République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L' Education Nationale

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES

THESE

Présentée pour obtenir le Diplome de

MAGISTER

en

MATHÉMATIQUES

Option : Analyse mathématique

Présentée par

Mme LABED FATIHA épouse LAOUAR

THEME

NOTIONS DE BASES ET R-SUITES GÉNÉRALISEES DANS LES R-ESPACES TOPOLOGIQUES

SOUTENUE LE : 04 / 11 /1996

DEVANT LE JURY

Président	Mr : N. BENKAFADAR	M.C. à U.CONSTANTINE
Rapporteur	Mr : K. BETINA	Professeur à U.S.T.H.B ALGER
Examinateur	Mr : M. DENCHE	M.C. à U.CONSTANTINE
Examinateur	Mr : A. CHABOUR	C.C à U.S.T.H.B ALGER

DEDICACES

A mes très chèrs parents, source d'amour et de tendresse.

A mon très chèr mari Kamel, et mon fils Houssem Eddine que j'aime beaucoup.

A mes chèrs frères et soeurs.

A toutes mes amies.

A toute la famille de l'institut de Mathématiques.

A tous ceux qui ont consacré leur vie pour la science et l'humanité.

Aux enfants de ce monde, symbole d'espoir et d'innocence.

A notre chère patrie l'Algérie.

Et que Dieu nous aide à acquérir plus de science.

Fatiha LABED

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail d'une façon directe ou indirecte, en me soutenant de leur aide et dont je suis très reconnaissante de citer les noms :

Mr IGOR ZUZCAK pour son intéressant sujet proposé.

Mr K. BETINA pour sa bonne entente et pour son dévouement total durant la réalisation de ce travail.

Mr A. CHABOUR pour ses propositions et suggestions bénéfiques.

Mr A. HMAIDA Directeur de l'Institut pour son soutien moral.

Je rends aussi une très grande gratitude à Messieurs, N. BENKAFADAR et M. DENCHE pour avoir accepter d'être membres dans mon jury.

- Construction d'une r-suite généralisée à partir d'un r-filtre et inversement

Chapitre IV

Continuité dans un r-espace :

- Application continues dans un r-espace

- Applications r-continues dans un r-espace

- La r-continuité de la composée de deux applications

Références

INTRODUCTION

Etant donné un ensemble non vide X, muni de deux topologies θ_1 et θ_2, il est facile de caractériser les éléments de (X, θ_1) et (X, θ_2), ainsi que leurs ouverts, leurs fermés, leurs bases,...etc.

Par contre, si nous considérons l'ensemble X, muni des deux topologies θ_1 et θ_2, plusieurs problèmes se posent, à savoir la structure de $(X, \theta_1 \cup \theta_2)$ qui n'est pas en général un espace topologique, et la caractérisation des éléments de cet espace.

En 1983, Monsieur Igor Zuzcâk introduit une nouvelle classe d'espaces, qu'il a nommée r-espaces topologique [1], comme étant une généralisation des espaces topologiques usuels, où plusieurs questions trouvent leurs réponses.

Dans le présent travail nous essayons de développer quelques notions données par Igor Zuzcâk dans [1], [2] et [3].

Dans le chapitre I :

nous nous intéressons à démontrer que les espaces polytopologiques, c'est à dire, de la forme $\left(X, \bigcup_{i=1}^{n} \theta_i\right)$ avec θ_i topologies usuelles, sont des r-espaces et à introduire la notion de r-topologie induite.

Dans le chapitre II :

On étudie les bases d'un r-espace, et leurs propriétés et particulièrement les bases d'un r-espace $\left(X, \bigcup_{i=1}^{n} \theta_i\right)$, ainsi que la caractérisation des ensembles d'une polytopologie.

Dans le chapitre III :

On introduit la notion de r-suites généralisées, et leur convergence, la relation qui existe entre r-suites généralisées et r-filtres [6] sur un r-espace, tout en faisant l'analogie avec les notions topologiques usuelles [4] et [5].

Dans le dernier chapitre :

On s'intéresse à la notion de continuité dans un r-espace (continuité, continuité en un point, r-continuité) et on introduit une classe d'applications qui présentent d'autres particularités en plus de la continuité, qu'on appelle applications totalement continues [6].

