de la nature de l'Univers. Avec l'explicitation de « lois » de l'évolution qui ne sauraient être causes d'elles-mêmes, le fait irréversible de la complexité croissante se greffe sur ce principe du « mouvement » permanent de l'univers de la nature et de la nature de l'Univers. Dans l'Univers et dans la nature même de tout ce qui existe, tout est mouvement, tout peut changer, tout peut se déployer, tout peut se complexifier. Cependant l'évolution de l'Univers peut-elle s'identifier à la flèche de la complexité croissante dans l'Univers ? Peut-on calquer le sens de l'évolution globale des grandes structures astrophysiques sur celle de la complexité croissante des structures microscopiques voire de niveau nanométrique du vivant ? Et dans l'affirmative quel est leur rapport de causalité ?

A ces questions, certains éclairages et éléments de réponse sont apportés par la théorie des systèmes complexes, en particulier celle des systèmes dynamiques et de la théorie du chaos.

La théorie du chaos est désormais éminemment pluridisciplinaire. Le sens scientifique du mot « chaos » ne coïncide pas avec le sens mythologique du mot et s'il traduit son sens figuratif ordinaire c'est seulement en apparence.

0.1.1 Henri Poincaré, père de la théorie des systèmes dynamiques

L'essence du chaos se retrouve dans les travaux fondateurs d'Henri Poincaré remontant à la fin du XIXe siècle. Dans sa publication « *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* » il démontre que la plupart des systèmes dynamiques ne sont pas intégrables et, de fait, sont susceptibles de comportements impliquant des trajectoires irrégulières (dites chaotiques par la suite). A l'instar de ses illustres prédécesseurs du XIXe siècle (de Cauchy à Weierstrass...) qui avaient développé des méthodes de résolution des équations différentielles basées sur des critères de validité locale, Poincaré développe une étude qualitative des équations différentielles à partir d'une analyse topologique privilégiant l'intuition géométrique. Son étude qualitative offre une notion centrale, fondamentale et décisive d'intégrabilité et de non intégrabilité des équations. La caractérisation globale des solutions en dépend. Ainsi les sections de Poincaré traduisent des résultats globaux obtenus par Poincaré pour connaître l'allure générale des courbes solutions et leurs dispositions relatives. Certes les outils et concepts forgés par Henri Poincaré constituent le cadre théorique des recherches actuelles sur les systèmes dynamiques et le chaos, il n'en demeure pas moins que le XXe siècle a été jalonné par de nombreuses contributions directes et indirectes dans la caractérisation et l'approche des phénomènes de chaos (théorie ergodique, théorie des processus aléatoires, équations stochastiques...), la dénomination de « systèmes dynamiques » revenant à Birkhoff qui a poursuivi l'approche topologique de Poincaré.

L'étude approfondie des systèmes dynamiques représente une source de compréhension de la quintessence du chaos. Par définition, les systèmes dynamiques sont des systèmes dont l'évolution temporelle est décrite par un nombre fini d'équations déterministes. Ces systèmes dynamiques sont dits conservatifs ou dissipatifs suivant que l'énergie totale se conserve ou se dissipe (par perte ou par transfert) et demeurent formellement déterministes. Par contre, pour les

systèmes stochastiques, le déterminisme et une certaine représentation du hasard peuvent se mêler, permettant des combinaisons heuristiques entre chaos et action de fluctuations aléatoires. Il reste que les systèmes conservatifs, dissipatifs et stochastiques, constituent habituellement les trois différents supports d'étude théorique des comportements des systèmes potentiellement chaotiques.

Conventionnellement, le déterminisme suppose la prédictibilité. Par conséquent, dans le contexte du déterminisme ordinaire, la causalité recoupe implicitement la faculté de prédictibilité ordinaire. Dès lors, on pourrait s'interroger sur ce que devient la simplicité de la causalité usuelle lorsque le déterminisme s'affranchit de la notion de prédictibilité.

Le principe de causalité usuelle en science est à la base de la modélisation scientifique dont le rôle est de représenter les relations de causes à effets et d'en tester la reproductibilité.

Ces concepts émergent dans les travaux de Henri Poincaré qui, bien avant le principe d'incertitude de Heisenberg, présenta des objections à l'idée du déterminisme absolu.

« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard... Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous dirons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux... » (Poincaré H. a. "Science et méthode". Edition Ernest Flammarion, page 68. Paris 1908).

Comme exemple de cette sensibilité aux conditions initiales, Henri Poincaré cite la trajectoire des cyclones (presque « l'effet papillon ») (Poincaré H. b. Science et méthode. Edition Ernest Flammarion, Paris 1908). Il est aussi l'initiateur de la théorie du chaos dont la sensibilité aux conditions initiales est l'élément

essentiel et il a reconnu que le chaos apparaît extrêmement souvent : il apparaît dans presque tous les problèmes non intégrables.

Ainsi l'idée du déterminisme absolu ne reflète qu'un état particulier du développement de la Science.

Dans les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste Henri Poincaré ne se limite pas au cas du problème des trois corps. Il démontre que la plupart des systèmes dynamiques ne sont pas « intégrables » et sont par conséquent soumis à un type de comportement dit chaotique. Un système est dit intégrable, au sens de Poincaré, s'il possède une intégrale indépendante du mouvement pour chacun de ses degrés de liberté. Cette intégrale est dite « *intégrale première* » et elle correspond à une loi de conservation d'une grandeur de la physique (par exemple l'énergie totale ou le moment angulaire).

En fait, la définition originale de la non-intégrabilité, donnée par Poincaré en 1892, fait état qu'il ne peut exister, pour le problème gravitationnel des N corps avec $N \geq 3$, d'autres intégrales analytiques et globalement valides outre celles de l'énergie, du moment angulaire et du barycentre de masse. Par conséquent, les trajectoires résultantes du problème des N corps (où $N > 2$) peuvent être irrégulières, c'est-à-dire (i) qu'il existe une variété de conditions initiales pour lesquelles le système est chaotique et (ii) l'évolution temporelle du système menace à plus ou moins long terme de « basculer dans le chaos ». La première clause est une propriété « en acte », la deuxième une propriété « en puissance ».

C'est ainsi qu'il écrit dans « *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste* » à propos du problème des trois corps :

« *Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même de manière infiniment complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du*

réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien de plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de la Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes » (Poincaré).

Il est clair que l'importance des mouvements chaotiques varie beaucoup selon les domaines étudiés. Quand les perturbations sont importantes presque toutes les solutions bornées sont chaotiques, tandis que la plupart d'entre elles sont régulières dans les problèmes presque intégrables. Cependant, même dans ce dernier cas, l'existence d'une petite proportion de solutions chaotiques dégrade considérablement la stabilité à long terme.

Le problème classique du mouvement des planètes est un exemple célèbre de problème presque intégrable : le mouvement képlérien est une première approximation excellente et la méthode des petites perturbations conduit à des développements très utiles et très précis. Cependant la précision de cette méthode reste limitée et Henri Poincaré a montré que les séries correspondantes sont généralement divergentes.

Dans les régimes chaotiques la prédictibilité classique – de nature quantitative – n'est pas perdue faute de connaissance, mais elle n'a plus de sens. Ce qui disparaît objectivement c'est son caractère absolu de prédiction quantitative comme critère de scientificité. En revanche il est acquis une prédictibilité « qualitative », ou plus précisément une prévision qualitative, sur la nature des régimes possibles. Le régime chaotique lui-même, en tant que régime possible, est prévisible ! Autrement dit, la non-prédictibilité quantitative ou l'imprévisibilité naturelle correspond à une richesse dynamique qu'il convient d'analyser pour la comprendre. Aussi l'étude de l'évolution d'un système dynamique doit s'effectuer globalement au travers de ses évolutions possibles, évolutions qu'il est parfois possible de traduire et de déployer dans un espace particulier dit espace des phases.

La théorie du chaos, dans ce qu'elle révèle par sa profondeur universelle,

constitue un outil essentiel dans la compréhension des propriétés des dynamiques de l'Univers globalement restée cachées à l'intelligibilité scientifique bien au-delà de la seconde moitié du XXe siècle. Aussi le chaos n'est pas en premier lieu et par essence lié à la complication croissante des problèmes, mais plutôt à la profondeur apportée à l'étude de ceux-ci.

Partant du fait que la complication n'est pas la complexité, il y a lieu de faire la distinction entre la complexité rationnelle ou « complexification » (liée à l'analyse, à la méthode, à la représentation) et la complexité réelle (liée à la nature et ses processus inhérents).

0.1.2 Systèmes dynamiques, chaos déterministe et rythmes physiologiques

Dans la présente thèse on met en exergue l'importance des outils de l'analyse qualitative dans l'approche théorique de la physiologie. Plus précisément c'est la physiologie cardiaque qui est choisie comme domaine d'application pertinente de la théorie des systèmes dynamiques et de la théorie du chaos.

Claude Bernard (Bernard, C. "*Leçons sur les phénomènes de la vie commune aux animaux et aux végétaux*". Ballière, Paris (1868)) avait énoncé le principe d'homéostasie selon lequel les organes des êtres vivants répondent aux fluctuations extérieures en essayant de ramener leur comportement à des conditions de stabilité et de stationnarité. Dans la seconde moitié du 20e siècle, le rôle des rythmes périodiques (comme les rythmes circadiens) était compris. Plus récemment, les rythmes complexes comme les oscillations en salves, les phénomènes de synchronisation, sont plus ou moins décrits en physiologie mais l'étude de leur fonctionnement, de leurs rôles et de leurs interactions est à mener. Les problématiques des rythmes physiologiques relèvent de la dynamique des systèmes évolutifs complexes. Les rythmes se rencontrent à tous les niveaux des organes et des organismes, de périodes variant de la fraction de seconde à plusieurs années et ils résultent de processus de rétroaction au sein des systèmes biologiques. Les

oscillations métaboliques, les sécrétions hormonales, la propagation de certains signaux intercellulaires, les rythmes circadiens, rythmes cardiaques (reposent sur la régulation de canaux ioniques) constituent des prototypes d'activités biologiques périodiques.

La multistabilité constitue une autre propriété remarquable des systèmes interactifs à régulation non linéaire et permet d'interpréter un grand nombre de manifestations normales ou pathologiques (cycle cellulaire, mémoire immunitaire, etc.). On retrouve ces propriétés dynamiques à toutes les échelles du vivant, du moléculaire au supra-cellulaire.

Les processus oscillants, chaotiques et multistables qui gouvernent la dynamique du vivant témoignent de l'existence d'interactions non linéaires. Ainsi la caractérisation, l'étude et la compréhension de la dynamique oscillante, chaotique ou multistable des systèmes biologiques est sous tendue par des mécanismes nécessitant une mise à jour expérimentale, mais surtout une modélisation mathématique. En ce sens, les systèmes dynamiques et la théorie du chaos constituent un rail efficace de cohérence pour l'intelligibilité de ces systèmes biologiques.

0.2 Contrôle du chaos

L'extrême sensibilité de dynamique chaotique aux conditions initiales est à la base de toutes les définitions du chaos, cela signifie que toute perturbation, si petite soit-elle, croît exponentiellement dans le temps, modifiant radicalement le comportement du système. Cette particularité des systèmes chaotiques complique considérablement leur analyse, mais conduit à l'idée que cette caractéristique problématique peut devenir la solution de contrôle.

Cette idée est à la base de la méthode de contrôle Ott-Grebog-Yorke dont le travail de pionnier portait déjà une compréhension profonde de l'objectif prospectif du contrôle du chaos.

“ One may want a system to be used for different purposes or under different conditions at different times. Thus, depending on the use, different requirements

are made of the system. If the system is chaotic, this type of multiple-use situation might be accommodated without alteration of the gross system configuration. In contrast, in the absence of chaos, completely separate systems might be required for each use. Such multipurpose flexibility is essential to higher life forms, and we, therefore, speculate that chaos may be a necessary ingredient in their regulation by the brain.”

Les états de multistabilité ou de chaos désirés ou rejetés ne peuvent que susciter la recherche de mécanismes de contrôle possible de ces dynamiques.

La méthode OGY et ses nombreuses variantes sont utilisés pour le contrôle du chaos à la fois dans des modèles abstraits et dans différents systèmes concrets commençant par le plus simple pendule et se terminant par des systèmes biologiques aussi complexes que le cœur et le cerveau. Dans toute méthode de contrôle du chaos les orbites périodiques instables jouent un rôle primordial dans la stabilisation et l'une des propriétés fondamentales du chaos est la coexistence simultanée de nombreux mouvements différents dans le système. En particulier, le mouvement chaotique sur l'attracteur étrange coexiste avec un nombre infini d'orbites périodiques instables et le mouvement du système le long d'une orbite chaotique peut être compris comme la commutation continue entre les orbites périodiques instables voisines. Les orbites périodiques forment en quelque sorte l'ossature de l'attracteur chaotique, en soutenant la dynamique dans l'espace des phases. Le même rôle fondamental est joué par les orbites périodiques en mécanique quantique.

Il est intéressant de noter que bien que l'existence d'orbites périodiques instables ne se manifeste apparemment pas dans une évolution chaotique libre, ces objets jouent un rôle principal du point de vue du contrôle du chaos. Ainsi la stratégie réalisée dans la méthode de contrôle du chaos OGY consiste à considérer un ensemble d'orbites périodiques instables noyées dans l'attracteur chaotique d'un système dynamique. Pour chacune de ces orbites, préciser si le mouvement sur cette trajectoire optimise certaines caractéristiques du système puis choisir l'une des trajectoires optimales. Ensuite en supposant que le mouvement sur l'at-

tracteur est ergodique, on attend le moment où la trajectoire chaotique au cours de ses marches aléatoires approche l'orbite périodique instable choisie. Quand cela se produit, on applique une petite perturbation programmée pour orienter la trajectoire vers l'orbite cible.

Pour réaliser cette stratégie il est indispensable d'identifier les orbites périodiques instables sur l'attracteur, d'étudier la structure de l'attracteur au voisinage de telles orbites et de choisir les paramètres du système appropriés pour la réalisation du contrôle et étudier la réponse du système sur leur perturbation.

L'étape la plus difficile de cette méthode est peut-être la localisation des orbites périodiques instables. Cependant, la méthode la plus proche de l'idée principale du contrôle du chaos est celle qui repose sur la transformation des objets instables en objets stables. Dans ce cas l'essence de la méthode consiste à utiliser les transformations linéaires, qui permettent la transformation d'orbites périodiques instables en orbites stables, localisées dans les mêmes points de l'espace des phases que les orbites instables requises.

Par suite la sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques, responsable de leur imprédictibilité à long terme, apparaît ainsi comme un avantage exploitable au sens où une très faible influence extérieure peut suffire à modifier qualitativement le comportement, et il semble que le rythme cardiaque illustre cette possibilité de stabiliser un régime chaotique sur une trajectoire approximativement périodique, tout en gardant « en réserve » toute la sensibilité et la richesse de la dynamique chaotique pour mieux réagir aux perturbations et s'adapter plus rapidement aux changements extérieurs.

0.3 Chaos cardiaque et rythmes cardiaques

Il est aujourd'hui admis que la structure du tissu de fibres reliant les valvules mitrale et tricuspide au muscle sous-jacent soit fractale, que le faisceau de His, qui conduit les impulsions électriques des oreillettes aux ventricules, tout comme les vaisseaux sanguins et les capillaires qui irriguent le cœur, possèdent une struc-

ture arborescente d'architecture fractale. Les structures fractales sont par définition irrégulières, aussi sont-elles moins sensibles à certaines lésions. Ainsi, une atteinte importante de la structure du faisceau de His n'entraîne souvent qu'un dysfonctionnement mécanique relativement bénin du cœur. Cependant au-delà de sa structure, le cœur intéresse davantage par ses rythmes. Jusqu'à la fin du XXIème siècle le principe d'homéostasie était parfaitement illustré par les rythmes cardiaques, et une irrégularité des battements cardiaques relevait d'un état pathologique ou d'un vieillissement des tissus, l'organisme devenant incapable de maintenir un rythme constant supposé sain. Ce paradigme se fondait sur la valeur moyenne d'une variable, en l'occurrence le nombre de battements mesurés pendant une minute. Cependant, étant donné que l'activité électrique continue du muscle cardiaque d'un individu sain présente d'importantes fluctuations, suivant que l'on se place à l'échelle de la minute, de l'heure ou de la journée, il était logique de supposer puis d'établir que le mécanisme gouvernant le contrôle du rythme cardiaque est de nature chaotique : la présence du chaos apparaissant être un signe de bonne santé, et la diminution du caractère chaotique du rythme cardiaque indiquant un risque de moindre adaptabilité et de moindre robustesse et de ce fait serait un signe clinique inquiétant.

Or aujourd'hui, sur le plan de la modélisation mathématique, le cœur peut être compris comme un système dynamique multi-échelles complexe impliquant des phénomènes d'interaction aux niveaux moléculaire, cellulaire, tissulaire et organique. D'une part la modélisation de nombreux aspects de la fonction cardiaque, y compris l'interaction du système d'électrophysiologie cardiaque avec le tissu musculaire contractile, des mécanismes d'activation-contraction sous-cellulaires, ainsi que de l'hémodynamique à l'intérieur des cavités cardiaques, et d'autre part l'étude de la stabilité de ces différents systèmes nécessitent une analyse mathématique basée sur la théorie de la dynamique non linéaire et du chaos.

Par exemple un changement d'activité cardiaque d'un rythme normal (généralement sinusal) à un rythme qui ne pompe pas suffisamment de sang vers le

cerveau entraîne la mort subite. Les rythmes les plus courants menant à cette issue fatale sont la tachycardie ventriculaire (VT) ou la fibrillation ventriculaire (FV). Ces arythmies cardiaques sont des exemples de chaos. En particulier, la fibrillation ventriculaire est une forme de chaos spatio-temporel qui découle du rythme normal par le biais d'une voie de quasi-périodicité ou de la route Ruelle-Takens-Newhouse vers le chaos.

Parmi les chercheurs qui se sont attelés à l'étude des rythmes cardiaques par le biais de la théorie du chaos on citera : Léon Glass, le principal théoricien du chaos cardiaque de l'université Mac Gill de Montréal, Arthur Winfree, biologiste théoricien qui commença par étudier les horloges biologiques avant de se tourner vers les rythmes cardiaques, Raymond Ideker, Richard Cohen (ce dernier cardiologue et physicien, montre dans le mécanisme cardiaque un spectre de dédoublement de période (phénomène reproduit plusieurs fois et caractéristique de la route vers le chaos) lors d'expériences sur des chiens).

Les arythmies cardiaques sont des perturbations du cycle électrique cardiaque normal, elles sont généralement de deux types. Il y a des perturbations temporelles, qui se produisent lorsque les cellules agissent hors séquence, en refusant de répondre à un stimulus provenant d'autres cellules, comme dans un bloc nodal AV ou un bloc de branche. D'une manière générale, ces arythmies perturbent peu la capacité du muscle cardiaque à pomper le sang.

La deuxième classe d'arythmies est celle qui est réentrante par nature et qui ne peut se produire que grâce à la distribution spatiale du tissu cardiaque. Si elles se produisent dans les ventricules, les arythmies réentrantes sont très préoccupantes et mettent la vie en danger, car la capacité du cœur à pomper le sang est grandement diminuée.

De fait les arythmies cliniques ayant le plus grand potentiel pour les applications thérapeutiques de la théorie du chaos sont les tachyarythmies apériodiques, y compris la fibrillation auriculaire et ventriculaire. Aussi à la fin des années 90 Garfinkel (1992) a orienté ses travaux sur l'application des techniques de contrôle du chaos afin de contrôler les arythmies du cœur.

Les stratégies de contrôle sont essentielles dans le travail réalisé dans cette thèse, et pour cause, apprendre à connaître et à maîtriser les dynamiques complexes pourrait aider au choix de la stratégie thérapeutique la mieux adaptée pour combattre les pathologies qui se développent au sein des systèmes interactifs que sont, par essence, les systèmes vivants et plus particulièrement le système cardiaque. Par ailleurs les résultats de ces approches peuvent être incorporés dans les stimulateurs cardiaques, en contrôlant la fibrillation ventriculaire, par exemple.

0.4 Contexte et plan de la thèse

Les travaux présentés dans cette thèse résident dans l'application de la théorie de la dynamique non linéaire à l'électrophysiologie cardiaque et plus précisément au contrôle des alternances cardiaques avec un signal de contrôle construit à partir des mesures de la durée du potentiel d'action (i.e. le temps nécessaire pour que la tension transmembranaire tombe en dessous d'une valeur seuil après application d'un stimulus d'activation).

Une cellule cardiaque isolée peut révéler différents types de rythmes dans le cadre d'une stimulation régulière.

Une cellule isolée du muscle ventriculaire du lapin a été stimulée périodiquement et la séquence résultante de durées potentielles d'action (APD) a été mesurée. Il a été constaté que pour une durée de cycle de base suffisamment longue (BCL i.e. Basic Cycle Length), chaque stimulus évoquait le même APD. Ce modèle est appelé rythme 1 : 1 - un stimulus, une réponse. (Yehia, A. R., D. Jeandupeux, F. Alonso and M. R. Guevara (1999) "*Hysteresis and bistability in the direct transition from 1 : 1 to 2 : 1 rhythm in periodically driven single ventricular cells*", *Chaos*. 9 : 916–931.)

Pour un BCL suffisamment petit, l'APD alterne entre celui d'un potentiel d'action complet et celui d'une réponse inférieure au seuil, l'APD étant pratiquement nulle. Ce modèle est appelé rythme 2 : 1, car les deux stimuli évoquent

une réponse de super-seuil.

Ce rythme 2 : 1 est relativement facile à comprendre. Pour les grands BCL, la cellule a suffisamment de temps pour se remettre du potentiel d'action précédent avant le prochain stimulus, mais pour les BCL à court terme, il n'y a pas assez de temps pour se remettre, et le stimulus délivré pendant cette phase non récupérée provoque une réponse de sous-seuil.

Un comportement plus intéressant se produit entre ces deux extrêmes du BCL. Pour les grandes amplitudes de stimulus, lorsque le BCL diminue, le rythme 1 : 1 est remplacé par un rythme dans lequel il y a des réponses de super-seuil avec des APD alternants. Ce rythme 2 : 2 est appelé alternance d'APD. (2 : 2 fait référence au fait qu'il y a 2 réponses super seuil à 2 stimuli, mais les réponses ne sont pas les mêmes).

Les modèles d'alternance APD remontent aux travaux de Nolasco et Dahlen (1968).

L'hypothèse de base est que l'APD est une fonction de la période de récupération précédente ou de l'intervalle diastolique (DI). Suite à l'observation du fait que les alternances se produisent dans les cellules isolées lorsque la pente de la courbe APD dépasse la valeur 1 a conduit à l'hypothèse qu'une courbe de restitution APD abrupte est responsable d'une variété d'arythmies dans les tissus cardiaques, et pas seulement dans les cellules individuelles. Cette hypothèse est maintenant connue sous le nom d'hypothèse de restitution de l'APD, ainsi que la suggestion que l'aplatissement de la courbe de restitution de l'APD (avec des médicaments, par exemple) pourrait prévenir certains types d'arythmies.

La contribution de cette thèse se décompose en trois volets : le premier réside en une nouvelle approche afin de pouvoir stabiliser, contrôler et maîtriser une orbite périodique asymptotiquement stable non souhaitée et la diriger vers un point fixe instable ciblé et cela en s'appuyant sur des méthodes de contrôle du chaos. Les systèmes dynamiques étudiés sont des systèmes à temps discrets (itératifs).

Le deuxième volet porte sur le développement d'un modèle mathématique

itératif simple de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) avec mémoire (de dimension 2), à partir d'un modèle itératif connu de l'APD (Lewis & Guevara, 1990) (de dimension 1).

Le troisième volet a trait au développement de méthodes de contrôle pour parvenir à contrôler non seulement les systèmes chaotiques mais aussi pour obtenir la suppression des dynamiques périodiques stables non désirées, l'objectif étant de contrôler l'alternance cardiaque avec une perspective d'améliorer les dispositifs implantables conçus pour la suppression de l'alternance cardiaque.

Tous ces travaux ont fait l'objet de publications et de conférences internationales citées ci-après et le manuscrit est organisé comme suit :

Les deux premiers chapitres constituent une brève introduction aux concepts de la dynamique non linéaire en vue de leur application à la théorie du contrôle du chaos et pour souligner tout l'intérêt du croisement de ces approches avec la physiologie. Ainsi ces chapitres consistent d'une part en un condensé des définitions préliminaires et des résultats fondamentaux sur les systèmes dynamiques, sur la stabilité de régimes permanents simples (stationnaires ou périodiques), avec la description de plusieurs scénarios de transition vers les comportements temporels complexes qualifiés de chaotiques qui peuvent se développer quand on éloigne le système considéré loin de l'équilibre. D'autre part le contenu de ces chapitres concerne les outils de la mesure et de la quantification du chaos, indispensables à la compréhension des travaux de cette thèse (diagramme de bifurcation, exposants de Lyapunov, entropie de Kolmogorov et les dimensions fractales). L'accent est mis sur les propriétés rendant compte la structure géométrique des attracteurs étranges qui modélisent qualitativement la dynamique chaotique du système dans l'espace des phases.

Le troisième chapitre aborde la modélisation non linéaire de l'électrophysiologie cardiaque et le contrôle des rythmes cardiaques, en l'occurrence un des axes majeurs de la recherche actuelle en cardiologie. Afin de bien saisir l'intérêt de la démarche adoptée un bref exposé est donné sur les fondamentaux de l'électrophysiologie cardiaque.

Au centre de ce chapitre figurent certaines des non linéarités de la dynamique de l'activité électrique du cœur et la discussion de leurs rôles dans la dynamique du rythme normal et pathologique. L'accent est mis sur la restitution du potentiel d'action cardiaque et l'alternance comme conséquence d'une bifurcation de doublement de période qui peut provoquer la mort subite. Le *contrôle de la dynamique irrégulière de la durée du potentiel d'action cardiaque* (APD) est effectué par deux méthodes de contrôle du chaos qui entre dans les stratégies utilisées dans notre travail (méthode OGY et de contrôle prédictif), et les résultats obtenus ont fait l'objet d'articles publiés.

Ainsi les chapitres **3, 4, 5** et **6** constituent le noyau de notre travail, à savoir **l'application de la théorie des systèmes dynamiques au contrôle de la dynamique non linéaire et du chaos à la physiologie cardiaque**. Ces chapitres mettent en exergue une nouvelle approche du **contrôle de l'alternance de la durée du potentiel d'action cardiaque** (APD) et l'étude mathématique d'un **modèle itératif de dimension élevée** de l'APD (ou dit modèle de **l'APD avec mémoire**). De plus les travaux présentés dans ces chapitres innovent dans le développement d'une **nouvelle stratégie de contrôle des dynamiques périodiques afin de supprimer l'alternance cardiaque de l'APD** et dans la présentation d'un **nouveau modèle itératif de l'APD avec mémoire** qui apporte des résultats originaux et prometteurs.

Le Chapitre **4**, constitue notre première contribution au *contrôle de l'alternance cardiaque* par le contrôle prédictif du chaos sur le modèle itératif de l'APD en dimension **1** proposé par Lewis & Guevara. Du fait que pendant l'alternance de l'APD la trajectoire périodique, dans l'espace des phases, évolue loin du voisinage du point fixe instable correspondant au rythme normal sinusal, on oblige la trajectoire à entrer dans le bassin d'attraction du point fixe instable en apportant une petite perturbation pour forcer la convergence vers le point fixe. Par conséquent on supprime l'alternance et le rythme est stabilisé.

Le Chapitre **5** est dédié à la *validation mathématique rigoureuse en dimension quelconque* de notre stratégie de *suppression des orbites périodiques stables* des

systèmes itératifs et en particulier celui de l'APD.

Le sixième chapitre est consacré à la proposition et l'étude d'un *nouveau modèle itératif de l'APD avec mémoire* (de dimension **2**). Ce modèle permet de mettre en évidence l'*existence des nouvelles bistabilités* dans les rythmes cardiaques et des *nouvelles séquences de bifurcations*. L'accent est mis sur un *paramètre de contrôle* introduit dans le modèle (inhérent à des constantes et facteurs physiologiques) et qui permet d'agir sur la dynamique cardiaque sans utiliser les méthodes du contrôle de la dynamique non linéaire. On met également en évidence la structure fractale de l'attracteur étrange de la durée du potentiel d'action cardiaque en dimension **2**. Les dynamiques chaotiques de ce modèle sont mesurées par les exposants de Lyapunov, les dimensions fractales et la K-entropie.

Le dernier chapitre du manuscrit de la thèse présente une liste non exhaustive de résultats actuels, de perspectives et de problèmes ouverts en matière de développement de la dynamique non linéaire, de la théorie du chaos et de la physiologie.

En conclusion il existe en biologie de nombreux phénomènes périodiques d'importance vitale : les rythmes cardiaque, respiratoire, hormonal, circadien entre autres. Il est vraisemblable que la théorie des systèmes dynamiques sera utile pour analyser ces rythmes et obtenir des résultats appréciables. (On peut citer en particulier le travail de Léon Glass à Montréal sur le fonctionnement des cellules cardiaques.)

Aux questions de la Science que sont l'émergence, l'instabilité dans la stabilité, l'interprétation de la multi-stationnarité (plusieurs états stationnaires possibles avec des sauts de l'un à l'autre), la théorie des bifurcations (permettant de visionner un changement qualitatif), l'interprétation de l'imprédictibilité de certaines lois non linéaires, etc. . . la théorie du chaos offre des approches nouvelles. Cela conduit à dire que la théorie des systèmes dynamiques et du chaos déterministe est une révolution conceptuelle de la Science.

Deuxième partie

**SYSTÈMES DYNAMIQUES
NON LINÉAIRES ET
THÉORIE DU CHAOS**

Chapitre 1

Éléments fondamentaux de la dynamique non linéaire et du chaos

Les systèmes dynamiques, le chaos et la physiologie cardiaque sont des champs différents mais qui ne sont pas sans interactions [1].

La notion de déterminisme telle qu'introduite par Laplace dit tout simplement que l'univers est un système dynamique, au sens où le futur est exactement prédit par une loi et un ensemble d'états bien définis. Même si ce déterminisme a des limites, comme l'a montré la mécanique quantique (qui dit que l'état d'une particule ne peut pas être déterminée de manière certaine [2]) ou les travaux de Prigogine en thermodynamique (qui portent sur les structures dissipatives et l'irréversibilité des phénomènes temporels), l'hypothèse déterministe reste valable dans de nombreux domaines (et en premier lieu en mécanique céleste), et les mathématiques ont permis d'avoir une classification des systèmes en fonction de leurs comportements et leur avenir à long terme.

Or depuis Poincaré, comme cela a été précisé dans l'introduction, il s'est révélé que la multiplicité des trajectoires possibles faisait qu'une telle classification était irréalisable. Cela a été à l'origine de recherches pour trouver des concepts

permettant de comprendre le comportement de ces systèmes, à la fois d'un point de vue théorique (caractérisation de différents types d'ordre et de chaos) et d'un point de vue pratique en définissant des quantités qui décrivent partiellement un système dynamique.

1.1 Systèmes dynamiques et physiologie

1.2 Généralités

L'étude des systèmes dynamiques a pour objet de décrire les changements dans le temps et l'espace (transformations) de l'état des systèmes en fonction des causes de ces changements dans la mesure où ces causes sont justement les interactions entre les objets du système (causes internes) (Robinson 1977) [3].

L'évolution de systèmes dynamiques en fonction du temps peut être modélisée par des systèmes d'équations différentielles ordinaires, ou des équations aux dérivées partielles, ou encore des équations itératives...

Le comportement de chaque variable du système est défini par sa tendance à tout moment (augmenter, diminuer, rester stable), en fonction de l'influence des autres variables du système. La résolution mathématique d'un système dynamique est réalisée si on peut retracer l'évolution de chaque variable en fonction du temps. Très souvent, le système évolue au cours du temps vers sa solution, où les valeurs des variables ne changent plus. Cela peut signifier que le système a atteint un équilibre et ne bouge plus, mais cela signifie le plus souvent que toutes les transformations se compensent. On parle alors d'état stationnaire. Celui-ci peut être stable ou instable.

L'analyse de toutes les évolutions possibles des systèmes dynamiques permet l'étude du chaos. L'état d'un système dynamique est décrit par un certain nombre de quantités indépendantes du temps que l'on ne peut étudier séparément. Aussi pour simplifier l'étude des comportements d'un système on représente le système par un point unique dans un espace dit « espace des phases ».

Si le comportement du système est périodique les points vont se former une courbe fermée, on parle de cycle ou d'orbite périodique. Un mouvement régulier correspond à un diagramme, un attracteur.

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard et aucune structure n'apparaît.

Quand le mouvement est chaotique, les points semblent à première vue, aléatoires. Cependant une observation suffisamment longue du système permet de voir apparaître dans l'espace des phases une forme particulière, de structure fractale : un attracteur étrange. Ces attracteurs sont la signature du chaos.

L'application des systèmes dynamiques aux phénomènes biologiques en général et physiologiques en particulier est intéressante à plus d'un titre :

1. **La Modélisation.** La modélisation est la transcription abstraite d'une réalité. Ce processus d'abstraction permet d'approcher la compréhension d'un phénomène complexe en ignorant les détails non essentiels. Le choix de ces détails et le cadre de validité du modèle dépendent toujours de l'application finale du modèle [1, 4].
2. **La Prédiction.** Le déterminisme suppose en effet l'obéissance à des lois mais pas nécessairement la capacité de prédire. Et inversement, on peut parfaitement prédire ce que l'on ne comprend pas. Ainsi pour faire une prédiction dynamique, il faut connaître avec précision l'état présent du système et sa loi du mouvement. Il suffit alors d'itérer les équations du mouvement, lorsque le temps est discret, ou de les intégrer, lorsque le temps est continu, pour prédire les états ultérieurs du système. Mais souvent la complexité – intrinsèque ou non - des systèmes considérés est un obstacle à la connaissance avec précision, tant de leurs états présents que de leur loi d'évolution.

Pour faire une prédiction causale, il suffit de connaître des causes présentes et des lois de causalité qui permettent d'enchaîner des effets à ces causes. Il n'est pas nécessaire de calculer avec précision tous les états de système, il suffit de raisonner logiquement sur les causes et les effets qui

nous intéressent. C'est pourquoi la prédiction causale (justifiant la prédiction dynamique) est beaucoup mieux adaptée à nos approches des réalités complexes [5,6,7].

3. **Le Contrôle et l'Optimisation du Contrôle.** De la capacité à prévoir l'évolution du comportement d'un système, l'objectif lié de contrôle suit naturellement. Contrôler un système dynamique c'est essayer de l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère ; on parle alors d'un problème de contrôle optimal.

Contrôler ces phénomènes en changeant éventuellement le cours de leur évolution c'est naturellement le principal objet de la médecine, qui traite des pathologies, en intervenant au niveau des gènes (génomique), des molécules (pharmacologie), des populations de cellules ou des organes (physiologie intégrative), ou des populations d'individus (épidémiologie).

4. **Le Développement des théories mathématiques de la Dynamique Non Linéaire.** Outre l'intérêt purement appliqué, l'étude, l'analyse et la compréhension de certains phénomènes et modèles discipline apporte des questions mathématiques profondes permet de développer et d'affiner les outils mathématiques.

La modélisation, la compréhension, la prévision et le contrôle, sont étroitement liés aux objectifs cliniques pratiques de diagnostic et de traitement, qui sous-tendent en grande partie la justification de la recherche sur les systèmes physiologiques [1]. Comprendre le comportement d'un système et comment il est modifié dans des conditions pathologiques est bien sûr une forme de diagnostic, et le mot «contrôle» correspond objectivement au «traitement» [1].

Le contrôle est réalisé avec succès dans une variété de systèmes physiques. Dans notre thèse nous mettrons l'accent sur le contrôle du système cardiaque.

1.3 Définitions et propriétés des systèmes dynamiques

Dans la description et l'analyse des systèmes, il est important de faire la distinction entre les *variables* et les *paramètres*. Un *paramètre* est une constante, un terme dans les équations qui est fixé, par opposition aux *variables* qui changent en fonction du temps pour refléter la dynamique du système.

Définition 1 *Système Dynamique.* *Un système dynamique est la donnée d'un triplet $\{I, M, \Phi_t\}$ où I est un ensemble de temps ($I \subseteq \mathbb{R}$), M est un espace d'état, et $\Phi_t : M \rightarrow M$ est le "flot" paramétré par $t \in I$.*

Définition 2 *Espace d'état, Degré de liberté.* *L'espace d'état (ou des phases) est l'ensemble des états possibles d'un système dynamique. On peut également le définir comme un espace abstrait dont chaque variable représente une dimension nécessaire à la description du système à un moment donné. Le degré de liberté caractérise l'espace d'état. Il représente l'ordre qui est égal à la dimension de l'espace d'état, c'est à dire le nombre de variables qui le caractérisent.*

Définition 3 *Flot.* *On appelle "flot" l'action du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur l'espace des phases noté M . Le flot est la donnée d'une application Φ définie par :*

$$\begin{aligned} \Phi & : \mathbb{R} \times M \rightarrow M \\ (t, x) & \longmapsto \Phi(t, x) = \Phi_t(x) = x(t) \end{aligned}$$

et qui vérifie deux axiomes :

1. *Axiome de neutralité*

$$\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in M$$

2. *Axiome d'associativité*

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(s, \Phi_t(x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M$$

Puisque le groupe additif \mathbb{R} agit sur l'espace des phases M , par le flot Φ on peut définir deux concepts :

a) L'*orbite* d'un point x de M , noté $\gamma(x)$, défini par :

$$\gamma(x) = \{\Phi_t(x), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

$\gamma(x)$ est un sous ensemble de l'espace des phases M .

b) Le *stabilisateur* d'un point x de M , noté $St(x)$, défini par :

$$St(x) = \{t \in \mathbb{R}, \Phi_t(x) = x\}$$

L'action du groupe \mathbb{R} sur M par le flot Φ nous permet de faire une partition de l'espace des phases M en des orbites vérifiant :

1. $\gamma(x) \neq \emptyset, \forall x \in M$, signifie l'existence d'une orbite dans M pour une condition initiale.
2. $\gamma(x) \cap \gamma(y) = \emptyset : x \neq y, \forall x, y \in M$, c'est la non intersection des orbites dans l'espace des phases.
3. $\cup_{x \in M} \gamma(x) = M$.

À partir de ces trois propriétés l'ensemble $\sum = \{\gamma(x)\}_{x \in M}$, forme une partition de M . Il existe une relation d'équivalence \mathfrak{R} associée à \sum

$$\begin{aligned} (x \mathfrak{R} x') &\iff \exists t \in \mathbb{R} / x' = \Phi_t(x) \\ &\iff \text{sont sur la même orbite} \end{aligned}$$

L'ensemble \mathbb{R} admet une représentation dans M , il existe un homomorphisme Ψ tel que :

$$\begin{aligned} \Psi &: \mathbb{R} \rightarrow (B(M, M), \circ) \\ t &\longmapsto \Psi(t) = \Phi_t \end{aligned}$$

où : $B(M, M)$ est l'ensemble des bijections de M .

Si le système est réversible l'application bijective $\Phi_t : M \rightarrow M$ admet une inverse $(\Phi_t)^{-1}$ telle que :

$$(\Phi_t)^{-1} = \Phi_{-t}$$

- L'application bijective Φ_t est de classe $C^1, \forall t \in \mathbb{R}$.
- Si le système est irréversible, l'ensemble $\{\Phi_t, t \in \mathbb{R}^*\}$ est appelé semi-groupe.
- L'action du flot Φ sur M est dite *libre* si :

$$St(x) = \{0_{\mathbb{R}}\}, \forall x \in M.$$

- L'action du flot Φ sur M est dite *transitive*, s'il existe une seule orbite; autrement dit : $\Sigma = \{M\}$.

$$\Sigma = \{M\} \iff \forall x, x' \in M, \exists t \in \mathbb{R} : x' = \Phi_t(x).$$

Champ de vecteurs

Le champ de vecteurs f sur M associe à chaque point $x \in M$ un vecteur $f(x)$ admettant ce point pour origine tel que :

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x)|_{t=0} = f(x)$$

Système dynamique continu. Système dynamique discret

Les interactions entre les variables d'état sont l'essence même du modèle. Souvent, ces interactions sont décrites en termes d'équations différentielles, dans ce cas ; le système est appelé *système continu* (ou par des équations de différence si le temps est en unités discrètes plutôt que continues, on l'appelle *système discret* ou *itératif*).

La plupart des systèmes non linéaires dynamiques en temps continu sont décrits par des équations différentielles de la forme

$$\dot{x} = f(x, t, \mu), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in V \subset \mathbb{R}^p \quad (1.1)$$

et par ailleurs la plupart des systèmes dynamiques non linéaires à temps discret sont décrits par des équations de la forme

$$x(i+1) = f(x(i), \mu), \quad x(i) \in U \subset \mathbb{R}^n, \quad \mu \in V \subset \mathbb{R}^p, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

On définit le flot du système à temps discret par :

$$f(x(i)) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{i \text{ fois}}(x) = f^i(x)$$

On se réfère à (1.1) comme un *champ de vecteurs* ou équation différentielle ordinaire et à (1.2) comme une équation itérative ou une équation de différence.

Par une solution de (1.1) on signifie une application, $\Phi_t(t \in I \subset \mathbb{R})$, à partir d'un intervalle $U \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n , définie par

$$\begin{aligned}\Phi_t : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow \Phi_t(x)\end{aligned}$$

tel que $\Phi_t(x)$ vérifie (1.1), c'est-à-dire

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \mu)$$

L'un des objectifs de l'étude des systèmes dynamiques est de comprendre la géométrie des courbes de solutions dans l'espace des phases. Il est utile de distinguer une courbe de solution qui passe par un point particulier de l'espace de phase à un instant spécifique, c'est-à-dire pour une solution $x(t, x_0) = \Phi_t(x_0)$ avec $x(0) = x_0$. On se réfère à cela en spécifiant *une condition initiale* ou *une valeur initiale*. Ceci est souvent inclus dans l'expression pour une solution par

$$x(t, x_0) = \Phi_t(x_0)$$

De manière générale, les notions développées pour les systèmes continus ont des analogues pour les systèmes discrets. Il y a d'ailleurs une façon évidente de déduire d'un flot continu $t \mapsto \Phi_t$ un flot discret $i \mapsto \Phi_{i\tau}$, il suffit pour cela de discrétiser l'intégrale du champ de vecteurs f de (1.1) par un pas de temps τ choisi convenablement

$$x_{i+1} = x_i + \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} f(x, t) dt$$

Plusieurs raisons justifient l'étude des modèles à temps discret :

- Les modèles discrets sont un outil pour résoudre les équations différentielles.
- L'utilité de ce genre de système discret apparaît dans la section de Poincaré (voir ci-dessous), qui permet d'étudier les systèmes dynamiques continus manifestant un *comportement chaotique* (voir ci-après) de dimension supérieure ou égale à 3.

- Les systèmes discrets peuvent avoir le *comportement chaotique* pour n'importe quelle dimension $n \geq 1$
- Ils peuvent être des modèles plus adaptés dans certains domaines : électrophysiologie cardiaque, électronique digitale, économie, finance, étude des populations.
- Ils peuvent être utilisés pour générer des dynamiques chaotiques puisque il est plus facile de générer des dynamiques complexes dans le cas temps discret que dans le cas continu.
- Ils sont plus faciles à simuler par ordinateur : aucun algorithme d'intégration numérique n'est requis.

Systèmes autonomes. Systèmes non autonomes

Soit le système d'équations différentielles $\dot{x} = f(x, t, \mu)$, x étant un vecteur de \mathbb{R}^n (espace de phases), f est le champ de vecteurs (fonction de l'état x , du temps t , et du paramètre μ), quand f ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de x :

$$f = f(x(t))$$

le système est dit "*autonome*". Dans le cas contraire, lorsque f dépend explicitement du temps, on a affaire à un système "*non autonome*" dont on peut faire le passage d'un système non autonome à un système autonome.

Problème de Cauchy

Étant donnée $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, trouver $J \subset I$ intervalle contenant t_0 et une application $x : J \rightarrow U$ dérivable sur J , satisfaisant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x(t)), \quad t \in J \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Forme intégrale du problème de Cauchy : $x(t)$ est une solution du Problème de Cauchy si, et seulement si, l'équation intégrale suivante est vérifiée :

$$\forall t \in J, \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds$$

Le problème principal dans les équations différentielles est de trouver la solution pour tout *problème avec conditions initiales* ; c'est-à-dire, déterminer la solution du système qui satisfait la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

On présente quelques propositions et théorèmes pour assurer l'existence et l'unicité locale et globale du problème de Cauchy sans connaître explicitement les solutions.

Proposition 4 (*Régularité de la solution*) : une solution x est dite régulière si $x \in C^1(J)$ et $x \in C^{k+1}(J)$ si f est de classe C^k .

Définition 5 (*Solution locale, maximale et globale*)

Solution locale : x solution locale si x solution et J voisinage de t_0 dans I ;

Prolongement de solution locale : si x et \tilde{x} sont des solutions locales sur J et \tilde{J} (respectivement), on dit que \tilde{x} prolonge x si $J \subset \tilde{J}$ et x coïncide avec \tilde{x} sur J ; dans ce cas on dit aussi que x est restriction de \tilde{x} ;

Solution maximale : une solution locale x est dite maximale si elle n'a pas d'autre prolongement qu'elle-même ;

Solution globale : une solution locale x est dite globale si elle est définie partout, i.e. si $I = J$.

Remarque 6 Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fautive. Toute solution locale peut être prolongée en une solution maximale. Il n'y a pas unicité des solutions maximales

Remarque 7 La condition que f soit continue ne suffit pas pour garantir l'unicité. On verra dans le théorème de Cauchy-Lipschitz que si f soit "localement (globalement) lipschitzienne" alors l'unicité de solution est assurée.

Définition 8 (*Application lipschitzienne*) L'application f est dite "**(globalement) lipschitzienne**" sur U ($U \subset \mathbb{R}^n$) si il existe une constante $K \geq 0$ tel que : $\forall x_1, x_2 \in U$,

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$$

L'application f est dite "**localement lipschitzienne**" sur U si tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage V de x_0 sur lequel f est lipschitzienne ;

Théorème 9 (Cauchy-Lipschitz. Existence et unicité (cas global)) [19]

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de l'espace euclidien réel, soit $x_0 \in U$, et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et globalement lipschitzienne. Le Problème de Cauchy admet alors une unique solution globale.

Proposition 10 On suppose que $U = \mathbb{R}^n$ et que f est continue et globalement lipschitzienne. Soient $x(t)$ et $\tilde{x}(t)$ deux solutions globales au Problème de Cauchy de condition initiale x_0 et $\tilde{x}_0 \in U$ respectivement. L'écart entre les solutions au temps t est estimé de la manière suivante :

$$\forall t \in I, \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq e^{K|t-t_0|} \|x_0 - \tilde{x}_0\|$$

où K est une constante de Lipschitz de f .

C'est une conséquence du lemme de Gronwall

Lemme 11 de Grönwall Soit I intervalle ouvert de \mathbb{R} , $t_0 \in \mathbb{R}$, $x, f, g \in C(I; \mathbb{R})$ des fonctions positives telles que

$$\forall t \in I, x(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^t g(s)x(s)ds \right|$$

La fonction x vérifie alors l'inégalité suivante :

$$\forall t \in I, t \geq t_0, x(t) \leq f(t) + \left| \int_{t_0}^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(\tau)d\tau} ds \right|$$

Le lemme de Grönwall constitue la justification et l'outil d'obtention de nombreuses approximations des solutions d'équations différentielles ordinaires. En particulier, il est utilisé pour démontrer l'unicité d'une solution au problème de Cauchy, au travers du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Proposition 12 (*Existence d'une solution locale*) On suppose que f est continue et localement lipschitzienne sur U . Il existe alors une solution locale du Problème de Cauchy.

Théorème 13 (*Unicité des solutions locales (cas local)*) [19] On suppose que f est continue et localement lipschitzienne sur U . Soient $x(t)(t \in I)$ et $\tilde{x}(t)(t \in \tilde{I})$ deux solutions locales du Problème de Cauchy de même condition initiale x_0 . Les solutions x et \tilde{x} coïncident sur $I \cap \tilde{I}$.

Théorème 14 (*Cauchy-Lipschitz. Existence et unicité (cas local)*) [19] Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert de l'espace euclidien réel, soit $x_0 \in U$, et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne. Alors, il existe un intervalle ouvert J voisinage de t_0 dans I et une solution unique maximale $x(t) \in C^1(U)$ satisfaisant l'équation différentielle décrite par (1.3) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour tout $t \in J$.

Types de systèmes dynamiques

On peut maintenant commencer à aller au fond du sujet, en décrivant et classifiant les systèmes dynamiques. Une très large catégorisation, qui est pourtant très utile pour nos buts, on estime *l'aléatoire* et *le déterminisme*.

Systèmes Déterministes. Systèmes Aléatoires Un *système déterministe* est le contraire d'un *système aléatoire*. Avec un système déterministe, compte tenu de la connaissance parfaite des conditions initiales et de la loi d'évolution du système, le comportement futur de tous les temps peut être déterminé. Le mathématicien français Laplace a formulé le concept du déterminisme qui a été à la base de la mécanique newtonienne. La plupart des systèmes étudiés en ingénierie sont considérés comme déterministes, avec le bruit considéré comme un processus aléatoire ajoutant au système déterministe.

La valeur d'un système déterministe est d'apporter des connaissances suffisantes sur la dynamique et les valeurs de variables d'état à un moment donné,

l'évolution future du système peut être prédite avec une certaine précision. Un *système aléatoire*, d'autre part, est dirigé dans une certaine mesure par hasard. Étant donné des informations complètes sur la dynamique et l'état initial, il est impossible de prédire avec précision l'évolution future du système (bien qu'il puisse être possible de déterminer les statistiques de l'évolution future - qui est, la probabilité que le système soit dans des états particuliers à certains moments). L'intérêt pour l'analyse des systèmes non linéaires est la reconnaissance que le comportement très compliqué, ce qui est apparemment aléatoire, peut découler d'un système déterministe relativement simple. Ceci est une autre caractéristique du "*chaos*", décrit ci-dessous.

Systèmes Linéaires. Systèmes Non Linéaires Les systèmes les mieux connus jusqu'au siècle dernier étaient les systèmes isolés de leur milieu et évoluant selon des lois simples (i.e. des systèmes linéaires). De tels systèmes idéaux sont évidemment des cas exceptionnels dans la nature puisque les systèmes vivants sont des systèmes ouverts à leur environnement et que leur évolution est non-linéaire. La relation du système avec son milieu exerce des contraintes qui le maintiennent loin de l'équilibre. Ces systèmes peuvent avoir des évolutions qui changent du simple au complexe selon les conditions dans lesquelles ils sont placés. Il existe ainsi des formes authentiques de complexité, enracinées dans les lois qui régissent les systèmes physiques. Cette complexité, qui avait longtemps été considérée comme spécifique des systèmes biologiques et humains, peut ainsi trouver un nouveau cadre théorique d'emblée pluridisciplinaire.

Un système linéaire est défini par les propriétés suivantes :

1) **la proportionnalité** : les effets sont proportionnels aux causes qui les ont engendrés. La proportionnalité signifie que, si une condition initiale donnée $x(0)$ produit un état $x(t)$, puis le doublement de la valeur de l'état $x(0)$ est le double de la valeur de l'état $x(t)$, et ainsi de suite pour toute la proportionnalité arbitraire de l'état $x(t)$:

$$x(0) \rightarrow x(t) \Rightarrow ax(0) \rightarrow ax(t)$$

La proportionnalité implique qu'un système répondra en proportion de la taille de l'état initiale, mais cela peut clairement ne pas le cas arbitrairement pour de grandes conditions initiales. Éventuellement, une condition initiale peut être appliquée qui est si grande que le système ne peut pas répondre de façon linéaire, le système peut saturer ou même échouer, et en général produira un état final déformé

2) la superposition

La superposition signifie que, si une condition donnée initiale $x(0)$ produit un état $x(t)$, et une autre condition initiale donnée $y(0)$ produit un autre état $y(t)$, en fournissant la somme de ces deux conditions initiales de système va produire la somme des deux états :

$$[x(0) + y(0)] \rightarrow [x(t) + y(t)]$$

3) **système soluble** : le système linéaire admet toujours des solutions.

4) **système décomposable ou composable** : on peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il ne perde ses propriétés.

Contrairement aux *systèmes linéaires*, le système *non-linéaire* est :

1) **non proportionnel** : un changement dans l'état initial n'implique pas nécessairement un changement proportionnel à l'état suivant, et les effets obtenus sont sans commune mesure avec leur causes.

2) **irrésoluble** : il n'admet pas en générale des solutions analytique.

3) **indécomposable** : plus on tente de le décomposer plus la complexité interne se révèle.

4) **multi dynamique** : la non linéarité peut produire toute une variété de comportements tels que le chaos, les cycles et les points fixes, en fonction des paramètres du système et des conditions initiales.

Dans tous les cas, que ce soit une évaluation de l'aléatoire par rapport au déterminisme ou de la linéarité par rapport à la non-linéarité, on peut voir que

toute catégorisation doit prendre en compte le domaine sur lequel l'analyse doit avoir lieu. Il ne faut jamais perdre de vue ce fait, que ce soit lors de la modélisation elle-même ou dans son interprétation ultérieure.

Systèmes Conservatifs et Systèmes Dissipatifs En mécanique, on distingue deux classes de systèmes : *les systèmes dissipatifs* et *les systèmes conservatifs*. Dans les systèmes qualifiés de dissipatifs, «le frottement» entraîne une diminution continue de l'énergie. La présence d'une «friction interne» dans les systèmes dissipatifs a pour corollaire l'existence d'un «attracteur» c'est-à-dire d'une limite asymptotique (pour $t \rightarrow +\infty$) des solutions. Les systèmes sans frottements, dits conservatifs ou *Hamiltoniens* ont leur intérêt et leur utilité propres. Il relève de leur étude l'absence d'attracteur, les trajectoires évoluent sur des surfaces d'énergie constante tores de KAM [20].

Théorème 15 (de la Divergence ou de Liouville) [20] : Soit Φ_t le flot de $f(x) = \frac{dx}{dt}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^n(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$; soit V_0 un volume initial de l'espace des phases au temps $t = 0$, soit $V(t) = \Phi_t(V_0)$: l'image de V par Φ_t , on a :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{V_0} \operatorname{div} f \, dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad \text{et} \quad \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

L'évolution d'un volume initial V_0 de l'espace de phases par le flot continu est donnée par la loi exponentielle :

$$V(t) = e^{(\operatorname{div} f) \cdot t} \cdot V_0$$

et pour un flot discret par :

$$V_n = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|^n \cdot V_0$$

(où : $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ est le déterminant de Jacobien)

* Si : $\operatorname{div} f = 0$; le système continu est conservatif (resp. $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = 1$, pour le cas discret)

* Si : $\operatorname{div} f < 0$; le système continu est dissipatif (resp. $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| < 1$, pour le cas discret)

Types de comportements dynamiques

- **Etat stationnaire** Le point fixe (état d'équilibre ou stationnaire) est le plus simple comportement déterministe. Ce comportement est fixe dans le temps. Autrement dit, le système stationnaire présente des propriétés constantes. Un point fixe est parfois un état dégénéré du peu d'intérêt, par exemple : un pendule avec une portée de friction, il devra osciller jusqu'à ce que le pendule s'immobilise au point d'accrocher vers le bas (position zéro, de vitesse zéro) fixe. Par contre, le point fixe peut être un comportement très désiré, par exemple : *le rythme normal sinusal du cœur est un rythme régulier* (voir chapitre 3).

Définition 16 (*Point d'équilibre des systèmes autonomes*) Un point d'équilibre (ou point fixe) du système continu $\dot{x} = f(x)$ est un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{x}) = 0$. Pour un système discret $x(i+1) = f(x(i))$, un point d'équilibre est un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

- **Comportement périodique** Un comportement périodique (ou oscillation) est un comportement qui se répète après un temps T , puis se répète encore et encore. L'exemple classique de comportement périodique est un mouvement harmonique simple, il est souvent représenté par un pendule non amorti, qui va osciller indéfiniment en l'absence de perturbations. Un autre exemple de la dynamique périodique dans l'électrophysiologie cardiaque est *l'alternance de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD), qui est un état pathologique du cœur*.

Les systèmes non linéaires peuvent présenter dans l'espace des phases une forme de mouvement périodique appelé *un cycle limite*, qui est une trajectoire de l'état périodique *isolée* (Strogatz 1994) [10]. Il peut être stable, auquel cas les états voisins sont attirés par elle, ou instable, de sorte que les états voisins sont repoussés. Divers oscillateurs non linéaires ont des cycles limites comme *attracteurs* (Andronov et al. 1987) [11]. Un mouvement harmonique simple à partir d'un système linéaire, par exemple à partir d'un ressort-masse ou le pendule, ne produit pas un cycle limite, puisque les points à proximité, dans l'espace des

états, appartiennent à des oscillations d'amplitudes différentes et ne sont ni attirés ni repoussés par le *cycle limite* : l'orbite périodique dans ce cas n'est pas isolée.

Définition 17 (*Orbite Périodique et Cycle Limite*) Une solution $x(t)$ du système $\dot{x} = f(x)$ est dite périodique avec une période $T > 0$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t + T) = x(t)$$

L'ensemble $L = \{x(t) : t \in [0, T]\}$ est une courbe fermée dans l'espace des états et est appelée une orbite périodique ou un cycle limite.

Pour un système discret $x(i + 1) = f(x(i))$ une orbite périodique d'ordre m (ou m -cycle) est définie comme l'ensemble des points $L = \{x_1, \dots, x_m\}$ avec $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$) tel que $x_1 = f(x_2)$, $x_2 = f(x_3)$, ..., $x_m = f(x_{m-1})$, $x_1 = f(x_m)$. Il est à noter que chaque point du m -cycle est un point périodique d'ordre m ,

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad x_i = f^m(x_i) \quad \text{et} \quad f^j(x_i) \neq x_i \quad \text{pour} \quad 1 < j < m.$$

Un cycle limite peut être structurellement stable dans le sens où, s'il existe pour un système continu, il persistera sous une légère perturbation du système dans l'espace des paramètres. Au contraire, les systèmes linéaires d'équations différentielles en \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) peuvent avoir des solutions périodiques, caractérisés par une paire de valeurs propres purement imaginaires (le cas d'un centre, qui sera présenté plus loin). Mais, ces solutions périodiques peuvent être détruites par de petites perturbations arbitraires. En d'autres termes, ces solutions périodiques ne sont pas structurellement stables [17 – 20].

- **Comportement quasi-périodique**

Une modification du comportement périodique est une *quasi-périodicité*, qui est une combinaison de comportements périodiques qui ont des périodes incalculables, c.à.d. leurs périodes ne peuvent pas être exprimées en termes de rapport de nombres entiers. Ce comportement est identifié avec un tore dans l'espace des

phases. Un exemple est dans le système solaire (soleil –terre– lune– Jupiter) avec plusieurs périodes différentes. La lune tourne autour de la terre dans un mois (30 jours), la terre tourne autour du soleil un an (365 jours), et Jupiter tourne autour du soleil à peu près de 12 ans (4380 jours) [17].

Définition 5 (*Tore T^N*)

Une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est appelée *quasi-périodique* si elle est écrite sous la forme $h(t) = H(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_N t)$, où H est une application périodique de période 2π dans chacun de ses arguments, et deux ou plusieurs N (positives) fréquences sont indépendante (le rapport ω_i/ω_j ($i \neq j$) est irrationnelle). Dans ce cas on dit que les trajectoires évoluent sur un tore T^N .

● **Comportement aléatoire**

Définir l'*aléatoire* est très difficile puisque par définition il est *imprévisible*.

La description qualitative des phénomènes naturels s'exprime par la théorie des systèmes dynamiques et l'évolution de ces phénomènes est modélisée par une transformation de l'espace des états possibles du système. Cette théorie est dite déterministe au sens où lorsque la loi d'évolution est connue, le futur du système est parfaitement déterminé dès lors que l'on connaît son état initial. Certains phénomènes présentent cependant un comportement erratique et imprévisible dû à une très forte sensibilité aux conditions initiales, ce comportement est qualifié de chaotique et deux états initialement très proches auront dans ce cas des comportements exponentiellement divergents dans le temps. La théorie des systèmes dynamiques trouvent alors ses limites dans l'impossibilité de connaître parfaitement l'état d'un système physique à un moment donné (mesures de précisions finies) et dans la simplification qu'impose la modélisation mathématique des lois de la nature.

Ainsi l'inéluctable incertitude sur l'état précis d'un système s'amplifie inévitablement en présence de chaos jusqu'à rendre toute prédiction rapidement impossible; le chaos introduit le hasard dans les descriptions des systèmes naturels. Ce point avait été soulevé par Poincaré dans son ouvrage "*Science et*

Méthode ".

Cette extrême sensibilité aux infimes variations rend ainsi inutile une étude au cas par cas de l'évolution de chaque état initial dans un but de prédiction. Ce problème trouve une réponse dans la *théorie ergodique* en étudiant statistiquement les comportements. La question d'une prévision à court terme d'un état précis est remplacée par celle d'une description globale à long terme.

A cette incompatibilité entre la théorie et la réalité s'ajoutent les inévitables erreurs d'approximation survenant dans toute simulation numérique et, de fait la nécessité d'inclure une part de vrai hasard dans la théorie déterministe. Ainsi la théorie des probabilités et celle des systèmes dynamiques fusionnent dans une notion de systèmes dynamiques aléatoires dont le comportement est, comme l'indique le nom, aléatoire.

- **Comportement chaotique**

Le *chaos* est un comportement irrégulier dans le temps, ce n'est pas ni un point fixe, ni un cycle. Cependant, tout comportement irrégulier dans le temps n'est pas chaotique.

Soit Φ le flot d'un système dynamique continu ou discret : $M \rightarrow M$ ($M \subseteq \mathbb{R}^n$). Il est dit chaotique si :

- (i) il possède la propriété de Sensibilité Aux Conditions Initiales (SCI).
- (ii) Φ possède une orbite dense dans M
- (iii) l'ensemble des points périodiques de Φ est dense dans M .

La première propriété exprime l'**imprévisibilité** du système. La deuxième propriété exprime le caractère **indécomposable** du système : le système ne peut pas être décomposé en deux ouverts disjoints (non vides) invariants sous Φ (en effet, deux tels ouverts intersectent nécessairement chacun l'orbite dense de Φ). Finalement, la troisième propriété exprime le fait que, au milieu de ce comportement en apparence aléatoire, il y a néanmoins un élément de régularité, **un ensemble dense de points périodiques**.

Les systèmes non linéaires peuvent présenter des solutions bornées dont le

comportement asymptotique est complètement indépendant des conditions initiales. Mais ils peuvent aussi présenter des solutions bornées dont le comportement, bien qu'il s'agisse de systèmes déterministes chaotiques, est complètement imprévisible au-delà d'un horizon temporel très court à cause d'une dépendance très sensible aux conditions initiales.

1.4 Section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques [18 – 20] et notamment la stabilité des orbites périodiques.

Considérons comme au paragraphe précédent que $\Phi(t, x_0)$ est une trajectoire représentant la solution du système $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (1.3) muni de la condition initiale $x(0) = x_0$. Au lieu de s'intéresser directement à $\Phi(t, x_0)$, on va considérer l'ensemble des points P_0, P_1, P_2, \dots correspondant aux intersections successives de la trajectoire $\Phi(t, x_0)$ avec une hypersurface Σ_P de dimension $n - 1$ appelée section de Poincaré. Ce plan de coupe Σ_P peut, en principe¹, être quelconque mais un choix approprié permet d'obtenir des sections aisément exploitables (Fig.1.1 (a)).

