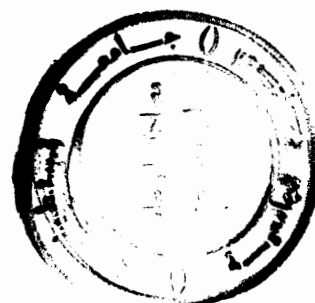
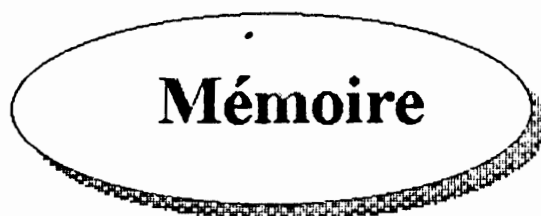


REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE .

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :
N° série :



Présenté pour obtenir le diplôme de Magister
en : MATHEMATIQUES

UTILISATION DU LAGRANGIEN AUGMENTE DANS L'OPTIMISATION

OPTION :
MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Par :
LAIB Teldja

Devant le jury :

Président :	M. DENCHE	Prof	Univ CONSTANTINE
Rapporteur :	A. AYADI	M.C	Univ CONSTANTINE
Examineurs :	Z. MOHDEB	M.C	Univ CONSTANTINE
	KH. MESSAOUDI	M.C	Univ BATNA

Soutenue le : /0 /2001

SOMMAIRE

Introduction.....	1
Chapitre 1: Optimisation dans le cas continu.....	2
1.1 Introduction.....	3
1.2 Résultat général de l'existence de l'optimum.....	4
1.3 Minimisation de fonctionnelles convexes.....	7
1.3.1 Caractérisation de l'optimum.....	8
1.3.1.1 Rappel sur les fonctions gâteaux différentiables	8
1.3.1.2 Caractérisation d'une fonction convexe	9
1.3.1.3 Caractérisation de l'optimum.....	11
1.3.2 Caractérisation de l'optimum dans le cas des contraintes définies par des fonctions...13	
1.4 Etude de l'optimum de $J(u) = \int f(x, u(x), u'(x))dx$ dans un espace de Sobolev	15
1.4.1 Rappel sur les espaces de Sobolev.....	16
1.4.1.1 Propriétés des espaces de Sobolev	16
1.4.2 Convexité de $f(x, u, u')$	17
*cas J semi continue inférieurement faiblement	17
*cas J convexe.....	18
1.4.3 Semi continuité inférieure faible de J	19
1.4.4 Continuité faible - Intégrale invariante.....	21
1.4.5 Caractérisation de l'optimum.....	26
1.5 Notions générales sur Lagrangien et point selle.....	28
1.5.1 Fonction duale et problème dual.....	30
Chapitre 2: Optimisation dans le cas discret.....	32
2.1 Introduction.....	33
2.2 Problème d'optimisation unidimensionnel	33
2.2.1 Existence et unicité de la solution du problème.....	34
2.3 Discrétisation du problème continu	36
2.3.1 Ecriture algébrique du problème posé.....	38
2.4 Lagrangien et Lagrangien augmenté.....	42
2.4.1 Analyse de Lagrangien augmenté.....	46
2.4.2 Convergence de l'algorithme de Uzawa avec contraintes d'inégalités	47
2.4.3 Rayon de convergence de la méthode de Uzawa.....	52
2.4.4 Remarque sur le problème des valeurs propres.....	56
2.5 Algorithme du gradient.....	57
2.5.1 Motivation de l'Algorithme.....	58
2.5.2 Etude de convergence de l'Algorithme.....	58
Chapitre 3: Simulation numérique.....	60
3.1 Présentation du programme PRIN1.....	61
3.1.1 Exemples d'application du programme PRIN1.....	71
3.2 Présentation du programme PRIN2.....	79
3.2.1 Exemples d'application du programme PRIN2.....	84
3.3Présentation du programme PRIN3.....	98
3.3.1 Exemples d'application du programme PRIN3.....	103
Conclusion.....	110
Références.....	111

REMERCIEMENTS

Ce travail m'a été proposé par Monsieur AYADI.A , je tiens à le remercier pour m'avoir dirigée avec beaucoup de patience.

Je remercie aussi Monsieur M.DENCHE qui a bien voulu examiner ce travail et accepter d'être le président de ce jury.

Je remercie également Messieurs , Z.MOHDEB et KH.MESSAOUDI de m'avoir honoré par leur présence au jury.

La réalisation de ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien de Monsieur M.Abdelli, Nourreddine, Adel, et de mes collègues de l'institut de l'électronique, qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à concrétiser ce travail.

merci

Teldja LAIB

INTRODUCTION

L'objectif de ce travail porte sur la description d'un algorithme d'optimisation capable de répondre aux exigences de la mécanique des structures.

L'idée de base est de construire cet algorithme à partir de deux concepts: gradient projeté et pénalisation.

Ce travail comprend 3 chapitres:

Dans le premier chapitre, on pose le problème de recherche de l'optimum d'une fonction définie sur un espace de Banach réflexif.

On établit les conditions nécessaires de l'existence d'un tel optimum, puis on caractérise la solution du problème pour la classe de fonctions convexes et gâteaux différentiables.

On donne des conditions nécessaires et suffisantes de l'optimum dans le cas où l'ensemble des contraintes est défini par des fonctions, ce qui permet de ramener un problème d'optimisation avec contraintes à un problème d'optimisation sans contraintes ou avec contraintes simples.

Enfin, on applique les résultats obtenus à une classe de fonctionnelles définies sur un espace de Sobolev.

Dans le deuxième chapitre on se concentre sur la description d'un algorithme d'optimisation et son application sur un problème quadratique avec contraintes linéaires (affines) en dimension finie.

Sachant que la méthode de Uzawa qui n'est que l'application de la méthode du gradient à la fonction duale définie par le Lagrangien classique converge mais lentement.

L'application de Uzawa à la fonction duale définie par Lagrangien augmenté qui n'est autre qu'un compromis entre la dualité et la pénalisation donne des résultats meilleures.

Dans le chapitre (3), on fait une simulation numérique (des tests) mettant en évidence l'efficacité de l'algorithme.

Chapter 1

Optimisation dans le cas continu:



1.1 INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, on va rappeler le problème d'optimisation d'une fonctionnelle définie sur un espace de Banach réflexif X (optimisation sans contraintes) ou sur une partie convexe K de cet espace (optimisation avec contraintes)

On met en évidence un résultat d'existence de l'optimum.

Ensuite, on s'intéresse au cas où la fonctionnelle à minimiser est convexe et gâteaux différentiable où on donne une caractéristique de l'optimum.

On étudie le cas où l'espace X est un espace de Hilbert et l'ensemble des contraintes K est défini par:

$$K = \{v \in X, \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

avec:

$$\varphi_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$$

des fonctions convexes.

On utilise le Lagrangien pour ramener un problème d'optimisation avec contraintes à un problème d'optimisation sans contraintes ou avec contraintes simples.

On termine par le cas où la fonctionnelle à optimiser est de la forme:

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

avec

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

dans un espace de Sobolev.

1.2 Résultat général d'existence de l'optimum

Soit X un espace de Banach réflexif, on note par $\|\cdot\|$ sa norme, et K un ensemble non vide de X .

Soit J une fonction de K dans $\mathbb{R}$, on s'intéresse au problème de minimisation

$$\inf_{v \in K} J(v) \quad (P)$$

Remarque 1 En pratique K est l'ensemble des contraintes.

Et dans le cas $K = X$, il s'agit d'un problème d'optimisation sans contraintes.

Définition 1 On appelle solution du problème (P) tout élément u de K tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$$

où

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in K$$

on dit encore que u est minimum absolu de J dans K

Remarque 2 Maximiser $J(v)$ sur K est identique à minimiser $-J(v)$ sur K

On introduit les notions suivantes:

Définition 2 X étant un espace de Banach, on rappelle qu'une fonction

$$J : X \rightarrow \mathbb{R}$$

est dite semi continue inférieurement sur X (s.c.i) si elle satisfait aux conditions équivalentes:

(1) $\forall a \in \mathbb{R}, \{v \in X, J(v) \leq a\}$ est fermé.

(2) $\forall \tilde{u} \in X : \liminf_{u \rightarrow \tilde{u}} J(u) \geq J(\tilde{u})$.

Définition 3 X étant un espace de Banach , on rapelle q'une fonction :

$$J : X \rightarrow \bar{R} = R \cup \{+\infty\}$$

est dite (séquentiellement) faiblement semi continue inférieurement sur X si

$$\liminf_{\gamma \rightarrow \infty} J(u_\gamma) \geq J(u)$$

quand $u_\gamma \rightharpoonup u$ dans X faible.

Dorénavant le terme séquentiellement sera omit, J sera tout simplement dite semi continue inférieurement.[5]

Théorème 1 Soit K un ensemble non vide faiblement fermé de X , on suppose que

$$J : K \rightarrow R \ (J \neq +\infty)$$

est faiblement semi continue inférieurement et

$$K \text{ est borné dans } X \text{ ou bien } K \text{ non borné mais } \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty \quad (1.1)$$

pour $u \in K$ (J est dite coercive sur K), alors le problème (P) possède une solution au moins.

démonstration:

Soit α la borne inférieure de J sur K (α est dans $[-\infty, +\infty[$) et $(u_n)_{n \in N}$ une suite minimisante c'est à dire une suite d'éléments de K tel que:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n)$$

la suite (u_n) est bornée dans K c'est évident si K est borné.

dans le cas où $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$: supposons le contraire, il existerait alors une sous suite $(u_{n'})$ telle que:

$$\lim_{n' \rightarrow +\infty} \|u_{n'}\| = +\infty$$

ce qui entraînerait

$$\lim_{n' \rightarrow +\infty} J(u_{n'}) = +\infty$$

d'où $\alpha = +\infty$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $J \neq +\infty$

la suite (u_n) est bornée dans X , il existe donc une sous suite $(u)_{n_j}$ extraite de (u_n) (les boules fermées sont faiblement compactes dans un Banach réflexif) qui converge vers u dans X faible.

K étant faiblement fermé dans X on a $u \in K$

$$u_{n_j} \rightarrow u \in K \text{ dans } X \text{ faible}$$

J étant faiblement semi continue inférieurement on a:

$$\alpha \geq \liminf_{n_j \rightarrow +\infty} J(u_{n_j}) \geq J(u)$$

mais α est la borne inférieure de J sur K d'où

$$\alpha = J(u)$$

ce qui prouve que α est fini et u est solution du problème (P)

Remarque 3 Ce théorème nous assure l'existence de solutions pour le problème (P) sous les conditions citées ci dessus, or la condition de semi continuité inférieure faible est très délicate à vérifier.

Nous allons nous intéresser alors à la classe des fonctionnelles convexes.

1.3 Minimisation de fonctionnelles convexes

Rappelons les définitions suivantes:

Définition 4 *X étant un espace vectoriel, K un ensemble non vide de X, K est dit convexe si et seulement si:*

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in K, \lambda x + (1 - \lambda)y \in K$$

Nous avons le lemme suivant:

Lemme 1 *Tout sous ensemble convexe fermé d'un espace de Banach réflexif est faiblement fermé. [6]*

Définition 5 *X étant un espace vectoriel, K un ensemble convexe de X, une fonction*

$$J : K \rightarrow R$$

est dite convexe si pour tout x, y de K on a:

$$J(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y), \forall \lambda \in [0, 1]$$

J est dite strictement convexe si pour tout $x, y (x \neq y)$ de K on a:

$$J(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y), \forall \lambda \in]0, 1[$$

nous avons le

Théorème 2 *Soit X un espace de Banach et soit:*

$$J : X \rightarrow \bar{R} = R \cup \{+\infty\}$$

une fonctionnelle convexe et semi continue inférieurement alors J est semi continue inférieurement faiblement.

Maintenant, nous allons caractériser l'ensemble des solutions du problème lorsque la fonctionnelle à minimiser est convexe, citons le

Théorème 3 Soit K un ensemble convexe fermé non vide, et soit:

$$J : K \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction convexe sur K et s.c.i ($J \neq +\infty$) on suppose que K est borné dans X ou bien K n'est pas borné mais $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$ alors l'ensemble des solutions de (P) [dont l'existence est assuré par le théorème (1)] est convexe.

Si on suppose de plus que J est strictement convexe alors la solution de (P) est unique.

1.3.1 Caractérisation de l'optimum

1.3.1.1) Rappel sur les fonctions gâteaux différentiable

D'abord on fait un rappel sur la dérivation au sens de gâteaux.

On désigne par X un espace de Banach et par J une application.

$$J : X \rightarrow \mathbb{R}$$

Définition 6 (dérivée directionnelle) J est dérivable en u ($u \in X$) dans la direction Φ ($\Phi \in X$) si l'expression:

$$\frac{J(u + \lambda\Phi) - J(u)}{\lambda}$$

a une limite lorsque le scalaire $\lambda > 0$ tends vers 0^+ .

la limite s'appelle dérivée directionnelle de J en u , elle est notée $J'(u, \Phi)$

$$J'(u, \Phi) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{J(u + \lambda\Phi) - J(u)}{\lambda}$$

Définition 7 (gâteaux différentiability) J est différentiable au sens de gâteaux (ou gâteaux différentiable) en u si on a:

(i) $J'(u, \Phi)$ existe pour tout Φ de X

(ii) $\Phi \mapsto J'(u, \Phi)$ est linéaire et continue

On le note généralement encore $J'(u)$, alors $J'(u, \Phi)$ est aussi noté

$$G(u) = J'(u) \in L(X, R)$$

1.3.1.2) Caractérisation d'une fonction convexe gâteaux différentiable

Pour une fonction gâteaux différentiable, la convexité peut être caractérisée par la

Proposition 1 Soit J une fonction gâteaux différentiable et $K \subset X$, K convexe alors il est équivalent de dire :

(i) J convexe sur K

(ii) $J(v) \geq J(u) + [J'(u), v - u], \forall u, v \in K$

de même il est équivalent de dire :

(i') J strictement convexe sur K

(ii') $J(v) > J(u) + [J'(u), v - u], \forall u, v \in K, u \neq v$

démonstration:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

par hypothèse on a:

$$J(u + \lambda(v - u)) \leq \lambda J(v) + (1 - \lambda) J(u), \forall \lambda \in [0, 1]$$

d'où

$$\frac{J(u + \lambda(v - u)) - J(u)}{\lambda} \leq J(v) - J(u)$$

lorsque

$$\lambda \rightarrow 0^+$$

on obtient:

$$\langle J'(u), v - u \rangle \leq J(v) - J(u)$$

par la définition de la G-différentielle

(ii) $\implies$ (i)

on écrit (ii) pour u et $u + \lambda(v - u)$, puis pour v et $u + \lambda(v - u)$, $\lambda \in]0, 1[$

$$J(u) \geq J(u + \lambda(v - u)) - \lambda \langle J'(u + \lambda(v - u)), v - u \rangle$$

$$J(v) \geq J(u + \lambda(v - u)) + (1 - \lambda) \langle J'(u + \lambda(v - u)), v - u \rangle$$

en multipliant ces inégalités respectivement par $(1 - \lambda)$ et λ et en additionnant, il revient:

$$(1 - \lambda)J(u) + \lambda J(v) \geq J(u + \lambda(v - u)), \lambda \in]0, 1[$$

c'est la relation de convexité, d'où J est convexe.

(i') $\implies$ (ii')

pour $u \neq v$ on a:

$$J(u + \lambda(v - u)) < \lambda J(v) + (1 - \lambda)J(u), \lambda \in]0, 1[$$

d'où J convexe

$$\langle J'(u), v - u \rangle \leq \frac{J(u + \lambda(v - u)) - J(u)}{\lambda} < J(v) - J(u)$$

$$\langle J'(u), v - u \rangle < J(v) - J(u), u \neq v$$

(ii') $\implies$ (i')

On reprend la démonstration (ii) $\implies$ (i), ici les inégalités sont strictes d'où la stricte convexité.

1.3.1.3) Caractérisation de l'optimum d'une fonctionnelle gâteaux différentiable

Maintenant on va caractériser la solution du problème (P) lorsque J est gâteaux différentiable.

Nous avons le

Théorème 4 Soit:

$$J : K \rightarrow \mathbb{R} \text{ (} K \text{ convexe fermé de } X \text{)}$$

On suppose que K est borné dans X ou bien K n'est pas borné mais

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$$

Si J est convexe et G -différentiable dans X , de différentielle J' alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(α) $u \in K$ est solution du problème (P).

(β) $\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0, \forall v \in K$.

Remarque 4 Si $K = X$, la condition (β) est remplacée par:

$$J'(u) = 0$$

En effet, on peut remplacer v dans (β) par $u \mp v$ (v quelconque dans X) alors:

$$\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0$$

et

$$\langle J'(u), v - u \rangle \leq 0$$

d'où

$$J'(u) = 0$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de rappeler la proposition suivante:

Proposition 2 : Si $J : X \rightarrow R$ est convexe et G -différentiable, alors J est faiblement semi continue inférieurement. (Pour la démonstration voir: [6])

Démonstration: J étant convexe et gâteaux différentiable est faiblement semi continue inférieurement il existe au moins une solution u du problème (P)

Supposons (α) vérifiée, alors:

$$J(v) \geq J(u), \forall v \in K$$

en particulier:

$\lambda \in]0, 1[, \lambda v + (1 - \lambda) u$ est un élément de K , pour tout $v \in K$, alors :

$$\frac{J(\lambda v + (1 - \lambda) u) - J(u)}{\lambda} \geq 0, \forall v \in K$$

passant à la limite

$$\lambda \rightarrow 0^+$$

le premier membre converge vers

$$\langle J'(u), v - u \rangle$$

et on obtient (β)

réciroquement:

Si u vérifie (β) alors J étant convexe et G -différentiable on a pour tout $v \in K$

$$J(v) - J(u) \geq \langle J'(u), v - u \rangle \geq 0$$

d'où:

$$J(v) \geq J(u), \forall v \in K$$

ce qui montre que u est solution du problème (P)

1.3.2 Caractérisation de l'optimum dans le cas des contraintes définies par des fonctions:

Dans cette section, on s'intéresse au problème:

$$\inf_{v \in K} J(v)$$

où J est une fonction

$$J : \Omega \subset X \longrightarrow R$$

avec X un espace de Hilbert , Ω un ouvert convexe de X et K est défini par:

$$K = \{v \in \Omega, \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

avec les φ_i fonctions convexes

$$\varphi_i : \Omega \subset X \longrightarrow R, 1 \leq i \leq m$$

Rappelons la définition suivante:

Définition 8 *On dit que des contraintes convexes*

$$\varphi_i : \Omega \subset X \longrightarrow R, 1 \leq i \leq m$$

sont qualifiées si: ou bien toutes les fonctions $\varphi_i, 1 \leq i \leq m$ sont affines, et l'ensemble

$$K = \{v \in \Omega, \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

(convexe car Ω convexe) est non vide, ou bien il existe un point $u \in \Omega$ tel que: pour tout

$1 \leq i \leq m$ on a:

$$\begin{cases} \varphi_i(u) \leq 0 \\ \varphi_i(u) < 0, \text{ si } \varphi_i \text{ n'est pas affine} \end{cases} \quad [4]$$

Nous allons rappeler les conditions nécessaires et suffisantes de minimum dans le cas convexe.

Théorème 5 : Soit

$$J : \Omega \subset X \longrightarrow R$$

Théorème 6 : Une fonction définie sur un ouvert convexe Ω d'un espace de Hilbert X et

$$K = \{v \in \Omega, \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

une partie de Ω , les contraintes

$$\varphi_i : \Omega \subset X \longrightarrow R, 1 \leq i \leq m$$

étant supposées convexes. Soit $u \in K$ un point en lequel les fonctions $\varphi_i, 1 \leq i \leq m$ et J sont dérivables

(1) Si la fonction J admet en u un minimum relatif par rapport à l'ensemble K et si les contraintes sont qualifiées alors, il existe des nombres $\lambda_i(u), 1 \leq i \leq m$ tels que les relations de Kuhn et Tucker:

$$\begin{cases} J'(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi'_i(u) = 0 \\ \lambda_i(u) \geq 0, 1 \leq i \leq m, \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i(u) = 0 \end{cases}$$

soient satisfaites

(2) Réciproquement, si la fonction :

$$J : K \longrightarrow R$$

est convexe et s'il existe des nombres $\lambda_i, 1 \leq i \leq m$, tels que les relations de Kuhn et Tucker soient satisfaites alors la fonction J admet en u un minimum par rapport à l'ensemble $K[4]$

Remarque 5 Les relations de Kuhn et Tucker expriment l'existence d'une fonction

$$J_u : v \in \Omega \subset X \longrightarrow J_u(v) = J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i(v)$$

qui dépend du point u (par l'intermédiaire du vecteur $\lambda(u) \in R_+^m$) tel que

$$\begin{cases} J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \Rightarrow J'_u(u) = 0 \\ J(u) = J_u(u) \end{cases}$$

En d'autres termes si l'on connaît le vecteur $\lambda(u)$, on est ramené à la condition nécessaire et suffisante dans le cas convexe que s'il s'agissait d'un problème d'optimisation sans contraintes pour la fonction J_u . [4]

Remarque 6 Les relations de Kuhn et Tucker sont à l'origine des techniques de dualité, que nous abordons dans des paragraphes suivants.

1.4 Etude de l'optimum de $J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$ dans des espaces de Sobolev.

D'abord nous aurons besoin de faire un rappel sur les espaces de Sobolev.

1.4.1 Rappel sur les espaces de Sobolev :

Soient $\Omega \subset R^n$ un ouvert et $1 \leq p \leq \infty$.

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par:

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow R \text{ dérivable au sens faible tel que } u \in L^p(\Omega) \text{ et}$$

$$\nabla u \in (L^p(\Omega))^n$$

On note:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max(\|u\|_{L^\infty}, \|\nabla u\|_{L^\infty}) \text{ si } p = +\infty$$

dans le cas où $p = 2$, on note:

$$W^{1,2} = H^1$$

Si $1 \leq p < +\infty$ alors $W_0^{1,p}(\Omega)$ est la fermeture de $\varphi_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ muni de sa norme, on dira souvent si Ω est borné que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est tel que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u = 0$ sur $\partial\Omega$ si $p = 2$, on notera parfois

$$W_0^{1,2} = H_0^1$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad [10]$$

Quelques Propriétés des espaces de Sobolev:

Théorème 7 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $1 \leq p \leq \infty$

(i) $W^{1,p}(\Omega)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{1,p}$ est un espace de Banach qui est séparable si $1 \leq p < \infty$ et réflexif si $1 < p < \infty$.

(ii) $W^{1,2} = H^1$ est un espace de Hilbert lorsqu'on le munit du produit scalaire:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx [5]$$

Rappelons maintenant une inégalité appelée inégalité de Poincaré qui sera d'une grande utilité ultérieurement

Théorème 8 (i) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipchitzienne et soit $1 \leq p < \infty$

alors

$$\|u\|_{L^p} \leq c \|\nabla u\|_{L^p}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et pour un certain $c > 0$.

(ii) Si $n = 1, \Omega = (0, 1)$ et $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ alors:

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{1}{\pi} \|u'\|_{L^2} [5]$$

Dans toute la suite, on va s'intéresser à la minimisation de fonctionnelles de type:

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

avec:

(H1) Ω ouvert borné de R^n à frontière Lipchitzienne.

(H2) $u : \Omega \rightarrow R^m$ et donc $\nabla u \in R^{nm}$.

(H3) $f : \Omega \times R^m \times R^{nm} \rightarrow R$ est une fonction continue vérifiant:

$$|f(x, u, \zeta)| \leq a(x, |u|, |\zeta|)$$

avec a est croissante respectivement par rapport à $|u|, |\zeta|$ et localement intégrable en x , mais on va se restreindre au cas $m = 1$ ou $n = 1$.

1.4.2 Convexité de $f(x, u, \cdot)$

Cas où J semi continue inférieurement faiblement

Citons le:

Théorème 9 Soit $\Omega \subset R^n$ un ensemble borné ouvert

$$f : \Omega \times R^m \times R^{nm} \rightarrow R$$

vérifiant les hypothèses si dessus, si J est semi continue inférieurement pour la topologie faible* dans $W^{1,\infty}(\Omega, R^m)$, alors $f(x, u, .)$ est convexe. [5]

Remarque 7 Il est clair que si J est semi continue inférieurement pour la topologie faible dans $W^{1,p}(\Omega, R^m)$ alors J est semi continue inférieurement pour la topologie faible* dans $W^{1,\infty}(\Omega, R^m)$ d'où la nécessité de la convexité de $f(x, u, .)$ pour la semi continuité inférieure faible dans $W^{1,p}(\Omega, R^m)$. [5]

Remarque 8 La condition de continuité de f peut être affaiblie en considérant les fonctions de Carathéodory.

Rappelons la définition de ces fonctions

Définition 9 Soit $\Omega \subset R^n$ un ensemble ouvert et soit :

$$f : \Omega \times R^m \times R^N \rightarrow \bar{R} = R \cup \{\infty\}$$

alors f est dite de Carathéodory si:

- (1) $f(x, ., .)$ est continue presque partout dans Ω
- (2) $f(., u, \zeta)$ est mesurable en x pour tout $(u, \zeta) \in R^m \times R^N$.