CHAPITRE 0

RAPPELS SUR LES R-ESPACES [1]

Etant donné un ensemble non vide X, et une relation ρ définie sur $P(X)$: ensemble de parties de X, on considère les propriétés suivantes de ρ :

R_1) $\forall A \subseteq X, \exists B \subseteq X$ tel que $A \rho B$

R_2) $\phi \rho \phi$

R_3) Si $A \rho B$ alors $A \subseteq B$

R_4) Si $A \rho B$ alors $B \rho B$

R_5) Si $A \subseteq B$ et $B \rho B$ alors il existe un sous-ensemble C de X tel que

$A \rho C$ et $C \subseteq B$.

R_6) Si $A \rho B$ alors il n'existe pas de sous-ensemble C de X tel que $A \subseteq C \subset B$, et $C \rho C$.

Définition 1 :

La relation ρ vérifiant les propriétés R_1 - R_6 est appelée relation de fermeture sur $P(X)$.

La paire (X , ρ) est appelée r-espace.

Définition 2 :

(X , ρ) un r-espace, si pour les sous ensembles A et B de X on a :$A \rho B$, alors on dit que B est la fermeture de A.

Le sous-ensemble A de X qui vérifie A ρ A est dit fermé, le complémentaire d'un fermé est appelé ouvert.

<u>Définition 3</u> :

Un sous ensemble A de X est appelé intérieur de $B \subseteq X$ si (X - A) est la fermeture de (X - B).

La relation σ définie sur P(X) par :

$A \,\sigma\, B \Leftrightarrow (X - B)\,\rho\,(X - A)$, est appelée relation d'intérieur relative à ρ.

<u>Théorème 1</u> :

(X , ρ) un r-espace, σ la relation d'intérieur relative à ρ, alors σ satisfait :

K_1) $\forall A \subseteq X, \exists B \subseteq X$ tel que $B \,\sigma\, A$

K_2) $X \,\sigma\, X$

K_3) Si $B \,\sigma\, A$ alors $B \subseteq A$

K_4) Si $B \,\sigma\, A$ alors $B \,\sigma\, B$

K_5) Si $B \subseteq A$ et $B \,\sigma\, B$ alors il existe un sous-ensemble C de X tel que $C \,\sigma\, A$ et $B \subseteq C$.

K_6) Si $B \,\sigma\, A$ alors il n'existe pas de sous-ensemble C de X tel que $B \subset C \subseteq A$ et $C \,\sigma\, C$.

<u>Théorème 2</u> :

Soit σ une relation définie sur P(X) qui satisfait les propriétés K_1 - K_6. On définit sur P(X) la relation ρ par :

$(A \rho B) \Leftrightarrow (X - B) \sigma (X - A)$; alors ρ est la relation de fermeture sur $P(X)$. (X , ρ) est un r-espace et σ la relation d'intérieur relative à ρ.

Donnons les notations suivantes qui seront souvent utilisées dans ce qui suit :

X un ensemble non vide, $F \subseteq P(X)$, $A \subseteq X$ et $x \in X$:

$_{A}F = \{B \in F ; A \subseteq B\}$

$^{A}F = \{B \in F ; B \subseteq A\}$

$F(x) = \{B \in F ; x \in B\}$

Théorème 3 :

Soit (X , ρ) un r-espace alors la classe des fermés de X :

$\tau = \{A \subseteq X , A \rho A\}$ vérifie :

$\Omega_1)$ ϕ, $X \in \tau$

$\Omega_2)$ $\forall A \subseteq X$ et $B \in {}_{A}\tau$, il existe un élément minimal C de $_{A}\tau$ tel que

$A \subseteq C \subseteq B$.

Théorème 4 :

Soit X un ensemble non vide, $\tau \subseteq P(X)$ vérifiant Ω_1 et Ω_2, définissons sur $P(X)$ la relation ρ comme suit :

$A \rho B \Leftrightarrow B$ est l'élément minimal de $_{A}\tau$............ (*)

Alors ρ vérifie toutes les propriétés R_1 - R_6 et τ est la classe de tous les fermés du r-espace (X , ρ).

Théorème 5 :

Soit (X , ρ) un r-espace, τ la classe de tous les fermés de X, alors la classe de tous les ouverts de X :

$D = \{A \subseteq X \ / \ (x - A) \in \tau\}$, vérifie les conditions :

$\Omega'_1)$ $\phi , X \in D$

Ω'_2) $\forall A \subseteq X$, et $B \in {}^{A}D$, il existe C élément maximal de ${}^{A}D$ tel que $B \subseteq C \subseteq A$.

Théorème 6 :

Soit X un ensemble non vide et $D \subseteq P(X)$ vérifiant Ω'_1 et Ω'_2 alors, la classe $\tau = \{A \subseteq X : (X - A) \in D\}$ vérifie Ω_1 et Ω_2 et D est précisément la classe de tous les ouverts du r-espace (X , ρ), où ρ est la relation définie sur P(X) par (*).