Définition 18 (*Section de Poincaré*) Soit un système dynamique continu autonome $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. La section de Poincaré est une hypersurface Σ_P de dimension $n - 1$ localement transverse au champ de vecteurs f au point \bar{p} .

Définition 19 (*Application de premier retour*) L'application de premier retour noté Π , définie par :

$$\begin{aligned} \Pi & : U \rightarrow \Sigma_P \\ U & : \text{voisinage de } \bar{p} \ (U \subseteq \Sigma_P \subset \mathbb{R}^{n-1}) \\ P_i & \mapsto P_{i+1} = \Pi(P_i) \end{aligned}$$

¹Il est cependant imposé que la trajectoire $\Phi(t, x_0)$ doit toujours couper la section Σ_P dans le même sens.

Pour une solution périodique quelconque du système continu (1.3), l'application Π est équivalente à l'identité puisque la trajectoire se referme sur elle-même. Le point \bar{p} est alors un point fixe de l'application Π , soit :

$$\bar{p} = \Pi(\bar{p}) = \Pi(\Pi(\bar{p})) = \dots$$

Choisissons l'hypersurface Σ_P contenant le point P_0 . On peut étudier l'écart, au bout d'un itéré de l'application Π , des images du point périodique \bar{p} dont on aurait très légèrement modifié la position initiale sur la section de Poincaré et du point P_0 (Fig.1.1 (b)) :

$$\delta p(\Pi) = \Pi(\bar{p} + \delta P_0) - \Pi(\bar{p})$$

Puisque

$$\Pi(\bar{p} + \delta P_0) = \Pi(\bar{p}) + D\Pi(\bar{p})\delta P_0 + R(\delta P_0^2)$$

il vient immédiatement :

$$\delta p(\Pi) = D\Pi(\bar{p})\delta P_0 + R(\delta P_0^2)$$

où la matrice

$$\mathcal{F} = D\Pi(\bar{p})$$

est appelée *matrice de Floquet*.

La solution périodique est stable si et seulement si $\|\delta p(\Pi)\| < \|\delta P_0\|$.

Soit μ_i , $i = 1, \dots, n-1$ le spectre des valeurs propres de la matrice de Floquet \mathcal{F} , la trajectoire périodique est

- *linéairement stable si toutes les valeurs propres μ_i ont un module strictement inférieur à 1,*
- *linéairement instable si au moins une valeur propre de \mathcal{F} a un module supérieur à 1.*

La perte de stabilité de la solution périodique (du cycle limite) correspond donc à la traversée du cercle unité par une (ou plusieurs) valeur(s) propre(s) de la *matrice de Floquet*. Lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ traversent simultanément le cercle unité, on obtient une bifurcation de Hopf.

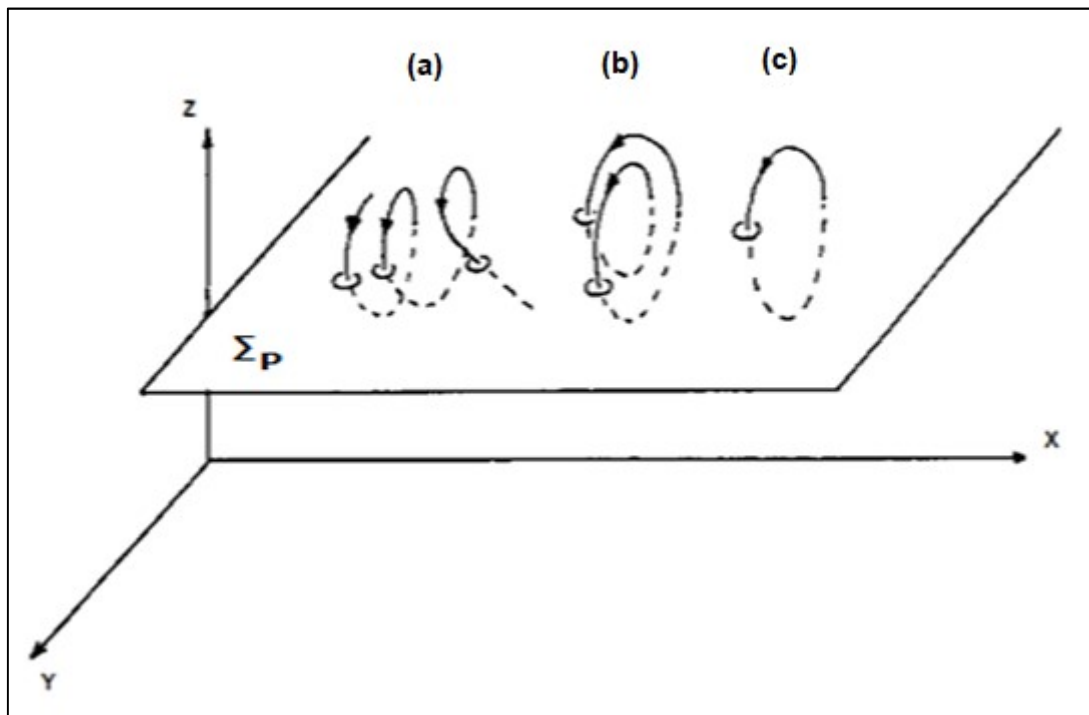


Fig. 1.1 (a). Représentation d'une trajectoire dans un espace de phases de dimension 3 à l'aide d'une section de Poincaré. (a) Comportement aperiodique. (b) et (c) Comportement periodique.

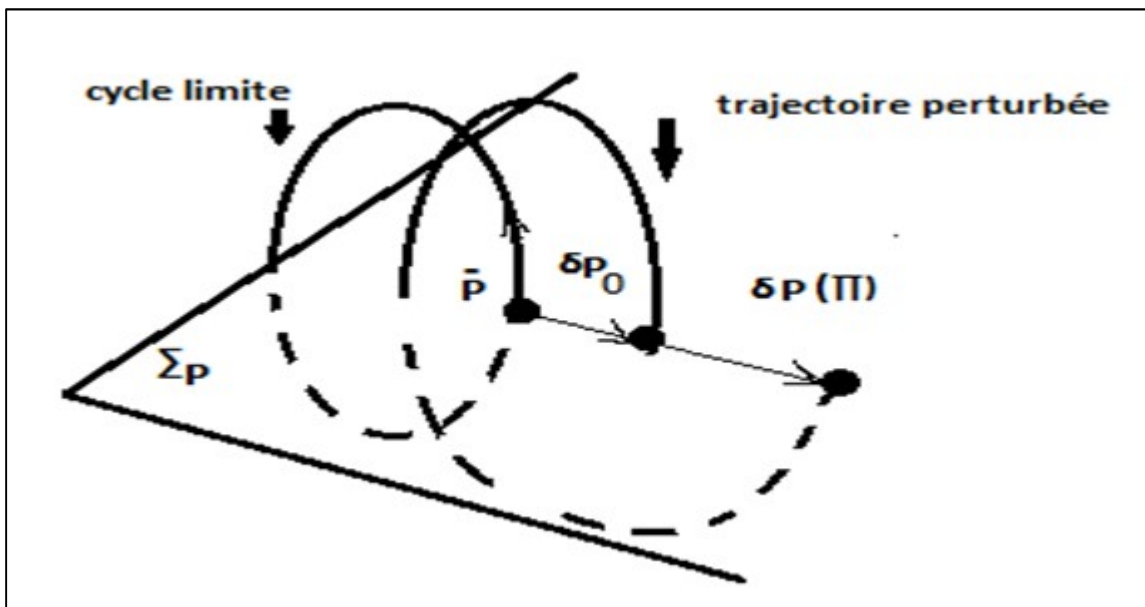


Fig. 1.1 (b). Base de la théorie de Floquet. Cycle limite et trajectoire perturbée.

L'utilisation de la section de Poincaré dans l'étude de systèmes dynamiques permet de :

1. Ramener l'étude de l'évolution de système continu de dimension n à celle d'un système discret de dimension $n - 1$.
2. Simplifier l'étude de la stabilité des points d'équilibres, des cycles limites.....
3. Déterminer le comportement dynamique du système (périodique, quasi-périodique, chaotique).
4. Visualiser les mécanismes du chaos.

On pourra, après avoir relevé un nombre conséquent de points, tracer le graphe de la section de Poincaré. Ce graphe peut être :

- * un point unique : le système est périodique ;
- * un petit nombre de points : le système est périodique d'ordre élevé ;
- * une courbe fermée : le système est quasi-périodique ;
- * un nuage de points : le système est chaotique.

1.5 Attracteur. Bassin d'attraction

Pour un *système dissipatif* on considère qu'il existe dans l'espace des phases M , un ensemble U contracté asymptotiquement dans le temps en un ensemble compact $A = \bigcap_{t \geq 0} \Phi_t(U)$.

Définition 20 (*Attracteur*) On dit que A , dont le voisinage fondamental est U , est un attracteur s'il est :

- **Attractant** : c'est à dire que pour tout ouvert V , $V \supset A$ on a $\Phi_t(U) \subset V, \forall t$ suffisamment grand.
- **Invariant** : $\Phi_t(A) = A, \forall t$.
- **Irréductible ou indécomposable** : c'est à dire que l'on peut passer de tout état x de A à tout état x' de A au moyen d'une orbite de x ; $\Phi_t(x)$, de longueur finie, partant de x est aboutissant en x' . Autrement dit : $\forall x' \in A, \forall x \in A$, pour un temps convenable la trajectoire $\Phi_t(x)$ passe très près de x' .

Définition 21 *Le bassin d'attraction B d'un attracteur A pour le flot Φ_t est l'ensemble des conditions initiales au départ desquelles la trajectoire ira s'enfermer dans A , soit $\bigcup_{t \leq 0} \Phi_t(U)$. L'attracteur A est le plus petit ensemble compact de son bassin B .*

1.5.1 Types d'attracteurs

Les trajectoires associées à des régimes dynamiques dissipatifs différents parcourent des objets géométriques de nature différente : point fixe, cycle limite, tore invariant ou bien attracteur étrange (Fig. 1.2). Par contre, les états d'une dynamique aléatoire se répartissent au hasard dans l'espace des phases.

- **Le point fixe** : il correspond à un état stationnaire du système (pas d'évolution).
- **Le cycle limite** : il est associé à un comportement périodique du système.
- **Attracteur quasi périodique** : il est représenté par un objet semblable à un tore dans un espace de phases de dimension ≥ 3 .
- **Attracteur étrange** : est un attracteur associé aux systèmes chaotiques dissipatifs appelé étrange en raison de l'étrangeté du comportement imprévisible et infiniment complexe à toutes les échelles de sa structure. La première découverte du concept d'attracteur étrange revient au météorologue *Edward Lorenz* en 1963 puis élaboré au plan mathématique en 1971 par *D.Ruelle* et *F.Takens* en tant qu'élément clef de la compréhension des comportements irréguliers décrits par des équations déterministes telle que la turbulence des fluides. Géométriquement, un tel attracteur peut être décrit comme le résultat des opérations d'étirements et repliements d'un cycle de l'espace des phases, répété un nombre infini de fois (pour des modèles d'attracteurs étranges voir [17 – 20]).

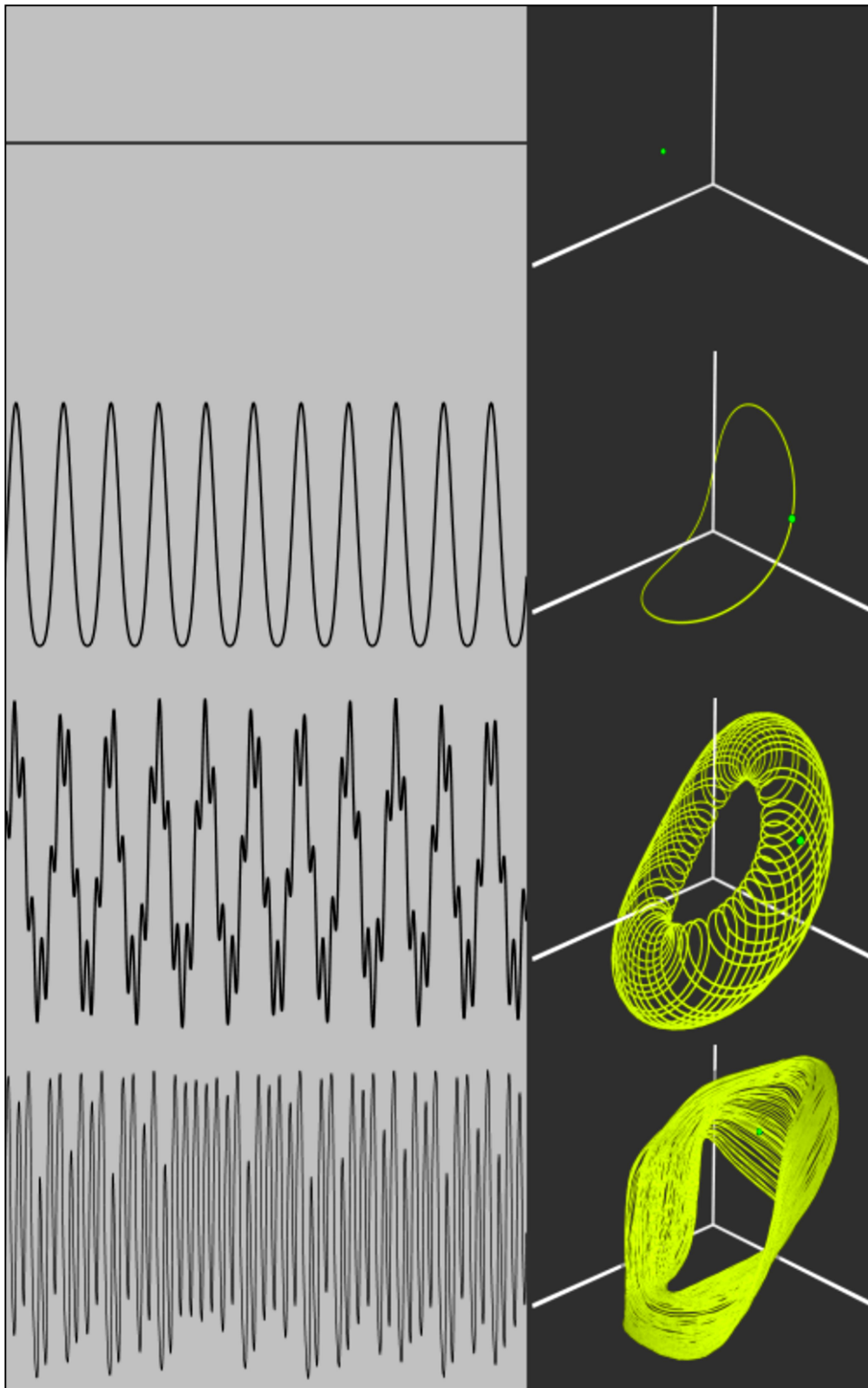


Fig.1.2. Représentation géométrique de quelques comportements dynamiques : à gauche la solution $x(t)$ et à droite la trajectoire du point représentatif dans l'espace des phases. De haut en bas : régimes stationnaire, périodique, quasi-périodique et chaotique [25].

Propriétés des attracteurs étranges

- **Sensibilité aux Conditions Initiales (SCI)** : deux trajectoires initialement très voisines de l'espace des phases s'écartent l'une de l'autre et divergent de façon exponentielle au cours du temps, mais cette divergence ne peut pas être infinie car l'attracteur est de diamètre fini.
- **Étirement et Repliement** : l'attracteur étrange est invariant par l'étirement et le repliement pour plusieurs itérations. Si le système est de dimension 3, l'étirement de l'attracteur par le flot se fait dans une direction, le repliement dans une autre direction, et un comportement périodique selon la troisième direction.

L'étirement et le repliement sont deux mécanismes du chaos peuvent être mis en évidence par la section de Poincaré. Cette technique permet de comprendre comment un système chaotique peut être imprédictible tout en restant confiné dans une région bornée de l'espace des phases. En examinant les intersections de l'attracteur avec des plans de section disposés successivement on s'aperçoit que deux transformations géométriques complémentaires sont à l'oeuvre.

La première, en l'occurrence "*l'étirement*", éloigne les trajectoires proches, expliquant ainsi "la sensibilité aux conditions initiales". La seconde, "*le repliement*", ramène l'une sur l'autre des trajectoires situées à des extrémités opposées de l'attracteur, maintenant la dynamique dans une région de volume fini ce qui explique "*la structure fractale*" (infiniment feuilletée) des attracteurs étranges. Le repliement induit par les non linéarités du système, est donc le responsable du caractère fractal.

La Fig.1.3 montre l'attracteur associé à un régime chaotique observé dans un laser CO_2 à pertes modulées est représenté ici dans un espace des phases reconstruit à l'aide de coordonnées décalées dans le temps. En suivant les intersections successives de l'attracteur avec une série de sections de Poincaré (indiquées en couleur), on visualise les mécanismes géométriques d'étirement et de repliement qui façonnent l'attracteur chaotique [25].

-
- **Autosimilarité et Dimension Fractale :** l'attracteur présente une autosimilarité dans sa structure à toutes les échelles et la dimension d de l'attracteur étrange est non entière. Le modèle de Hénon qui s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} &= y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} &= bx_k \end{cases}$$

C'est un système dissipatif chaotique qui, dans son principe réalise les opérations schématisées sur la Fig.1.4. L'attracteur, obtenu en itérant un nombre de fois très élevé une condition initiale, est présenté pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ sur la Fig. 1.4 (Zoom à différentes échelles). Les cadres A, B, C montre la structure de type fractal. On y voit des lignes continues qui correspondent à la direction d'instabilité le long de l'attracteur.

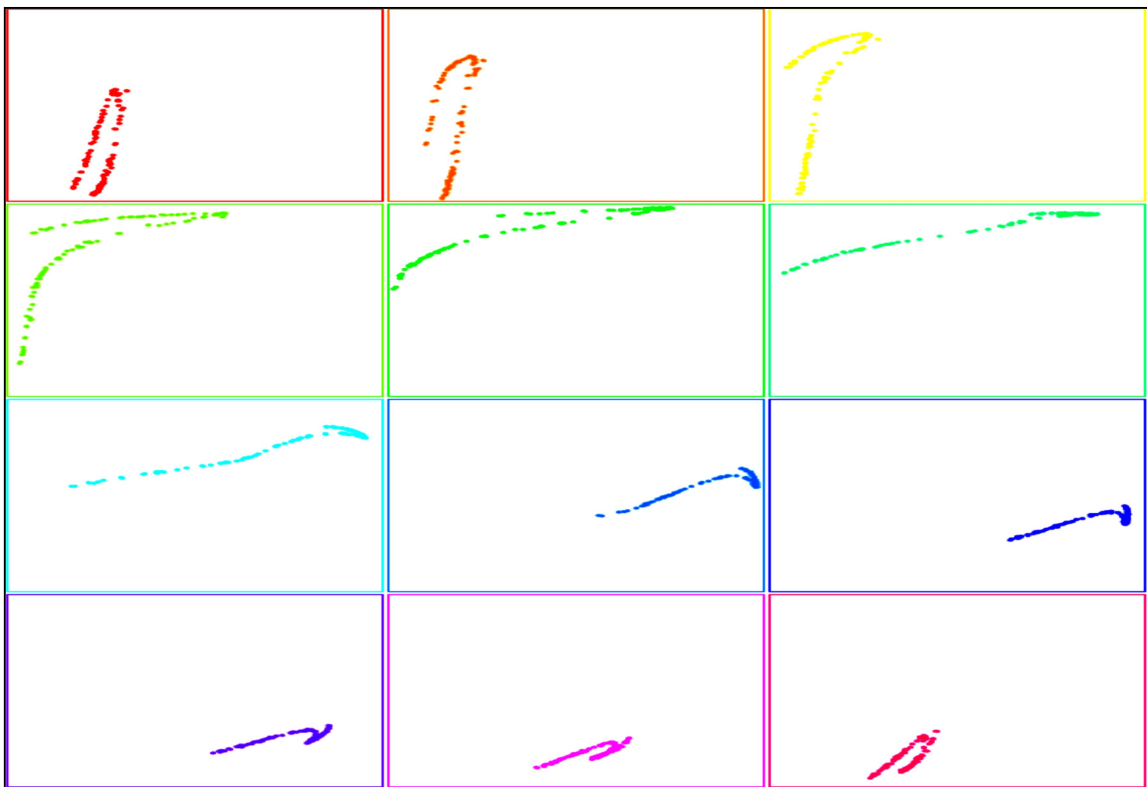
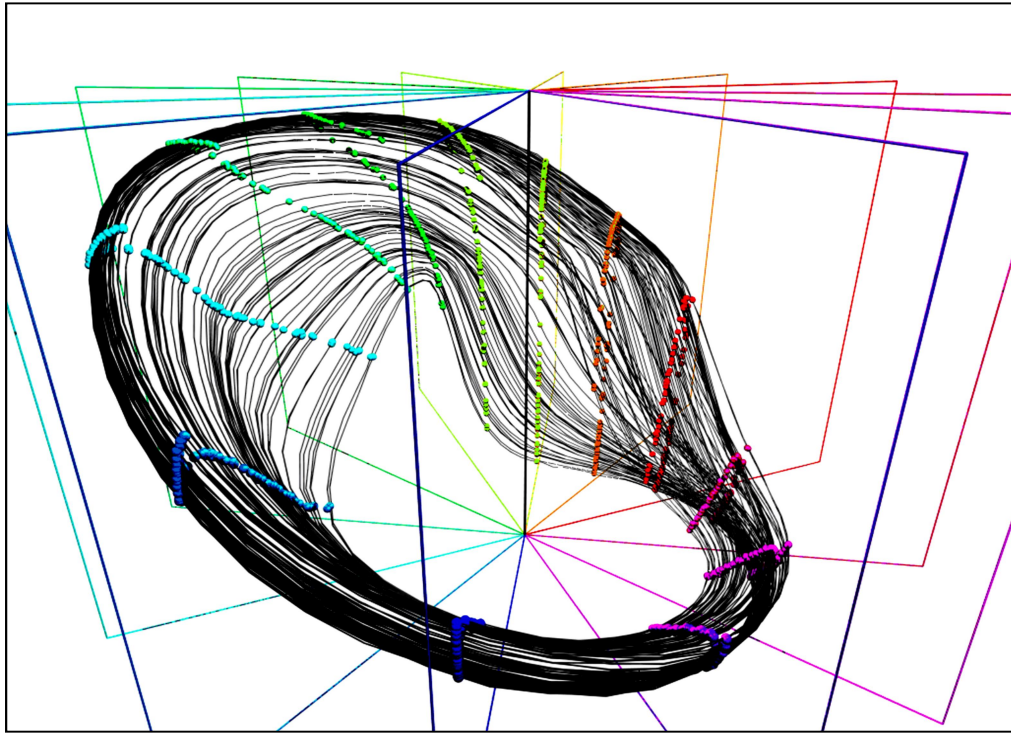


Fig.1.3. Haut : Sections de Poincaré d'un attracteur chaotique reconstruit à partir de signaux délivrés par un laser CO₂ à modulations de pertes. Bas : Les sections de Poincaré de la figure du haut. On distingue parfaitement les mécanismes d'étirement et de repliement qui façonnent l'attracteur étrange [25].

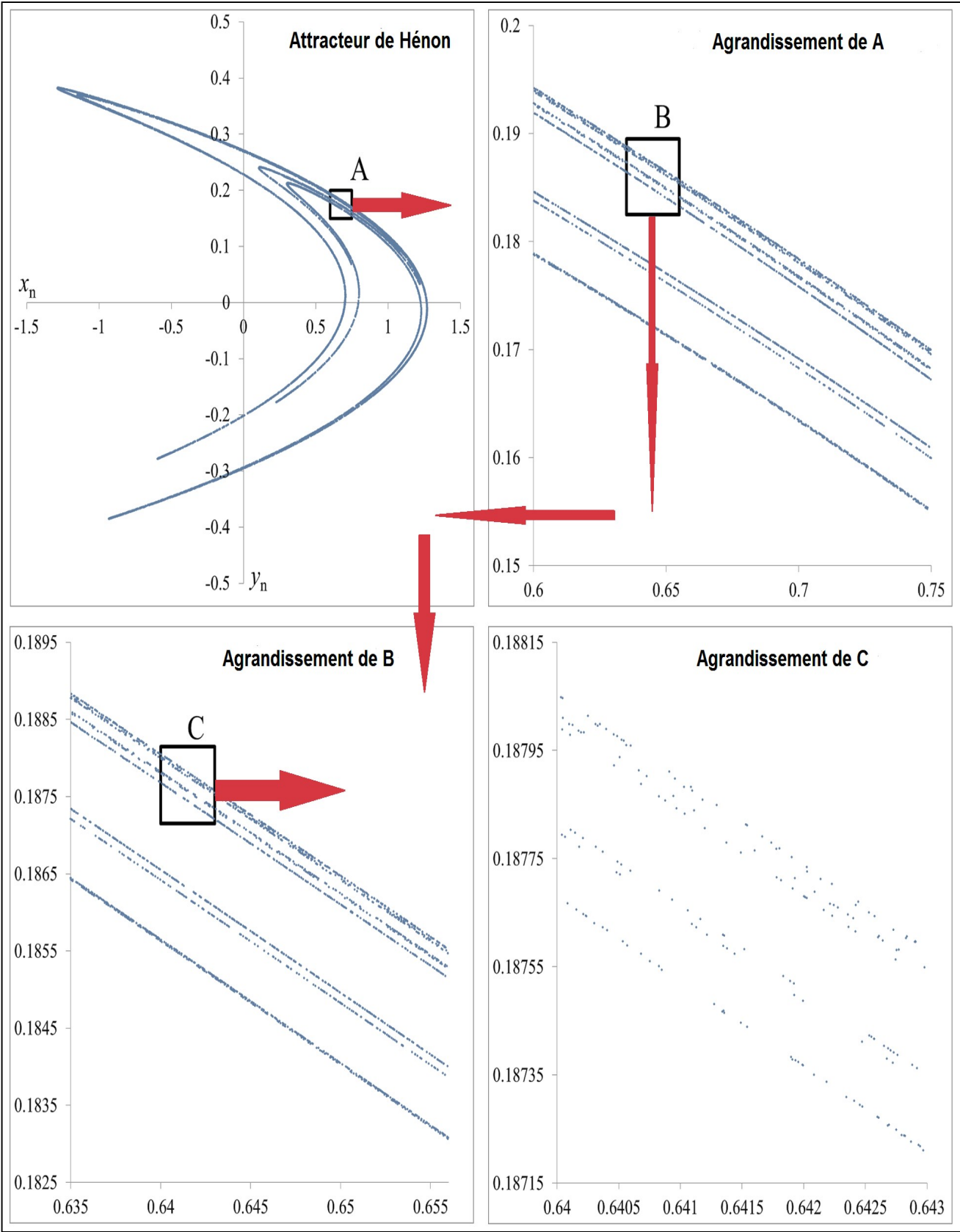


Fig.. 1.4. Structure fractale de l'attracteur étrange de Hénon

1.6 Stabilité des systèmes non linéaires

La stabilité est un concept dont on doit préciser les nuances :

- **La stabilité locale** : se réfère à un comportement qui s'est rétabli suite à une petite perturbation. Par exemple, si un point fixe ou un cycle est rétabli suite à une petite perturbation, alors le point fixe ou cycle est appelé (localement) stable.
- **La stabilité globale** : se réfère au retour à un cycle ou à un point fixe suivant des perturbations arbitraires (pas nécessairement petites).
- **La stabilité structurelle** : se réfère à la stabilité des caractéristiques dynamiques d'un système, en fonction des modifications apportées au système lui-même (par exemple, modification de sa loi d'évolution).

Puisqu'on s'intéresse dans les prochains chapitres à la stabilisation des points fixes instables des systèmes dynamiques discrets, on rappelle les définitions de la stabilité pour de tels systèmes.

La caractérisation du comportement qualitatif d'un système dynamique discret non linéaire nécessite son approximation linéaire au voisinage de son état d'équilibre, \bar{x} . En particulier, l'analyse de la stabilité de l'état d'équilibre d'un système détermine si un état d'équilibre est stable (attractif) ou instable (répulsif) pour un ensemble de conditions initiales. Il facilite l'étude des propriétés locales, et souvent globales, du système dynamique en question, et permet d'analyser les implications de petites perturbations et parfois importantes, qui surviennent lorsque le système se trouve à proximité d'un état d'équilibre.

Définition 22 (*Stabilité locale et globale d'un état d'équilibre*) Un état d'équilibre (ou point fixe) , \bar{x} , d'un système non linéaire $x(i+1) = f(x(i))$ est :

- globalement (asymptotiquement) stable, si

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x(i) = \bar{x}, \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n.$$

- localement (asymptotiquement) stable, si

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} x(i) = \bar{x}, \quad \forall x(0) \in B_\varepsilon(\bar{x}).$$

d'où :

$$B_\varepsilon(\bar{x}) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x_k - \bar{x}_k| < \varepsilon\}, \forall k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ainsi, un état d'équilibre est globalement (asymptotiquement) stable si le système converge vers cet état d'équilibre sans tenir compte de la condition initiale, alors qu'un état d'équilibre est localement (asymptotiquement) stable s'il existe un petit voisinage de diamètre ε de cet état d'équilibre, de sorte que, à partir de chaque condition initiale de ce voisinage, le système converge vers cet état d'équilibre.

La stabilité globale d'un état d'équilibre nécessite l'unicité globale de l'état d'équilibre. Clairement, s'il y a plus d'un état d'équilibre, aucun des ces états d'équilibre ne peut être globalement stable puisque si le système est dans un état d'équilibre, d'autres d'états d'équilibre ne seront jamais atteints.

La stabilité locale d'un état d'équilibre nécessite l'unicité locale de l'état d'équilibre. A savoir, il nécessite l'absence de tout point d'équilibre supplémentaire dans un voisinage proche de l'état d'équilibre. Clairement, si le système est caractérisé par un continuum d'équilibres, aucun de ces états d'équilibre est localement stable.

Définition 23 (*Etat d'équilibre isolé*) Un point \bar{x} est dit état d'équilibre isolé d'un système autonome $x(i+1) = f(x(i))$, s'il existe $\varepsilon > 0$, tel qu'il n'y ait aucune autre point d'équilibre dans la boule $B_\varepsilon(\bar{x})$.

Méthode indirecte de Lyapunov

La première méthode dite de Lyapunov ou méthode indirecte de Lyapunov est utilisée pour étudier la stabilité des trajectoires d'un système en calculant les valeurs propres d'un *système linéarisé* aux trajectoires objectives. Cela signifie que la première méthode de Lyapunov est essentiellement une méthode locale qui ne peut être utilisée que dans un voisinage de la trajectoire objective.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application suffisamment

dérivable et notée :

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

On considère le système discret autonome non linéaire :

$$\begin{cases} x(i+1) = f(x(i), \mu) \\ f(\bar{x}) = \bar{x} \end{cases} \quad (1.4)$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$A = Df(\bar{x})$ est la matrice Jacobienne de f en \bar{x} .

Proposition 24 (Condition suffisante pour l'existence d'un équilibre isolé) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 difféomorphisme² avec un point d'équilibre (ou point fixe), \bar{x} . Si la matrice Jacobienne de f en \bar{x} , $A = Df(\bar{x})$, est non singulière³ alors \bar{x} est un état d'équilibre isolé.

La linéarisation du champ de vecteurs f au voisinage du point d'équilibre \bar{x} est déterminée par le développement de Taylor de $f(x)$ au voisinage du point fixe \bar{x} :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x}) + R(x - \bar{x}) \\ \text{tel que} & : f(\bar{x}) = \bar{x}, \quad A = Df(\bar{x}). \end{aligned}$$

d'où;

$$\begin{aligned} f(z) &= Az + R(z) \\ \text{tel que} & : f(z) = f(x) - \bar{x}, \quad z = x - \bar{x} \end{aligned}$$

² $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ est dit C^r difféomorphisme si f et f^{-1} sont de C^r . f est dit homéomorphisme si $r = 0$; c-à-d f et f^{-1} sont deux applications continus.

³ A est non singulière si $\exists k > 0, \|A.x\| > k \|x\|$

Les solutions du système non linéaire (1.4) et celles du système linearisé $z(i+1) = A \cdot z(i)$ peuvent être mises en correspondance dans certains cas.

Définition 25 (*Champs de vecteurs topologiquement équivalents*) Deux champs de vecteurs f et g de classe C^k sont dits topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme h qui envoie les orbites de f sur celles de g en préservant l'orientation. Étant donné un point x_0 et un réel $\delta > 0$, il existe donc un ε tel que pour i , $0 < i < \delta$, il existe un j , $0 < j < \varepsilon$, tels que

$$h(f^i(x_0)) = g(h^j(x_0))$$

Définition 26 (*Point fixe hyperbolique*) Considérons l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit $Df(\bar{x})$ la matrice Jacobienne de $f(x)$, évaluée à l'état d'équilibre \bar{x} . L'état d'équilibre, \bar{x} , est un point fixe hyperbolique si $Df(\bar{x})$ n'a pas de valeurs propres de module = 1.

Théorème 27 (Hartmann – Grobman) [19 – 20] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 difféomorphisme avec un point d'équilibre hyperbolique, \bar{x} , alors il existe un homéomorphisme h d'un voisinage du point d'équilibre $\bar{x} \in U$ dans \mathbb{R}^n , $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, mettant en correspondance les trajectoires du système non linéaire et celles du système linearisé $z(i+1) = A \cdot z(i)$. En particulier :

$$h(\bar{x}) = \bar{x} \text{ et } h(f(x)) = Ah(x), \forall x \in U$$

Si le point d'équilibre n'est pas hyperbolique, c'est-à-dire s'il existe au moins une valeur propre avec un module égale à 1 dans ce cas, le théorème de *Hartman-Grobman* ne peut pas être appliqué. La raison est que le système linearisé n'est pas suffisamment informatif. En particulier, les propriétés de stabilité du système dépendent des termes d'ordres supérieurs de l'expansion qui ont été ignorés dans l'approximation [17 – 20]. Si le système non linéaire $x(i+1) = f(x(i))$ a un équilibre \bar{x} , *hyperbolique* et *isolé*, il existe au voisinage de \bar{x} certaines surfaces invariantes, appelées *variétés stables* et *instables*. Localement, ces variétés sont des déformations continues, respectivement, des espaces propres stable et instable du système linearisé.

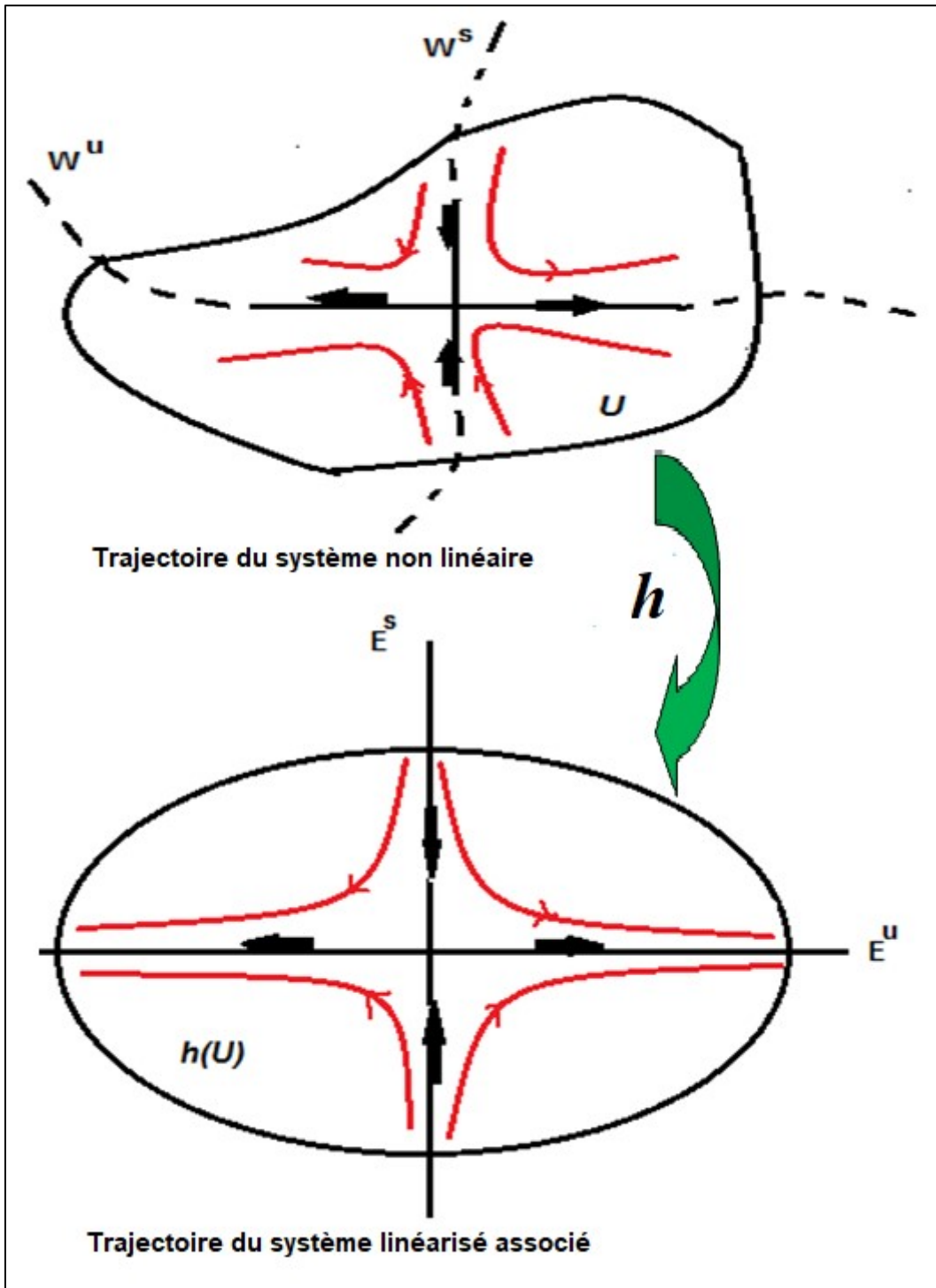


Fig. 1.5. Théorème de Hartman—Grobman.

1.6.1 Variétés stable, instable et centrale

On définit les sous-espaces vectoriels stable, instable et central, E^s , E^u et E^c du système dynamique discret décrit par l'application itérée : $f : M \rightarrow M$

E^s est engendré par les vecteurs propres de $Df(x)$ dont les valeurs propres sont de module < 1 .

E^u est engendré par les vecteurs propres de $Df(x)$ dont les valeurs propres sont de module > 1 .

E^c est engendré par les vecteurs propres de $Df(x)$ dont les valeurs propres sont de module $= 1$.

Définition 28 On définit les variétés localement stable (respectivement instable) de $\bar{x} : W^S(\bar{x})$ (respectivement $W^u(\bar{x})$) par :

$$W_{loc}^S(\bar{x}) = \{x \in U / f^i(x) \longrightarrow \bar{x} \text{ si } i \longrightarrow +\infty \text{ et } f^i(x) \in U \}$$

$$W_{loc}^u(\bar{x}) = \{x \in U / f^i(x) \longrightarrow \bar{x} \text{ si } i \longrightarrow -\infty \text{ et } f^i(x) \in U \}$$

où : $U \subset \mathbb{R}^n$, est un voisinage du point fixe \bar{x} .

Une variété W est dite invariante par l'application f si $f^i(W) \subset W$ ($\forall i \in \mathbb{N}$).

On a le théorème suivant :

Théorème 29 Il existe des variétés invariantes stable, instable et centrale, W^s , W^u et W^c tangentes respectivement à E^s , E^u et E^c au point fixe \bar{x} . La variété centrale n'est pas nécessairement unique.

Si $x \in W^u(\bar{x}) \cap W^s(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$, alors \bar{x} est un point homocline. Les variétés instable et stable étant des variétés invariantes, si x est un point homocline, $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, ... sont aussi des points homoclines et l'orbite $f(x)$, $f^2(x)$, $f^3(x)$, ... est appelée orbite homocline.

Si les variétés stable et instable $W^s(\bar{x}_1), W^u(\bar{x}_2)$ de deux points fixes hyperboliques distincts \bar{x}_1 et \bar{x}_2 se coupent en x , alors x est appelé *point hétérocline* et l'orbite de x est appelée *orbite hétérocline*.

Soit e_i le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_i et soit, dans l'espace des phases, un point x_0 proche du point fixe \bar{x} et situé dans la direction e_i , à une distance $\varepsilon \ll 1$ de \bar{x} , Alors si $|\lambda_i| > 1$, l'orbite de x_0 , c'est-à-dire l'ensemble des points $\{f^k(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ appartient à la variété instable. Si $|\lambda_i| < 1$, l'ensemble des points $\{f^{-k}(x_0)\}_{k=1}^{\infty}$ appartient à la variété stable.

Dans la pratique la variété instable (resp. stable) est l'ensemble des orbites $f(x_0)$ (resp. $f^{-1}(x_0)$) des points x_0 appartenant à un volume infinitésimal engendré par les vecteurs propres dont la valeur propre est de module > 1 (resp. < 1).

Propriété :

Si le système $x(i+1) = f(x(i))$ a un point d'équilibre hyperbolique \bar{x} , alors il existe deux variétés localement stable et instable de même dimension n_s, n_u avec les sous espaces propres E^s, E^u du système linéarisé, telles que $W_{loc}^S(\bar{x})$ et $W_{loc}^u(\bar{x})$ sont tangentes à E^s, E^u en \bar{x} .

La solution du système linearisé $z(i+1) = A.z(i)$ du système (1.4) qui satisfait la condition initiale $z(0) = z_0$ peut être écrit comme suit :

$$z(i+1) = A^i.z(0)$$

tel que $z(i+1) = x(i+1) - \bar{x}$

d'où :

$$\begin{cases} z_1(i+1) = \lambda_1^{(i)}.z_1(0) \\ z_2(i+1) = \lambda_2^{(i)}.z_2(0) \\ \dots \\ z_n(i+1) = \lambda_n^{(i)}.z_n(0) \end{cases}$$

Ainsi, $x(i)$ est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ de $Df(\bar{x})$ ont un module inférieur à 1.

Le comportement des orbites au voisinage du point d'équilibre \bar{x} est lié aux valeurs propres de $Df(\bar{x})$:

Théorème 30 (*Conditions suffisantes pour la stabilité locale*) [16] Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 difféomorphisme avec un point d'équilibre hyperbolique, \bar{x} . Alors un état d'équilibre, \bar{x} , est localement (asymptotiquement) stable si et seulement si les modules de toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne, $Df(\bar{x})$, sont inférieurs à 1.

Remarque : L'évolution du système non linéaire au voisinage d'un état équilibre, \bar{x} , ne peut être examinée en utilisant le système linéarisé, $z(i+1) = Df(\bar{x})z(i)$ si l'état d'équilibre est non hyperbolique (i.e., si le module de l'un des valeurs propres est égal à 1), l'examen de ce système sera basé sur les propriétés de la *variété centrale*⁴

Définition 31 (*Points d'équilibres*) Soit \bar{x} un point d'équilibre de $x(i+1) = f(x(i))$, $x(i) \in \mathbb{R}^n$. \bar{x} est appelé point d'équilibre :

- "**selle**" si dans le spectre du Jacobien $Df(\bar{x})$ de la fonction f une partie des valeurs propres sont de valeur absolue inférieure à 1 et les autres sont de valeur absolue supérieure à 1.
- "**noeud**" si toutes les valeurs propres de la matrice $Df(\bar{x})$ sont de valeur absolue supérieure à 1 ou inférieure à 1.
- "**foyer**" si les valeurs propres sont des paires complexes conjuguées.

⁴Voir Guckenheimer et Holmes (1990) et Hale et Kocak (1991).

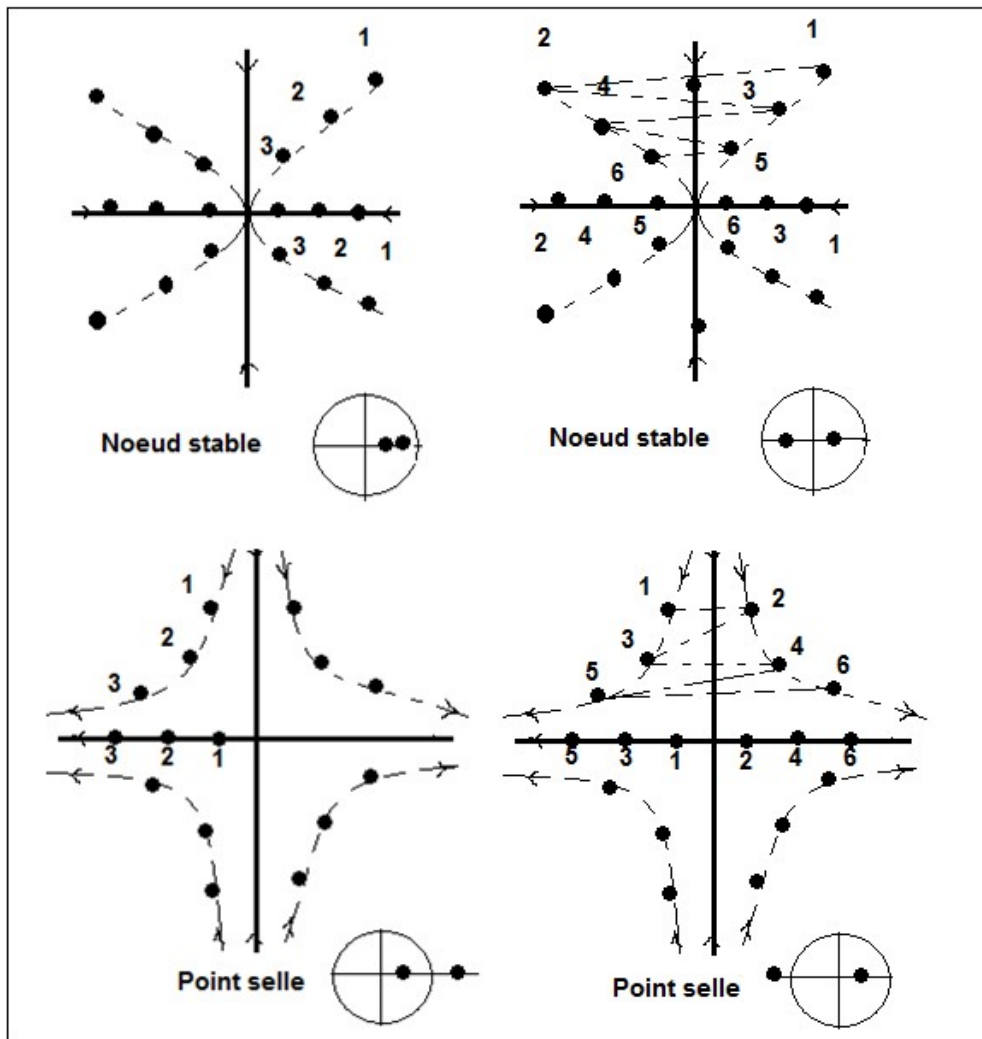


Fig. 1.6 (a). Plan de phases pour des valeurs propres réelles

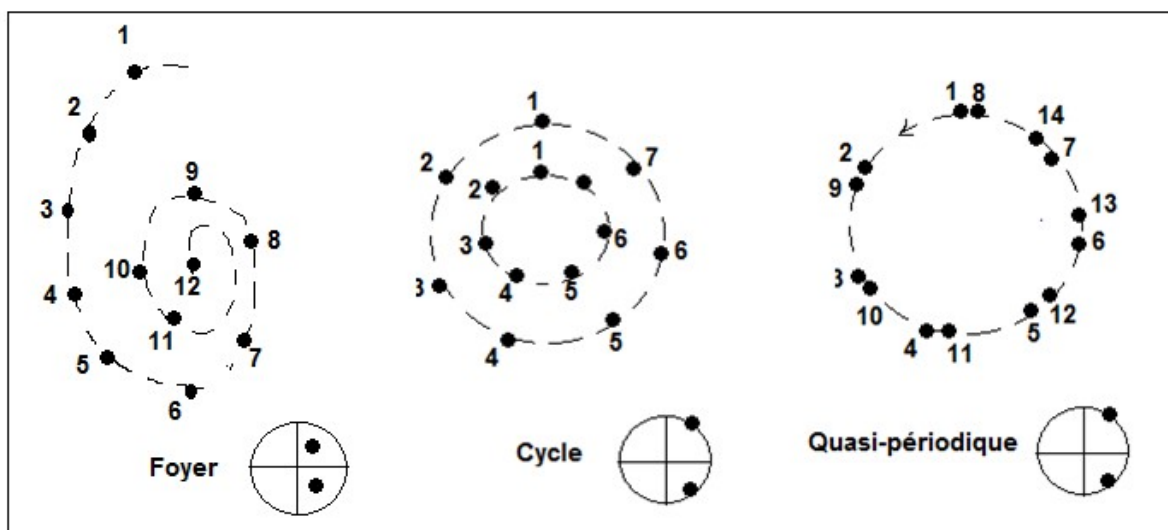


Fig. 1.6 (b). Plan de phases pour des valeurs propres complexes conjuguées

Définition 32 (*Application contractante*)

Soit (\mathbb{R}^n, ρ) un espace métrique, Alors $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application contractante s'il existe $\beta \in [0, 1]$,

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \beta \rho(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

tel que $\rho(c, d) \equiv \|c - d\|$.

Théorème 33 (*Conditions suffisantes pour la stabilité globale d'un système non linéaire*) [16] Un état d'équilibre d'un système discret multidimensionnelle et autonome, $x(i+1) = f(x(i))$ existe et unique, et il est globalement stable si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application contractante.

Définition 34 (*Points limites et ensembles limites des orbites*) Une orbite positive γ^+ d'un point x_0 dans \mathbb{R}^n est la suite des images de x_0 par les composées successives de f :

$$\gamma^+(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^i(x_0), \dots\}$$

- Si f est inversible

$$f^{-n}(x_0) = \underbrace{(f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1})}_{n \text{ fois}}(x_0)$$

et l'orbite négative γ^- de x_0 est la suite des images de x_0 par les composées successives de f^{-1} :

$$\gamma^-(x_0) = \{x_0, f^{-1}(x_0), f^{-2}(x_0), \dots, f^{-i}(x_0), \dots\}$$

- Si $\gamma^+(x_0)$ et $\gamma^-(x_0)$ existent alors l'orbite γ de x_0 est l'ensemble définie par $\gamma(x_0) = \gamma^+(x_0) \cup \gamma^-(x_0)$.

- Le point " α -limite" d'une orbite négative $\gamma^-(x_0)$ est un point " a " de l'espace de phases, s'il existe une suite d'entier négatives n_i tels que $n_i \rightarrow -\infty$ et

$$f^{n_i}(x_0) \rightarrow a.$$

- Le point " ϖ -limite" d'une orbite positive $\gamma^+(x_0)$ est un point "b" de l'espace de phases, s'il existe une suite d'entier positives n_i tels que $n_i \rightarrow +\infty$ et

$$f^{n_i}(x_0) \rightarrow b.$$

- L'ensemble α -limite des points " α -limite" d'une trajectoire $\gamma^-(x_0)$ est désigné par $\alpha(x)$.

- L'ensemble ϖ -limite des points " ϖ -limite" d'une trajectoire $\gamma^+(x_0)$ est désigné par $\varpi(x)$.

Définition 35 (cycle limite) Un cycle limite est une orbite fermée Γ telle que :

$\exists x \notin \Gamma$ pour lequel

* Γ est l'ensemble α -limite de $x, \alpha(x)$, d'où $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^{-i}(x) = \Gamma$.

* Γ est l'ensemble ϖ -limite de $x, \varpi(x)$, d'où $\lim_{i \rightarrow +\infty} f^i(x) = \Gamma$.

Théorème 36 (Stabilité d'une orbite périodique) [17–20] Soit x un point d'une orbite périodique d'ordre m , si le spectre de la matrice $Df^m(x)$ est contenu à l'intérieur du cercle unité, l'orbite périodique est stable; si une des valeurs propres a un module plus grand que un, l'orbite périodique est instable.

Le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de la chaîne. En effet, la dérivée de f^m au point x_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} (f^m)'(x_1) &= f'(f(\dots f(x_1)\dots)) \dots f'(f(x_1))f'(x_1) \\ &= f'(x_m) \cdot f'(x_{m-1}) \cdot \dots \cdot f'(x_1) \end{aligned}$$

Théorème 37 (Caractérisation d'une orbite périodique) [17–20] L'orbite périodique $\{x_1, \dots, x_m\}$ est :

$$\text{attractif (ou stable) si } |f'(x_m) \cdot f'(x_{m-1}) \cdot \dots \cdot f'(x_1)| < 1;$$

$$\text{répulsif (ou instable) si } |f'(x_m) \cdot f'(x_{m-1}) \cdot \dots \cdot f'(x_1)| > 1;$$

1.7 Bifurcations

Un système non linéaire peut subir *une bifurcation*, c'est à dire qu'il passe d'un type de comportement dynamique à un type de comportement différent suite à la variation d'un paramètre du système. Une orbite peut devenir stable ou instable et des attracteurs peuvent apparaître ou disparaître. On peut en particulier passer d'un cycle limite à un attracteur chaotique. Si à une valeur du paramètre un tel changement se produit on dit que le système passe par *un point de bifurcation*. C'est ainsi que des systèmes non linéaires apparemment simples caractérisés par trois variables dynamiques peuvent développer *un comportement chaotique* [4].

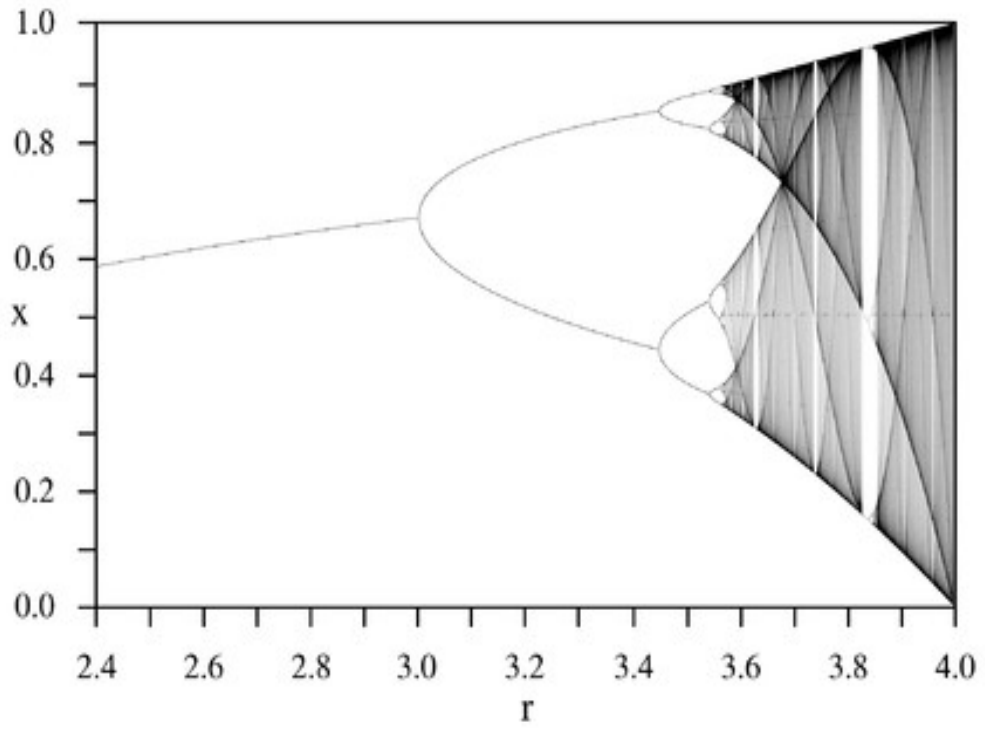


Fig.1.7 (a). Diagramme de bifurcation de l'application logistique

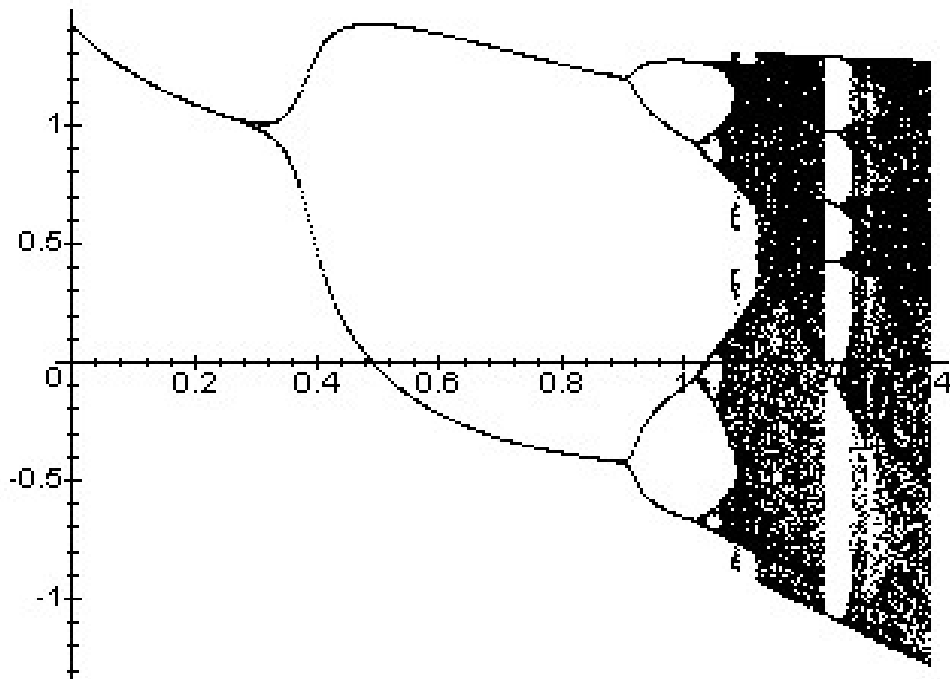
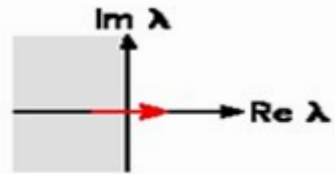


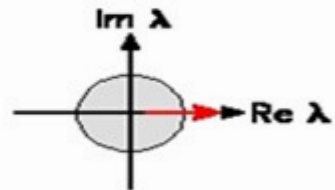
Fig.1.7 (b). Diagramme de bifurcation du système de Hénon ($b=0.3$)

Bifurcation de Noeud-col,
Pitchfork ou transcritique

Système
continu

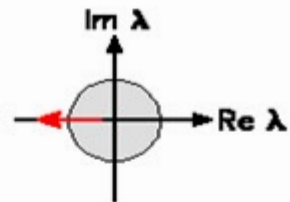


Système
discret



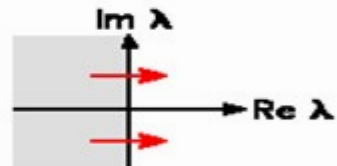
Bifurcation de doublement de période

Système
discret



Bifurcation de Hopf

Système
continu



Système
discret

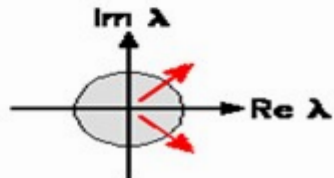


Fig. 1.8. Types de bifurcations

L'analyse globale des bifurcations passe par l'étude d'*un diagramme de bifurcations*, cela permet de visualiser l'évolution du système vers le chaos en fonction d'un paramètre (dit paramètre de bifurcation ou de contrôle). Les bifurcations se produisent dans les systèmes continus ou discrets (voir Fig.1.7(a) représentant le diagramme de bifurcation de l'application logistique définie par $x(i+1) = rx(i)(1-x(i))$ et Fig.1.7(b) représentant le diagramme de bifurcation du système de Hénon)

Les bifurcations sont de deux types [17, 18, 20, 33 – 35] :

Des bifurcations locales : qui se manifestent par des changements qualitatifs du portrait de phase au voisinage des points d'équilibre, des orbites périodiques,....

Des bifurcations globales : qui se produisent souvent lorsque des ensembles invariants entrent en "*collision*" avec d'autres ou avec les points d'équilibre du système, entraînant des modifications dans la topologie globale des trajectoires. Elles ne peuvent pas être détectées uniquement par une analyse de stabilité des points d'équilibre.

Il est impossible de faire une classification exhaustive des phénomènes de bifurcations locales ou globales. En effet une complexité d'étude apparaît avec l'augmentation de la dimension effective du système dynamique (n) et du nombre de paramètres qui interviennent dans le système (k).

Cependant, un grand nombre de phénomènes peuvent être étudiés à l'aide de bifurcations élémentaires que l'on retrouve régulièrement. En particulier pour les points d'équilibre, lorsque les paramètres varient, les valeurs propres de la jacobienne peuvent traverser l'axe imaginaire : il y a bifurcation. Parmi ces paramètres, un nombre minimal peut être utilisé pour reproduire ce type de bifurcation : c'est la **codimension** de la bifurcation. Génériquement, toute bifurcation (locale au voisinage d'équilibre) de codimension **1** peut se ramener à l'une des bifurcations suivantes :

- Sous-critique ou selle-noeud
- Super-critique (bifurcations de type fourche et de type Hopf.)

Définition 38 (*Types de bifurcation*) Soit le système itératif $x(i+1) = f(x(i), \mu)$ où $x(i) \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^p$. Une bifurcation locale survient au point fixe (\bar{x}, μ_0) si le Jacobien en ce point a une valeur propre λ de module égal à 1.

Les bifurcations locales sont de 4 types selon les formes normales (Fig 1.8)[17–20] :

- "noeud-col (ou tangente, ou pli)
- "transcritique"
- "fourche"
- de "Hopf"

Les "bifurcations globales" sont également de 4 types : [33 – 35] :

- bifurcation "homocline"
- bifurcation "hétérocline"
- bifurcation de "période infinie"
- "Catastrophe"

1.8 Routes vers le chaos

À la question du comment le chaos intervient, la théorie répond en montrant l'existence de plusieurs scénarios issus de la déstabilisation d'un cycle limite ou d'un point fixe. *La théorie de Landau* fut la première théorie proposée, en 1944. L'idée d'une cascade de bifurcations introduisant une complexité croissante dans le système et faisant apparaître le chaos comme le résultat d'une accumulation infinie de bifurcations. Les orbites périodiques jouent un rôle important dans de nombreux scénarios de transition vers le chaos. Dans le cas de *scénario de doublement de période (scénario de Feigenbaum)*, la variation d'un paramètre de contrôle fait passer le système par une suite de "bifurcations" chacune correspondant à l'apparition d'une orbite de période double de la précédente, qui devient alors instable. La suite infinie des valeurs du paramètre de contrôle correspondant à ces bifurcations converge de manière géométrique vers une valeur critique au-delà de laquelle peuvent être observés des régimes chaotiques, qui

n'apparaissent donc que lorsque un nombre infini d'orbites périodiques ont été créées.

La classification non exhaustive des scénarios possibles de transition vers le chaos :

Par des bifurcations locales

- Le scénario de doublement de période (ou sous-harmonique)
- Le scénario de quasi-périodicité (scénario de Ruelle et Takens)
- Le scénario de l'intermittence (Manneville et Pomeau)

Par des bifurcations globales

- Le chaos transitoire
- La crise

1.9 Définition du chaos

Définition 39 (*Application topologiquement transitive*) Soient D un espace métrique et $f : D \rightarrow D$. On dit que l'application f est topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \in D$ il existe un élément $x \in U$ et un nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ tels que $f^{(n)}(x) \in V$. On dit souvent qu'une application topologiquement transitive "brasse bien" son domaine de définition. En effet, si U est un ensemble ouvert, alors dans tout voisinage de tout point de D il y a une itération d'un des points de U . Cette définition n'est pas toujours facile à vérifier en pratique.