Cas où J Convexe

Citons le:

Théorème 10 Soient J et f définies comme ci dessus, Si J est convexe sur $W_0^{1,\infty}(\Omega, R^m)$, alors $f(x, u, .)$ est convexe pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $u \in R^m$. [5]

Remarque 9 Comme la convexité de J sur $W_0^{1,p}$ implique la convexité de J sur $W_0^{1,\infty}$ alors la convexité de $f(x, u, .)$ est nécessaire pour la convexité de J sur $W_0^{1,p}$.

Démonstration 1 De l'hypothèse (H9), on déduit que J est semi continue inférieurement sur $W_0^{1,\infty}(\Omega, R^m)$, donc du théorème (2) on a J est semi continue inférieurement

pour la topologie faible* dans $W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, et en utilisant le théorème (9) on déduit que $f(x, u, \cdot)$ est convexe. [5]

L'inverse du théorème précédent n'est pas toujours vrai, pour des contre-exemples voir: [5].

1.4.3 Semi continuité inférieure faible de J

Nous avons vu au théorème (9) qu'une condition nécessaire pour que J soit semi continue inférieurement pour la topologie faible dans $W^{1,p}$ est que $f(x, u, \cdot)$ soit convexe, Nous allons voir dans la suite que cette condition est suffisante.

Citons le théorème suivant:

Théorème 11 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, soit :

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N \rightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

une fonction de Carathéodory vérifiant :

$$f(x, u, \zeta) \geq \langle a(x), \zeta \rangle + b(x)$$

presque partout dans Ω pour tout $(u, \zeta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N$, pour une certaine fonction

$$a \in \left(L^{q'}(\Omega) \right)^N$$

et

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$$

$b \in L^1(\Omega)$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$.

Soit:

$$J(u, \zeta) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \zeta(x)) dx$$

Supposons que $f(x, u, \cdot)$ est convexe et que

$$u_\nu \longrightarrow \bar{u} \text{ dans } (L^p(\Omega))^m, p \geq 1$$

$$\zeta_\nu \longrightarrow \bar{\zeta} \text{ dans } (L^q(\Omega))^N, q \geq 1$$

alors:

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} J(u_\nu, \zeta_\nu) \geq J(\bar{u}, \bar{\zeta}) \quad [5]$$

Remarque 10 Observons d'abord que le cas des calculs des variations '(i_d)-

$$\zeta = \nabla u \text{ et } u : R^n \longrightarrow R^m$$

est contenu dans le théorème ci dessus, en choisissant $p = q, N = nm$, alors la convexité de $f(x, u, \cdot)$ est suffisante pour avoir la s.c.i faible de la fonctionnelle

$$J(u) = J(u, \nabla u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

dans $W^{1,p}(\Omega, R^m)$.

Donc: en résumant les deux théorèmes (9) et (11), on trouve q'une condition nécessaire et suffisante pour que J soit s.c.i faiblement dans $W^{1,p}$ est que $f(x, u, \cdot)$ soit convexe.

1.4.4 Continuité faible –Intégrale invariante

La continuité faible

Théorème 12 Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert borné, soient f et J définies comme ci dessus, alors J est continue pour la topologie faible* sur $W^{1,\infty}$ si et seulement si $f(x, u, \cdot)$ est affine, c'est à dire: s'il existe

$$g : \Omega \times R^m \rightarrow R^{nm}$$

et

$$h : \Omega \times R^m \rightarrow R$$

continues tel que:

$$f(x, u, \zeta) = \langle g(x, u), \zeta \rangle + h(x, u)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans R^{nm} [5]

Remarque 11 Des résultats similaires peuvent être obtenus dans $W^{1,p}$, mais en posant des restrictions sur g et h , en particulier $g(x, u) \in L^p(\Omega)$ quand $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration 2 La nécessité de la condition est immédiate en appliquant le théorème (9) car si J est continue pour la topologie faible* alors J est s.c.i faiblement* et donc f est convexe. la fonction $-J$ est également s.c.i faiblement* ce qui implique $-f$ convexe. f et $-f$ sont convexes cela entraîne que f est affine. inversement: si $u_\nu \xrightarrow{*} \bar{u}$ dans $W^{1,\infty}$ alors $u_\nu \rightarrow \bar{u}$ dans L^∞ et on déduit la conclusion de la continuité de g et h . [5]

Intégrales invariantes:

On s'intéresse dans ce paragraphe aux intégrales invariantes, c'est à dire les intégrales constantes une fois les conditions aux limites sont fixées.

Théorème 13 Soit $\Omega \subset R^n$ un ouvert borné à frontière C^1 par morceaux et soit :

$$f : \Omega \times R^m \times R^{nm} \rightarrow R$$

une fonction C^∞ vérifiant :

$$|f(x, u, \zeta)| \leq a(x, |u|, |\zeta|)$$

pour tout $(x, u, \zeta) \in \Omega \times R^m \times R^{nm}$ où a est croissante respectivement par rapport à $|u|, |\zeta|$

et localement intégrable en x et :

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1) J est invariante (i.e)

$$J(u) = \text{constante}$$

pour tout :

$$u \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega, R^m)$$

(2) il existe

$$\varphi : \Omega \times R^m \longrightarrow R^n$$

$$\beta : \Omega \longrightarrow R$$

fonctions φ^∞ tel que :

$$f(x, u, \zeta) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u} \varphi(x, u), \zeta \right\rangle + \text{div}_x \varphi(x, u) + \beta(x)$$

pour tout

$$(x, u, \zeta) \in \Omega \times R^m \times R^{nm}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans R^{nm} et pour

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi(x, u) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \varphi_1, \frac{\partial}{\partial u} \varphi_2, \dots, \frac{\partial}{\partial u} \varphi_n \text{ si } m = 1 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} \varphi, \frac{\partial}{\partial u_2} \varphi, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \varphi \text{ si } n = 1 \end{array} \right\}$$

$$\text{div}_x \varphi(x, u) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \text{ si } m = 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ si } n = 1 \end{array} \right\}$$

en particulier si $\zeta = \nabla u$ alors:

$$f(x, u, \nabla u) = \operatorname{div}_x \varphi(x, u(x)) + \beta(x) \quad [5]$$

Démonstration 3 $(2) \Rightarrow (1)$

Soit f une fonction tel que:

$$J(u) = \int_{\Omega} \beta(x) dx + \int_{\Omega} \operatorname{div}_x \varphi(x, u(x)) dx$$

et comme $u = u_0$ sur $\partial\Omega$, nous avons par intégration par parties que J est constante.

$(1) \Rightarrow (2)$

On suppose par exemple que $m = 1$.

Si J est constante alors J est continue pour la topologie faible*, et donc, il existe g et h tel que:

$$f(x, u, \zeta) = \langle g(x, u), \zeta \rangle + h(x, u)$$

et comme f est φ^∞ alors $g, h \in \varphi^\infty$

par hypothèse nous avons:

$$J(u) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n g_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x, u) dx = \text{constante}$$

en choisissant:

$$u \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$$

et

$$v \in \varphi_0^\infty(\Omega)$$

nous avons:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial u} g_i(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n g_i(x, u) \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) v dx \\
& = \int_{\Omega} v \left[- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x, u) + \frac{\partial}{\partial u} h(x, u) \right] dx
\end{aligned}$$

on obtient alors pour tout $x \in \Omega$ et $u \in R$

$$\frac{\partial}{\partial u} h(x, u) = \operatorname{div}_x g(x, u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} g_i(x, u)$$

soit :

$$\begin{aligned}
\varphi_i(x_1, \dots, x_n, u) &= \int_0^u g_i(x_1, \dots, x_n, s) ds, \\
i &= 1, \dots, n
\end{aligned}$$

nous avons :

Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ alors :

$$\frac{\partial}{\partial u} h(x, u) = \operatorname{div}_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, u) \right) = \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{div}_x \varphi(x, u)$$

et donc :

$$h(x, u) = \beta(x) + \operatorname{div}_x (\varphi(x, u))$$

$$g(x, u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, u) \quad [5]$$

Dans cette partie on va appliquer les résultats obtenus pour l'existence du minimum pour notre problème :

Théorème 14 Soit Ω un ensemble ouvert borné de R^n à frontière Lipchitzienne, soit :

$$f : \Omega \times R^m \times R^{nm} \longrightarrow \bar{R} = R \cup \{\infty\}$$

une fonction de Carathéodory vérifiant la condition de coercivité

$$f(x, u(x), \zeta) \geq a(x) + b|\zeta|^p$$

presque partout dans Ω pour tout $(u, \zeta) \in R^m \times R^{nm}$ et pour $a \in L^1(\Omega)$, $b > 0$ et $p > 1$ supposons que:

$$f(x, u(x), \cdot)$$

est convexe et soit :

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

supposons qu'il existe $\hat{u} \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, R^m)$ tel que:

$$J(\hat{u}) < \infty$$

alors:

$$\inf \{ J(u), u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, R^m) \}$$

atteint son minimum. [5]

Démonstration 4 Nous avons besoin uniquement de montrer que J est coercive sur $W^{1,p}(\Omega, R^m)$.

de la condition de coercivité de f nous avons pour tout $u \in u_0 + W_0^{1,p}$

$$J(u) \geq \int_{\Omega} a(x) dx + b \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré nous avons :

$$\|u - u_0\|_{L^p}^p \leq K (\|\nabla u\|_{L^p}^p + 1)$$

on déduit que :

$$\|u\|_{W^{1,p}}^p \leq K (\|\nabla u\|_{L^p}^p + 1)$$

et donc:

$$J(u) \geq \alpha \|u\|_{W^{1,p}}^p + \beta$$

ou $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, et comme $p > 1$, l'espace $W^{1,p}$ est réflexif, en appliquant le théorème (1) on obtient le résultat.

1.4.5 Caractérisation de l'optimum

On considère toujours la fonctionnelle:

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

On introduit quelques notations :

Si $\zeta \in \mathbb{R}^{nm}$ (ζ matrice) on écrit :

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1^1 & . & . & . & . & . & \zeta_n^1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \zeta_1^m & . & . & . & . & . & \zeta_n^m \end{bmatrix} = (\zeta_{\alpha}^i)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq \alpha \leq n}}$$

et donc si

$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\text{alors: } \nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & . & . & . & . & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & . & . & . & . & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dans cette partie, on considère le cas générale $m \geq 1, n \geq 1$.

Proposition 3 Soit Ω un ouvert borné à frontière lipchitzienne, et soit:

$$f : \Omega \times R^m \times R^{nm} \longrightarrow R$$

une fonction φ^2 , supposons que $\bar{u} \in \varphi^2(\Omega, R^m)$ est solution du problème:

$$\inf \left\{ J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx, u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, R^m) \right\}$$

alors $\bar{u}$ est caractérisé par: pour tout $x \in \Omega$,

$$\left[-\operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta_i} (x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \right) + \frac{\partial f}{\partial u_i} (x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \right]_{1 \leq i \leq m} = 0 \quad [5]$$

Remarque 12 Si $n = 1$, (E) est réduit à un système d'équations différentielles ordinaires

Si $m = 1$, (E) est réduit à une équation aux dérivées partielles

Si $m, n > 1$, (E) est réduit à un système d'équations aux dérivées partielles

Si $m = 1$ et $f(x, u, \cdot)$ est convexe alors on doit avoir (pourvu que $f \in \varphi^2$)

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} \lambda_i \lambda_j \geq 0, \forall \lambda \in R^n$$

qui est dans le contexte d'une équation aux dérivées partielles, la condition d'ellipticité usuelle.

Remarque 13 Comme $\bar{u}$ est minimum, on doit avoir:

$$J(\bar{u}) \leq J(\bar{u} + \varepsilon \varphi)$$

pour tout $\varphi \in \varphi_0^2(\Omega, R^m)$ et pour tout $\varepsilon \in R$, et vue les hypothèse sur $f, \bar{u}, \varphi$ la fonctionnelle $J(\bar{u} + \varepsilon \varphi)$ considérée comme fonction de ε est différentiable et comme $\bar{u}$ est minimum,

on doit avoir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} J(\bar{u} + \varepsilon\varphi) \Big|_{\varepsilon=0} &= \left\langle J'(\bar{u}), \varphi \right\rangle \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial \zeta_{\alpha}^i} (x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{\alpha}} + \frac{\partial f}{\partial u_i} (x, \bar{u}, \nabla \bar{u}) \varphi_i \right\} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

et comme f et $\bar{u}$ sont φ^2 , on peut intégrer par parties et vu le fait que φ est arbitraire dans $\varphi_0^2(\Omega, R^m)$ on a le résultat.

1.5 Notions générales sur Lagrangien et point selle:

Soient V et M deux ensembles quelconques et :

$$L : V \times M \longrightarrow R$$

une fonction, on dit que $(u, \lambda) \in V \times M$ est un point selle de la fonction L si le point u est un minimum pour la fonction:

$$L(., \lambda) : v \in V \longrightarrow L(v, \lambda) \in R$$

et si le point λ est un maximum pour la fonction:

$$L(u, .) : \mu \in M \longrightarrow L(u, \mu) \in R$$

autrement dit si

$$\sup_{\mu} L(u, \mu) = L(u, \lambda) = \inf_v L(v, \lambda)$$

Revenons à notre problème :

$$\inf_{v \in K} J(v)$$

et supposons que:

1) X est un espace de Hilbert

et supposons en outre que:

2) le convexe K est définie par des contraintes convexes

$$K = \{v \in X, \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$$

L'intérêt de la notion du point selle est le suivant:

Sous certaines conditions toute solution u du problème (P) est également premier argument d'un point selle (u, λ) d'une fonction convenable:

$$L : X \times M \longrightarrow R$$

(M à déterminer)

appelée le Lagrangien associé du problème (P) considéré

et réciproquement

Si (u, λ) est un point selle de ce même Lagrangien L alors u est solution du problème (P)

Définissons le Lagrangien associé au problème (P) ci dessus comme étant la fonction:

$$L(v, \mu) \in X \times R_+^m \longrightarrow L(v, \mu) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} J(v) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(v)$$

le deuxième espace M est donc R_+^m

Nous avons le théorème suivant:

Théorème 15 (1) Si $(u, \lambda) \in X \times R_+^m$ est un point selle du lagrangien L , le point u qui appartient à l'ensemble K est solution du problème (P).

(2) On suppose les fonctions J et φ_i ($1 \leq i \leq m$) convexes, dérivables en un point

$u \in K$ et les contraintes qualifiées, alors si u est solution du problème (P), il existe au moins un vecteur $\lambda \in R_+^m$, tel que le couple $(u, \lambda) \in X \times R_+^m$ soit point selle du Lagrangien L [4]

1.5.1 Fonction duale - Problème dual.

Nous avons établi que l'ensemble des solutions du problème (P) trouver u tel que:

$$\begin{cases} J(u) = \inf_{v \in K} J(v) \\ K = \{v \in X, \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\} \end{cases}$$

coincide avec l'ensemble des premiers arguments des points selles du Lagrangien:

$$L(v, \lambda) \in X \times R_+^m \longrightarrow L(v, \lambda) = J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(v)$$

Si donc l'on connaissait l'un quelconque disons λ des seconds arguments de ces points selles le problème (P) avec contraintes serait remplacé par le problème sans contraintes (P_λ) trouver u_λ tel que:

$$\begin{cases} u_\lambda \in X \\ L(u_\lambda, \lambda) = \inf_{v \in X} L(v, \lambda) \end{cases}$$

sachant que λ vérifie:

$$L(u_\lambda, \lambda) = \inf_{v \in X} L(v, \lambda) = \sup_{\mu \in R_+^m} \inf_{v \in X} L(v, \mu)$$

donc λ est déterminé comme solution du problème (Q) trouver λ tel que :

$$\begin{cases} G(\lambda) = \sup_{\mu \in R_+^m} G(\mu) \\ \lambda \in R_+^m \end{cases} \quad (Q)$$

où l'application G est définie par:

$$G : R_+^m \longrightarrow R$$

$$G(\mu) = \inf_{v \in X} L(v, \mu)$$

(Q) est appelé problème dual de (P) et de même $\mu \in R_+^m$ est appelée variable duale de la variable v de X . [4]

Chapter 2

Optimisation dans le cas discret:

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la description d'un algorithme d'optimisation basé sur les deux concepts gradient projeté et pénalité et ses applications en mécanique des structures.

Pour mettre en évidence cet algorithme, on résout un problème quadratique avec contraintes linéaires.

Un résultat de convergence de l'algorithme est démontré dans le cas quadratique ainsi le rayon de convergence est calculé.

Pour simplifier le problème, on va analyser le:

2.2 Problème d'optimisation unidimensionnelle

Considérons le problème suivant :

Etant donnée une fonction $f \in L^2(]0, 1[)$ sur l'intervalle $[0, 1]$, trouver une fonction u tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \inf_{H_0^1[0,1[} \frac{1}{2} \int_0^1 v'^2(x) dx - \int_0^1 v(x) f(x) dx \\ \text{sous la contrainte :} \\ \int_0^1 u(x) dx \leq c \end{array} \right. \quad ((P))$$

Un exemple de situation physique où ce problème est rencontré est celui du déplacement vertical $u(x)$ au point x d'une corde tendue entre les extrémités $x = 0$ et $x = 1$ soumise à une densité de charge verticale $f(x)$.

La solution de ce problème est donc le déplacement u de moyenne inférieure ou égale à c qui minimise l'énergie potentielle élastique $J(v)$ qui est la somme de l'énergie des déformations $\frac{1}{2} \int_0^1 v'^2(x) dx$ et l'énergie potentielle des forces extérieures $\int_0^1 v(x) f(x) dx$.

2.2.1 Existence et unicité de la solution du problème

l'existence de la solution:

On pose:

$$K = \{u \in H_0^1(]0, 1[, \int_0^1 u(x)dx \leq c\}$$

1°) $H_0^1(]0, 1[)$ est un Banach réflexif.

2° .a) la convexité de K :

On a d'une part :

$$\forall \lambda \in]0, 1[, \forall u_1, u_2 \in K : \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in H_0^1(]0, 1[)$$

(car $H_0^1(]0, 1[)$ est un espace vectoriel).

et d'autre part:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\lambda u_1(x) + (1 - \lambda)u_2(x))dx &= \lambda \int_0^1 u_1(x)dx + \int_0^1 u_2(x)dx \\ &\leq \lambda c + (1 - \lambda)c = c \end{aligned}$$

donc K est convexe

2° .b) la fermeture de K .

Soit $(u_n)_n \subset K$ une suite de K c'est à dire :

$$(u_n \in H_0^1(]0, 1[) \text{ et } \int_0^1 u_n(x)dx \leq c)$$

avec:

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } H_0^1(]0, 1[)$$

on montre que $u \in K$.

On sait que $u \in H_0^1(]0, 1[)$ car celui ci est complet, donc il suffit de montrer que :

$$\int_0^1 u(x)dx \leq c$$

comme u_n tends vers u dans $H_0^1(]0, 1[)$ alors:

$$u_n \text{ tends vers } u \text{ dans } L^2(]0, 1[)$$

On a:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 u_n - \int_0^1 u \right| &= \left| \int_0^1 u_n - u \right| \leq \int_0^1 |u_n - u| \\ &\leq \left(\int_0^1 (u_n - u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc:

$$\int_0^1 u_n \text{ tends vers } \int_0^1 u$$

ce qui entraine

$$\int_0^1 u \leq c$$

donc K est fermé.

3°) La semi continuité inférieure faible de J :

La fonction J est convexe et continue dans $H_0^1(]0, 1[)$ donc semi continuité inférieurement faiblement

2°) La coercivité de J

On a d'après l'inégalité de Poincaré :

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx \geq \alpha \|u\|_{1,]0,1[}^2$$

donc J est infini à l'infini c'est à dire :

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$$

donc le problème posé possède une solution.

L'unicité de la solution:

La fonction J est convexe strictement, donc elle admet un minimum unique.

2.3 Discrétisation du problème continu

La méthode des éléments finis consiste à transformer le problème continu à un problème algébrique qu'on peut résoudre par des méthodes classiques.

Pour construire une approximation u_h de u , on va choisir un sous espace de $X = H_0^1(]0, 1[)$ constitué de fonctions continues affines par intervalles, de façon plus précise: Soit N un entier naturel et

$$h = \frac{1}{N+1} \quad (h \text{ est le pas de discrétisation})$$

à ce pas h on associe les points:

$$a_i = ih, 0 \leq i \leq N+1$$

qui subdivisent l'intervalle $[0, 1]$ en $N+1$ intervalles appelés éléments

$$K_i = [a_i, a_{i+1}], 0 \leq i \leq N$$

de longueur h .

On choisit alors pour sous espace de dimension fini de $X = H_0^1(]0, 1[)$ l'espace

$$X_h = \{v \in C^0(]0, 1[), v|_{K_i} \in P_1, 0 \leq i \leq N\}$$

où P_1 désigne l'espace des fonctions polynômes de degré inférieure ou égal à 1.

Remarque 14 L'espace $H_0^1(]0, 1[)$ est égal à l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ et vérifie $v(0) = v(1) = 0$

$$\dim X_h = N$$

la suite des fonctions: $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ définies par:

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}, 1 \leq j \leq N$$

constituent une base de $X_h[10]$

la fonction φ_i est définie analytiquement par:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-a_i|}{h} & \text{si } x \in [a_{i-1}, a_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On détermine une fonction $u_h \in X_h$ à l'aide de ses coordonnées dans la base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ c'est à dire des nombres:

$$u_i = u_h(a_i), 1 \leq i \leq N$$

On approche la solution du problème (P) par la solution du problème (P_h) suivant:

$$J(u_h) = \inf_{X_h} \frac{1}{2} \int_0^1 v_h'^2(x) dx - \int_0^1 v_h(x) f(x) dx$$

sous la contrainte :

$((P_h))$

$$\int_0^1 u_h(x) dx \leq c$$

L'existence de solutions pour le problème (P_h) :

Le problème (P_h) est un problème de minimisation d'une fonctionnelle qui est continue et strictement convexe sur un convexe fermé d'un espace de dimension finie donc il admet une solution unique.

L'estimation de l'erreur:

La méthode que l'on vient de décrire est convergente c'est à dire la solution u_h du problème (P_h) converge vers la solution u du problème (P) dans $H^1(]0, 1[)$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|$$

De plus, il existe une constante C indépendante de h telle que, si la solution u appartient à l'espace $H^2([0, 1])$ on a:

$$\|u - u_h\| \leq Ch |u|_{2,[0,1]}$$

c'est à dire que la convergence est d'ordre 1. [10]

2.3.1 Ecriture algébrique du problème (P_h) :

Soit:

$$J(u_h) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^N \left[\int_{a_i}^{a_{i+1}} u_h^2(x) dx - \int_{a_i}^{a_{i+1}} u_h(x) f(x) dx \right]$$

On peut écrire:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-a_{i-1}}{h} & \text{si } x \in [a_{i-1}, a_i] \\ \frac{a_{i+1}-x}{h} & \text{si } x \in [a_i, a_{i+1}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et on peut définir sur chaque élément $[a_i, a_{i+1}]$ deux fonctions:

$$\begin{cases} \lambda_i^1(x) = \frac{a_{i+1}-x}{h} \\ \lambda_i^2(x) = \frac{x-a_i}{h} \end{cases}$$

On a:

$$u_h|_{[a_i, a_{i+1}]} = u_i^1 \lambda_i^1 + u_i^2 \lambda_i^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^1 & \lambda_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix}$$

$$u_h'|_{[a_i, a_{i+1}]} = u_i^1 \lambda_i^{1'} + u_i^2 \lambda_i^{2'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix}$$

$$u_h'^2|_{[a_i, a_{i+1}]} = \begin{bmatrix} u_i^1 & u_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix}$$

$$u_h'^2|_{[a_i, a_{i+1}]} = \begin{bmatrix} u_i^1 & u_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
f(x)u_h(x) &= f(x) \begin{bmatrix} \lambda_i^1 & \lambda_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(x)\lambda_i^1 & f(x)\lambda_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donc:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} u_h'^2(x) dx = \begin{bmatrix} u_i^1 & u_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & +\frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix}$$

et

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)u_h(x) dx = \begin{bmatrix} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\lambda_i^1(x) dx & \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\lambda_i^2(x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix}$$

on a:

$$\begin{aligned}
\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\lambda_i^1(x) dx &= \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} f(x(t))\lambda_i^1(x(t)) dt \\
\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\lambda_i^2(x) dx &= \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} f(x(t))\lambda_i^2(x(t)) dt
\end{aligned}$$

avec

$$x(t) = \frac{1}{2}(1-t)a_i + \frac{1}{2}(1+t)a_{i+1}$$

On met :

$$g_i^1(t) = f(x(t))\lambda_i^1(x(t))$$

et

$$g_i^2(t) = f(x(t))\lambda_i^2(x(t))$$

alors par la méthode de Gauss on a:

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\lambda_i^1(x) dx \approx \frac{h}{2} [g_i^1(t_1) + g_i^1(t_2)]$$

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\lambda_i^2(x) dx \approx \frac{h}{2} [g_i^2(t_1) + g_i^2(t_2)]$$

avec

$$t_1 = -t_2 = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

Rappelons qu'en utilisant la méthode de quadrature de gauss dans l'intégrale d'une fonction g sur $[-1, 1]$ l'erreur est donnée par :

$$E(g) = \frac{2^5(2!)^4}{5 \times (4!)^3} g(\zeta)$$

avec:

$$\zeta \in [-1, 1] \quad [11]$$

Soient:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{et, } B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 u_h'(x)^2 dx = u^t \left[\sum_{i=0}^N B_i^t \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} B_i \right] u$$

$$\int_0^1 f(x) u_h(x) dx = \sum_{i=0}^N \left[\frac{h}{2} (g_i^1(t_1) + g_i^1(t_2)), \frac{h}{2} (g_i^2(t_1) + g_i^2(t_2)) \right] B_i u$$

On note:

$$\Gamma = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^N B_i^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} B_i$$

et

$$b^t = \sum_{i=0}^N \left[\frac{h}{2} (g_i^1(t_1) + g_i^1(t_2)), \frac{h}{2} (g_i^2(t_1) + g_i^2(t_2)) \right] B_i$$

D'autre part on a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_h(x) dx &= \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} \begin{bmatrix} \lambda_i^1 & \lambda_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \end{bmatrix} \\ &= \left[\sum_{i=0}^N \left[\int_{a_i}^{a_{i+1}} \begin{bmatrix} \lambda_i^1 & \lambda_i^2 \end{bmatrix} B_i \right] \right] u \end{aligned}$$

On met:

$$A^t = \sum_{i=0}^N \left[\int_{a_i}^{a_{i+1}} \begin{bmatrix} \lambda_i^1 & \lambda_i^2 \end{bmatrix} B_i \right]$$

Le problème algébrique est donc:

$$\begin{cases} j(u) = \inf_{v \in R^N} \frac{1}{2} v^t \Gamma v - b^t v \\ \text{sous la contrainte} \\ A^t u \leq c \end{cases}$$

Remarque 15 Il est clair que la matrice Γ est une matrice symétrique définie positive.