Remarque 1 :

Un r-espace peut être défini à partir de :

1) - La relation ρ vérifiant les propriétés R_1 - R_6, ou

2) - La relation σ vérifiant les propriétés K_1 - K_6, ou

3) - La classe τ vérifiant les propriétés Ω_1) et Ω_2), ou

4) - La classe D vérifiant les propriétés Ω'_1) et Ω'_2)

Remarque 2 :

(X , τ) un espace topologique, τ la classe de tous les fermés de X, on définit la relation ρ sur P(X) par :

$A \rho B \Leftrightarrow$ B est la fermeture de A.

Il est clair que ρ vérifie les propriétés R_1 - R_6.

Remarque 3 :

Dans un r-espace X, un sous ensemble A, peut avoir plusieurs fermetures ou plusieurs intérieurs.

Remarque 4 :

Etant donné un ensemble fini X, toute partie de P(X) contenant X et ϕ, vérifie Ω_1' et Ω_2') donc c'est un r-espace.

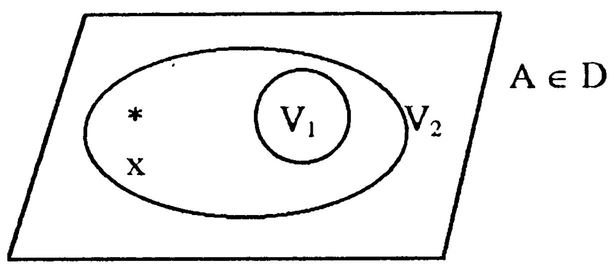
Définition 4 :

Un sous-ensemble de X de la forme $\{x\} \cup A$ avec $x \in X$ et A ouvert est appelé prévoisinage de x. Un voisinage de x est un ouvert qui contient x.

Définition 5 :

(X , D) un r-espace, $A \subseteq X$

A est ouvert ssi : $\forall x \in A$, $\forall V_1 \in D$, $\exists V_2 \in D$ tel que $\{x\} \cup V_1 \subseteq V_2 \subseteq A$.



CHAPITRE I

ESPACES POLYTOPOLOGIQUES

ET R - TOPOLOGIES INDUITES

I - Espaces polytopologiques :

Proposition 1 :

Si (x , θ_1) , (x , θ_2), ... , (x , θ_n) sont n - espaces topologiques, alors $\left(x , \bigcup_{i=1}^{n} \theta_i\right)$ est un r-espace.

Démonstration :

(x , θ_1) espace topologique, σ_1 la relation d'intérieur associée à θ_1

.

.

.

(x , θ_n) espace topologique, σ_n la relation d'intérieur associée à θ_n

On note par σ la relation d'intérieur correspondante à $D = \bigcup_{i=1}^{n} \theta_i$ et définie comme suit :

$\forall A \subset X , \forall \theta_i , \exists A_i \in \theta_i$ tq $A_i \sigma_i A$ (A_i intérieur de A) et on considère la famille $I = \{ A_i \}_{i = \overline{1,n}}$

$\underline{\text{si}}$ il existe i, tel que $A_j \subseteq A_i \quad \forall j \neq i$, alors $A_i \sigma A$

$\underline{\text{Sinon}}$: $A_i \sigma A \ \ \forall i = \overline{1, n}$.

Montrons que (X , D) est un r-espace en utilisant la définition (2) d'un r-espace.

- K_1) $\forall A \subseteq X, \exists B \subseteq X$ tel que $B \sigma A$?

on a : $\forall A \subseteq X, \exists B_i \subseteq X$ tel que $B_i \sigma_i A$

soit $I = \{B_i\}_{i = \overline{1,n}}$;

Si il existe $i_0 = \overline{1, n}$ tel que $B_j \subseteq B_{i_0} \ \forall j \neq i_0$ alors $B_{i_0} \sigma A$.

Sinon $B_i \sigma A \ \ \forall i = \overline{1, n}$.

et par suite : $\forall A \subseteq X, \exists B \subseteq X / B \sigma A$.

- K_2) $X \sigma X$?

on a : $X \sigma_i X \ \ \forall i = \overline{1, n} \qquad I = \{A_i\}_{i = \overline{1,n}} = \{X\} \Rightarrow X \sigma X$.

- K_3) Si $B \sigma A \Rightarrow B \in \{A_i\}_{i = \overline{1,n}} \Rightarrow \exists j$ tel que $B = A_j$

$\Rightarrow A_j \sigma_j A \Rightarrow A_j \subseteq A$ ie $B \subseteq A$.