Théorème 40 (*Application topologiquement transitive*) [17–20] Soit $f : D \rightarrow D$ une fonction. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in D$ tel que son orbite $\gamma^+(x_0)$ est dense dans D , autrement dit, quel que soit l'ensemble ouvert $U \in D$ il contient au moins un point de l'orbite $\gamma^+(x_0)$. Alors f est topologiquement transitive.

Démonstration. Soit deux ensembles ouverts $U, V \in D$. Il faut montrer qu'il existe un point $x \in U$ et un nombre d'itérations n tels que $f^{(n)}(x) \in V$.

Puisque l'orbite de x_0 est dense, l'ensemble U contient au moins une itération du point x_0 . Soit k tel que $x = f^{(k)}(x_0) \in U$. Il suffit maintenant de montrer qu'il existe un nombre positif n tel que $f^{(k+n)}(x_0) \in V$. Dans ce cas on aura

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(f^{(k)}(x_0)) = f^{(k+n)}(x_0) \in V$$

On utilise encore une fois la densité de l'orbite $\gamma^+(x_0)$. Puisque tout ensemble ouvert contient au moins un point de l'orbite $\gamma^+(x_0)$ on peut en déduire facilement que tout ensemble ouvert en contient un nombre infini. Par conséquent, l'ensemble V contient un nombre infini d'itérations du point x_0 . Il y a donc au moins une qui soit postérieure à $f^{(k)}(x_0)$ ce qui signifie qu'il existe un nombre positif $n > 0$ tel que $f^{(k+n)}(x_0) \in V$.

Définition 41 (*Dépendance sensible aux conditions initiales*) On dit qu'une application $f : D \rightarrow D$ exhibe une dépendance sensible aux conditions initiales s'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour tout $x \in D$ et pour tout $\delta > 0$ il existe un $y \in D$ et un nombre $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$d(x, y) < \delta \text{ et } d(f^{(n)}(x), f^{(n)}(y)) > \varepsilon$$

Cette propriété caractérise l'imprévisibilité dans le comportement d'un système dynamique. En effet, même si les conditions initiales de deux orbites sont très proches, elles s'éloignent l'une de l'autre au bout de quelque temps. Cette propriété peut s'avérer très gênante et rend souvent les effets chaotiques indésirables dans des systèmes. Par exemple le traitement numérique d'un tel système est difficile car mêmes des erreurs minimales de calculs peuvent entraîner une déviation considérable des résultats numériques par rapport à la réalité.

Définition 42 (*Système chaotique*) Soit f une application. Supposons que le système dynamique correspondant possède un attracteur A . On dit que ce système est chaotique sur son attracteur si :

- 1) $f : A \rightarrow A$ est topologiquement transitive ;
- 2) L'ensemble de points périodiques de f est dense dans A ;
- 3) f a une dépendance sensible des conditions initiales.

Théorème 43 (Système chaotique) [17–20] Soit $f : A \rightarrow A$ une application.

Supposons que :

- 1) $f : A \rightarrow A$ est topologiquement transitive ;
- 2) L'ensemble de points périodiques de f est dense dans A ;

Alors si A contient un nombre infini de points, le système dynamique défini par f est chaotique sur A .

Un autre théorème peut simplifier l'étude dans le cas où la fonction f est continue.

Théorème 44 (Points périodiques denses) [17–20] Si une application $f : A \rightarrow A$ est continue et topologiquement transitive alors ses points périodiques sont denses dans A .

1.10 Chaos et stabilité des orbites

On a défini dans la section précédente la notion de la sensibilité aux conditions initiales comme une des caractéristiques principales de comportement chaotique d'un système. Même si dans la plupart des cas on peut établir la présence du chaos sans vérifier directement cette propriété, elle reste essentielle pour comprendre et pour "mesurer" ce phénomène.

Une des conséquences directes de la sensibilité aux conditions initiales est l'instabilité de toutes les orbites du système sur l'attracteur.

Définition 45 (Stabilité et instabilité d'une orbite) Soit $f : A \rightarrow A$ une application. Une orbite $\gamma^+(x_0)$ est dit stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y_0 \in A; d(x_0, y_0) < \delta \Rightarrow d(f^n(x_0), f^n(y_0)) < \varepsilon \quad (1.5)$$

Une orbite $\gamma^+(x_0)$ est dit instable si :

$$\exists \varepsilon = \varepsilon(x_0) / \forall \delta > 0, \exists y_0 \in A, \exists n \in \mathbb{N}; d(x_0, y_0) < \delta \text{ et } d(f^n(x_0), f^n(y_0)) > \varepsilon \quad (1.6)$$

La relation entre le comportement chaotique et la stabilité des orbites est donnée par le théorème suivant :

Théorème 46 [17–20] *la sensibilité aux conditions initiales implique l'instabilité de toutes les orbites sur l'attracteur du système.*

Chapitre 2

Mesure et quantification du chaos

Peut-on associer une mesure au comportement chaotique ? Cette question et les réponses que l'on peut y donner sont d'une grande importance. Parce que le but de la théorie du chaos n'est pas de pouvoir donner une définition formelle à un phénomène très complexe. Le but est de pouvoir maîtriser ce phénomène. Dans bien des situations le comportement chaotique est indésirable dans un système. On doit donc pouvoir le prédire et savoir comment l'éviter ou au moins diminuer ses méfaits. Dans d'autres situations on voudrait bien exploiter les propriétés des systèmes chaotiques (application dans le codage, par exemple). Pour tout cela il faut bien pouvoir caractériser le chaos quantitativement.

Les outils du chaos sont des outils capables de rendre intelligible l'évolution temporelle de phénomènes complexes. Si un système est chaotique alors on doit pouvoir trouver un petit nombre de variables et quelques équations permettant une description de ce phénomène complexe. Une prédiction à court terme est alors possible mais à long terme l'évolution est indéterminée.

La caractérisation du chaos nous apporte donc des données sur un système complexe :

- La non prédictibilité de son évolution (due à l'incapacité de mesurer les perturbations apportées à l'ensemble des conditions initiales) et à l'impos-

sibilité de déterminer le degré de précision pour l'ensembles de conditions initiales.

- Le nombre de variables indépendantes responsables de l'évolution du système peut être évalué en calculant la dimension fractale de l'attracteur qui régit le système.
- La distinction entre le chaos déterministe et un comportement aléatoire.
- La corrélation entre le changement des quantités et les variations du comportement physique du système.

2.1 Exposants de Lyapunov

Pour étudier la stabilité des attracteurs du système dynamique non linéaire discret autonome $x(i+1) = f(x(i))$, $x(i) \in \mathbb{R}^n$, on doit :

- 1) Calculer le spectre de la matrice Jacobienne de f pour les points fixes.
- 2) Calculer le spectre de la matrice $Df^m(x)$ pour étudier les m -cycles.
- 3) Calculer les exposants de Lyapunov de f pour les attracteurs étranges.

Lyapunov, dans ses études, s'attachait à déterminer si une solution d'un système dynamique pouvait être stable ou non quel que soit le temps d'observation. Les méthodes utilisées pour étudier la stabilité des systèmes linéaires ne convenaient pas du fait de la non linéarité des modèles et de l'existence d'une sensibilité aux conditions initiales. Lyapunov s'est donc intéressé à définir une autre méthode permettant d'établir ou non cette stabilité en étudiant notamment les divergences dues aux erreurs par l'étude des divergences entre les orbites du système.

Les exposants de Lyapunov mesurent la sensibilité aux conditions initiales du système. Donc ils permettent une mesure du taux de divergence des orbites voisines, et Lyapunov a démontré que le nombre d'exposants (de Lyapunov) est égal à la dimension de l'espace des phases. Par ailleurs, parmi les exposants retenus pour un système donné on considère généralement le plus grand exposant.

D'une manière générale, partant de la formule suivante :

$$\left| \frac{d_N}{d_0} \right| = \left| \frac{d_N}{d_{N-1}} \right| \left| \frac{d_{N-1}}{d_{N-2}} \right| \cdots \left| \frac{d_1}{d_0} \right|. \text{ D'où : } \frac{1}{N} \ln \left| \frac{d_N}{d_0} \right| = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left| \frac{d_i}{d_{i-1}} \right|.$$

où $\frac{d_i}{d_{i-1}}$ décrit en fait de quelle façon une petite erreur d_i à la $i^{\text{ième}}$ itération, est augmentée ou diminuée à l'itération suivante. Lyapunov a montré que cette erreur tend vers une limite : l' "Exposant de Lyapunov".

Cas des systèmes discrets unidimensionnels

Soit une application f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui applique $x(i)$ sur $x(i+1)$. On choisit deux conditions initiales très proches, $x(0)$ et $\acute{x}(0)$ séparées d'une distance d_0 , et on observe comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. On sait que :

$$d_0 = |\acute{x}(0) - x(0)|$$

après une itération d_0 devient d_1

$$d_1 = |\acute{x}(1) - x(1)|$$

après n itérations la distance évolue à d_n

$$d_n = |\acute{x}(n) - x(n)|$$

$\frac{d_1}{d_0}$: décrit l'évolution de l'erreur d_1 dans la 1^{ière} itération

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{|\acute{x}(1) - x(1)|}{|\acute{x}(0) - x(0)|} = \frac{|f(\acute{x}(0)) - f(x(0))|}{|\acute{x}(0) - x(0)|} = \frac{|f(x(0) + d_0) - f(x(0))|}{d_0}$$

pour d_0 infinitésimale

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f(x(0) + d_0) - f(x(0))|}{d_0} = |f'(x(0))|$$

On suppose que les deux trajectoires $x(x(0), t)$ et $x(\acute{x}(0), t)$ s'écartent à un rythme exponentiel dans la 1^{ière} itération . On pourra alors trouver un réel $\lambda(x(1))$ tel qu'après 1 itération :

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = e^{\lambda(x(1))}$$

par comparaison avec la limite précédente

$$e^{\lambda(x(1))} = |f'(x(0))|$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\lambda(x(1)) = \log |f'(x(0))|$$

$\lambda(x(1))$ est appelé exposant de Lyapunov local [36], qui mesure la divergence ou la convergence après la 1^{ière} itération.

L'évolution de l'erreur après n itérations :

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{|\dot{x}(n) - x(n)|}{|\dot{x}(0) - x(0)|} = \frac{|f^n(\dot{x}(0)) - f^n(x(0))|}{|\dot{x}(0) - x(0)|} = \frac{|f^n(x(0) + d_0) - f^n(x(0))|}{d_0}$$

pour d_0 infinitésimale

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f^n(x(0) + d_0) - f^n(x(0))|}{d_0} = \left| \frac{df^n}{dx}(x(0)) \right|$$

L'erreur d_n tend vers une limite, un réel λ , qui représente l'exposant de Lyapunov.

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = e^{\lambda n}$$

d'où :

$$e^{\lambda n} \cong \left| \frac{df^n}{dx}(x(0)) \right| \Rightarrow \log e^{\lambda n} \cong \log \left| \frac{df^n}{dx}(x(0)) \right|$$

par conséquent

$$\lambda \cong \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n}{dx}(x(0)) \right|$$

Finalement, en faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda \cong \frac{1}{n} \log \left| \frac{df(f^{n-1}(x(0)))}{dx} \right| = \dots = \frac{1}{n} \log |f'(x(n-1))| |f'(x(n-2))| \dots |f'(x(1))| |f'(x(0))|$$

$$\lambda \cong \frac{1}{n} \log \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x(i))|$$

on conclut :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \log |f'(x(i))| \quad (2.1)$$

avec la notation :

$$f'(x(i)) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x(i)} \quad (2.2)$$

Appliquant la formule (2.2) pour $x(i) = \bar{x}$ tel que \bar{x} est un point d'équilibre, il faut que :

$$\lambda = \log |\gamma| \quad \text{où } \gamma = f'(\bar{x}) \quad (2.3)$$

- Si $|\gamma| < 1 \Rightarrow \lambda < 0$, alors \bar{x} est asymptotiquement stable et la trajectoire issue d'une condition initiale $x(0)$ (i.e. $\{x(i)\}_{i=0}^{i=n}$) est asymptotiquement stable au voisinage de \bar{x} .
- Si $|\gamma| = 1 \Rightarrow \lambda = 0$, \bar{x} est stable et par conséquent la trajectoire issue de $x(0)$ est périodique donc stable .
- Si $|\gamma| > 1 \Rightarrow \lambda > 0$, \bar{x} est instable ainsi que la trajectoire issue de $x(0)$.

En résumé : soit $x(0)$ une condition initiale, $B(\bar{x}, \varepsilon)$ un voisinage du point d'équilibre \bar{x} .

- Si $x(0) \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ alors l'exposant de Lyapunov $\lambda = \log |\gamma|$.
- Si $x(0) \notin B(\bar{x}, \varepsilon)$ alors l'exposant de Lyapunov λ est la moyenne de divergence exponentielle donnée par :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n} \ln \left| f'(x(i)) \right|.$$

Cas des systèmes discrets multidimensionnels

Soit f une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n : $x(i+1) = f(x(i))$.

Comme précédemment on s'intéresse après m itérations à :

$$f^m(x(0) + d_0) - f^m(x) \simeq d_0 e^{m\lambda}$$

En écrivant un développement en série limitée d'ordre 1 de $f^m(x_0)$ au voisi-

nage de \hat{x} on a :

$$\begin{aligned} x(m) - \hat{x}(m) &= f^m(x(0)) - f^m(\hat{x}(0)) \\ &\simeq \frac{df^m(x_0)}{dx}(x(0) - \hat{x}(0)) \\ &\simeq J(x(0))J(x(1)) \cdots J(x(m))(x(0) - \hat{x}(0)) \\ &\simeq \prod_{i=0}^m J(x(i))(x(0) - \hat{x}(0)) \end{aligned}$$

On note : $\prod_{i=0}^m J(x(i))$ par $J^m(x(0))$, ainsi : $x(m) - \hat{x}(m) \simeq J^m(x(0))(x(0) - \hat{x}(0))$

où : $J^m(x(0))$ représente la matrice Jacobienne de $f^m(\cdot)$ au point $x(0)$. Il s'agit d'une matrice carrée $p \times p$. Si elle est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible dite matrice de passage P_p telle que :

$D_p^m = P_p^{-1} J^m P_p$ où D_p^m est la matrice diagonale des valeurs propres $q_i(f^k(x(0)))$ ($i = 1, \dots, p$) de J^m .

On définit alors les n exposants de Lyapunov de la manière suivante :

$$\lambda_i = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \log q_i(f^k(x_0)) \quad (2.4)$$

$\lambda(i)$ représente l'exposant de Lyapunov associé à la trajectoire issue de $x(i)$ dans la i^{ieme} direction.

Ainsi :

$$x(m) - \hat{x}(m) = (J(\bar{x}))^m(x(0) - \hat{x}(0)), \text{ tel que } \bar{x} \text{ est un point d'équilibre.}$$

$$\text{d'où} \quad : \quad \|x(i, m) - \hat{x}(i, m)\| = [q_i(\bar{x})]^m \|x(i, 0) - \hat{x}(i, 0)\|$$

et puisque :

$$\|x(i, m) - \hat{x}(i, m)\| = e^{\lambda(i)m} \|x(i, 0) - \hat{x}(i, 0)\|$$

on obtient

$$e^{\lambda(i)m} = [q_i(\bar{x})]^m.$$

D'où :

$$\lambda(i) = \log q_i(\bar{x}), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

Les exposants de Lyapunov permettent donc de quantifier la sensibilité aux conditions initiales mais aussi de séparer les comportements instables et/ou chaotiques des comportements stables et prévisibles. Si un exposant est strictement positif, alors la S.C.I. est très grande et le système peut être considéré comme chaotique. Par contre, s'ils sont tous négatifs ou égaux à zéro, on est en présence d'un phénomène stable ou périodique. Pour une application tridimensionnelle on peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et le signe des exposants de Lyapunov dans le tableau suivant :

| Type d'attracteur | Signes des exposants de Lyapunov |
|--------------------|----------------------------------|
| Point fixe | $(-, -, -)$ |
| Cycle limite | $(0, -, -)$ |
| Tore | $(0, 0, -)$ |
| Attracteur étrange | $(+, 0, -)$ |

Pour un système dissipatif on a : $\sum \lambda(i) < 0$ et si l'un des exposants de Lyapunov est strictement positif alors le système est considéré comme chaotique.

2.2 Entropie

L'entropie, notion introduite en mécanique statistique, en thermodynamique et dans la théorie de l'information, est définie comme la mesure du désordre d'un système ou de sa prédictibilité. Dans tout processus l'entropie reste constante ou augmente, et, si elle augmente, le processus est irréversible; par le fait que le nombre d'états possibles au final est si grand qu'il ne peut y avoir de "retour en arrière". L'entropie est considérée comme une fonction d'état d'un système croissant jusqu'à un maximum lorsque le système atteint un état d'équilibre, En guise d'exemple : un processus instable est ordonné et atteint le désordre moléculaire à l'équilibre thermodynamique si l'entropie tend à son maximum. Cherchant les liens entre information, entropie et déterminisme, Shannon, Wiener et Von Neumann ont proposé que l'entropie soit compensée par une croissance en information [21]. Au milieu des années 50, Kolmogorov proposait d'après les

travaux de J. Sinai et N.S Krylov, une définition de l'entropie appelée (entropie par unité de temps) puis rapidement (entropie de Kolmogorov). Cette entropie a la propriété d'être positive dans les systèmes dynamiques et permet de mesurer la complexité du comportement d'un tel système. A la fin des années 70, selon Robert Shaw : *" si l'ensemble des états accessibles au système varie en fonction polynomiale du temps le taux (de la quantité d'information) se rapproche de zéro et l'évolution du système demeure prévisible. Au contraire, lorsque la fonction est une exponentielle croissante du temps le système est chaotique "* [22].

Définition mathématique

La notion fondamentale de l'entropie est basée sur le calcul des états accessibles du système sous certaines considérations [36] et pour cela, Kolmogorov et Sinai ont proposé un quadrillage de l'espace des phases en des cellules élémentaires de même diamètre. Pour les systèmes dissipatifs on considère uniquement la région contenant l'attracteur, on calcule p_i , la possibilité qu'une trajectoire issue d'une cellule C_0 soit dans la i^{eme} cellule C_i tel que : M est le nombre de conditions prises dans C_0 , M_i est le nombre de points de trajectoires situées en C_i sachant que la région d'évolution est divisée en m cellules.

L'entropie S_i après n unités de temps est donnée par :

$$S_n = - \sum_{i=1}^{i=m} p_i \log p_i.$$

Le système d'équations différentielles régissant la représentation dans l'espace des phases suppose que le système soit considéré comme réversible dans le sens où aucune information n'est perdue au cours du temps. Dans les systèmes dissipatifs l'information sur les conditions initiales est perdue, si le système est chaotique, l'information est créée, c'est dans le sens qu'un ensemble d'états initiaux indiscernables (à une certaine précision ε près) sur l'attracteur aboutit de façon non prédictible à une multitude d'états finaux, on a quelque sorte un enrichissement de l'information [34 – 36]. Une variation infinitésimale des conditions initiales provoque un comportement radicalement différent du système donc un

changement de l'information que l'on a sur un système. Dans le cas d'un système parfaitement connu et modélisé même une infinité de mesures infiniment proches traitées par une puissance de calcul infinie ne suffiraient pas à empêcher une divergence exponentielle croissante entre la prévision et la réalité; c'est **la sensibilité aux conditions initiales**. Le taux de la création de l'information est mesuré par l'entropie de Kolmogorov-Sinaï (ou la K- entropie)

La K- entropie K_n après n unités de temps est définie par :

$$K_n = \frac{1}{\tau}(S_{n+1} - S_n)$$

K_n est le taux de changement de l'entropie allant de $t = n\tau$ à $t = (n + 1)\tau$ (τ : unité de temps), la valeur moyenne de la K-entropie sur tout l'attracteur (soit une long durée) divisé en des cellules de diamètre ε est donnée par :

$$\begin{aligned} K_n &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{n=0}^N (S_{n+1} - S_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0) \end{aligned}$$

la partition doit être plus fine pour que chaque cellule contienne un seul point. Cela nous permet de suivre la trajectoire point par point et ainsi faire en sorte que la K-entropie soit indépendante du choix de la partition, donc on réduit la taille des cellules en prenant $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus la description de la dynamique devant être la plus précise possible on fait tendre l'unité de temps vers 0, ce qui conduit à la définition suivante :

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0) \quad (2.6)$$

La positivité de la K-entropie renseigne sur l'état chaotique du système donc sur son imprévisibilité à long terme (des exemples ont été illustrés dans [34–36]).

La K-entropie et exposant de Lyapunov

On recouvre la région de l'attracteur par un nombre fini de cellules, N_0 est le nombre de cellules initiales évoluant après n unités de temps en N_n cellules

visitées par les trajectoires, le nombre des cellules augmente exponentiellement avec le temps et on a : $N_n = e^{\lambda_i n \tau} N_0$, λ_i exposant de Lyapunov positif dans une direction i , l'entropie est donnée par la formule précédente :

$$S_n = - \sum_{i=1}^{i=m} p_i \log p_i$$

la probabilité p_i est supposée uniforme et m désigne le nombre de cellules de la partition [34 – 36], alors : $S_n = \log N_n$.

La K-entropie est vaut :

$$\begin{aligned} K &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\tau} (S_n - S_0) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\tau} (\log N_n - \log N_0) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\tau} \log \left(\frac{N_n}{N_0} \right) \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\tau} e^{\lambda_i n \tau} \end{aligned}$$

d'où : $K = \lambda_i$.

Par conséquent ; si l'étirement se fait dans seule direction la K-entropie est donnée par l'exposant de Lyapunov positif donc : $K = \lambda_i$ et si l'étirement se fait dans plusieurs directions, soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ les exposants de Lyapunov positifs, sous certaines conditions (théorème de Pesin) [99], la K-entropie est donnée par :

$$K = \sum_{i=1}^k \lambda_i$$

2.3 Dimensions fractales

L'idée de la notion de dimension est intuitive, en particulier dans un espace à 3 ou 4 dimensions. On définit la dimension euclidienne ou topologique de plusieurs façons, ce nombre est toujours un entier. Partant du fait que deux objets sont équivalents topologiquement s'il est possible de déformer l'un vers l'autre à l'aide d'un homéomorphisme (qui préserve la connexité) la dimension topologique d'un objet devrait être préservée sous une transformation homéomorphique, et

c'est le résultat qu'a établi en 1911 Luitzen Brouwer (1881 -1966) : à savoir que la dimension topologique est un invariant topologique.

En géométrie fractale, la dimension fractale est une grandeur qui a vocation à traduire la façon qu'a un ensemble fractal de remplir l'espace, à toutes les échelles. Dans le cas des fractales, elle est non entière et supérieure à la dimension topologique.

Ainsi la notion de corps solide à 3 dimensions est considérée comme notion élémentaire, une surface à deux dimensions peut être définie comme frontière d'un corps solide, une courbe a une dimension comme frontière d'une surface (et un point sans dimension comme frontière d'une courbe).

Mais en se servant des nombres en géométrie, on utilise un repère cartésien et on exprime les coordonnées x, y, z des points de l'objet d'étude en fonction de paramètres. Le nombre minimum de paramètres nécessaires pour décrire l'objet est alors le nombre de dimensions de l'objet. Ainsi, en particulier : une courbe est un ensemble de points dont les coordonnées dépendent d'un paramètre [32 – 34].

Pour qu'un objet soit fractal, il faut et il suffit que sa dimension de Hausdorff soit supérieure à sa dimension topologique. Les attracteurs étranges sont des courbes complexes dont la dimension dite dimension fractale (car non entière) est un nombre qui quantifie le degré d'irrégularité et de fragmentation, donc de complexité.

Dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff peut être définie pour tout ensemble, mais elle n'est généralement pas aisée à calculer. Pour un sous-ensemble non-vide U d'un espace euclidien de dimension n , \mathbb{R}^n , on définit le diamètre de U , noté $diam(U)$ par :

$$diam(U) = \sup \{ \|x - y\| : x, y \in U \} \text{ où } \|\cdot\| \text{ est la distance euclidienne usuelle.}$$

Si un ensemble F est recouvert par une collection dénombrable $\{U_i\}$ de diamètre au plus δ , c'est-à-dire

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ avec } 0 < \text{diam}(U_i) \leq \delta \quad \forall i$$

on dit que $\{U_i\}$ est un δ -recouvrement de F .

Soient F un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et s un réel positif. Pour tout $\delta > 0$, on définit :

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_1^{\infty} (\text{diam}(U_i))^s : \{U_i\} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } F \right\}$$

Quand δ décroît, il y a moins de recouvrements possibles de F et $H_{\delta}^s(F)$ augmente, et donc a une limite quand $\delta \rightarrow 0$. On écrit

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F)$$

Cette limite existe pour tout sous-ensemble F de \mathbb{R}^n , et peut être 0 ou ∞ . On appelle $H^s(F)$ la mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de F .

Proposition 47 *On a donc les propriétés usuelles d'une mesure pour H^s :*

- 1) $H^s(\emptyset) = 0$.
- 2) si $E \subset F \subset \mathbb{R}^n$ alors, $H^s(E) \leq H^s(F)$.
- 3) si F_1, F_2, \dots est une suite dénombrable (ou finie) d'ensembles de \mathbb{R}^n alors

$$H^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} H^s(F_i)$$

- 4) si $F \subset \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$

$$H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F)$$

$$\text{où } \lambda F = \{\lambda x : x \in F\}$$

Définition 48 *La dimension de Hausdorff d'un ensemble F est donnée par*

$$\text{dim}_H(F) = \sup\{s : H^s(F) = \infty\} = \inf\{s : H^s(F) = 0\}$$

Dimension de Minkowski (ou Kolmogorov)

Une méthode possible est celle du recouvrement par des sphères, elle est également appelée dimension de Minkowski ou dimension box-counting, est une manière de déterminer la dimension fractale d'un sous-ensemble S dans l'espace euclidien \mathbb{R}^n ou plus généralement, dans un espace métrique.

Pour calculer cette dimension pour un ensemble S , on place cet ensemble dans un maillage (de boules) et on compte le nombre de boules nécessaires pour recouvrir l'ensemble. La dimension est calculée en observant comment ce nombre de cases évolue à mesure que le réseau (maillage) s'affine à l'infini.

Supposons que $N(\rho)$ soit le nombre de cases de côté ρ nécessaires pour recouvrir l'ensemble. Alors **la dimension de Minkowski** est définie par :

$$\text{dimension de Minkowski} = \dim_{\text{Box}}(S) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln N(\rho)}{\ln(1/\rho)} \quad (2.7)$$

Si la limite n'existe pas, alors on parle de dimension supérieure pour la limite supérieure et dimension inférieure pour la limite inférieure. En d'autres termes la dimension de Minkowski n'est bien définie que si ces deux valeurs sont égales. La *dimension supérieure* est parfois appelée *dimension d'entropie*, *dimension de Kolmogorov* ou notée **upper box**. La **limite inférieure** est parfois notée *lower box*.

La dimension de Hausdorff et la dimension de Minkowski sont liées par l'inégalité suivante :

$$\dim_{\text{Hausdorff}}(S) \leq \dim_{\text{Lower_Box}} \leq \dim_{\text{Upper_Box}}$$

En pratique on détermine le nombre de sphères nécessaires au pavage en fonction de la taille de la sphère, ϱ . En portant en échelle log-log le nombre de sphères en fonction de leurs tailles, on obtient une pente dont la valeur est égale à la dimension fractale [32 – 34].

Dimension de corrélation

L'idée principale de la dimension de corrélation est la suivante : plus un ensemble est de dimension élevée, plus rapidement le nombre de points voisins d'un point donné de cet ensemble augmentera avec la distance à ce point. Encore faut-il pouvoir évaluer le nombre des points voisins, s'ils se trouvent dans une boule de rayon donné, on fait varier après les centres des boules de même dimension dans l'espace des phases.

La fonction de corrélation détermine la probabilité de trouver deux paires de points dans une même boule de rayon r , pour des valeurs très petites de r . La fonction de corrélation évolue exponentiellement avec r dont l'exposant est la dimension de corrélation.

On doit suivre les étapes suivantes pour définir et calculer la dimension de corrélation [32 – 36] :

- 1) à partir d'une trajectoire de l'attracteur reconstruit, on choisit N points.
- 2) on fixe un point $i \in N$ points, soit le nombre, noté $N_i(r)$ de points situés dans la boule de rayon r centré sur i . On dit qu'il existe une corrélation entre les points qui sont dans la même boule ; c'est à dire deux paires de points i, j dont la distance est inférieure à r ; autrement dit : $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| < r$, sont en corrélation.
- 3) on définit la fonction de corrélation, noté $C^p(r)$, telle que p est la dimension de l'espace de reconstruction. Une telle fonction peut s'écrire :

$$C^p(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_i(r)$$

$P_i(r)$ est la probabilité de point situé à une distance inférieure à r du i^{eme} point, d'où :

$$P_i(r) = \frac{N_i(r)}{N-1}$$

par substitution dans la formule de la fonction de corrélation, on obtient :

$$C^p(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{N_i(r)}{N-1} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N N_i(r)$$

Soit encore :

$$C^p(r) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1, i \neq j}^N H(r - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)$$

$H(x)$ est la fonction d'Heavside, τ est le temps de retard et le vecteur \vec{x}_i défini par :

$$\vec{x}_i = [x(t + (i-1)\tau), x(t + (i-2)\tau), \dots, x(t + (p+i-2)\tau)]$$

La fonction de corrélation s'écrit donc :

$$C^p(r) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, i \neq j}^N H(r - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)$$

parce qu'il faut compter la somme de tous les points dans des boules centrées sur tous les points de la trajectoire, sachant que :

$$\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| = \max_k |x(t_i + k\tau) - x(t_j + k\tau)|$$

La caractérisation de l'attracteur tout entier nécessite le passage à la limite sur N .

Soit :

$$C^p(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{j=1, i \neq j}^N H(r - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|)$$

D'après la loi de puissance $N(r) \simeq r^{-\nu}$ (ν est une dimension fractale), ainsi

$$C^p(r) = kN(r), k \in \mathbb{R}$$

donc :

$$C^p(r) = kr^\nu$$

Cela signifie que le nombre de points corrélés va croître lorsque r augmente, on note d_c la dimension de corrélation, alors : $d_c = \nu$. En appliquant le logarithme à $C^p(r) = kr^{d_c}$, on obtient

$$\begin{aligned} \log C^p(r) &= \log k + d_c \log r \\ \implies d_c &= \frac{\log C^p(r) - \log k}{\log r} \end{aligned}$$

lorsque $r \rightarrow 0$, le terme $\log k$ devient négligeable devant $\log C^p(r)$ ($\log C^p(r) \rightarrow -\infty$)

On définit la dimension de corrélation d_c par :

$$d_c = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C^p(r)}{\log r} \quad (2.8)$$

Caractérisation du régime chaotique

La dimension de corrélation correspond à une mesure de la dimension de l'attracteur reconstruit du système étudié. En d'autres termes, à l'aide de cette méthode on peut calculer la dimension de l'attracteur du système étudié et ainsi déterminer s'il est construit de manière fractale.

Concrètement, la dimension de corrélation d_c est déduite de la pente de la région linéaire du graphe de la fonction $\log C^p(r) = f(\log r)$ [32 – 35]. La variation de l'exposant d_c avec la dimension p de l'espace de reconstruction, renseigne sur la dynamique du système. Dans le cas d'un comportement aléatoire, d_c augmente linéairement avec p [33]. Par contre pour un régime chaotique il existe une saturation très nette de d_c , elle devient indépendante de p , et l'attracteur correspondant est étrange. Le résultat de ce type de traitement démontre le caractère déterministe du chaos étudié, et fixe par ailleurs une borne supérieure au nombre de degrés de liberté du système.

2.4 Le chaos en physiologie

Le chaos est un sujet d'intérêt dans les systèmes physiologiques. Il est possible que le plus grand attrait du chaos pour la physiologie est la simple observation tant le phénomène physiologique est très variable et apparaissant aléatoire ou bruyant. Un système chaotique peut apparaître de cette façon aussi, mais il y a une structure sous-jacente déterministe [1].

La possibilité de mettre de l'ordre systématique dans ces phénomènes très variables est très tentant [1]. Les prochains chapitres illustreront la possibilité d'utiliser un ensemble d'outils d'analyse et de calcul afin de bien comprendre

différentes dynamiques physiologiques chaotiques, telle que la dynamique cardiaque.

D'un point de vue mathématique on observe que même les systèmes déterministes non linéaires simples peuvent présenter un comportement chaotique. Par exemple, il a été démontré qu'il existe des solutions chaotiques aux équations de la membrane cellulaire ce qui a suscité l'intérêt de trouver des démonstrations expérimentales [12,13].

Conrad [14] fournit une liste de certains rôles fonctionnels possibles pour le chaos. L'un est la production assurée de divers comportements pour un certain nombre de raisons, y compris la facilitation de l'exploration du comportement. Un autre rôle serait que le chaos est un moyen efficace métaboliquement pour générer le «bruit» ou de la variabilité, et ainsi favoriser l'entraînement des différentes structures neuronales, de manière à maintenir la flexibilité et l'adaptabilité.

Depuis que les données biomédicales peuvent être correctement acquises à l'aide de capteurs et de périphériques, l'analyse des biosignaux qui reflète une dynamique généralement complexe, a été largement abordée dans le domaine de l'analyse non linéaire. Au cours des dernières années, les méthodes dynamiques non linéaires ont été utilisées avec succès dans des applications biomédicales basées sur l'électrocardiogramme (ECG), l'électromyogramme (EMG), le magnétoencéphalogramme (MEG) et l'électroencéphalogramme (EEG). En particulier, ce travail est axé sur la dynamique cérébrale non linéaire. Comme un cerveau ainsi que les signaux EEG générés sont considérés comme des systèmes dynamiques chaotiques, des méthodes non linéaires ouvrent une nouvelle fenêtre pour comprendre la fonction cérébrale, c'est-à-dire pour analyser les propriétés dynamiques sous-jacentes à l'EEG.

Ces idées conduisent la notion d'«*attracteur hypothèse*» comme un modèle possible pour le stockage et le traitement rapide et flexible de l'information de neurones. (Des arguments similaires ont été appliqués à la variation génétique et dans la dynamique des populations : Emlen et al 1998) [15]. Certains résultats

d'études de systèmes physiologiques faites dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques permettent d'illustrer l'existence de changements de dynamiques liés à l'apparition de *pathologies*.

En physiologie cardiaque, un rythme simple et régulier (i.e. périodique) était, d'après la représentation la plus répandue, considéré comme un signe de bonne santé alors qu'un rythme désordonné (i.e. chaotique) supposait un état pathologique. Dans ce cas, la modification des paramètres de contrôle d'un système physiologique pathologique entraîne un changement de dynamique tel que le système fonctionne dans un mode sain.

L'un des espoirs de l'application récente de méthodes dynamiques non linéaires à la physiologie, et plus particulièrement à *la cardiologie*, est de fournir un cadre mathématique général qui a été plutôt absent dans ce domaine traditionnellement plutôt qualitatif (Glass, 1991) [9].

Troisième partie

**THÉORIE DU CHAOS ET
APPLICATION À LA
DYNAMIQUE CARDIAQUE**

Chapitre 3

Analyse et contrôle du système cardiaque

Au centre de ce chapitre figurent certaines des non linéarités de la dynamique de l'activité électrique du cœur et la discussion de leurs rôles dans la dynamique du rythme normal et pathologique. L'accent est mis sur la restitution du potentiel d'action cardiaque et l'alternance comme conséquence d'une *bifurcation de doublement de période qui peut provoquer la mort subite*. Le contrôle de la dynamique irrégulière de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) est effectué par deux méthodes classiques et les résultats obtenus ont fait l'objet de deux articles publiés dans "*Chaotic Modeling and Simulation Journal*", 3, pp.387-398 (2016) [108], "*Chaotic Modeling and Simulation Journal*", 1 : 91-99 (2018) [110] et d'un proceeding publié dans *10th CHAOS Conference Proceedings, 30 May - 2 June 2017, Barcelona, Spain* [109].

3.1 Dynamique non linéaire du système cardiaque

Le cœur est un système très complexe et hautement non linéaire. Son rôle prédominant est de fonctionner comme une pompe mécanique pour le système

circulatoire. Pour ce faire, à chaque battement, les cellules du cœur sont stimulées par une séquence de propagations typiques de l'activité électrique. La perturbation de ce modèle électrique peut entraîner des arythmies cardiaques. Comprendre les bases mécanistes des arythmies et appliquer de telles connaissances pour améliorer la thérapie présente l'un des plus grands défis dans le domaine de l'électrophysiologie cardiaque [37]. Cette dernière s'est fortement développée dès le début du XXe siècle avec l'invention de l'électrocardiographe, il a ensuite été possible d'enregistrer l'activité électrique à l'échelon cellulaire puis moléculaire. Les différentes techniques d'électrophysiologie cellulaire développées au cours des 50 dernières années ont, bien entendu, permis d'expliquer le fonctionnement cardiaque. Elles ont aussi permis d'identifier l'ensemble des mécanismes à l'origine des arythmies.

Les applications de l'électrophysiologie en cardiologie concernent non seulement le diagnostic (électrocardiogramme, exploration endocavitaire), mais aussi le traitement de certaines arythmies (stimulateurs cardiaques, défibrillateurs).

Dans l'électrophysiologie cardiaque, comme dans de nombreux autres systèmes physiologiques, la dynamique non linéaire se produit sur des échelles spatiales multiples : au niveau de tout le cœur, au niveau cellulaire, et sous-cellulaire (par exemple, au niveau d'un seul canal ionique) [39]. Ainsi la modélisation mathématique de cette activité électrique est possible grâce aux systèmes dynamiques. En effet cette activité n'est pas générée par des mouvements d'électrons, mais par des mouvements d'ions (sodium, potassium, calcium et chlorure) à travers des protéines, que l'on appelle canaux ioniques, localisées dans la membrane des cellules. Ces mouvements d'ions génèrent des courants sodiques, potassiques, etc... qui créent des variations de potentiel des cellules, que l'on appelle potentiels d'action. Chaque potentiel d'action déclenche une contraction. Grossièrement, ce que l'on enregistre avec un ECG, c'est la projection à la surface du corps de la somme des potentiels d'action produits par les millions de cellules qui composent le cœur.

Les arythmies cardiaques sont actuellement traitées en utilisant une ou plu-

sieurs des stratégies suivantes : traitement pharmacologique, dispositifs implantables et thérapie d'électrostimulation.

La stratégie la plus courante pour mettre fin à la fibrillation consiste à appliquer un gros choc électrique pour arrêter temporairement toute activité cardiaque, espérant qu'un rythme normal reprenne le prochain battement cardiaque [35]. Bien que le défibrillateur soit un dispositif potentiellement efficace, il a certaines limites.

Par conséquent, une approche plus subtile de ce problème est d'appliquer au muscle cardiaque des stimulations électriques de petite amplitude basées sur un algorithme de contrôle de la dynamique non linéaire. Le succès potentiel de cette approche repose sur la compréhension que le cœur en fibrillation est un système dynamique non linéaire complexe, mais déterministe [4].

Dans ce chapitre, on présente une application de deux méthodes de contrôle, qui sont la méthode (OGY) et le contrôle prédictif à retour d'état, pour stabiliser un rythme cardiaque complexe irrégulier et potentiellement chaotique.

3.1.1 Dynamique non linéaire de l'activité électrique du système cardiaque

Le cœur fait partie des organes vitaux du corps humain. Situé sur la gauche de la cage thoracique, le cœur fait environ 15 cm pour un poids avoisinant les 325 grammes. Il est constitué de quatre parties principales : l'oreillette gauche, le ventricule gauche, l'oreillette droite et le ventricule droit (Fig 3.1). Le cœur fonctionne comme une sorte de pompe naturelle. En propulsant le sang dans tout l'organisme, les battements du cœur sont ainsi responsables de la circulation sanguine. Le cœur peut être sujet à diverses maladies dont les arythmies.

La dynamique cardiaque est dite régulière si le muscle cardiaque se contracte de manière coordonnée. Dans ce cas, le cœur pompe du sang parfaitement dans tout le corps [37]. Etant donné que la contraction du muscle cardiaque est provoquée par une stimulation électrique (par un processus connu sous le nom le

couple excitation-contraction [38]), la contraction cardiaque coordonnée exige que les différentes régions du cœur soient stimulées électriquement dans une séquence spécifique.

Le courant électrique prend naissance dans le nœud sinusal, le pacemaker naturel du cœur situé dans l'oreillette droite (Fig. 3.1), cela se fait lorsque le voltage transmembranaire des cellules augmente de façon transitoire, puis diminue, sur une durée de quelques centaines de millisecondes. Ce changement de voltage est ce que l'on définit par *potentiel d'action (PA)* [37]. Ensuite, le courant électrique se propage vers le nœud auriculo-ventriculaire (Fig 3.2), excitant lors de son passage les nombreuses cellules des oreillettes et provoquant ainsi ses contractions. Traversant ce nœud, le courant progresse dans le faisceau de HIS, dans des branches de Tawara gauches et droites et les fibres de Purkinje jusqu'à la pointe du cœur provoquant ainsi la contraction des ventricules (Fig. 3.2).

3.1.2 Dynamique non linéaire de l'activité électrique de la cellule cardiaque

Le cœur comporte deux types de cellules excitables, les cellules myocardiques « communes » et les cellules automatiques. Ces cellules sont entourées et emplies d'une solution contenant des ions. Les trois principaux sont le sodium (Na^+), le potassium (K^+) et le calcium (Ca^{++}).

Quand une cellule excitable (myocardique ou automatique), est stimulée par une impulsion électrique, l'intérieur de cette cellule devient rapidement positif par rapport à l'extérieur, c'est la phase de *dépolarisation cellulaire*. Suite à ce processus, la cellule est dans l'incapacité d'être à nouveau dépolarisée : elle est en *période réfractaire absolue*. Le retour au potentiel de repos de la cellule stimulée est appelé *repolarisation*. L'enregistrement des différences de potentiel mesurées entre les milieux intracellulaire et extracellulaire pendant les processus de « *dépolarisation - repolarisation cellulaire* » correspond au Potentiel d'Action cellulaire (PA).

Au niveau cellulaire, le potentiel d'action est généré par la diffusion d'ions : le sodium Na^+ , le potassium K^+ et le calcium Ca^{++} , à travers des canaux spécialisés dans la membrane cellulaire. La conductance de la membrane des différents ions présentés dans le corps varie selon le mécanisme d'ouverture et de la fermeture des canaux. Les courants ioniques à travers les différents canaux et les transporteurs sont presque toujours une fonction non linéaire du voltage [39].

Parmi les exemples classiques de la non-linéarité dans la dynamique du potentiel d'action on peut citer l'effet de seuil dans la génération du potentiel d'action vers le haut. Dans un système linéaire, la réponse est toujours directement proportionnelle à l'entrée [39].

3.1.3 Potentiel de repos

Le potentiel de repos est de l'ordre de -80 à -90 mV. Au repos, la Différence de Potentiels (DP) entre le potentiel à l'extérieur de la cellule et le potentiel à l'intérieur de celle-ci est positive. Autrement dit, au repos, la membrane cellulaire cardiaque est légèrement et uniformément positive à l'extérieur et uniformément négative à l'intérieur. Ce potentiel de repos est dû :

À la pompe Na^+ / K^+ : qui permet de maintenir une concentration élevée de K^+ à l'intérieur de la cellule.

À la perméabilité membranaire $K^+ \gg \gg Na^+$ c'est-à-dire que le K^+ a tendance à spontanément quitter la cellule (d'où l'intérêt de la pompe Na^+ / K^+ qui permet de faire revenir le potassium K^+ dans la cellule).

Aux protéines et phosphates organiques qui sont chargés négativement et donc permettent de garder un potentiel membranaire négatif.

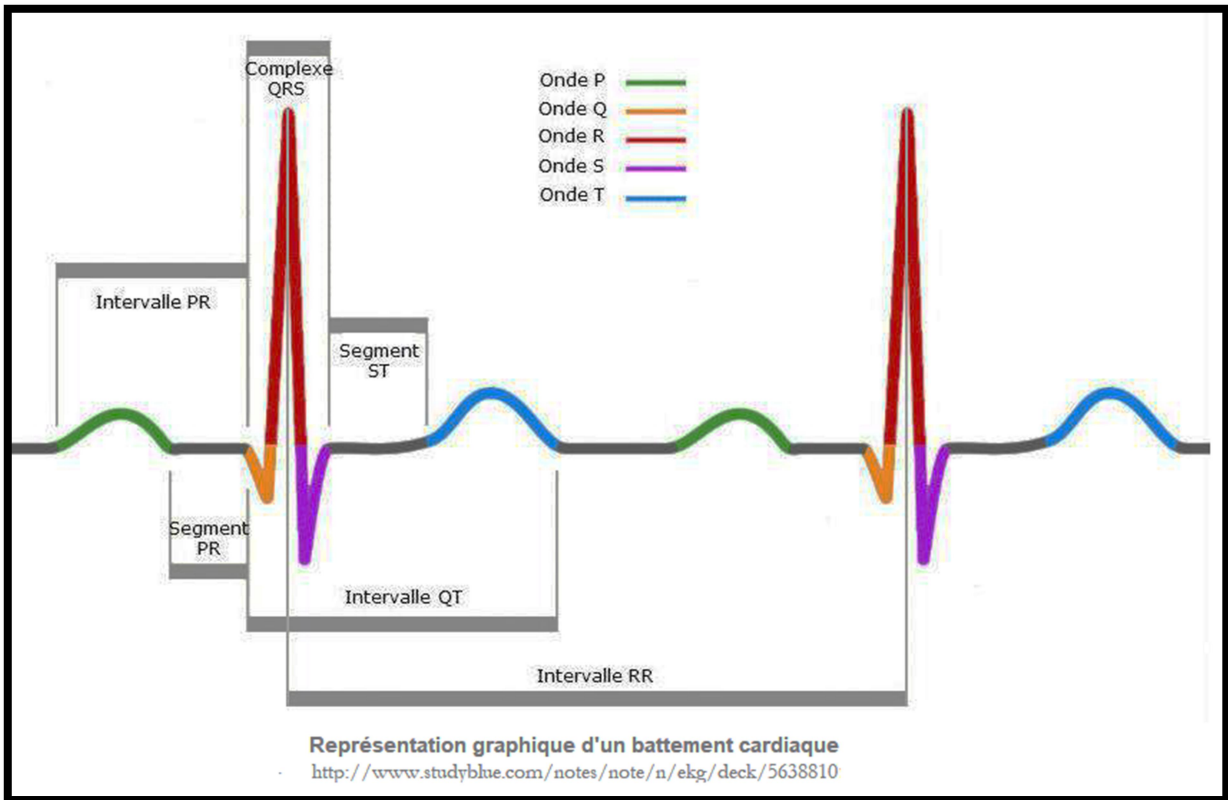
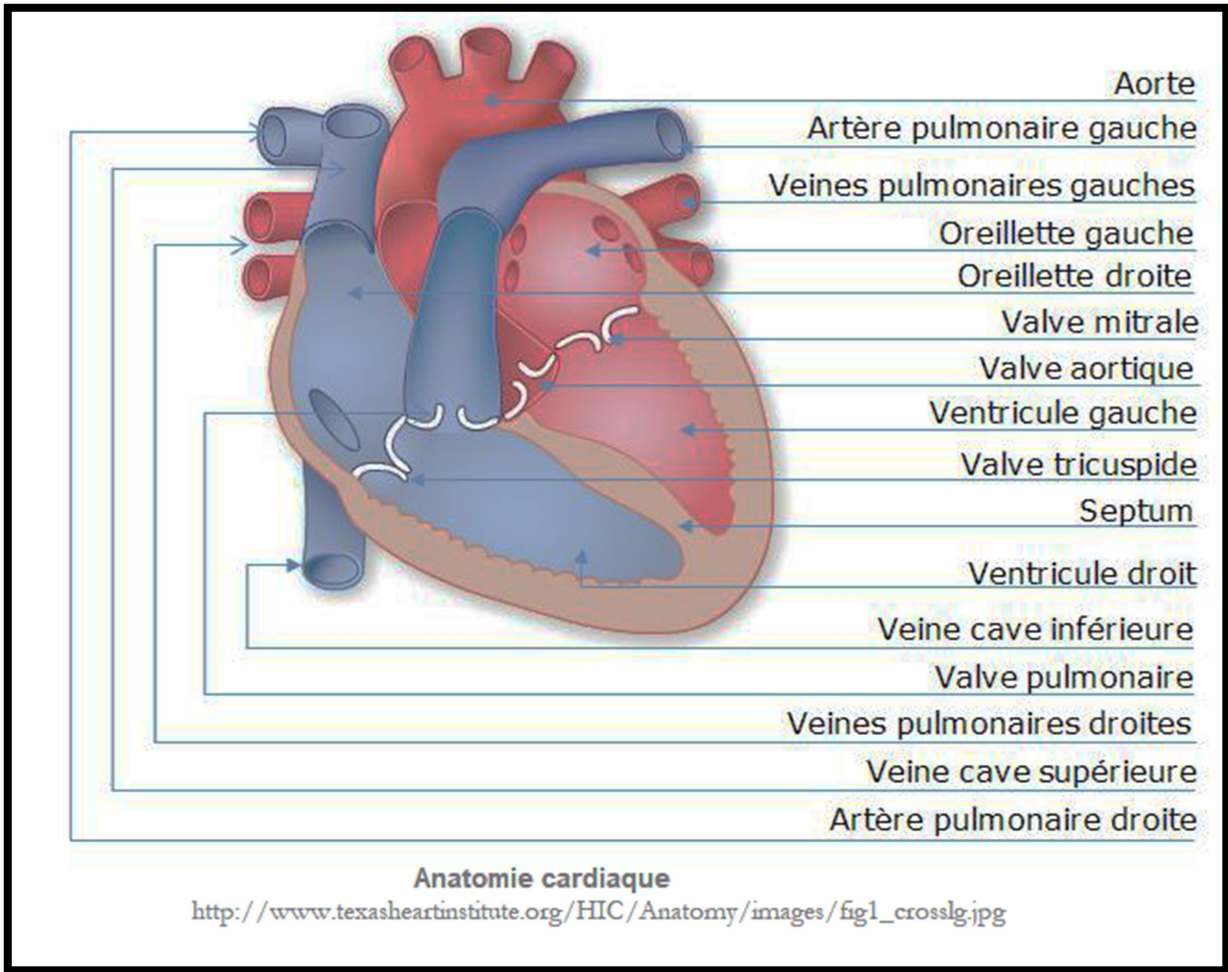


Fig. 3.1. Anatomie du cœur

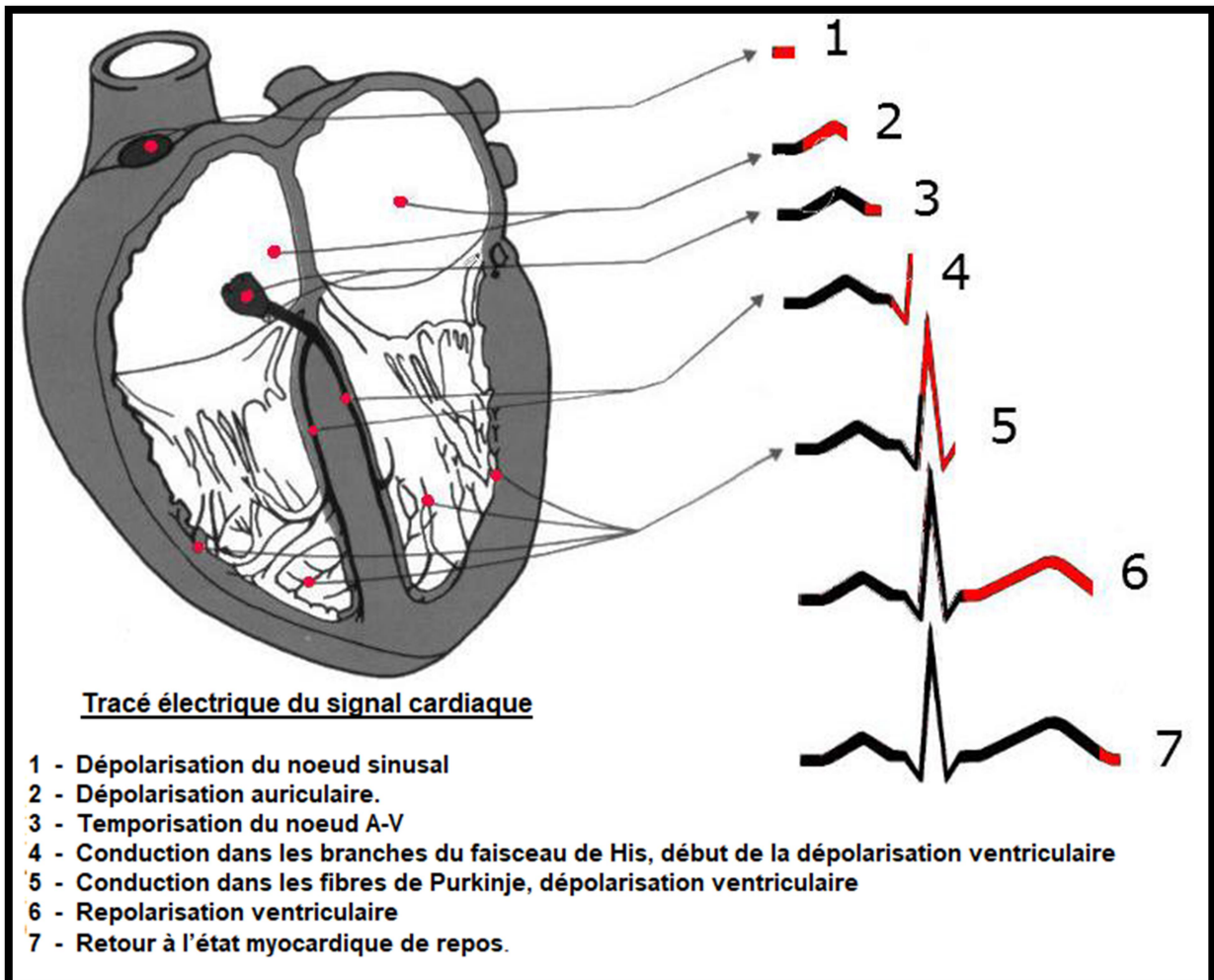
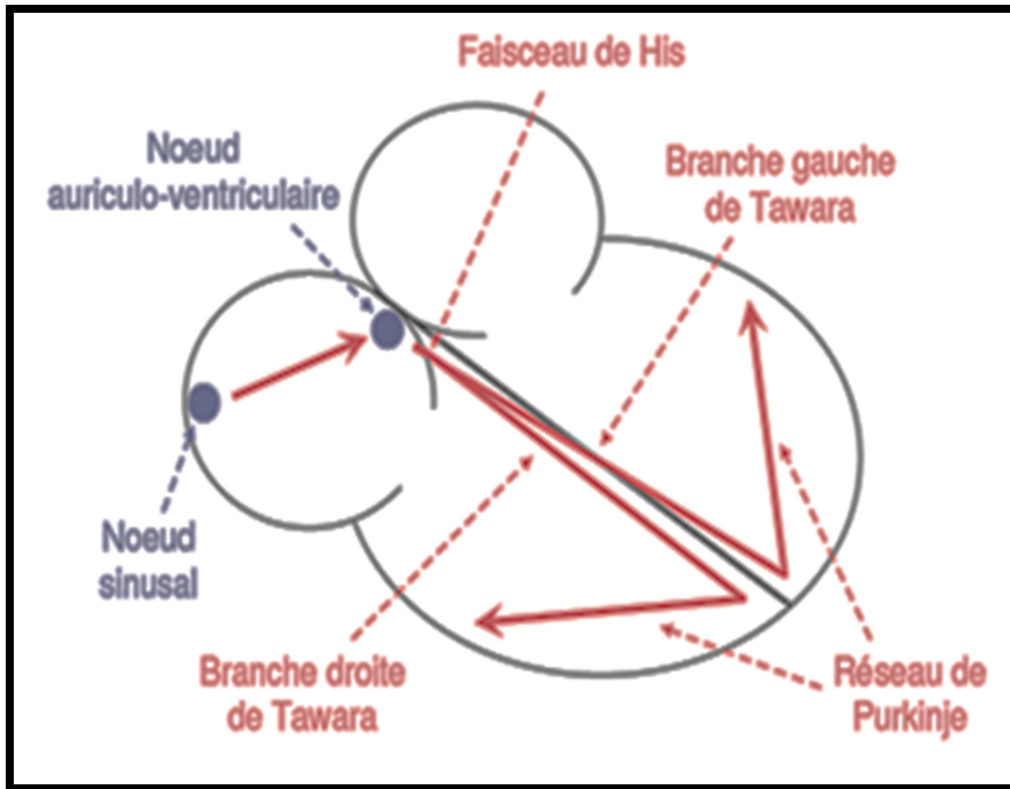


Fig.3.2. Diagramme schématique du passage de l'électricité dans le muscle cardiaque.

3.1.4 Potentiel d'action

Le potentiel d'action est un changement dans la distribution des charges ioniques entre l'extérieur et l'intérieur de la membrane cellulaire.

Lorsqu'un stimulus électrique excite une cellule cardiaque, un grand nombre d'ions pénètre dans la cellule à travers des canaux ioniques spécifiques. Ce sont principalement des canaux pour le sodium Na^+ , le potassium K^+ et le calcium Ca^{++} . La contraction du myocarde est précédée par une Différence de Potentiels (DP) négative.

Le potentiel d'action correspond à l'enchaînement "*dépolarisation*" puis "*re-polarisation*" cellulaire qu'on va décrire ci-dessous. Sur le tracé d'enregistrement d'un potentiel d'action, on peut distinguer 5 phases de la phase 0 à la phase 4 (Fig 3.3).

Phase 0 : DEPOLARISATION : elle correspond à une dépolarisation rapide avec un passage instantané du potentiel de -90 mV à +30 mV (variation de 120 mV). Ceci via l'entrée massive de Na^+ dans la cellule.

Phase 1 : REPOLARISATION INITIALE : inactivation du courant sodique rapide ce qui permet de ramener la DP membranaire au niveau de 0. Le début de la repolarisation correspond à une augmentation de la sortie d'ions de potassium K^+ .

Phase 2 : PLATEAU : la repolarisation est ralentie par l'entrée d'un courant calcique (qui va être nécessaire à la contraction), c'est le plateau du potentiel d'action. On a :

1. Entrée de Ca^{++} (qui entraîne la contraction)
2. Entrée de Na^+
3. Sortie de K^+

Phase 3 : REPOLARISATION : les canaux potassiques s'activent et permette la sortie massive d'ions K^+ (perte de charge + ce qui contribue au retour à la négativité intérieure). Les canaux Calciques, eux se ferment, donc il n'y a plus d'entrée de Calcium.

Phase 4 : POTENTIEL DE REPOS : retour au potentiel de repos initial. La cellule est à son potentiel de repos diastole.

Pour qu'une nouvelle activation se fasse il faut que le stimulus amène le potentiel de repos au dessus du potentiel seuil au-delà duquel la dépolarisation se déclenche.

Le couplage excitation-contraction entre les phénomènes électriques et la contraction des fibres myocardiques est assuré par les variations des concentrations intracellulaires du calcium Ca^{++} .

Après l'excitation d'une cellule du muscle cardiaque, aucune excitation ne devrait se produire durant une période relativement longue appelée "*période réfractaire*" (Fig 3.3). Cette période réfractaire relativement longue évite un spasme du cœur qui interrompait le flux sanguin et provoquerait la mort.

La période réfractaire est reliée à l'excitabilité en ce que la cellule est inexcitable quand le voltage est moins négatif que le seuil du potentiel. Cette période est connue comme "*la période réfractaire absolue*" (PRA) (Fig 3.3) et correspond à la phase 1 et au début de la phase 3 du décours du potentiel d'action.

L'état de période réfractaire absolue est suivi par "*la période réfractaire relative*" (PRR) (Fig 3.3) lorsque la cellule est capable de répondre à un stimulus plus fort que la normale. A mesure que le voltage de la cellule devient plus négatif à la fin de la phase 3, le potentiel transmembranaire peut ne pas avoir atteint sa valeur normale de repos mais être cependant suffisamment négatif pour qu'un stimulus puisse évoquer une réponse.

3.1.5 Restitution

Le mécanisme des canaux ioniques dépend *non linéairement* du *potentiel d'action* (PA) et du temps, ce phénomène est appelé *restitution* [36].

La restitution est généralement quantifiée par une courbe de restitution, qui représente *la durée du potentiel d'action* (APD) en fonction non linéaire de la période de repos précédente (ou intervalle diastolique (DI)) (Fig 3.4 [37]). Une telle courbe réduit la dimension élevée de la dynamique de la cellule cardiaque

en dimension 1.

L'un des premiers succès de l'application de la théorie de la dynamique non linéaire à l'électrophysiologie cardiaque a été la démonstration que l'alternance de repolarisation peut survenir en raison de la restitution non linéaire [40] comme conséquence d'une *bifurcation de doublement de période* [47].

La restitution est donnée mathématiquement par une équation itérative unidimensionnelle ($APD_{n+1} = f(DI_n)$) [37], où f est une fonction de type exponentiel. Les changements dans l'APD liés à des changements de fréquence d'excitation de la cellule peuvent être des causes déterminantes des arythmies cardiaques [41, 42].

La courbe de la restitution de l'APD est généralement monotone croissante (Fig 3.4 [37]). Cela reflète le fait que si une cellule a moins de temps de repos avant d'être excitée, son potentiel d'action sera plus court. Pendant une stimulation constante, une solution stable stationnaire apparaît, dont chaque APD (et DI) est le même que la précédente APD (et DI). Alors, pour chaque stimulation il y a une seule réponse (ou une seule APD); cela est typiquement connu comme une réponse 1 : 1 (Fig 3.5 [37]).

Si une cellule cardiaque est périodiquement excitée par une stimulation rapide (ou des stimuli qui sont très rapprochés l'un de l'autre), elle répond avec une séquence alternée de courtes et de longues durées de potentiel d'action. Cette séquence longue-courte alternés de l'APD est appelée alternance. Elle est provoquée par une contraction ventriculaire prématurée et peut causer une fibrillation ventriculaire qui peut se traduire par un arrêt cardiaque soudain [43–46]. En simplifiant, l'alternance est une dynamique périodique (ou un cycle) connu comme une réponse 2 : 2 – deux potentiels d'action de durées différentes se produisent pour deux stimuli périodiques (Fig 3.5 [37]). La pente de la courbe de restitution est un indicateur important de la présence ou de l'absence d'alternance [41]. Quand la fréquence d'excitation est suffisamment basse pour que la pente de la courbe de restitution soit inférieure à 1, une APD normale se produit (ou le rythme 1 : 1). Cependant, quand la fréquence d'excitation est suffisamment

rapide pour que la pente de la courbe de restitution soit supérieure à 1, une alternance se produit (ou le rythme 2 : 2) (Fig 3.5 [37]).

Dans le paragraphe suivant on discutera des détails des implications de l'alternance de l'APD dans les arythmies ventriculaires, tandis que les stratégies de contrôle de ces alternances seront abordées dans le prochain chapitre.