Dans la suite on va s'intéresser à des algorithmes d'optimisation de fonctionnelles quadratiques définies dans R^n avec des contraintes linéaires.

2.4 Lagrangien et Lagrangien augmenté:

Minimiser:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(y) = \frac{1}{2} y^t \Gamma y - y^t b \\ \text{avec des contraintes d'inégalités} \\ A^t y - F \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où $y, b \in R^n$, $F \in R^m$,

Γ : une matrice carré symétrique définie positive

A : une matrice de n lignes et m colonnes.

On définit le Lagrangien par:

$$L(y, \lambda) = Q(y) + \lambda^t (A^t y - F)$$

où $\lambda \in R_+^m$

Donc les conditions d'optimalité sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma y + A\lambda - b = 0 \\ \lambda^t (A^t y - F) = 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ et } A^t y - F \leq 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

et pour le cas $A^t y - F = 0$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma y + A\lambda - b = 0 \\ A^t y - F = 0 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Si la matrice Γ est facile à inverser on écrit :

$$-A^t \Gamma^{-1} A \lambda = F - A^t \Gamma^{-1} b \quad (2.4)$$

sinon on préfère garder les deux inconnus λ et y .

En mécanique de structure le $-\lambda$ représente le vecteur de déplacements et y représente les contraintes.

On définit le Lagrangien augmenté par:

$$L_r(y, \lambda) = L(y, \lambda) + \frac{r}{2} \|A^t y - F\|^2$$

donc les conditions d'optimalité sont:

$$\begin{cases} (\Gamma + rAA^t)y + A\lambda - (b + rAF) = 0 \\ \lambda^t(A^t y - F) = 0 \\ \lambda \geq 0 \text{ et } A^t y - F \leq 0 \end{cases}$$

et pour le cas $A^t y - F = 0$ sont :

$$\begin{cases} (\Gamma + rAA^t)y + A\lambda - (b + rAF) = 0 \\ A^t y - F = 0 \end{cases}$$

Lemme 2 $\inf \{Q(y), y \in R^n \text{ et } A^t y - F \leq 0\} = \inf_{y \in R^n} \sup_{\lambda \geq 0, \lambda \in R^m} L(y, \lambda)$

En effet si:

$$A^t y - F \leq 0$$

alors

$$\sup_{\lambda \geq 0, \lambda \in R^m} L(y, \lambda) = Q(y)$$

sinon

$$\sup_{\lambda \geq 0, \lambda \in R^m} L(y, \lambda) = +\infty$$

On va maintenant définir la fonction duale:

Définition 10 La fonction $p(\lambda) = \inf_{y \in R^n} L(y, \lambda) = L(y_\lambda, \lambda)$ est appelée fonction duale. y_λ est l'infimum de $L(y, \lambda)$ pour λ fixé.

On va regarder le lien entre la fonction duale et primale:

Lemme 3 Pour tout $y \in R^n$ et $\lambda \in R^m$ on a:

$$Q(y) = p(\lambda) + \frac{1}{2}(y - y_\lambda)^t \Gamma (y - y_\lambda) - \lambda^t (A^t y - F)$$

En effet:

$$p(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L(y_\lambda, \lambda) = \frac{1}{2} y_\lambda^t \Gamma y_\lambda - y_\lambda^t b + (y_\lambda^t A - F^t) \lambda$$

et

$$A\lambda - b = -\Gamma y_\lambda$$

on déduit:

$$p(\lambda) = -\frac{1}{2} y_\lambda^t \Gamma y_\lambda - F^t \lambda$$

et

$$Q(y) - p(\lambda) = \frac{1}{2}(y - y_\lambda)^t \Gamma (y - y_\lambda) + y^t (\Gamma y_\lambda - b) + F^t \lambda$$

et comme:

$$\Gamma y_\lambda - b = -A\lambda$$

d'où le résultat.

On va établir un lien entre le problème primal et le problème dual:

Théorème 16 Si la matrice Γ est définie positive et les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes alors:

$$p(\lambda) \leq Q(y) \text{ pour tout } y \in R^n \text{ tel que } A^t y - F \leq 0 \text{ et tout } \lambda \in R^m, \lambda \geq 0$$

et on a l'égalité si et seulement si y^* est la solution du problème d'optimisation et λ^* est le multiplicateur de Lagrange associé. ie

$$p(\lambda^*) = Q(y^*)$$

Démonstration 5 Pour $\lambda \geq 0$ l'inégalité $p(\lambda) \leq Q(y)$ est une application directe du lemme précédent.

Si y_{λ^*} satisfait les conditions d'optimalité précédentes pour un certain λ^* et en plus vérifie $L(y_{\lambda^*}, \lambda^*) = \inf_{y \in R^n} L(y, \lambda^*)$ alors $p(\lambda^*) = Q(y_{\lambda^*})$ d'une part, et d'autre part, Si y^* est la solution du problème primal, la condition d'optimalité pour un $\lambda^* \geq 0$ est satisfaite.

2.4.1 Analyse de Lagrangien augmenté:

On va analyser l'utilisation de Lagrangien augmenté pour la programmation quadratique: minimiser

$$\begin{cases} Q(y) = \frac{1}{2} y^t \Gamma y - y^t b \\ A^t y - F \leq 0 \end{cases}$$

avec contraintes d'inégalités

où $y, b \in R^n$, $F \in R^m$, et Γ est une matrice de $n \times n$, symétrique définie positive et A est une matrice de n lignes et de m colonnes avec $n \geq m$ et les colonnes sont linéairements indépendants. Le principe de décomposition des coordonnées conduit à l'introduction au problème équivalent:

$$\begin{cases} Q(y) \text{ avec contraintes} \\ q \leq 0 \\ A^t y - F - q = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

On introduit une variable de saut pour rendre les contraintes d'inégalités à des contraintes d'égalités plus une contrainte simple $q \leq 0$ facile à dualiser. Maintenant on va utiliser Lagrangien augmenté.



Lagrangien classique est:

$$L(y, q, \mu) = Q(y) + \mu^t (A^t y - F - q) \quad (2.7)$$

et Lagrangien augmenté est:

$$L_r(y, q, \mu) = L(y, q, \mu) + \frac{r}{2} \|A^t y - F - q\|^2$$

Dans la section suivante on démontre la convergence de l'algorithme de Uzawa appliqué à des problèmes quadratiques avec des contraintes d'inégalités.

2.4.2 Convergence de l'algorithme de Uzawa avec contraintes d'inégalités.

On va établir l'égalité de point selle de Lagrangien et de Lagrangien augmenté:

Proposition 4 *Soit (y^*, q^*, μ^*) le point selle de Lagrangien augmenté $L_r(y, q, \mu)$ alors il est le point selle de Lagrangien $L(y, q, \mu)$.*

Démonstration 6 *Il faut noter que la minimisation de $Q(y)$ avec les contraintes définies précédemment est équivalente à la minimisation de:*

$$Q_r(y, q) = Q(y) + \frac{r}{2} \|A^t y - F - q\|^2 \quad (2.8)$$

avec les mêmes contraintes. La minimisation de Q_r avec ces contraintes est exactement le problème de Lagrangien augmenté.

Le point selle de L_r est caractérisé par:

$$\forall \delta y \in R^n, \frac{\partial L_r}{\partial y}(y_r^*, q_r^*, \mu_r^*) \delta y = 0 \quad (2.9)$$

$$\forall \delta q = q - q^* \text{ avec } q^*, q \leq 0, \frac{\partial L_r}{\partial q}(y_r^*, q_r^*, \mu_r^*) \delta q \geq 0 \quad (2.10)$$

$$\forall \delta \mu \in R^m, \frac{\partial L_r}{\partial \mu}(y_r^*, q_r^*, \mu_r^*) \delta \mu = 0 \quad (2.11)$$

On calcule les dérivées partielles de L_r :

$$\frac{\partial L_r}{\partial y} \delta y = \delta y^t (\Gamma y - b) + \delta y^t A \mu + r \delta y^t A (A^t y - F - q) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial q} \delta q = -\delta q \mu - r \delta q (A^t y - F - q) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial \mu} \delta \mu = \delta \mu^t (A^t y - F - q) \quad (2.14)$$

donc on a :

$$A^t y_r^* - F - q_r^* = 0$$

$$\Gamma y_r^* - b - A \mu_r^* = 0$$

$$\forall q \leq 0, -(q - q_r^*)^t \mu_r^* \geq 0, \text{ avec } q^* \leq 0$$

Les trois dernières conditions caractérisent bien le point selle de Lagrangien $L(y, q, \mu)$.

L'algorithme de Uzawa pour Lagrangien augmenté :

Maximiser la fonction :

$$p_r(\mu) = \inf \{ L_r(y, q, \mu) \mid q \in R^m, q \leq 0, y \in R^n \}$$

en utilisant la méthode du gradient.

Théorème 16 : On pose

$$\begin{cases} \Gamma_r = \Gamma + rAA^t \\ b_r = b - rAF \end{cases} \quad (2.15)$$

La description de l'algorithme de Uzawa

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{On calcul les } y_n, q_n \text{ solutions de:} \\ \begin{cases} 1) \Gamma_r y_n - b_r - r A q_n + A \mu_n = 0 \\ 2) (q - q_n)^t (\mu_n + r(A^t y_n - F - q_n)) \leq 0 \\ \text{pour tout } q \leq 0 \end{cases} \\ \text{et } \mu_{n+1} \text{ solution de} \\ 3) \mu_{n+1} = \mu_n + \rho_n (A^t y_n - F - q_n) \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Si $0 < \alpha \leq \rho_n \leq \beta < 2r$, la suite (y_n, q_n, μ_n) caractérisée par l'algorithme est convergente.

Démonstration 7 Soit $\mu = \mu_n$, alors $p_r(\mu_n) = L_r(y_n, q_n, \mu_n)$ où y_n, q_n sont caractérisés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_r}{\partial y}(y_n, q_n, \mu_n) = 0 \\ \frac{\partial L_r}{\partial q}(y_n, q_n, \mu_n)(q - q_n) \geq 0 \text{ pour tout } q \leq 0 ; q_n \leq 0 \end{array} \right.$$

La positivité de la matrice Γ implique l'unicité de (y_n, q_n) .

La condition $\frac{\partial L_r}{\partial y} = 0$ donne la première équation de l'algorithme; la condition $\frac{\partial L_r}{\partial q}(q - q_n) \geq 0$ donne la deuxième équation de l'algorithme.

Le gradient de $p_r(\mu)$ est:

$$\frac{dp_r(\mu_n)}{d\mu} \delta\mu = \frac{\partial L_r}{\partial \mu}(y_n, q_n, \mu_n) \delta\mu$$

avec y_n, q_n satisfont:

$$L_r(y_n, q_n, \mu_n) = p_r(\mu_n)$$

donc de (2.14) on a:

$$\frac{dp_r(\mu_n)}{d\mu} \delta\mu = \delta\mu^t (A^t y_n - F - q_n)$$

Les formules précédentes peuvent être facilement vérifiées dans le cas des contraintes d'égalité.

Il est clair maintenant que:

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \rho_n \left(\frac{dp_r(\mu_n)}{d\mu} \right)$$

est bien définie.

le point selle est caractérisé par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_r y^* - b_r - r A q^* + A \mu^* = 0 \\ (q - q^*)^t (\mu_n^* + r(A^t y^* - F - q^*)) \leq 0 \\ \text{ou} \\ A^t y^* - F - q^* = 0 \end{array} \right. \quad (2.17)$$

On pose

$$\underline{y}_n = y_n - y^*, \underline{q}_n = q_n - q^* \text{ et } \underline{\mu}_n = \mu_n - \mu^*$$

par soustraction des équations (2.16) des équations (2.17) on a :

$$\underline{\mu}_{n+1} = \underline{\mu}_n + \rho_n (A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n)$$

et

$$\left\| \underline{\mu}_{n+1} \right\|^2 = \left\| \underline{\mu}_n \right\|^2 + 2\rho_n \underline{\mu}_n^t (A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n) + \rho_n^2 \left\| A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n \right\|^2 \quad (2.18)$$

On choisit $q = q_n$ dans la deuxième inéquation de (2.17) et $q = q^*$ dans la deuxième inéquation de (2.16) et on les additionne on a:

$$- \underline{q}_n^t (\underline{\mu}_n + r(A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n)) \leq 0$$

ou

$$\underline{q}_n^t \underline{\mu}_n + r \underline{q}_n^t (A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n) \geq 0$$

par soustraction la première équation de (2.16) de la première équation de (2.17) on a:

$$\Gamma_r \underline{y}_n - r A \underline{q}_n + A \underline{\mu}_n = 0 \quad (2.19)$$

la formule

$$\Gamma_r = \Gamma + r A A^t$$

donne

$$\Gamma \underline{y}_n + r A (A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n) + A \underline{\mu}_n = 0 \quad (2.20)$$

on multiplie par $-\underline{y}_n^t$ on a:

$$-\underline{y}_n^t \Gamma \underline{y}_n - r \underline{y}_n^t A (A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n) - \underline{y}_n^t A \underline{\mu}_n = 0 \quad (2.21)$$

on ajoute (2.21) à (2.18) on obtient:

$$-\underline{y}_n^t \Gamma \underline{y}_n + (\underline{q}_n^t - \underline{y}_n^t A) \underline{\mu}_n - r \left\| A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n \right\|^2 \geq 0$$

d'où

$$(\underline{q}_n^t - \underline{y}_n^t A) \underline{\mu}_n \geq \underline{y}_n^t \Gamma \underline{y}_n + r \left\| A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n \right\|^2$$

on substitut cette inéquation dans (2.18) on a:

$$\left\| \underline{\mu}_{n+1} \right\|^2 - \left\| \underline{\mu}_n \right\|^2 \leq -2\rho_n \underline{y}_n^t \Gamma \underline{y}_n + (\rho_n^2 - 2r\rho_n) \left\| A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n \right\|^2$$

la suite $\left\| \underline{\mu}_n \right\|$ est décroissante si

$$\rho_n - 2r \leq \frac{2\underline{y}_n^t \Gamma \underline{y}_n}{\left\| A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n \right\|^2}; \rho_n \geq 0$$

en particulier si $0 < \alpha \leq \rho_n \leq \beta < 2r$, la suite $\left\| \underline{\mu}_n \right\|^2$ est strictement décroissante. la suite $\left\| \underline{\mu}_{n+1} \right\|^2 - \left\| \underline{\mu}_n \right\|^2$ tend vers zéro. d'où:

$$\begin{cases} \underline{y}_n^t \Gamma \underline{y}_n \rightarrow 0 \\ \left\| A^t \underline{y}_n - \underline{q}_n \right\| \rightarrow 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \underline{y}_n \rightarrow 0 \\ \underline{q}_n \rightarrow 0 \end{cases}$$

et comme les colonnes de A sont linéairement indépendantes :

$$\underline{\mu}_n \rightarrow 0 .$$

Remarque 16 1) La démonstration a été élaborée de façon à élargir à des problèmes non linéaires.

2) Pour appliquer cet algorithme il faut résoudre à chaque itération les systèmes non linéaire en y et q .

La deuxième équation de (2.16) s'écrit aussi

$$(rq - rq_n)^t (\mu_n + r(A^t y_n - F) - rq_n) \leq 0$$

c'est à dire:

$$rq_n = P_-(\mu_n + r(A^t y_n - F))$$

avec: P_- défini par:

$$(P_-(x))_i = \min(x_i, 0); 1 \leq i \leq m$$

Dans cette section on va calculer le rayon de convergence de l'algorithme de Uzawa appliqué à des problèmes quadratiques avec contraintes d'égalités afin de voir la bonne

convergence de l'algorithme.

2.4.3 Rayon de convergence de la méthode de Uzawa

Dans cette section on va appliquer la méthode de Uzawa pour minimiser :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(y) = \frac{1}{2}y^t \Gamma y - y^t b \\ \text{avec des contraintes d'égalités} \\ A^t y - F = 0 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Il est intéressant de remarquer que l'introduction du variable de saut et la contrainte $q = 0$ ne change rien dans la condition du point selle de Lagrangien augmenté.

Lagrangien augmenté du problème original est :

$$L_r(y, q, \lambda) = L_r(y, \lambda) = Q(y) + \lambda^t (A^t y - F) + \frac{r}{2} \|A^t y - F\|^2 \quad (2.23)$$

L'algorithme de Uzawa consiste ici à résoudre itérativement:

$$\forall \delta y \in R^n : \frac{\partial L_r}{\partial y} \delta y = 0$$

c'est à dire :

$$\Gamma_r y_n - b_r + A \lambda_n = 0$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_r = \Gamma + r A A^t \\ b_r = b + r A F \end{array} \right.$$

et

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n (A^t y_n - F).$$

$$\frac{dp_r}{d\lambda} \delta \lambda = \frac{\partial L_r}{\partial \lambda} (y_\lambda, \lambda)$$

L'optimum (y^*, λ^*) satisfait la condition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_r y^* - b_r + A\lambda^* = 0 \\ A^t y^* - F = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda^* = \lambda^* + \rho_n (A^t y^* - F) \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Si on pose

$$\underline{y}_n = y_n - y^*, \quad \underline{\lambda}_n = \lambda_n - \lambda^*$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda}_{n+1} = \underline{\lambda}_n + \rho_n A^t \underline{y}_n \\ \Gamma_r \underline{y}_n + A \underline{\lambda}_n = 0 \end{array} \right. \quad (2.25)$$

On considère le problème des valeurs et vecteurs propres :

trouver (α_i, w_i) tel que:

$$AA^t w_i = \alpha_i \Gamma w_i \quad (2.26)$$

donc

$$\Gamma_r w_i = (1 + r\alpha_i) \Gamma w_i \quad (2.27)$$

c'est à dire que le w_i est le vecteur propre associé à la valeur propre: $(1 + r\alpha_i)$.

On multiplie la première équation de (2.25) par A et on pose $\underline{\mu}_n = A \underline{\lambda}_n$ on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mu}_{n+1} = \underline{\mu}_n + \rho_n AA^t \underline{y}_n \\ \Gamma_r \underline{y}_n + \underline{\mu}_n = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

On élimine $\underline{y}_n$ de la première équation de (2.28) par l'utilisation de la seconde

$$\underline{\mu}_{n+1} = \underline{\mu}_n - \rho_n AA^t \Gamma_r^{-1} \underline{\mu}_n$$

on a:

$$AA^t \Gamma_r^{-1} \Gamma w_i = \frac{\alpha_i}{1 + r\alpha_i} \Gamma w_i$$

On décompose le vecteur $\underline{\mu}_n$ suivant la base Γw_i :

$$\underline{\mu}_n = \sum_i \mu_n^i \Gamma w_i$$

on déduit que :

$$\mu_{n+1}^i = \mu_n^i - \rho_n \frac{\alpha_i}{1 + r\alpha_i} \mu_n^i$$

ou

$$\mu_{n+1}^i = \left(1 - \rho_n \frac{\alpha_i}{1 + r\alpha_i}\right) \mu_n^i$$

Il est évident que $\mu_n^i \rightarrow 0$ si et seulement si :

$$-1 < 1 - \rho_n \frac{\alpha_i}{1 + r\alpha_i} < 1$$

pour $\alpha_i \geq 0$ L' inégalité droite donne seulement $\rho_n > 0$ et l'inégalité gauche donne:

$$\rho_n < 2\left(\frac{1}{\alpha_i} + r\right) \text{ pour } 1 \leq i \leq N$$

ceci est équivalent à $\rho_n < 2\left(\frac{1}{\alpha_N} + r\right)$ où α_N est la plus grande valeur propre. En choisissant $\rho = r$ on obtient :

$$\mu_{n+1}^i = \frac{1}{1 + r\alpha_i} \mu_n^i$$

Si r est suffisamment grand l'algorithme converge mais la solution y_n de:

$$\Gamma_r y_n - b_r + A\lambda_n = 0$$

est mauvaise car Γ_r est mal conditionnée.

Pour r fixé, le ρ optimal se calcule de la fonction:

$$\rho \rightarrow \left| 1 - \rho \frac{\alpha_i}{1 + r\alpha_i} \right|$$

c'est à dire ρ_{opt} est l'intersection de :

$$\begin{cases} \rho \rightarrow 1 - \rho \frac{\alpha_1}{1 + r\alpha_1} \\ \text{et} \\ \rho \rightarrow -1 + \rho \frac{\alpha_N}{1 + r\alpha_N} \end{cases}$$

donc

$$\rho_{\text{opt}} = r + \frac{2 + r(\alpha_1 + \alpha_N)}{2r\alpha_1\alpha_N + (\alpha_1 + \alpha_N)}$$

pour ce choix de ρ on a :

$$\left| \mu_{n+1}^i \right| \leq \frac{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_N}}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_N} + 2r\alpha_1} \left| \mu_n^i \right| \text{ pour } 1 \leq i \leq N$$

et dans ce cas

$$\rho_{\text{opt}} > r$$

et la convergence est plus vite que pour $\rho = r$. Malheureusement le choix de ρ_{opt} est seulement théorique: α_1 et α_N sont généralement difficiles à évaluer.

Pour $r = 0$ (la méthode de Uzawa pour Lagrangien classique)

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_N}$$

donc

$$\left| \mu_{n+1}^i \right| \leq \frac{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_N}}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_N}} \left| \mu_n^i \right| \text{ pour } 1 \leq i \leq N$$

Dans le cas $\frac{\alpha_1}{\alpha_N}$ est très petit le rapport de convergence est proche de un. La méthode est impraticable, ceci montre bien l'intérêt de Lagrangien augmenté.

2.4.4 Remarque sur le problème des valeurs propres

Si on multiplie à gauche l'équation suivante par w_i^t :

$$AA^t w_i = \alpha_i \Gamma w_i$$

on déduit que $\alpha_i \geq 0$.

Certaines valeurs propres peuvent être nulles: en effet, comme A est une matrice d'ordre n et de m colonnes linéairement indépendantes ($n \geq m$), l'espace associé aux $\alpha_i = 0$ est le noyau de A^t .

$Ay = 0$ implique $y = 0$ et donc: $AA^t w = 0$ implique que $w \in \text{Ker}(A^t)$, d'autre part $\underline{\mu}_n \in \text{Im}(A)$ et donc la décomposition:

$$\underline{\mu}_n = \sum_i \underline{\mu}_n^t \Gamma w_i$$

implique avec le vecteur propre w_0

$$w_0^t \underline{\mu}_n = \underline{\mu}_n^t w_0 \Gamma w_0 \quad (\text{les vecteurs propres sont } \Gamma \text{ orthogonaux})$$

Puisque $\underline{\mu}_n = A \underline{\lambda}_n$ alors $w_0^t A \underline{\lambda}_n = 0$ pour w_0 dans le noyau de A^t donc $\underline{\mu}_n^t = 0$. Finalement $\underline{\mu}_n$ n'a pas de composantes dans le noyau de A^t donc les valeurs propres utilisées dans l'analyse de l'algorithme sont strictement positives.