- K_4) Si $B \sigma A$ alors $B \sigma B$?

soit $B \subseteq X / B \sigma A \Rightarrow \exists j$ tel que $B \sigma_j A \xrightarrow{(K_4)} B \sigma_j B$

Si $B_j \subseteq B \ \forall j$ alors $B \sigma B$.

Sinon $B_i \sigma B \ \forall i$ et en particulier pour $B_{i_0} = B$.

- K_5) Si $B \subseteq A$ et $B \sigma B$ alors $\exists\, C \subseteq X / C \sigma A$ et $B \subseteq C$?

soit $B \subseteq A$ et $B \sigma B$,

$\xrightarrow{(K_5)} \exists\, C_j \subseteq X$ tel que $C_j \sigma_j A$ et $B \subseteq C_j$.

Si il existe $k / \forall\, (j \neq k)\ C_j \subseteq C_k \Rightarrow C_k \sigma A$ et $B \subseteq C_j \subseteq C_k$.

Sinon $\forall j\ C_j \sigma A$ et $B \subseteq C_j$ C.q.F.D.

- K_6) Si $B \sigma A$ alors il n'existe pas de $C \subseteq X$ tel que $B \subset C \subseteq A$ et $C \sigma C$?

$B \sigma A \Rightarrow \exists\, j$ tel que $B \sigma_j A \xrightarrow{(K_6)}$ il n'existe pas de C' tel que

$B \subset C' \subseteq A$ et $C' \sigma j\, C'$

$\Rightarrow$ il n'existe pas de C' tel que $B \subset C' \subseteq A$ et $C' \sigma C$.

C.q.F.D.

II - Notion de r-topologie induite :

On sait que dans les espaces topologiques, par exemple (X , D), le Système $D^A = \{A \cap B / B \in D\}$, $A \subset X$, construit une topologie sur A,((A , D^A) est un espace topologique); cette propriété n'est pas vraie dans le cas de r-espaces, donc,si (X , D) est un r-espace (A , D^A) ne l'est pas en général.

Donnons le contre exemple suivant :

Exemple :

G étant l'algèbre universelle.

$D = \{\text{Sous-ensembles de } G\} \cup \{\phi\}$

D est une r-topologie, en effet, montrons que D satisfait les deux conditions Ω'_1) et Ω'_2).

Ω'_1), ϕ, $G \in D$ (évident)

Ω'_2) soit $A \subset G$, le système ${}^{A}D = \{k \in G \,/\, k \subseteq A\}$ est ordonné partiellement par la relation d'inclusion, et on a $\phi \in {}^{A}D \Rightarrow {}^{A}D \neq \phi$

d'autre part, il est clair que la réunion d'une chaîne arbitraire de sous-algèbres de G appartenant à ${}^{A}D$ est une sous-algèbres de G appartenant à ${}^{A}D$, et par suite d'après le théorème de Zorn, on a :

$\forall\, B \in {}^{A}D$, $\exists\, C$ maximal de ${}^{A}D$ tel que $B \subseteq C$ ce qui démontre Ω'_2)

Soit $A \subset G$; $D^A = \{K \cap A, \text{ tq } K \in D\}$

On remarque que (A, D^A) n'est pas une r-topologie car $K \cap A$ n'est pas une sous algèbre.

Par contre, dans le cas d'espaces polytopologiques (X , D) tel que : $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$ (D_i : topologies usuelles)

D^A constitue une r-topologie sur A et on a :

$$\boxed{D^A = \bigcup_{i=1}^{n} D_i^A}$$

CHAPITRE II

NOTIONS DE BASES DANS LES R-ESPACES

En utilisant les mêmes notations introduites dans l'article [2], on donne la définition suivante :

Définition 1 : (X , D) un r-espace

Une classe $\beta \subset D$ est dite base de D, si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1°/ Si $A \in D$ et $x \in A$, alors $\exists\ V \in \beta$ tel que $x \in V \subset A$.

2°/ Si $A \subset B \subset X$, $A \in D$, $x \in B\text{-}A$ et $\forall\ V \in \beta$, $V \subset A$,

$\exists\ V_1 \in D$ tel que $(\{x\} \cup V) \subseteq V_1 \subset B$, alors $\exists\ V_2 \in D$ tel que

$(\{x\} \cup A) \subseteq V_2 \subset B$

Remarque 1 :

Si (X , D) est un espace topologique et D la classe de tous les ouverts de X, alors la classe $\tau \subset D$ qui satisfait la condition 1°/ de la définition, est une base de D au sens des r-espaces (ie la condition 2°) se déduit de la $1^{\text{ère}}$).