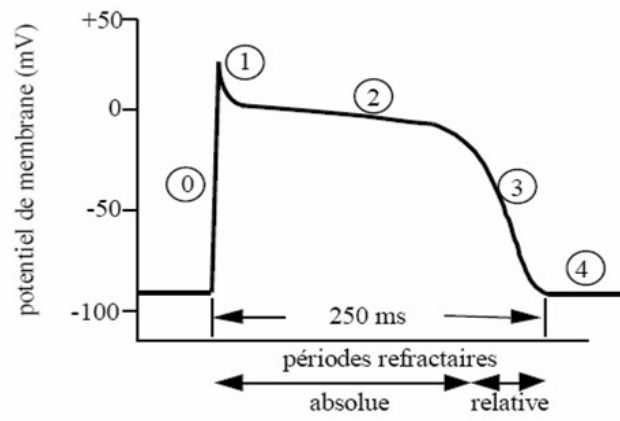


Fig. 3.3. Les phases du potentiel d'action d'une cellule cardiaque

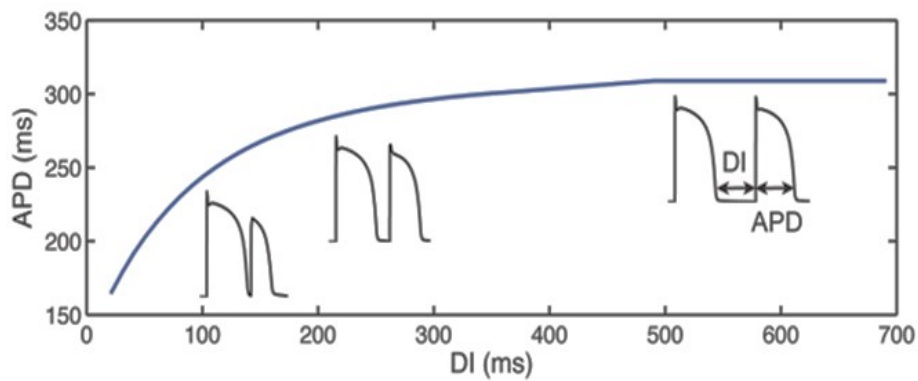


Fig. 3.4. Courbe de la restitution de la durée du potentiel d'action cardiaque [37].

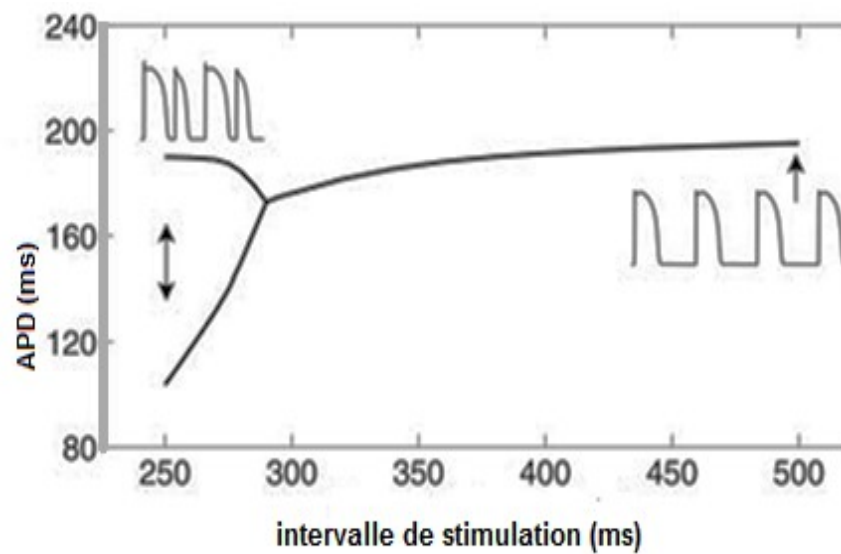


Fig. 3.5. Diagramme de bifurcation de la Durée de Potentiel d'Action Cardiaque [37].

3.2 Arythmies cardiaques

Les arythmies sont des anomalies ou des troubles pouvant affecter la fréquence, l'intensité et la régularité du rythme cardiaque. Le rythme sinusal normal $1 : 1$ du cœur peut être perturbé de façon à conduire à des types très différents d'arythmies cardiaques. Les bradycardies se manifestent par un rythme cardiaque au repos en deçà de 60 BPM, les tachycardies par un rythme cardiaque anormalement élevé, supérieur à 100 BPM, quant aux arythmies ventriculaires (respectivement supra-ventriculaires) elles prennent naissance dans les ventricules (respectivement dans la partie supérieure du cœur (oreillettes et noeud A-V)).

Les deux types d'arythmies cardiaques les plus fréquentes et potentiellement mortelles sont :

- la tachycardie ventriculaire (TV) : prenant naissance en dessous de la bifurcation du faisceau de His
- et la fibrillation ventriculaire (FV) : les ventricules du cœur n'arrivent plus à se contracter, les pulsations sont très rapides - jusqu'à 300 BPM - et totalement asynchrones au point de paralyser l'activité de pompe du cœur.

Le déclenchement des fibrillations ventriculaires n'est pas encore clairement connu. Une extrasystole ventriculaire, survenant durant la repolarisation ventriculaire peut engendrer une fibrillation ventriculaire. Comme pour le déclenchement des tachycardies ventriculaires, le phénomène de réentrée peut engendrer une FV. Dans [63] Janse met également en évidence, dans certains cas, l'implication du système de Purkinje dans le déclenchement de ce type de FV.

On comprend alors aisément que dans ces conditions, seul un choc électrique de défibrillation permet la restauration d'un rythme sinusal grâce à une resynchronisation de la dépolarisation des cellules du myocarde.

3.2.1 Réentrée

La réentrée est le mécanisme mis en jeu lorsqu'une impulsion électrique se propage à nouveau à travers un tissu qu'elle a déjà activé mais qui a récupéré son excitabilité. Les réentrées se produisent lorsque le tissu est activé plusieurs fois par une onde d'activation qui rentre encore et encore dans la même région anatomique et la réactive [37]. Autrement dit, ce mécanisme est caractérisé par le fait qu'une stimulation électrique ne s'éteint pas après activation complète du cœur mais persiste, du fait de l'existence d'une conduction très lente qui permet une réactivation du cœur une fois sorti de sa période réfractaire [43]. Ils existent plusieurs types de réentrées, on en cite deux :

Réentrée anatomique : c'est un modèle simple de réentrée, elle est illustrée dans la Fig 3.6.A [37] comme une boucle fermée, où le front d'onde d'activation, ou le signal électrique, tourne autour d'un obstacle anatomique (par exemple un tissu cicatriciel ou une valve), car ce dernier n'est pas conducteur. Les conductions lentes et les périodes réfractaires courtes favorisent donc la réentrée anatomique.

Réentrée fonctionnelle : dans l'absence d'un obstacle anatomique, il est encore possible pour le circuit de réentrée de se produire. Dans une telle situation, le front d'onde d'activation tourne autour d'une région qui peut être anatomiquement continue, mais qui est fonctionnellement discontinue (Fig 3.6.B) [37]

3.2.2 Fibrillation ventriculaire

La fibrillation ventriculaire, ou FV, c'est le tremblement des fibres musculaires du cœur dû à l'absence de contractions simultanées. Dans un tissu homogène, toutes les cellules cardiaques se comportent de la même manière. Elles se dépolarisent et se contractent presque en même temps, et lorsque les propriétés électriques diffèrent, elles se synchronisent mal et adoptent plus souvent des comportements anormaux et une dépolarisation non coordonnée.

Lorsque les cellules du tissu ont des propriétés très différentes (elles ne conduisent

pas le signal aussi vite que d'autres) au lieu d'émettre uniformément vers l'extérieur, l'onde électrique s'incurve, jusqu'à former une spirale littéralement incontrôlable. Le front d'onde retourne à son point de départ et déclenche une nouvelle dépolarisation. C'est ce qu'on appelle une réentrée fonctionnelle. Cette spirale peut se diviser en d'autres mini-spirales qui peuvent se propager dans différentes régions des ventricules, ce qui entraîne la FV, ainsi que la dépolarisation et la contraction désorganisée de différentes zones du cœur. La situation devient très dangereuse, puisque le corps, surtout le cerveau, ne reçoit plus d'oxygène, c'est ce qu'on appelle une morte subite.

3.2.3 Alternances : déclencheurs d'arythmies

L'initiation des tachycardies ventriculaires est parfois précédée par l'apparition d'alternances. Comme il est indiqué ci-dessous, il est possible que les alternances provoquent réellement l'apparition de certaines arythmies.

Dans le tissu cardiaque, les alternances peuvent se produire dans différents modèles spatiaux. Un type de modèle est l'alternance spatialement concordante, où le tissu partout présente un potentiel d'action long sur un battement et partout un potentiel d'action court sur le battement suivant [37].

Un second type de l'alternance spatialement discordante, où (au moins) une région présente un potentiel d'action long, tandis que pour le même battement une autre région présente un court potentiel d'action [37]. La démonstration de la causalité entre les alternances et l'apparition des arythmies a été démontrée dans les expériences [11, 47] et dans les simulations numériques [41, 46, 48].

3.2.4 Défibrillation cardiaque

La défibrillation cardiaque consiste en la délivrance d'un choc électrique au ventricule. Cette thérapie est délivrée par un défibrillateur cardiaque implantable (Fig 3.7), d'aspect similaire à celui d'un stimulateur cardiaque implantable composé de deux dispositifs médicaux :

- un boîtier de défibrillation.
- une sonde de défibrillation.

La défibrillation cardiaque est prescrite aux patients présentant des fibrillations ou des tachycardies ventriculaires survenant de façon épisodique, lorsque les traitements anti-arythmiques usuels sont insuffisants.

Le défibrillateur cardiaque implantable est constitué d'un boîtier de défibrillation contenant les programmes et les paramètres nécessaires à la surveillance et la détection d'anomalies du rythme cardiaque. Contrairement au stimulateur qui délivre de faibles impulsions électriques, le boîtier de défibrillation délivre un choc électrique de plus haute énergie.

En fonction du trouble identifié, différents modèles de défibrillateurs implantables sont proposés au patient.

Une sonde de défibrillation contient des fils conducteurs qui transmettent un choc électrique au muscle cardiaque en cas de tachycardie excessive ou de fibrillation ventriculaire et contient également des conducteurs de stimulation.

Elle est connectée au boîtier de défibrillation et reliée au muscle cardiaque, dans le ventricule droit. Pour certains patients, la sonde de défibrillation peut également remplir la fonction de sonde de stimulation. Ainsi une sonde de défibrillation pourra à la fois délivrer de faibles impulsions électriques à un patient stimulo-dépendant et délivrer un choc électrique en cas de tachycardie importante ou de la fibrillation ventriculaire.

Pour défibriller, il faut par conséquent arrêter ou bloquer les boucles de ré-entrée dont il existe un très grand nombre en FV. Pour cela, il faut faire en sorte que le front d'excitation (Fig 3.8) de la boucle de ré-entrée rencontre des cellules qui sont à l'état excité et de ce fait réfractaires à une nouvelle excitation. L'utilisation d'une énergie trop forte risque de léser le myocarde ; à l'inverse, une énergie trop faible peut être inefficace [49].

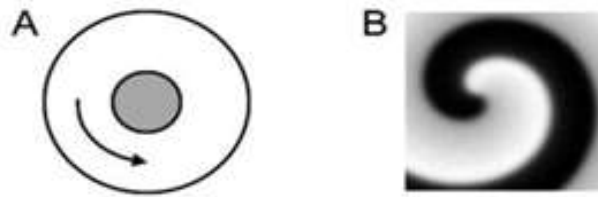


Fig. 3.6. Schéma illustratif de la réentrée anatomique (A) et fonctionnelle (B) [37]

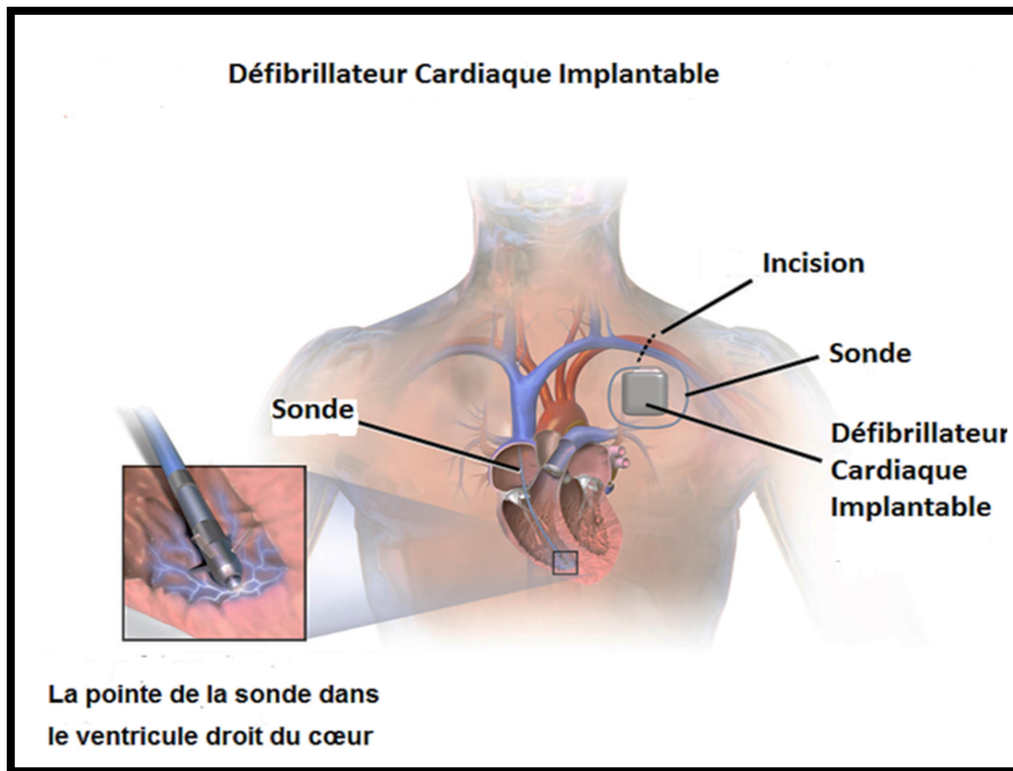


Fig.3.7.

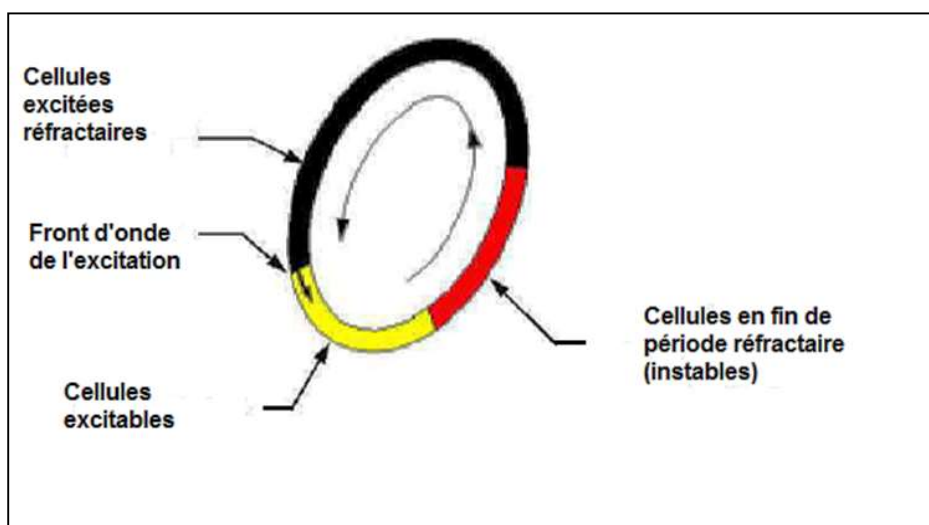


Fig. 3.8. Boucle de réentrée [49]

3.2.5 Exemple illustratif

L'application des concepts mathématiques rigoureux de la dynamique non linéaire peut s'avérer difficile dans le contexte de la biologie, plus particulièrement la physiologie, en raison par exemple de fluctuations aléatoires intrinsèques (non maîtrisées) pouvant provenir d'une variété de facteurs tels que les variations thermiques ou l'ouverture des canaux ioniques transmembranaires. Ainsi, même s'il est souvent pratique de se référer à des points fixes et à des cycles en physiologie, il y a invariablement une fluctuation intrinsèque des comportements qui ne sont pas présents dans un modèle mathématique déterministe du système physiologique [50].

L'exemple choisi pour illustrer l'intérêt des concepts de la dynamique non linéaire comme les points fixes, les oscillations, le chaos, la stabilité et les bifurcations est celui du "défibrillateur". Certains patients, qui risquent la mort soudaine suite à la fibrillation ventriculaire, subissent l'implantation de défibrillateurs cardiaques décrits précédemment. Ces dispositifs détectent la fibrillation ventriculaire si elle est présente, et délivrent un choc directement au cœur pour restaurer le rythme sinusal normal. Cependant, afin de tester si ces appareils fonctionnent, le cardiologue délivre une série de chocs électriques importants directement au cœur du patient qui convertit le rythme sinusal normal en fibrillation, puis le dispositif délivre un choc pour convertir la fibrillation ventriculaire au rythme sinusal normal (Fig 3.9) [50].

Au début de l'enregistrement, le cœur du patient est dans le rythme sinusal normal. Le rythme sinusal est un cycle localement stable représenté par un ECG périodique, puisqu'une petite perturbation, telle qu'un petit choc électrique sur le cœur, laisserait le cœur toujours au rythme normal. Il s'agit également d'un rythme structurellement stable, puisqu'une petite modification de la structure du cœur du patient peut être induite, par exemple par un traitement médicamenteux qui modifie certaines propriétés électriques du cœur sans en changer le rythme. Suite à une série de chocs électriques importants sur le cœur, ce dernier est en

fibrillation. On s'interroge alors si ce rythme irrégulier est chaotique. Dans le cas où ce rythme de fibrillation persiste sur un temps assez long (ce qui n'est heureusement pas le cas sur l'illustration) alors la mort survient.

La persistance de cette dynamique dans le temps impliquerait l'existence d'un *point fixe*.

Dans cet exemple, le rythme normal et la fibrillation sont des comportements *localement stables*. Ainsi, un système dynamique donné peut présenter deux ou plusieurs comportements localement stables, c'est-à-dire qu'il peut y avoir une *bistabilité* ou une *multistabilité* [50].

D'un point de vue dynamique, on doit supposer que les patients à risque de mort subite présentent des anomalies. Ces anomalies dans l'anatomie ou la physiologie de leur cœur font que certains changements de paramètres conduisent à une *bifurcation* dans la dynamique [50].

Le rythme normal peut alors ne plus être localement stable et peut être remplacé par le rythme anormal et potentiellement mortel de la fibrillation ventriculaire. Une dernière subtilité : bien que le rythme sinusal semble être périodique dans le temps et représente un cycle, il y a habituellement des fluctuations dans le temps entre les battements cardiaques normaux, et il est possible que ces fluctuations soient chaotiques [50].

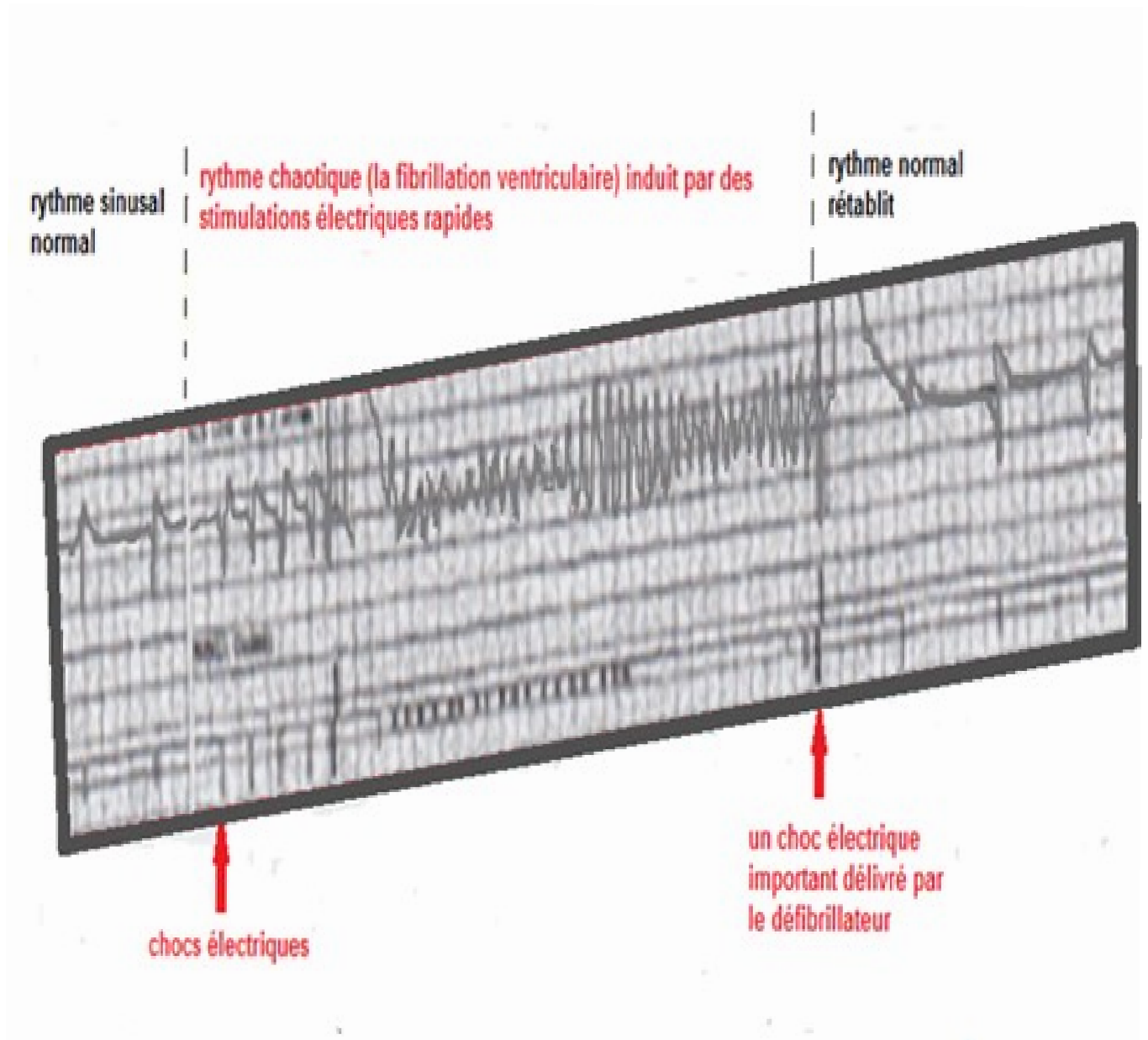


Fig. 3.9. Des traces montrant le test d'un défibrillateur implantable. La trace à gauche montre le rythme sinusal normal. Une série de chocs délivrés au cœur à la première flèche induit une fibrillation ventriculaire.

Le défibrillateur implantable détecte le rythme anormal et délivre automatiquement un choc important, la seconde flèche, qui rétablit le rythme normal.

Cet enregistrement illustre le concept selon lequel le cœur humain peut supporter deux états dynamiquement stables différents : le rythme normal et la fibrillation ventriculaire. Un tracé fourni par le laboratoire d'électrophysiologie cardiaque de Harvard-Thorndik, Beth Centre médical Israël Diaconesse, Boston, MA [50]

3.3 Dynamique itérative de l'APD sans mémoire

Lewis et Guevara [69] ont simulé l'effet d'une stimulation périodique sur un brin du muscle ventriculaire en intégrant numériquement l'équation unidimensionnelle du câble en utilisant le modèle Beeler-Reuter pour représenter les courants transmembranaires. Ainsi, il leur a été possible de réduire directement la prise en compte de la dynamique d'une équation aux dérivées partielles (de dimension infinie) à celle d'une application unidimensionnelle, démontrant incidemment que les concepts du domaine de la dynamique non linéaire - tels que les bifurcations avec doublement de période, la bistabilité, les dynamiques chaotiques - peuvent expliquer les phénomènes observés dans les simulations numériques de l'équation du câble.

On considère d'abord un système itératif unidimensionnel simple qui **ne contient pas de mémoire**. Ce système itératif de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) est proposé dans [69], est défini par :

$$\begin{aligned} x(i+1) &= f(x(i)), \quad i \in \mathbb{N} \\ x(i+1) &= A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right), \quad (3.1) \\ x(i) &\in [0, 270 \text{ ms}], \end{aligned}$$

où $x(i+1)$ est l'APD (la durée du potentiel d'action cardiaque) généré par la $(i+1)^{\text{ème}}$ stimulation, et soit n le paramètre de blocage dans la production d'un potentiel d'action cardiaque à la condition que $(nt_s - x(i+1)) \geq DI_{\min}$. Les constantes : $A, B_1, B_2, \tau_1, \tau_2, DI_{\min}$ sont liées aux contraintes électrophysiologiques du cœur définies dans [69] :

$$A = 270 \text{ ms}, B_1 = 2441 \text{ ms}, B_2 = 90.02 \text{ ms},$$

$$\tau_1 = 19.6 \text{ ms}, \tau_2 = 200.5 \text{ ms}, DI_{\min} = 53.5 \text{ ms}.$$

La propagation unidimensionnelle du potentiel est modélisée à partir de l'équation du câble. Donc, cela pourrait être considéré comme la modélisation du

potentiel d'action (PA) se déplaçant vers l'extérieur uniformément à travers un morceau tridimensionnel du myocarde ventriculaire de l'endocarde à l'épicarde. Il pourrait également être vu comme le PA se déplaçant du bas d'un muscle papillaire vers le haut.

Les effets d'une stimulation périodique sur un petit morceau (c'est-à-dire suffisamment petit pour être un point) de muscle ventriculaire ont été investigués expérimentalement par Lewis et Guevara [69]. Les stimulations électriques appliquées à des intervalles de temps réguliers, notés (t_s) (ou appelé parfois la longueur de cycle de base, noté BCL) ont généré un potentiel d'action (PA). A des valeurs de (t_s) arbitraires, la durée actuelle d'un potentiel d'action donné (APD) est donnée par la précédente dans l'équation (3.1).

Le rythme $N : M$ ($N \geq 1, M \geq 0$) est périodique avec une période égale à Nt_s qui contient les cycles $N : M$, chacun présentant N stimulations et M potentiels d'action ou M battements.

Sous une faible stimulation, la réponse du tissu cardiaque est similaire à chaque stimulation (chaque stimulus donne un potentiel d'action de durée égale) pour les longs intervalles de stimulation (fréquence de stimulation lente) (Fig 3.10 (a)). Ce rythme sinusal normal est noté $1 : 1$, c'est le point d'équilibre (ou le rythme d'une seule période) de système itératif de l'APD, où le premier 1 indique un stimulus et le second 1 indique un battement ou une réponse.

Lorsque l'intervalle de stimulation diminue (stimulation plus rapide), le rythme $1 : 1$ devient instable et on a une transition vers l'alternance (le rythme de 2 périodes) noté $2 : 2$. Pour les rythmes considérés ici $1 : 1$ et $2 : 2$, la relation de stimulation entre APD et l'intervalle diastolique (DI) est

$$DI(i + 1) = nt_s - x(i),$$

où t_s est le paramètre de stimulation.

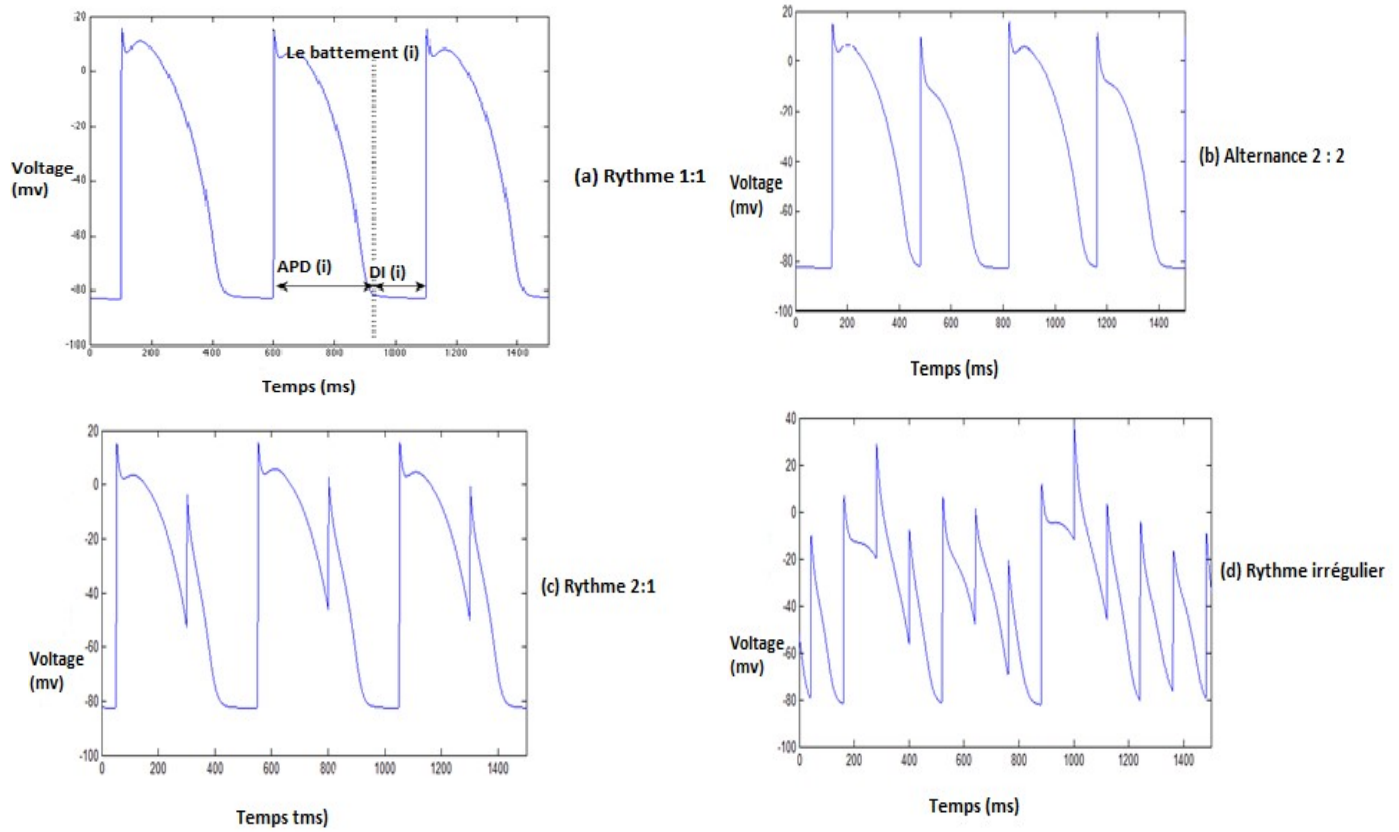


Fig. 3.10. Réponses du modèle de câble unidimensionnel (Modèle de Beeler-Reuter) à une stimulation périodique. (a) réponse 1: 1, (b) réponse 2: 2, (c) réponse 2: 1, (d) réponse irrégulière. (APD : Durée du potentiel d'action, DI : Intervalle diastolique).

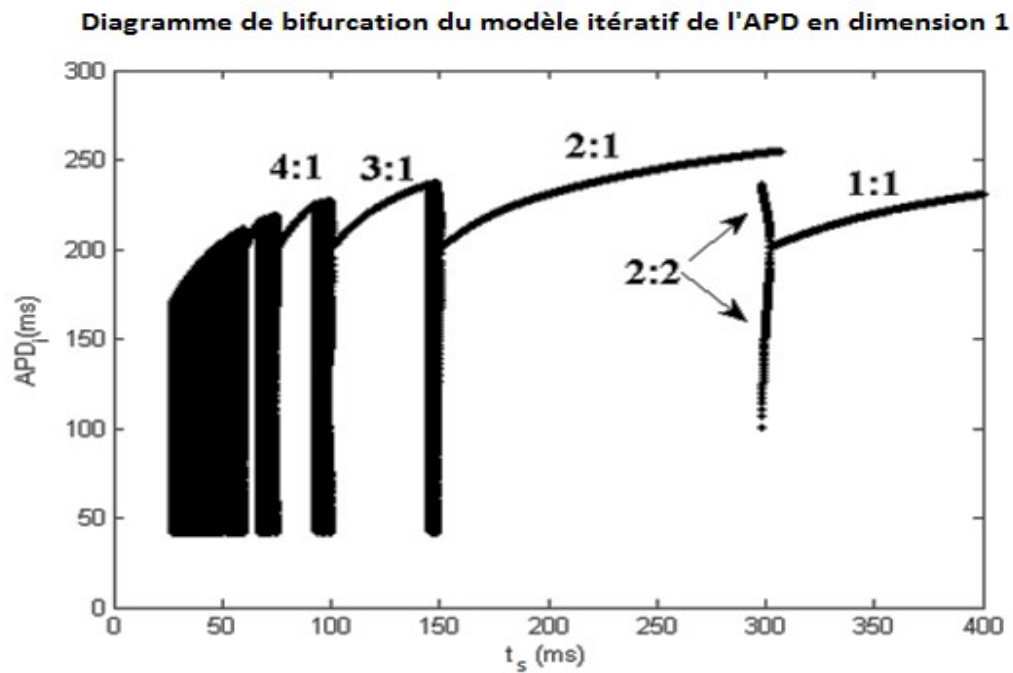


Fig. 3.11. Diagramme de bifurcation extrait de [69]

L'oscillation de l'APD entre deux valeurs est qualifiée d'alternance. En particulier, battement -à- battement l'intervalle long de l'APD est encore suivi par l'intervalle court (Fig 3.10 (b)). Le rythme 1 : 1 devient instable via une bifurcation avec doublement de période [69]. En augmentant encore la fréquence, le rythme 2 : 2 perd sa stabilité, générant un autre rythme d'une seule période 2 : 1 (Fig 3.10 (c)). Pour les autres rythmes périodiques de 2 périodes, notées $2N : 2$ avec ($N > 1$), il apparaît deux potentiels d'action différents qui alternent, mais sur l'intervalle des valeurs de t_s , les fréquences de stimulation pour lesquelles on voit deux rythmes $2N : 2$ différents, ne sont pas identiques. En outre, les valeurs de l'APD rencontrées au cours de ces deux intervalles de stimulation sont également différents.

Pour le rythme périodique 4 : 2, qui est le doublement de la période du rythme de 2 : 1, on a les deux potentiels d'action qui sont séparés par un battement bloqué (voir la figure 1 (d) dans [69]), ce qui ne se produit pas en situation d'alternance (c.a.d. le rythme de 2 périodes 2 : 2). De même, il existe un doublement de période sur le diagramme de bifurcation du rythme normal 3 : 1 au rythme de 2 périodes 6 : 2, et pour la forme d'onde du voltage, on voit qu'il y a une alternance dans l'APD. Ces deux potentiels d'action sont séparés par deux battements bloqués, ce qui n'est pas le cas en situation d'alternance (c'est-à-dire, le rythme 2 : 2) [67]. Il est également important de noter qu'en démarrant les itérations à partir d'une condition initiale arbitraire de l'intervalle $[0, 270 \text{ ms}]$, le rythme irrégulier complexe (le chaos) (Fig 3.10 (d)) n'apparaît que lorsque le rythme 4 : 2 perd sa stabilité.

La Fig 3.11 illustre un diagramme de bifurcation typique [69].

Comme la fréquence de la stimulation dans la Fig 3.11 est augmentée, la séquence de bifurcation des rythmes pour toute condition initiale $x(1) \leq 248 \text{ ms}$

est donnée par

$$\begin{aligned} \text{séquence} &= \{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 6 : 1 \rightarrow \text{chaos total}\} \end{aligned}$$

et pour toute condition initiale $x(1) > 248 \text{ ms}$ on voit la séquence suivante de bifurcations :

$$\begin{aligned} \text{séquence} &= \{1 : 1 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 6 : 1 \rightarrow \text{chaos total}\} \end{aligned}$$

Ces deux séquences montrent que la bistabilité (présence de deux rythmes différents à une fréquence de stimulation fixe) est présente dans le modèle (3.1) : la bistabilité entre deux rythmes 1 : 1 et 2 : 1, et la bistabilité entre deux rythmes 2 : 2 et 2 : 1.

3.4 Aperçu de la théorie du contrôle

Le concept de «*contrôle*» est associé à l'idée de mettre en œuvre des actions pour garantir qu'un système se comporte comme il est souhaité. La Nature est prodigue en présentant des stratégies de contrôle sophistiquées qui régulent les phénomènes qui se produisent dans toutes les échelles de temps et d'espace. Une étude minutieuse et systématique effectuée sur les mécanismes que la Nature utilise pour le contrôle de systèmes révèle qu'ils sont basés sur les concepts suivants : la stabilité, la rétroaction et la flexibilité [37] .

1. **La stabilité** : qui peut être définie comme la capacité du système à fonctionner correctement même lorsque des perturbations agissent sur lui. C'est l'objectif principal à atteindre par la stratégie de contrôle intégrée dans le système. Chaque système est censé fonctionner correctement dans des régions bien définies. Pendant son fonctionnement à vie, un système subit

toutes sortes de perturbations internes et externes. Afin de continuer son fonctionnement approprié, un système doit être suffisamment stable à ces perturbations.

2. **La rétroaction** : qui peut être définie comme le mécanisme par lequel une partie de la sortie du système est retournée pour être utilisée comme entrée de la stratégie de contrôle, fournissant une autorégulation. Grâce à ce mécanisme, un système se régule en surveillant sa propre sortie pour le maintenir stable et fonctionner correctement.
3. **La flexibilité** : est une propriété exploitée par les stratégies de contrôle présentées dans la Nature. L'idée derrière ce concept est qu'il n'est pas nécessaire de stresser le système et de le conduire brutalement au point de fonctionnement souhaité immédiatement ou directement. En revanche, il est plus efficace, fiable et réalisable de contrôler le système en le laissant fluctuer et éventuellement changer sa dynamique le moins possible pour le conduire à l'état souhaité sans appliquer de forces intenses.

Contrôle de la dynamique chaotique

1. La dépendance sensible à l'état initial est la principale caractéristique du comportement chaotique. Cela signifie que cette caractéristique implique également qu'une trajectoire chaotique est extrêmement sensible à l'effet des perturbations. Ainsi, il suffit d'une petite perturbation appliquée à un instant donné pour modifier l'évolution future de la trajectoire, en se dirigeant vers d'autres régions de l'ensemble invariant chaotique.
2. Une autre caractéristique clé du système chaotique est qu'il y a une variété infinie de comportements qui y sont intégrés. Un système chaotique contient une orbite dense sur l'ensemble invariant, qui est une trajectoire chaotique qui passe de façon récurrente infiniment près de n'importe quel point de cet ensemble.
3. Une troisième caractéristique est que l'attracteur chaotique invariant contient

un nombre infini d'orbites périodiques instables de toutes les périodes, qui coexistent avec le mouvement chaotique.

Il y a beaucoup de raisons pratiques pour contrôler le chaos. Dans certaines situations un comportement chaotique n'est pas souhaitable et dégradera les performances du système entier. Naturellement, le chaos devrait être réduit autant que possible, ou complètement supprimé. Cependant, des recherches récentes ont montré que le chaos peut être utile dans certaines circonstances.

Un attracteur étrange est généralement intégré dans un ensemble dense de cycles limites instables, si l'un quelconque de ces cycles limites peut être stabilisé, il peut être souhaitable de stabiliser celui qui caractérise une certaine performance maximale du système [19].

Le mélange de fluides est un exemple typique dans lequel le chaos est non seulement utile mais aussi très important. Lorsque deux fluides doivent être soigneusement mélangés et que l'énergie requise doit être minimisée, il est souhaitable que le mouvement des particules des fluides soit fortement chaotique, car sinon, il est difficile d'obtenir des propriétés de mélange rigoureuses [19].

La sensibilité des systèmes chaotiques aux petites perturbations peut être utilisée pour orienter rapidement les trajectoires du système vers une cible désirée. Les scientifiques de NASA, utilisant la sensibilité du problème à trois corps de la mécanique céleste à de petites perturbations, ont utilisé de petites quantités d'hydrazine résiduelle pour envoyer le satellite ISEE-3 / IEC à plus de 50 millions de miles à travers le système solaire, qui a réalisé la première rencontre scientifique cométaire [23]. Cela n'aurait pas été possible dans un système non chaotique, car un grand effort de contrôle aurait été nécessaire pour diriger rapidement la trajectoire du système vers des cibles éloignées.

Pendant longtemps, les systèmes chaotiques ont été considérés comme imprévisibles et incontrôlables : imprévisibles, parce qu'une petite perturbation dans les conditions initiales ou les paramètres d'un système chaotique produit des changements du mouvement original qui croissent exponentiellement ; incontrôlable, car de petites perturbations conduisent généralement à d'autres états

chaotiques mais pas à un mouvement stable et régulier [24]. Cependant, la nécessité de contrôler le chaos, qui est soit la demande d'applications industrielles ou l'intérêt académique, devient plus forte que jamais. Le premier article sur le contrôle du chaos a été publié en 1989 [24], mais c'est l'article de Ott, Grebogi et Yorke [27] qui a attiré le plus d'attention avec leur méthode désormais appelée méthode OGY.

Au début, le but du contrôle du chaos était d'éliminer le mouvement chaotique nuisible. Une caractéristique remarquable qui distingue les systèmes chaotiques des autres systèmes non linéaires est que généralement un système chaotique a au moins un attracteur chaotique. Ainsi, la clé du problème est de savoir comment utiliser l'attracteur dans la procédure de conception du contrôleur. La méthode OGY est basée sur une telle idée : pour un voisinage d'un point situé sur l'attracteur étrange, il y a toujours une orbite périodique, qui peut être stable ou instable, passant par le voisinage. Ainsi, si l'on règle légèrement les paramètres du système chaotique de sorte que la trajectoire est déplacée sur l'orbite périodique, alors, à partir de ce moment, la trajectoire reste le long de l'orbite périodique. En raison de la limitation de la méthode OGY, car adaptée seulement au cas de faible dimension où les points d'équilibre du système chaotique considéré sont des points selles et où les variables d'état observées ne sont pas contaminées par le bruit, certaines méthodes "OGY modifiées" ont été proposées [28 – 30]. Dans la nature, la méthode OGY est une méthode locale. On peut attendre longtemps avant que la trajectoire ne passe dans le voisinage où le contrôle sera déclenché. Cependant, à cause de l'ergodicité du mouvement chaotique sur l'attracteur, il y a toujours un instant où la trajectoire sera dans le voisinage. Pour raccourcir le temps d'attente, une méthode de ciblage a été proposée permettant de diriger très rapidement la trajectoire du système chaotique dans le voisinage ciblé [23]. Mais parfois, il est difficile d'obtenir les paramètres d'un système chaotique. Même si ces paramètres peuvent être obtenus, il est difficile de les ajuster en tant qu'entrées de contrôle. Ainsi, on utilise la méthode de contrôle de feedback continu. Une question se pose quand un feedback continu

est utilisé : la structure topologique de l'attracteur chaotique sera-t-elle détruite par le feedback continu ? Actuellement, on peut répondre à la question de la façon suivante : si tous les ensembles invariants d'un système chaotique sont des ensembles invariants hyperboliques, alors la petite perturbation ne détruira pas la structure topologique de son espace d'états [31]. On sait que de nombreux systèmes chaotiques ont des ensembles invariants hyperboliques. Par conséquent, au moins pour ces systèmes, la méthode de contrôle par feedback continu est réalisable. Les études menées au cours de la dernière décennie montrent que presque toutes les méthodes qui fonctionnent bien pour les problèmes de contrôle non linéaires conventionnels peuvent être utilisées pour supprimer le chaos (voir [32] et les références qui s'y trouvent).

L'un des principaux objectifs de la maîtrise du chaos est d'orienter la trajectoire d'un système chaotique vers un système périodique. Ainsi, la première étape de la procédure de contrôle consiste à identifier ces orbites périodiques.

En pratique on identifie les orbites périodiques des systèmes à temps discret par des méthodes numériques. Les itérations d'un système à temps discret ne peuvent conduire qu'à des orbites périodiques stables. Pour les orbites périodiques instables (UPOs), la méthode d'itération perd son efficacité car même si un point se trouve actuellement sur un UPO, à l'instant suivant de l'évolution il va dévier de l'UPO en raison de petites erreurs causées par le calcul ou par la mesure [19].

3.5 Contrôle de l'itération chaotique de l'APD sans mémoire

3.5.1 La méthode (OGY)

Le contrôle du chaos est basée sur l'observation qu'un attracteur chaotique contient un ensemble infini d'orbites périodiques instables de toutes les périodes [115, 29]. En s'appuyant sur l'ergodicité [116], une autre propriété intrinsèque du

comportement chaotique, on attend un passage naturel de la trajectoire chaotique proche du comportement périodique désiré, puis une petite perturbation de contrôle judicieusement choisie est appliquée. Cette petite perturbation suffit à stabiliser le système dans le comportement périodique souhaité. De plus, l'algorithme du contrôle doit être rapide, non destructif et durable dans le temps.

Principe de la méthode

On considère le système suivant :

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p \quad (3.2)$$

où μ représente le paramètre du contrôle.

La section de Poincaré du système est représentée par :

$$x(i+1) = \Pi(x(i), \mu), \quad x(i) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

tel que Π est l'application de premier retour.

Chaque point périodique dans la section représente un UPO (unstable periodic orbit) du flot.

Soit x^* un point fixe dans la section de Poincaré

$$x^* = \Pi(x^*, \mu^*) \quad (3.3)$$

où μ^* représente la valeur nominale du paramètre.

La stratégie de contrôle va donc consister à trouver une loi de contrôle de stabilisation par retour d'état, définie au voisinage de l'orbite choisie. Le système étudié présente un phénomène chaotique, le passage au voisinage du point fixe est donc garanti. Une fois que le système est dans le voisinage de x^* la procédure du contrôle est déclenchée pour amener le système vers l'orbite désirée.

Dans ce cas on a :

$$\delta x(i+1) = x(i) - x^* \quad (3.4)$$

et

$$\delta \mu(i+1) = \mu(i) - \mu^* \quad (3.5)$$

On linéarise le système au voisinage du point x^*

$$\delta x(i+1) = A\delta x(i) + B\delta\mu(i) \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial \Pi}{\partial x}(x^*) \\ B &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mu}(\mu^*) \end{aligned}$$

La matrice A est la *matrice de Floquet* et représente deux directions propres, une direction stable e_s (module de valeur propre <1) et une direction instable e_u (module de valeur propre >1).

Donc, les corrections sont appliquées sur la direction instable.

Si on utilise les notations suivantes :

λ_s : valeur propre stable $\|\lambda_s\| < 1$.

λ_u : valeur propre instable $\|\lambda_u\| > 1$.

e_s : vecteur propre correspond à la valeur propre stable λ_s .

e_u : vecteur propre correspond à la valeur propre instable λ_u

Alors la matrice A peut s'écrire sous la forme :

$$A = \lambda_s e_s \Pi_s + \lambda_u e_u \Pi_u \quad (3.7)$$

Où Π_s et Π_u représentent les vecteurs covariance avec

$$\text{et } \begin{cases} \Pi_s e_s = \Pi_u e_u = 1 \\ \Pi_u e_s = \Pi_s e_u = 0 \end{cases}$$

Alors, l'équation (3.6) devient :

$$\delta x(i+1) = [\lambda_s e_s \Pi_s + \lambda_u e_u \Pi_u] \delta x(i) + B\delta\mu(i) \quad (3.8)$$

Et en multipliant (3.8) par Π_u , on obtient :

$$\Pi_u \delta x(i+1) = \Pi_u [[\lambda_s e_s \Pi_s + \lambda_u e_u \Pi_u] \delta x(i) + B\delta\mu(i)] \quad (3.9)$$

La stratégie de la méthode OGY consiste à ajuster le paramètre du contrôle μ , afin de stabiliser le système sur le point x^* . Il faut donc que

$$\delta x(i+1) = 0.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\Pi_u [\lambda_s e_s \Pi_s + \lambda_u e_u \Pi_u \delta x(i) + B \delta \mu(i)] &= 0 \\ \Rightarrow \Pi_u \lambda_u \delta x(i) + \Pi_u B \delta \mu(i) &= 0\end{aligned}\quad (3.11)$$

C'est-à-dire que l'ajustement sur le paramètre du contrôle va être égal à :

$$\delta \mu(i) = \frac{-\Pi_u \lambda_u}{\Pi_u B} \delta x(i) \quad (3.12)$$

Si on pose :

$$K = \frac{-\Pi_u \lambda_u}{\Pi_u B}$$

Alors, on obtient

$$\delta \mu(i) = K \delta x(i) \quad (3.13)$$

Le but du contrôle est de satisfaire la condition suivante :

$$\|\mu(i) - \mu^*\| < \varepsilon$$

Soit ε un paramètre prédéfini qui permet de déterminer un petit voisinage du point fixe instable souhaité x^* .

On peut écrire alors :

$$\|K \delta x(i)\| < \varepsilon \quad (3.14)$$

Par conséquent, l'incrément du contrôle est donnée par :

$$\delta \mu(i) = \begin{cases} K(x(i) - x^*) & \text{si } \|x(i) - x^*\| < \varepsilon \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.15)$$

3.5.2 Application de la méthode OGY sur le système de l'APD sans mémoire

En raison de sa désorganisation inhérente, la fibrillation ventriculaire est beaucoup plus difficile à maîtriser avec des algorithmes de contrôle que la tachycardie ventriculaire ou les alternances, parce que parfois la stimulation par

anti-tachycardie échoue, et parfois parce que la fibrillation se produit sans avertissement ou déclencheur apparent (*le chaos instantané*). Une grande partie du travail dans la recherche sur la défibrillation se concentre sur la réduction des besoins énergétiques pour une défibrillation réussie [37].

La première technique appliquée pour contrôler les rythmes cardiaques est la méthode OGY (Ott-Grebogi-Yorke). Celle-ci a été utilisée pour stabiliser la dynamique de tachycardie ventriculaire apériodique dans un muscle cardiaque de lapin. Pendant le contrôle du chaos, une perturbation est appliquée pour faire varier les intervalles entre deux battements mais la dynamique chaotique irrégulière est contrôlée et remplacée par des rythmes périodiques, typiquement avec des rythmes de période 3 ou de période 4. Par conséquent, ce mode de perturbation empêche d'avoir le rythme souhaité de période 1 [59]. Une étude mathématique ultérieure démontre que de tels résultats de contrôle peuvent résulter d'une mauvaise estimation du rythme désiré à une seule période [113]. Dans une autre étude sur la dynamique apériodique, un algorithme de contrôle spécifique cardiaque appliqué à une série temporelle de la durée de potentiel d'action cardiaque chaotique simulée, a réussi à contrôler le rythme instable de période 1 avec un certains taux d'excitation [114].

On examine dans [109 – 110] les principaux points liés à l'algorithme original proposé (OGY) [27], afin de contrôler un rythme complexe irrégulier de la durée du potentiel d'action cardiaque d'une cellule ventriculaire modélisée par Lewis et Guevara [69].

La méthode de contrôle (OGY) utilise une stimulation électrique externe à des rythmes cardiaques irréguliers afin de récupérer le rythme normal [59]. L'application de cette méthode nécessite d'abord l'analyse du système d'état stationnaire pour déterminer les points fixes et, d'autre part, l'identification de l'apparition du comportement chaotique dans le diagramme de bifurcation. Le modèle itératif unidimensionnel de l'APD sans mémoire (décrit ci-dessus) donne des informations utiles afin de comprendre l'évolution du rythme cardiaque régulier vers un rythme irrégulier, principalement l'arythmie ventriculaire entraînant

un arrêt cardiaque soudain [69]. Le modèle itératif unidimensionnel de l'APD peut être utile et un modèle approprié pour contrôler le rythme irrégulier au niveau cellulaire, il est donnée par l'équation (3.1) ci-dessus :

$$x(i+1) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right) \quad (3.1)$$

On propose de contrôler l'état chaotique à $t_s = 146 \text{ ms}$, pour stabiliser le système au point fixe qui correspondant à l'un des rythmes cardiaques réguliers normaux d'une seule période 1 : 1 ou 2 : 1.

À $t_s = 146 \text{ ms}$, le rythme cardiaque est irrégulier, ce qui peut indiquer la présence d'une arythmie cardiaque. L'évolution du système est représentée par les Fig 3.12 et Fig 3.13.

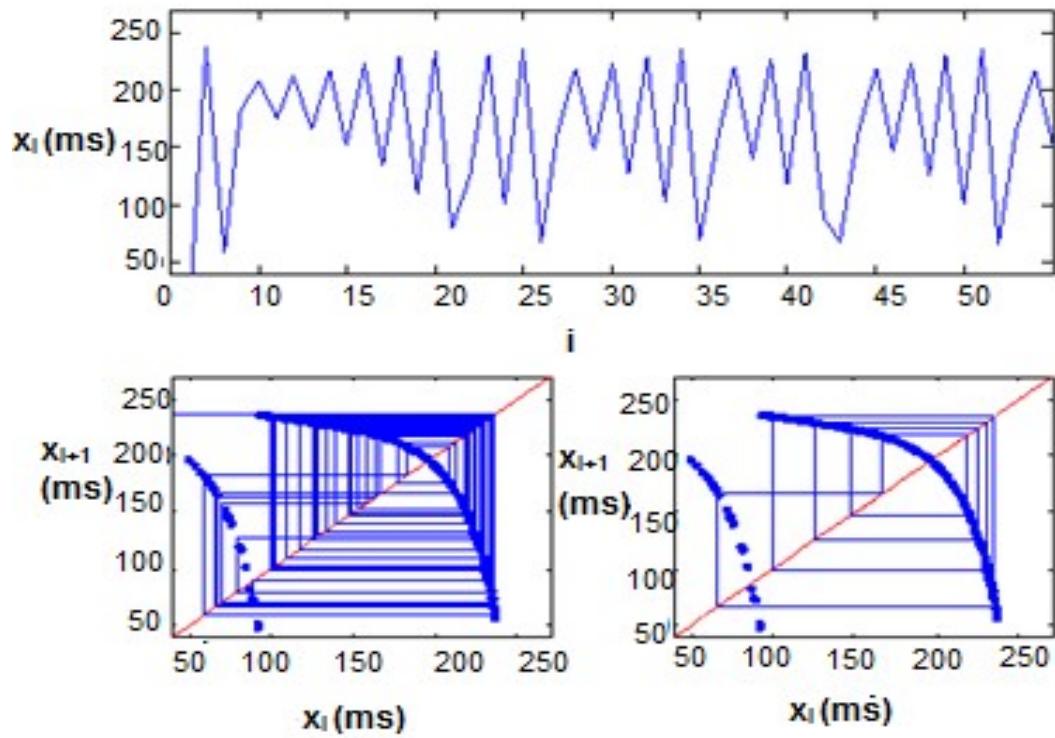


Fig. 3.12. Dynamique chaotique du système itératif de l'APD en dimension 1 du modèle (3.1), $t_s = 146 \text{ ms}$, $x(1) = 240 \text{ ms}$.

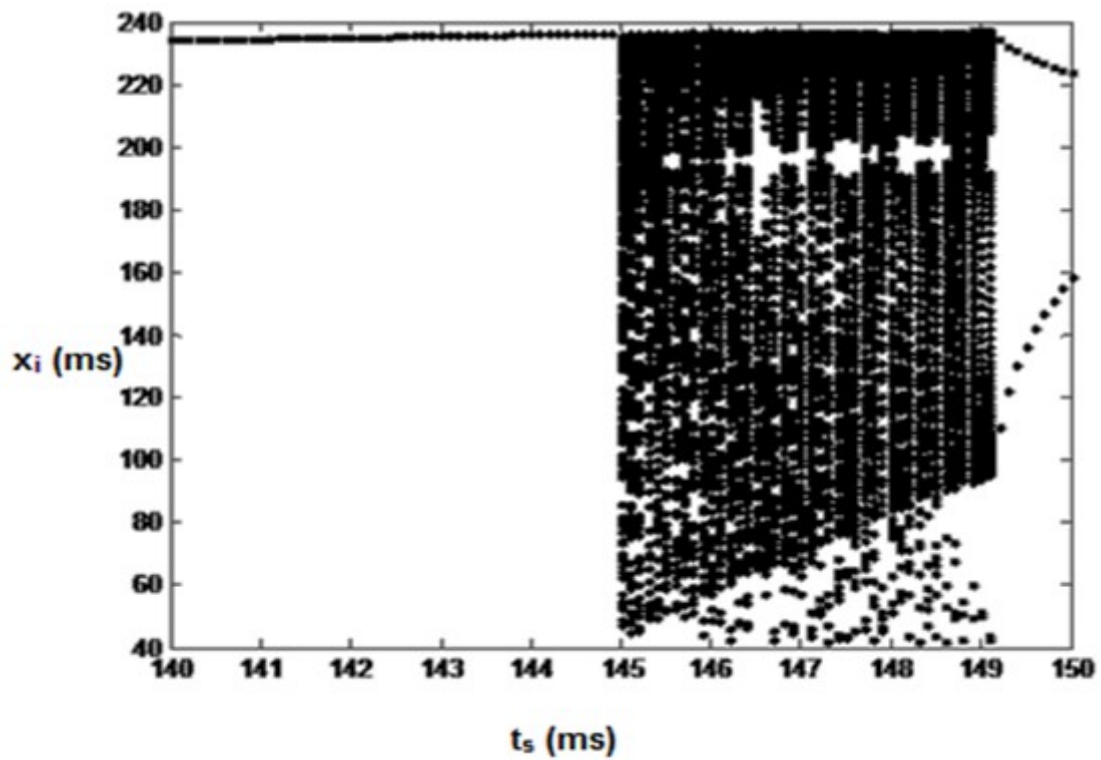


Fig. 3.13. Agrandissement du diagramme de bifurcation de la figure 3.11 pour montrer l'itération irrégulière de l'APD à $t_s = 146 \text{ ms}$.

Détermination des points fixes instables

Pour appliquer la méthode de contrôle (OGY), il est nécessaire de connaître la valeur du point fixe instable du système dynamique en état chaotique (les points fixes instables désirés sont associés aux rythmes réguliers normales 1 : 1 et 2 : 1). La détermination de la valeur du point fixe instable x^* est basée sur une méthode numérique. Le point fixe de système itératif (3.1) doit vérifier l'équation suivante :

$$F(x^*) = f(x^*) - (x^*) = 0$$

On détermine la racine α par la méthode de dichotomie, α représente le point fixe de l'itération sur l'intervalle $[0, 270]$. L'objectif est d'essayer d'isoler la racine α à la $k^{\text{ième}}$ itérée de l'intervalle $[0, 270]$ ($a_0 = 0, b_0 = 270$).

$\alpha \in [a_k, b_k] \subset [a_0, b_0], \alpha \simeq x_k$, le milieu de l'intervalle $[a_k, b_k]$, tel que :

$$|\alpha - x_k| \leq \left| \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \right| < 10^{-5}$$

Pour $t_s = 146 \text{ ms}$, on a deux points fixes instables correspondant à deux rythmes normaux d'une seule période qui sont 1 : 1 et 2 : 1. La valeur de celui qui représente le rythme instable 1 : 1 (ou rythme de période 1) de la branche ($n = 1$) est $\alpha \simeq x_{12} = x^* = 86.41 \text{ ms}$. Et celle de la branche ($n = 2$) représente le rythme instable 2 : 1 (ou rythme de période 1) est $\alpha \simeq x_{12} = x^* = 196.00125 \text{ ms}$.

On considère le système itératif (3.1) unidimensionnel, où t_s est le paramètre accessible de contrôle, et soit x^* le point fixe de (3.1) ;

$$x^* = f(x^*, t_s^*)$$

avec t_s^* est la valeur nominale du paramètre.

Par conséquent, la stratégie de contrôle est de trouver une loi de contrôle de stabilisation avec retour d'état près de l'orbite choisie. Le système étudié est dans un état chaotique, le passage près du point fixe est garanti et une fois que le

système est proche du point fixe instable x^* , la procédure du contrôle est activée pour amener le système dans l'orbite souhaitée.

Dans ce cas on a :

$$\delta x(i+1) = x(i) - x^*$$

et

$$\delta t_s(i+1) = t_s(i) - t_s^*$$

La linéarisation de système (3.1) autour du point fixe x^* est donnée par :

$$\delta x(i+1) = \left[\frac{df}{dx(i)} \right]_{x^*} \delta x(i) + \left[\frac{df}{dt_s(i)} \right]_{t_s^*} \delta t_s(i)$$

La stratégie de la méthode (OGY) est d'ajuster le paramètre de contrôle t_s , pour stabiliser le système sur le point fixe instable souhaité x^* . Cela exige que :

$$\delta x(i+1) = 0$$

On obtient,

$$\delta t_s(i) = - \frac{\left[\frac{df}{dx(i)} \right]_{x^*}}{\left[\frac{df}{dt_s(i)} \right]_{t_s^*}} \delta x(i)$$

En mettant :

$$K = - \frac{\left[\frac{df}{dx(i)} \right]_{x^*}}{\left[\frac{df}{dt_s(i)} \right]_{t_s^*}}$$

D'où,

$$\delta t_s(i) = K \delta x(i)$$

Le but du contrôle est de satisfaire la condition suivante :

$$|t_s(i) - t_s^*| < \varepsilon$$

Soit ε un paramètre prédéfini qui détermine l'étroitesse du voisinage du point fixe instable souhaité x^* .

On peut écrire alors :

$$|K \delta x(i)| < \varepsilon$$

Par conséquent, l'incrément du contrôle est donnée par :

$$\delta t_s(i) = \begin{cases} K(x(i) - x^*) & \text{si } |x(i) - x^*| < \varepsilon \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Résultats numériques

L'algorithme (OGY) est appliqué utilisant l'équation (3.1) du système itératif de l'APD sans mémoire pour contrôler le rythme cardiaque chaotique lorsque $t_s = 146 \text{ ms}$. Notre objectif est de stabiliser le système sur l'un des deux points fixes (ou rythme de période 1) représentant les rythmes 1 : 1 et 2 : 1. Pour stabiliser ces deux points fixes, on choisit des valeurs appropriées de K et ε , puis on itère le système 20000 fois, à partir de la condition initiale $x(1) = 240 \text{ ms}$.

Pour atteindre la stabilité du rythme 1 : 1 de la valeur $x^* = 86.41 \text{ ms}$; on choisit les valeurs des paramètres $K = 1$ et $\varepsilon = 0.2 \text{ ms}$. Après le processus d'itérations, le système se stabilise sur la valeur approximative 86.33 ms (Fig.3.14).

Pour stabiliser le rythme chaotique au rythme stationnaire 2 : 1 à la valeur $x^* = 196.00125 \text{ ms}$, on choisit les valeurs des paramètres $K = 0.5$ et $\varepsilon = 0.8$. Après les itérations, le système se stabilise sur la valeur approximative 196 ms (Fig.3.15).

Évidemment, si on modifie la valeur de la condition initiale, on doit changer la valeur de ε . Le diagramme de bifurcation ($x(i)$ vs ε) sous la méthode (OGY) est présenté dans les Fig.3.16 et Fig.3.17. Sous contrôle et à chaque ε l'équation (3.1) a été itérée 20000 fois. L'incrément de ε est de 0.1 ms et l'itération a pour condition initiale $x(1) = 240 \text{ ms}$ (Fig 3.16) et $x(1) = 200 \text{ ms}$ (Fig 3.17).

Pour prévenir le comportement chaotique (ou le rythme irrégulier), il faut choisir la valeur du point fixe instable calculé comme condition initiale, c'est-à-dire $x(1) = x^*$. Par conséquent, le contrôle par (OGY) est déclenché à l'itération suivante. On peut stabiliser les états chaotiques représentés dans la Fig 3.14 avec une valeur appropriée de K et ε (Fig.3.18).