Il est clair que l'utilisation des vecteurs propres est purement théorique.

2.5 Algorithme du gradient

On sait que si A est une matrice de n lignes et m colonnes, alors :

$$R^n = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A^t)$$

Soit le problème suivant:

Minimiser:

$$\begin{cases} Q(y) = \frac{1}{2}y^t \Gamma y - y^t b \\ \text{avec des contraintes d'égalités.} \\ A^t y - F = 0 \end{cases}$$

On définit l'algorithme suivant :

On part d'un point $y^{(0)}$, tel que $A^t y^{(0)} = F$

$y^{(n+1)}$ est donné par:

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - \rho P_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y^n)) \quad ((2.29))$$

où $P_{\ker(A^t)}$ est l'opérateur de projection sur $\ker(A^t)$

2.5.1 Motivation de l'algorithme:

Si y est solution du problème posé alors :

$\exists \lambda \in R^m$ tel que : (y, λ) soit point selle de:

$$L(y, \lambda) = \frac{1}{2}y^t \Gamma y - y^t b + \lambda^t (A^t y - F)$$

ce qui implique:

$$\Gamma y - b + A\lambda = 0$$

c'est à dire:

$$\Gamma y - b = -A\lambda = A(-\lambda)$$

et ce qui est équivalent à dire:

$$\nabla Q(y) = \Gamma y - b \in \text{Im}(A)$$

ce qui implique

$$P_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y)) = 0$$

donc

$$y = y - \rho R_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y)) \quad ((2.30))$$

ce qui explique (2.29)

2.5.2 Etude de la convergence de l'algorithme:

Des deux relations (2.29) et (2.30), nous avons:

$$\begin{aligned} \|y^{(n+1)} - y\|^2 &= \|y^{(n)} - y - \rho R_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y^n) - \nabla Q(y))\|^2 \\ &= \|y^{(n)} - y\|^2 - 2\rho \langle y^{(n)} - y, R_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y^n) - \nabla Q(y)) \rangle + \\ &\quad \rho^2 \|R_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y^n) - \nabla Q(y))\|^2 \end{aligned}$$

on pose :

$$e^{(n)} = y^{(n)} - y$$

d'une part nous avons:

$$\begin{aligned} \|R_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y^n) - \nabla Q(y))\|^2 &\leq \|\nabla Q(y^n) - \nabla Q(y)\|^2 \\ &= \|\Gamma(y^{(n)} - y)\|^2 \\ &\leq \|\Gamma\|^2 \|y^{(n)} - y\|^2 \end{aligned}$$

d'autre part : l'opérateur $R_{\ker(A^t)}$ est un opérateur symétrique, c'est à dire:

$$\forall x, y \in R^n; \langle x, R_{\ker(A^t)}(y) \rangle = \langle y, R_{\ker(A^t)}(x) \rangle$$

donc:

$$\begin{aligned} \langle y^{(n)} - y, R_{\ker(A^t)}(\nabla Q(y^n) - \nabla Q(y)) \rangle &= \langle R_{\ker(A^t)}(y^{(n)} - y), \nabla Q(y^n) - \nabla Q(y) \rangle \\ &= \langle y^{(n)} - y, \nabla Q(y^n) - \nabla Q(y) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle y^{(n)} - y, \Gamma(y^{(n)} - y) \rangle \\
&\geq \alpha \|y^{(n)} - y\|^2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\|e^{(n+1)}\|^2 &\leq \|e^{(n)}\|^2 + \rho^2 \|\Gamma\|^2 \|e^{(n)}\|^2 - 2\rho\alpha \|e^{(n)}\|^2 \\
&= (1 + \rho^2 \|\Gamma\|^2 - 2\rho\alpha) \|e^{(n)}\|^2
\end{aligned}$$

on peut choisir ρ de telle sorte que $1 + \rho^2 \|\Gamma\|^2 - 2\rho\alpha$ soit inférieur à 1.

il suffit de prendre :

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|\Gamma\|^2}$$

avec ce choix de ρ l'algorithme converge.

Chapter 3

Simulation numérique:

Nous avons construit un programme **PRIN1** pour calculer numériquement les solutions de quelques problèmes rencontrés en mécanique des structures avec contraintes linéaires en utilisant la méthode du Lagrangien augmenté décrite dans le chapitre précédent.

3.1 Présentation du programme PRIN1:

Le programme **PRIN1** comporte les étapes suivantes:

a) Lecture des données: permettant la description du maillage élément finis;

Coordonnées des deux bouts de la frontière de l'intervalle.

nombre de noeuds total des noeuds éléments finis.

b) Construction de la table des coordonnées des noeuds éléments finis ainsi que la table de connectivité des éléments.

c) Construction des matrices de rigidité élémentaires, des matrices des contraintes élémentaires et vecteurs élémentaires puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice de rigidité globale, la matrice des contraintes globale ainsi que le vecteur global.

d) Optimisation de la fonctionnelle obtenue (avec contraintes)

Pour réaliser toutes ces opérations, on a construit une bibliothèque de sous programmes, présentons les successivement:

Sous programmes utilisés par le programme PRIN1:

VMAIL: lit les données permettant la description du maillage éléments finis, ensuite génère les noeuds par interpolation linéaire, construit et imprime les tables de coordonnées de noeuds globales et de connectivité des éléments.

EL: lit les paramètres physiques, puis fait appel pour chaque élément, aux sous programmes suivants:

ELEMO: construit la matrice et le vecteur élémentaire après avoir calculé leur coefficients par le schéma d'intégration numérique de Gauss [11]

ASSEM: Construit la matrice étendue (resp. le vecteur étendu) par expansion de la matrice élémentaire (resp. le vecteur élémentaire) et la matrice des contraintes grâce à

à insérer dans la thèse

des insertions de lignes et de collonnes (resp. de composantes) de zéro.

additionne les matrices et les vecteurs étendus

(Ces deux étapes sont effectuées simultanément)

COND: Les conditions aux limites sont introduites:

Dans le cas homogène $u(0) = 0, u(1) = 0$: On remplace les éléments de la première ligne, la dernière ligne, la première colonne, dernière colonne de chaque une des matrices globales (de rigidité et des contraintes) par des zéro et pour le vecteur globale, on remplace sa première composante ainsi que sa dernière composante par zéro.

Dans le cas non homogène ($u(0) = a, u(1) = b$) : On modifie le vecteur force.

OPTI1: optimisation de la fonctionnelle obtenue avec contraintes linéaires par l'algorithme décrit ci dessous:

Algorithme du sous programme OPTI1:

Lecture des données: $(\Gamma, b, A, F, \rho, r, nmax, \varepsilon, \mu, q, y, n1div, n2div)$

calcul de $\Gamma_r = \Gamma + rAA^t$

calcul de $b_r = b + rAF$

Pour $i = 1, \dots, nmax$

calcul de $A\mu$

Appel du sous programme QY($\Gamma_r, b_r, A\mu, \mu, q, y, \varepsilon, nmax, r, n1div$)

Si $n1div = -1$ alors

$n2div = -1$

(algorithme divergeant)

retour

Fin Si

$\mu = \mu + \rho(A^t y - F - q)$

calcul de $\|\rho(A^t y - F - q)\|$

Si $\|\rho(A^t y - F - q)\| < \varepsilon$ alors

(q, y, μ) solution

retour

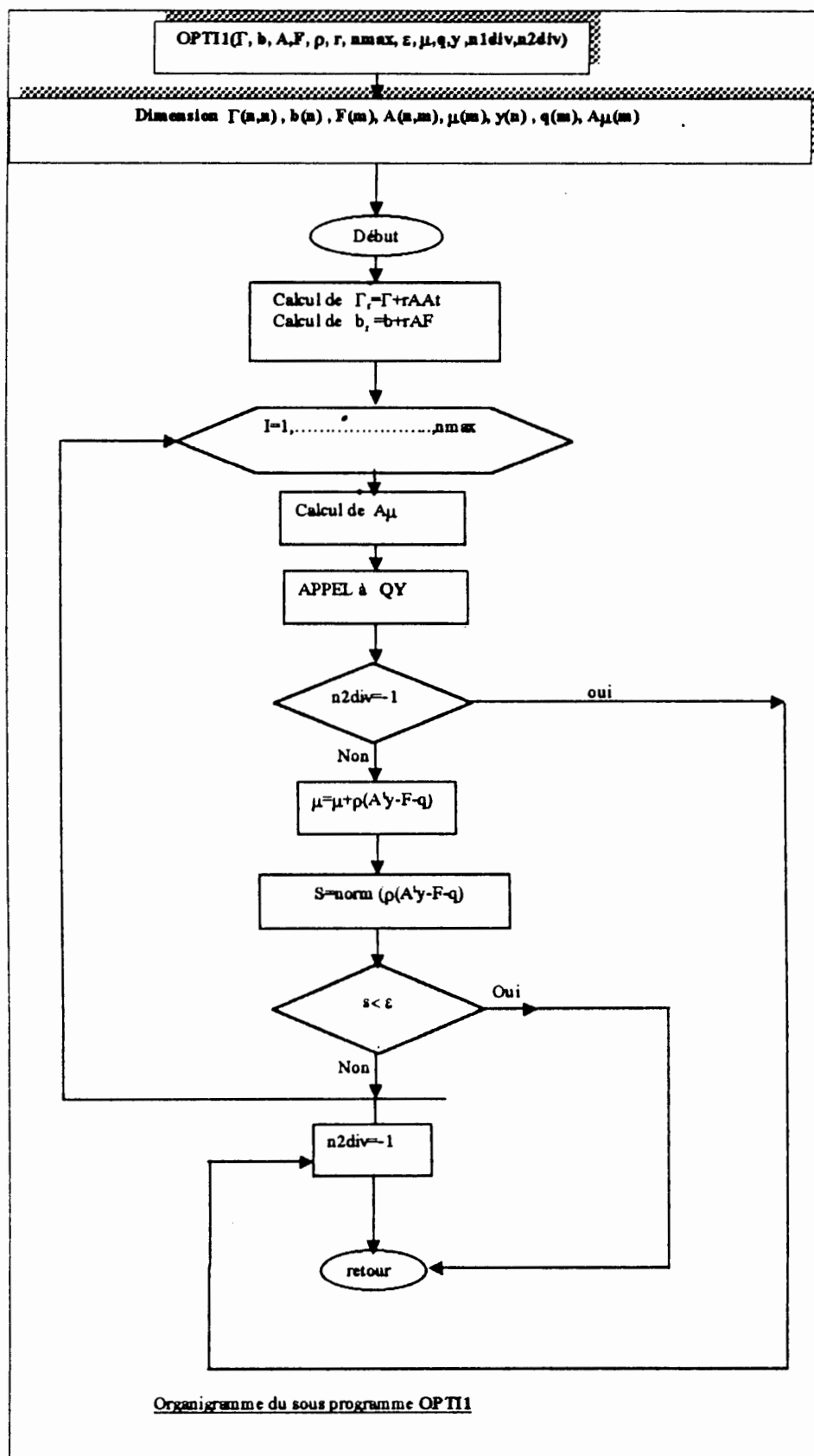
Fin Si

Fin Pour.

$n2div = -1$

Ecrire (Algorithme divergeant)

Retour.



Algorithme du sous programme QY

-Lecture des données: $(\Gamma_r, b_r, A\mu, \mu, q, y, \varepsilon, n_{\max}, r, n_{\text{ldiv}})$

Pour $j = 1, \dots, n_{\max}$

Pour $i = 1, \dots, m$

$$q_{\text{old}}(i) = q(i)$$

Fin Pour

Résoudre le système linéaire $\Gamma_r y = b_r + r Aq - A\mu$ (Appel au sous programme

Gauss)

$$\mu = \mu + r(A^t y - F)$$

Pour $i = 1, \dots, m$

$$q(i) = \min(0, \frac{1}{r} \mu(i))$$

Fin Pour

calcul de $\|q - q_{\text{old}}\|$

Si $\|q - q_{\text{old}}\| < \varepsilon$ alors

(q, y) solution

retour

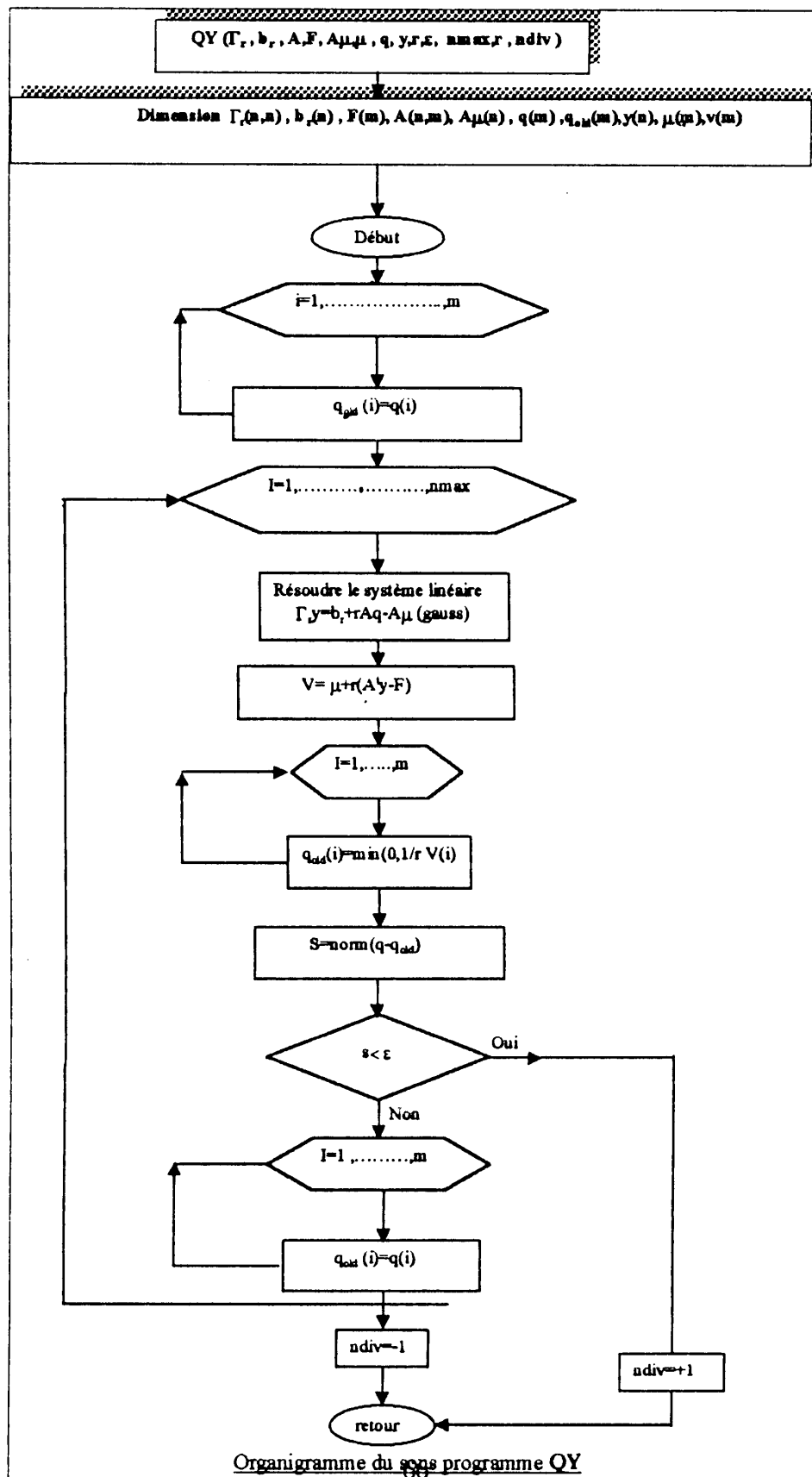
Fin Si

Fin Pour

$n_{\text{ldiv}} = -1$.

Ecrire (Algorithme divergeant) (q_n, y_n) diverge

Retour



Organigramme (2)

Remarque 17 -Pour calculer la somme , la différence de deux vecteurs on a construit un sous programme appelé **somvct**

-La transposée d'une matrice est calculée en appelant le sous programme **Transp.**

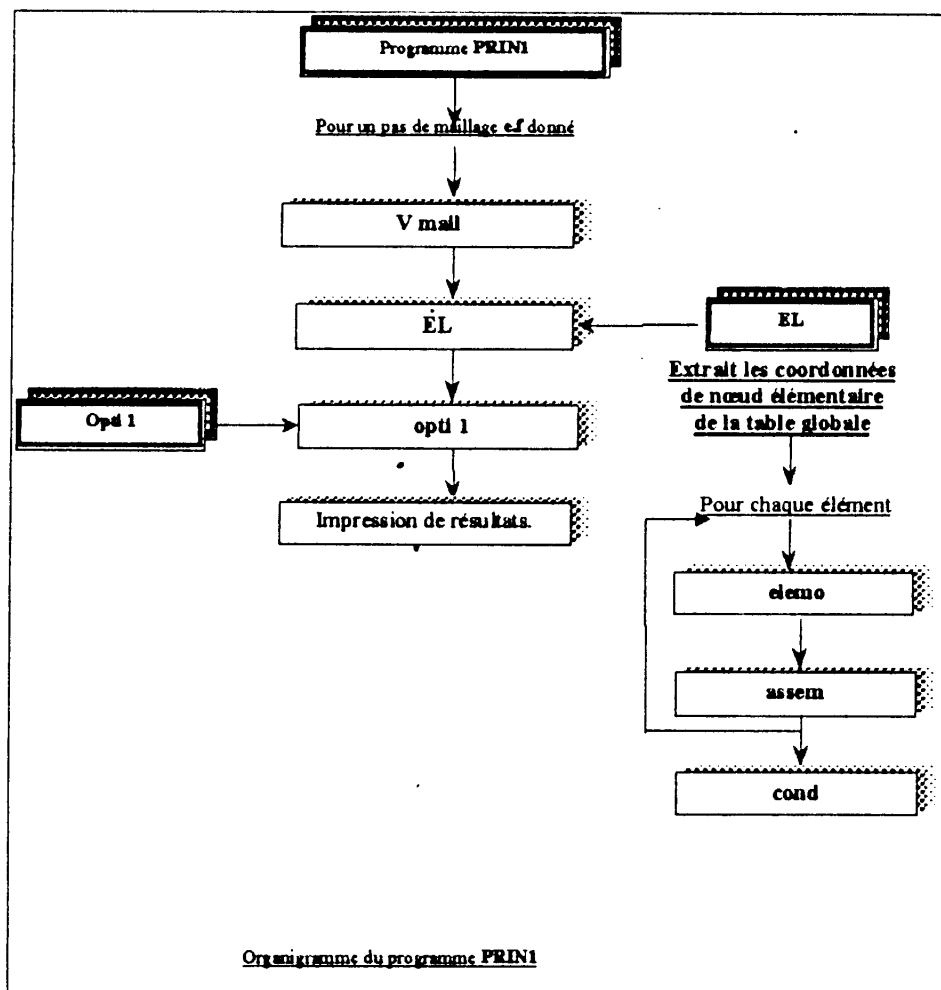
-La somme ou la différence de deux matrices est effectuée en appelant le sous programme **somatr.**

-le produit de deux matrices est calculé en appelant le sous programme **Promat.**

-Pour calculer la norme d'un vecteur on a construit un sous programme appelé **norvct.**

-Pour résoudre le système linéaire rencontré dans le sous programme **QY** on fait appel au sous programme **Gauss.[4]**

Maintenant, on va présenter l'organigramme du programme **PRIN1.**



Organigramme(3):Programme PRIN1

Afin de vérifier la performance du programme **PRIN1** nous proposons des tests d'applications où nous sommes en mesure d'avoir une solution analytique.

A ce propos, nous avons besoin de rajouter quelque sous programmes à notre bibliothèque .

Dans ce qui suit nous allons donner leur noms ainsi que leur fonctions

Sous programme SOLEXA: Calcul la valeur de la solution exacte au noeuds (éléments finis)

Sous programme ERROR:Extrait la solution exacte (sortie du Sous programme **SOLEXA**) et la solution approchée (sortie du programme **OPTI1**) puis fait appel aux sous programmes suivants:

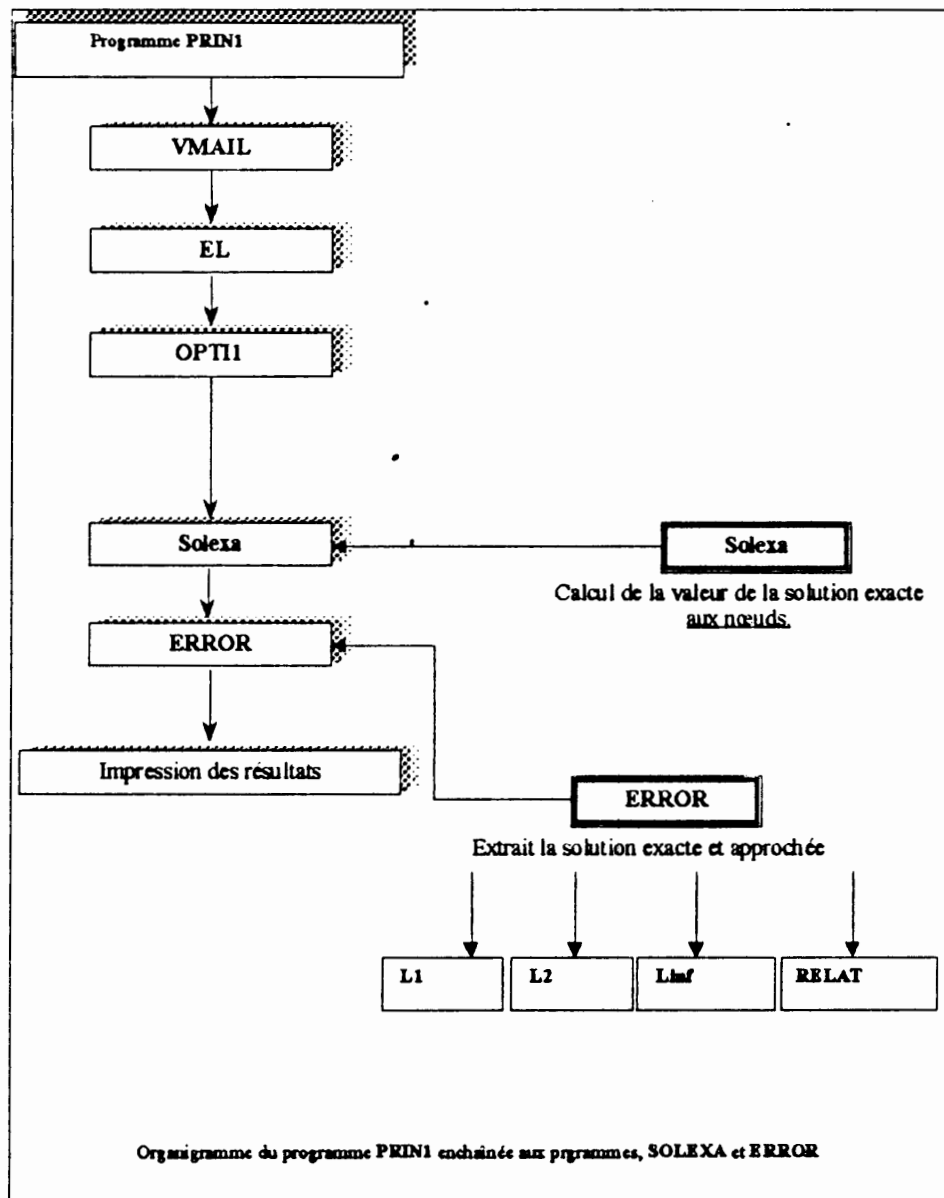
Sous programme L1:Calcul l'erreur entre la solution exacte et approchée en norme $L1$

Sous programme L2:Calcul l'erreur entre la solution exacte et approchée en norme $L2$.

Sous programme Linf:Calcul l'erreur entre la solution exacte et approchée en norme L^∞

Sous programme Relat:Calcul l'erreur entre la solution exacte et approchée en norme relative.

Ces sous programmes ont été enchainés au programme principal de la manière suivante:



Organigramme(4):Programme PRIN1 enchainé à SOLEXA et ERROR

3.1.1 Exemples d'applications du programme PRIN1

Exemple 1 Soit à minimiser la fonctionnelle suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \frac{1}{2} \int_0^4 u'^2(x) dx - 2 \int_0^4 u(x) dx \\ \text{sous la contrainte :} \\ \int_0^4 u(x) dx \leq -\frac{32}{3} \end{array} \right. \quad (P)$$

sachant que la solution analytique exacte est:

$$u(x) = x^2 - 4x$$

Pour un maillage fixé (nombre de noeuds total égal à 60), la table (1) et les trois graphes ci dessous [Figure(1) , Figure(2), Figure(3)] représentent la valeur de la fonction en chaque itération , l'erreur en normes (L^1 , L^2 , L^∞ ,relative) entre deux itérations (deux multiplicateurs de Lagrange), ainsi que le multiplicateur de Lagrange associé.