En effet :

Soit $\tau \subset D$ tel que la condition 1°) est satisfaite, montrons que 2°) l'est aussi :

$A \subset B \subset X$, $A \in D$, $x \in B\text{-}A$

soit $y \in A \Rightarrow \exists V \in \tau$ tel que $y \in V \subset A \subset B$ (d'après 1°)

$\Rightarrow \exists V_1 \in D$ tel que $(\{x\} \cup V) \subset V_1 \subset B$ (d'après la condition même)

alors $\exists V_2 = (V_1 \cup A) \in D$ tel que $(\{x\} \cup A) \subset V_2 \subset B$ C.Q.F.D

Théorème 1 :

Soit X un ensemble non vide, D_1 et D_2 deux topologies sur X et soit $D = D1 \cup D_2$, on sait que (X , D) est un r-espace, alors on a l'équivalence suivante :

$A \in D \Leftrightarrow \forall \{x_1 , x_2\} \subset A, \exists V \in D$ tel que $\{x_1 , x_2\} \subseteq V \subseteq A$.

Démonstration :

Condition nécessaire (C N) :

Soit $A \subseteq X$, $A \in D$, $\forall (x_1 , x_2) \in A^2$, $\exists V = A \in D$ tel que $\{x_1 , x_2\} \subseteq V \subseteq A$.

(C.S) : soit $A \subseteq X$ et $x \in A$, $V \in D$ tel que $V \subseteq A$, existe t-il $V_1 \in D$ tel que $\{x\} \cup V \subseteq V_1 \subseteq A$ **?**

On a : $D = D_1 \cup D_2$, supposons que $V \in D_1$

par hypothèse on a : $\forall \{x , y_i\} \subset A, \exists V'_i \in D$ tel que $\{x , y_i\} \subset V'_i \subseteq A$

a) S'il existe $y_1 \in A$ tq $V'_1 \in D_1$ on aura :

$V_1 = V'_1 \cup V \in D1$ et donc $(\{x\} \cup V) \subset V_1 \subseteq A \Rightarrow A$ ouvert.

b) par contre si $\forall y_i \in A, V'_i \in D_2$

comme $V \subseteq A$ on a : $\forall y_i \in V, \exists V'_i \in D_2$ tel que : $\{x , y_i\} \subset V'_i \subseteq A$

Soit $K = \bigcup_{y_i \in V} V_i'$, $V \subset K$

et dans ce cas, on prend $V_1 = K \in D_2 \subset D$ et on aura :

$(\{x\} \cup V) \subset K \subseteq A \Rightarrow A$ ouvert.

Ce qui achève la démonstration.

Définition 2 :

Soit $D = D_1 \cup D_2$, D_1 et D_2 deux topologies usuelles.

On considère le r-espace (X , D) et $P \subset D$. On dit que P est une p-base de D SSi :

$A \in D \Leftrightarrow \forall \{x_1 , x_2\} \subset A$, $\exists V \in P$ tel que $\{x_1 , x_2\} \subseteq V \subseteq A$.

Caractérisation des ensembles d'une polytopologie :

Soit (X , D) un r-espace avec $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, D_i $(i = \overline{1 , 3})$ sont des topologies usuelles, alors on a l'équivalence suivante :

$A \in D \Leftrightarrow \forall F \subseteq A$, Card $F \leq 3$, $\exists U \in D$ tel que $F \subseteq U \subseteq A$

Démonstration :

C.N : Soit $A \in D$, $\forall F \subseteq A$, (Card $F \leq 3$) , $\exists U = A \in D$ tel que $F \subseteq U \subseteq A$

C.S :

Soit $A \subseteq X$, supposons que $\forall F \subseteq A$(Card $F \leq 3$) $\exists U \in D$ tel que $F \subseteq U \subseteq A$ et montrons que $A \in D$ (ie : $\forall x \in A$, $\forall V \in {}^A D$, $\exists V_1 \in D$ tel que $(\{x\} \cup V) \subseteq V_1 \subseteq A$)

- Soit $x \in A$, et $V \in {}^{A}D$, prenons $V \in D_1$, existe t-il $V_1 \in D$ tel que :

$(\{x\} \cup V) \subset V_1 \subseteq A)$?

a) S'il existe $F \subseteq A(\text{Card } F \leq 3$ et $x \in F)$ pour lequel $U \in D_1$ on aura :