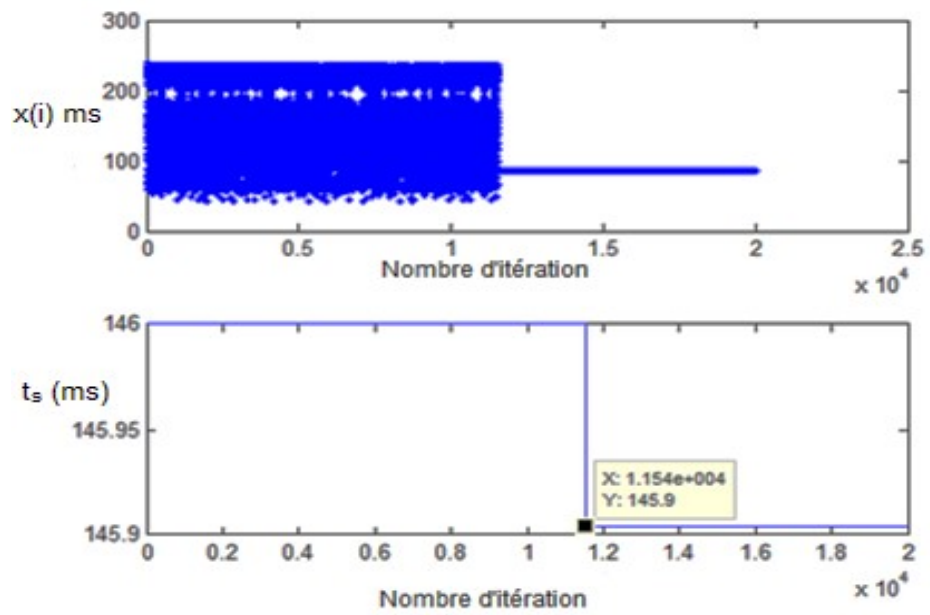


Fig. 3.14. Contrôle de l'itération irrégulière de l'APD en dimension 1 et stabilisation du rythme normal 1 : 1 par la méthode OGY.

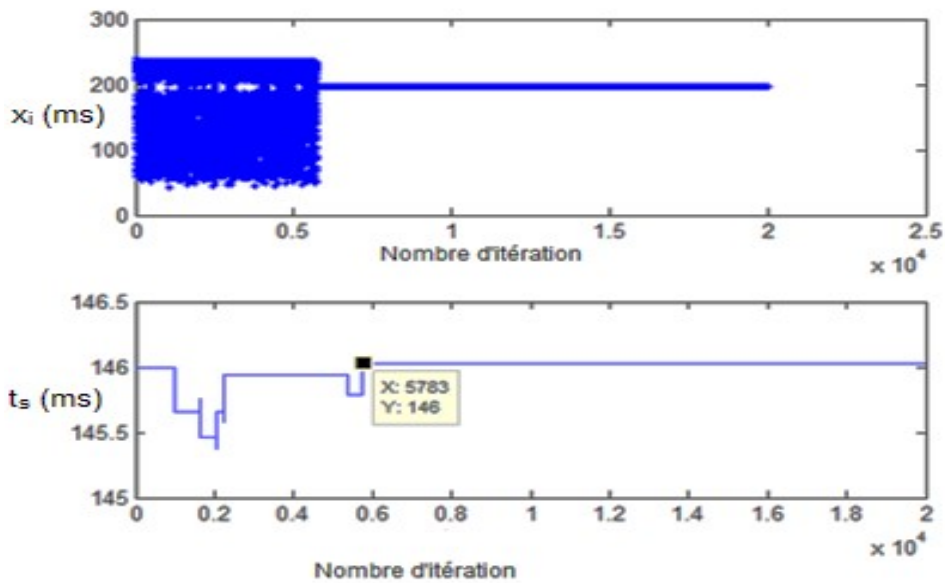


Fig. 3.15. Contrôle de l'itération irrégulière de l'APD en dimension 1 et stabilisation du rythme normal 2 : 1 par la méthode OGY.

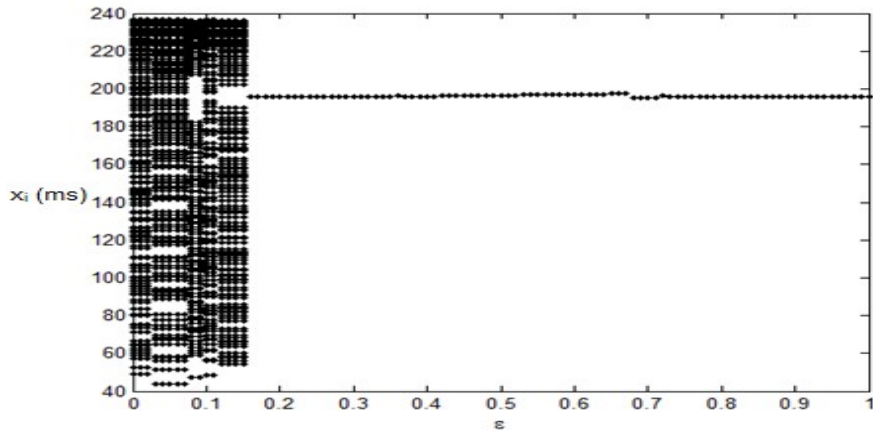


Fig. 3.16. Digramme de bifurcation ($\mathbf{x(i)}$ vs. $\boldsymbol{\varepsilon}$) sous contrôle par la méthode (OGY). Stabilisation du rythme normal 2 : 1, $\mathbf{x(1)} = 240$ ms.

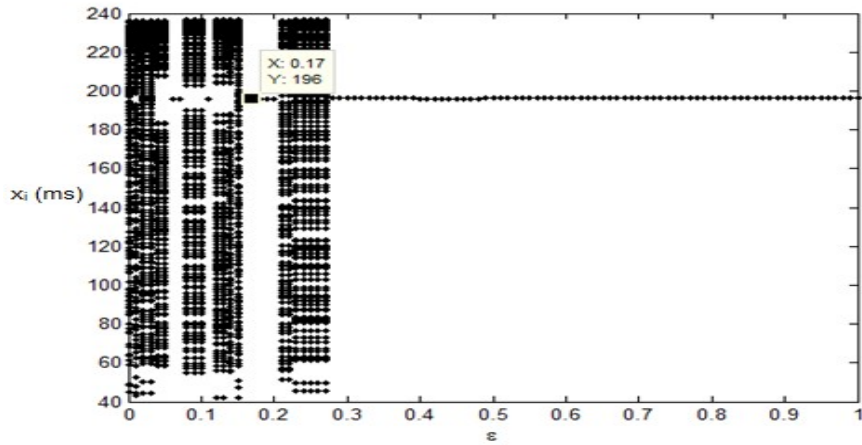


Fig. 3.17. Digramme de bifurcation ($\mathbf{x(i)}$ vs. $\boldsymbol{\varepsilon}$) sous contrôle par la méthode (OGY). Stabilisation du rythme normal 2 : 1, $\mathbf{x(1)} = 200$ ms.

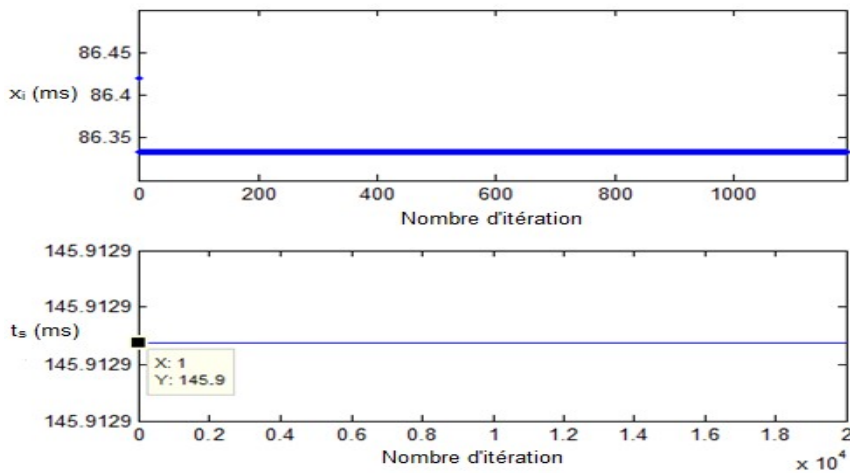


Fig. 3.18. La prévention de la dynamique irrégulière de l'APD dans le premier battement par la méthode (OGY).

3.5.3 Le contrôle prédictif

En toute généralité, l'instabilité de l'état d'un système se traduit par divergence des trajectoires voisines, quelle que soit la nature de l'état en question, stationnaire, périodique ou chaotique. Pour contrer cette instabilité, il suffit, toutes les fois où le système s'écarte de l'état considéré de lui appliquer une «perturbation» qui le ramène là où on l'attend. L'idée sous-jacente à la méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY) est de déterminer cette perturbation de la trajectoire comme si elle résultait d'une variation du paramètre de contrôle.

La méthode de Pyragas [127] s'applique dans le cas d'un système admettant une orbite périodique instable auquel une correction sera appliquée au moyen d'un forçage fonction d'une observable mesurée à un instant antérieur. Cela permet de développer une méthode de stabilisation des orbites instables cachées au sein d'un attracteur chaotique. Comparativement à la méthode OGY, son principal intérêt est de reposer sur la détermination d'une observable sans connaissance a priori sur le système considéré et sans nécessiter de traitement préliminaire très sophistiqué des données.

Plus précisément pour la méthode (OGY), la loi de contrôle notée $u(i)$, est déterminée à partir de l'influence du paramètre de contrôle sur l'état actuel $x(i)$ du système chaotique, puis ce contrôle est injecté comme une perturbation dans le paramètre de contrôle du système accessible de l'extérieur.

Dans la méthode de Pyragas (DFC), l'idée essentielle est que le contrôle $u(i)$ est déterminé par la différence entre l'état retardé à T -pas, noté $x(i-T)$ et l'état actuel $x(i)$ puis ajoutée comme paramètre de contrôle au système.

De plus, il a été démontré [119] que par application de la méthode de Pyragas, les orbites périodiques instables ne se stabilisent pas lorsque la matrice jacobienne possède un nombre impair de valeurs propres réelles de module supérieur à l'unité.

Ushio et Yamamoto [120, 121] proposent un contrôle dynamique par retour d'état prédictif pour les systèmes chaotiques basés sur le principe de la méthode

de Pyragas [127]. La loi de contrôle $u(i)$ est calculée à partir de la différence entre l'état actuel $x(i)$ et l'état prédit x_p du système chaotique (Fig 3.19). Les états contrôlés par le contrôle prédictif à retour d'état convergent vers les points fixes stabilisés puisque les approximations ne sont pas employées dans la boucle par retour d'état, ce qui est l'avantage de cette méthode.

Principe de la méthode

Soit le système dynamique non linéaire chaotique discret de dimension n suivant :

$$x(i+1) = f(x(i), \mu), \quad x(i) \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^p \quad (3.16)$$

où $x(i)$ représente la variable d'état du système et $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

L'idée de base est de prévoir l'état du système chaotique (3.16), noté x_p et d'appliquer une petite perturbation $u(i)$ de la formule suivante (3.17) :

$$u(i) = K(x_p - x(i)) \quad (3.17)$$

tel que $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_n)$.

En utilisant $f(x(i))$ comme une prédiction du point fixe à stabiliser. L'état prédit (x_p) sera donnée par [120] :

$$x_p = f(x(i)) = x(i+1) \quad (3.18)$$

La formule du vecteur du contrôle devient alors :

$$u(i) = K(x(i+1) - x(i)) \quad (3.19)$$

de sorte que la matrice diagonale K représente le gain feedback de contrôle obtenu à partir de la linéarisation du système sous contrôle (3.20) autour du point fixe instable désiré :

$$F(x(i)) = f(x(i)) + u(i) \quad (3.20)$$

L'objectif est de gérer la variation de la fonction de contrôle $u(i)$ de sorte que rapidement, la trajectoire reste à proximité du point fixe instable souhaité tant

que le contrôle est présent. On étudie comment forcer la trajectoire à être aussi proche que possible du point fixe.

Cette loi de contrôle n'est valide que lorsque l'état du système est au voisinage du point fixe instable à stabiliser. La zone de contrôle est déterminée par la relation suivante :

$$\|x(i+1) - x(i)\| < \varepsilon \quad (3.21)$$

Le diamètre epsilon (ε) de la zone de contrôle doit être infinitésimal et arbitraire pour contrôler l'état chaotique, mais ce n'est pas le cas pour la suppression de la dynamique périodique stable non désirée (voir le chapitre suivant) dont le passage du voisinage du point fixe instable n'est pas garanti.

La linéarisation du système (3.20) modélisée par la fonction F autour du point fixe instable x^* est donné par :

$$\delta F(x(i)) = [\partial F(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} \delta x(i) \quad (3.22)$$

avec

$$\delta F(x(i)) = F(x(i)) - x^* \quad (3.23)$$

et

$$\delta x(i) = x(i) - x^* \quad (3.24)$$

On obtient :

$$\delta F(x(i)) = [\partial(f(x(i)) + u(i))/\partial x(i)]_{x^*} \delta x(i) \quad (3.25)$$

En substituant la formule de $u(i)$ donné dans l'équation (3.19) dans (3.23)

$$\begin{aligned} \delta F(x(i)) &= [\partial(f(x(i)) + K(x(i+1) - x(i)))/\partial x(i)]_{x^*} \delta x(i) \\ &= [[\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} + K([\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} - 1)] \delta x(i) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Alors :

$$\delta F(x(i)) = J \delta x(i) \quad (3.27)$$

où J est la matrice jacobienne de la fonction F .

Le point fixe x^* sera stable pour la fonction F si est seulement si tous les modules des valeurs propres du Jacobien sont inférieurs à 1.

3.5.4 Application du contrôle prédictif sur le système de l'APD sans mémoire

On examine dans notre article [108] les principaux points liés à l'algorithme prédictif présenté ci-dessus, afin de contrôler un rythme complexe irrégulier de la durée du potentiel d'action cardiaque d'une cellule ventriculaire modélisée par Lewis et Guevara [69].

On applique le contrôle prédictif sur le système itératif de dimension 1 de l'APD décrit ci-dessus : pour déterminer la correction à l'état actuel $x(i)$ du système chaotique, on calcule la loi de contrôle, qui est définie à partir de l'équation (3.19), on obtient :

$$u(i) = K \left[A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right) - x(i) \right] \quad (3.28)$$

Sachant que : $x(i) = APD_i$

$$\begin{aligned} F(x(i)) &= A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right) \\ &+ K \left[A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right) - x(i) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Le Jacobien de la linéarisation du système (3.29) modélisée par la fonction F autour du point fixe instable x^* est donné par :

$$\begin{aligned} J &= \left(-\frac{B_1}{\tau_1} \exp\left(\frac{x^* - nt_s}{\tau_1}\right) - \frac{B_2}{\tau_2} \exp\left(\frac{x^* - nt_s}{\tau_2}\right) \right) + \\ &K \left(\left(-\frac{B_1}{\tau_1} \exp\left(\frac{x^* - nt_s}{\tau_1}\right) - \frac{B_2}{\tau_2} \exp\left(\frac{x^* - nt_s}{\tau_2}\right) \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Résultats numériques

La résolution de l'inégalité $|J| < 1$ conduit au résultat suivant :

Pour stabiliser le système sur la valeur du point fixe $x^* = 86.41ms$ (ou le rythme normal 1 : 1) à $t_s = 146 ms$, on a la condition sur K :

$$-1 < K < -0.725$$

Pour stabiliser le système sur la valeur du point fixe $x^* = 196 \text{ ms}$ (ou le rythme normal 2 : 1) à $t_s = 146 \text{ ms}$, la condition sur K devient :

$$-1 < K < -0.094$$

Le résultat du contrôle pour stabiliser le rythme 1 : 1 est montré sur la (Fig 3.20) après application de 20000 itérations pour les conditions appropriées suivantes :

$$\begin{cases} K = -0.9 \\ x(1) = 240 \text{ ms} \\ \varepsilon = 0.1 \end{cases}$$

Dans la (Fig 3.20), lorsque le nombre i d'itérations atteint la valeur $i = 11540$, l'état $x(11540)$ est à proximité du point fixe x^* (ou le rythme normal 1 : 1). Le contrôle prend la valeur $u(i) = 0.08655 \text{ ms}$ pour stabiliser le système sur le point fixe de la valeur $x^* = 86.41 \text{ ms}$.

Le résultat du contrôle du chaos pour la stabilisation du rythme normal instable 2 : 1 est présenté dans la (Fig 3.21) pour les valeurs appropriées suivantes :

$$\begin{cases} K = -0.3 \\ x(1) = 240 \text{ ms} \\ \varepsilon = 0.2 \end{cases}$$

Dans la (Fig 3.21), lorsque le nombre i d'itérations atteint la valeur $i = 11840$, l'état $x(11840)$ se trouve au voisinage du point fixe x^* , le contrôle prend la valeur $u(i) = 0.02653 \text{ ms}$ et stabilise le système sur le point fixe désiré (ou le rythme normal 2 : 1) de valeur $x^* = 196.0073 \text{ ms}$.

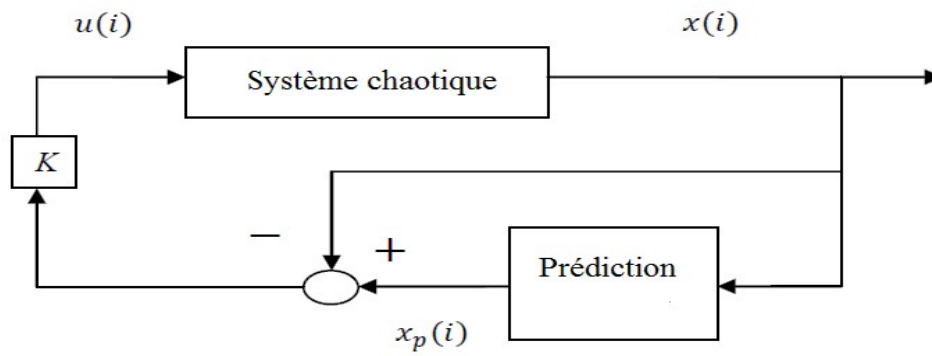


Fig. 3.19. Schéma du contrôle prédictif [118]

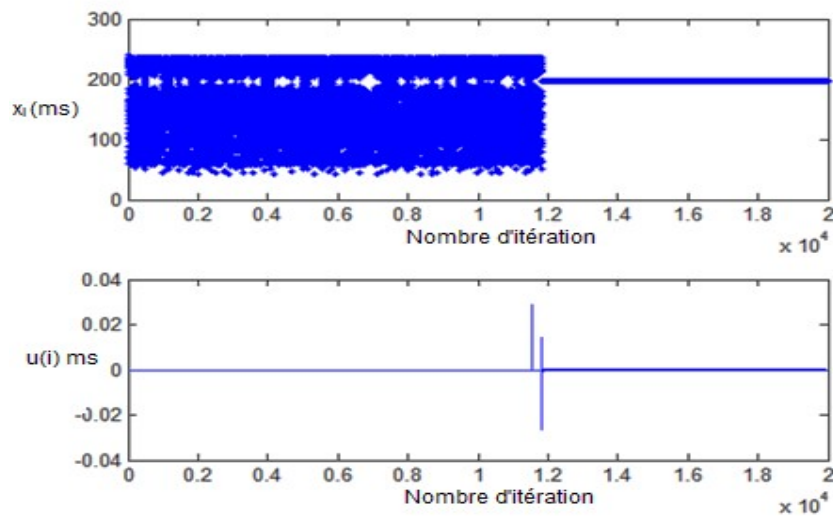


Fig. 3.20. Contrôle du rythme chaotique du système itératif de l'APD en dimension 1 et stabilisation du rythme normal 2 : 1 par le contrôle prédictif.

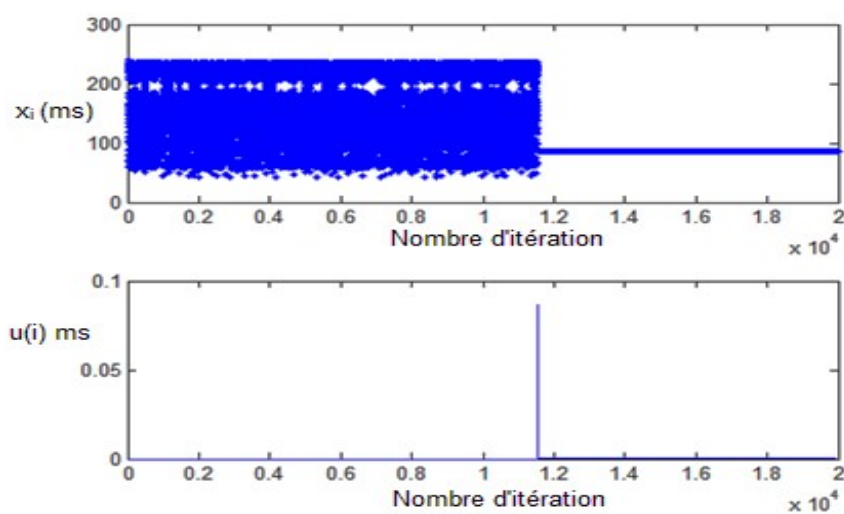


Fig. 3.21. Contrôle du rythme chaotique du système itératif de l'APD en dimension 1 et stabilisation du rythme normal 1 : 1 par le contrôle prédictif.

3.6 Discussion

Le concept de contrôle du chaos a montré que non seulement le comportement chaotique pouvait être contrôlé, mais aussi la complexité inhérente à la dynamique chaotique pourrait être exploitée pour offrir un niveau unique de flexibilité et d'efficacité dans les utilisations technologiques des systèmes chaotiques [34,56]. Au fil des ans, on a assisté à une variété d'applications de ce concept dans presque tous les domaines de la connaissance. Parallèlement, de nouvelles méthodes apparaissent, chacune adaptée à des situations spécifiques ou essayant d'améliorer des méthodes du contrôle du chaos précédentes. Malgré cet énorme développement dans la recherche, les idées fondamentales intégrées dans ce concept doivent être mises au point [37,59]. Les idées qui sous-tendent le développement futur de la théorie du contrôle et de notre algorithme en particulier sont :

- Le contrôle du chaos est basé sur l'application de petites perturbations aux systèmes sensibles aux conditions initiales.
- La stratégie de contrôle à retour d'état peut être utilisée juste localement pour une trajectoire particulière.
- L'algorithme du contrôle du chaos peut être appliqué quand le chaos est présent. Cela signifie que son application ne se limite pas seulement à l'attracteur chaotique, mais peut également concerner une trajectoire non chaotique (des situations pour lesquelles on peut obtenir des résultats intéressants).
- Les stratégies de contrôle du chaos peuvent être combinées avec des stratégies de contrôle classiques pour transmettre des mécanismes de contrôle puissants, opportuns et efficaces qui exploitent les limites de flexibilité que le système peut fournir.

Ainsi en électrophysiologie cardiaque il est considéré que la fibrillation ventriculaire (FV) est un rythme chaotique. Il est alors évident qu'il serait très utile de pouvoir contrôler le chaos une fois qu'il a démarré et ramener alors le cœur à son point d'équilibre : " le rythme sinusal normal". Il y a de nombreux articles

publiés sur "le contrôle du chaos cardiaque", certains d'entre eux sont expérimentaux, tandis que d'autres impliquent la modélisation (équations différentielles ou itératives).

Dans le but de **réduire les comportements irréguliers** dans la dynamique cardiaque la **méthode (OGY) et le contrôle prédictif** appliqués sur un **modèle itératif de l'APD** de la cellule du muscle ventriculaire, permettent d'obtenir des résultats numériques très satisfaisants pour diriger le comportement chaotique vers des points d'équilibre stables de l'équation d'état. Cela prouve **l'efficacité de ces méthodes pour stabiliser le rythme cardiaque irrégulier sur un rythme sinusal physiologique normal.**

Chapitre 4

Nouvelle approche du contrôle de l'alternance cardiaque

L'alternance de la durée du potentiel d'action cardiaque est un rythme pathologique, le déclencheur de la fibrillation ventriculaire qui est suivi par un arrêt cardiaque. Il est bien connu que le contrôle prédictif fait partie des méthodes de contrôle qui utilisent le chaos pour stabiliser le point fixe instable. Premièrement, on montre que l'alternance (ou l'orbite de période 2) peut être supprimée temporellement par le contrôle prédictif. Deuxièmement, on détermine une estimation de la taille du bassin d'attractions restreint du point d'équilibre instable représentant le rythme régulier instable, et stabilisé par le contrôle. Ce résultat permet l'application du contrôle prédictif dès le premier battement de l'alternance. En particulier, en utilisant un contrôle prédictif du chaos pour supprimer la dynamique périodique stable, on peut retarder l'apparition des bifurcations et diriger une trajectoire vers un état stationnaire cible souhaité. Des exemples de résultats numériques montrant la stabilisation du rythme normal sont donnés.

Le travail réalisé sur le contrôle de l'alternance utilisant cette nouvelle approche et les résultats obtenus ont fait l'objet d'un article publié dans la revue "*Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*", 23(2) :975-989 (2018) [107].

4.1 Contexte, concepts et méthodes

Il est reconnu que les propriétés de la restitution de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) et l'alternance de la repolarisation sont des facteurs arythmogènes importants. Ainsi, bien que l'alternance de la durée du potentiel d'action cardiaque soit une dynamique périodique de l'APD, elle est considérée comme un rythme pathologique qui précède des arythmies plus complexes et potentiellement mortelles. L'étude du système dynamique qui modélise l'APD vise à prévenir certaines pathologies cardiaques sévères telles que la fibrillation ventriculaire qui conduit rapidement à un arrêt cardiaque soudain [51, 69, 72, 77 – 79, 82, 89 – 97]. Des recherches récentes ont suggéré que les algorithmes de contrôle ciblant l'alternance cardiaque pourraient potentiellement conduire à une amélioration de l'efficacité thérapeutique des dispositifs implantables.

Du fait que la défibrillation n'est pas toujours réussie, le contrôle de l'alternance (ou le rythme de 2 périodes) de l'APD est une stratégie préférable au vu des récents progrès visant à contrôler l'alternance électrique au niveau cellulaire et au niveau du tissu cardiaque [129 – 133, 137, 139 – 143].

Au niveau cellulaire la plupart de ces algorithmes sont basés sur la méthode à retour d'état avec un temps de retard (DFC) (ou méthode de Pyragas) [127]. Dans cette méthode basée sur la technique Ott-Grebogi-Yorke (OGY) [27] pour le contrôle du chaos, de petites perturbations sont appliquées au moment de l'excitation suivante afin de diriger l'état du système vers le point fixe (ou le rythme d'une seule période) instable désiré.

Bien que la méthode de contrôle (DFC) [127] ait été introduite il y a plus d'une décennie, elle est encore l'un des champs les plus actifs dans la dynamique non linéaire [37]. La méthode permet une stabilisation d'orbites périodiques instables (UPO) de systèmes dynamiques dans le sens où la force de contrôle disparaît lorsque l'état cible est atteint. L'algorithme (DFC) utilise un signal de contrôle obtenu à partir de la différence entre l'état actuel du système et l'état du système retardé d'une période de l'orbite cible. Dans divers systèmes

expérimentaux et un grand nombre de modèles théoriques, y compris le système cardiaque [59, 106, 128], l'algorithme (DFC) a été utilisé avec succès. Rappel et al. [125] ont utilisé la (DFC) pour la stabilisation des ondes spirales dans un média excitable comme le modèle du tissu cardiaque afin d'éviter la rupture de ces ondes spirales.

Les algorithmes (DFC) ont été utilisés expérimentalement pour contrôler l'alternance de l'APD (ou 2-cycle) dans des petits morceaux de cœur de grenouilles (c'est-à-dire suffisamment petits pour être assimilés à un point) [129]. Ils ont également été utilisés pour contrôler un type d'alternance (alternance de conduction nodale atrioventriculaire (AV)) chez des sujets humains [130,131]).

Les algorithmes (DFC) ont certaines limites fondamentales, lorsqu'ils sont utilisés pour contrôler les rythmes périodiques, la convergence rapide vers le rythme stationnaire instable désiré n'est réalisable que si le gain prend sa valeur optimale ou est proche de celle-ci [4].

Étant donné que l'estimation de l'instabilité du point fixe nécessite que la trajectoire visite le voisinage du point fixe instable désiré, la détermination de la valeur constante du gain optimal pendant les rythmes périodiques est difficile. Les algorithmes qui utilisent des perturbations externes pour explorer le voisinage du point fixe peuvent parfois être utilisés pour estimer cette valeur optimale [136]. De plus, ces algorithmes peuvent être sensibles aussi bien aux bruits qu'aux non linéarités généralement présents dans les expériences.

Bien que les algorithmes (DFC) se soient révélés efficaces pour le contrôle de l'alternance de l'APD (ou rythme de 2 périodes), une autre approche basée uniquement sur les principes électrophysiologiques cardiaques a également été développée [137]. L'algorithme du contrôle adaptatif de l'intervalle diastolique DI exploite les propriétés de restitution du tissu cardiaque pour contrôler les rythmes périodiques et apériodiques ou/et les ramener à un rythme stationnaire désiré et ne nécessite pas la compréhension de la dynamique du système [37]. Dans le contrôle de l'intervalle de repos DI, l'alternance (ou rythme de 2 périodes) peut être supprimé et ramené à un rythme à une période (ou rythme normal)

en perturbant le cycle de base. La dépendance de l' $APD(n+1)$ de $DI(n)$ est caractérisée par la courbe de la restitution

$$APD(n+1) = f(DI(n))$$

où la fonction f est déterminée expérimentalement. Bien que, l'algorithme de contrôle ne nécessite pas la détermination de cette fonction, le rapport unique existant entre $DI(n)$ et $APD(n+1)$ forme la base de la stratégie de contrôle.

La stimulation est appliquée telle que $DI(n)$ se maintienne à une valeur constante, d'où chaque (PA) subséquent converge vers une morphologie répétitive constante [37].

Le contrôle adaptatif de l'intervalle diastolique DI est réalisé avec succès dans les simulations numériques [137]. Cependant, il existe certaines limites à la méthode. L'une des préoccupations est que le contrôle DI repose sur l'hypothèse que la dynamique PA est donnée par un système itératif de dimension 1. Des études récentes ont montré que la dynamique du calcium intracellulaire contribue au développement des alternances, en ajoutant à la complexité du problème [37].

En effet, l'alternance de l'APD peut se produire même lorsque l'intervalle diastolique DI est fixé [138]. Pourtant, la mesure dans laquelle l'hypothèse de restitution échoue est liée à l'étude et est susceptible de varier en fonction des types de cellules et des espèces.

Le but de ce chapitre est double : premièrement, obtenir le contrôle des alternances à travers un système itératif de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) sans mémoire en utilisant le contrôle prédictif du chaos, et deuxièmement obtenir une estimation de la taille du bassin d'attraction restreint du point d'équilibre instable associé au rythme normal et stabilisé par le contrôle.

4.2 Contrôle prédictif de l'alternance de l'APD

sans mémoire

Contrairement à l'activation du contrôle du chaos dans le voisinage du point fixe instable d'une taille arbitraire et infinitésimale [124, 144], la suppression de la dynamique périodique stable par le contrôle prédictif est appliquée lorsque l'état actuel pénètre dans le bassin d'attraction restreint du point fixe désiré (ou orbite de période 1) (l'état prédit étant hors de ce bassin).

La transition du rythme normal 1 : 1 (ou le rythme d'une seule période) de la durée de potentiel d'action cardiaque au rythme 2 : 2 (ou rythme de deux périodes) est considérée comme le précurseur de la fibrillation ventriculaire (FV), retarder cette transition peut être une mesure efficace pour prévenir la FV [143].

Au lieu de considérer les systèmes d'équations différentielles ordinaires (ODE) qui constituent les modèles ioniques de la membrane, de nombreux auteurs utilisent des modèles discrets qui décrivent l'APD (la durée du potentiel d'action) en fonction de l'intervalle DI diastolique [69 – 72, 93 – 98, 145] pour décrire la dynamique cardiaque.

Soit la fonction f qui définit l'évolution de la durée du potentiel d'action cardiaque au niveau cellulaire proposé par Lewis & Guevara [69] et présentée dans le chapitre 3 par l'équation (3.1).

$$x(i+1) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right) \quad (3.1)$$

Lorsque $t_s = 302 \text{ ms}$, le rythme normal 1 : 1 (ou point d'équilibre) perd sa stabilité, l'alternance électrique de l'APD 2 : 2 (ou orbite de 2 périodes) se produit et la valeur de l'APD oscille entre deux valeurs 204,9 ms et 197,3 ms (Fig 4.1).

Il a été démontré [69 – 72, 93 – 98, 145] que l'alternance est un comportement régulier, mais elle correspond à un rythme pathologique, en effet, elle génère immédiatement un rythme chaotique irrégulier, y compris la fibrillation ventriculaire.

4.2.1 Approche mathématique

Soit le système dynamique non linéaire discret de dimension 1 donné par $f \in C^1(\mathbb{R})$. Et soit I un ensemble invariant de \mathbb{R} , tel que :

$$x(i+1) = f(x(i), \mu)$$

où $x(i) \in \mathbb{R}$ représente la variable d'état de l'espace des phases I .

Considérant le système dynamique sous contrôle donné par $F \in C^1(\mathbb{R})$:

$$x(i+1) = F(x(i)) = f(x(i), \mu) + u(i) \quad (4.1)$$

tel que $u(i)$ la fonction de contrôle.

La valeur du contrôle $u(i)$ égale à zéro lorsque l'itération oscille entre *deux points périodiques* P_1 et P_2 .

Notre objectif est de *supprimer le cycle de points périodiques* P_1 et P_2 ; et stabiliser le point fixe instable x^* .

Contrairement au contrôle de l'attracteur chaotique qui est ergodique, pendant la dynamique périodique stable (par exemple l'alternance cardiaque) le cycle évolue loin du voisinage du point fixe instable désiré.

Le contrôle u se déclenche lorsque l'état actuel rentre dans le bassin d'attraction restreint du point fixe ciblé x^* sachant que l'état incontrôlé x_p diverge de ce bassin. Après avoir effectué la convergence asymptotique du point fixe souhaité, la valeur de contrôle deviendra nulle. Dans la méthode de contrôle prédictif, la loi de contrôle $u(i)$ est déterminée par la différence entre l'état actuel et l'état prédictif non contrôlé. La formule du contrôle u est donnée par [120],

$$u(i) = K(x_p - x(i)) \quad (4.2)$$

En utilisant $f(x(i))$ comme une prédiction du point fixe à stabiliser. L'état prédit (x_p) sera donné par :

$$x_p = f(x(i)) = x(i+1) \quad (4.3)$$

La formule du vecteur du contrôle devient alors :

$$u(i) = K(x(i+1) - x(i)) \quad (4.4)$$

tel que le réel K représente le gain feedback de contrôle obtenu à partir de la linéarisation du système sous contrôle (4.1) autour du point fixe instable désiré.

Considérant le bassin d'attraction restreint du point fixe instable x^* d'une taille, ε , tel que :

$$\varepsilon = |P_1 - P_2| \quad (4.5)$$

La loi du contrôle est déterminé par la relation suivante :

$$u(i) = \begin{cases} K(x(i+1) - x(i)) & \text{si } |x(i+1) - x(i)| < \varepsilon_j, \varepsilon_j \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (4.6)$$

où ε_j est une distance de contrôle.

Cette loi de contrôle n'est valide que lorsque l'état prédit du système est dans le bassin d'attraction restreint du point fixe instable et stabilisé par le contrôle.

La linéarisation du système (4.1) modélisé par la fonction F autour du point fixe instable x^* est bien détaillée dans le chapitre 3, on obtient

$$\begin{aligned} \delta F(x(i)) &= [\partial f(x(i)) + K(x(i+1) - x(i))]/\partial x(i)]_{x^*} \delta x(i) \\ &= [[\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} + K([\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} - 1)] \delta x(i) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Alors :

$$\delta F(x(i)) = J \delta x(i) \quad (4.8)$$

où J est le Jacobien de la fonction F et donné par :

$$J = [\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} + K([\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} - 1) \quad (4.9)$$

Le point fixe instable désiré x^* devient stable par la fonction F si est seulement si $|J| < 1$, c'est-à-dire :

$$|[\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} + K([\partial f(x(i))/\partial x(i)]_{x^*} - 1)| < 1 \quad (4.10)$$

L'inégalité (4.10) nous permet d'avoir une majoration des valeurs du gain K , pour avoir une stabilisation du point fixe instable souhaité et la suppression du cycle.

4.2.2 Résultats numériques

Détermination du point fixe instable

Notre objectif est de diriger le rythme périodique stable 2 : 2 vers le rythme normal instable 1 : 1. Tout d'abord, on détermine la valeur du point fixe instable en utilisant la méthode de dichotomie : $x^* \cong x_{12} = 201.2306 \text{ ms}$ est la valeur approchée du point fixe instable, tel que $|x^* - x_{12}| < 10^{-5}$.

Estimation de la taille du bassin d'attraction restreint du point fixe instable

On itère le système (3.1) à partir de la condition initiale $x(1) = 240 \text{ ms}$ jusqu'à avoir un cycle asymptotiquement stable, puis on cherche la distance entre les points périodiques P_1 et P_2 .

La taille du bassin d'attraction restreint, ε , est donnée par la relation (4.5), d'où, $\varepsilon = 7.6 \text{ ms}$.

Linéarisation du système contrôlé

On ajoute un terme de contrôle $u(i)$ au flot du système (3.1), on obtient

$$F(x(i)) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right) + u(i) \quad (4.11)$$

La linéarisation du système résultant (4.11) autour du point fixe instable x^* passe par la détermination du Jacobien J et la stabilité du point fixe est conditionnée par :

$$-1 < K < 0$$

L'intérêt et l'efficacité de la méthode de contrôle utilisée est que, pour une condition initiale arbitraire du bassin d'attraction global $[42 \text{ ms}, 248.5 \text{ ms}]$ du point fixe stabilisé, le contrôle est effectué uniquement après plusieurs itérations (Fig 4.2 (a)). Cependant, dans le cas d'une condition initiale dans le bassin d'attraction restreint $[193.5 \text{ ms}, 208.9 \text{ ms}]$, le contrôle est effectif dès la première itération (Fig 4.2 (b)).

On donne des valeurs des conditions appropriées dans le tableau 1 pour activer le contrôle :

| K | ε_j | $x(1)$ |
|------|-----------------|--------|
| -0.1 | 9 ms | 240 ms |
| -0.1 | 7.7 ms | 198 ms |

Tableau 1. Stabilisation du rythme 1 : 1

Valeurs des paramètre K , ε_j , et $x(1)$

Dans la figure 4.2(a), après 838 battements d'alternance, l'état $x(838)$ se trouve dans le bassin d'attraction restreint du point fixe instable x^* (ou du rythme instable 1 : 1).

Nous avons $u(838) = 0.8999$ ms, et pour le point fixe $x^* = 201.2$ ms on a la stabilité asymptotique.

Cependant, dans la figure 4.2 (b), un seul battement est suffisant pour détecter le bassin d'attraction restreint du point fixe instable x^* (ou du rythme instable 1 : 1) et pour stabiliser le point fixe instable. En appliquant une petite perturbation à la dynamique de l'état $x(1) = 204.3$ ms, de sorte que $u(1) = 0.6303$ ms, après 23 battements, le rythme instable 1 : 1 se stabilise de manière asymptotique.

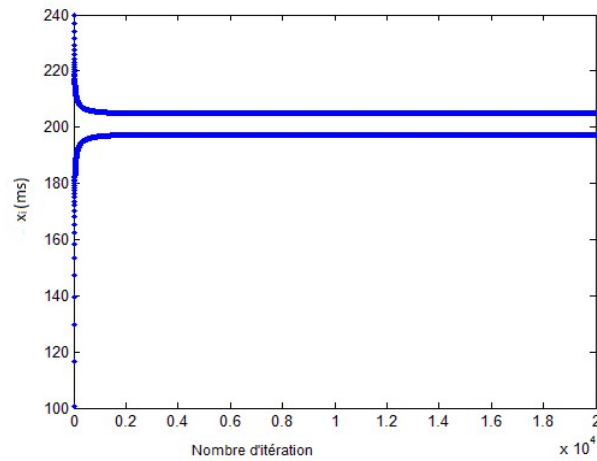


Fig. 4.1. À $t_s = 302 \text{ ms}$, l'alternance sans contrôle, évolution de l'itération de l'APD 20000 fois, partant de la condition initial $x(1) = 240 \text{ ms}$.

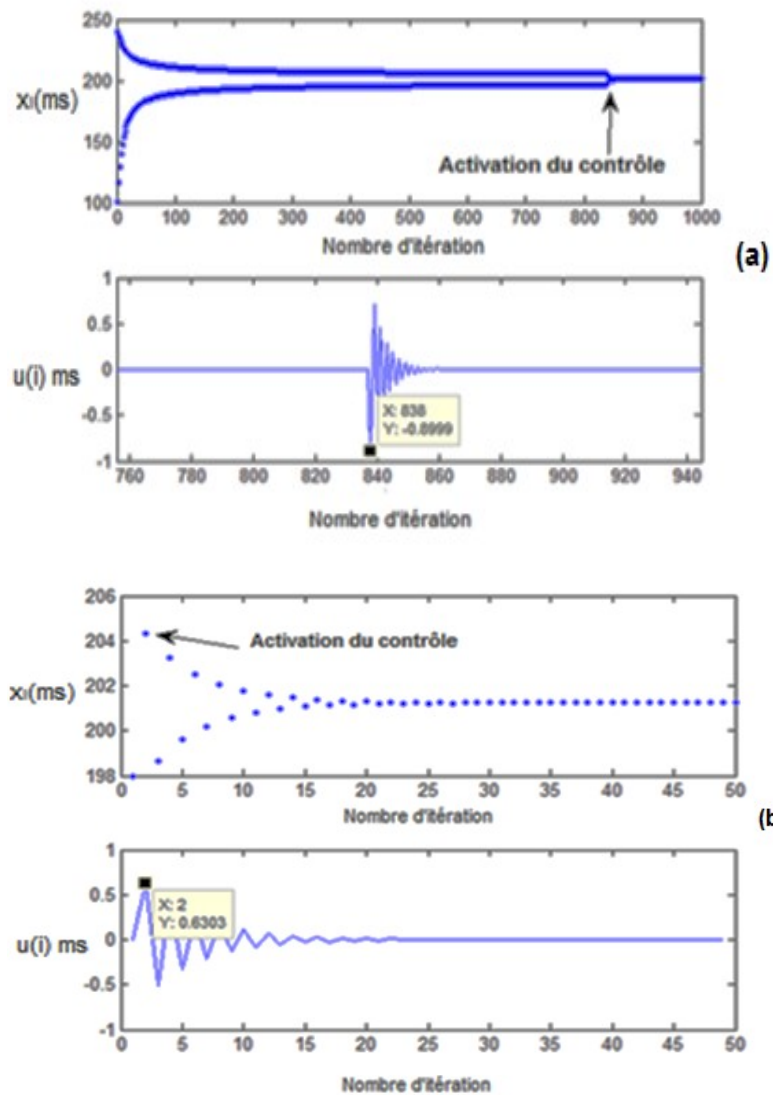


Fig. 4.2. Initiation du contrôle prédictif de l'alternance 2: 2, (a) après 838 battements d'alternance, (b) après seulement un battement d'alternance. Après que le contrôle est initié dans la figure (a) ou (b), $x(n)$ alterne autour de x^* lorsque la stabilité asymptotique du rythme 1: 1 est réalisée.

Pour la suppression de l'alternance à $t_s = 302 \text{ ms}$ et pour stabiliser le rythme normal 1 : 1 ou le point fixe de la valeur 201.2 ms , on remarque que la valeur ε de la taille de la zone de contrôle, dépend du choix de la condition initiale, et n'est pas arbitraire. Pour la même valeur du gain $K = -0.1$ et deux conditions initiales différentes, le contrôle prédictif se déclenche pour $x(1) = 240 \text{ ms}$ lorsque ε_j est supérieur ou égale à 7.6 ms . Pour $x(1) = 200 \text{ ms}$; le ε_j doit être supérieur ou égale à 2.5 ms . Par conséquent, les valeurs convenables de ε pour supprimer la dynamique périodique de l'APD sont grandes, elles ne sont pas infinitésimales (voir Fig .4.3 (a) et (b)).

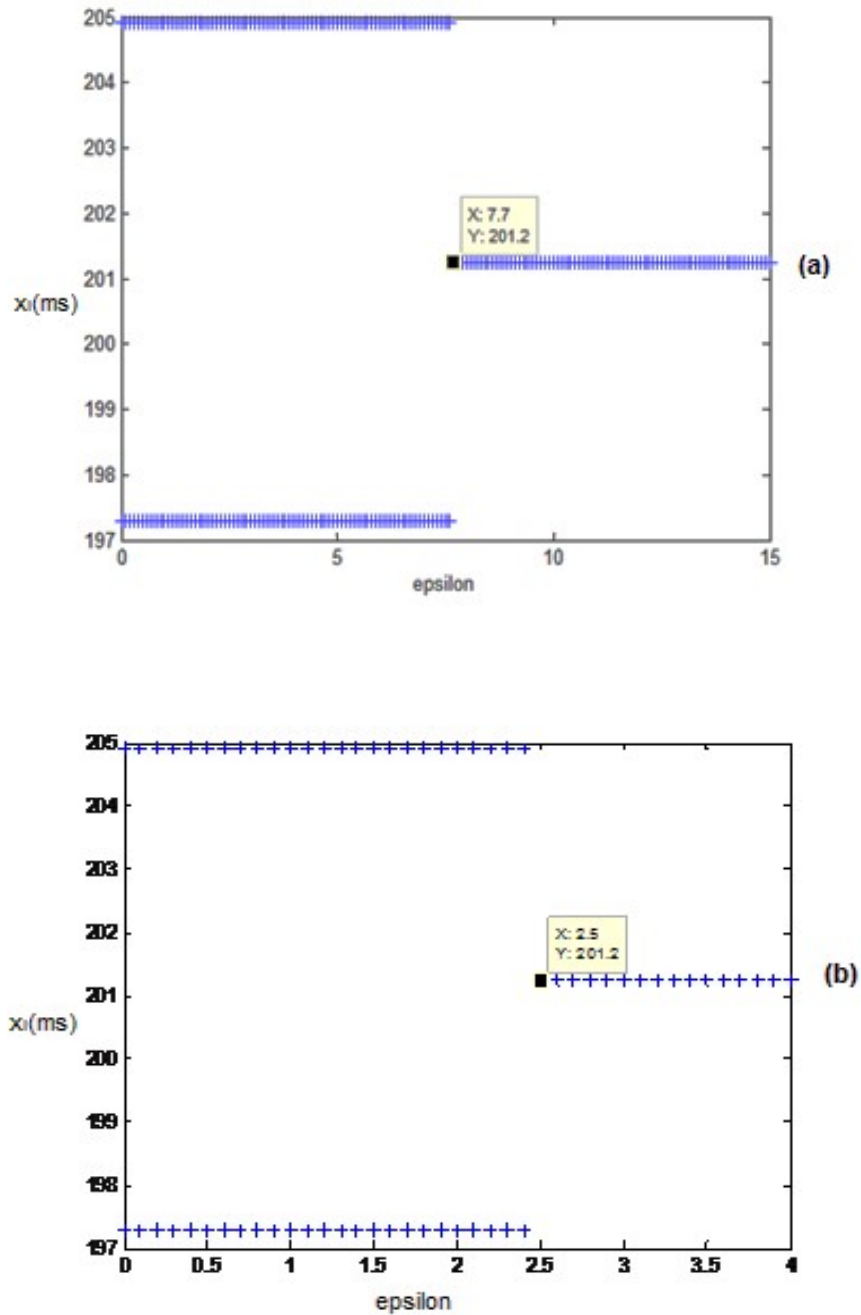


Fig. 4.2. Diagramme de bifurcation ($x(i)$ vs. ϵ) sous contrôle prédictif du système de l'APD sans mémoire pour $t_s = 302$ ms, $K = -0.1$. À chaque ϵ , l'équation (4.12) a été itérée 20000 fois et les 19800 premières itérées ont été rejetées pour supprimer les états transitoires dus aux conditions initiales avec un pas égal à 0.1ms. (a) $x(1) = 240$ ms, $0 \leq \epsilon \leq 15$ m, (b) $x(1) = 200$ ms, $0 \leq \epsilon \leq 4$ m

La variation de la valeur du paramètre de stimulation dans le modèle itératif unidimensionnel (3.1) de l'APD (sans mémoire) montre l'existence de la bistabilité entre quelques rythmes. Par exemple, la décroissance de la valeur du paramètre de stimulation t_s jusqu'à une valeur critique 302 ms , fait apparaître la bistabilité entre deux rythmes; l'alternance $2 : 2$ et le rythme normal $2 : 1$ $\{2 : 2 \leftrightarrow 2 : 1\}$ (Fig 4.4) dans lequel l'intervalle $[42 \text{ ms}, 248.5 \text{ ms}]$ est le bassin d'attraction de l'alternance $2 : 2$ et l'intervalle $[248.6 \text{ ms}, 270 \text{ ms}]$ est le bassin d'attraction du rythme normal $2 : 1$.

Lorsque l'alternance est supprimée par le contrôle prédictif, l'intervalle $[42 \text{ ms}, 248.5 \text{ ms}]$ sera le bassin d'attraction du rythme normal souhaité $1 : 1$, et alors la bistabilité $\{2 : 2 \leftrightarrow 2 : 1\}$ est supprimée (Fig.4.5).

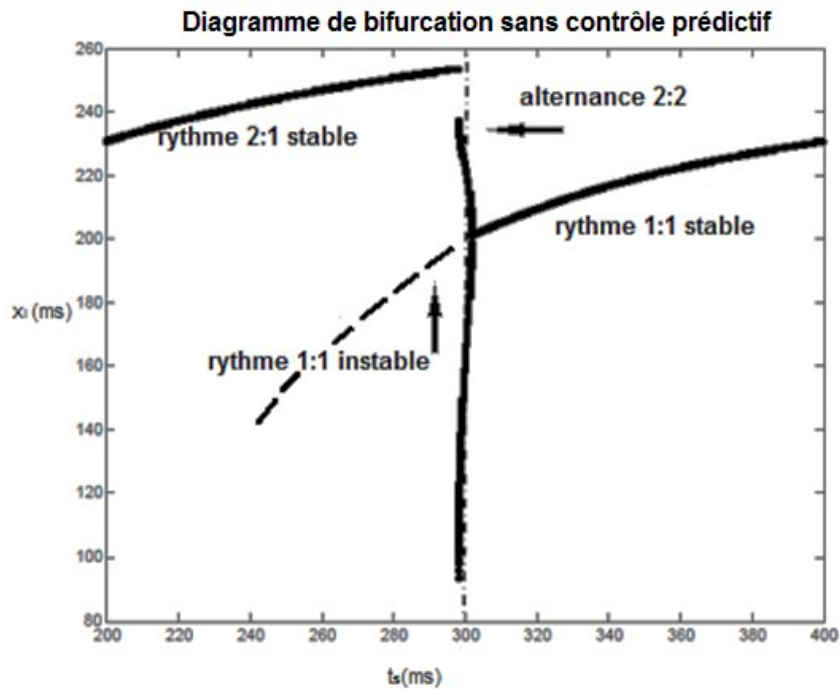


Fig. 4.4. Diagramme de bifurcation (x_i) vs. t_s) sans contrôle prédictif du système de l'APD sans mémoire pour $200 \text{ ms} \leq t_s \leq 400 \text{ ms}$. A chaque t_s , l'équation (3.1) a été itérée 20000 fois et les 19800 premières itérées ont été rejetées pour supprimer les états transitoires dus aux conditions initiales avec un pas= 0.1ms, $x(1) = 198 \text{ ms}$.

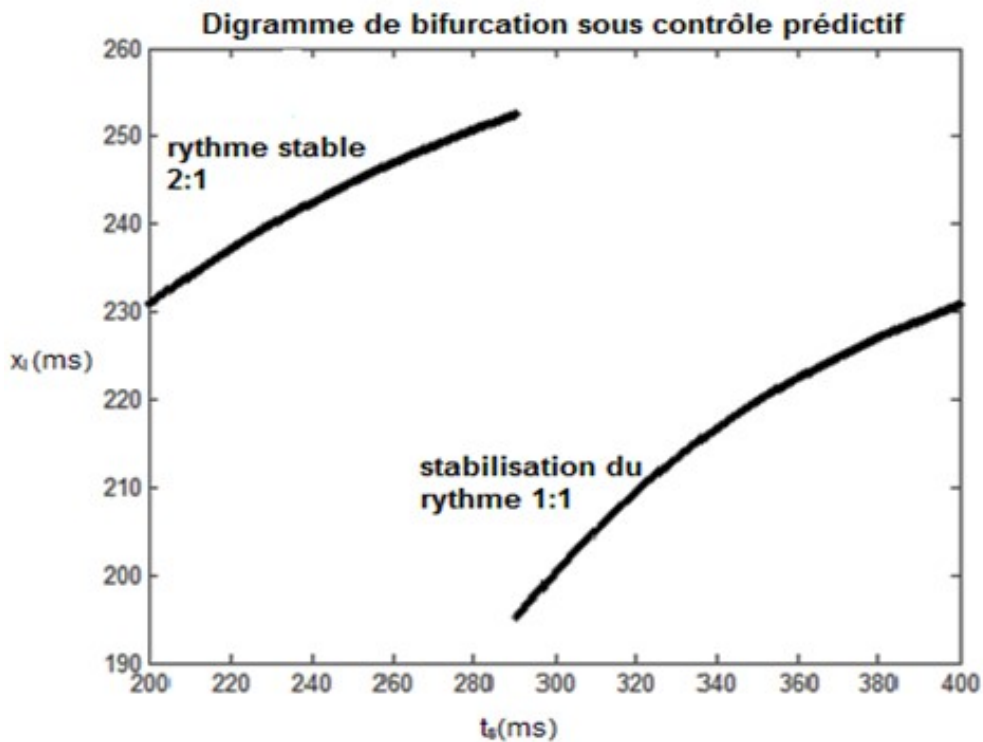


Fig. 4.5. Diagramme de bifurcation (4.4) sous contrôle prédictif du système de l'APD sans mémoire. Stabilisation du rythme 1 :1 et suppression de la bistabilité entre 2 :2 et 2 :1. $x(1) = 198 \text{ ms}$, $\varepsilon = 7.7$, $K = -0.2$.

Lorsque le rythme périodique $2N : 2$, $N > 1$ commence à osciller à partir des premières itérations entre deux points très proches (comme le rythme $6 : 2$, $8 : 2$ et $12 : 2$), l'algorithme prédictif est activé lors de la première itération.

Par exemple, à $t_s = 100.6 \text{ ms}$, le rythme périodique $6 : 2$ est supprimé et le rythme instable $6 : 1$ se stabilise asymptotiquement après deux battements pour une condition initiale arbitraire du bassin d'attraction global $[42 \text{ ms}, 270 \text{ ms}]$ (voir Fig 4.6 (a)) ou du bassin d'attraction restreint $[200.12 \text{ ms}, 202.08 \text{ ms}]$ (Fig 4.6 (b)) de sorte que la valeur de la distance de contrôle soit supérieure ou égale à $\varepsilon = 1,96 \text{ ms}$. On donne la valeur du gain appropriée pour contrôler le rythme périodique $6 : 2$ dans le Tableau 2.

| K | ε_j | $x(1)$ |
|------|-----------------|--------|
| -0.4 | 1.96 ms | 240 ms |
| -0.4 | 1.96 ms | 202 ms |

Tableau 2. Stabilisation du rythme $6 : 1$

Valeurs des paramètres K , ε_j , et $x(1)$

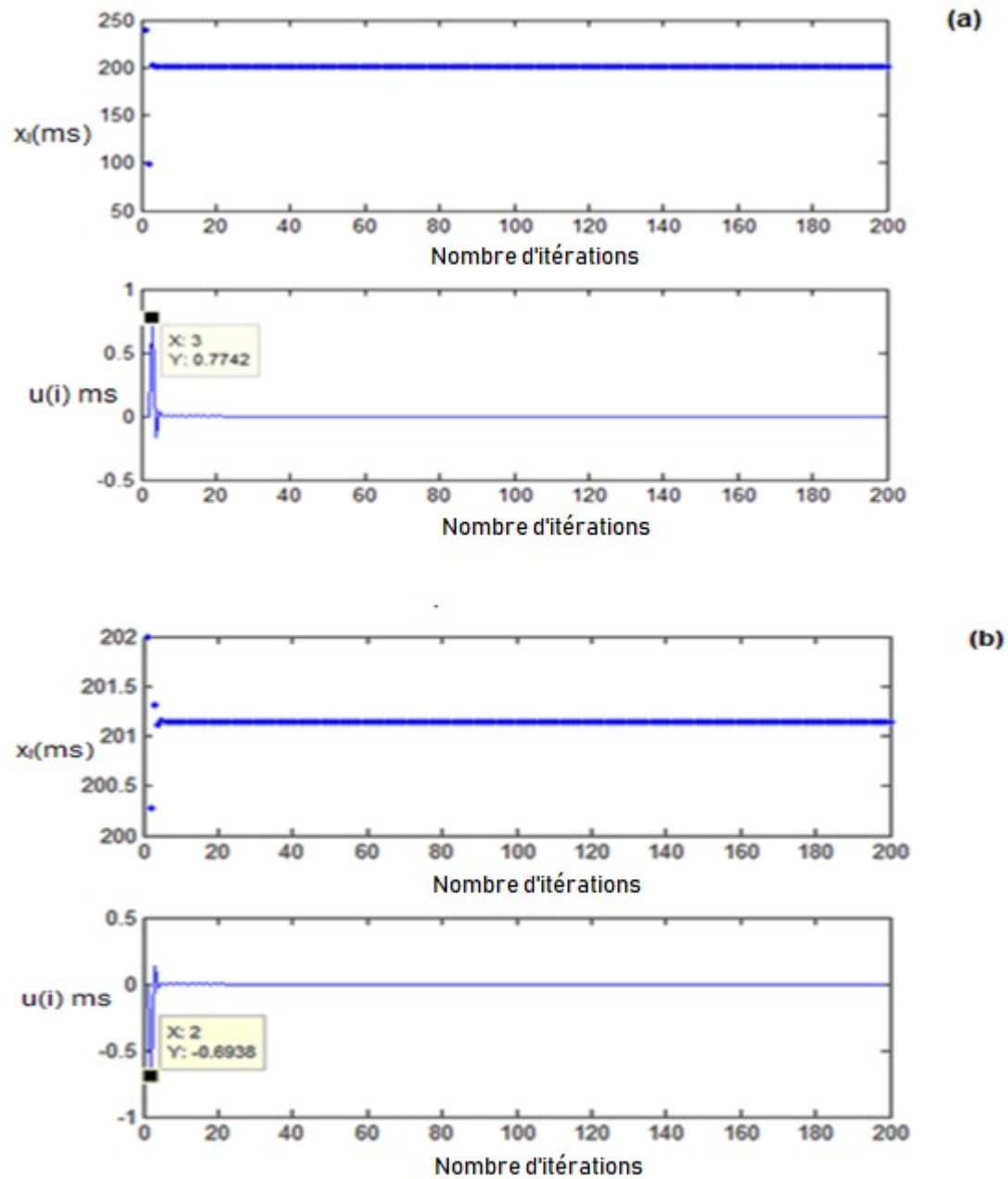


Fig. 4.6. Initiation du contrôle prédictif du rythme périodique 6 : 2. (a) après 2 battements. (b) après 1 battement. Après l'activation du contrôle dans (a) ou (b), $x(i)$ évolue vers le rythme 6 : 1 jusqu'à atteindre la stabilité asymptotique.

4.2.3 Influence du bruit

En raison de l'ergodicité, le voisinage de cette période finit toujours par être visité. On applique alors le contrôle quand la trajectoire entre dans ce voisinage. En présence d'un bruit externe, si une fluctuation aléatoire l'en fait sortir le contrôle est alors désactivé pour le reprendre quand elle revient dans le bassin d'attraction restreint du point fixe instable souhaité

Cependant, il convient de noter que le bruit n'affecte pas le comportement du système une fois que le contrôle est mis en place.

Par exemple à $t_s = 302 \text{ ms}$, l'alternance bruitée est supprimée pour une condition initiale arbitraire $x(1) = 240 \text{ ms}$, la valeur du gain de contrôle est $K = -0.1$, et la distance du contrôle est donné par $\varepsilon_j = 9 \text{ ms}$.

Le contrôle est activé après 101 battements en appliquant de petites perturbations continues, $x(i)$ convergent vers le rythme 1 : 1 pendant que la stabilité est effectuée (Fig.4.7 (a)).

Cependant, afin de supprimer immédiatement l'alternance bruitée, on choisit une condition initiale du bassin d'attraction restreint du point fixe désiré, par exemple, $x(1) = 199 \text{ ms}$, la valeur du gain de contrôle est $K = -0.99$, et la distance du contrôle est donné par $\varepsilon_j = 9 \text{ ms}$.

Le contrôle est activé après un seul battement en appliquant de petites perturbations continues, $x(i)$ convergent rapidement vers le rythme normal 1 : 1 et la stabilité est effectuée (Fig.4.7 (b)).

Les deux figures Fig.4.7 (a) et Fig.4.7(b) montrent bien que le contrôle est robuste face à des perturbations externes.

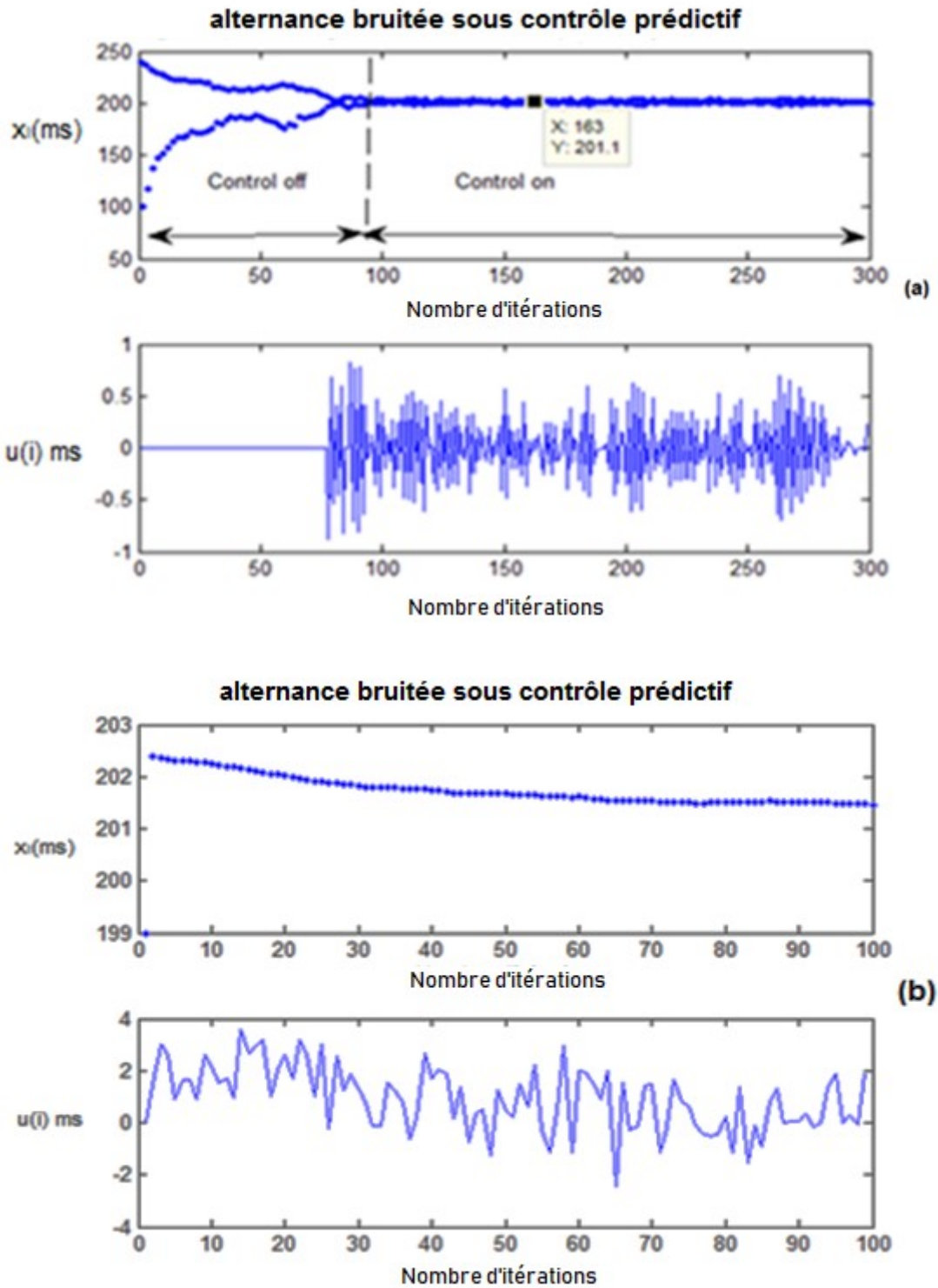


Fig. 4.7. Suppression de l'alternance bruitée par le contrôle prédictif : (a) après 101 battements, (b) après 1 battement.