I	mu	er1	er2	erinf	J(y)
1	0,5960	0,4040	0,1630	0,4040	-9,14
2	0,3550	0,2410	0,0580	0,2410	-10,1
3	0,2120	0,1430	0,0206	0,1430	-10,5
4	0,1260	0,0855	0,0073	0,0855	-10,6
5	0,0754	0,0510	0,0026	0,0510	-10,6
6	0,0450	0,0304	9,23E-4	0,0304	-10,7
7	0,0269	0,0181	3,28E-4	0,0181	-10,7
8	0,0161	0,0108	1,16E-4	0,0108	-10,7
9	0,0097	0,0064	4,13E-5	0,0064	-10,7

I : le numéro de l'itération
 er1 : l'erreur en norme L1
 er2 : l'erreur en norme L2
 erinf : l'erreur en norme Linf
 J(y) : la valeur de la fonction en chaque itération
 mu : le multiplicateur de Lagrange associé en chaque itération

Table (1)

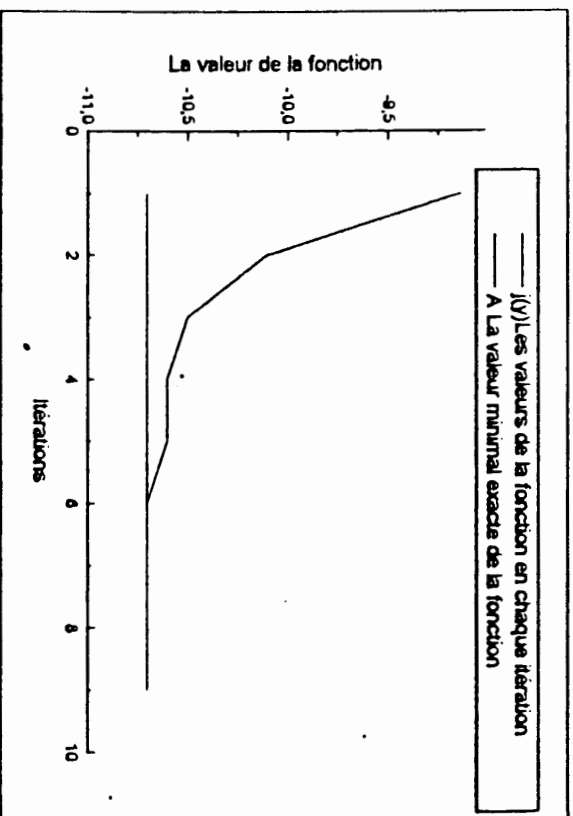
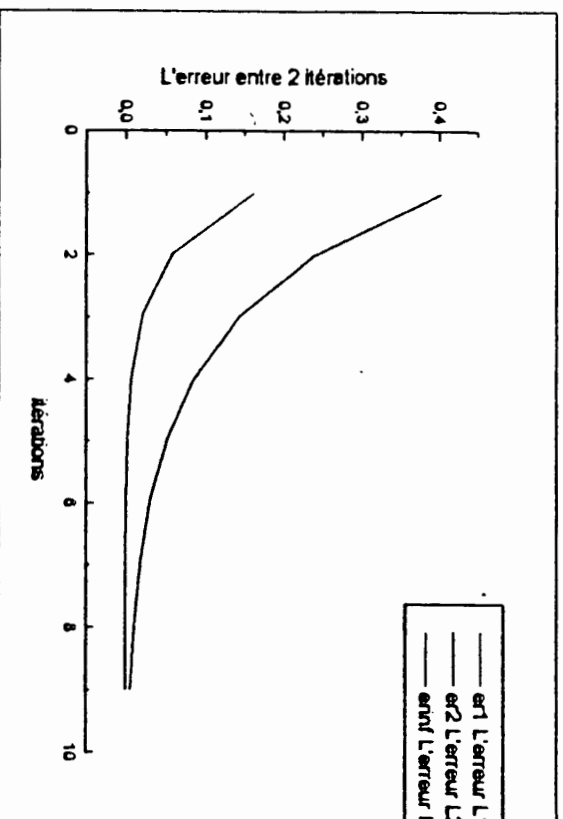
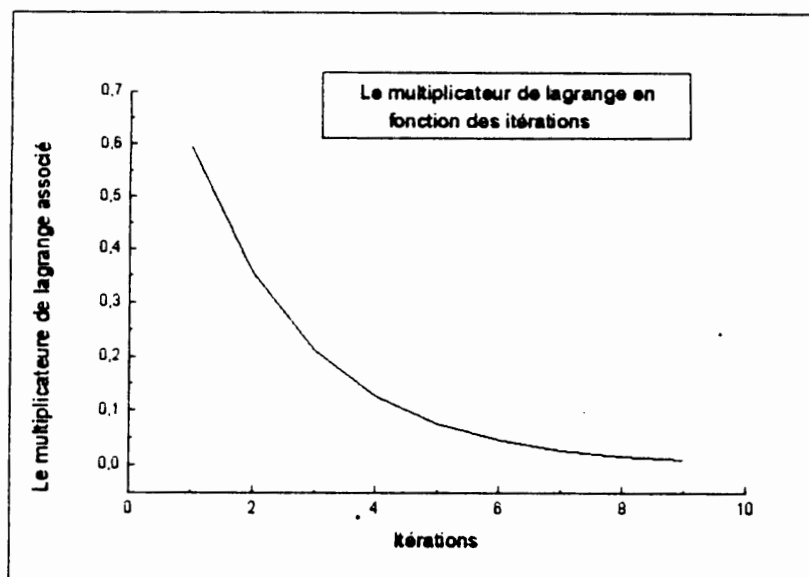


Figure (1)



Figure(2)



Figure(3)

D'après les résultats numériques obtenus par le programme **PRIN1** enchainé aux sous programmes **SOLEXA** et **ERROR**, la solution approchée (calculée par le programme **PRIN1**) est très proche de la solution exacte (calculée par le sous programme **SOLEXA**) par exemple pour un maillage fixé (nombre de noeuds total $nnt = 60$), on a les résultats suivants:

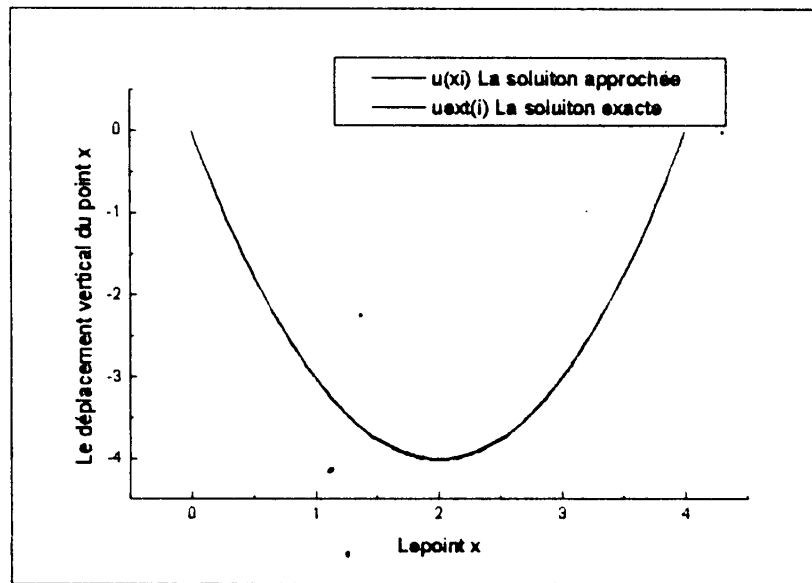
La table (2) et les deux graphes ci dessous [Figure(4) , Figure(5)] représentent le déplacement exacte et approché en chaque noeud ainsi que la différence entre les deux déplacement.

i	x1	x2(i)	uext(i)	x3(i)	uext(i)
1	.000D+00	.000D+00	.000D+00	.000D+00	.000D+00
2	.678D-01	-.268D+00	-.267D+00	-.167D-02	
3	.136D+00	-.527D+00	-.524D+00	-.328D-02	
4	.203D+00	-.777D+00	-.772D+00	-.483D-02	
5	.271D+00	-.102D+01	-.101D+01	-.633D-02	
6	.339D+00	-.125D+01	-.124D+01	-.777D-02	
8	.475D+00	-.168D+01	-.167D+01	-.105D-01	
9	.542D+00	-.189D+01	-.188D+01	-.117D-01	
10	.610D+00	-.208D+01	-.207D+01	-.129D-01	
12	.746D+00	-.244D+01	-.243D+01	-.152D-01	
13	.814D+00	-.261D+01	-.259D+01	-.162D-01	
14	.881D+00	-.277D+01	-.275D+01	-.172D-01	
15	.949D+00	-.291D+01	-.290D+01	-.181D-01	
16	.102D+01	-.305D+01	-.303D+01	-.190D-01	
8	.115D+01	-.330D+01	-.328D+01	-.205D-01	
19	.122D+01	-.341D+01	-.339D+01	-.212D-01	
20	.129D+01	-.352D+01	-.349D+01	-.219D-01	
21	.136D+01	-.361D+01	-.359D+01	-.224D-01	
22	.142D+01	-.369D+01	-.367D+01	-.230D-01	
23	.149D+01	-.376D+01	-.374D+01	-.234D-01	
24	.156D+01	-.383D+01	-.381D+01	-.238D-01	
26	.169D+01	-.393D+01	-.391D+01	-.244D-01	
27	.176D+01	-.397D+01	-.394D+01	-.247D-01	
28	.183D+01	-.400D+01	-.397D+01	-.248D-01	
29	.190D+01	-.401D+01	-.399D+01	-.250D-01	
30	.197D+01	-.402D+01	-.400D+01	-.250D-01	
31	.203D+01	-.402D+01	-.400D+01	-.250D-01	
32	.210D+01	-.401D+01	-.399D+01	-.250D-01	
33	.217D+01	-.400D+01	-.397D+01	-.248D-01	
34	.224D+01	-.397D+01	-.394D+01	-.247D-01	
35	.231D+01	-.393D+01	-.391D+01	-.244D-01	
36	.237D+01	-.389D+01	-.386D+01	-.242D-01	
37	.244D+01	-.383D+01	-.381D+01	-.238D-01	
38	.251D+01	-.376D+01	-.374D+01	-.234D-01	
39	.258D+01	-.369D+01	-.367D+01	-.230D-01	
40	.264D+01	-.361D+01	-.359D+01	-.224D-01	
41	.271D+01	-.352D+01	-.349D+01	-.219D-01	
42	.278D+01	-.341D+01	-.339D+01	-.212D-01	
43	.285D+01	-.330D+01	-.328D+01	-.205D-01	
44	.292D+01	-.318D+01	-.316D+01	-.198D-01	
45	.298D+01	-.305D+01	-.303D+01	-.190D-01	
46	.305D+01	-.291D+01	-.290D+01	-.181D-01	
48	.319D+01	-.261D+01	-.259D+01	-.162D-01	
49	.325D+01	-.244D+01	-.243D+01	-.152D-01	
50	.332D+01	-.227D+01	-.225D+01	-.141D-01	
51	.339D+01	-.208D+01	-.207D+01	-.129D-01	
52	.346D+01	-.189D+01	-.188D+01	-.117D-01	
53	.353D+01	-.168D+01	-.167D+01	-.105D-01	
54	.359D+01	-.147D+01	-.146D+01	-.915D-02	
55	.366D+01	-.125D+01	-.124D+01	-.777D-02	
56	.373D+01	-.102D+01	-.101D+01	-.633D-02	
57	.380D+01	-.777D+00	-.772D+00	-.483D-02	
58	.386D+01	-.527D+00	-.524D+00	-.328D-02	
59	.393D+01	-.268D+00	-.267D+00	-.167D-02	
60	.400D+01	.000D+00	.000D+00	.000D+00	

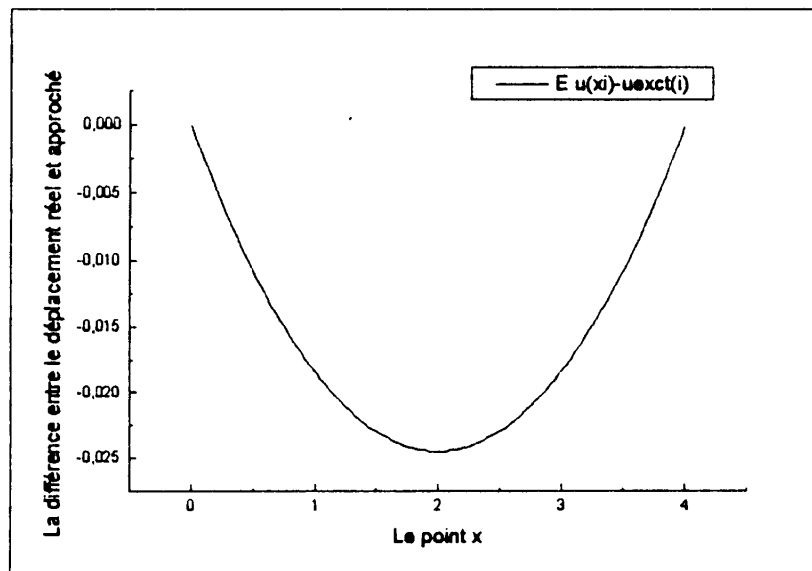
La solution exacte et approchée calculée aux
nœuds éléments finis

i : le numéro du nœud
xi : la coordonnées du nœud
u (i) : la solution approchée au nœud numéro i
uext(i) : la solution exacte au nœud i
u(i)-uext(i) : la différence entre la solution exacte
et la solution approchée

Table(2)



Figure(4): représente le déplacement réel et approché d'un point x



Figure(5)

La table (3) et les trois graphes ci dessous [Figure(6),Figure(7),Figure(8)] représentent l'erreur entre la solution exacte et approchée pour chaque maillage, le multiplicateur de Lagrange associé à chaque maillage en normes (L^1 , L^2 , L^∞ , *relative*), ainsi que la valeur de la fonction pour chaque maillage.

nnt	er1	er2	erinf	erlat1	mu	J(y)
10	.443D-01	.268D-02	.739D-01	.184D-01	.348D-01	-.105D+02
20	.223D-01	.633D-03	.353D-01	.876D-02	.151D-01	-.105D+02
30	.186D-01	.431D-03	.289D-01	.718D-02	.119D-01	-.106D+02
40	.174D-01	.372D-03	.267D-01	.664D-02	.108D-01	-.107D+02
50	.168D-01	.347D-03	.258D-01	.640D-02	.103D-01	-.107D+02
60	.165D-01	.334D-03	.252D-01	.627D-02	.101D-01	-.107D+02
70	.164D-01	.327D-03	.249D-01	.620D-02	.990D-02	-.107D+02
80	.163D-01	.322D-03	.247D-01	.615D-02	.980D-02	-.107D+02
90	.162D-01	.319D-03	.246D-01	.611D-02	.973D-02	-.107D+02
100	.162D-01	.317D-03	.245D-01	.609D-02	.968D-02	-.107D+02

L'erreur entre la solution exacte et approchée
Pour chaque maillage

nnt: nombre de nœuds total
er1: erreur en norme L^1
er2: erreur en norme L^2
erinf: erreur en norme L^∞ (Linf)
erlat1: erreur en norme Relative
mu: le multiplicateur de Lagrange associé
J(y): la valeur de la fonction pour chaque maillage

Table(3)

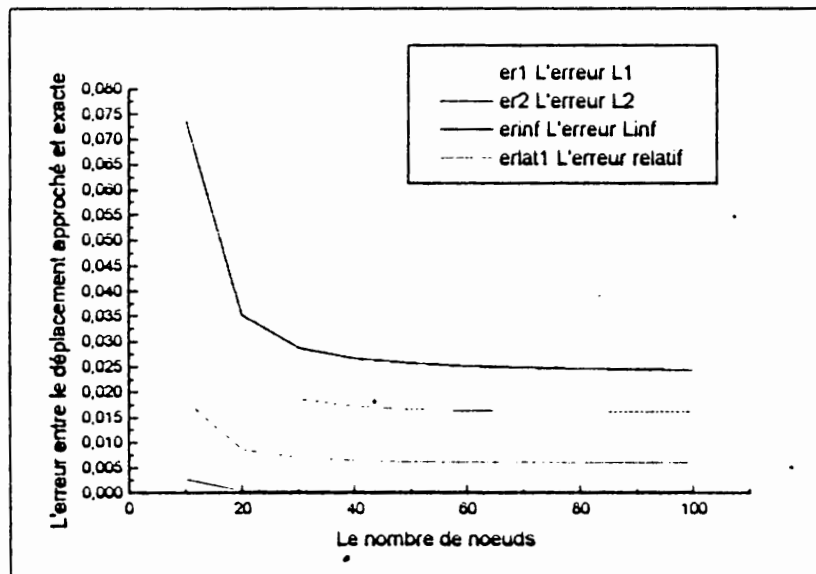
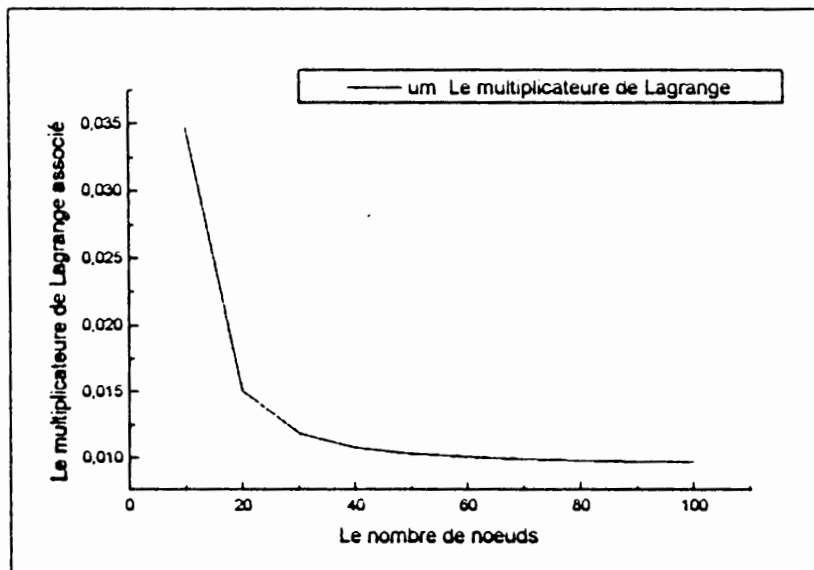


Figure (6)



Figure(7)

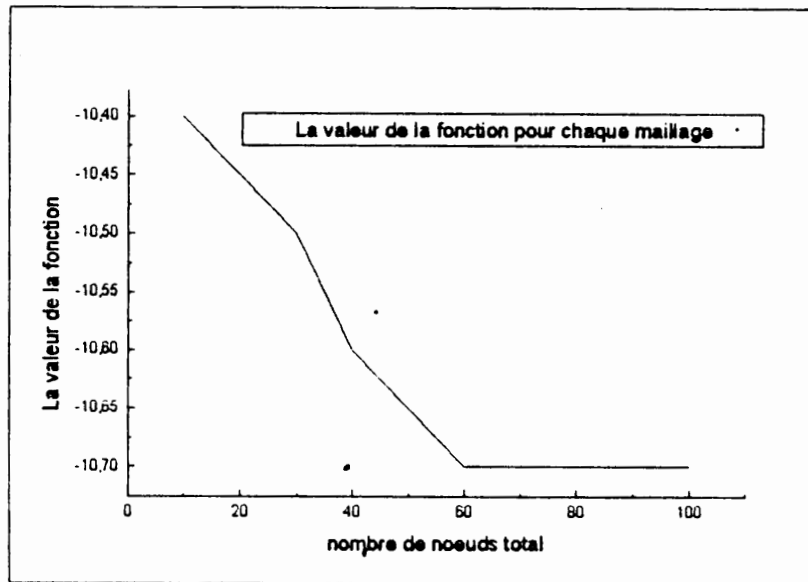


Figure (8)

3.2 Présentation du programme PRIN2:

Pour calculer numériquement les solutions de quelques problèmes rencontrés en mécanique des structures avec contraintes d'égalités en utilisant la méthode du Lagrangien augmenté décrite dans le chapitre précédent., Nous avons construit un programme **PRIN2** semblable au programme **PRIN1** (sauf au lieu d'appeler le sous programme **OPTI1** il fait appel au sous programme **OPTI2**).

OPTI2:(optimisation de la fonctionnelle obtenue avec contraintes linéaires)

Algorithme du sous programme OPTI2

Lecture des données: $(\Gamma, b, A, F, \rho, r, n_{max}, \varepsilon, \mu, y, j_{meth})$

Si $j_{meth} = 0$ alors

$r = 0$

Fin Si

- calcul de $\Gamma_r = \Gamma + rAA^t$

- calcul de $b_r = b + rAF$

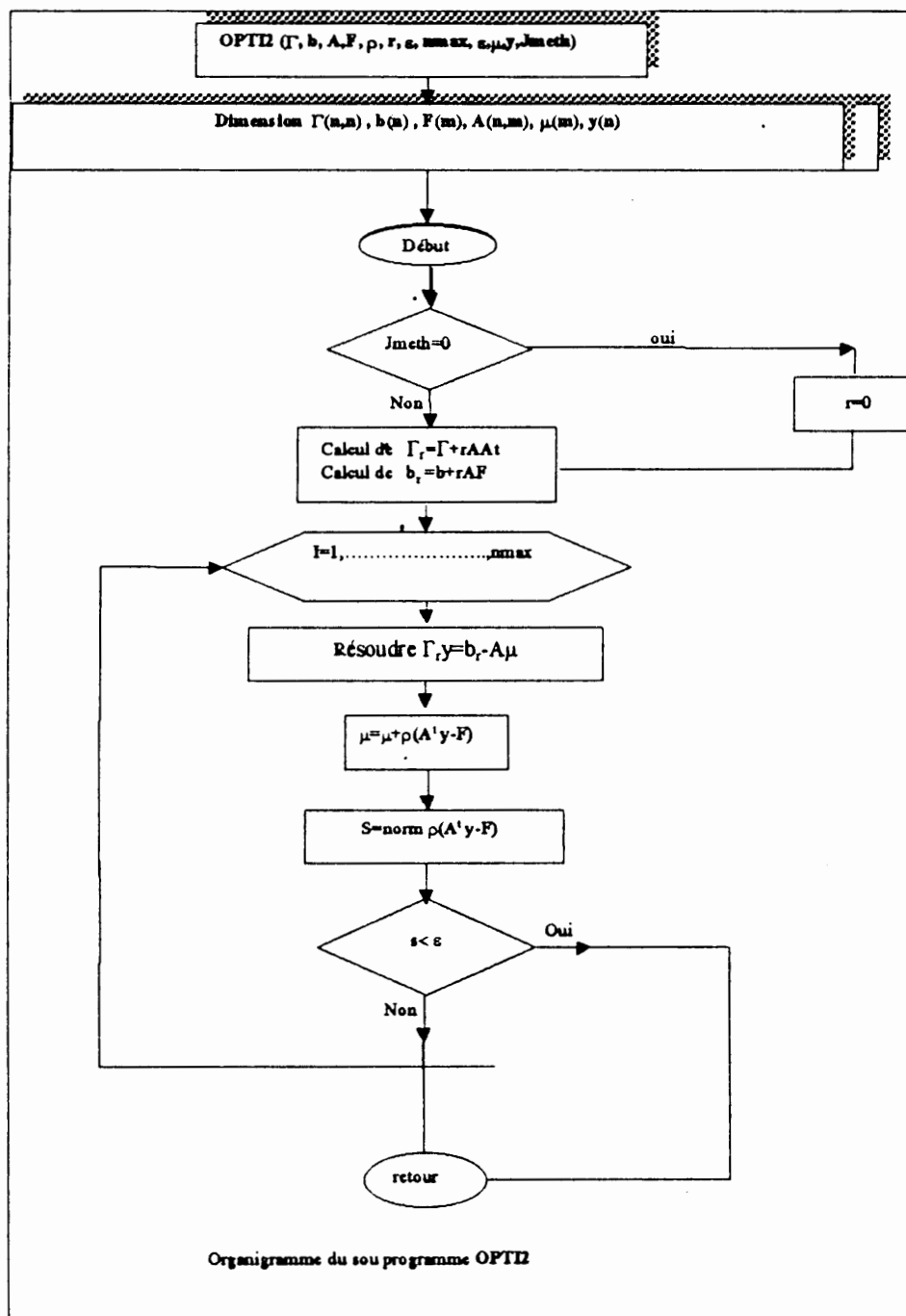
Pour $j = 1, \dots, n_{max}$

```

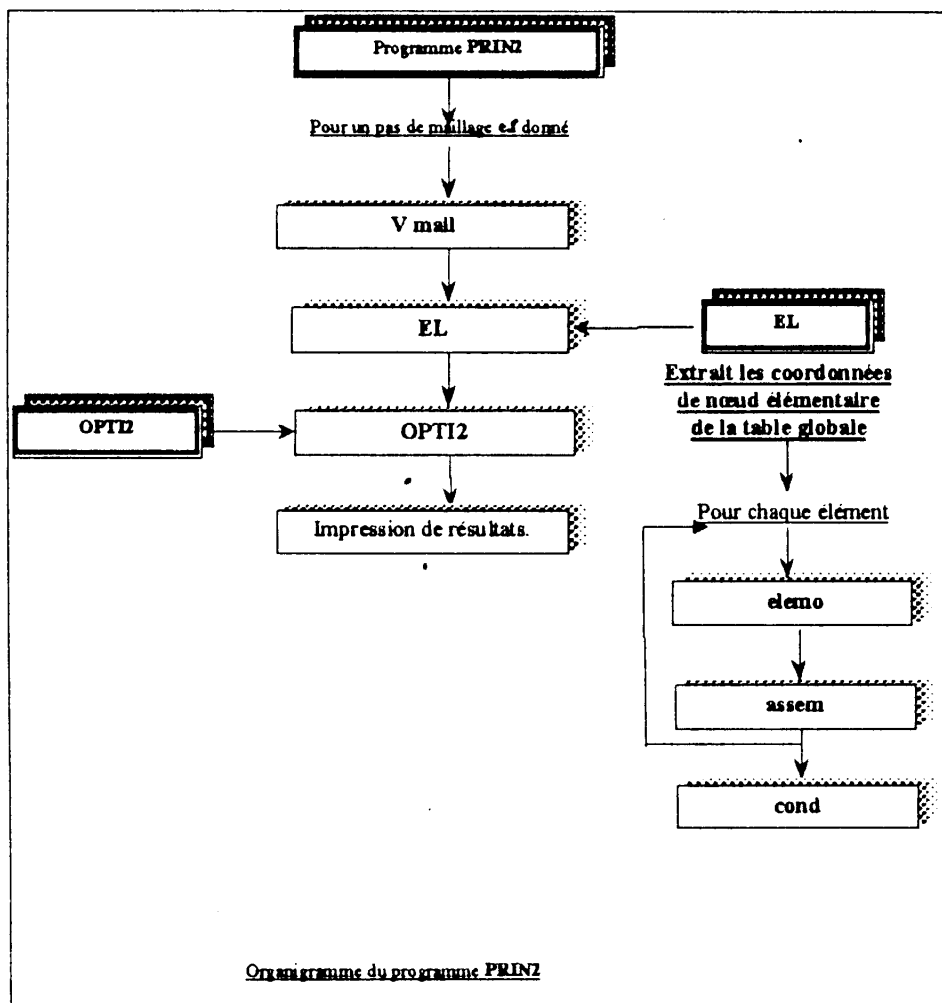
Résoudre  $\Gamma_r y = b_r - A\mu$ 
 $\mu = \mu + \rho(A^t y - F)$ 
calcul de  $\rho \|A^t y - F\|$ 
Si  $\rho \|A^t y - F\| < \varepsilon$  alors
     $(y, \mu)$  solution
    retour
Fin Si
Fin Pour
 $(y_n, \mu_n)$  divergeante
Ecrire (Algorithme divergeant)
Retour.