$(\{x\} \cup V) \subseteq F \cup V \subseteq U \cup V \subseteq A$

donc il existe $V_1 = U \cup V$ tel que $(\{x\} \cup V) \subseteq V_1 \subseteq A$ d'où $A \in D$

b) Si $\forall\ F \subseteq A$ (Card $F \leq 3$) et F contenant x, les ensembles U ne sont pas dans D_1,

dans ce cas, prenons tous les points $x_i \in V$ tel que $\exists\ W_i \in D_2$ et

$\{x_i\ ,\ x\} \subset W_i \subset A$

et soit $K = \bigcup\limits_i W_i$

* Si $V \subset K$, il suffit de prendre $V_1 = K$

* Si $V \not\subset K$, alors $\exists\ x_2 \in V - K$, comme $x_2 \in V \Rightarrow \exists\ M_j \in D$ tel que

$\{x_1\ ,\ x_2\ ,\ x\} \subset M_j \subseteq A$

($M_j \notin D_2$, car sinon il serait inclu dans K)

donc $M_j \in D_3$ et soit $L = \bigcup\limits_j M_j$

Si $V \subset L$ il suffit de prendre $V_1 = L$

Si $V \not\subset L \Rightarrow \exists\ x_3 \in V\text{-}L$, $x_3 \in V \Rightarrow \exists\ N_k \in D$ tel que $\{x_2\ ,\ x_3\ ,\ x\} \subset N_k \subset A$

$$\begin{tikzcd} & D_2 \\ N_k \in \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & D_3 \end{tikzcd}$$

Si $N_k \in D_3 \Rightarrow N_k \subset L \Rightarrow x_3 \in L$ (contradiction)

Si $N_k \in D_2 \Rightarrow N_k \subset K \Rightarrow x_2 \in K$ (contradiction)

et donc forcement $V \subset L$ (C.Q.F.D).

Généralisation :

On peut généraliser ce résultat à n espaces topologiques :

soit (X , D) un r-espace avec $D = D_1 \cup D_2 \cup .... D_n$, alors on a l'équivalence suivante :

$A \in D \Leftrightarrow \forall F \subseteq A$ (Card $F \leq n$) , $\exists U \in D$ tq $F \subseteq U \subseteq A$.

Théorème 2 :

Soient (X , D_1) , (X , D_2) deux espaces topologiques de bases respectives B_1 et B_2, alors $(X , D_1 \cup D_2)$ est un r-espace de base $B_1 \cup B_2$.

Démonstration :

Posons $D = D_1 \cup D_2$ et $B = B_1 \cup B_2$. (D est un r-espace d'apprés la proposition1 chapitre I).

Montrons que B est une base de D.

1°) soit $A \in D$, supposons que $A \in D_1$, D_1 étant une topologie de base B_1, alors $\forall x \in A , \exists V \in B_1 \subset B$ tel que $x \in V \subset A$.

2°) soit W un sous - ensemble de X et $A \in D$ tel que $A \subset W$.

Supposons que $A \in D_1$ et $x \in W - A$.

Soit $y_1 \in A \Rightarrow \exists V_{y_1} \in B_1 \subset B$ tel que $y_1 \in V_{y_1} \subset A$ (d'après 1°)

et d'après la supposition il existe $V_{y_1}^x \in D$ tel que : $(\{x\} \cup V_{y_1}) \subset V_{y_1}^x \subset W$

a) - Si $V^x_{y_1} \in D_1 \Rightarrow (V^x_{y_1} \cup A) \in D_1 \subset D$, d'où l'existence de :

$V_2 = (V^x_{y_1} \cup A) \in D$ tel que $(\{x\} \cup A) \subset V_2 \subset W$ ce qui donne 2°).

b) - Si $V^x_{y_1} \notin D_1$ ie $V^x_{y_1} \in D_2$ on a : pour tout $y_k \in A$, $\exists\ V_{y_k} \in B$ tel que

$y_k \in V_{y_k} \subset A$ et d'après la supposition, $\exists\ V^x_{y_k} \in D$ tel que $(\{x\} \cup V_{y_k}) \subset V^x_{y_k} \subset W$,

s'il existe $V^x_{y_k} \in D_1$, on aura le même résultat que dans a) sinon, il suffit de prendre

$V = \bigcup_{y_k \in A} V^x_{y_k} \in D_2$, on aura alors :

$y_k \in A$ et $y_k \in V^x_{y_k} \Rightarrow \bigcup_{y_k \in A} \{y_k\} \subset \bigcup_{y_k \in A} V^x_{y_k} \qquad \bigcup_{y_k \in A} \{y_k\} = A$

$\Rightarrow A \subset \cup V^x_{y_k}$, si on pose $V = \bigcup_{y_k \in A} V^x_{y_k}$ on aura l'existence de $V_2 = A \cup V \in D_2 \subset D$

tel que $(\{x\} \cup A) \subset V_2 \subset W$ d'où 2°).