4.3 Discussion

L'étude du contrôle de l'alternance du système itératif de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) sans mémoire permet d'exprimer la durée du potentiel d'action cardiaque actuelle en fonction de la précédente.

L'alternance est souvent observée juste avant l'apparition des arythmies ventriculaires malignes telles que la tachycardie ventriculaire (TV) ou la fibrillation ventriculaire (FV). Il est évident est que s'il y a une relation causale entre l'alternance et les arythmies ventriculaires potentiellement létales, alors la suppression de l'alternance pourrait empêcher l'émergence éventuelle des TV et FV.

Une méthode de contrôle prédictif non linéaire est proposée pour diriger la trajectoire périodique vers le bassin d'attraction restreint du point d'équilibre instable afin de contrôler l'alternance $2 : 2$ et les rythmes périodiques $2N : 2$ ($N > 1$).

Dans le contrôle prédictif du chaos, on utilise "*la distance de contrôle*" qui est le diamètre du voisinage du point fixe instable désiré, elle est infinitésimale et arbitraire pour contrôler la trajectoire chaotique.

En outre, après l'activation du contrôle du chaos, le temps peut être long. Se pose alors le problème de trouver les moments d'activation de la méthode de contrôle pour assurer le contrôle des points fixes instables, notre méthode résout précisément ce problème. Si on itère une condition initiale arbitraire à partir du bassin d'attraction restreint du point fixe instable désiré, la trajectoire contrôlée ne visitera pas le voisinage de chacun des points fixes instables pour se rapprocher d'un point fixe instable désiré. Ainsi, la distance du contrôle est soigneusement déterminée (voir Fig.4.3 (a) et (b)). Par conséquent, dans ce cas, le temps écoulé avant l'activation du contrôle est nul. Cet algorithme développé pour le contrôle de la dynamique cardiaque est efficace pour diriger les rythmes périodiques et l'alternance vers le point d'équilibre ou le rythme normal, et il peut être appliqué pour contrôler le rythme bruyant. Les résultats numériques très satisfaisants plaident en faveur de l'efficacité de la méthode proposée. De

plus, on généralise nos résultats à des dimensions supérieures à 1 en s'appuyant sur des travaux récents présentés dans les chapitres suivants.

La suppression de l'alternance cardiaque a des implications cliniques importantes. En effet, l'alternance dans le rythme cardiaque précède souvent les arythmies potentiellement mortelles et conduisent à un facteur de risque de la mort subite. Si un algorithme de contrôle similaire à celui proposé dans la présente étude était incorporé dans un stimulateur cardiaque, les alternances pourraient être supprimées et l'issue menant à une arythmie fatale serait réduite.

Chapitre 5

Nouvelle stratégie de contrôle de la dynamique périodique

Le présent chapitre présente une nouvelle approche de contrôle de la dynamique périodique stable des systèmes dynamiques discrets non linéaires. Ainsi, il est procédé à la suppression de l'orbite périodique afin de stabiliser le point fixe instable désiré (ou orbite de période 1). L'idée principale est de forcer la dynamique en utilisant le contrôle prédictif pour suivre l'état stationnaire dès la première itération et ne pas laisser la dynamique évoluer vers une dynamique périodique.

Cette méthode est appliquée à la prévention de certain pathologies cardiaques telles que les alternances, souvent observées juste avant l'apparition d'arythmies ventriculaires malignes comme la tachycardie ventriculaire (TV) et la fibrillation ventriculaire (FV). Il est évident que s'il y a une relation de cause à effet entre les alternances (ou orbite de période 2) et les arythmies, alors l'élimination des alternances empêcherait l'émergence éventuelle de TV et de FV. Il est alors évident que le contrôle des alternances dès leur apparition ramènerait le cœur à son "*rythme sinusal normal*", i.e. son orbite habituelle de la période 1.

D'un point de vue de la méthode mathématique, contrairement à l'activation du contrôle au voisinage du point fixe (voisinage de taille arbitraire et infinitésimale) on montre que le contrôle est appliqué lorsque l'état actuel entre dans le

bassin d'attraction restreint du point fixe instable désiré (ou orbite de période 1) et que l'état prédit diverge de ce bassin. La taille de ce dernier est convenablement estimée et n'est pas arbitraire que ce soit dans le contrôle du chaos ou dans la suppression des orbites périodiques stables. Plus spécifiquement, dans ce chapitre on propose une amélioration de l'estimation de cette taille.

Le travail réalisé sur la nouvelle approche pour contrôler la dynamique périodique stable et les résultats obtenus font l'objet d'un article soumis à publication dans une revue internationale [111].

5.1 Le cas discret unidimensionnel

Lorsque les oscillations chaotiques dégradent les performances d'un système naturel ou artificiel, les stratégies de contrôle visent souvent à créer un comportement stable et périodique. S'il est important de ne pas modifier la dynamique intrinsèque d'un système, soit parce que ces dynamiques sont l'objet d'étude, soit parce que l'énergie disponible pour le contrôle est limitée, la possibilité de stabiliser une orbite périodique instable (UPO) intégrée dans la dynamique chaotique devient très attractive [37].

Parfois, les oscillations périodiques peuvent aussi dégrader les performances d'un système naturel comme la dynamique périodique de la durée du potentiel d'action cardiaque, à savoir l'alternance considérée comme un rythme pathologique antérieur aux arythmies les plus complexes et potentiellement mortelles (voir les chapitres 3 et 4). Retarder cette transition peut être une mesure efficace pour prévenir la fibrillation ventriculaire et la mort subite.

Le but de ce chapitre est de développer une nouvelle approche théorique permettant un traitement du contrôle prédictif pour la suppression des orbites périodiques stables résultant d'une bifurcation de doublement de période. On a réussi à traiter analytiquement l'algorithme de contrôle non seulement pour les systèmes itératifs unidimensionnels mais également pour ceux de dimensions quelconques. Les principaux résultats sont pertinents pour tout système proche

des points de bifurcation associés.

5.1.1 Principe de l'algorithme

Soit le système dynamique non linéaire discret de dimension 1 suivant :

$$x(i + 1) = f(x(i)), \quad x(i) \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}) \quad (5.1)$$

Définition 49 Soient $f \in C^1(\mathbb{R})$ et x^* le point d'équilibre de f . Le bassin d'attraction de x^* , noté $B(x^*)$, est l'ensemble des points $x(0)$ tel que :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |f^i(x(0)) - f^i(x^*)| = 0$$

Le problème est de caractériser les comportements asymptotiques ($i \rightarrow +\infty$) des trajectoires périodiques stables sous contrôle prédictif en dimension 1, en perturbant les itérés $x(i + 1)$.

On considère que l'orbite de m périodes ou le m -cycle ($m \neq 1$) sont choisis comme asymptotiquement stables. On veut mettre en évidence le contrôle des orbites périodiques stables ou la suppression du m -cycle stable ($m \neq 1$).

L'idée de base est de prévoir l'état d'équilibre du système (5.1) pendant la dynamique périodique, et d'appliquer une petite perturbation $u(i)$ de la formule suivante donnée dans le chapitre 3 :

$$u(i) = K(x(i + 1) - x(i)) \quad (5.2)$$

où le réel K représente le gain de contrôle obtenu à partir de la linéarisation du système à l'état périodique sous contrôle prédictif autour du point fixe instable désiré de la façon suivante :

$$F(x(i)) = f(x(i)) + u(i) \quad (5.3)$$

On note $\{F^i(x_0)\}_{i=1}^{i=+\infty}$, l'orbite de x_0 (ou la trajectoire issue de x_0) sous contrôle u correspondant ;

et $F^i(x_0) = x(t_i, x_0)(t_i \in \mathbb{R}) =$ l'unique solution du système (5.3) passant par x en $t_i = 0$.

On suppose maintenant que l'on veuille supprimer une dynamique périodique stable en utilisant le contrôle prédictif. En particulier, on veut que la trajectoire résultant d'une condition initiale arbitraire soit aussi proche que possible de l'orbite d'une seule période (ou du point fixe), en supposant que l'orbite périodique stable ne donne pas la meilleure performance du système, comme l'alternance de la durée du potentiel d'action (APD) dans la dynamique cardiaque [69 – 72, 93 – 98].

Pour avoir une suppression du m -cycle ($m \neq 1$) par le contrôle prédictif et forcer la trajectoire de rester aussi proche que possible du point fixe, il est important et nécessaire d'estimer la distance de contrôle, en l'occurrence la taille du bassin d'attraction restreint du point fixe instable et d'appliquer uniquement de petites perturbations.

En fait, le contrôle du chaos présenté dans la littérature (et également dans le chapitre 3) est garanti à cause de l'ergodicité de l'attracteur chaotique, c'est-à-dire : une trajectoire issue d'un point typique de l'attracteur passe, si l'on attend suffisamment longtemps, arbitrairement près de tout point de l'attracteur, y compris du point du départ. Les points fixes inclus dans l'attracteur étant instables, une trajectoire, passant dans le voisinage de l'un d'entre eux, y séjournera un court instant avant de s'en éloigner pour visiter d'autres régions de l'attracteur [144]. Cependant, une dynamique périodique donnée par un cycle asymptotiquement stable n'est plus ergodique, la trajectoire évolue vers le cycle ne visite pas forcément un petit voisinage du point fixe instable désiré. Pour parvenir à ramener la trajectoire au voisinage du point fixe, la forcer à rester dans ce voisinage et faire évoluer la dynamique asymptotiquement vers ce point d'équilibre on doit suivre les étapes de l'algorithme suivant :

1. Localiser le point fixe instable voulu x^* .
2. Laisser le système évoluer asymptotiquement à partir d'une condition initiale $x(0)$ vers un cycle, puis déterminer l'état $x(n)$ le plus proche état du point fixe instable.
3. Déterminer l'état prédit du point fixe x^* donné par $x(n + 1)$.

4. Ajouter une petite perturbation $u(n)$ de la forme (5.2) à l'état prédit $x(n+1)$ afin de se rapprocher du point fixe.

On fait l'hypothèse que la zone de contrôle soit le bassin d'attraction restreint du point fixe instable, stabilisé par le contrôle, avec une taille ε convenablement estimée (voir le chapitre précédent) :

$$\varepsilon = |x(n+1) - x(n)| \tag{5.4}$$

On donne une définition du bassin d'attraction restreint du point fixe instable,

Définition 50 *Soit x^* un point d'équilibre instable du système itératif (5.1), et stabilisé par le système itératif (5.3). Alors le bassin d'attraction restreint de x^* , noté $B^r(x^*)$, est l'ensemble de conditions initiales $x(0) \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$, tel que :*

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |F^i(x(0)) - F^i(x^*)| = 0$$

Le contrôle se déclenche lorsque l'état prédit du point d'équilibre représenté par l'état futur du point $x(n)$ diverge du bassin d'attraction restreint dont la taille est convenablement estimée selon la relation (5.4) (voir les exemples ci-dessous). L'état $x(n+1)$ sera perturbé et attiré vers le point fixe.

Alors, le diamètre epsilon (ε) de la zone de contrôle n'est pas arbitraire et peut prendre des valeurs supérieures à 1 (voir le contrôle de la dynamique périodique de l'APD présenté dans le chapitre 4).

On prouve le résultat suivant :

Théorème 51 [111] *Soient $f \in C^1(\mathbb{R})$ et le système itératif $x(i+1) = f(x(i))$, $x(i) \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, avec un m -cycle ($m \neq 1$) asymptotiquement stable. Quelque soit $\varepsilon > 0$ satisfaisant (5.4), s'il existe un réel K , le gain feedback de contrôle tel que,*

$$|f'(x^*) + K \cdot (f'(x^*) - 1)| < 1$$

alors le m -cycle ($m \neq 1$) stable est supprimé pour le système itératif (5.3) et le point fixe est localement asymptotiquement stable.

Démonstration : Le point fixe x^* de l'application itérative f est aussi un point fixe de l'application itérative F .

En effet, le point fixe x^* vérifie l'égalité $x(i + 1) = x(i) = x^*$, d'où, $u(i) = K(x(i + 1) - x(i)) = 0$. Alors, $F(x^*) = f(x^*) + u(i) = x^*$.

La linéarisation de l'équation (5.3) autour du point fixe instable x^* est donnée par :

$$\delta F(x(i)) = (K(f'(x^*) - 1) + f'(x^*)) \delta x(i) \quad (5.5)$$

Le point fixe x^* est stabilisé avec le contrôl prédictif si la valeur du gain du contrôle K satisfait l'inégalité suivante :

$$|f'(x^*) + K(f'(x^*) - 1)| < 1 \quad (5.6)$$

Considérant l'itération à partir d'une condition initiale arbitraire $x(0)$ pour le système (5.1), lorsque la dynamique périodique de f est asymptotiquement stable, alors la trajectoire converge vers un m -cycle $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\} (m \neq 1)$, d'où, le m -cycle ($m \neq 1$) est asymptotiquement stable.

Considérant le bassin d'attraction restreint du point fixe instable, et stabilisé par le contrôle, de taille ε , $\varepsilon = |x(i + 1) - x(i)|$.

$$\begin{aligned} |F(x(i)) - x^*| &= |x(i + 1) + K(x(i + 1) - x(i)) - x^*| \\ &= |(K + 1)(x(i + 1) - x(i)) + x(i) - x^*| \\ &\leq \varepsilon \cdot |K + 1| + |x(i) - x^*| \end{aligned}$$

Alors, $\forall \zeta > 0, \exists \delta_\zeta > 0 ; \delta_\zeta = \zeta - \varepsilon|K + 1|$

$$|x(i) - x^*| < \delta_\zeta \Rightarrow |F(x(i)) - x^*| < \zeta \quad \forall i$$

Selon la théorie fondamentale des systèmes dynamiques, la solution $F_{t_i}(x_0) = F^i(x(0))$ du système linéarisé (5.5) est donné par :

$$F^i(x(0)) - x^* = [K(f'(x^*) - 1) + f'(x^*)]^i x(0) + o((F^i(x(0))) - x^*)^2)$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} F(x(i)) = x^*$$

d'où la trajectoire contrôlée converge asymptotiquement vers le point fixe x^* .

Le m -cycle $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, \dots, x_m^*\}$ ($m \neq 1$) stable de l'application itérative f est supprimé par l'application itérative F .

$$F(x_k^*) = f(x_k^*) + K(f(x_k^*) - x_k^*) \quad i.e. \quad F(x_k^*) \neq x_{k+1}^*$$

Effectivement, si l'état périodique x_k^* de l'application itérative f est le plus proche itéré du point fixe instable x^* , *i.e.*, $|x_k^* - x^*| < \delta$; alors, l'état prédit non contrôlé x_{k+1}^* ($x_{k+1}^* = f(x_k^*)$) sera perturbé par une petite perturbation $u(k)$ afin de générer l'état contrôlé $F(x_k^*)$, tel que $F(x_k^*) = x_{k+1}^* + u(k)$; d'où $F(x_k^*) \neq x_{k+1}^*$.

5.1.2 Application au système discret de l'APD (sans mémoire)

Afin de souligner l'intérêt de la méthode de contrôle est essentiel dans le cas de l'APD, il est bon de rappeler que de nombreuses cellules du corps ont la capacité de subir une dépolarisation transitoire et une repolarisation qui est soit déclenchée par des mécanismes externes (par exemple, stimulation nerveuse motrice du muscle squelettique ou dépolarisation de cellule à cellule dans le cœur) ou par des mécanismes spontanés intracellulaires.

Les cellules cardiaques sont excitables en ce sens qu'un bref stimulus électrique peut provoquer une élévation prolongée de la tension transmembranaire connue dénommée potentiel d'action. Ces potentiels d'action se propagent à travers le tissu parce que les cellules voisines sont connectées électriquement via des canaux intercellulaires (appelées jonctions lacunaires) et ces ondes électriques propagatives coordonnent la contraction du muscle cardiaque selon les besoins pour un pompage efficace du sang. Comprendre le timing de ces ondes est un premier pas vers la détection et la prévention des arythmies potentiellement fatales.

Comme cela a été déjà explicité précédemment au lieu de considérer le système des EDO qui constituent les modèles membranaires ioniques, on utilise le

modèle discret décrivant l'*APD* (durée du potentiel d'action) en fonction des valeurs précédentes de *DI* (intervalle diastolique).

Les effets d'une stimulation périodique sur un brin de muscle ventriculaire ont été étudiés par Lewis et Guevara [69]. Les stimulations électriques appliquées à intervalles de temps réguliers (notés t_s) génèrent un potentiel d'action. Pour t_s arbitraire, la durée actuelle de tout potentiel d'action est donnée par le précédent comme suit :

$$x(i+1) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right)$$

où $x(i+1)$ est l'*APD* à l'itération $(i+1)$, et n le paramètre de blocage dans la production d'un potentiel d'action avec la condition

$$nt_s - x(i+1) \geq DI_{\min}$$

Les constantes $A, B_1, B_2, \tau_1, \tau_2, DI_{\min}$ sont liées aux contraintes électro-physiologiques du coeur comme définies dans [69] :

$$A = 270 \text{ ms}, B_1 = 2441 \text{ ms}, B_2 = 90.02 \text{ ms},$$

$$\tau_1 = 19.6 \text{ ms}, \tau_2 = 200.5 \text{ ms}, DI_{\min} = 53.5 \text{ ms}.$$

Pour $t_s = 302 \text{ ms}$ le rythme normal 1 : 1 (ou point d'équilibre) perd sa stabilité, l'alternance 2 : 2 (ou orbite de période 2) se produit et la valeur de l'*APD* oscille entre deux valeurs 204.9 ms et 197.3 ms.

Il a été montré dans [69 – 72, 93 – 98, 145] que bien que les alternances aient un comportement régulier, elles correspondent toutefois à des rythmes pathologiques, en effet elles génèrent des rythmes chaotiques irréguliers dont la fibrillation ventriculaire (VF).

Dans nos travaux publiés dans DCDS [107], il est montré que l'alternance ou le rythme 2 : 2 peut être supprimé et remplacé par le rythme normal 1 : 1. Dans un premier temps la méthode de dichotomie est appliquée pour déterminer la

valeur du point fixe instable : $x^* = 201.2306 \text{ ms}$, puis dans un deuxième temps, l'estimation de la taille du bassin d'attraction restreint du point fixe instable x^* conduit à $\varepsilon = 7.7 \text{ ms}$ pour $x(1) = 240 \text{ ms}$,

L'ajout du terme de contrôle $u(i) = K(x(i+1) - x(i))$ à l'expression de $x(i+1)$

$$F(x(i)) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right) + u(i)$$

puis la linéarisation au voisinage du point fixe instable $x^* = 201.2306 \text{ ms}$ permet d'obtenir la stabilité de ce point à la condition que $K \in]-1, 0[$.

L'intérêt et l'efficacité de cette méthode de contrôle réside dans le fait que pour une condition initiale arbitraire du bassin global d'attraction $[42\text{ms}, 248.5\text{ms}]$ du point fixe stabilisé, le contrôle n'est effectué qu'après plusieurs itérations. Cependant, dans le cas d'une condition initiale prise dans le bassin d'attraction restreint $[193.5\text{ms}, 208.9\text{ms}]$, le contrôle est effectif dès la première itération (voir Fig.5.1(a) et Fig.5.1(b)).

Les valeurs de ε dépendent des conditions initiales (voir Fig.5.2(a) et Fig.5.2(b)) :

| | |
|------------------|------------------|
| $x(1)$ | ε |
| 240 ms | 7.7 ms |
| 200 ms | 2.5 ms |

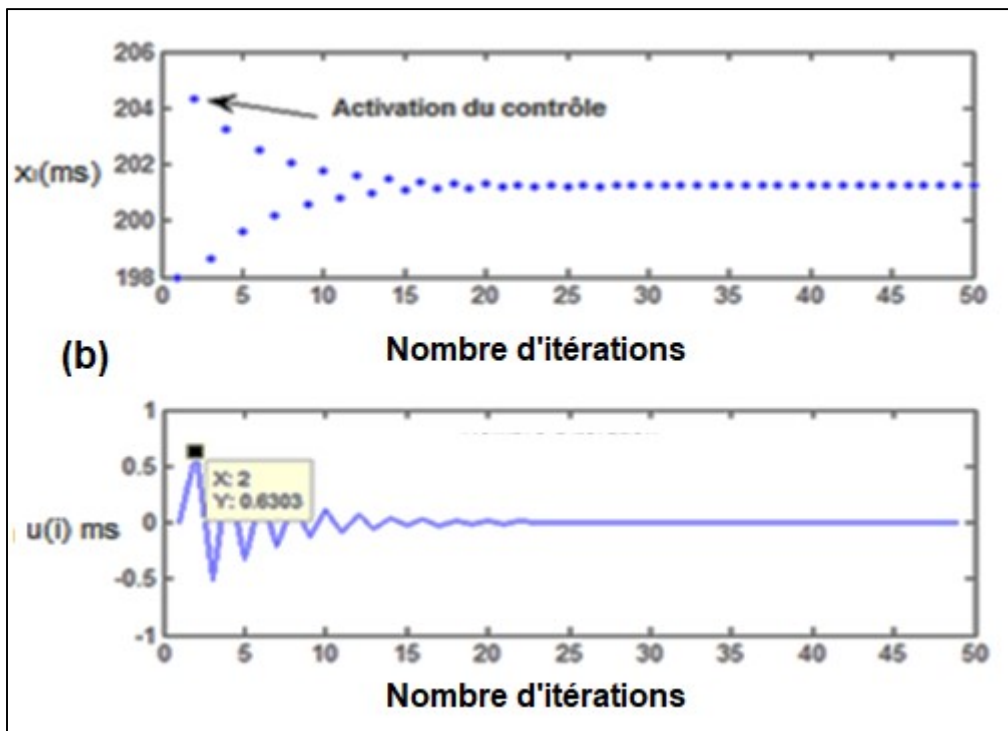
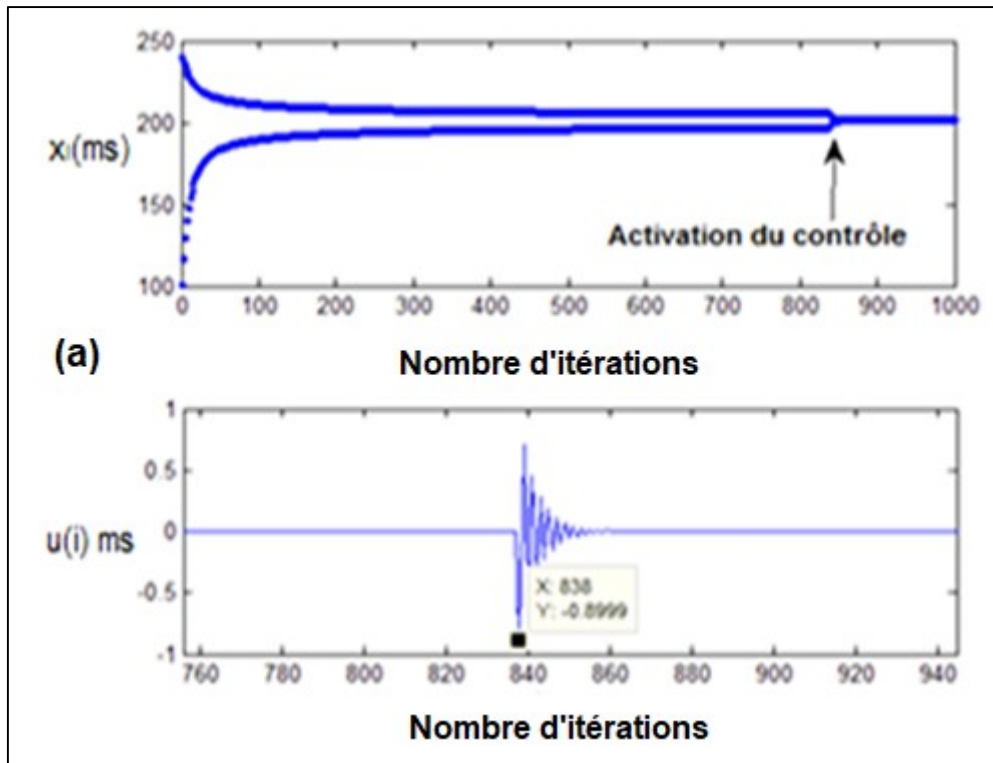
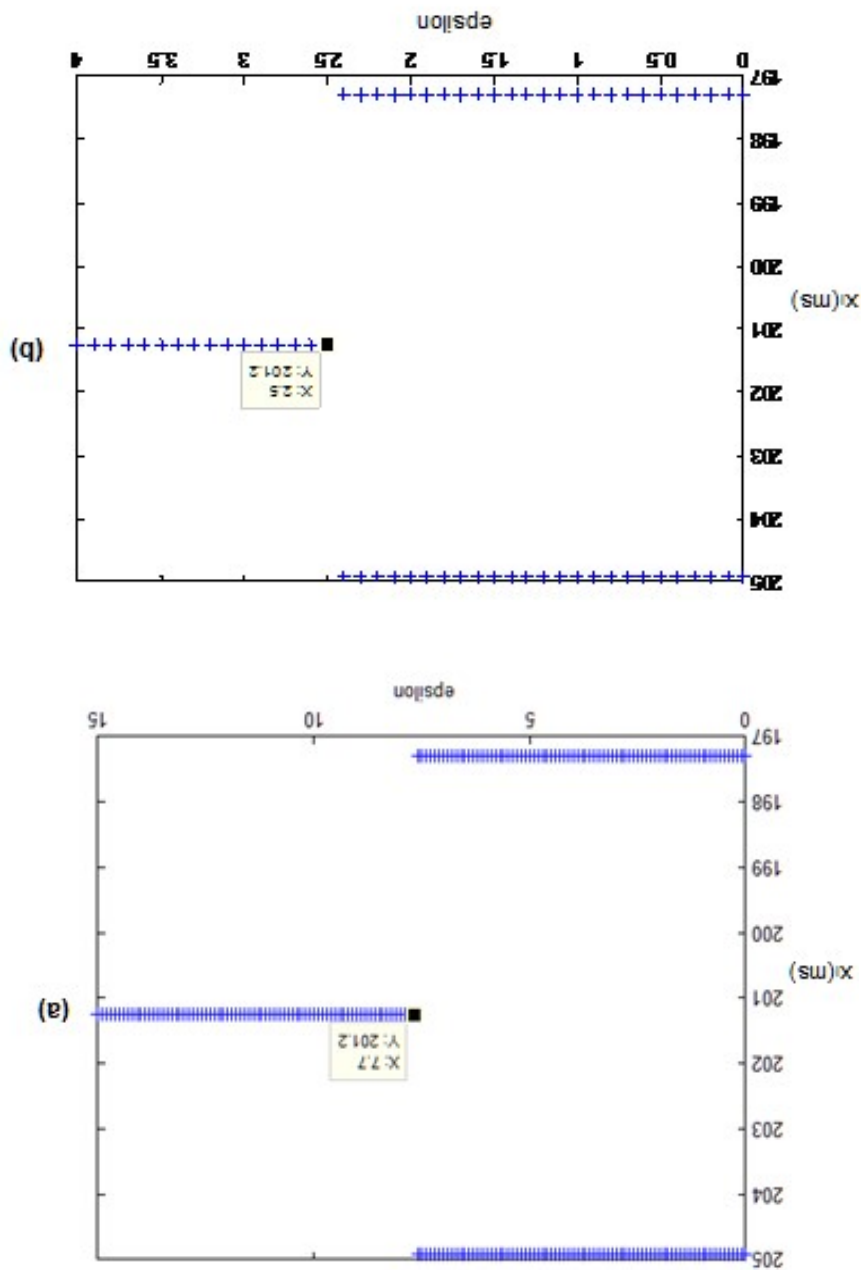


Fig. 5.1. Initiation du contrôle prédictif de l'alternance 2: 2, (a) après 838 battements d'alternance, (b) après seulement un battement d'alternance. Après l'initiation du contrôle $x(n)$ reste au voisinage de x^* jusqu'à la stabilité asymptotique du rythme 1: 1.

Fig. 5.2. Diagramme de bifurcation $(x(i) \text{ vs. } \epsilon)$ sous contrôle prédictif pour $t_s = 302 \text{ ms}$, $K = -0.1$. À chaque ϵ , l'équation (4.12) a été itérée 20000 fois et les 19800 premiers itérés ont été rejetés pour supprimer les états transitoires dus aux conditions initiales avec un pas égal à 0.1ms. (a) $x(0) = 240 \text{ ms}$, $0 \leq \epsilon \leq 15 \text{ m}$, (b) $x(0) = 200 \text{ ms}$, $0 \leq \epsilon \leq 4 \text{ m}$



5.1.3 Application à l'équation logistique

On considère l'application unidimensionnelle suivante [146] :

$$f(x(i)) = rx(i)(1 - x(i)), \quad 0 \leq r \leq 4, \quad x(i) \in [0, 1] \quad (5.7)$$

- Pour $0 < r < 1$, il existe un point fixe stable $x^* = 0$.
- Pour $1 \leq r < 3$, il apparaît un autre point fixe stable $x^* = 1 - 1/r$.
- Pour $3 \leq r < 3.4494$, le point fixe x^* devient instable et l'attracteur est un 2-cycle stable (ou orbite de 2 périodes).

Si le paramètre r augmente encore, une bifurcation de doublement de période se produit pour laquelle des orbites d'une période doublée deviennent stables de période 4, 8, 16, 32...

On considère le cas $r = 3.3$ pour lequel le point fixe $x^* = 0.6969$ est instable et la dynamique oscille entre deux points périodiques : $x_1^* = 0.8236$ et $x_2^* = 0.4794$.

On veut supprimer la trajectoire périodique stable de condition initiale arbitraire $x(1)$ appartenant au bassin d'attraction $[0, 1]$, pour être aussi proche que possible du point fixe (Fig.5.3).

On estime à partir de (5.4) la taille du bassin d'attraction restreint du point fixe instable x^* et stabilisé par le contrôle, on obtient $\varepsilon = 0.019$ pour $x(1) = 0.9$ et on ajoute le terme du contrôle $u(i)$ de la forme (5.2) au flot du système (5.7) :

$$F(x(i)) = rx(i)(1 - x(i)) + u(i) \quad (5.8)$$

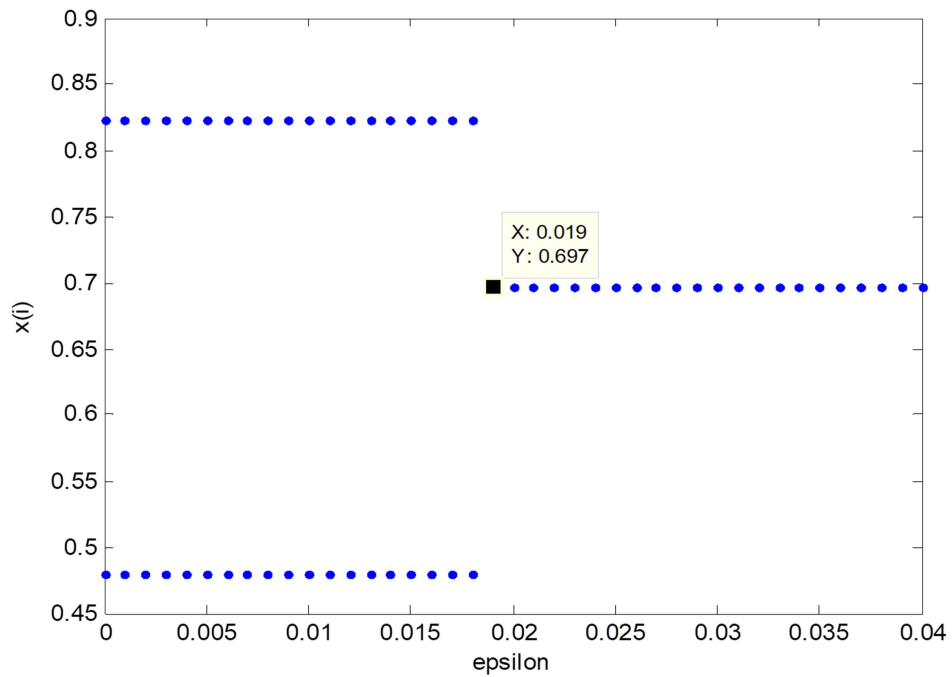


Fig. 5.3 (a). Diagramme de Bifurcation de l'application logistique sous contrôle prédictif ($x(i)$ vs. ϵ) pour $0 \leq \epsilon \leq 0.04$ avec un pas = 0.001, l'application contrôlée (5.8) est itérée 20000 fois et les 10000 premiers itérés transitoires sont supprimés, pour $r = 3.3, x(0) = 0.9, K = -0.9$, Le 2-cycle est supprimé pour $\epsilon \geq 0.019$.

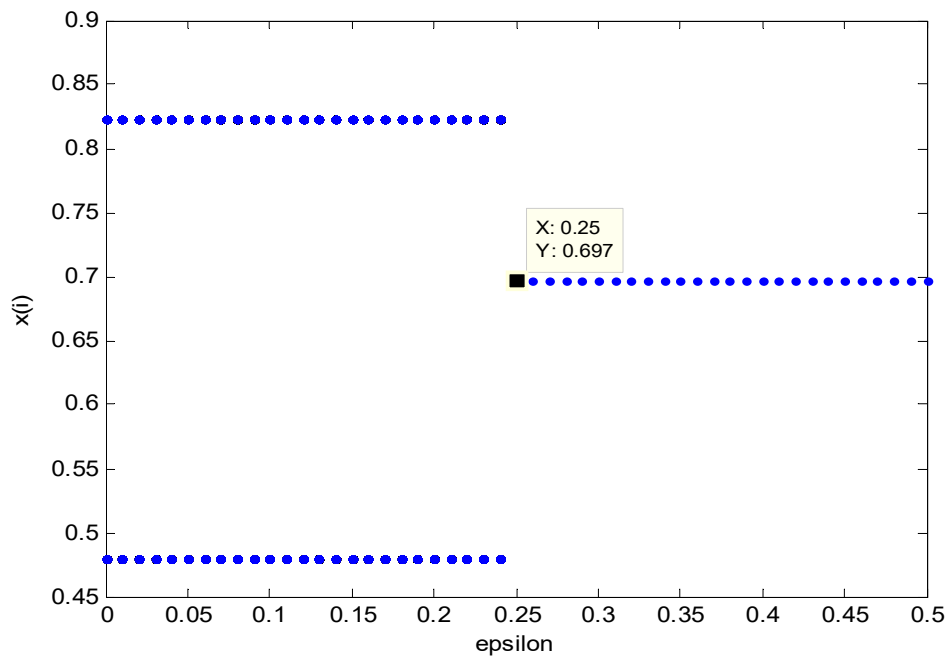


Fig.5.3 (b). Diagramme de bifurcation de l'application logistique sous contrôle prédictif ($x(i)$ vs. ϵ) pour $0 \leq \epsilon \leq 0.5$ avec un pas de 0.01, le système contrôlé (5.8) est itéré 20000 fois et les 10000 premiers itérés transitoires ont été supprimés, pour $r = 3.3, K = -0.9, x(0) = 0.4$, le 2-cycle est supprimé avec $\epsilon \geq 0.25$.

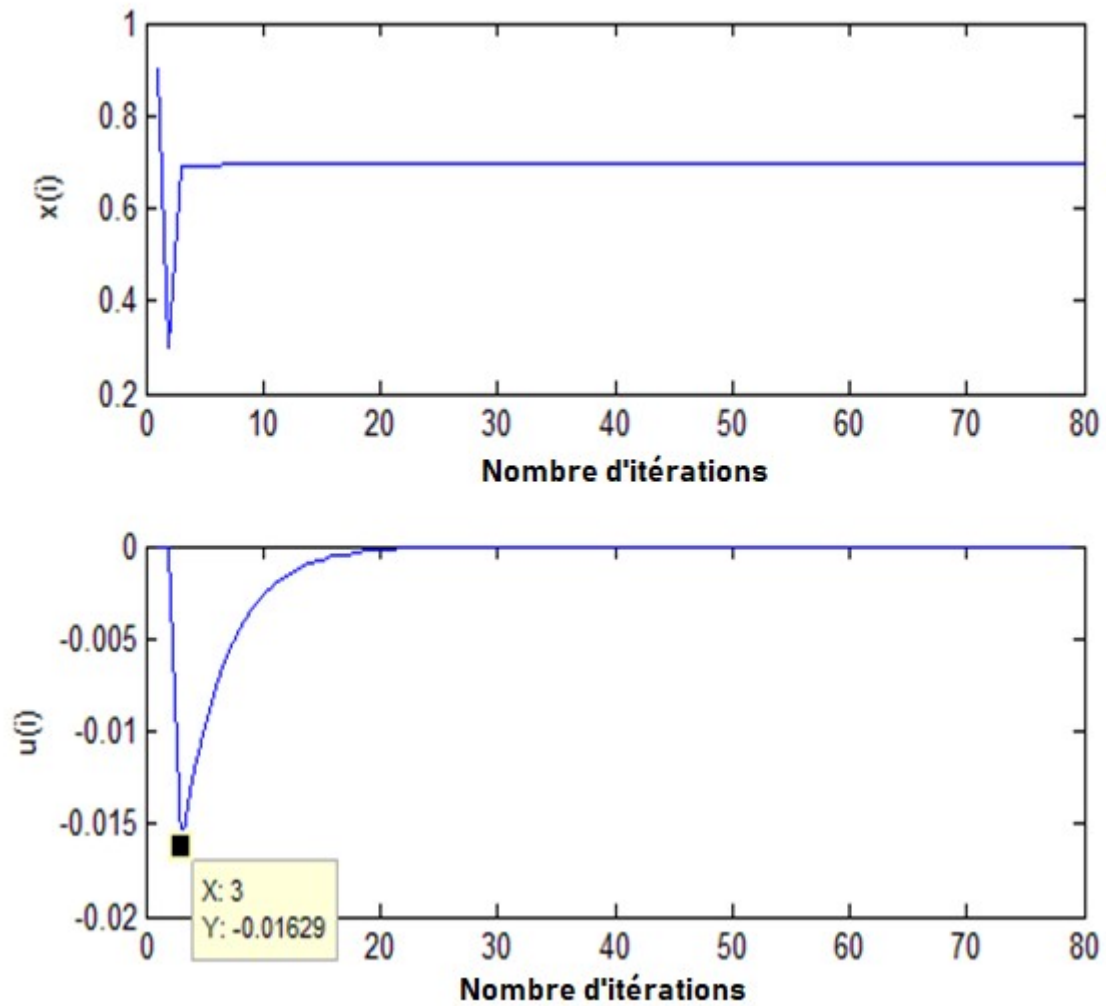


Fig. 5.3 (c). Évolution de $\mathbf{x}(i)$ et $\mathbf{u}(i)$ de l'application logistique sous contrôle prédictif pour $\mathbf{r} = 3.3$, $\mathbf{x}(0) = 0.9$, $\mathbf{K} = -0.9$, $\boldsymbol{\varepsilon} = 0.019$, le 2-cycle est supprimé dès la première itération.

La linéarisation du système résultant (5.8) autour du point fixe instable x^* est effectuée et la stabilité du point fixe se produit pour la condition $K \in]-1, -0.13[$.

La valeur estimée de ε dépend du choix des conditions initiales (Fig.5.3 (a) et (b)) pour la suppression de 2-cycle de l'application logistique.

Les conditions convenables pour la suppression du 4-cycle (Fig.5.4) sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 3.5 \\ x(1) = 0.4 \\ K = -0.9 \\ \varepsilon \geq 0.33 \end{array} \right.$$

Les conditions convenables pour la suppression du 16-cycle (Fig 5.5) sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 3.567 \\ x(1) = 0.4 \\ K = -0.9 \\ \varepsilon \geq 0.25 \end{array} \right.$$

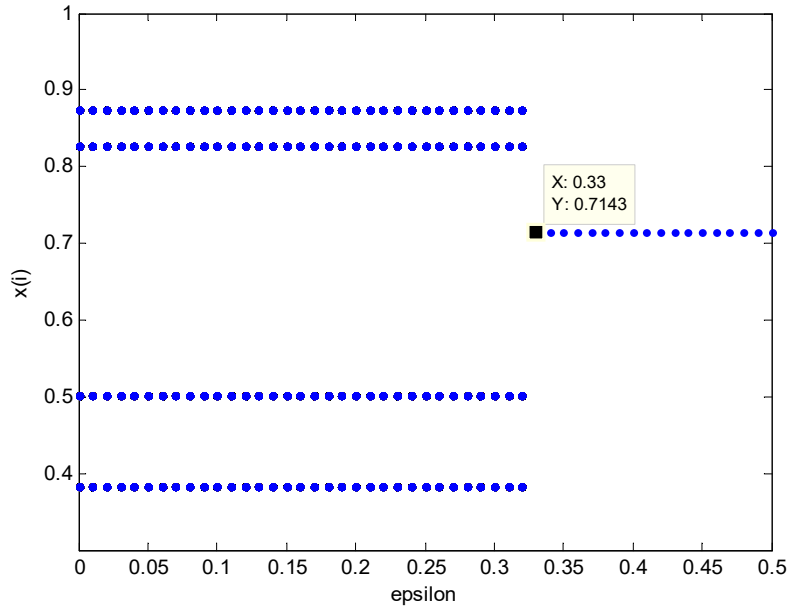


Fig.5.4. Diagramme de bifurcation de l'application logistique sous contrôle prédictif ($x(i)$ vs. ϵ) pour $0 \leq \epsilon \leq 0.5$ avec un pas de 0.01, le système contrôlé (5.8) est itéré 20000 fois, les 10000 premiers itérés transitoires ont été supprimés, pour $r = 3.5$, $K = -0.9$, $x(1) = 0.4$ le 4-cycle est supprimé pour $\epsilon \geq 0.25$.

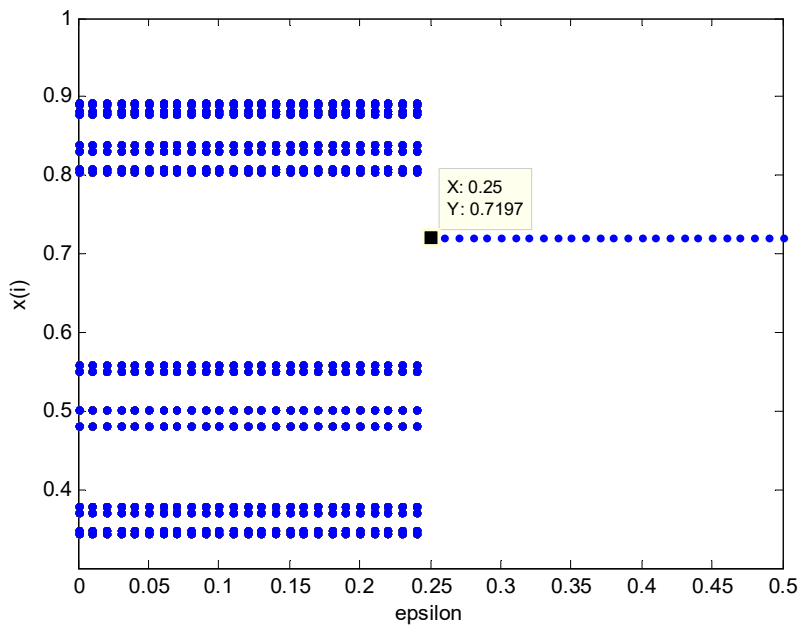


Fig. 5.5. diagramme de bifurcation de l'application logistique sous contrôle prédictif ($x(i)$ vs. ϵ) pour $0 \leq \epsilon \leq 0.5$ avec un pas de 0.01, le système contrôlé (5.8) est itéré 20000 fois et les 10000 premiers itérés transitoires ont été supprimés, pour $r = 3.567$, $K = -0.9$, $x(1) = 0.4$, le 16-cycle est supprimé pour $\epsilon \geq 0.25$.

5.2 Le cas discret multidimensionnel

Dans cette partie on montre que cette méthode de contrôle peut, d'une part, être adaptée pour des **systèmes itératifs de dimension supérieure à 1**, et d'autre part pour développer un outil de détection et de prévention des arythmies potentiellement fatales (le système itératif de **l'APD en dimension 2** ou **APD avec mémoire**)

5.2.1 Principe de l'algorithme

On considère le système itératif multidimensionnel non linéaire suivant défini par :

$$X(i + 1) = f(X(i)), \quad X(i) \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n) \quad (5.9)$$

Les définitions du point fixe et d'un m -cycle sont les mêmes que dans le cas d'une seule dimension, mais l'étude de la stabilité d'un point fixe est étroitement liée à celle des valeurs propres de la matrice Jacobienne $J = Df(X)$.

Considérant le système (5.9) sous le contrôle $U(i)$ dans la forme :

$$F(X(i)) = f(X(i)) + U(i), \quad (X(i), U(i)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (5.10)$$

Soit la matrice diagonale $K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_n)$, tel que :

$$U(i) = K(X(i + 1) - X(i)) \quad (5.11)$$

Autrement dit ;

$$\begin{bmatrix} U_1(i) \\ U_2(i) \\ \vdots \\ U_n(i) \end{bmatrix} = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_n) \times \begin{bmatrix} X_1(i + 1) - X_1(i) \\ X_2(i + 1) - X_2(i) \\ \vdots \\ X_n(i + 1) - X_n(i) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

d'où,

$$U_k(i) = K_k(X_k(i + 1) - X_k(i)), \quad K_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

L'objectif est de trouver le contrôle $U(i)$ tel que le m -cycle ($m \neq 1$) du système (5.9) soit supprimé et la trajectoire du système contrôlé se dirige vers la cible :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|F(X(i)) - X^*\| = 0 \tag{5.14}$$

Définition 52 Soit x^* un point d'équilibre instable du système itératif (5.9), et stabilisé par le système itératif (5.10). Alors le bassin d'attraction restreint de x^* , noté $B^r(x^*)$, est l'ensemble de conditions initiales $x(0) \in B(x^*, \varepsilon)$, tel que :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|F^i(X(0)) - F^i(X^*)\| = 0$$

On propose que la zone (ou domaine) de contrôle soit le bassin d'attraction restreint du point fixe stabilisé par le contrôle. Soit ε la taille de ce domaine, donnée par la norme usuelle suivante :

$$\varepsilon = \|X(i+1) - X(i)\| = \max_{k=1, \dots, n} (|X_k(i+1) - X_k(i)|) \tag{5.15}$$

où $X(i)$ est le plus proche état du point fixe X^* , et $X(i+1)$ détermine l'état futur prédit du système (5.9).

On formule maintenant un résultat le plus simple concernant la suppression d'un m -cycle stable ($m \neq 1$) et la stabilisation du point fixe instable par le contrôle prédictif.

Théorème 53 [111] Soient $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et le système itératif $X(i+1) = f(X(i))$, $X(i) \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$, avec un m -cycle ($m \neq 1$) asymptotiquement stable. Quelque soit $\varepsilon > 0$ satisfaisant (5.15), s'il existe une matrice diagonale $K = \text{diag}(K_1, K_2, \dots, K_n)$, le gain feedback de contrôle de sorte que les modules de toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne du système sous contrôle :

$$F(X(i)) = f(X(i)) + U(i), \quad (X(i), U(i)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{N}$$

où :

$$U_k(i) = K_k(X_k(i+1) - X_k(i)), \quad K_k \in \mathbb{R} \quad k = 1, \dots, n$$

sont inférieures à 1, alors le m -cycle ($m \neq 1$) stable est supprimé pour ce système et le point fixe est localement asymptotiquement stable.

Démonstration : La linéarisation de l'équation (5.16) autour du point fixe instable X^* est donnée par :

$$\delta F(X(i)) = J\delta X(i) \quad (5.16)$$

Le point fixe est stabilisé par le contrôle prédictif si les modules de toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne du système sous contrôle (5.9) sont inférieurs à 1. Comme dans le cas unidimensionnel, cela implique l'existence d'une matrice diagonale gain feedback K .

En considérant l'itération à partir de toute condition initiale $X(0)$ pour le système (5.9), la dynamique converge vers le m -cycle stable $\{P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*\}$ ($m \neq 1$) de l'application itérative f .

Soit $X(i) = (X_1(i), \dots, X_n(i))$ le plus proche état du point fixe X^* , i.e. $\|X(i) - X^*\| < \delta$.

Considérant le bassin d'attraction (de taille ε) restreint du point fixe instable X^* , stabilisé par le contrôle, avec :

$$\varepsilon = \|X(i+1) - X(i)\| = \max_{k=1, \dots, n} (|X_k(i+1) - X_k(i)|)$$

$$\begin{aligned} \|F(X(i)) - X^*\| &= \max_{k=1, \dots, n} (|F_k(X(i)) - X_k^*|) \\ |F_k(X(i)) - X_k^*| &= |X_k(i+1) + K_k(X_k(i+1) - X_k(i)) - X_k^*| \\ &= |(K_k + 1)(X_k(i+1) - X_k(i)) + X_k(i) - X_k^*| \\ &\leq \varepsilon |K_k + 1| + |X_k(i) - X_k^*| \\ &\Rightarrow \|F(X(i)) - X^*\| \leq \varepsilon |K_k + 1| + \delta \end{aligned}$$

on a finalement :

$$\forall \xi > 0, \exists \delta(\xi) > 0, (\delta \leq \xi - \varepsilon |K_k + 1|), \|X(i) - X^*\| < \delta \Rightarrow \|F(X(i)) - X^*\| < \xi$$

Selon la théorie fondamentale des systèmes dynamiques, la solution $F_{t_i}(X_0) = F^i(X(0))$ du système linéarisé (5.16) est donnée suivant la direction k par :

$$F^i(X_k(0)) - X_k^* = \|\lambda_k\|^i X_k(0) + v((F^i(X_k(0))) - X_k^*)^2), \quad \forall k = 1, \dots, n$$

tel que λ_k est la valeur propre du jacobien du système linéarisé (5.16) de module inférieur à **1**

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} F(x(i)) = x^*$$

Par conséquent, la trajectoire contrôlée converge asymptotiquement vers le point fixe X^* .

Le m -cycle stable $\{P_1^*, P_2^*, \dots, P_m^*\}$ ($m \neq 1$) de l'application itérative f est supprimé et n'est pas un cycle de la l'application itérative F ; on a

$$F(P_j^*) = f(P_j^*) + K(f(P_j^*) - P_j^*) \neq P_{j+1}^* \quad \text{pour } j = 1, \dots, m.$$

Effectivement, si l'état périodique P_j^* de l'application itérative f est le plus proche état du point fixe instable X^* , i.e. $\|P_j^* - X^*\| < \delta$, alors, l'état prédit futur P_{j+1}^* ($P_{j+1}^* = f(P_j^*)$) sera perturbé avec le vecteur U afin de générer un état contrôlé $F(P_j^*)$, tel que $F(P_j^*) = P_{j+1}^* + U$, où $F(P_j^*) \neq P_{j+1}^*$.

Les résultats numériques suivants montrent que l'activation du contrôle se fait dès la première itération à partir d'une condition initiale arbitraire, que la distance de contrôle est convenablement estimée et qu'elle n'est pas nécessairement infinitésimale.

5.2.2 Application au système de Hénon

On considère le système itératif de Hénon de dimension **2** [147] donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(i+1) = a - x(i)^2 + by(i), \\ y(i+1) = x(i), i \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.17}$$

où a et b sont deux paramètres de bifurcation.

Les points fixes ont les coordonnées suivantes :

$$x^* = y^* = \frac{-(1-b)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-b)^2}{4} \pm a}$$

Les valeurs propres de la matrice jacobienne aux points fixes sont :

$$\lambda_{1,2} = -x^* \pm \sqrt{(x^*)^2 + b}$$

– Pour le cas $b = 0.3$ et $a = 0.8$, le point fixe $X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6104 \\ 0.6104 \end{pmatrix}$ perd sa stabilité, puisque le module de l'une des valeurs propres est supérieur à $\mathbf{1}$, ($\lambda_1 = 0.2$, $\lambda_2 = -1.43$).

le 2-cycle se produit et la dynamique oscille entre deux états périodiques :

$$P_1^* = \begin{pmatrix} 1.0076 \\ -0.3076 \end{pmatrix} \text{ et } P_2^* = \begin{pmatrix} -0.3076 \\ 1.0076 \end{pmatrix}$$

On estime, ε , la taille du bassin d'attraction restreint du point fixe instable $X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$.

On obtient $\varepsilon = 0.83$ pour la condition initiale $X(1) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}$. Puis, on ajoute le terme du contrôle $U(i)$ de la forme (5.12) au flot du système (5.17),

$$F(x(i), y(i)) = \begin{pmatrix} a - x(i)^2 + by(i) + U(i)_x \\ x(i) + U(i)_y \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

Le terme du contrôle est défini par le vecteur suivant :

$$U(i) = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - x(i)^2 + by(i) - x(i) \\ x(i) - y(i) \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

où K est la matrice gain feedback du contrôle.

$$F(x(i), y(i)) = \begin{pmatrix} a - x(i)^2 + by(i) + K_1(a - x(i)^2 - x(i) + by(i)) \\ x(i) + K_2(x(i) - y(i)) \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

La linéarisation de l'équation (5.20) autour du point fixe instable $X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ est donnée par

$$\delta F(x(i), y(i)) = DF(X^*) \delta(x(i), y(i)) \tag{5.21}$$

$DF(X^*)$ étant la matrice Jacobienne de $F(X)$ évaluée au point d'équilibre, X^* .

Pour simplifier les calculs on met $K_1 = K_2 = K$, Donc, le point fixe est stabilisé avec le contrôle prédictif si la valeur du gain du contrôle K satisfait les inégalités suivantes :

$$|-K(1 - 3x^*) - 2x^*| < 1 \text{ et } |K(-1 + x^*)| < 1$$

$$\Rightarrow K \in]0.26, 2.56[$$

Pour $X(1) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 0.83$ et $K = 0.8$, la Fig 5.6 représente le comportement de $x(i)$ quand le controle prédictif est appliqué pour supprimer le 2-cycle immédiatement. La dynamique contrôlée évolue vers la dynamique stationnaire dès la première itération.

La taille du bassin d'attraction restreint du point fixe dépend du choix des conditions initiales, ainsi on a :

| <i>Valeur de ε</i> | <i>Condition initiale</i> | <i>Figure</i> |
|---|--------------------------------------|---------------------------------|
| $\varepsilon = 0.83$ | $\rightsquigarrow X(1) = (0.1, 0.3)$ | $\rightsquigarrow Fig\ 5.7(a)$ |
| $\varepsilon = 0.69$ | $\rightsquigarrow X(0) = (0.1, 0.1)$ | $\rightsquigarrow Fig\ 5.7(b).$ |

- Pour le cas $b = 0.3$ et $a = 1.03$, le point fixe $X^* = (x^*, y^*) = (0.7235, 0.7235)$ perd sa stabilité, le 8-cycle apparait et la dynamique oscille entre 8 points périodiques.

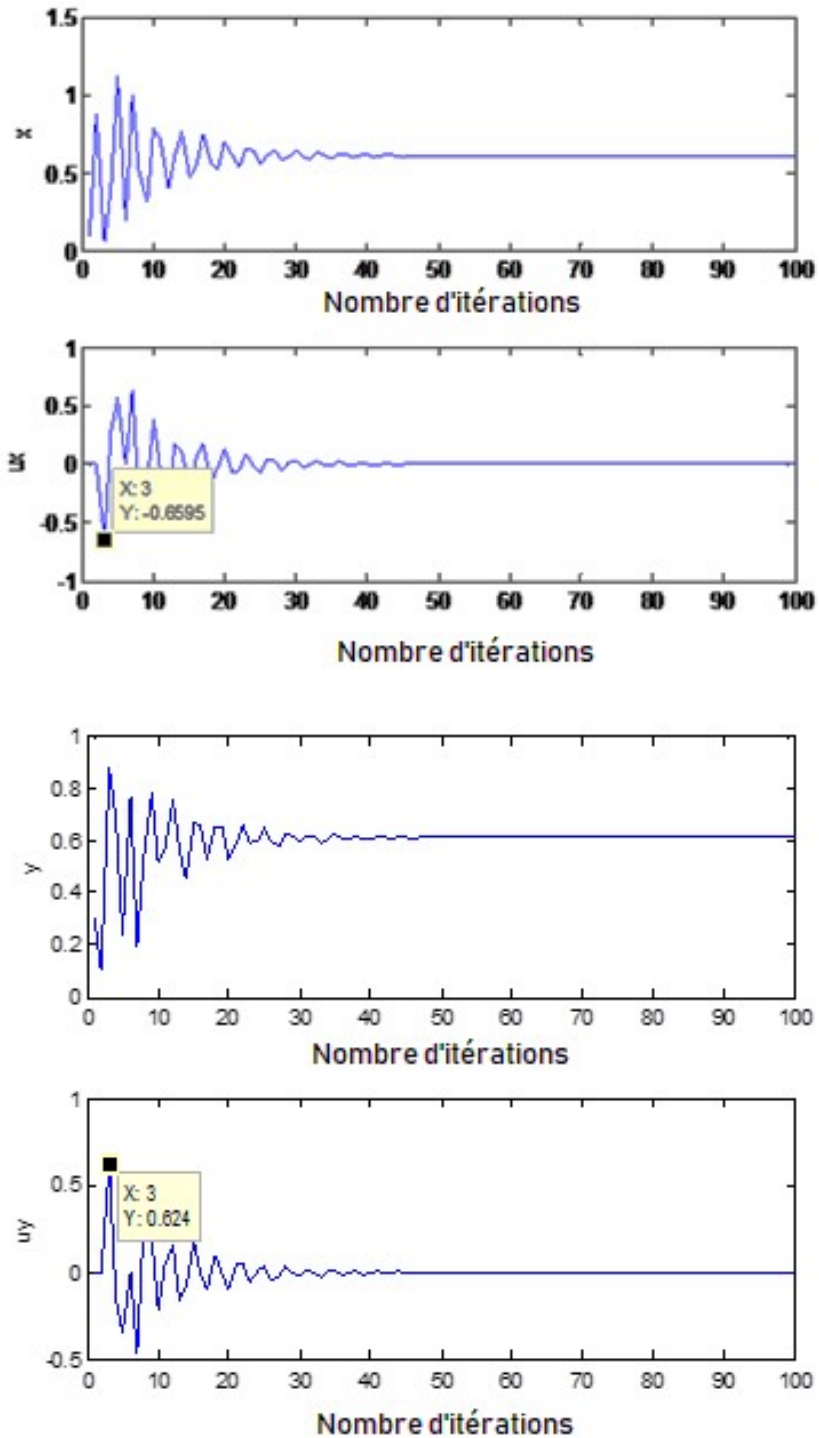


Fig. 5.6. Évolution de $\mathbf{x}(i), \mathbf{y}(i)$ et $\mathbf{u}_x(i), \mathbf{u}_y(i)$ du système du Hénon sous contrôle prédictif. Le système contrôlé (5.19) est itéré 100 fois, pour $\mathbf{a} = \mathbf{0.8}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0.3}$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{0.1}$, $\mathbf{y}(1) = \mathbf{0.3}$, $\varepsilon = \mathbf{0.83}$, $\mathbf{K} = \mathbf{0.8}$.

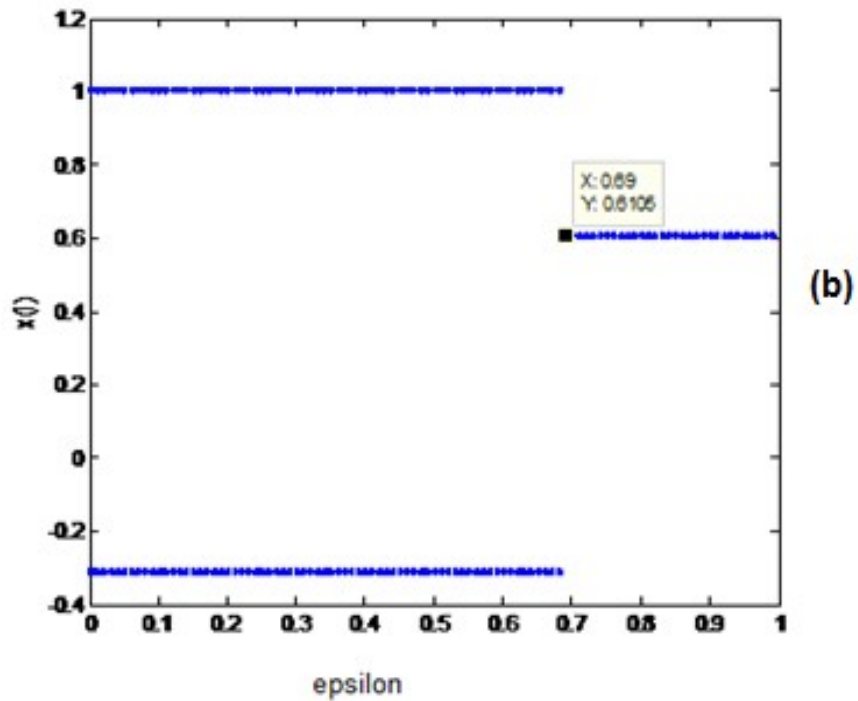
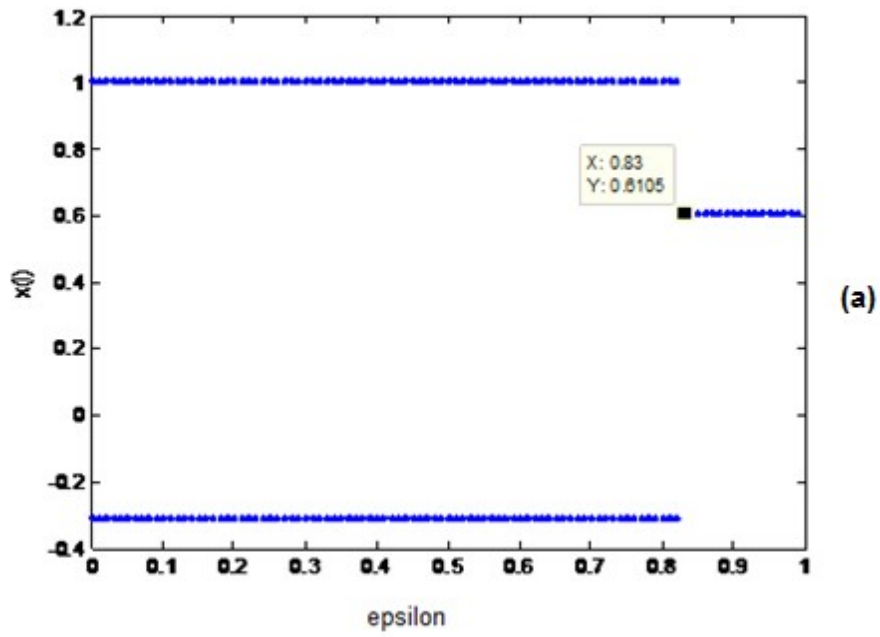


Fig. 5.7. Diagramme de bifurcation ($x(i)$ vs ϵ) du système de Hénon sous contrôle prédictif. A chaque ϵ , le système contrôlé (5.19) est itéré 300 fois et les 50 premiers itérés sont supprimés. Le pas de $\epsilon = 0.01$ avec $0 \leq \epsilon \leq 0.99$, $a = 0.8$, $b = 0.3$, $K = 0.8$. (a) $x(1) = 0.1$, $y(1) = 0.3$, (b) $x(1) = y(1) = 0.1$

On estime la taille du bassin d'attraction restreint du point fixe instable X^* , on obtient $\varepsilon = 1.11$ pour la condition initiale $X(1) = (0.1, 0.1)$ et on ajoute le terme du contrôle $U(i)$ de la forme (5.12) au flot du système (5.16) (Fig.5.8).