```

Remarque 18 *On affecte la valeur zéro à la variable jmeth si on veut utiliser le Lagrangien et la valeur un si on veut utiliser le Lagrangien augmenté.*

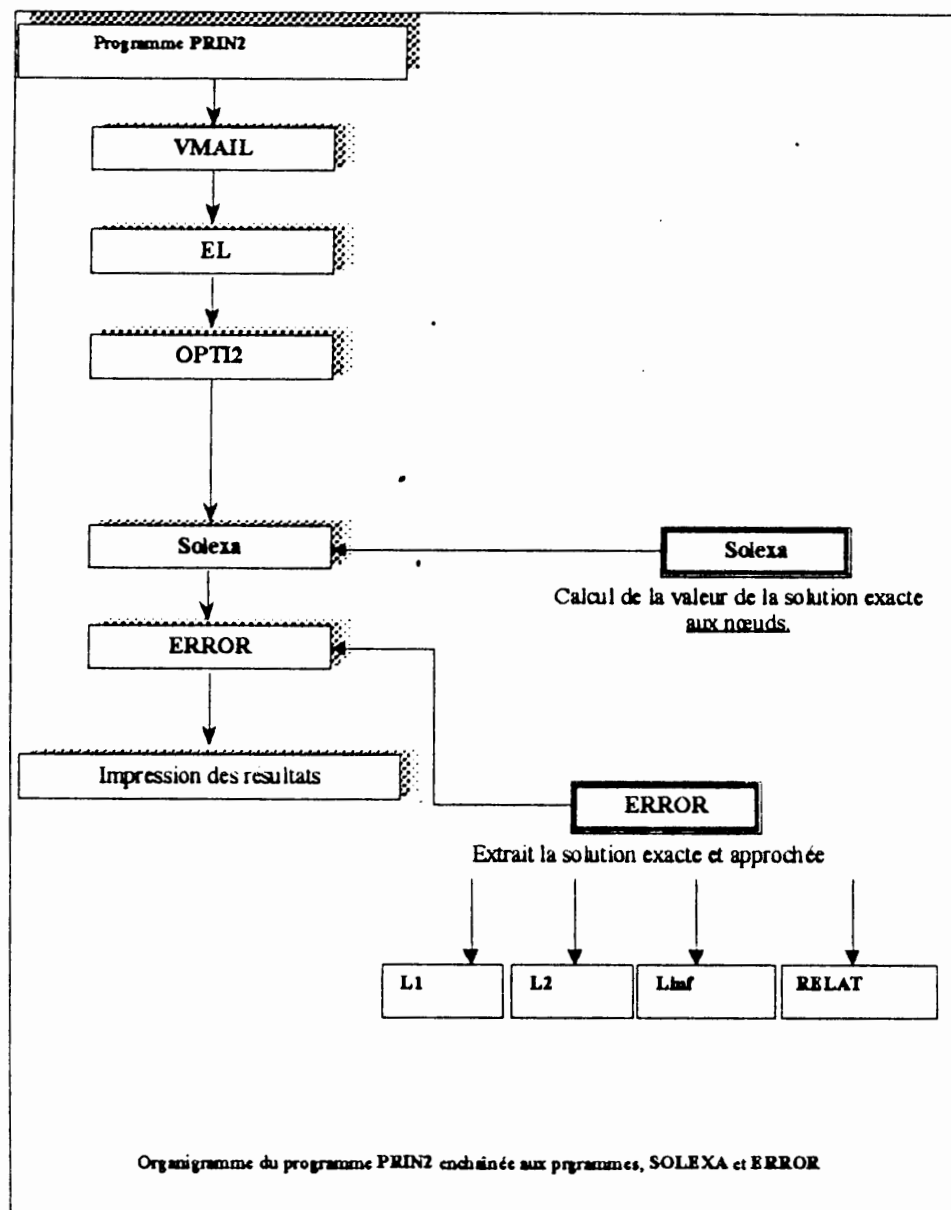


Organigramme (5)



Organigramme(6): Sous programme PRIN2

Remarque 19 Le programme *PRIN2* peut être lui aussi enchainé au deux sous programmes *SOLEXA* et *ERROR* de la manière suivante:



Organigramme(7): Programme *PRIN2* enchainé à *SOLEXA* et *ERROR*

3.2.1 Exemples d'applications du programme PRIN2

Exemple 2 Soit à minimiser la fonctionnelle suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \frac{1}{2} \int_0^4 u'^2(x) dx - 2 \int_0^4 u(x) dx \\ \text{sous la contrainte :} \\ \int_0^4 u(x) dx = -\frac{32}{3} \end{array} \right. \quad ((P))$$

sachant que la solution analytique exacte est:

$$u(x) = x^2 - 4x$$

1) EN UTILISANT LE LAGRANGIEN (JMETHOD=0)

Les résultats numériques obtenus par le programme **PRIN2**:

La table(4) et les deux graphes ci dessous [Figure(9),Figure(10)] représentent la valeur de la fonction en chaque itération ainsi que l'erreur entre deux itérations (entre deux multiplicateurs de Lagrange) en normes: (L^1 , L^2 , L^∞ , **relative**).et cela pour un nombre de noeuds total égal à 60.

i	er1	er2	erinf	alfa	J(y)
1	.533D+00	.284D+00	.533D+00	.533D+00	-.800D+01
2	.249D+00	.619D-01	.249D+00	.467D+00	-.101D+02
3	.116D+00	.135D-01	.116D+00	.467D+00	-.105D+02
4	.542D-01	.294D-02	.542D-01	.467D+00	-.106D+02
5	.253D-01	.641D-03	.253D-01	.467D+00	-.107D+02
6	.118D-01	.140D-03	.118D-01	.467D+00	-.107D+02
7	.552D-02	.304D-04	.552D-02	.467D+00	-.107D+02

L'erreur entre deux itérations (multip. De lagr.)
J(y): la valeur de la fonction en chaque itération

Er1: l'erreur en norme 1
Er2: l'erreur en norme 2
Erinf: l'erreur en norme inf
Er1at1: l'erreur en norme relative

Table(4)

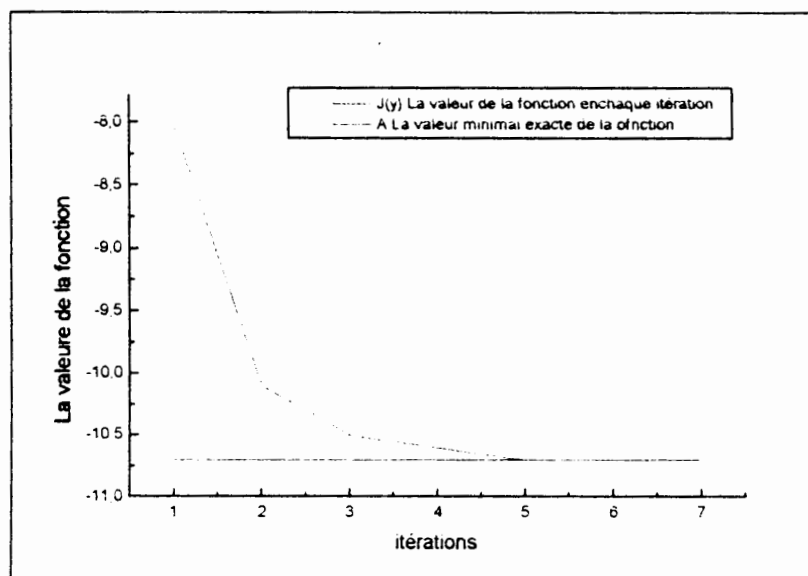
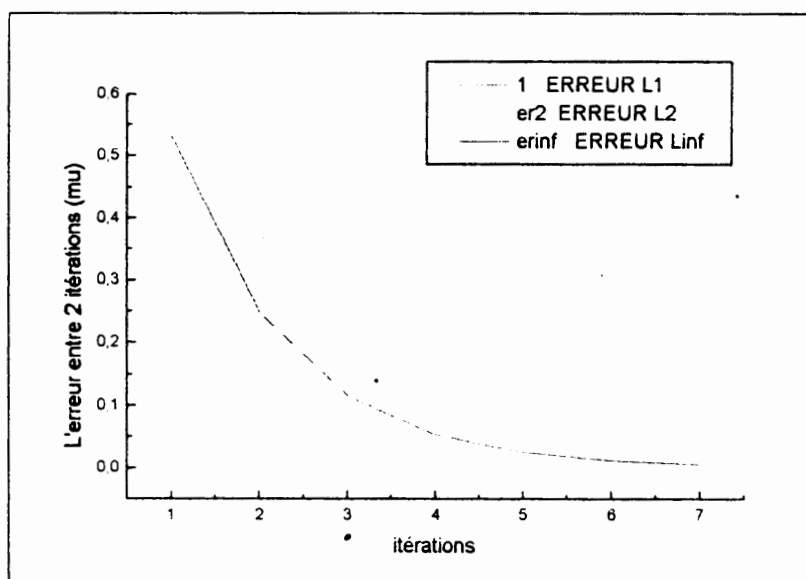


Figure (9)



Figure(10)

D'après les résultats numériques obtenus par le programme **PRIN2** enchainé au sous programmes **SOLEXA** et **ERROR**, la solution approchée (calculée par le programme **PRIN2**) est très proche de la solution exacte (calculée par le sous programme **SOLEXA**) aux noeuds éléments finis

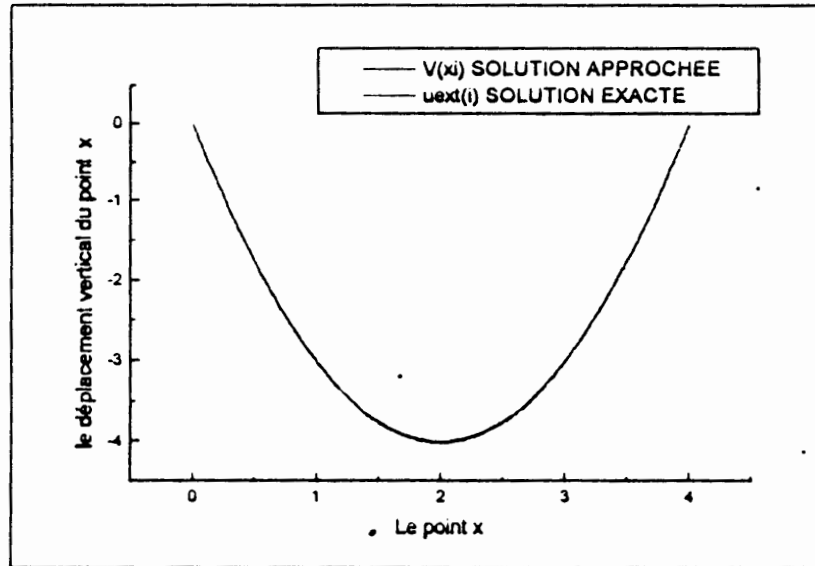
La table (5) et les deux graphes [Figure(11),Figure(12)] ci dessous représentent la solution exacte et la solution approchée en chaque noeud ainsi que la différence entre les deux solutions et cela pour nnt (nombre de noeuds total) égal à 60.

i	xi	u(xi)	uexact(i)	u(xi)-uexact(i)
1	.000D+00	.000D+00	.000D+00	.000D+00
2	.0781D+01	-.128E+01	-.1267E+01	-.144E-02
3	.1562D+01	-.256E+01	-.2534E+01	-.263D-02
4	.2343D+01	-.384E+01	-.3770E+01	-.417E-02
5	.3125D+01	-.512E+01	-.501E+01	-.548E-02
6	.3906D+01	-.640E+01	-.624E+01	-.678D-02
7	.4687D+01	-.768E+01	-.746E+01	-.789D-02
8	.5468D+01	-.896E+01	-.867E+01	-.903E-02
9	.6250D+01	-.1.024E+01	-.988E+01	-.1.01D-01
10	.7031D+01	-.1.152E+01	-.1.067D+01	-.1.11E-01
11	.7812D+01	-.1.280E+01	-.1.208E+01	-.1.22D-01
12	.8593D+01	-.1.408E+01	-.1.343E+01	-.1.31E-01
13	.9375D+01	-.1.536E+01	-.1.469E+01	-.1.40E-01
14	1.0156D+01	-.1.664E+01	-.1.576E+01	-.1.48E-01
15	1.0937D+01	-.1.792E+01	-.1.691E+01	-.1.56E-01
16	1.1718D+01	-.1.920E+01	-.1.808E+01	-.1.64E-01
17	1.2500D+01	-.2.048E+01	-.1.916E+01	-.1.71E-01
18	1.3281D+01	-.2.176E+01	-.2.026E+01	-.1.77E-01
19	1.4062D+01	-.2.304E+01	-.2.139E+01	-.1.83E-01
20	1.4843D+01	-.2.432E+01	-.2.255E+01	-.1.89E-01
21	1.5625D+01	-.2.560E+01	-.2.367E+01	-.1.95E-01
22	1.6406D+01	-.2.688E+01	-.2.474E+01	-.2.02E-01
23	1.7187D+01	-.2.816E+01	-.2.581E+01	-.2.08E-01
24	1.7968D+01	-.2.944E+01	-.2.681D+01	-.2.14E-01
25	1.8750D+01	-.3.072E+01	-.2.781E+01	-.2.20E-01
26	1.9531D+01	-.3.200E+01	-.2.881E+01	-.2.26E-01
27	2.0312D+01	-.3.328E+01	-.2.981E+01	-.2.32E-01
28	2.1093D+01	-.3.456E+01	-.3.081E+01	-.2.38E-01
29	2.1875D+01	-.3.584E+01	-.3.181E+01	-.2.44E-01
30	2.2656D+01	-.3.712E+01	-.3.281E+01	-.2.50E-01
31	2.3437D+01	-.3.840E+01	-.3.381E+01	-.2.56E-01
32	2.4218D+01	-.3.968E+01	-.3.481E+01	-.2.62E-01
33	2.5000D+01	-.4.096E+01	-.3.581E+01	-.2.68E-01
34	2.5781D+01	-.4.224E+01	-.3.681E+01	-.2.74E-01
35	2.6562D+01	-.4.352E+01	-.3.781E+01	-.2.80E-01
36	2.7343D+01	-.4.480E+01	-.3.881E+01	-.2.86E-01
37	2.8125D+01	-.4.608E+01	-.3.981E+01	-.2.92E-01
38	2.8906D+01	-.4.736E+01	-.4.081E+01	-.2.98E-01
39	2.9687D+01	-.4.864E+01	-.4.181E+01	-.3.04E-01
40	3.0468D+01	-.4.992E+01	-.4.281E+01	-.3.10E-01
41	3.1250D+01	-.5.120E+01	-.4.381E+01	-.3.16E-01
42	3.2031D+01	-.5.248E+01	-.4.481E+01	-.3.22E-01
43	3.2812D+01	-.5.376E+01	-.4.581E+01	-.3.28E-01
44	3.3593D+01	-.5.504E+01	-.4.681E+01	-.3.34E-01
45	3.4375D+01	-.5.632E+01	-.4.781E+01	-.3.40E-01
46	3.5156D+01	-.5.760E+01	-.4.881E+01	-.3.46E-01
47	3.5937D+01	-.5.888E+01	-.4.981E+01	-.3.52E-01
48	3.6718D+01	-.6.016E+01	-.5.081E+01	-.3.58E-01
49	3.7500D+01	-.6.144E+01	-.5.181E+01	-.3.64E-01
50	3.8281D+01	-.6.272E+01	-.5.281E+01	-.3.70E-01
51	3.9062D+01	-.6.400E+01	-.5.381E+01	-.3.76E-01
52	3.9843D+01	-.6.528E+01	-.5.481E+01	-.3.82E-01
53	4.0625D+01	-.6.656E+01	-.5.581E+01	-.3.88E-01
54	4.1406D+01	-.6.784E+01	-.5.681E+01	-.3.94E-01
55	4.2187D+01	-.6.912E+01	-.5.781E+01	-.4.00E-01
56	4.2968D+01	-.7.040E+01	-.5.881E+01	-.4.06E-01
57	4.3750D+01	-.7.168E+01	-.5.981E+01	-.4.12E-01
58	4.4531D+01	-.7.296E+01	-.6.081E+01	-.4.18E-01
59	4.5312D+01	-.7.424E+01	-.6.181E+01	-.4.24E-01
60	4.6093D+01	-.7.552E+01	-.6.281E+01	-.4.30E-01

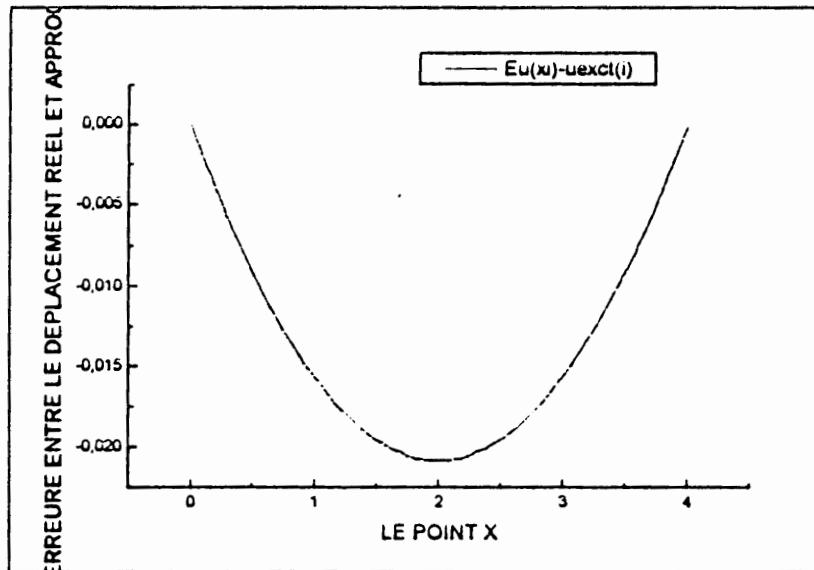
La solution exacte et approchée aux nœuds (élément finis)

i: le numéro du nœud
xi: la coordonnées du nœud
u(xi): la solution approchée au nœud numéro i
uexact(i) la solution exacte au nœud
u(xi)-uexact(i) la différence entre la solution exacte
et la solution approchée

Table(5)



Figure(11)



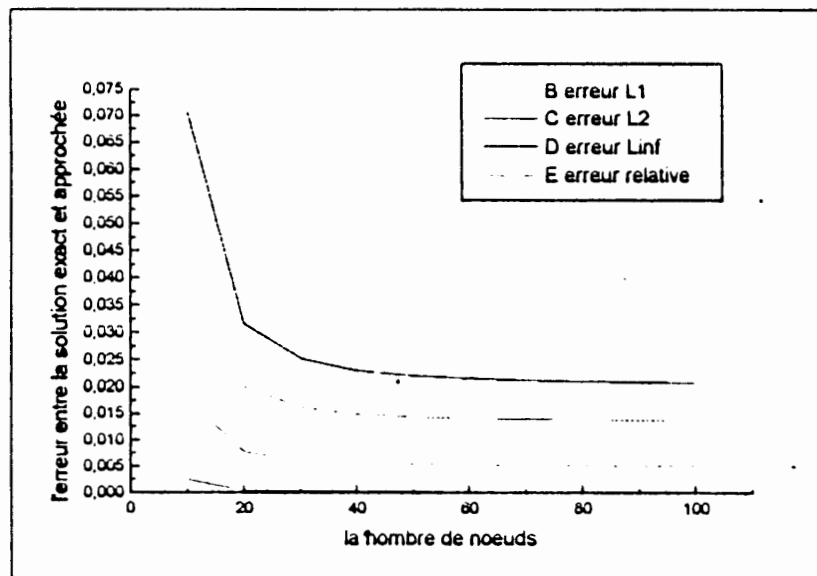
Figure(12)

La table (6) et les trois graphes [Figure(13),Figure(14),Figure(15)]ci dessous représentent l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée en normes (L^1 , L^2 , L^∞ , relative) et cela pour différents maillages (faire varier le nombre de noeuds total à chaque fois), le multiplicateur de Lagrange pour chaque maillage ainsi que la valeur de la fonction pour chaque maillage.