Remarque 2 :

Ce résultat n'est plus valable dans le cas de trois espaces (X , D_1) , (X , D_2), (X , D_3) de bases respectives B_1 , B_2 , B_3. Donnons le contre exemple suivant :

Exemple :

Soit $X = \{x_1 , x_2 , x_3 , y\}$

$B_1 = \{\{x_1 , y\} , \{x_2\} , \{x_3\}\}$

$B_2 = \{\{x_2 , y\} , \{x_1\} , \{x_3\}\}$

$B_3 = \{\{x_3 , y\} , \{x_1\} , \{x_2\}\}$

(X , D_1) , (X , D_2) et (X , D_3) sont des espaces topologiques de bases respectives B_1 , B_2 et B_3.

$D_1 = \{\phi , X , \{x_1 , y\} , \{x_2\} , \{x_3\} , \{x_2 , x_3\} , \{x_1 , x_2 , y\} , \{x_1 , x_3 , y\}\}$

$D_2 = \{\phi , X , \{x_2 , y\} , \{x_1\} , \{x_3\} , \{x_1 , x_3\} , \{x_2 , x_1 , y\} , \{x_3 , x_2 , y\}\}$

$D_3 = \{\phi , X , \{x_3 , y\} , \{x_1\} , \{x_2\} , \{x_1 , x_2\} , \{x_3 , x_1 , y\} , \{x_3 , x_2 , y\}\}$

on va montrer que $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ n'est pas une base du r-espace

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

Si on prend $A = \{x_1 , x_2\} \in D$.

$B = \{x_1 , x_2 , x_3\} \subset X$ et $A \subset B$.

$x = x_3 \in B \setminus A$.

On voit que $\forall\ V \in \mathcal{B}\ \ V \subset A , \exists\ V_1 \in D$ tel que $\{x\} \cup V \subseteq V_1 \subsetneq B$

mais il n'existe pas $V_2 \in D$ tel que : $\{x\} \cup A \subseteq V_2 \subsetneq B$.

donc la condition 2°) de la définition n'est pas satisfaite. C.q.F.D.

<u>**Théorème 3**</u> :

Soient D_1 , D_2 et D_3 trois topologies sur X, de bases respectives B_1 , B_2 et B_3, et soit $B_i' = \{A_1 \cup A_2/(A_1 , A_2) \in B_i^2\}$ alors $B = B_1' \cup B_2' \cup B_3'$ est une base de $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.

<u>***Démonstration***</u> :

1°) soit $A \in D$ (supposons que $A \in D_1$)

$\forall\, x \in A, \exists\, V_1 \in B_1$ tel que $x \in V_1 \subset A$, $V_1 = V_1 \cup V_1 \in B_1' \subset B$

donc : $\forall\, A \in D, \forall\, x \in A, \exists\, V_1 \in B$ tel que $x \in V_1 \subset A$.

2°) soit $A \subset E \subset X$, $A \in D_1$ et $x_0 \in E \setminus A$,

$x_1 \in A$, soit $V_1 \in B$ tel que il existe $W \in D$ satisfaisant : $\{x_0\} \cup V_1 \subset W \subset E$

supposons que $V_1 \in B_1' \subset B$.

a) si $W \in D_1$, on prend $k_1 = W \cup A \in D_1 \subset D$ tel que

$\{x_0\} \cup A \subset k_1 \subset E$ C.q.F.D.

b) si $W \notin D_1$, soit $W \in D_2$

si $x_2 \in A \Rightarrow \exists\, V_2 \in B_1$ tel que $x_2 \in V_2 \subset A$

W_i : tous les ouverts de D_2 contenant V_2 et x_0, et soit $k_2 = \bigcup_i W_i$

(*) Si $A \subset k_2$, on prend $k = k_2$, ce qui donne $(\{x_0\} \cup A) \subset k \subset E$.

(*) Si $A \not\subset k_2 \Rightarrow \exists\, x_3 \in A - k_2 \Rightarrow \exists\, V_3 \in B_1$ tel que $x_3 \in V_3 \subset A$.

par hypothèse on a : $V_2 \cup V_3 \in B_1' \subset B$.

Considérons tous les U_j tel que $(\{x_0\} \cup V_2 \cup V_3) \subset U_j \subset E$.