La Fig.5.9 représente les valeurs de la distance du contrôle appropriée pour supprimer le 8-cycle et la stabilisation du point fixe désiré. Pour une valeur du gain $K = 0.4$, le 8-cycle peut être supprimé si $\varepsilon \geq 1.11$.

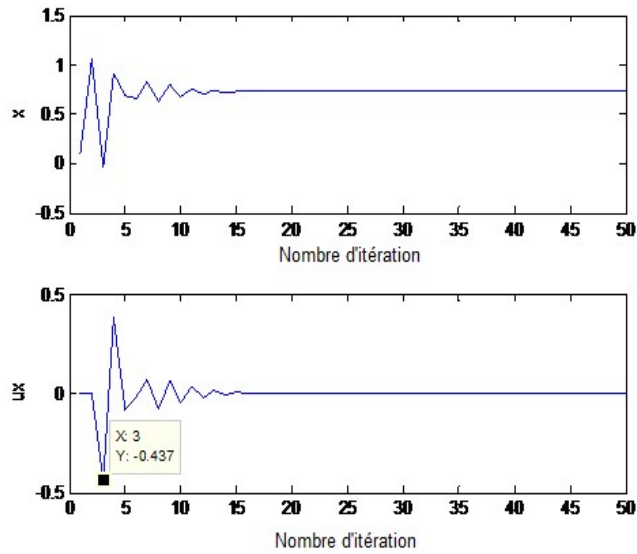


Fig. 5.8. Évolution de $\mathbf{x}(\mathbf{i})$ et $\mathbf{u}_x(\mathbf{i})$ du système du Hénon sous contrôle prédictif. Le système contrôlé (5.19) est itéré 50 fois. Pour $\mathbf{a} = \mathbf{1.030}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0.3}$, $\mathbf{x}(\mathbf{1}) = \mathbf{y}(\mathbf{1}) = \mathbf{0.1}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1.11}$, $\mathbf{K} = \mathbf{0.4}$. le 8-cycle est supprimé.

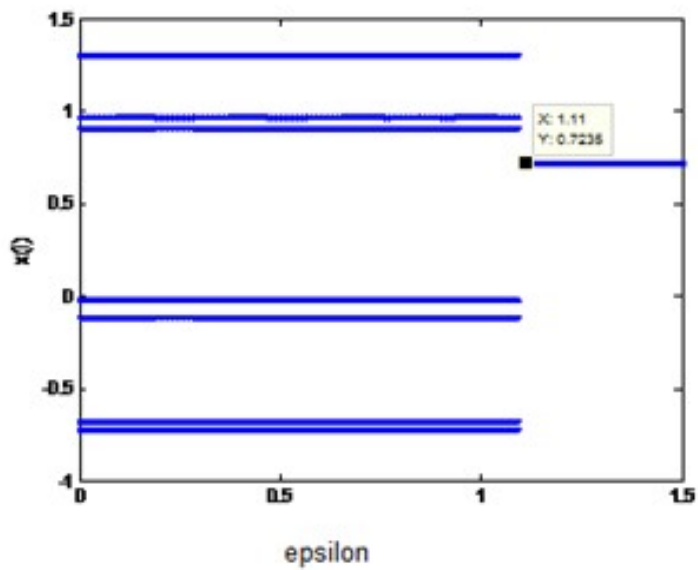


Fig. 5.9. Diagramme de bifurcation ($\mathbf{x}(\mathbf{i})$ vs $\boldsymbol{\varepsilon}$) du système de Hénon sous contrôle prédictif. A chaque $\boldsymbol{\varepsilon}$, le système contrôlé (5.19) est itéré 300 fois et les 50 premiers itérés sont supprimés. Le pas de $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0.01}$, $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{\varepsilon} \leq \mathbf{1.5}$, avec $\mathbf{a} = \mathbf{1.03}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0.3}$, $\mathbf{K} = \mathbf{0.4}$, $\mathbf{x}(\mathbf{1}) = \mathbf{y}(\mathbf{1}) = \mathbf{0.1}$.

5.3 Discussion

La méthode utilisée pour la suppression d'orbites périodiques stables dans des systèmes à temps discrets non linéaires, repose sur de petites perturbations additives déterminées par le contrôle prédictif. La valeur de la distance de contrôle est déterminée soigneusement, distance pour laquelle le contrôle est activé dès la première itération, soit un contrôle immédiat et efficace.

Ainsi deux faits importants peuvent être mis en évidence dans la méthode proposée et validée :

1. Contrairement à l'activation du contrôle dans un voisinage du point fixe avec une taille infinitésimale et arbitraire, on propose une méthode qui permet de stabiliser le point fixe instable à partir de la suppression des orbites périodiques, cela est possible d'appliquer le contrôle dès que l'état actuel rentre dans le bassin d'attraction restreint du point fixe souhaité (ou l'orbite de la période 1). La taille de ce bassin n'est plus arbitraire permettant une meilleure efficacité de contrôle.
2. De plus, la méthode proposée répond au problème de la détermination des moments propices pour activer le contrôle de l'instabilité des points fixes.

De fait, si la zone de contrôle considérée est le bassin d'attraction restreint dont la taille est correctement estimée, la trajectoire contrôlée ne visitera pas le voisinage de chacun des points fixes instables pour s'approcher d'un point fixe instable désiré.

Cet algorithme de contrôle est simple et efficace pour orienter les orbites périodiques vers le point d'équilibre (orbite de période 1), et il peut être appliqué pour contrôler la dynamique bruyante. Les résultats numériques obtenus sont très satisfaisants pour le contrôle de la dynamique périodique stable de l'**application logistique (dimension 1)** et le **système de Hénon** comme exemple (**dimension 2**) et plus **particulièrement pour l'APD**, application ciblée par notre travail.

Chapitre 6

Nouveau modèle itératif de l'APD avec mémoire

Dans ce chapitre, on présente l'étude de la dynamique non linéaire d'**un modèle itératif bidimensionnel de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) "avec mémoire"**, dérivé d'un modèle unidimensionnel de l'APD "*sans mémoire*".

Ce modèle est assez flexible pour refléter avec précision les propriétés dynamiques chaotiques de la durée du potentiel d'action (APD) : on met en évidence la structure fractale de l'attracteur étrange du système itératif en dimension 2 de l'APD, et on met en évidence le caractère chaotique du système par le calcul des exposants de Lyapunov, de la dimension fractale et de l'entropie de Kolmogorov.

Ces travaux réalisés sur la dynamique de l'APD en dimension 2 font l'objet d'un article à paraître : "*Nonlinear Dynamics of Two-Dimensional Cardiac Action Potential Duration Mapping Model with Memory*" in **Journal of Mathematical Biology** [112].

6.1 Système itératif de la durée du potentiel d'action en dimension 2

Le choix de notre modèle, avec une certaine **quantité de mémoire**, repose sur deux faits : le premier est que les systèmes excitables, y compris le système cardiaque, possèdent une mémoire et que cette mémoire peut entraîner des instabilités dynamiques d'excitation ainsi que du chaos [105]. Le deuxième fait est que la forme du modèle considéré met en évidence **un paramètre de contrôle** qui permet de voir, au-delà de la caractérisation et de la quantification de dynamiques chaotiques, le contrôle de cette dynamique cardiovasculaire.

Dans ce chapitre, on étudie la dynamique non-linéaire d'un système itératif en dimension 2 de la durée du potentiel d'action cardiaque [112] dérivé de l'équation itérative de l'APD unidimensionnelle étudiée dans les précédents chapitres.

La complexité de la dynamique de ce modèle est explorée par le biais des différents modèles de séquences de bifurcations et l'apparition de nouvelles bistabilités. De plus lorsque les rythmes irréguliers se produisent, on montre une structure fractale des attracteurs étranges modélisant la dynamique qualitative de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) en deux dimensions.

Soit le système itératif de l'APD unidimensionnel sans mémoire :

$$x(i+1) = f(x(i)), \quad i \in \mathbb{N}$$

$$x(i+1) = A - B_1 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{x(i) - nt_s}{\tau_2}\right), \quad (6.1)$$

$$x(i) \in [0, 270 \text{ ms}],$$

où $x(i+1)$ est l'APD (la durée du potentiel d'action cardiaque) généré par la $(i+1)^{\text{ème}}$ stimulation.

Contrairement à ce modèle sans mémoire (6.1), un modèle itératif cardiaque de la forme

$$x(i+1) = F(x(i), x(i-1)) \quad (6.2)$$

a une certaine quantité de mémoire qui relie la durée du prochain potentiel d'action, notée $x(i+1)$, à la fois aux deux durées du potentiel d'action précédentes, notées $x(i)$ et $x(i-1)$. La dépendance à l'histoire antérieure du tissu cardiaque dépasse la durée du potentiel d'action précédente : $x(i+1)$ ne dépend pas seulement de $x(i)$, mais aussi de $x(i-1)$. Cette dépendance est particulièrement évidente lorsque à la fois $x(i)$ et $x(i-1)$ sont courtes, ce qui correspond mieux à la dynamique réelle prenant en compte l'historique du système dynamique [69]. La forme générale du modèle de l'APD avec mémoire a d'abord été introduite par Gilmour et Otani [42] de telle sorte que la prochaine durée du potentiel d'action $x(i+1)$ dépend à la fois de l'intervalle diastolique précédent ($DI(i)$) et de la précédente durée du potentiel d'action cardiaque, noté ($x(i)$), à savoir,

$$x(i+1) = F(x(i), DI(i))$$

La forme spécifique de F a été dérivée analytiquement [70] d'un modèle ionique à trois courants [71].

On considère le modèle (6.2) avec mémoire [112] itératif, non linéaire de dimension 2, décrit par les équations :

$$\begin{cases} x(i+1) = A - B_1 \cdot \exp\left(\frac{(x(i)/a) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \cdot \exp\left(\frac{(y(i)/a) - nt_s}{\tau_2}\right) \\ y(i+1) = x(i) \end{cases} \quad (6.3)$$

ou comme une relation de récurrence à deux-pas :

$$x(i+1) = A - B_1 \cdot \exp\left(\frac{(x(i)/a) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \cdot \exp\left(\frac{(x(i-1)/a) - nt_s}{\tau_2}\right) \quad (6.4)$$

Soit a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) un paramètre réel positif qui est introduit dans le modèle, ce paramètre peut être identifié en termes de différentes constantes du champ de l'électrophysiologie cardiaque.

On note que le modèle itératif en dimension 2 (6.3) préserve les propriétés mathématiques quantitatives du modèle itératif en dimension 1 (6.1). Dans ce cas, on a toutes les valeurs itératives $x(i+1)$ dans l'intervalle $[0, 270 \text{ ms}]$, l'existence du scénario de transition vers le chaos de doublement de période, l'apparition de la bistabilité $\{2:2 \leftrightarrow 2:1\}$, la concomitance de la décroissance de t_s et celles des courbes déterminant les points fixes dans le diagramme de bifurcation, et l'apparition de la dynamique chaotique suite à deux bifurcations de doublement de période.

Cependant, ces similitudes n'empêchent pas le fait que les deux systèmes itératifs ont des séquences de bifurcation qualitativement différentes. C'est précisément ce qui permettra de mettre en évidence dans notre analyse mathématique du modèle de dynamique non linéaire itératif en dimension 2 (6.3) les nouvelles bistabilités et les nouvelles séquences de bifurcation.

6.2 Stabilité du système

L'étude des équations (6.3) en fonction du paramètre de stimulation (t_s) et le paramètre "a" permet de mieux comprendre le portrait de phase et la transition vers le chaos du modèle.

Pour l'APD en dimension 2, les points fixes sont donnés par (x^*, x^*)

où :

$$x^* = A - B_1 \exp\left(\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_1}\right) - B_2 \exp\left(\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_2}\right) \quad (6.5)$$

En utilisant le développement limité de l'équation (6.5) dans le voisinage du

point $\left(\frac{x^*}{x_{\max}}\right)$ pour $\left(\frac{x^*}{x_{\max}}\right) \in]0, 1[$, on obtient :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{A - B_1.M - B_2.N}{L} \\ \text{où } M &= \exp\left(\frac{-nt_s}{\tau_1}\right), \quad N = \exp\left(\frac{-nt_s}{\tau_2}\right) \\ L &= 1 + \frac{x_{\max}.B_1}{a.\tau_1}M + \frac{x_{\max}.B_2}{a.\tau_2}N \end{aligned}$$

avec une erreur estimée $R(\theta)$:

$$R(\theta) = x^{*2} \exp\left(\frac{\theta x^*}{x_{\max}}\right) - \frac{\left[\frac{a.x_{\max}.B_1}{2\tau_1}M - \frac{a.x_{\max}.B_2}{2\tau_2}N\right]}{L}$$

tel que $(0 < \theta < 1)$

La nature de la stabilité des points fixes dépend des valeurs propres de la matrice jacobienne, J_{x^*} , évaluée aux points fixes, plus précisément sur le choix des paramètres (a, t_s) .

$$J_{x^*} = \begin{bmatrix} -\frac{B_1}{a.\tau_1} \exp\left(\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_1}\right) & -\frac{B_2}{a.\tau_2} \exp\left(\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_2}\right) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'évolution du système non linéaire au voisinage du point fixe, x^* , ne peut pas être examiné sur la base du système linéarisé, J_{x^*} si le point fixe est non hyperbolique. Pour Δ le déterminant du polynôme caractéristique

$$\Delta = \left(\frac{B_1}{a\tau_1}\right)^2 \exp\left(2\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_1}\right) - 4\frac{B_2}{a\tau_2} \exp\left(\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_2}\right)$$

les valeurs propres sont :

$$\text{pour } \Delta \geq 0 : \lambda = \frac{B_1}{2a\tau_1} \exp\left(\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_1}\right) \pm 1/2\sqrt{\Delta}.$$

$$\text{pour } \Delta < 0 : \lambda = \frac{B_1}{2a\tau_1} \exp\left(\frac{(x^*/a) - nt_s}{\tau_1}\right) \pm i/2\sqrt{-\Delta}.$$

- Pour le cas $a = 1$ et $t_s \in \mathbb{R}^+$, le point fixe (x^*, x^*) associé au rythme normal $N : 1$ est non hyperbolique pour $x^* - nt_s = -85.2 \text{ ms}$.
- Pour $-85.2 \text{ ms} < x^* - nt_s \leq -DI_{\min}$ le point fixe hyperbolique est instable.
- Pour $x^* - nt_s < -85.2 \text{ ms}$ le point fixe hyperbolique est asymptotiquement stable. Ainsi, si $-94 \text{ ms} \leq x^* - nt_s < -85.2 \text{ ms}$ on trouve un noeud stable et si $x^* - nt_s < -94 \text{ ms}$ le point fixe est un foyer stable.
- Par exemple, pour $(a = 1, t_s = 400 \text{ ms})$ on trouve le point fixe asymptotiquement stable avec les valeurs $(231 \text{ ms}, 231 \text{ ms})$ comme les valeurs du point fixe de l'APD en dimension 1 lorsque $t_s = 400 \text{ ms}$.

6.3 Attracteurs du système itératif de l'APD en dimension 2

Pour rappel, un attracteur est un ensemble compact d'espace de phase, invariant sous le flot ou par l'application à laquelle convergent toutes les trajectoires voisines. Un attracteur peut être un point fixe, une orbite périodique, apériodique, ou une combinaison de ce qui précède. Le cas le plus intéressant est l'attracteur apériodique, qui est également appelé un attracteur étrange, d'une structure fractale et d'une dimension fractale.

Dans la plupart des travaux mathématiques présentés en électrophysiologie cardiaque, les attracteurs sont reconstruits dans l'espace des phases. Cette méthode de reconstruction d'une trajectoire dans l'espace des phases est appelée "méthode des retards" ou "plongement" [52].

Alternativement, un tracé bidimensionnel du plan de phases peut être obtenu en traçant la première dérivée d'une variable par rapport à la variable elle-même, ou peut être obtenu en traçant une variable mesurée discrète en fonction d'une autre comme dans notre travail.

On montre que pour $(a = 1; t_s = 50 \text{ ms})$ le système itératif de l'APD

en dimension 2 converge vers un attracteur étrange (présentant des propriétés dynamiques avec une structure autosimilaire et une dimension fractale reflétant la sensibilité aux conditions initiales (Fig.6.1 et - à la fin de ce chapitre - le tableau donnant les valeurs calculées des exposants de Lyapounov, les dimensions fractales et la K -entropie).

Une visualisation de l'attracteur du système itératif de l'APD en dimension 2 peut être effectuée numériquement. En choisissant un point initial arbitraire et en procédant à l'itération de (6.3) puis en traçant les résultats sur le plan $(x(i), x(i + 1))$, on obtient une trajectoire de la dynamique itérative de l'APD en dimension 2.

On commence à partir d'un point initial (240 *ms*, 240 *ms*) on itère 100000 fois et on ne trace que les 50000 derniers points on obtient le graphe représenté par Fig.6.1.

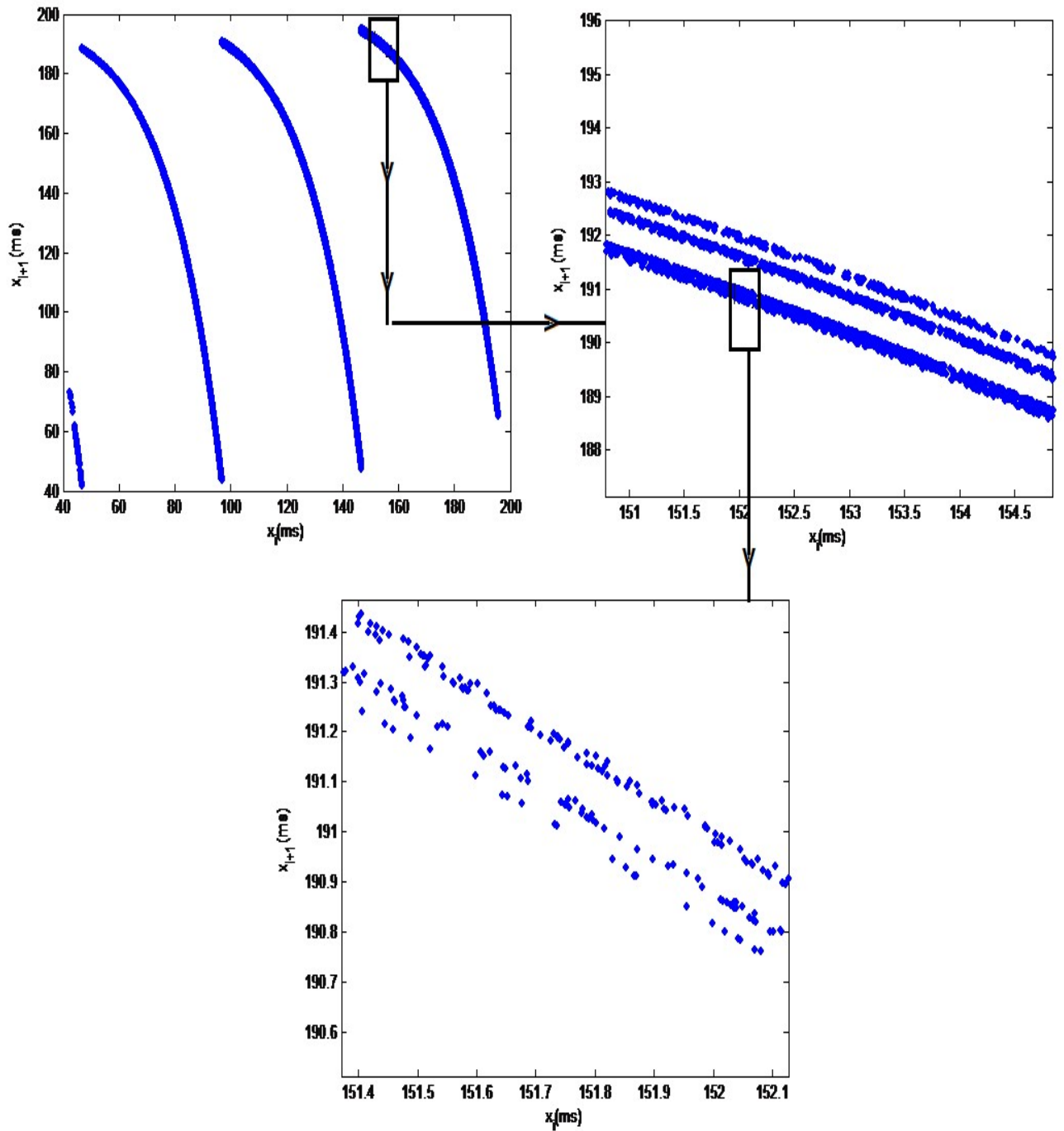


Fig. 6.1. Attracteur étrange du système itératif de dimension 2 de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) et illustration de sa structure fractale pour $(a; \tau_s) = (1, 50 \text{ ms})$; $x(1) = y(1) = 240 \text{ ms}$.

On observe une structure auto-similaire en zoomant à différentes échelles (Fig 6.1).

Le paramètre " a " contrôle l'étirement et le paramètre (t_s) contrôle l'épaisseur du repliement. Par exemple, sur la Fig 6.1, le paramètre (t_s) est relativement petit et l'attracteur est plutôt épais, ce qui donne une structure fractale transversale clairement visible, l'existence de plusieurs branches dans toutes les figures d'attracteurs étranges fait référence à un autre paramètre de blocage (n) qui dépend du paramètre de stimulation (t_s) cité dans le modèle mathématique décrit.

Il est à noter que l'attracteur du système itératif de l'APD en dimension 2 à ($a = 0.7, t_s = 89 \text{ ms}$) est un attracteur étrange montré dans la Fig 6.2, il pourrait être le résultat de certains cycles longs stables attractifs. En fait, il est possible de trouver des attracteurs stables dans l'espace des paramètres. Un exemple est l'attracteur 17-cycle pour ($a = 0.7016, t_s = 89 \text{ ms}$), une comparaison de cet attracteur et de l'attracteur étrange du système itératif de l'APD en dimension 2 est illustrée par la Fig 6.2.

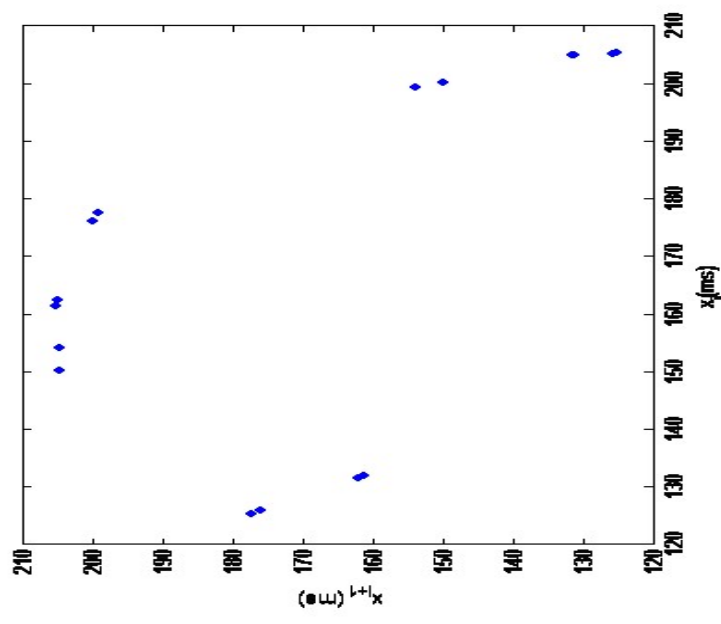
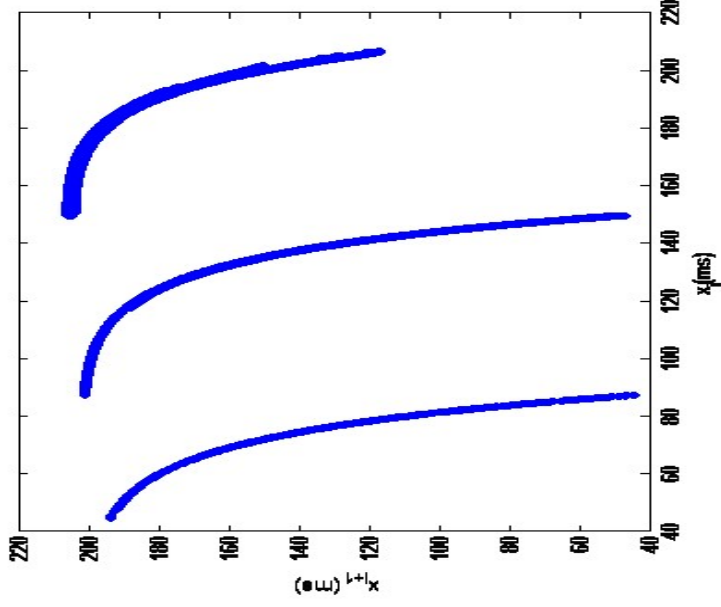


Fig. 6.2. Attracteur étrange du système itératif en dimension 2 de la durée du potentiel cardiaque (APD) et de l'attracteur 17--cycles. La figure est obtenue en itérant l'attracteur du système itératif de l'APD avec les valeurs spécifiées de (a, ts) . A gauche l'attracteur 17- cycle pour $(a, ts) = (0.7016, 89 \text{ ms})$. A droite l'attracteur étrange pour $(a, ts) = (0.7, 89 \text{ ms})$.

6.4 Transition vers le chaos

Pour établir l'existence du chaos dans un système, on essaye de découvrir quelle sont les "routes vers le chaos" suivies par ce système en faisant varier un paramètre (de bifurcation ou de contrôle). Plusieurs chemins ou « *routes vers le chaos* » ont été identifiés et décrits.

Il est bien connu dans les études mathématiques qu'une cascade d'un nombre infini de bifurcations de doublement de période peut conduire à des dynamiques chaotiques [18, 36]. Les rythmes irréguliers vus dans les expériences sur le tissu cardiaque [78], ont été interprétés de cette manière [2].

Dans le travail biologique expérimental, il y a toujours plus de bruit que dans les systèmes physiques ou chimiques. Pour des valeurs successives du paramètre de bifurcation, les orbites d'ordre élevé de période 2^N devient de plus en plus petit à mesure que N augmente, ces orbites d'ordre élevé théoriquement prédites, ne sont pas vues expérimentalement [52]. On dit généralement qu'elles sont corrompues par le bruit. Cela produit ce qu'on appelle un « *écart de bifurcation* ». De plus, les orbites vues d'ordre inférieur - 2^N ($N = 2$ ou $N = 4$) sont des orbites "bruyantes". Comme il est mentionné dans [52], il n'y a que très peu de cas où des rythmes de période supérieure à 4 ont été décrits dans la littérature d'électrophysiologie cardiaque, et le concept de « *l'écart de bifurcation* » explique presque certainement cette absence [52].

Comme cela a déjà été mentionné, le phénomène d'alternance précède souvent la phase d'induction des arythmies ventriculaires malignes [69 – 72, 93 – 98, 145] et pourrait être le premier signe d'une cascade de doublements de périodes qui aboutirait à une dynamique chaotique [52], correspondant à la fibrillation ventriculaire [78]. Lorsqu'un seul paramètre est modifié, il est mathématiquement possible de voir le chaos lorsque l'alternance perd sa stabilité via deux bifurcations de doublement de période. Ce chaos peut apparaître soudainement, n'étant précédé d'aucun doublement de période, produisant un « *chaos instantané* » [79].

La route vers la dynamique chaotique dans le système itératif de l'APD en

dimension 2 lorsque le paramètre (t_s) décroît, semble similaire à la route décrite dans le système itératif de l'APD en dimension 1 [69] impliquant deux bifurcations de doublement de période. Toutefois d'autres types de séquences de bifurcations apparaissent selon les valeurs données du deuxième paramètre "a" du modèle.

6.4.1 Le cas $a = 1$

On obtient les deux séquences de bifurcations suivantes (Fig.6.3) et (Fig.6.4)

Pour une condition initiale arbitraire $x(1) \geq 205 \text{ ms}$:

$$\begin{aligned} \text{séquence} &= \{ 1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 6 : 1 \rightarrow 12 : 2 \rightarrow \text{chaos total} \} \end{aligned}$$

Pour une condition initiale arbitraire $x(1) < 205 \text{ ms}$:

$$\begin{aligned} \text{séquence} &= \{ 1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 6 : 1 \rightarrow 12 : 2 \rightarrow \text{total chaos} \} \end{aligned}$$

Ces deux séquences montrant la bistabilité $\{2 : 2 \leftrightarrow 2 : 1\}$ (la présence de deux rythmes différents à une fréquence de stimulation fixe) présente dans le modèle (6.3) lorsque t_s est dans la fourchette de valeurs $264 \text{ ms} \geq t_s \geq 260 \text{ ms}$. En outre, le chaos apparaît lorsque le rythme $6 : 2$ perd sa stabilité et on ne trouve pas la bistabilité entre les deux rythmes $1 : 1$ et $2 : 1$.

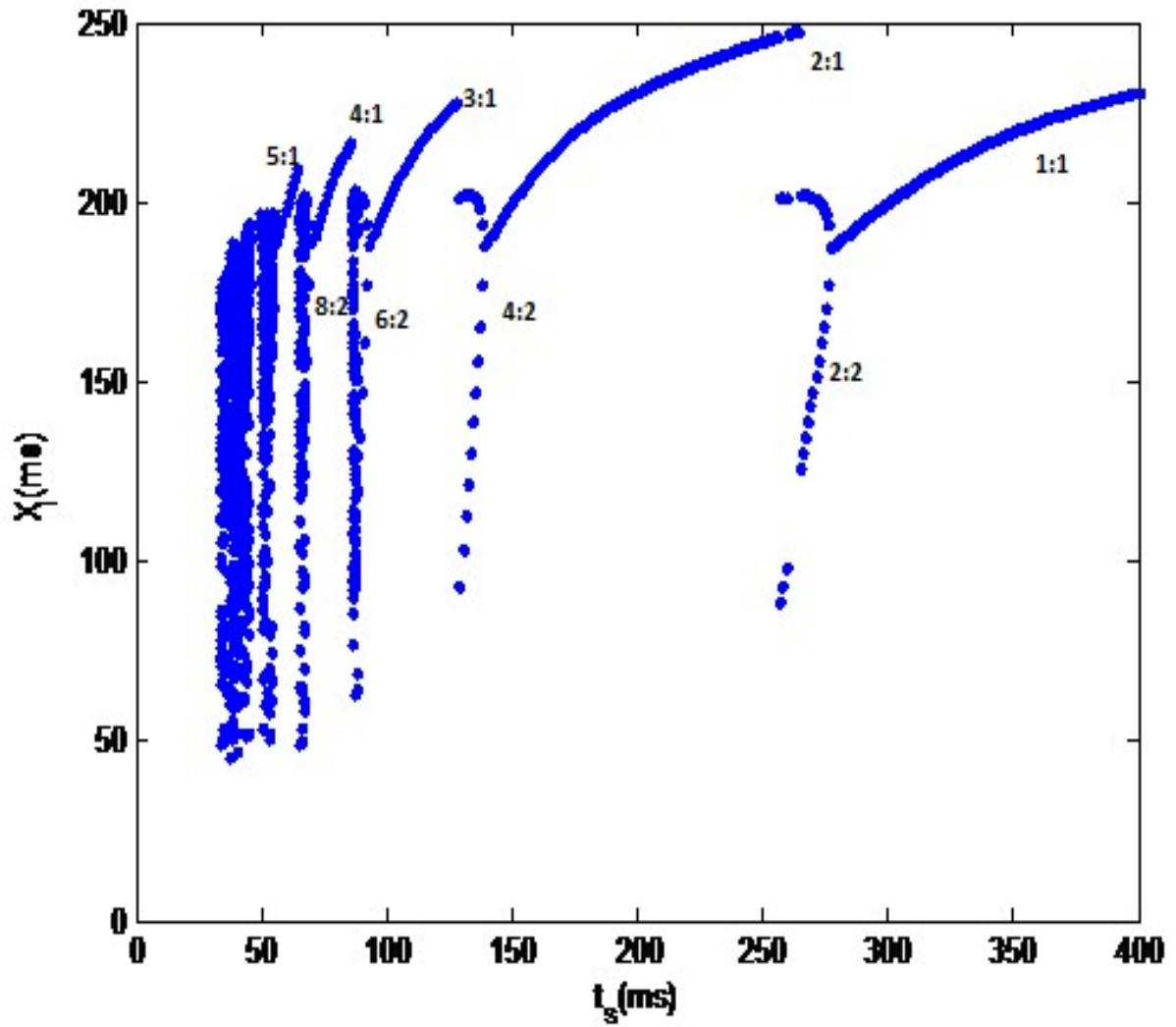


Fig. 6.3. Diagramme de bifurcation du système itératif de l'APD en dimension 2, (x_i vs. t_s) pour $a = 1$ et $10 \text{ ms} \leq t_s \leq 400 \text{ ms}$. À chaque t_s , l'équation (6.3) a été itérée 10 000 fois avec un pas de $t_s = 1 \text{ ms}$. La condition initiale à chaque t_s est $(x(1), y(1)) = (240 \text{ ms}, 240 \text{ ms})$.

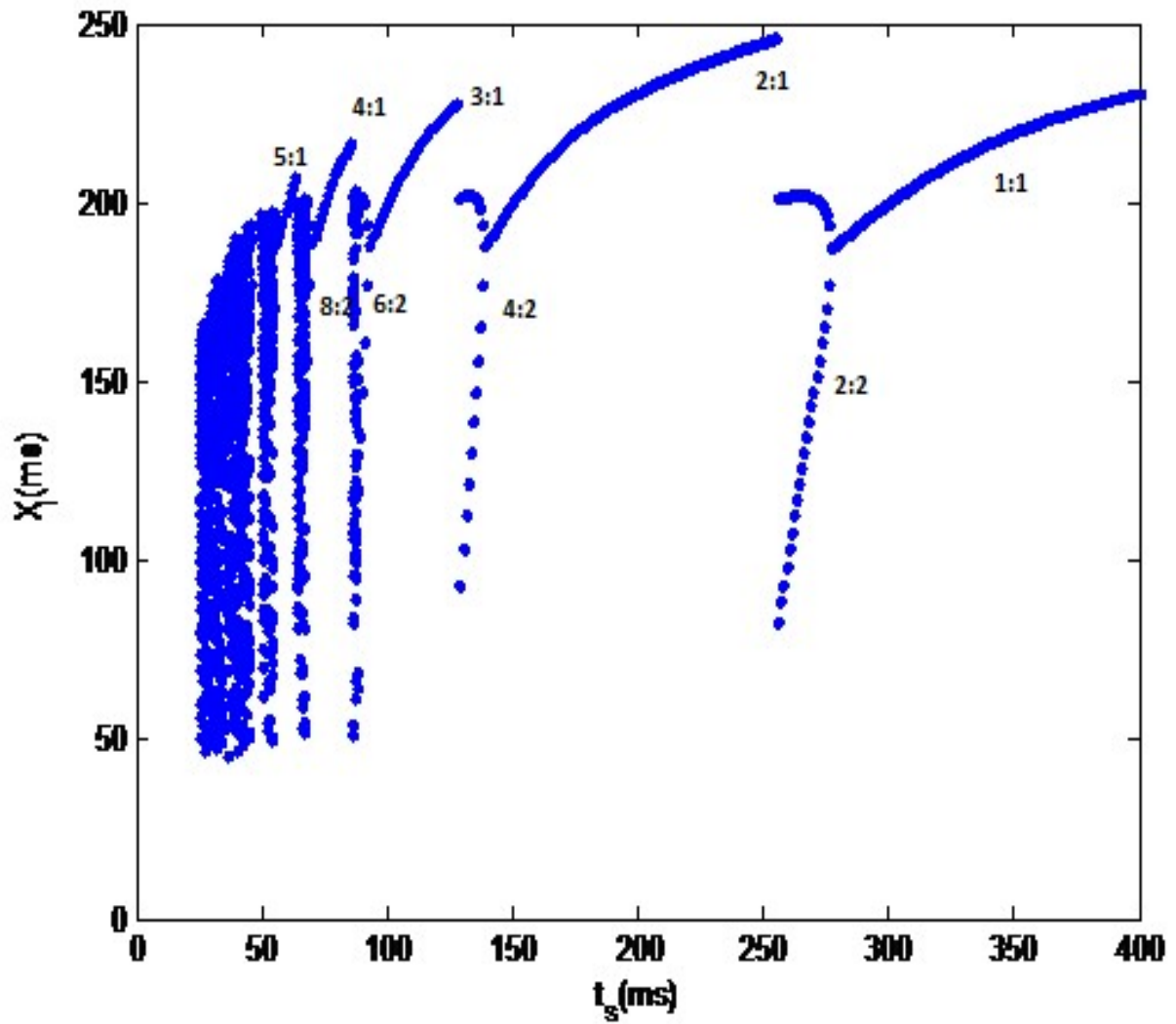


Fig. 6.4. Diagramme de bifurcation du système itératif de l'APD en dimension 2, (x_i vs. t_s) pour $a = 1$ et $25 \text{ ms} \leq t_s \leq 400 \text{ ms}$. À chaque t_s , l'équation (6.3) a été itérée 10 000 fois avec un pas de $t_s = 1 \text{ ms}$. La condition initiale pour chaque t_s est $(x(1), y(1)) = (200 \text{ ms}, 200 \text{ ms})$

6.4.2 Le cas $a = 0.7$

Pour une condition initiale $x(1) = 240 \text{ ms}$, lorsque t_s décroît on trouve la même séquence décrite pour $a = 1$ dans la Fig 6.3. Cependant pour $x(1) = 150 \text{ ms}$ on obtient la séquence de bifurcations suivante (Fig 6.5) :

$$\begin{aligned}
 \text{séquence} &= \{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow \\
 &\rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow \\
 &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow \\
 &\rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 6 : 1 \rightarrow 12 : 2 \rightarrow \\
 &\rightarrow \text{chaos} \rightarrow 7 : 1 \rightarrow \text{chaos total}\}
 \end{aligned}$$

La bistabilité est donc présente dans le modèle de l'APD en dimension 2 : les itérations convergent vers une orbite ou une autre en fonction de la condition initiale choisie ($x(1)$).

Ainsi, la bistabilité $\{2 : 2 \leftrightarrow 2 : 1\}$ est d'abord observée pour les deux intervalles $365 \text{ ms} \geq t_s \geq 362 \text{ ms}$ et $356 \text{ ms} \geq t_s \geq 344 \text{ ms}$ et elle est suivie par la bistabilité $\{4 : 2 \leftrightarrow 3 : 1\}$ pour l'intervalle $177 \text{ ms} \geq t_s \geq 175 \text{ ms}$, et ainsi de suite, comme t_s diminuant on voit les bistabilités successives suivantes apparaître :

- la bistabilité $\{3 : 3 \leftrightarrow 3 : 1\}$ pour $t_s = 174 \text{ ms}$,
- la bistabilité $\{4 : 1 \leftrightarrow 6 : 2\}$ pour l'intervalle $121 \text{ ms} \geq t_s \geq 119 \text{ ms}$,
- la bistabilité $\{\text{chaos} \leftrightarrow 5 : 1\}$ si $t_s = 89 \text{ ms}$ et pour $88 \text{ ms} \geq t_s \geq 87 \text{ ms}$.

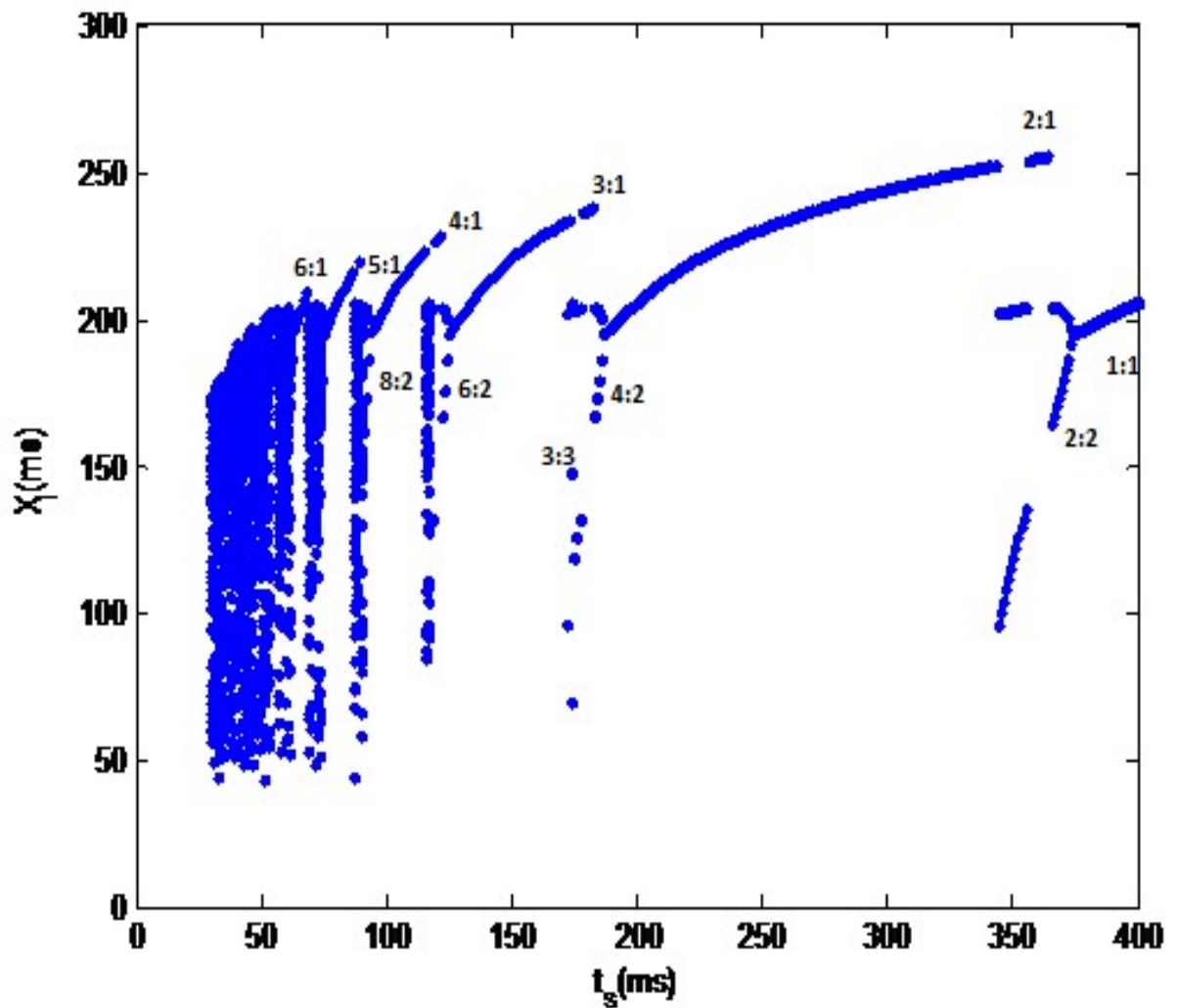


Fig. 6. 5. Diagramme de bifurcation du système itératif de l'APD en dimension 2, (x_i vs. t_s) pour $a = 0.7$ et $30 \text{ ms} \leq t_s \leq 400 \text{ ms}$. À chaque t_s , l'équation (6.3) a été itérée 10 000 fois avec un pas de $t_s = 1 \text{ ms}$. La condition initiale à chaque t_s est $(x(1), y(1)) = (150 \text{ ms}, 150 \text{ ms})$.

6.4.3 Le cas $a = 0.5$

Pour la condition initiale $x(1) = 240 \text{ ms}$, lorsque t_s décroît on voit la disparition de certains rythmes périodiques comme l'alternance $2 : 2$, et les rythmes $4 : 2$ et $6 : 2$. En outre, le rythme $4 : 4$ se produit à $t_s = 95 \text{ ms}$, donc la séquence de bifurcations est la suivante (Fig 6.6) :

$$\begin{aligned} \textit{séquence} &= \{1 : 1 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \textit{chaos} \rightarrow \\ &\rightarrow 4 : 4 \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 10 : 2 \rightarrow \textit{chaos} \rightarrow 6 : 1 \rightarrow 12 : 2 \rightarrow \\ &\rightarrow \textit{chaos} \rightarrow 7 : 1 \rightarrow \textit{chaos} \rightarrow 8 : 1 \rightarrow \textit{chaos total}\} \end{aligned}$$

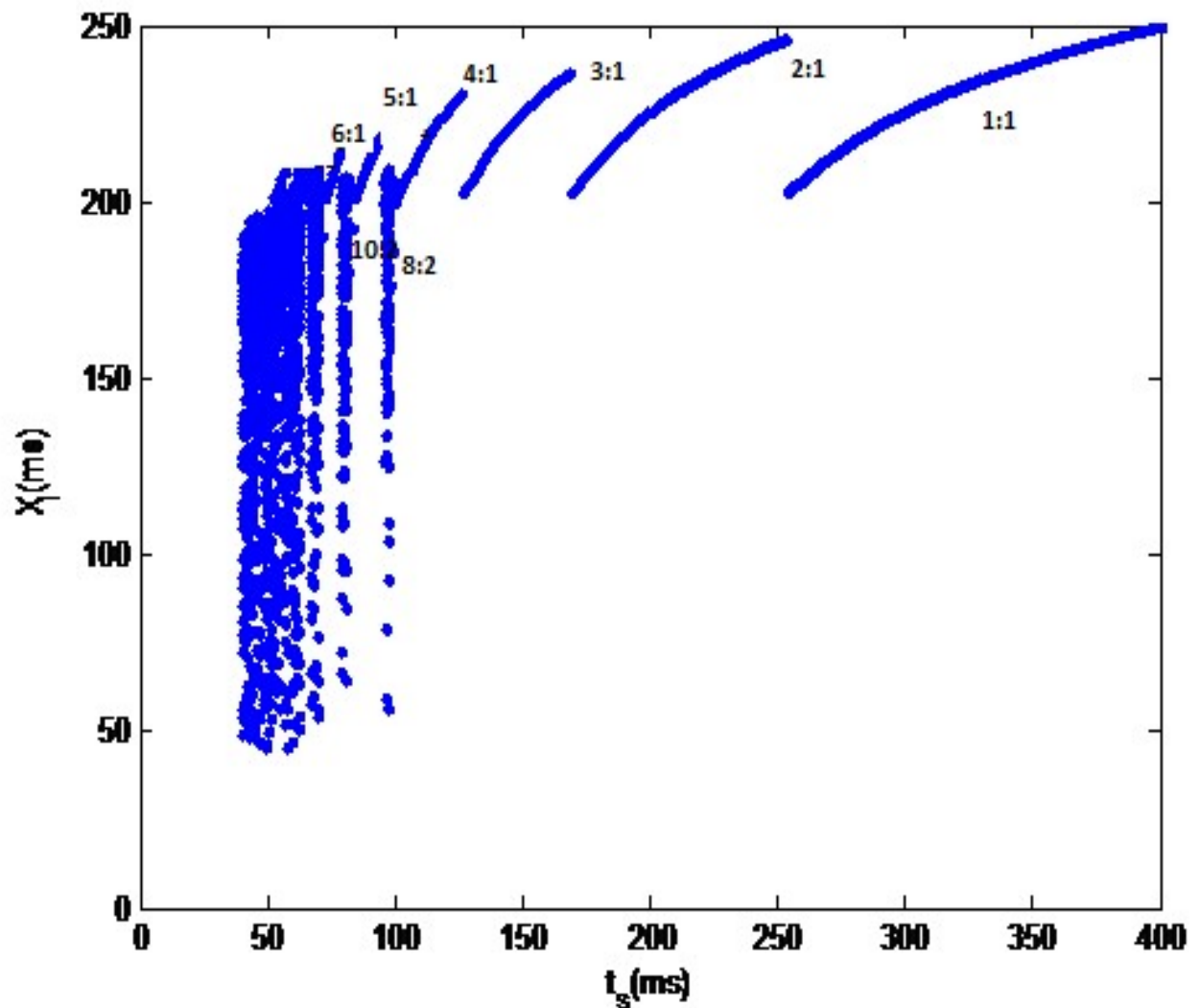


Fig. 6.6. Diagramme de bifurcation du système itératif de l'APD en dimension 2, (x_i vs. t_s) pour $a = 0.5$ et $40 \text{ ms} \leq t_s \leq 400 \text{ ms}$. À chaque t_s , l'équation (6.3) a été itérée 10 000 fois avec un pas de $t_s = 1 \text{ ms}$. La condition initiale à chaque t_s est $(x(1), y(1)) = (240 \text{ ms}, 240 \text{ ms})$

6.4.4 Le cas $a \geq 6.4$

Pour une condition initiale arbitraire on voit uniquement le rythme normal $N : 1$ ($N \geq 1$) dans le diagramme de bifurcation. Le rythme sinusal normal $1 : 1$ est maintenu jusqu'à $t_s = 82 \text{ ms}$. Et donc la séquence de bifurcations est la suivante (Fig.6.7) :

$$\text{séquence} = \{1 : 1 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 5 : 1 \rightarrow 6 : 1 \rightarrow 7 : 1\},$$

il n'y a pas d'alternance $2 : 2$, pas d'orbite périodique $2N : 2$ ($N \geq 1$) et pas de rythme irrégulier.

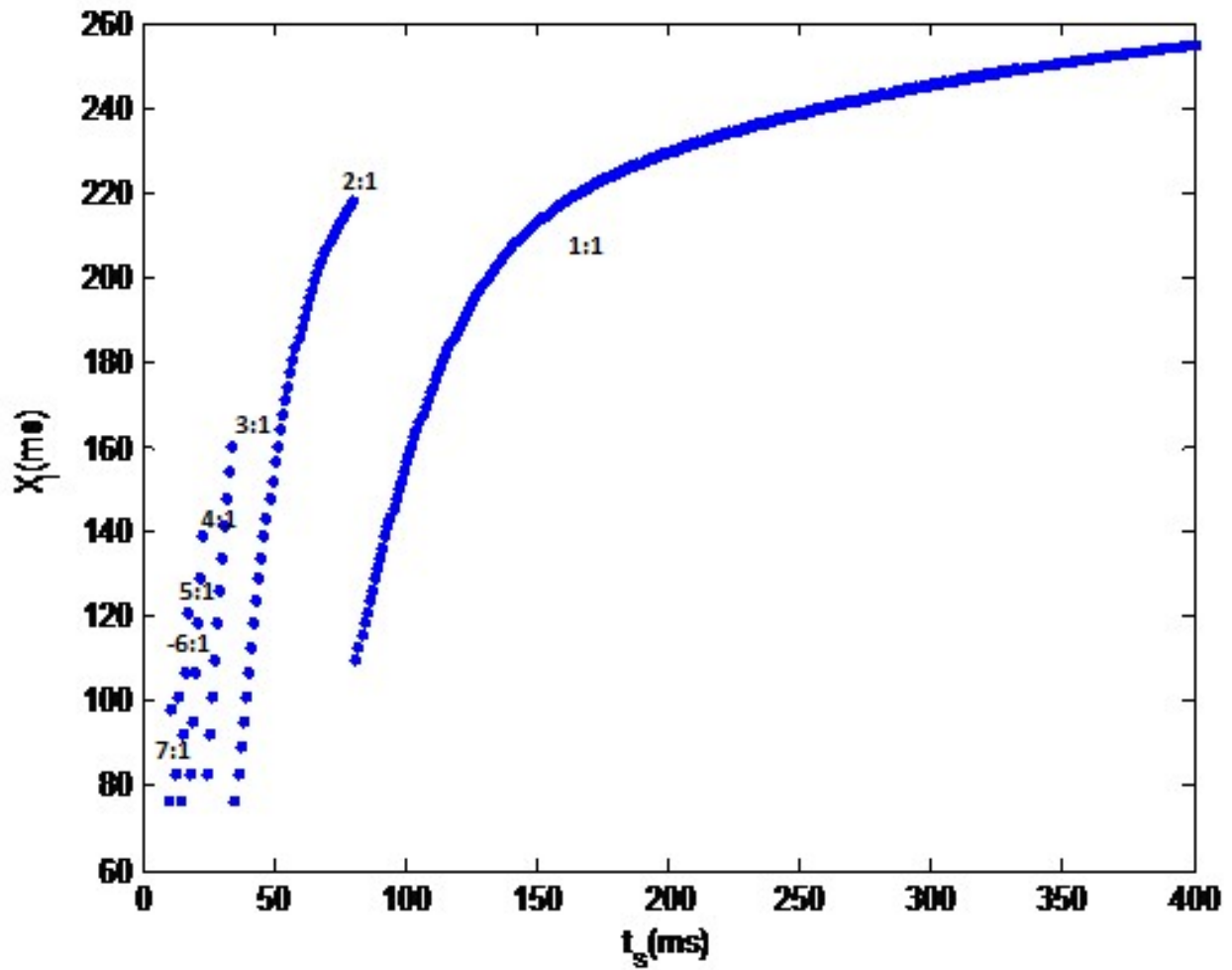


Fig. 6.7. Diagramme de bifurcation du système itératif de l'APD en dimension 2, (x_i vs. t_s) pour $a = 6.4$ et $10 \text{ ms} \leq t_s \leq 400 \text{ ms}$. Pour chaque t_s , l'équation (6.3) a été itérée 10 000 fois avec un pas de $t_s = 1 \text{ ms}$. La condition initiale à chaque t_s est $(x(1), y(1)) = (240 \text{ ms}, 240 \text{ ms})$

6.5 Quantification du chaos

Dans cette partie, la nature chaotique de la dynamique du système itératif de l'APD en dimension 2 "**avec mémoire**" est quantifiée en utilisant les exposants de Lyapunov, les dimensions fractales et l'entropie de Kolmogorov (pour plus de détails voir le chapitre 2).

Exposants de Lyapunov

La mesure de la divergence exponentielle moyenne des trajectoires à partir de conditions initiales très proches est donnée par l'exposant de Lyapunov. Un exposant de Lyapunov positif indique la dépendance sensible aux conditions initiales, ce qui est souvent pris comme une définition de la dynamique chaotique [72, 36]. Le calcul de plus grand exposant positif a été réalisé pour plusieurs cas dans des cellules cardiaques d'électrophysiologie [81].

Dimensions Fractales

La détermination de la dimension de l'attracteur étrange qui se distingue par une structure fractale, est corroborée par différentes définitions et méthodes de calcul de la dimension fractale [35, 36, 82, 83]

La dimension de Kolmogorov [33 – 36, 84] :

$$d_K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}$$

La dimension de corrélation [33 – 36, 85] :

$$d_c = \frac{\log C(r)}{\log(r)},$$

où

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j}^N H(r - \|x_i - x_j\|),$$

avec $H(\cdot) = 1$ pour l'argument positif et égal à zéro pour les arguments négatifs. $C(r)$ est le nombre de points de l'espace de phase reconstruit appartenant à une m -sphère de rayon r .

Entropie

Comme d'autres outils de quantification du chaos, l'entropie révèle la complexité du système [33–36,92]. Les mesures d'entropie ont été largement utilisées dans l'HRV (variabilité de la fréquence cardiaque) avec des résultats encourageants. Le plus souvent, «*l'entropie approximative*» a d'abord été appliquée aux données de la fréquence cardiaque. D'autres mesures d'entropie très intéressantes sont «*l'entropie de tonalité*», «*l'entropie conditionnelle*», «*l'entropie de modèle*», «*l'entropie de Kolmogorov*» et, plus récemment, «*l'entropie de distribution*» [100–104,106]. L'entropie a été estimée pour le rythme sinusal normal [89], le flutter auriculaire et la fibrillation [90], et pour les cellules ventriculaires périodiquement contrôlées [91].

Le taux de création de l'information est mesuré par l'entropie de Kolmogorov-Sinai (ou K-entropie) donnée par :

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N\tau} (S_N - S_0),$$

où

$$S_N = \sum_{i=1}^s p_i \log p_i$$

p_i sont respectivement les probabilités de sorte que le système peut être dans l'état i (pour i variant de 1 à s , et s est le nombre d'états possibles) [86–88].

6.5.1 Résultats numériques

Dans le tableau suivant, on donne les résultats des calculs effectués pour des rythmes cardiaques irréguliers observés dans le système itératif de l'APD en dimension 2.

Ces outils sont calculés à l'aide du logiciel "*Chaos Software Data Analyzer*" développé par Julient Clinton Sprott [80].

| Rythmes irréguliers à $(\mathbf{a}, \mathbf{t}_s)$ | Exposant de Lyapounov λ | dimension de Kolmogorov \mathbf{d}_K | dimension de Corrélation \mathbf{d}_C | Entropie \mathbf{K} |
|--|------------------------------------|---|--|--------------------------|
| $a = 1, t_s = 50 \text{ ms}$ | 0.324 ± 0.177 | 1.522 ± 1.066 | 1.697 ± 1.666 | 0.280 |
| $a = 0.7, t_s = 89 \text{ ms}$ | 0.454 ± 0.219 | 1.044 ± 0.731 | 1.498 ± 1.065 | 0.462 |
| $a = 0.5, t_s = 50 \text{ ms}$ | 0.357 ± 0.215 | 1.624 ± 1.137 | 2.159 ± 0.664 | 0.167 |
| Valeurs obtenues pour les Exposants de Lyapounov les Dimensions Fractales et la K -Entropie | | | | |

6.6 Discussion

Dans ce chapitre, on a introduit un nouveau *modèle de système itératif bidimensionnel de la durée du potentiel d'action cardiaque avec mémoire*, dérivé du modèle itératif de l'APD sans mémoire et unidimensionnel de Lewis & Guevara 1990 [69].

La dépendance à l'histoire antérieure du tissu cardiaque dépasse le potentiel d'action immédiatement précédent : APD $(i+1)$ dépend non seulement de l'APD (i) , mais aussi de l'APD $(i-1)$. Cette dépendance est particulièrement évidente lorsque APD (i) et APD $(i-1)$ sont tous les deux courts [69].

Le présent travail vise à étudier la dynamique non linéaire de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) en dimension supérieure et à apprendre plus d'informations sur la dynamique de l'APD. Ainsi, après avoir étudié la stabilité des points d'équilibres du système itératif de l'APD avec mémoire, on a décrit la transition vers le chaos en fonction de (t_s) et du paramètre (a) que l'on peut identifier en termes de différentes constantes de l'électrophysiologie cardiaque.

Ensuite, on a mis en évidence la structure fractale des attracteurs étranges en estimant les valeurs non entières de leur dimension, en calculant les valeurs positives des exposants de Lyapounov et la K -entropie de système itératif de l'APD en dimension 2. Les résultats obtenus indiquent une *dépendance sensible*

aux conditions initiales (c'est-à-dire la signature du chaos) à des fréquences de stimulation où des rythmes irréguliers sont observés dans le modèle itératif.

Lors l'augmentation de la fréquence de la stimulation (t_s), les rythmes de la synchronisation sont rencontrés successivement d'une nouvelle manière :

$$\begin{aligned} \text{séquence} &= \{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow \\ &\rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow 4 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow \\ &\rightarrow 4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow \\ &\rightarrow 10 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 6 : 1 \rightarrow 12 : 2 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 7 : 1 \rightarrow \text{chaos total} \} \end{aligned}$$

On note que la première transition vers le chaos peut se produire lorsque le rythme 6 : 2 perd sa stabilité. De plus, il n'y a aucune mention des fragments suivants dans des rapports expérimentaux ou de modélisation précédents :

$$\text{fragment de séquence} = \{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1\},$$

$$\text{fragment de séquence} = \{4 : 2 \rightarrow 3 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 3 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow 3 : 1\},$$

$$\text{fragment de séquence} = \{\text{chaos} \rightarrow 5 : 1 \rightarrow \text{chaos} \rightarrow 5 : 1\}$$

On a découvert et mis en évidence les nouvelles bistabilités :

- la bistabilité $\{4 : 2 \leftrightarrow 3 : 1\}$.
- la bistabilité $\{3 : 3 \leftrightarrow 3 : 1\}$.
- la bistabilité $\{4 : 1 \leftrightarrow 6 : 2\}$.
- la bistabilité $\{\text{chaos} \leftrightarrow 5 : 1\}$.

Cependant les travaux [48 – 56, 69] signalent et mentionnent les fragments suivants :

- $\{1 : 1 \rightarrow 2 : 2 \rightarrow 2 : 1\}$,
- $\{2 : 1 \rightarrow 4 : 2\}$,
- $\{2 : 1 \rightarrow 4 : 2 \rightarrow \text{chaos}\}$,
- $\{3 : 1 \rightarrow 6 : 2 \rightarrow \text{chaos}\}$, et $\{4 : 1 \rightarrow 8 : 2 \rightarrow \text{chaos}\}$.

Il apparaît clairement que le paramètre (a) est un paramètre de contrôle incontournable, son utilité apparaît dans le contrôle de l'alternance 2 : 2, des

rythmes périodiques $2N : 2$ ($N \geq 1$) et du rythme irrégulier lorsqu'il prend des valeurs supérieures ou égale à 6.4.

Notre prochain objectif est d'affiner l'étude de la dynamique non linéaire de la durée du potentiel d'action cardiaque (APD) et de développer et d'appliquer des méthodes de contrôle du chaos [107 – 109]. Bien que de nombreuses limitations pratiques doivent être surmontées, les progrès dans l'application du contrôle du chaos offrent l'espoir que les techniques de contrôle dynamique non linéaire seront cliniquement utiles. Ces techniques peuvent être avantageuses par rapport aux algorithmes d'antitachycardie ou de défibrillation utilisés par les défibrillateurs cardiaques implantables actuels.

Chapitre 7

Dynamique non linéaire, chaos et physiologie : Conclusions et Perspectives

Les objectifs de la science depuis quelques siècles sont d'ordre descriptif, mécanistiques par une recherche de causalité, une logique et reproductibilité de phénomènes pour décrire et expliquer la « réalité » telle que le scientifique peut la concevoir, la voir, la mesurer et reproduire l'effet de perturbations. La partition de l'Univers suivant des domaines de recherche et des arborescences (matière inerte, vivante, sociale, les écosystèmes, la biosphère, la physiologie, le cosmos) dans une sorte de hiérarchie dressée par l'homme fait que cela fragmente la capacité d'appréhender la complexité de notre Univers . . .