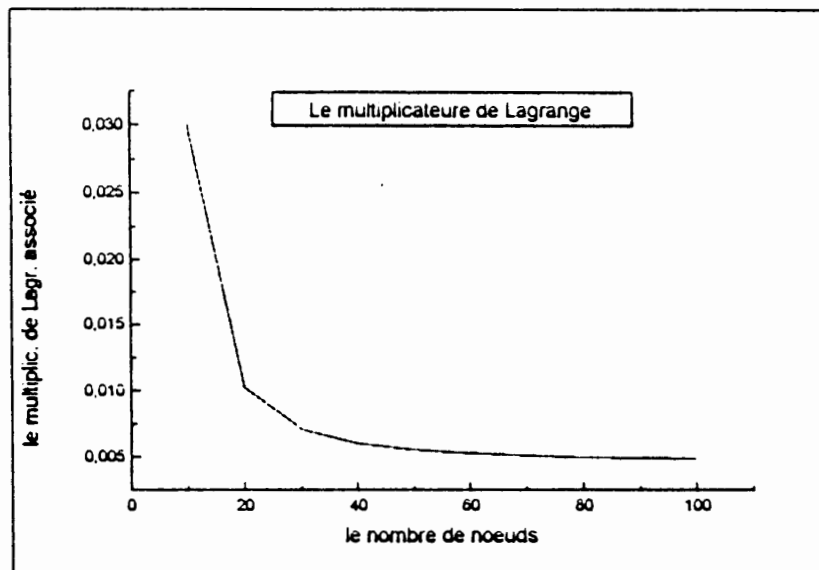
nnt	er1	er2	erinf	erlat1	muJ(y)
10	.425D-01	.246D-02	.708D-01	.176D-01	.301D-01
20	.201D-01	.512D-03	.317D-01	.789D-02	.103D-01
30	.163D-01	.330D-03	.253D-01	.628D-02	.711D-02
40	.150D-01	.278D-03	.231D-01	.574D-02	.603D-02
50	.144D-01	.256D-03	.221D-01	.550D-02	.554D-02
60	.141D-01	.244D-03	.216D-01	.537D-02	.528D-02
70	.140D-01	.238D-03	.213D-01	.529D-02	.512D-02
80	.139D-01	.234D-03	.211D-01	.524D-02	.502D-02
90	.138D-01	.231D-03	.209D-01	.520D-02	.495D-02
100	.137D-01	.229D-03	.208D-01	.518D-02	.490D-02

er1: erreur en norme L^1
er2: erreur en norme L^2
erinf: erreur en norme L^∞
erlat1: erreur en norme Relative
mu: le multiplicateur de Lagrange
J(y): La valeur de la fonction pour chaque maillage

Table(6)



Figure(13)



Figure(14)

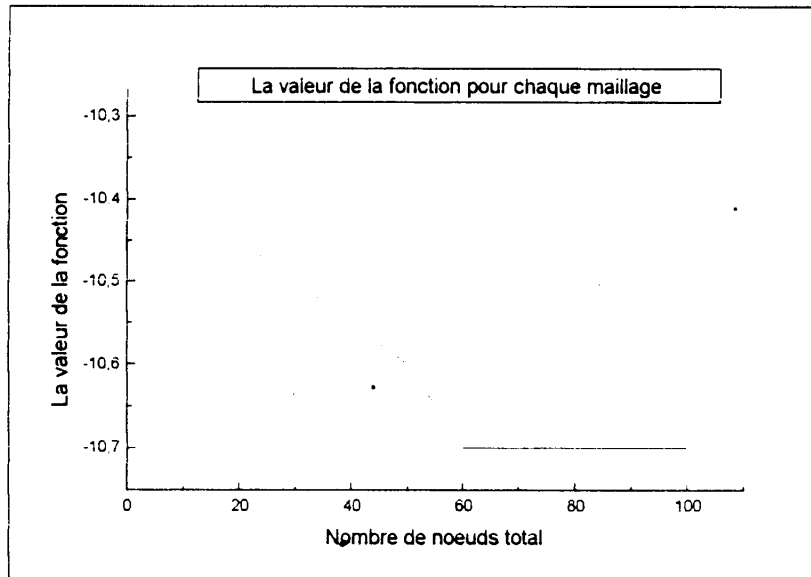


Figure (15)

2)EN UTILISANT LE LAGRANGIEN AUGMENTE (J_{METH}≠0)

Les résultats numériques obtenus par le programme **PRIN2**:

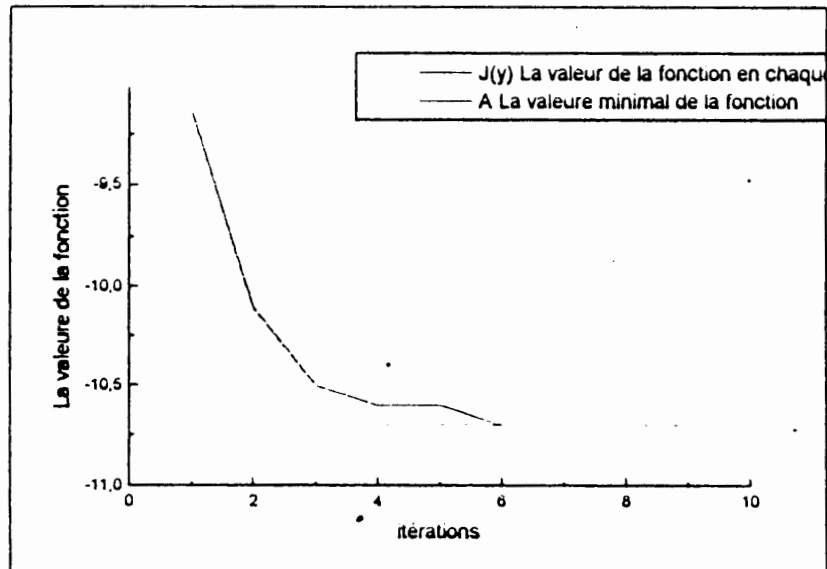
La table (7) et les deux graphes ci dessus [Figure(16),Figure(17)] ci dessous représentent la valeur de la fonction en chaque itération ainsi que l'erreur entre deux itérations (entre deux multiplicateurs de Lagrange) en normes:(L^1 , L^2 , L^∞ , **relative.**) et cela pour un nombre de noeuds total égal à 60.

i	er1	er2	erinf	alfa	J(y)
1	.404D+00	.163D+00	.404D+00	.404D+00	-.913D+01
2	.241D+00	.579D-01	.241D+00	.596D+00	-.101D+02
3	.143D+00	.206D-01	.143D+00	.596D+00	-.105D+02
4	.855D-01	.731D-02	.855D-01	.596D+00	-.106D+02
5	.510D-01	.260D-02	.510D-01	.596D+00	-.106D+02
6	.304D-01	.923D-03	.304D-01	.596D+00	-.107D+02
7	.181D-01	.328D-03	.181D-01	.596D+00	-.107D+02
8	.108D-01	.116D-03	.108D-01	.596D+00	-.107D+02
9	.643D-02	.414D-04	.643D-02	.596D+00	-.107D+02

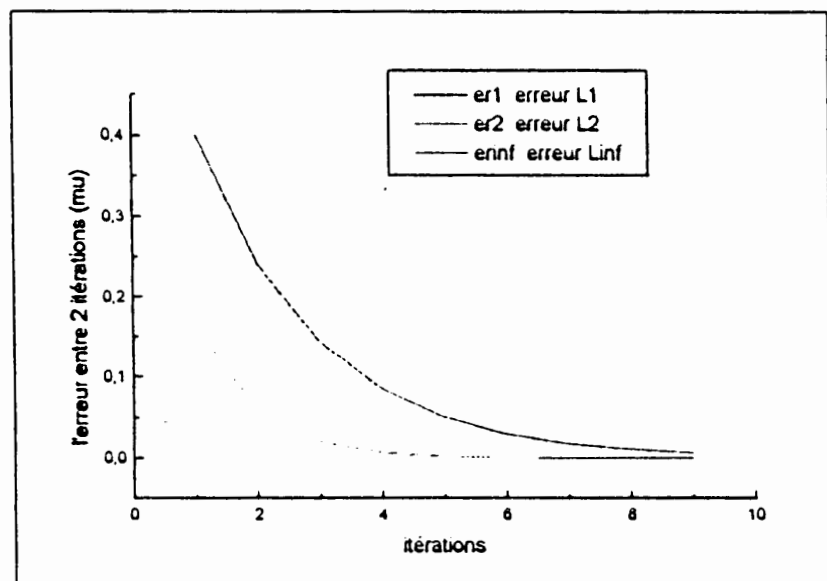
L'erreur entre deux itérations (M. J. D. Delagr.)
J(y): la valeur de la fonction en chaque itération

Er1: l'erreur en norme 1
Er2: l'erreur en norme 2
Erinf: l'erreur en norme inf
Errel: l'erreur en norme relative

Table (7)



Figure(16)

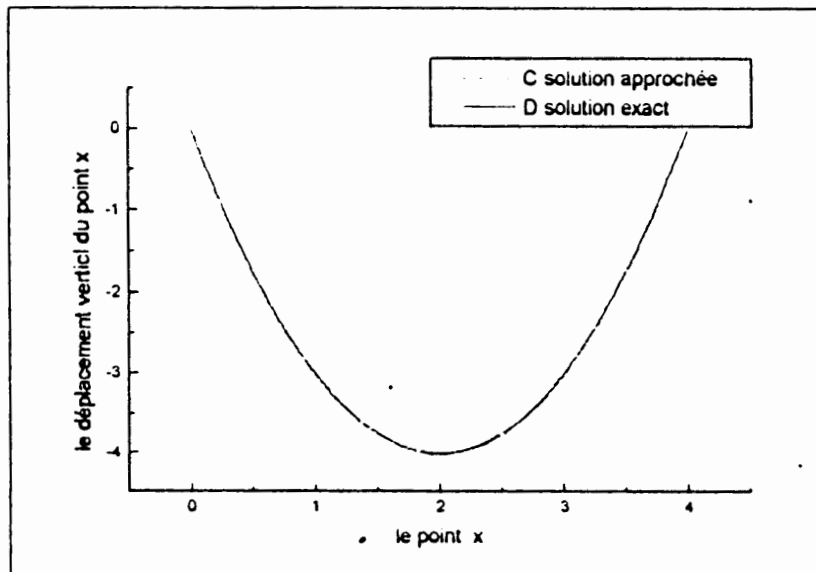


Figure(17)

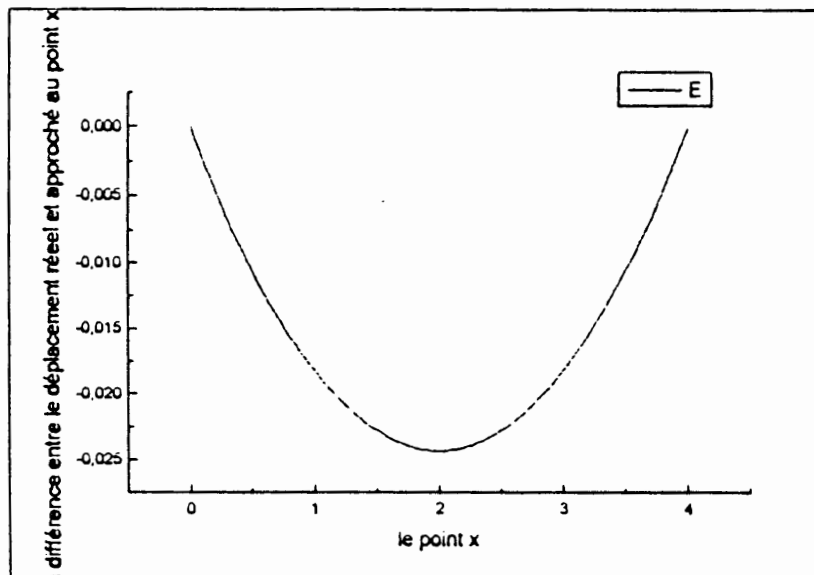
D'après les résultats numériques obtenus par le programme PRIN2 enchainé au sous programmes SOLEXA et ERROR, la solution approchée (calculée par le programme PRIN2) est très proche de la solution exacte (calculée par le sous programme SOLEXA) aux noeuds éléments finis

La table(8) et les deux graphes ci dessous [Figure(18),Figure(19)] représentent la

solution exacte et la solution approchée en chaque noeud ainsi que la différence entre les deux solutions et cela pour nnt (nombre de noeuds total) égal à 60.



Figure(18)



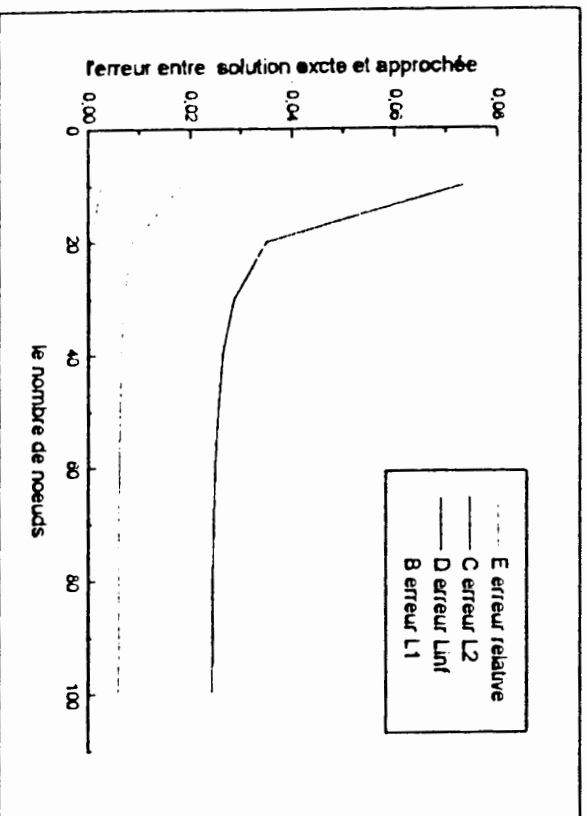
Figure(19)

La table (9) et les deux graphes [Figure(20),Figure(21),Figure(22)] ci dessous représentent l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée en normes (L^1 , L^2 , L^∞ , relative) et cela pour différents maillages (faire varier le nombre de noeuds total à chaque fois), ainsi que la valeur de la fonction pour chaque maillage.

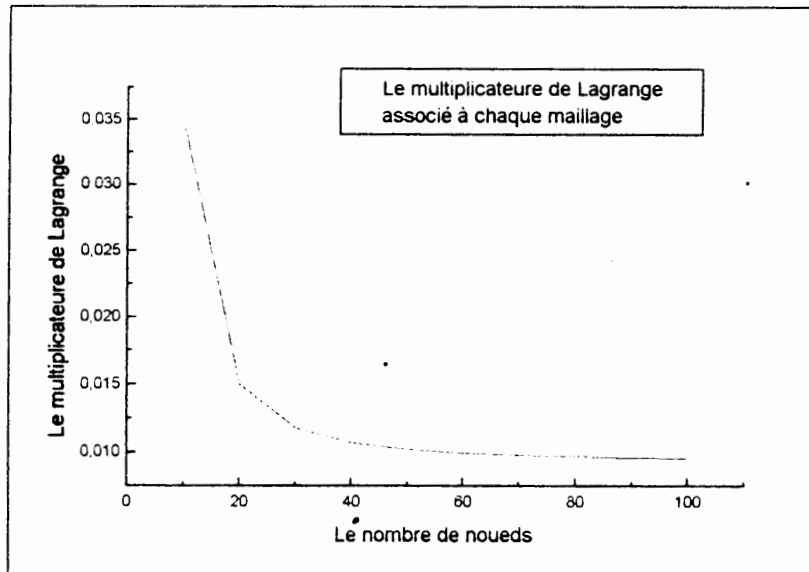
int	er1	er2	erinf	erinf1	int(y)
10	.442D-01	.267D-02	.736D-01	.183D-01	.347D-01 -10,40
20	.222D-01	.625D-03	.350D-01	.871D-02	.150D-01 -10,43
30	.183D-01	.424D-03	.287D-01	.712D-02	.118D-01 -10,50
40	.172D-01	.366D-03	.265D-01	.659D-02	.107D-01 -10,52
50	.167D-01	.341D-03	.255D-01	.635D-02	.102D-01 -10,60
60	.164D-01	.329D-03	.250D-01	.622D-02	.994D-02 -10,61
70	.162D-01	.321D-03	.247D-01	.614D-02	.978D-02 -10,7
80	.161D-01	.316D-03	.245D-01	.609D-02	.968D-02 -10,7
90	.161D-01	.313D-03	.244D-01	.606D-02	.961D-02 -10,7
100	.160D-01	.311D-03	.243D-01	.603D-02	.957D-02 -10,7

er1: erreur en norm1,
er2: erreur en norm2,
erinf: erreur en norm inf,
erinf1: erreur en norm inf relative
int(y) Le multiplicateur de Lagrange associé
J(y) La valeur de la fonction pour chaque maillage

Table (9)



Figure(20)



Figure(21)

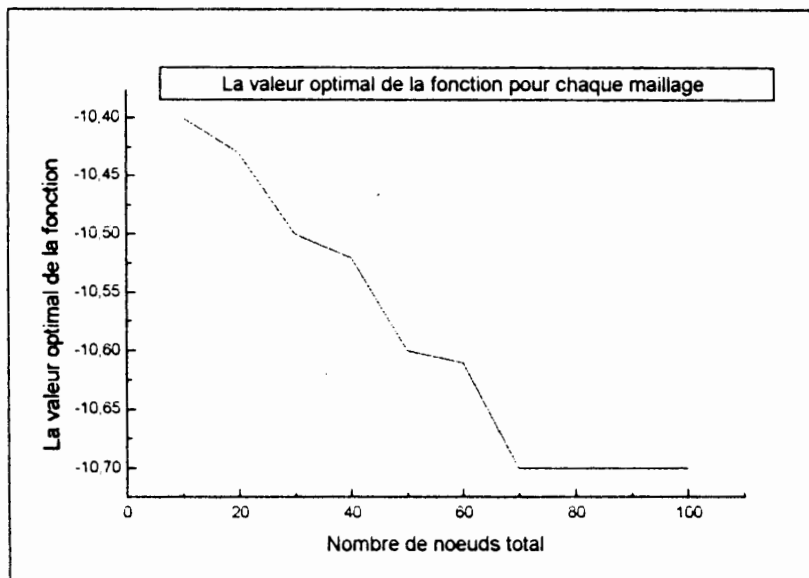


Figure (22)

3.3 Présentation du programme PRIN3:

Pour calculer numériquement les solutions de quelques problèmes rencontrés en mécanique des structures avec contraintes d'égalités en utilisant la méthode du **GRADIENT** décrite dans le chapitre précédent., Nous avons construit un programme **PRIN3**

semblable au programme PRIN1 (sauf au lieu d'appeler le sous programme OPT11;
il fait appel au sous programme GRAD.

Fonction du sous programme GRAD: optimisation de la fonctionnelle obtenue avec
contraintes linéaires par la méthode du gradient).

Algorithme du sous programme GRAD

Lecture des données: $(\Gamma, b, A, F, \rho, n_{\max}, \varepsilon, y)$

Pour $i = 1, \dots, n_{\max}$

$$y = y - \rho P_{Ker(A^t)}(\Gamma y - b)$$

-calcul de $\rho \|P_{Ker(A^t)}(\Gamma y - b)\|'$

Si $\|\rho(A^t y - F - q)\| < \varepsilon$ alors .

y solution

retour

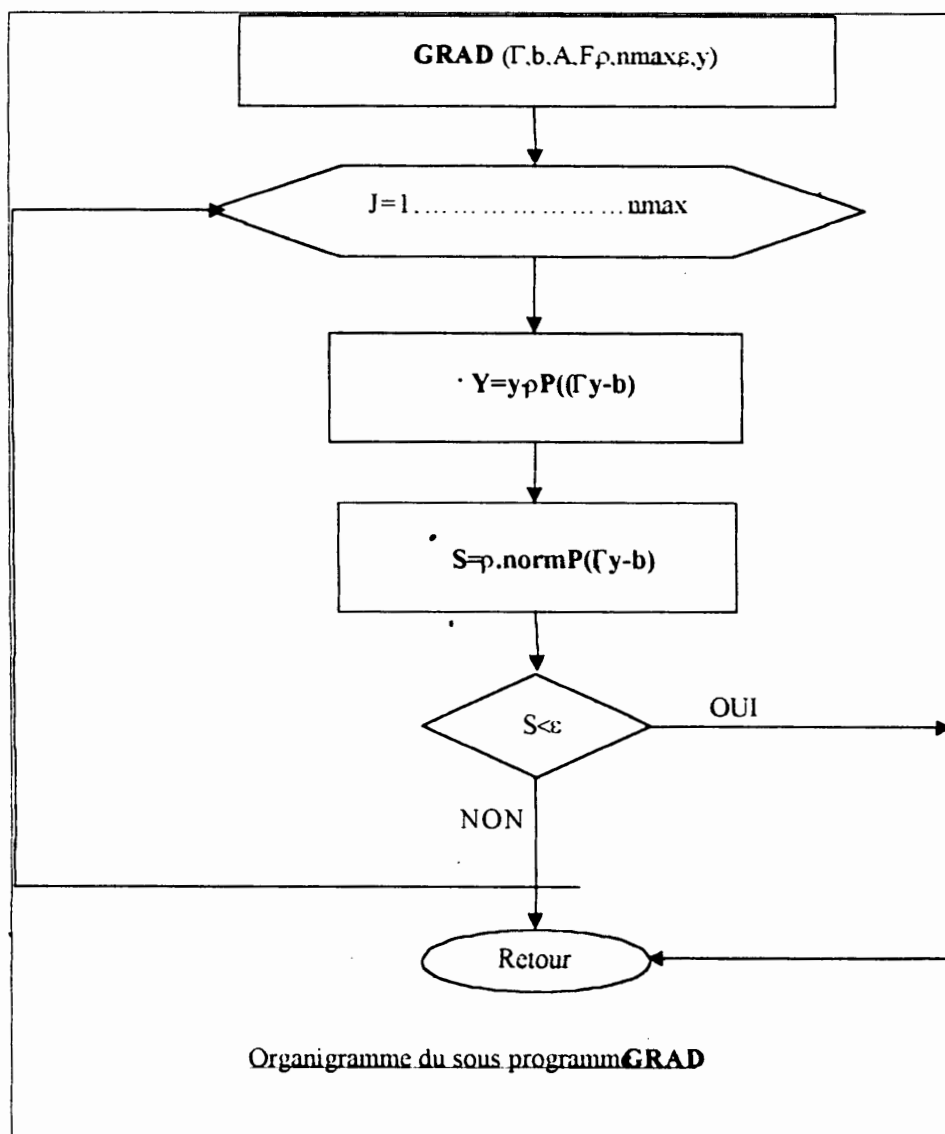
Fin Si

Fin Pour

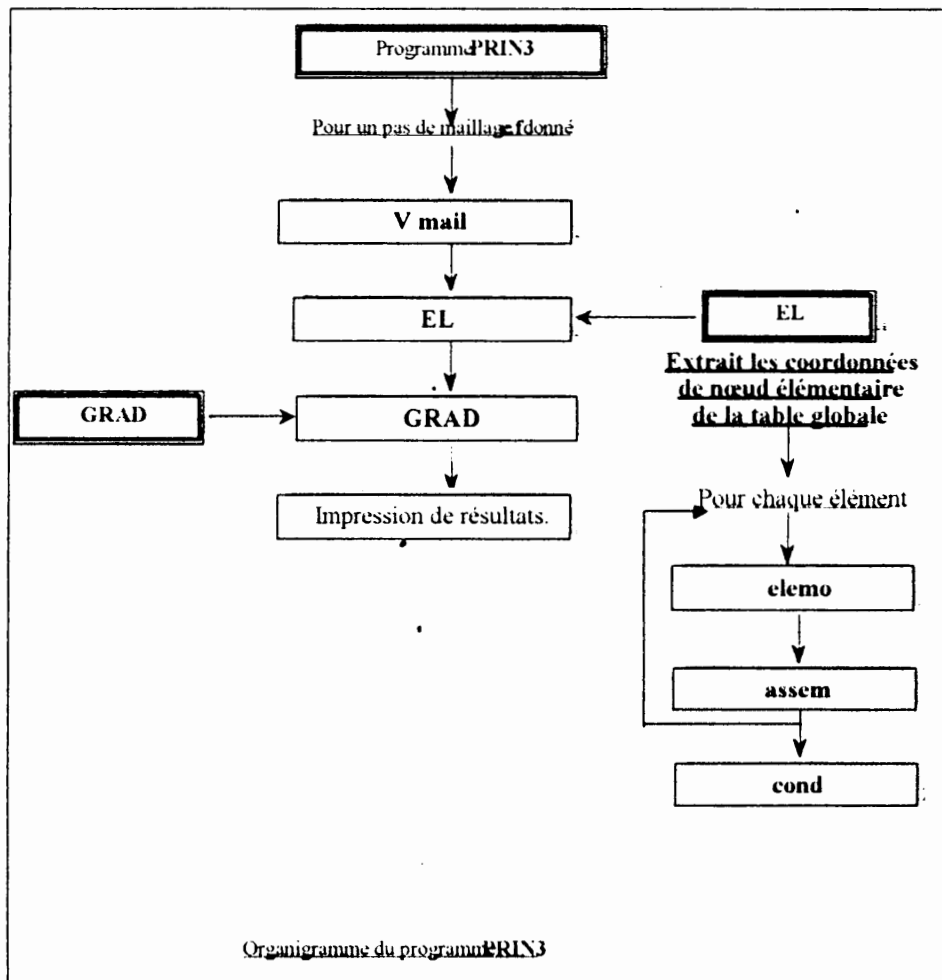
La suite (y_n) diverge

Ecrire (Algorithme divergeant)

Retour.

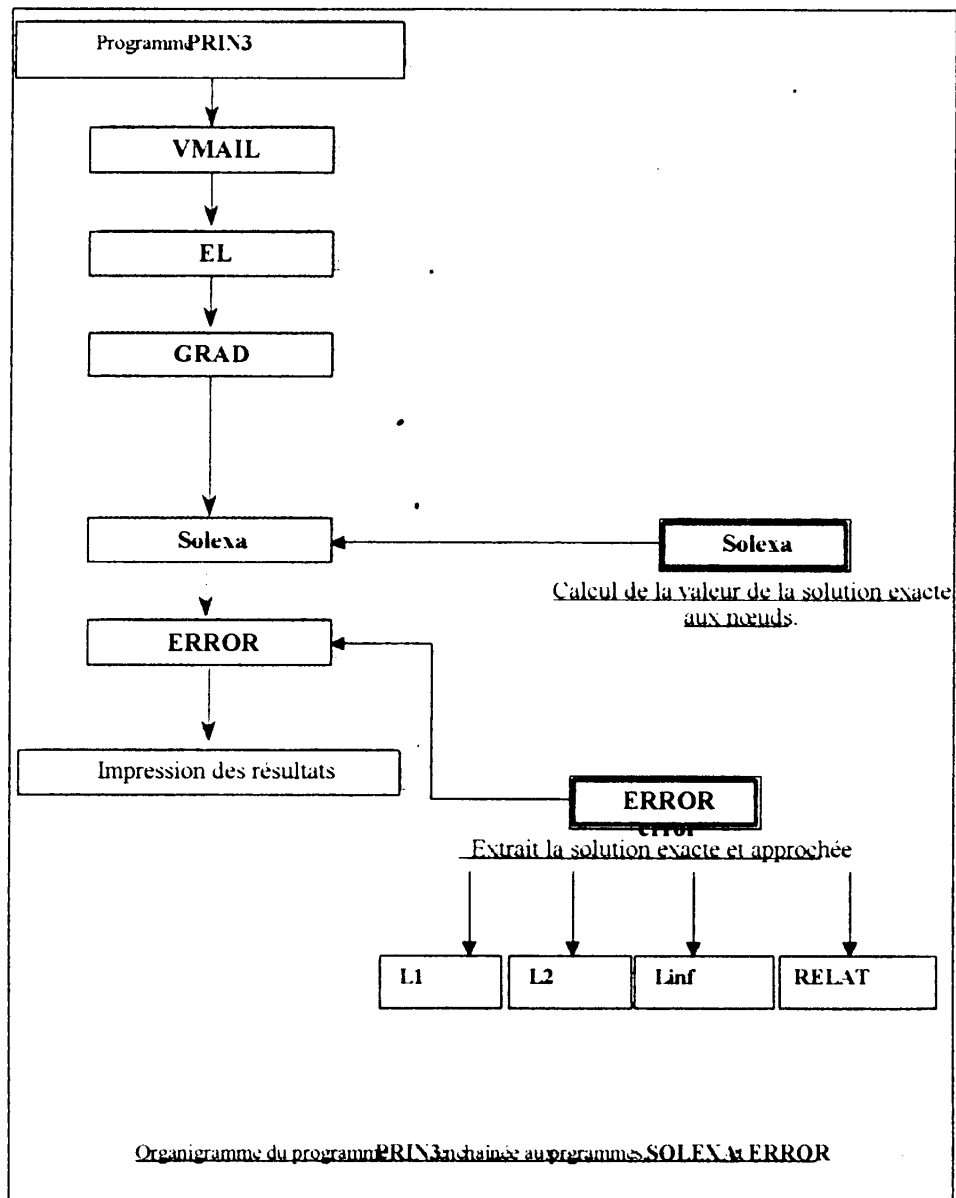


Organigramme(8): sous programme GRAD



Organigramme(9): Programme PRIN3

Remarque 20 Le programme **PRIN3** peut être lui aussi enchainé aux deux sous programmes **SOLEXA** et **ERROR** de la manière suivante:



Organigramme (10): Programme **PRIN3** enchainé à **SOLEXA** et **ERROR**

3.3.1 Exemples d'applications du programme PRIN3:

Exemple 3 Soit à minimiser la fonctionnelle suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \frac{1}{2} \int_0^4 u'^2(x) dx - 2 \int_0^4 u(x) dx \\ \text{sous la contrainte :} \\ \int_0^4 u(x) dx = -\frac{32}{3} \end{array} \right. \quad ((P))$$

sachant que la solution analytique exacte est:

$$u(x) = x^2 - 4x$$

D'après les résultats numériques obtenus par le programme **PRIN3** enchainé au sous programmes **SOLEXA** et **ERROR**, la solution approchée (calculée par le programme **PRIN3**) est très proche de la solution exacte (calculée par le sous programme **SOLEXA**) par exemple pour un maillage fixé (nombre de noeuds total nnt égal à 60), on a les résultats suivants:

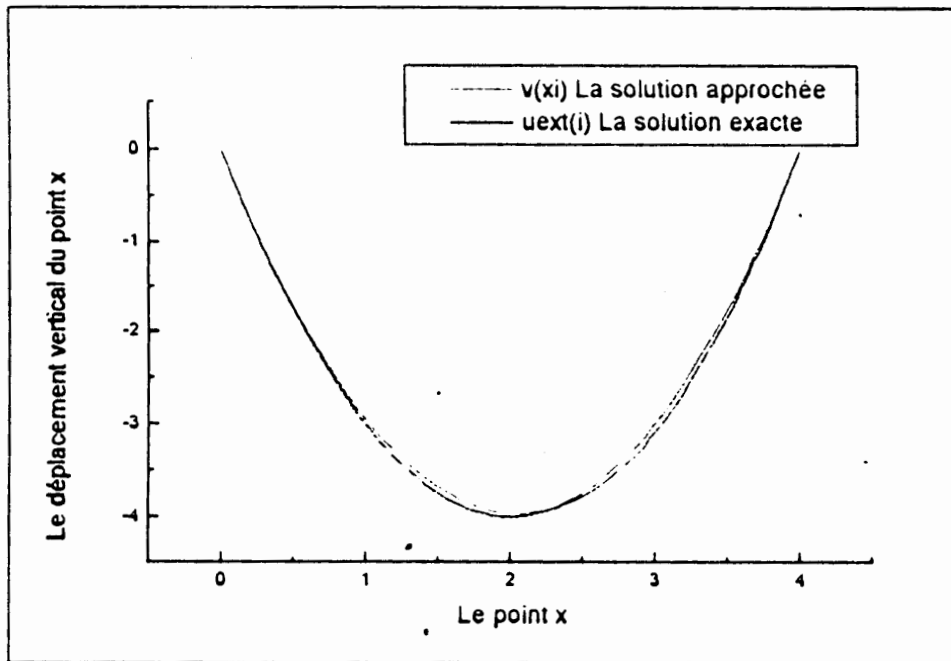
La table (10) et les deux graphes ci dessous [Figure(23),Figure(24)] représentent la solution exacte et la solution approchée en chaque noeud ainsi que la différence entre les deux solutions et cela Pour ρ fixé

i	X_i	$u(i)$	$u_{ext}(i)$	$u(i)-u_{ext}(i)$
1	.000D+00	.000D+00	.000D+00	.000D+00
2	.678D-01	-.264D+00	-.267D+00	.300D-02
3	.136D+00	-.518D+00	-.524D+00	.604D-02
4	.203D+00	-.763D+00	-.772D+00	.909D-02
5	.271D+00	-.999D+00	-.101D+01	.121D-01
6	.339D+00	-.123D+01	-.124D+01	.152D-01
8	.475D+00	-.165D+01	-.167D+01	.210D-01
9	.542D+00	-.185D+01	-.188D+01	.238D-01
10	.610D+00	-.204D+01	-.207D+01	.265D-01
11	.678D+00	-.222D+01	-.225D+01	.290D-01
13	.814D+00	-.256D+01	-.259D+01	.334D-01
14	.881D+00	-.271D+01	-.275D+01	.353D-01
15	.949D+00	-.286D+01	-.290D+01	.368D-01
16	.102D+01	-.300D+01	-.303D+01	.381D-01
17	.108D+01	-.312D+01	-.316D+01	.390D-01
18	.115D+01	-.324D+01	-.328D+01	.395D-01
19	.122D+01	-.335D+01	-.339D+01	.397D-01
20	.129D+01	-.345D+01	-.349D+01	.394D-01
22	.142D+01	-.363D+01	-.367D+01	.376D-01
23	.149D+01	-.371D+01	-.374D+01	.361D-01
24	.156D+01	-.377D+01	-.381D+01	.341D-01
25	.163D+01	-.383D+01	-.386D+01	.316D-01
26	.169D+01	-.388D+01	-.391D+01	.288D-01
27	.176D+01	-.392D+01	-.394D+01	.255D-01
28	.183D+01	-.395D+01	-.397D+01	.219D-01
29	.190D+01	-.397D+01	-.399D+01	.179D-01
30	.197D+01	-.399D+01	-.400D+01	.137D-01
31	.203D+01	-.399D+01	-.400D+01	.914D-02
32	.210D+01	-.399D+01	-.399D+01	.440D-02
33	.217D+01	-.397D+01	-.397D+01	-.484D-03
34	.224D+01	-.395D+01	-.394D+01	-.546D-02
35	.231D+01	-.392D+01	-.391D+01	-.105D-01
36	.237D+01	-.388D+01	-.386D+01	-.154D-01
38	.251D+01	-.377D+01	-.374D+01	-.249D-01
39	.258D+01	-.370D+01	-.367D+01	-.293D-01
40	.264D+01	-.362D+01	-.359D+01	-.334D-01
41	.271D+01	-.353D+01	-.349D+01	-.372D-01
42	.278D+01	-.343D+01	-.339D+01	-.404D-01
43	.285D+01	-.333D+01	-.328D+01	-.432D-01
44	.292D+01	-.321D+01	-.316D+01	-.455D-01
45	.298D+01	-.308D+01	-.303D+01	-.471D-01
47	.312D+01	-.280D+01	-.275D+01	-.485D-01
48	.319D+01	-.264D+01	-.259D+01	-.482D-01
49	.325D+01	-.247D+01	-.243D+01	-.472D-01
50	.332D+01	-.230D+01	-.225D+01	-.456D-01
51	.339D+01	-.211D+01	-.207D+01	-.433D-01
52	.346D+01	-.192D+01	-.188D+01	-.404D-01
53	.353D+01	-.171D+01	-.167D+01	-.368D-01
54	.359D+01	-.149D+01	-.146D+01	-.328D-01
55	.366D+01	-.127D+01	-.124D+01	-.282D-01
56	.373D+01	-.103D+01	-.101D+01	-.231D-01
57	.380D+01	-.790D+00	-.772D+00	-.177D-01
58	.386D+01	-.536D+00	-.524D+00	-.120D-01
59	.393D+01	-.273D+00	-.267D+00	-.607D-02
60	.400D+01	.000D+00	.000D+00	.000D+00

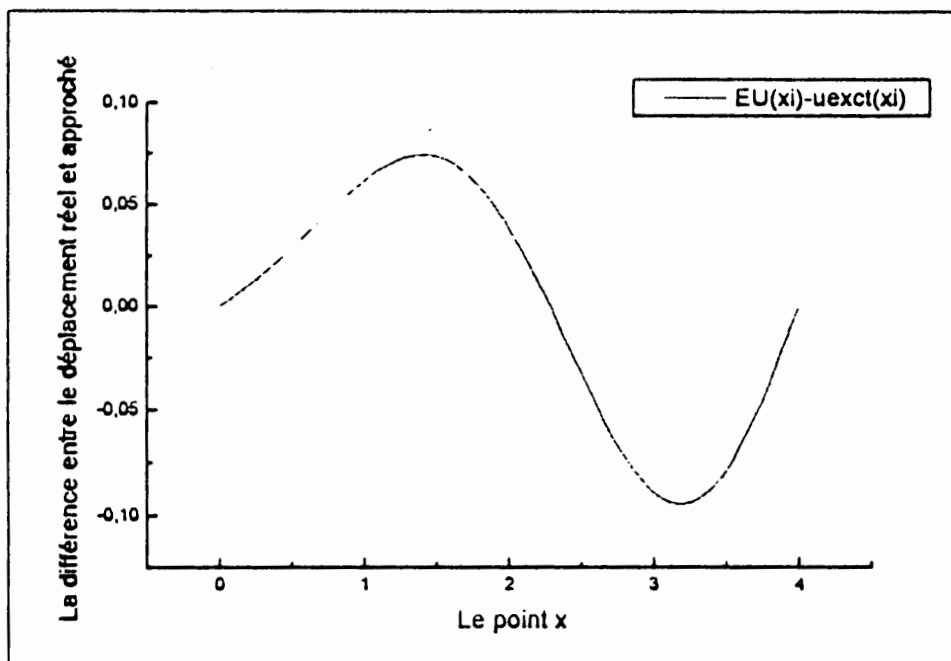
Figure: La solution exacte et approchée aux éléments finis

I : le nœud
 X_i : la coordonnée du nœud
 $u(i)$: la solution exacte au nœud i
 $u_{ext}(i)$: la solution approchée au nœud
 $u(i)-u_{ext}(i)$: la différence entre le déplacement réel et approchée

Table (10)



Figure(23)



Figure(24)

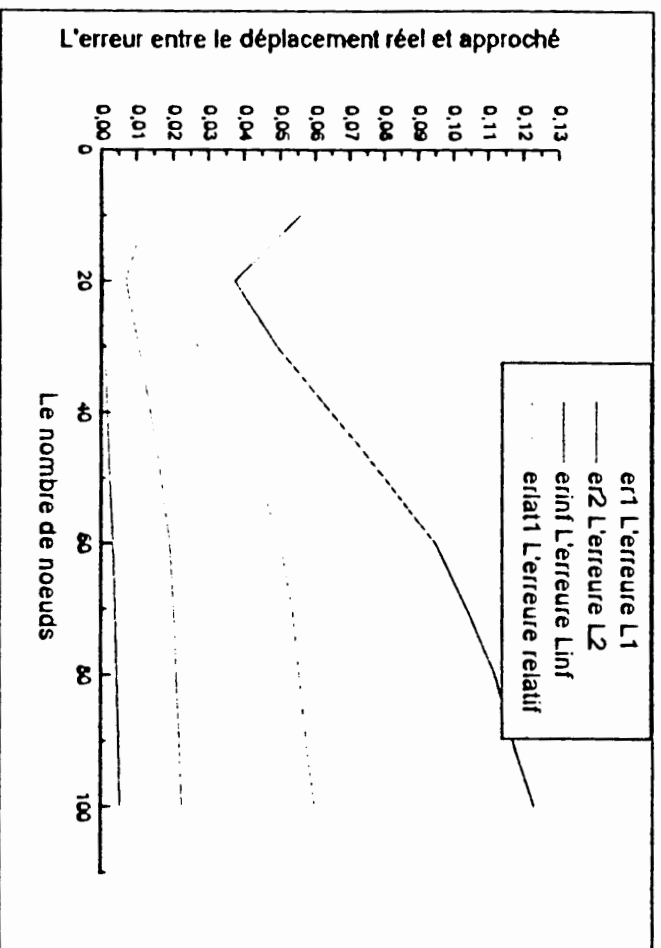
La table (11) et le graphe [Figure(25)] représente l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée en normes (L^1 , L^2 , L^∞ , relative) pour différents maillages.

nit	er1	er2	erinf	erlat1
10	.295D-01	.127D-02	.557D-01	.123D-01
20	.179D-01	.451D-03	.374D-01	.705D-02
30	.272D-01	.955D-03	.491D-01	.105D-01
40	.363D-01	.169D-02	.646D-01	.139D-01
50	.439D-01	.249D-02	.802D-01	.168D-01
60	.506D-01	.329D-02	.950D-01	.191D-01
70	.533D-01	.384D-02	.104D+00	.203D-01
80	.553D-01	.431D-02	.112D+00	.210D-01
90	.572D-01	.476D-02	.117D+00	.217D-01
100	.596D-01	.525D-02	.123D+00	.226D-01

L'erreur entre la solution exacte et la solution
approximée pour chaque maillage

Nit: nombre de nœuds total
Er1: l'erreur en norme L1
Er2: l'erreur en norme L2
Erinf: l'erreur en norme inf
Erlat1: l'erreur en norme relative

Table(11)



Figure(25)

Pour différent maillages; (faire varier le nombre de noeuds à chaque fois), Nous avons les résultats suivants (Pour ρ fixé($\rho=0.01$)

nombre de noeuds total	La valeur optimale de la fonction
10	-10.53291801711
20	-10.63500994057
30	-10.64911113369
40	-10.65964991001
50	-10.64867400060
60	-10.663600806
70	-10.664392055
80	-10.664717151

Remarque 21 : Une idée pour améliorer la convergence de l'algorithme est d'introduire des modifications sur cette méthode en faisant varier la valeur de ρ .

Dans ce but on a construit un sous programme **GRAD2** qui sera appelé par le programme **PRIN3** (au lieu d'appeler le sous programme **GRAD**)

Algorithme du sous programme GRAD2

Lecture des données: $(\Gamma, b, A, F, \rho, n_{\max}, \varepsilon, y)$

Pour $j = 1, \dots, m$

$$y_{old}(j) = y(j)$$

Fin Pour.

$$Q(y_{old}) = Q(y)$$

Pour $i = 1, \dots, n_{\max}$

calcul de $\|P_{Ker(A^t)}(\nabla Q(y))\|$

Si $\|P_{Ker(A^t)}(\nabla Q(y))\| < \varepsilon$ alors

y solution

Retour

Fin Si

Appel à RO

10 $y = y_{old} - \rho P_{Ker(A^t)}(\nabla Q(y))$
calcul $Q(y)$
Tant que $Q(y) > Q(y_{old})$ faire
 $\rho = \frac{\rho}{2}$
Allez à 10

Fin Tant que

Pour $j = 1, \dots, m$
 $y_{old}(j) = y(j)$
Fin Pour.

$Q(y_{old}) = Q(y)$
Fin Pour

Ecrire (Algorithme divergeant)

Retour.

Algorithme du sous programme RO

RO ($y, \nabla Q(y), P_{Ker(A^t)}(\nabla Q(y)), \varepsilon, Q(y)$)

Si $|Q(y)| < 0.5$ alors

$$\rho = \frac{1}{\langle \nabla Q(y), P_{Ker(A^t)}(\nabla Q(y)) \rangle}$$

sinon

$$\rho = \frac{0.05|Q(y)|}{\langle \nabla Q(y), P_{Ker(A^t)}(\nabla Q(y)) \rangle}$$

Finsi

Retour

Fin.

EXEMPLE D'APPLICATION:

En reprenant le même exemple précédent, On obtient le graphe ci dessous [Figure(26)] qui représente la décroissance des valeurs de la fonction en chaque itération (et cela pour un maillage fixé).

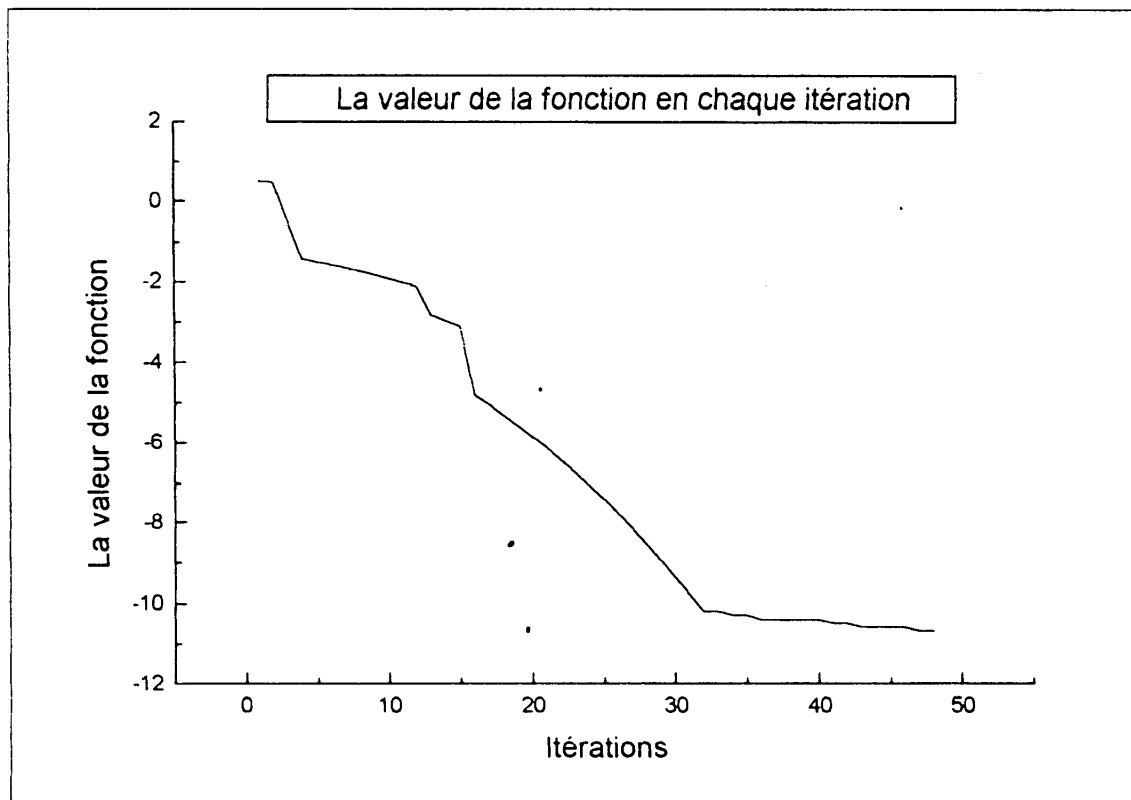


Figure (26)

Pour différent maillages; (faire varier le nombre de noeuds à chaque fois), Nous avons les résultats suivants:

nombre de noeuds total	La valeur optimale de la fonction
10	-10.5333499578
20	-10.6370406989
30	-10.653969799
40	-10.659649910
50	-10.662222731
60	-10.663600806
70	-10.664392055
80	-10.664717151

CONCLUSION

Dans ce travail, on a décrit un algorithme d'optimisation des problèmes non linéaires.

Afin d'atteindre cet objectif, on a rappelé dans le premier chapitre les notions fondamentales de l'optimisation et la caractérisation de l'optimum. Dans le deuxième chapitre on a décrit un algorithme d'optimisation d'un problème quadratique avec des contraintes linéaires d'inégalités. Un théorème de convergence a été démontré, de plus on a calculé le rayon de convergence dans le cas des contraintes d'égalités. L'idée principale de cet algorithme est basé sur la connection de deux algorithmes:

- L'algorithme du gradient projeté de la fonctionnelle duale.
- L'algorithme de pénalisation.

Dans le troisième chapitre on a donné une série de tests numériques présentant l'efficacité de l'algorithme.

Bibliography

- [1] Ayadi.A, Mekias.H Calcul par élément fini mixte de la forme de l'arche sciences and Technologie-N°13, Juin(2000), PP.7-10
- [2] Ayadi.A, Utilisation de la formulation mixte en optimisation de structure, revue sciences et Technologie de l'univ.de Constantine, série C, N°6(1995), 46-66
- [3] Ayadi.A., Calcul numérique de la forme optimale d'une poutre avec cisaillement, Accepté pour publication dans la revue sciences et Technologie de l'univ.de Constantine.
- [4] Ciarlet P.G., Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation(1996)
- [5] Dacorogna.B, Direct methods in the calculus of variations, Applied mathematical sciences 78, Springer Verlag(1988)
- [6] Ekeland I., Temam R., Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris(1974).
- [7] Falk J.E., Lagrange multipliers and nonlinear programming, Journal of Mathematical analysis and applications, 19, pp.141-159 (1967).
- [8] Fleury C, Le dimensionnement automatique des structures élastiques, thèse d'état en-sciences, univ. de Liege (1978).
- [9] Mokhtar S, Bazara.A., Linear programming and network flows, John Wiley and sons, second edition, NewYork(1990).

- [10] Raviart.P.A. et J.M.Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
- [11] William.H.press,Numerical recipes,The Art of scientific computer, Cambridge university press.

Abstract

In this work we are interested by developing an algorithm of optimisation of a quadratique problem with constraints.(linearity constraints).

The notion of duality transform the problem said primal problem at a serie of problems easy to solve

Our purpose is to construct this algorithm using the advantageous of this method and the method of penalty.

Key words:Optimisation, duality, Lagrangian and augmented Lagrangian , convex.Analysis

Résumé

Ce travail consiste à développer un algorithme d'optimisation d'un problème de programmation quadratique avec contraintes linéaires.

La dualité permet de transformer le problème posé dit problème primal à une suite de problèmes faciles à résoudre et la méthode de pénalisation permet d'améliorer la convergence de l'algorithme.

Notre objectif est d'utiliser les avantages des deux méthodes précédentes.

Mots clés: Optimisation, dualité, Lagrangien et Lagrangien augmenté, Analyse convexe.

ملخص

- إن هذا العمل يهدف إلى إنشاء خوارزمي لحساب القيم المثلى لمسائل تربيعية ضمن حواجز تألفية .
- إن الانتقال إلى الفضاء الثنائي يسمح بتحويل المسائل الأصلية إلى متتالية من المسائل سهلة الحل .
- الطريقة القصيرة تلعب دوراً أساسياً في تحسين تقارب الخوارزمي .
- إن هدفنا يركز على استخدام مميزات الطريقتين السابقتين .

Résumé

Ce travail consiste à développer un algorithme d'optimisation d'un problème de programmation quadratique avec contraintes linéaires.

La dualité permet de transformer le problème posé dit problème primal à une suite de problèmes faciles à résoudre et la méthode de pénalisation permet d'améliorer la convergence de l'algorithme.

Notre objectif est d'utiliser les avantages des deux méthodes précédentes.

Mots clés : Optimisation, dualité, Lagrangien et Lagrangien augmenté, Analyse convexe.

Résumé

Ce travail consiste à développer un algorithme d'optimisation d'un problème de programmation quadratique avec contraintes linéaires.

La dualité permet de transformer le problème posé dit problème primal à une suite de problèmes faciles à résoudre et la méthode de pénalisation permet d'améliorer la convergence de l'algorithme.

Notre objectif est d'utiliser les avantages des deux méthodes précédentes.

Mots clés : Optimisation, dualité, Lagrangien et Lagrangien augmenté, Analyse convexe.