De manière conceptuelle et méthodologique jusqu'au siècle dernier la science scindait le monde dans une conception matérialiste de catégories d'entités de processus et de méthodes pour qualifier et quantifier des paramètres par des systèmes de mesures. Depuis qu'à la fin du XIXe siècle, le rêve de Laplace fut balayé par Poincaré en révélant un problème majeur des systèmes newtoniens comprenant plus de deux corps, à savoir la sensibilité aux conditions initiales :

« Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la compose embrasse-

rait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome ; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux »

La théorie des systèmes dynamiques puis la théorie du chaos n'ont cessé d'évoluer et d'émerger dans différents domaines, prenant davantage en compte la contingence, l'absence de causalité linéaire, l'occurrence de comportements chaotiques, les variations des conditions initiales et donc l'aspect « imprédictibilité ».

De nouveaux concepts sont apparus : Les solutions asymptotiques de certains systèmes dynamiques se nomment attracteurs étranges chaotiques et l'on sait désormais que le complexe peut être engendré par des systèmes d'équations très simples.

Cette nouvelle approche, un peu à l'image de la révolution quantique s'est imposée, et a envahi progressivement différents domaines de la recherche scientifique, permettant d'établir des résultats intéressants :

- le système solaire est imprédictible au-delà de 100 millions d'années ;
- le mouvement complexe du satellite de saturne, Hypérion, est chaotique, et ce, en raison de sa forme oblongue ;
- Au sein des systèmes physiologiques, le chaos procurerait une flexibilité de réponse accrue à différentes situations, ainsi le rythme cardiaque normal est chaotique ce qui permettrait au cœur de réagir efficacement à l'effort ;
- des modèles de réactions chimiques offrent des régimes chaotiques et l'une d'entre elles, la réaction de Belousov-Zhabotinsky, présente un attracteur étrange compatible avec le modèle théorique de Otto E. Rössler,...

7.1 Dynamique non linéaire et complexité

Un enjeu d'actualité est d'extraire des informations plus fines sur les mécanismes qui engendrent le chaos afin de permettre une compréhension profonde des dynamiques non linéaires, puis de parvenir à maîtriser et à contrôler les

phénomènes modélisés par des systèmes dynamiques chaotiques.

Les outils de l'analyse des systèmes dynamiques non linéaires et de la théorie du chaos sont au cœur des recherches actuelles, en particulier le contrôle du chaos qui fait référence à un processus dans lequel une perturbation mineure est appliquée à un système chaotique afin de réaliser un comportement souhaitable (chaotique, périodique ou stationnaire).

Parmi les méthodes de contrôle du chaos on cite celles utilisées dans notre thèse, la méthode Ott-Grebogi-Yorke (OGY) et celle du contrôle prédictif. Le cadre de notre travail a permis de répondre à une série de questions pertinentes liées au contrôle du chaos, telles que le problème du ciblage, à savoir comment amener une trajectoire dans un petit voisinage d'un emplacement souhaité dans l'attracteur chaotique en dimensions faible et élevée, et contrôler les limites du bassin fractal.

Toutefois la complexité des problèmes soulevés par les dynamiques non linéaires va de pair avec le développement des outils mathématiques de plus en plus pertinents et efficaces. Ainsi la présence d'un ensemble chaotique non attractif, également appelé selle chaotique, dans l'espace des phases implique l'apparition d'un type de chaos à temps fini connu sous le nom de chaos transitoire. Pour un système dynamique donné dans une certaine région de l'espace des phases avec chaos transitoire, les trajectoires finissent par abandonner la région chaotique s'échappant vers un attracteur externe, si aucune intervention externe n'est effectuée sur le système. Dans certaines situations, cet attracteur peut impliquer un comportement indésirable, de sorte que l'application d'un contrôle dans le système est nécessaire pour l'éviter tant le caractère non attractif du chaos transitoire que la présence éventuelle de bruit peuvent entraver cette tâche. Récemment, une nouvelle méthode de contrôle du chaos appelée « contrôle partiel » a été développée. La méthode repose sur l'existence d'un ensemble, appelé *ensemble de sécurité*, qui permet de supporter un chaos transitoire en n'utilisant qu'un contrôle faible. Le résultat surprenant est que les trajectoires peuvent être contrôlées en utilisant une quantité de contrôle inférieure à la quantité de bruit

qui l'affecte. Le potentiel de cette méthode de contrôle fait l'objet d'une étude particulière et prometteuse dans le contrôle du chaos en présence de perturbations (en particulier en cardiologie).

Ruben Capeans, Juan Sabuco and Miguel A.F Sanjuan « *Partial control of chaos : how to avoid undesirable behaviors with small controls in presence of noise* » (*arXiv :1803.09634 [nlin.CD]* – **Mars 2018**)

7.2 Dynamique non linéaire : modélisation mathématique de la dynamique cardiaque

Les outils de la théorie des systèmes dynamiques non linéaires, pouvant expliquer voire contrôler les propriétés d'adaptabilité de l'organisme, sont appliqués aux signaux cardiaques, ce qui en l'occurrence est le sujet de notre thèse. Aussi à la lumière des travaux que nous avons présentés, il est intéressant d'évoquer les problèmes actuels et les questions ouvertes sur l'apport de la théorie du chaos à la compréhension de la physiologie cardiaque tels que les mécanismes de l'alternance cardiaque et les nouvelles stratégies pour maîtriser ce phénomène ainsi que celui des arythmies.

- **Bistabilité** : En ce qui concerne le choix de notre modèle avec mémoire, de récents travaux sur l'APD confortent ce choix bidimensionnel. Ce modèle permet d'une part d'obtenir des informations sur de nouvelles séquences de bifurcations et de nouvelles bistabilités entre certains rythmes cardiaques, et d'autre part qui met l'accent sur l'importance d'un paramètre physiologique dans ce modèle pour contrôler les rythmes cardiaques complexes.

Ainsi **Tolkatcheva et Zhao [149]**. (*Elena G. Tolkacheva, Xiaopeng Zhao, « Nonlinear dynamics of periodically paced cardiac tissue » Nonlinear Dynamics. Volume 68 :347–363; (2012)*) montrent, suite à des observations expérimentales, que ce sont les dynamiques du calcium interne au sein de la cellule qui affectent le potentiel de membrane (ou potentiel électrochi-

mique de repos) et de fait l'APD.

- Par ailleurs, **Edwards et Blatter** [150] ont montré par des études expérimentales et de modélisations que cette dynamique du calcium est le principal conducteur de l'alternance et de rythmes d'ordre élevé (y compris le chaos). Cependant cette dynamique de calcium n'est pas incluse dans les premiers modèles ioniques «de première génération», comme le modèle Beeler-Reuter. On souligne également qu'en dépit du fait que le modèle proposé dans ce travail relatif à la dynamique de l'APD avec mémoire donne des nouvelles informations sur l'évolution de la dynamique cardiaque, la dynamique du calcium n'en est pas pour autant plus claire.

- **Modélisation et contrôle** : Dans un article tout récent (2018), à savoir : **Emma McIvor, Stephen Coombes, Rüdiger Thul**, “*Three-dimensional spatio-temporal modelling of store operated Ca^{2+} entry : Insights into ER refilling and the spatial signature of Ca^{2+} signals*” *Cell Calcium*, Volume 73, July 2018, Pages 11-24

les auteurs montrent que pour enclencher la contraction des cellules auriculaires, la concentration de calcium suit une chorégraphie élaborée puisqu'elle diffère dans l'espace et dans le temps au sein d'une même cellule.

Ce n'est pas du tout ce que l'on constate dans les cellules ventriculaires où la concentration calcique reste uniforme. Il est impératif donc de comprendre cette dynamique d'un point de vue global et à l'échelle cellulaire. Le modèle mathématique proposé rend cette prouesse possible. Il permet une exploration détaillée des modifications spatio-temporelles dans les concentrations de calcium associées aux situations saines et pathologiques. De plus il est possible d'activer ou de désactiver les propriétés cellulaires et regarder comment se comporte le calcium, et d'en déduire les conditions à l'origine d'anomalies pouvant conduire à certaines pathologies comme la fibrillation auriculaire. Cette nouvelle approche ouvre la voie au dévelop-

pement de nouvelles méthodes de contrôle.

- **Applications logistique et de Hénon** : Notre objectif principal étant de stabiliser le rythme sinusal normal en présence de l’alternance déterminée par une dynamique périodique stable de l’APD, on a apporté des modifications à la méthode du contrôle prédictif, basées sur le contrôle du chaos, pour supprimer le phénomène d’alternance de l’APD. Pour ce faire on a réalisé une estimation du bassin d’attraction restreint du point fixe instable, changeant ainsi l’approche habituelle du contrôle prédictif du chaos à savoir son application dans un voisinage arbitraire et infinitésimal. Nous avons étendu ce résultat très intéressant pour les systèmes dynamiques itératifs théoriques de **dimensions différentes** tels que : l’**application logistique** et le **système de Hénon**.

- **Oscillateurs et modélisation** : La modélisation mathématique des rythmes cardiaques se développe en considérant trois oscillateurs Van der Pol couplés modifiés. Chaque oscillateur représente l’un des principaux potentiels d’activation cardiaque importants : le nœud sino-auriculaire (SA), le nœud auriculo-ventriculaire (AV) et le complexe His-Purkinje (HP). Les simulations numériques du modèle proposé montrent qu’il est possible de capturer la dynamique générale du rythme cardiaque, représentant la forme générale de l’ECG avec les courbes P, QRS et T [180].

D’autres recherches de la modélisation mathématique sont basées sur l’activité électrique du cœur dont l’objectif est de reproduire quantitativement et/ou qualitativement les mesures expérimentales. Lorsque les modèles synthétisent l’ensemble des données électrophysiologiques connues, ils conduisent à un système complexe, difficile à analyser mathématiquement.

On peut chercher à obtenir ou à concevoir un modèle d’ordre réduit.

Afin d’éclairer les études suivantes on souligne que les modèles mathématiques de l’activité électrique cardiaque sont classés en deux familles :

- la famille des modèles physiologiques qui tentent d'intégrer le maximum d'informations afin de refléter les phénomènes électrophysiologiques les plus importants et les plus complexes.

- et la famille des modèles réduits de membrane. Ces derniers ont été développés pour pallier aux difficultés et à la complexité croissante des premiers.

– **Autre modèle :** Les travaux récents (**N F. Otani**, *Theory of the development of alternans in the heart during controlled diastolic interval pacing. CHAOS 27, (2017)*), [182] portent sur les progrès réalisés dans la modélisation des cellules et des tissus cardiaques, en particulier celle des potentiels d'action. Les auteurs abordent également la question de la dynamique des ondes réentrantes, y compris des ondes spirales et *scroll*, qui sous-tendent de nombreuses arythmies cardiaques [183].

– **Chaos et bifurcations.** Les premières post-dépolarisations (**EAD : Early After Depolarizations**) sont des oscillations de tension pathologique pendant la phase de repolarisation des potentiels d'action cardiaque (AP). Les EAD sont causés par les médicaments, le stress oxydatif ou les maladies des canaux ioniques, et elles sont considérées comme des précurseurs potentiels des arythmies cardiaques dans les récentes tentatives de redéfinir le paradigme de l'innocuité des traitements médicamenteux cardiaques. Les recherches actuelles sur le traitement des arythmies cardiaques portent sur les EAD, source potentielle de ces cardiomyopathies.

Kügler et al. (*Philipp Kügler, M.A.K. Bulelzai and André H. Erhardt « Period doubling cascades of limit cycles in cardiac action potential models as precursors to chaotic early Afterdepolarizations » BMC Systems Biology (2017)*) montrent que le modèle chaotique des EADs avec un doublement de période et bifurcations de cycles limites ouvre de nouvelles opportunités d'analyser les EAD chaotiques au moyen de la théorie du contrôle de la bifurcation.

- De nouveaux modèles mathématiques de la dynamique ionique cardiaque ont été développés depuis celui réduit de type Hodgkin-Huxley en 1962 [151], Ces modèles qui s'appuient presque toujours sur des modèles existants, incorporent généralement des formalismes de courant ionique et une dynamique du calcium intracellulaire plus détaillés ainsi que d'autres données spécifiques [37].

On cite les travaux [152, 153] dans lesquels des modèles réduits avec moins de variables et de paramètres ont également été développés afin de réduire la complexité du modèle et / ou les coûts de calcul (en particulier pour les simulations de tissus tridimensionnels).

L'expansion du développement des modèles mathématiques a entraîné l'existence de nombreux modèles pour certaines combinaisons espèce / type de cellule, et ce faisant, les modèles eux-mêmes sont devenus l'objet d'études comparatives, en termes de structure, de valeurs de paramètres, de sensibilité des paramètres et de dynamique simulée [39]. On peut citer en exemples les travaux suivants sur : les myocytes ventriculaires humains [154], les myocytes auriculaires humains [156], les myocytes ventriculaires canins [156], et les myocytes ventriculaires de lapin [157].

- Les travaux de **Garzon and Grigoriev (2017)** [184] portent sur les mécanismes sous-jacents à la fibrillation cardiaque et plus particulièrement sur la transition du rythme normal à la fibrillation auriculaire associée à une augmentation progressive de la fréquence de stimulation. Les auteurs montrent que dans un modèle bidimensionnel de tissu auriculaire homogène et rythmé, la transition des alternances discordantes au bloc de conduction, à la réentrée et au chaos des ondes en spirale est associée à une croissance transitoire des perturbations d'amplitude finie plutôt qu'à une instabilité conventionnelle. Ce qui, mathématiquement, est très similaire à la transition sous critique de l'écoulement laminaire d'un fluide à la turbulence, ce qui permet d'utiliser plusieurs des outils développés dans le contexte de

la turbulence des fluides pour améliorer la compréhension des arythmies cardiaques.

Alejandro Garzón, Roman O. Grigoriev « Memory effects, transient growth, and wave breakup in a model of paced atrium » arXiv :1704.03399 (2017)

- Une approche topologique du mécanisme de la fibrillation est étudiée par **Marcotte et Grigoriev (2017)**[185]. Les auteurs étudient le rôle de la rupture des ondes spirales dans l'apparition de la fibrillation auriculaire et les mécanismes dynamiques qui la soutiennent. Ils montrent que la dynamique spatio-temporelle chaotique dans ce régime peut être décrite comme un équilibre dynamique entre des types de transitions topologiquement distincts qui augmentent ou diminuent le nombre d'ondelettes.

L'analyse des bifurcations ou des comportements résultant de la variation systématique des paramètres de contrôle, est un outil de la dynamique non linéaire très utile en électrophysiologie cardiaque. La force de l'analyse de la bifurcation réside dans sa capacité à fournir des informations sur la façon dont les pathologies se produisent sous l'effet de la variation de certains paramètres.

- « **Mode propre** » : Sans l'utilisation d'outils d'analyse sophistiqués la complexité croissante des modèles mathématiques de l'électrophysiologie cardiaque rend difficile la mise en évidence d'une relation causale telle que les effets de différents courants ioniques sur les caractéristiques du potentiel d'action [157, 158], et encore moins sur les phénomènes plus complexes tels que l'apparition de l'alternance et les mécanismes de l'alternance[159, 160]. Un tel outil est l'analyse de « **mode propre** » développée par **Li et Otani (2004)**[160], qui quantifie la dépendance de différents comportements sur des variables dynamiques. Li et Otani ont en outre montré comment cette méthode peut être utilisée pour supprimer l'alternance dans le cas particulier de myocytes [162]. D'autres travaux sur l'utilisation du « mode propre » sont à citer[126], [161][163]
- **Contrôle du chaos** : Il est clair que la dynamique non linéaire et la théorie du chaos ont réussi à fournir des explications mécanistiques de nombreux

aspects de l'arythmie cardiaque [39].

- En effet, la traduction des prédictions de la thérapie basées sur l'analyse des systèmes non linéaires en pratique clinique est presque inexistante [39]. Un domaine, qui avait suscité l'espoir d'une telle traduction, est la suppression de la fibrillation ventriculaire basée sur la théorie du contrôle du chaos. L'idée étant que si la fibrillation ventriculaire est un chaos déterministe, alors il devrait être supprimé en utilisant des petits chocs de stimulation, moins douloureux et/ou dommageables, que les grands chocs de défibrillation. Malheureusement, alors que l'efficacité du contrôle du chaos a été démontrée dans des travaux expérimentaux et des simulations sur ordinateur [59, 173], il n'a pas réussi à mettre fin à la fibrillation en clinique. De nouvelles stratégies pour contrôler les ondes spirales et les ondes scroll basées sur des travaux théoriques et de simulation sont en cours de développement [174, 175], et certains se montrent prometteurs dans les expériences [183]. Parce que les ondes spirales sont associées à la tachycardie ventriculaire, des méthodes visant à les éliminer sont construites sur les méthodes de contrôle feedback [124, 125, 126].

D'autres méthodes de contrôle, basées en partie sur le contrôle du chaos, font l'objet de travaux en vue d'éviter le phénomène d'alternance, de prévenir la tachycardie ou la fibrillation ventriculaire induite par l'alternance [129, 132, 133, 138, 139, 181, 182].

7.3 Dynamique non linéaire en neurophysiologie et neurosciences

Les activités cérébrales démontrent des comportements chaotiques qui peuvent être simulés par certains systèmes chaotiques. La stimulation cérébrale a été utilisée pour contrôler la dynamique du cerveau afin de traiter certains troubles neurologiques comme la maladie de Parkinson et l'épilepsie. Cependant, ces pra-

tiques cliniques sont basées sur des essais empiriques et manquent de soutien théorique. De plus, l'effet à long terme de la stimulation cérébrale sur le réseau neuronal cérébral demeure inconnu. C'est pourquoi il est donc essentiel d'évoquer l'étude théorique pour la stimulation du cerveau de

- **Système de Hénon.** **Lei Zhang**, “*Hénon map chaotic system critical points analysis and classification for the dynamic control of brain stimulation*”, *IEEE XXIV International Conference on Electronics (2017)*

Cet article présente l'analyse et la classification des points critiques du système chaotique de l'application de Hénon basé sur différents paramètres du système. Le contrôle dynamique de l'application de Hénon étant basé sur cinq caractéristiques des systèmes chaotiques, à savoir la bifurcation, l'exposant de Lyapunov, le point critique, la matrice jacobienne et les valeurs propres de la matrice jacobienne évaluées au point critique, l'auteur classe les points critiques en fonction des paramètres du système pour évaluer le comportement du système (stable ou instable), qui peut ensuite être utilisé pour générer une stimulation pour le contrôle dynamique du système. Ces méthodes d'analyse peuvent être utilisées pour divers systèmes chaotiques en général.

- **Equation logistique discrète avec une dynamique non linéaire**
Autres travaux emblématique de l'application de la théorie des systèmes dynamiques et de la théorie du chaos et très prometteurs, ceux sur la sclérose en plaques (SEP) menée par : **Tetsuya Akaish**, *Toshiyuki Takahashi*, *Ichiro Nakashima*, « *Chaos theory for clinical manifestations in multiple sclerosis*”, *Medical Hypotheses*, Volume 115, June 2018

La SEP est une maladie démyélinisante qui montre de manière caractéristique des récives et des rémissions répétées de manière irrégulière dans le système nerveux central. À l'heure actuelle, le mécanisme pathologique de la SEP est inconnu et il n'y a ni théories ni modèles mathématiques pour expliquer ses modèles disséminés dans le temps et dans l'espace. Dans cet article, les auteurs présentent un nouveau modèle théorique du point de

vue du système complexe avec un *modèle de chaos* pour reproduire et expliquer les manifestations cliniques et pathologiques non linéaires dans la SEP. Ainsi ils ont adopté une *équation logistique discrète avec une dynamique non linéaire* afin de refléter la rétroaction négative en immunité. Puis avec ce modèle est susceptible de reproduire théoriquement tous les sous-types de *SEP rémittente*, de *SEP progressive primaire* et de *SEP progressive secondaire*.

Avec la sensibilité aux conditions initiales et la sensibilité aux changements infimes des paramètres de la théorie du chaos, il serait donc possible de reproduire la dissémination spatiale. En conclusion, en appliquant la théorie du chaos au champ scalaire tridimensionnel du système nerveux central, il apparaît possible de *reproduire le résultat non linéaire de l'évolution clinique et expliquer les disséminations non résolues dans le temps et l'espace des patients atteints de SEP*.

7.4 Perspectives dans la dynamique non linéaire appliquée à la physiologie

Les expériences, la modélisation et la théorie rapportées dans la plupart des récentes recherches fournissent des preuves supplémentaires que les bifurcations de doublement de période se produisent dans la physiologie cardiaque. Et il est légitime de penser que la dynamique non linéaire, la théorie du chaos, en particulier la théorie des bifurcations, joueront un rôle de plus en plus important dans la compréhension de la complexité de la physiologie cardiaque. Dans ce cadre des défis significatifs continuent de stimuler la recherche fondamentale sur la dynamique chaotique spatio-temporelle dans les systèmes multiéchelles extensibles excitables.

On est également sur le point d'appliquer la modélisation mathématique aux tests d'innocuité des médicaments et aux applications cliniques, ce qui présente

d'autres défis de modélisation, notamment le développement de processus rigoureux d'évaluation et de validation [183].

Par conséquent, la combinaison des différentes approches de modélisation, méthode de contrôle du chaos et la défibrillation continuera de s'avérer passionnante et importante, surtout elle pourra donner naissance à des nouvelles stratégies thérapeutiques dans les traitements des arythmies complexes.

Au vu des résultats obtenus la stratégie de contrôle que nous avons construite semble prometteuse et peut éventuellement être incorporée dans des dispositifs implantables afin de supprimer l'alternance et éviter les conséquences létales de ce dysfonctionnement cardiaque.

Un de nos projets de recherche dans un futur immédiat est d'une part appliquer notre nouvelle approche de contrôle aux applications itératives utilisées pour décrire la dynamique des Ca-alternances ,i.e les alternances du point de vue des perturbations cellulaires de la signalisation électrique et calcique [147, 150].

D'autre part il nous semble intéressant d'approfondir les travaux de **Nazarimehr, F., Jafari, S., Hashemi Golpayegani, S.M.R. et al.** (*Nonlinear Dyn* (2017)) sur l'utilisation de certains quantificateurs du chaos tel que les exposants de Lyapounov dans le but de caractériser les transitions d'un régime dynamique à un autre observées dans de nombreux systèmes complexes, notamment physiologiques (électrophysiologie cardiaque, neurophysiologie).



Pour conclure, les principes de l'approche dynamique sont formels et peuvent s'appliquer quelle que soit la nature des éléments composant le système, et quelle que soit l'échelle de temps sur laquelle évolue le phénomène. On va de l'infiniment grand (les systèmes galactiques) à l'infiniment petit (les constituants des noyaux atomiques), et d'échelles de temps de l'ordre du milliard d'années à la micro-seconde. Dans le cadre de l'application de l'approche dynamique à la physiologie, les échelles de temps pourront être également fort diverses : de plusieurs années (rythmes en épidémiologie), de quelques heures (rythmes circadiens et

hormonaux), de quelques minutes (oscillations biochimiques), ou d'une seconde (rythme cardiaque).

Dans ce sens, tout système, à partir du moment qu'il présente un certain niveau de complexité (structure) et qu'il évolue dans le temps (temporalité), peut être envisagé dans le cadre de cette approche.

Les domaines d'application sont divers : l'astrophysique, la physique des particules, l'étude des turbulences hydrauliques, l'étude des champs magnétiques, la météorologie, le développement et le contrôle et l'apprentissage moteur, l'économie, la sociologie, la psychopathologie, la physiologie organique et cellulaire, . . . Cela confirme que l'application de la dynamique non linéaire et de la théorie du chaos constitue une opportunité permettant de dépasser le cloisonnement disciplinaire des approches, afin de générer une multidisciplinarité de fait.

Les systèmes dynamiques non linéaires suscitent aujourd'hui de plus en plus d'intérêt et certaines de leurs propriétés : sensibilités aux conditions initiales, attracteurs étranges, irréversibilité, processus de bifurcation, . . . semblent en effet pouvoir fournir des perspectives nouvelles sur la représentation du fonctionnement du vivant cellulaire au vivant organique et physiologique et devenir des outils mathématiques puissants et efficaces au service de la progression de l'induction scientifique et de la compréhensibilité et l'intelligibilité de l'évolution de l'Univers .



Bibliographie

- [1] M. Shelhamer, "*Nonlinear Dynamics in physiology : A State Space Approach*". The Johns Hopkins University, School of Medicine, USA (2007).
- [2] E. Wigner, "*The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*". In : Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, No. I. New York : John Wiley & Sons (1960).
- [3] D.A. Robinson, "*Vestibular and optokinetic symbiosis : an example of explaining by modeling*". In : R Baker, A Berthoz (eds) Control of Gaze by Brain Stem Neurons, Developments in Neuroscience Vol. 1. Amsterdam : Elsevier/North-Holland Biomedical Press, pp 49-58 (1977).
- [4] DJ. Gauthier, S. Bahar and G. M. Hall, "*Handbook of biological physics*". Volume 4, edited by F. Moss and S. Gielen, chapter 7, 229-255, Elsevier science B. V (2001).
- [5] Ed. N. Lorenz, "*Deterministic non-periodic flow*". Journal of Atmospheric Science 20 :130-141 (1963).
- [6] J. Gleick, "*Chaos : Making a New Science*". New York : Penguin (1988).
- [7] Ed. N. Lorenz, "*The Essence of Chaos*". Seattle : University of Washington Press (1996).
- [8] SM. Ulam, "*Adventures of a Mathematician*". New York : Charles Scribner's Sons (1976).
- [9] L. Glass, "Nonlinear dynamics of physiological function and control". Chaos 1 :247-250 (1991).

- [10] SH. Strogatz, *"Nonlinear Dynamics and Chaos : with application to Physics, Biology, Chemistry, and Engeneering"*. New York : Addison- Wesley (1994).
- [11] AA. Andronov, AA .Vitt, SE Khaikin, *"Theory of Oscillators"*, Mineola NY : Dover (1966).
- [12] TR. Chay, *"Chaos in a three-variable model of an excitable cell"*. Physica D 16 :233-242 (1985).
- [13] TR. Chay, J Rinzel, *"Bursting, beating and chaos in an excitable membrane"*. Biophysical Journal 47 :357- 366 (1985).
- [14] M. Conrad, *"What is the use of chaos ?"* In : AV Holden (ed) *Chaos*, Princeton : Princeton University Press, pp 3-14 (1986).
- [15] JM, Emlen, DC Freeman, A. Mills, JH Graham, *"How organisms do the right thing : the attractor hypothesis"*. Chaos 8 :717-726 (1998).
- [16] O. Galor , *"Discrete Dynamical Systems"*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [17] K. Alligood, T. Sauer, J. Yorke, *"Chaos : An Introduction to Dynamical Systems"*. Springer-Verlag : New York (1996).
- [18] P. Bergé. Y. Pomeau. Ch.Vidal, *"L'ordre dans le Chaos"*, Herman (1984).
- [19] H. Zhang, D. Liu, Z. Wang, *"Controlling Chaos : Suppression, Synchronization and Chaotification"*. Springer-Verlag London Limited (2009).
- [20] H. DANG-Vu. C. DELCARTE, *"Bifurcation et Chaos"*, *Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en pascal, Fortran et Mathematica* , Ellipses Edition (2000).
- [21] C. Shannon, *"A Mathematical Theory of Communication"*, Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423 and 623-656 (1948).
- [22] R.S. Shaw : *"Strange Attractors, Chaotic Behaviour and Information Flow"*. In : Zeitschrift für Naturforschung A. 36, S. 80–112 (1981).
- [23] T. Shinbort , C. Grebogi , JA. Yorke , E. Ott, *"Using small perturbations to control chaos"*. Nature 363 :411–417 (1993).

- [24] F. Dyson, *"Infinite in All Directions"*. Harper and Row, New York (1988).
- [25] M. Lefranc, P. Glorieux, *"Topological analysis of chaotic signals from a CO₂ laser with modulated losses"*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 03 : 643-650 (1993).
- [26] A. Hubler, *"Adaptive control of chaotic systems"*. Helv Phys Acta 62 :343–347 (1989).
- [27] E. Ott , C. Grebogi , JA. Yorke, *"Controlling chaos"*. Phys Rev Lett 64 :1196–1199 (1990).
- [28] M. Ding M, E. Ott , C. Grebogi, *"Controlling chaos in a temporally irregular environment"*. Phys D 74 :386–394 (1994).
- [29] BI. Epureanu , EH. Dowell, *"Optimal multi-dimensional OGY controller"*. Physica D 139 :87–96 (2000).
- [30] C. Grebogi , Y. Lai, *"Controlling chaos in high dimensions"*. IEEE Trans Circuits Syst I 44 :971–975 (1997).
- [31] Z. Zhang, *"The Principle of Differential Dynamical Systems"*. Science Press, Beijing (1997).
- [32] G. Chen , X. Dong, *"From Chaos to Order : Methodologies, Perspectives and Applications"*. World Scientific, Singapore (1998).
- [33] P. Manneville, *"Systèmes dynamiques et chaos"*. LadHyX, École Polytechnique (1998).
- [34] S. Boughaba, *"Phénomènes de Chaos Déterministe et de Turbulence. L'Attracteur Etrange de Chua : Coexistence d'Attracteurs, Dynamique Symbolique et Confineurs"*, Thèse de doctorat d'Etat. Université Mentouri de Constantine (2002).
- [35] M. Kesmia, *"Phénomènes Chaotiques dans des Systèmes Dissipatifs"*, Thèse de Magistère. Université Mentouri de Constantine (2007).
- [36] RC. Hilborn, *"Chaos and Non- linear Dynamics and Bifurcation. An introduction for Scientists and Engineers"* New York – Oxford University Press (1994).

- [37] E. Schöll and H.G. Schuster, *"Handbook of Chaos Control"*, 2nd Ed, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2008).
- [38] DM. Bers, *"Excitation–Contraction Coupling and Cardiac Contractile Force"*, Kluwer. Boston (2001).
- [39] TK. Madsen and DJ. Christini, *"Nonlinear Dynamics in cardiology"*. *Annu Rev Biomed Eng*; 14 : 179-203 (2012).
- [40] JB. Nolasco and RW. Dahlen. *"A graphic method for the study of alternation in cardiac action potentials"*. *Journal of applied physiology*; 25 :191–196 (1968).
- [41] A. Karma. *"Electrical alternans and spiral breakup in cardiac tissue"*. *Chaos*, 4; 461–472 (1994).
- [42] RF. Gilmour, NF. Otani, and MA.Watanabe. *"Memory and complex dynamics in cardiac purkinje fibers"*. *American Journal of Physiology*; 272 :H1826–H1832 (1997).
- [43] A. Leenhardt, C. Sebag, F. Extramiane, V. Algarrondo, *"L'essentiel en Rythmologie"*. *Medecine Science Publication*, Paris (2012).
- [44] JM. Pastore, SD. Girouard, KR. Laurita, FG. Akar, DS. Rosenbaum. *"Mechanism linking T-wave alternans to the genesis of cardiac fibrillation"*. *Circulation*; 99 :1385–94 (1999).
- [45] JJ. Fox, ML . Riccio, F. Hua, E. Bodenschatz, RF Jr. Gilmour. *"Spatiotemporal transition to conduction block in canine ventricle"*. *Circ Res*; 90 :289–96 (2002).
- [46] M. Chinushi, D. Kozhevnikov, EB. Caref, M. Restivo, N. El-Sherif. *"Mechanism of discordant T wave alternans in the in vivo heart"*. *J Cardiovasc Electrophysiol*; 14 :632–8 (2003).
- [47] MR. Guevara, G. Ward, A. Shrier, L. Glass, In : *IEEE Computers in Cardiology*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, p. 167 (1984).

- [48] Z. Qu, A. Garfinkel, PS. Chen, JN. Weiss, "*Mechanisms of discordant alternans and induction of reentry in simulated cardiac tissue*". *Circulation* 102, p. 1664 (2000).
- [49] B. Khaddoumi, "*Analyse et modélisation d'électrocardiogrammes dans le cas de pathologies ventriculaires*", Thèse de doctorat (2005).
- [50] A. Beuter, L. Glass, MC. Mackey, MS. Titcombe, "*Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine*". Springer Science & Business (2003).
- [51] JH. Jensen , PL. Christiansen , AC. Scott , O. Skovgaard , "*Chaos in the Beeler-Reuter system for the action potential of ventricular myocardial fibers*". *Physica D* 13 :269-277 (1984).
- [52] MR. Guevara , "*Concepts and Techniques in bioelectric Measurements : Is the Medium Carrying the message ?* " edited by J. Billette and AR. Leblanc. Editions de l'Ecole polytechnique de Montreal, Chapter 7, pp 67-87 (1997).
- [53] MR. Guevara, TJ. Lewis , "*A minimal single channel model for the regularity of beating in the sinoatrial node*". *Chaos* 5 :174-183 (1995).
- [54] R. Wilders , HJ. Jongsma , "*Beating irregularity of single pacemaker cells isolated from the rabbit sinoatrial node*". *Biophys J* 65 :2601-2613 (1993).
- [55] MR.Guevara, "*In Theory of Heart*". Glass L, Hunter P, McCulloch A (eds), Springer, New York, pp 239-253 (1991b).
- [56] TK. Madsen, LK. Taylor, AD. Skriver, P. Schaffer, and MR. Guevara, "*Regularity of beating of small clusters of embryonic chick ventricular heart-cells : experiment vs. stochastic single-channel population model*". *Chaos* 27, 093929 (2017).
- [57] LS. Liebovitch and TI. Toth, "*A model of ion channel kinetics using deterministic chaotic rather than stochastic processes*", *J. Theor. Biol.* 148, 243–267 (1991).

- [58] SB. Lowen, LS. Liebovitch, and JA. White, "*Fractal ion-channel behavior generates fractal firing patterns in neuronal models*", Phys. Rev. E 59, 5970–5980 (1999).
- [59] A. Garfinkel , ML. Spano , WL. Ditto , JN. Weiss, "*Controlling cardiac chaos*". Science 257 :1230-1235 (1992).
- [60] TA. Denton et al., "*Fascinating rhythm : a primer on chaos theory and its application to cardiology*". Am Heart J 120 :1419-1440 (1990).
- [61] T. Elbert et al., "*Chaos and physiology. Deterministic chaos in excitable cell assemblies*". Physiol Rev 74 :1-47 (1994).
- [62] NH. Holstein-Rathlou , DJ. Marsh, "*Renal Blood Flow Regulation and Arterial Pressure Fluctuations : a Case Study in Nonlinear Dynamics*", Physiol Rev, 74 :637-681(1994).
- [63] MJ. Janse, "*Is there chaos in cardiology*". Br Heart J 67 :3-4 (1992).
- [64] DT. Kaplan , AL. Goldberger, "*Chaos in cardiology*". J Cardiovasc Electrophysiol 2 :342-354 (1991).
- [65] M. Osaka , KH. Chon , RJ. Cohen, "*Distinguish cardiac randomness from chaos*". J Cardiovasc Electrophysiol 6 :441-442 (1995).
- [66] T. Quail, N. McVicar, M. Aguilar, MY. Kim, A. Hodge, L. Glass and A. Shrier, "*Chaotic dynamics in cardiac aggregates induced by potassium channel block*", CHAOS 22, 033140 (2012).
- [67] J. Rodríguez, R. Narváez, S. Prieto, C. Correa, P. Bernal, G. Aguirre, Y. Soracipa, J. Mora, "*The mathematical law of chaotic dynamics applied to cardiac arrhythmias.*", Journal of Medicine and medical Sciences Vol. 4(7) pp. 291-300 (2013).
- [68] R. Sassi ,S. Cerutti, F. Lombardi , M. Malik, HV. Huikuri, CK Peng ,G. Schmidt, Y. Yamamoto, "*Advances in heart rate variability signal analysis : joint position statement*" by the e-Cardiology ESC Working Group and the European Heart Rhythm Association co-endorsed by the Asia Pacific Heart Rhythm Society, EP Europace, Vol.17(9) : 1341–1353 (2015).

- [69] T.J. Lewis, MR Guevara, "*Chaotic dynamics in an ionic model of the propagated cardiac action potential*", J. Theor. Biol. 146(3) : 407-32 (1990).
- [70] EG. Tolkacheva, DG. Schaeffer, DJ. Gauthier, CC. Mitchell, "*Analysis of the Fenton-Karma model through approximation by a one-dimensional map*", Chaos 12 : 1034–1042 (2002) .
- [71] F. Fenton, A. Karma, "*Vortex dynamics in three-dimensional continuous myocardium with fiber rotation : filament instability and fibrillation*", Chaos 8 : 20–47 (1998).
- [72] JP. Eckmann, "*Roads to turbulence in dissipative dynamical systems*", Rev Mod Phys 53 :643-654 (1981).
- [73] C. Grebogi , Ott E, Yorke JA, Chaos, "*Strange Attractors and Fractal Basin Boundaries in Nonlinear Dynamics*". Science 238 :632-638 (1987).
- [74] CC. King, "*Fractal and chaotic dynamics in nervous systems*". Prog Neurobiol 36 :279-308 (1991).
- [75] HG. Schuster, "*Deterministic Chaos*", 2nd edition, VCH, Weinheim (1988).
- [76] LP. Shilnikov, "*The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors*". Uspehi Mat. Nauk, 36, 240–241 (1981).
- [77] DR. Chialvo , J. Jalife, "*Low dimensional chaos in cardiac tissue*". Nature 330 :749-752 (1987).
- [78] JM, Smith , RJ. Cohen, "*Simple finite-element model accounts for wide range of cardiac dysrhythmias*". Proc Natl Acad Sci 81 :233-237 (1984).
- [79] M. Ohnishi M, N. Inaba, "*A singular bifurcation into instant chaos in a piecewise-linear circuit*". IEEE Trans Circ Syst 41 :433-442 (1994).
- [80] JC. Sprott, G. Rowlands, "*Chaos data analyzer : the professional version*". Raleigh Physics Academic Software (1995).
- [81] JH. Jensen , PL. Christiansen , AC. Scott , O. Skovgaard, "*Chaos in the Beeler-Reuter system for the action potential of ventricular myocardial fibers*". Physica D 13 :269-277 (1984).

- [82] H. Froehling et al., "*Transition phenomena in cellular automata rule space*". *Physica D* 3 :605-617 (1981).
- [83] DM. Fleetwood, JT. Masden , N. Giordano, "*1/f noise in platinum films and ultrathin platinum wires : Evidence for a common bulk origin*". *Phys-Rev Lett* 50 :450-453 (1983).
- [84] E. Mayordomo , A. Kolmogorov, "*Complexity characterization of constructive Hausdorff dimension*", *Information Processing Letters* 84,1-3 (2002).
- [85] M. Ding , C. Grebogi , E. Ott , T. Sauer and JA. Yorke, "*Estimating correlation dimension from a chaotic time series : when does plateau onset occur ?*" *Physica D* 69 404-424 North-Holland (1993).
- [86] A.N. Kolmogorov, "*Entropy per unit time as a metric invariant of automorphism*" , *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 124, 754-755 (1959).
- [87] Ya.G. Sinai, "*On the Notion of Entropy of a Dynamical System*", *Doklady of Russian Academy of Sciences*, 124 :768- 771 (1959).
- [88] R. Frigg, "*Kolmogorov-Sinai, Entropy a Measure for Chaotic. Behaviour ?—Bridging the Gap Between Dynamical. Systems Theory and. Communication Theory*", *Brit, J,phil, sci* 55 : 411-434 (2004).
- [89] A. Babloyantz , A. Destexhe, "*Is the normal heart a periodic oscillator ?*" *Biol Cybern* 58 : 203-211(1988).
- [90] BPT. Hoekstra , CGH. Diks , MA. Allessie , JJ. de Goede, "*Nonlinear analysis of epicardial atrial electrograms of electrically induced atrial fibrillation in man*". *Cardiovasc Electrophysiol* 6 :419-440 (1995).
- [91] J. Hescheler, R. Speicher, "*Regular and chaotic behaviour of cardiac cells stimulated at frequencies between 2 and 20 Hz*". *Eur Biophys J* 17 :273-280 (1989).
- [92] SM. Ryan et al., "*Gender and age-related differences in heart rate dynamics : Are women more complex than men ?*" *J Am Coll Cardiol* 24 :1700-1707 (1994).

- [93] L. Glass, MR. Guevara, A. Shrier, R. Perez , "*Bifurcation and chaos in a periodically stimulated cardiac oscillator*", *Physica* 7D, 89-101(1983).
- [94] AR.Yehia, D. Jeandupeux, F. Alonso, and MR. Guevara, "*Hysteresis and bistability in the direct transition from 1 :1 to 2 :1 rhythm in periodically driven single ventricular cells*", VOLUME 9, NUMBER 4, CHAOS (1999).
- [95] TK. Madsen, LK. Taylor, A D. Skriver, P. Schaffer, and MR. Guevara, "*Regularity of beating of small clusters of embryonic chick ventricular heart-cells : experiment vs. stochastic single-channel population model*", CHAOS 27, 093929 (2017).
- [96] MR. Guevara, "*Spatiotemporal Patterns of Block in an Ionic Model of Cardiac Purkinje Fibre*", M. Markus et al. (eds.), *From Chemical to Biological Organization* © Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1988).
- [97] MR. Guevara, F. Alonso, D. Jeandupeux and AC.G. Vanginneken, "*Alternans in periodically stimulated isolated ventricular myocytes : Experiment and model*", *Cell to Cell Signalling : From experiment to theoretical model*, 551-563 (1989).
- [98] H. Arce, A. Xu, H. Gonzalez, MR. Guevara, "*Alternans and higher-order rhythms in an ionic model of a sheet of ischemic ventricular muscle*", *Chaos*,1054-1500 (2000).
- [99] Ya. PESIN, "Lyapunov Exponents and stable Manifolds for compact transformations, *Geometric Dynamic*, Lect. Notes Math, n 1007, P. 522-577 (1983).
- [100] S.M. Pincus, R.R. Viscarello : "*Approximate entropy : a regularity measure for fetal heart rate analysis*". *Obstet Gynecol* 79 : 249-255 (1992).
- [101] C. Karmakar , RK .Udhayakumar , M. Palaniswami , "*Distribution Entropy (DistEn) : A complexity measure to detect arrhythmia from short length RR interval time series*", *Conf Proc IEEE Eng Med Biol Soc.* 5207-10 (2015).

- [102] N. Wessel, Agnes Schumann, A. Schirdewan, A. Voss, J. Kurths, "*Entropy Measures in Heart Rate Variability Data*", Lecture Notes in Computer Science, volume 1933 (2000).
- [103] JM. Yentes, N. Hunt, KK. Schmid, JP. Kaipust, D. McGrath, N. Stergiou, "*The appropriate use of approximate entropy and sample entropy with short data sets*". Ann. Biomed. Eng. 41, 349–365 (2013).
- [104] E. Oida, T. Moritani, Y. Yamori, "*Tone-entropy analysis on cardiac recovery after dynamic exercise*". J Appl Physiol 82:1794–1801 (1997).
- [105] J. Landaw, A. Garfinkel, JN. Weiss, and Z. Qu, "*Memory- Induced Chaos in Cardiac Excitation*", Phys. Rev. Lett. 118, 138101 (2017).
- [106] WL. Ditto, SN. Rauseo, & ML. Spano, "*Experimental control of chaos*", Phys. Rev. Lett. 65, 3211–3214 (1990).
- [107] M. Kesmia, S. Boughaba, S. Jacquir, "*New Approach of Controlling Cardiac Alternans*". Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series B, American Institute of Mathematical science, 23 (2) :975-989 (2018).
- [108] M. Kesmia, S. Boughaba, S. Jacquir, "*Predictive Chaos Control for the 1D-map of Action Potential Duration*", Chaotic Modeling and Simulation Journal, 3, pp.387-398 (2016).
- [109] M. Kesmia, S. Boughaba, S. Jacquir, 10th CHAOS Conference Proceedings, 30 May - 2 June 2017, Barcelona Spain.
- [110] M. Kesmia, S. Boughaba, S. Jacquir, "*Control of irregular cardiac rhythm*", Chaotic Modeling and Simulation Journal, 1 : pp. 91-99 (2018).
- [111] M. Kesmia, S. Boughaba, S. Jacquir, "*Control of periodic dynamics of chaotic discrete dynamical systems*", soumis à publication.
- [112] M. Kesmia, S. Boughaba, S. Jacquir, "*Nonlinear Dynamics of Two-Dimensional Cardiac Action Potential Duration Mapping Model with Memory*", in Journal of Mathematical Biology - Article accepté pour publication. A paraître (2019).

- [113] S. Schulz, A. Voss, R. Schroeder, M. Baumert, P. Caminal, "*Methods derived from nonlinear dynamics for analysing heart rate variability*". Philos. Trans. A Math. Phys. Eng. Sci. 367, 277–296 (2009).
- [114] DJ. Christini, JJ. Collins, "*Control of chaos in excitable physiological systems : a geometric analysis*". Chaos, 7(4) :544 (1997).
- [115] M.Watanabe, RF. Jr. Gilmour, "*Strategy for control of complex low-dimensional dynamics in cardiac tissue*", J. Math. Biol. 35, p.73 (1996).
- [116] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke. "*Controlling chaotic dynamical systems*". In D. Campbell, editor, CHAOS/XAOC, Soviet-Amer. Perspective on Nonlinear Science. Amer. Inst. Phys. pp. 153–172 (1990).
- [117] J. Guckenheimer and P. Holmes. "*Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*". Springer, Berlin (1983).
- [118] CD. J. Swerdlow, "*Supraventricular tachycardia ventricular tachycardia discrimination algorithms in implantable cardioverter defibrillators : state-of-the-art review*". Cardiovasc. Electrophysiol. 12 , p. 606 (2001).
- [119] H. Nakajima, "*On analytical properties of delayed feedback control of chaos*", Physics Letters A 232, pp. 207—210 (1997).
- [120] T. Ushio, S.Yamamoto, "*Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems*", Physics Letters. A 247, pp. 112-118 (1998).
- [121] S.Yamamoto, T. Hino, T. Ushio, "*Dynamic delayed feedback controllers for chaotic discrete-time systems*", IEEE Transaction on Circuits and Systems-I 48, pp. 785—789 (2001).
- [122] MD. Barrett, "*Continuous control of chaos*", Physica D 91, pp. 340—348 (1996).
- [123] T. Ushio and S.Yamamoto, "*Prediction-based control of chaos*", Phy.Lett.A 264, pp. 30–35 (1999).

- [124] VN. Biktashev, AV. Holden. HOLDEN *"Reentrant waves and their elimination in a model of mammalian ventricular tissue"*. Chaos, 8, pp. 48-56 (1998).
- [125] W. J. Rappel, F. Fenton, and A. Karma, *"Spatiotemporal control of wave instabilities in cardiac tissue"*, Phys. Rev. Lett., 83, p. 456–459 (1999).
- [126] D. Allexandre and NF. Otani , *"Preventing alternans-induced spiral wave breakup in cardiac tissue : An ion-channel-based approach"*, Phys. Rev. E 70, 061903 (2004).
- [127] K. Pyragas, *"Continuous control of chaos by self-controlling feedback"*. Phys. Lett. A 170, 421-428 (1992).
- [128] JJ. Fox, JL. McHarg, RF. Jr. Gilmour. *"Ionic mechanism of electrical alternans"*. Am J Physiol Heart Circ Physiol. 282 (2) : H 516-530 (2002).
- [129] GM. Hall, DJ. Gauthier, *"Experimental control of cardiac muscle alternans"*, Phys. Rev. Lett. 88 , p. 198102 (2002).
- [130] D.J. Christini, J.J. Collins, *"Using chaos control and tracking to suppress a pathological nonchaotic rhythm in a cardiac model"*, Phys. Rev. E53 , p. R49 (1996).
- [131] DJ. Christini, KM. Stein, SM. Markowitz, S. Mittal, DJ. Slotwiner, MA. Scheiner, S. Iwai, BB. Lerman, *"Nonlinear -dynamical arrhythmia control in humans"*, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) 98, p. 5827 (2001).
- [132] B. Echebarria, A. Karma, *"Spatiotemporal control of cardiac alternans"*, Chaos 12, p. 923 (2002).
- [133] DJ. Christini, ML. Riccio, CA. Cuiianu, JJ. Fox, A. Karma, RF. Jr. Gilmour, *"Control of electrical alternans in canine cardiac Purkinje fibers"*, Phys. Rev. Lett. 96, p.104101 (2006).
- [134] MC. Oz, WF. Konertz, F.X. Kleber, FW. Mohr, J.F. Gummert, J. Ostermeyer, , M. Lass, J. Raman, M. A. Acker, NJ. Smedira, *"Global surgical experience with the Acorn cardiac support device"*.Thor. Card. Surg. 126, p. 983 (2003).

- [135] R. Wolk, SM. Cobbe, MN. Hicks, KA. Kane, "*Functional, structural, and dynamic basis of electrical heterogeneity in healthy and diseased cardiac muscle : implications for arrhythmogenesis and anti-arrhythmic drug therapy*", Pharmacol. Ther. 84, p. 207 (1999).
- [136] DJ. Christini, JJ. Collins, "*Using noise and chaos control to control non-chaotic systems*", Phys. Rev. E 52 , p. 5806 (1995).
- [137] PN. Jordan, DJ. Christini, "*Adaptive diastolic interval control of cardiac action potential duration alternans*", J. Cardiovasc. Electrophysiol. 15, p. 1177- 1185 (2004).
- [138] R. Wu, A. Patwardhan, "*Mechanism of repolarization alternans has restitution of action potential duration dependent and independent components*". J. Cardiovasc. Electrophysiol. 17, p. 87 (2006).
- [139] A. Hazim , Y. Belhamadia , S. Dubljevic, "*Control of cardiac alternans in an electromechanical model of cardiac tissue*". Computers in Biology and Medicine 63, 108–117 (2015).
- [140] D. Wilson , J. Moehlis, "*Spatiotemporal control to eliminate cardiac alternans using isostable reduction*", Physica D 342 32–44 (2017).
- [141] U.B. Kanu, S. Iravanian, RF. Gilmour, EJ. Christini, "*Control of action potential duration alternans in canine cardiac ventricular tissue*", IEEE Trans. Biomed. Eng. 58 (4) 894–904 (2011).
- [142] A. Garzón, RO. Grigoriev, FH. Fenton, "*Continuous-time control of alternans in long Purkinje fibers*", Chaos 24 (3) 033124 (2014).
- [143] EG. Tolkacheva, MM. Romeo, M. Guerraty, and DJ. Gauthier, "*Condition for alternans and its control in a two -dimensional mapping model of paced cardiac dynamics*", PHYSICAL REVIEW E 69, 031904 (2004).
- [144] S. Boccaletti, C. Grebogi, YC. Lai, H. Mancini and D. Maza, "*The control of chaos : theory and applications*". Physics Reports 329 : 103-197 (2000).

- [145] HM. Hastings, FH. Fenton, SJ. Evans, O. Hotomaroglu, J. Geetha, K. Gittelsohn, J. Nilson, A. Garfinkel, "*Alternans and the onset of ventricular fibrillation*". Phys. Rev. E 62, 4043 (2000).
- [146] RR. May, "*Simple mathematical models with very complicated dynamics*". Nature 261 (5560) : 459-467 (1976).
- [147] MA ; Hénon, "*Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*". Commun. Math. Phys., vol. 50, pp. 69-77 (1976).
- [148] JJ. Fox, E. Bodenschatz, and R F. Jr. Gilmour, "*Period-Doubling Instability and Memory in Cardiac Tissue*". Physical Review Letters, Volume 89, Number 13 (2002).
- [149] EG. Tolkacheva and X. Zhao, "*Nonlinear dynamics of periodically paced cardiac tissue*". Nonlinear Dyn 68 :347–363 (2012).
- [150] JN. Edwards and L A. Blatter, "*Cardiac alternans and intracellular calcium cycling*". Clinical and Experimental Pharmacology and Physiology. 41, 524–532 (2014).
- [151] D. Noble, "*A modification of the Hodgkin–Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pace-maker potentials*". J Physiol; 160 :317–52 (1962).
- [152] A. Bueno-Orovio, EM. Cherry, FH. Fenton, "*Minimal model for human ventricular action potentials in tissue*". J Theor Biol; 253 :544–60 (2008).
- [153] VN . Biktashev, R. Suckley, YE . Elkin, RD. Simitov, "*Asymptotic analysis and analytical solutions of a model of cardiac excitation*". Bulletin Math Biol; 70 :517–54 (2008).
- [154] KHWJ. Ten Tusscher, O. Bernus , R Hren , Panfilov AV, "*Comparison of electrophysiological models for human ventricular cells and tissues*". Prog Biophys Mol Biol; 90 :326–45 (2006).
- [155] EM. Cherry, SJ. Evans, "*Properties of two human atrial cell models in tissue : restitution, memory, propagation, and reentry*". J Theor Biol; 254 :674–90 (2008).

- [156] EM. Cherry, FH . Fenton. *"A tale of two dogs : analyzing two models of canine ventricular electrophysiology"*. Am J Physiol Heart Circ Physiol ; 292 :H43–55 (2007).
- [157] L. Romero, B. Carbonell , B. Trenor, B. Rodríguez, J. Saiz, JM. Ferrero, *"Systematic characterization of the ionic basis of rabbit cellular electrophysiology using two ventricular models"*. Prog Biophys Mol Biol (2011).
- [158] CY. Cha, Y. Himeno, T. Shimayoshi, A. Amano, A. Noma, *"A novel method to quantify contribution of channels and transporters to membrane potential dynamics"*. Biophys J ; 97 :3086–94 (2009).
- [159] EA. Sobie, *"Parameter sensitivity analysis in electrophysiological models using multivariable regression"*. Biophys J ; 96 :1264–74 (2009).
- [160] PN. Jordan, DJ. Christini, *"Characterizing the contribution of voltage-and calcium-dependent coupling to action potential stability : implications for repolarization alternans"*. Am J Physiol Heart Circ Physiol ; 293 :H2109–18 (2007).
- [161] M. Li, NF. Otani, *"Ion channel basis for alternans and memory in cardiac myocytes"*. Ann Biomed Eng ; 31 :1213–30 (2003).
- [162] M. Li, NF. Otani. *"Controlling alternans in cardiac cells"*. Ann Biomed Eng ; 32 :784–92 (2004).
- [163] S. Kharche, N. Ludtke, S. Panzeri, H. Zhang. *"A Global Sensitivity Index for Biophysically Detailed Cardiac Cell Models : A Computational Approach"*. Lecture Notes in Computer Science ; 5528 :366–75 (2009).
- [164] EM. Cherry, FH. Fenton. *"Suppression of alternans and conduction blocks despite steep APD restitution : electrotonic, memory, and conduction velocity restitution effects"*. Am J Physiol ; 286 (2004).
- [165] Y. Shiferaw, Z. Qu, A. Garfinkel, A. Karma, JN. Weiss. *"Nonlinear dynamics of paced cardiac cells"*. Ann NY Acad Sci ; 1080 :376–94 (2006).
- [166] SS. Kalb, HM. Dobrovolny, EG. Tolkacheva, SF. Idriss, W. Krassowska, DJ. Gauthier, *"The restitution portrait : a new method for investiga-*

- ting rate-dependent restitution*". J Cardiovasc Electrophysiol. ; 15 :698–709 (2004).
- [167] EG. Tolkacheva, JMB. Anumonwo, J. Jalife, "*Action potential duration restitution portraits of mammalian ventricular myocytes : role of calcium current*". Biophys J. JMB ; 91 :2735–45 (2006).
- [168] E. Chudin, J. Goldhaber, A. Garfinkel, J. Weiss, B. Kogan. "*Intracellular Ca²⁺ dynamics and the stability of ventricular tachycardia*". Biophys J ; 77 :2930–41(1999).
- [169] Z. Qu, Y. Shiferaw, JN. Weiss, "*Nonlinear dynamics of cardiac excitation-contraction coupling : An iterated map study*". Phys Rev E ; 75 :011927 (2007).
- [170] JG. Restrepo, A. Karma. "*Spatiotemporal intracellular calcium dynamics during cardiac alternans*". Chaos ; 19 :7115 (2009).
- [171] PN. Jordan, DJ. Christini, "*Action Potential Morphology Influences Intracellular Calcium Handling Stability and the Occurrence of Alternans*". Biophys J, 90 :672 (2006).
- [172] Z. Qu, Y. Xie, A. Garfinkel, JN. Weiss, "*T-wave Alternans and Arrhythmogenesis in Cardiac Diseases*". Front Physio ; 1 :1–15 (2010).
- [173] S. Sinha, S. Sridhar, "*Controlling Spatiotemporal Chaos and Spiral Turbulence in Excitable Media*". In : Schöll, E. ; Schuster, HG., editors. Handbook of Chaos Control. Weinheim, Germany : Wiley-VCH (2007).
- [174] A. Pumir, V. Nikolski, M. Hörning, A. Isomura, K. Agladze, et al., "*Wave emission from heterogeneities opens a way to controlling chaos in the heart*". Phys Rev Lett. ; 99 :208101 (2007).
- [175] S. Luther, FH. Fenton, BG. Kornreich, A. Squires, P. Bittihn, et al., "*Low-energy control of electrical turbulence in the heart*". Nature ; 475 :235–39 (2011).

- [176] CM. Ripplinger , VI. Krinsky , VP. Nikolski , IR. Efimov, "*Mechanisms of unpinning and termination of ventricular tachycardia*". Am J Physiol Heart Circ Physiol ; 291 :H184–92 (2006).
- [177] ML. Riccio, ML. Koller, RF. Gilmour, "*Electrical restitution and spatio-temporal organization during ventricular fibrillation*". Circ Res ; 84 :955–63 (1999).
- [178] AJ. Lusis , JN. Weiss, "*Cardiovascular networks : systems-based approaches to cardiovascular disease*". Circulation ; 121 :157–70 (2010).
- [179] TJ. Hund , Y. Rudy, "*Rate dependence and regulation of action potential and calcium transient in a canine cardiac ventricular cell model*". Circulation ; 110 :3168–74 (2004).
- [180] SM. Gois, M. A. Savi, "*An analysis of heart rhythm dynamics using a three-coupled oscillator model*", Chaos, Solitons and Fractals 41, 2553–2565 (2009).
- [181] EM. Cherry, "*Distinguishing mechanisms for alternans in cardiac cells using constant-diastolic-interval pacing*". CHAOS 27, 093902 (2017).
- [182] N F. Otani, "*Theory of the development of alternans in the heart during controlled diastolic interval pacing*". CHAOS 27, 093935 (2017).
- [183] E M. Cherry, F H. Fenton, TK. Madsen, S. Luther, and U. Parlitz, "*Introduction to Focus Issue : Complex Cardiac Dynamics*". CHAOS 27, 093701 (2017).
- [184] A. Garzon, RO. Grigoriev, "*Memory effects, transient growth, and wave breakup in a model of paced atrium*". CHAOS 27(9), 093917 (2017).
- [185] CD. Marcotte, RO. Grigoriev, "*Dynamical mechanism of atrial fibrillation : A topological approach*". CHAOS 27(9), 093936 (2017).
- [186] JM. Gomes, WD. R. Santos, and E M. Cherry, "*Alternans promotion in cardiac electrophysiology models by delay differential equations*". CHAOS 27(9), 093915 (2017).

- [187] Z. Zhang, O. Steinbock, "*Suppression of turbulence by heterogeneities in a cardiac model with fiber rotation*". CHAOS 27(9), 093921 (2017).
- [188] S. Zlochiver, C. Johnson, and EG. Tolkacheva, "*Constant DI pacing suppresses cardiac alternans formation in numerical cable models*". CHAOS 27(9), 093903 (2017).
- [189] NF. Otani, "*Theory of the development of alternans in the heart during controlled diastolic interval pacing*". CHAOS 27(9), 093935 (2017).







Résumé

(en français, en arabe et en anglais)

Résumé

Cette thèse repose sur l'application rigoureuse de la théorie de la dynamique non linéaire et du chaos à l'électrophysiologie cardiaque et plus précisément au contrôle des alternances cardiaques avec un signal de contrôle construit à partir des mesures de la durée du potentiel d'action (APD).

Un premier axe de travail consiste en une nouvelle approche par des méthodes de contrôle adaptées afin de pouvoir supprimer une orbite périodique asymptotiquement stable non souhaitée. Le deuxième axe a trait au développement de méthodes de contrôle pour parvenir non seulement à la suppression des dynamiques périodiques stables non désirées (telles que l'alternance cardiaque conduisant à des fibrillations ventriculaires et à la mort subite) mais également pour contrôler des dynamiques chaotiques autres que la dynamique cardiaque. Le troisième axe porte sur le développement d'un modèle mathématique de l'APD avec mémoire permettant d'obtenir un nouveau paramètre de contrôle, un spectre de nouvelles bistabilités entre certains rythmes cardiaques, ...

Les retombées pratiques de ce travail théorique mathématique est de parvenir à contrôler l'alternance cardiaque avec une perspective d'améliorer les dispositifs électroniques implantables conçus pour la suppression de l'alternance cardiaque.

Mots Clefs : Chaos, Système Dynamique, Attracteur Étrange, Bifurcation, Contrôle, Arythmies cardiaques.

Summary

This thesis is based on the rigorous application of the theory of nonlinear dynamics and chaos to cardiac electrophysiology and more precisely to the control of cardiac alternans with a control signal constructed from measurements of the action potential duration (APD).

A first axis of this work consists in a new approach by adapted control methods in order to delete an asymptotically stable periodic orbit undesired. The second axis concerns the development of control methods to achieve not only the suppression of unwanted stable periodic dynamics (such as cardiac alternation leading to ventricular fibrillation and sudden death) but also to control other chaotic dynamics than heart dynamics. The third axis focuses on the development of a mathematical model of the APD with memory to obtain a new control parameter, and a spectrum of new bistabilities between some cardiac rhythms.

The practical benefits of this theoretical mathematical work is to achieve control of cardiac alternation with the prospect of improving implantable electronic devices designed to suppress cardiac alternation.

Keywords: Chaos, Dynamic System, Strange Attractor, Bifurcation, Control, Cardiac Arrhythmias.

ملخص

تعتمد هذه الأطروحة على التطبيق الصارم لنظرية الديناميكيات غير الخطية والفوضى في الكهربية للقلب وعلى نحو أدق التحكم في التناوبات القلبية مع إشارة تحكم مبنية من قياسات (APD) مدة جهد العمل.

يتكون الجزء الأول من العمل من نهج جديد باستخدام أساليب التحكم المناسبة لحذف مداردوري مستقر مقارب غير مرغوب فيه

يتعامل المحور الثاني مع تطور أساليب التحكم ليس فقط من أجل القضاء على الديناميكيات الدورية الثابتة غير المرغوب فيها (مثل التناوب القلبي المؤدي إلى الرجفان البطيني والموت المفاجئ) ولكن أيضاً للتحكم في الديناميكيات الفوضوية باستثناء ديناميكيات القلب.

المحور الثالث يتعلق بوضع نموذج رياضي للـ APD بذاكرة تجعل من الممكن الحصول على معلمة تحكم جديدة ومجموعة من "ثنائيات" جديدة بين إيقاعات قلبية معينة ...

تتمثل الفوائد العملية لهذا العمل الرياضي النظري في تحقيق التحكم في التناوب القلبي مع احتمال تحسين الأجهزة الإلكترونية القابلة للزرع والمصممة لقمع التناوبات القلبية.

الكلمات المفتاحية : الفوضى ، النظام الديناميكي ، الجاذب الغريب ، التشعبات ، التحكم ، عدم انتظام ضربات القلب .