$U_j \in D_3$ (car sinon il serait inclu dans k_2 or $x_3 \in U_j$ et $x_3 \notin k_2$)

et soit $k_3 = \bigcup_j U_j$

(○) si $A \subset k_3$, on prend $k = k_3$, et $(\{x_0\} \cup A) \subset k \subset E$

(○) sinon, $A \not\subset k_3 \Rightarrow \exists\, x_4 \in A - k_3$, $x_4 \in A \Rightarrow \exists\, V_4 \in B_1$ tq $x_4 \in V_4 \subset A$, on a :

$V_3 \cup V_4 \in B_1' \subset B$, et supposons l'existence de M_4 tel que :

$(\{x_0\} \cup V_3 \cup V_4) \subset M_4 \subset E$, on a alors deux possibilités :

$M_4 \in D_2$ ou bien $M_4 \in D_3$.

(*) si $M_4 \in D_2 \Rightarrow M_4 \subset k_2$ contradiction avec $x_3 \in A\text{-}k_2$ et $x_3 \in M_4$.

(*) si $M_4 \in D_3 \Rightarrow M_4 \subset k_3$ contradiction avec $x_4 \in A\text{-}k_3$ et $x_4 \in M_4$.

et donc forcement $A \subset k_3$ (ce qui achève la démonstration).

<u>Généralisation</u> :

Soient $D_1, \dots, D_n$ n topologies sur X de bases respectives $B_1, B_2, \dots, B_n$, et soit :

$B'_i = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} / A_k \in B_i \; k = \overline{1, n-1}\}$

alors $B = B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_n$ est une base de D tel que :

$D = D_1 \cup D_2 \cup .. \cup D_n$.

<u>Démonstration</u> :

1°) $A \in D$ $(A \in D_1)$; $\forall x \in A \Rightarrow \exists V \in B_1$ tel que :

$x \in V \subset A$, or $V = V \cup V \cup \dots V$ $(n - 1)$ fois $\Rightarrow V \in B'_1 \subset B$

et donc :

$\forall A \in D, \forall x \in A, \exists V \in B$ tel que $x \in V \subset A$.

2°) soit $A \subset E \subset X$, $A \in D_1 \subset D$, $x_0 \in (E - A)$ et supposons que $\forall \; V \in B$ $(V \in B'_1)$ $V \subset A$, $\exists W \in D$ tel que $(\{x_0\} \cup V) \subset W \subset E$.

a) Si $W \in D_1$, on prend $k = A \cup W \in D_1 \subset D$ tel que $(\{x_0\} \cup A) \subset k \subset E$

b) Si $W \notin D_1$, soit$w \in D_2$

on prend $x_2 \in A \Rightarrow V_2 \in B_1$ tel que $x_2 \in V_2 \subset A$.

considérons tous les ouverts Wi de D_2 contenant V_2 et le point x_0

et soit $k_2 = \bigcup_i Wi$.

1° Cas : si $A \subset k_2$, il suffit de prendre $k = k_2$ et $(\{x_0\} \cup V_2) \subset k_2 \subset E$.

2° Cas : si $A \not\subset k_2$, $\exists\, x_3 \in A - k_3$, $x_3 \in A \Rightarrow \exists\, V_3 \in B_1$ tel que

$x_3 \in V_3 \subset A$, par hypothèse on a : $V_2 \cup V_3 \in B_1' \subset B$.

Considérons tous les U_j tel que $(\{x_0\} \cup V_2 \cup V_3) \subset U_j \subset E$.

$U_j \in D_3$ (car sinon il serait inclu dans k_2, or $x_3 \in U_j$ et $x_3 \notin k_2$)

et soit $k_3 = \bigcup_j U_j$.

○ Si $A \subset k_3$, on prend $k = k_3$ et $(\{x_0\} \cup A) \subset k \subset E$

○ Si $A \not\subset k_3$, $\exists\, x_4 \in A - k_3$, $x_4 \in A \Rightarrow \exists\, V_4 \in B_1$ / $x_4 \in V_1 \subset A$, pour

$V_2 \cup V_3 \cup V_4 \in B_1' \subset B$, $\exists\, W_k \in D$ tel que $(\{x_0\} \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4) \subset W_k \subset E$,

$W_k \notin D_1$, $W_k \notin D_2$ et $W_k \notin D_3$.

Prenons $W_k \in D_4$ et soit $k_4 = \bigcup_k W_k$.

(*) si $A \subset k_4$ on prend $k = k_4$

sinon $\exists\, x_5 \in A - k_4$...

.
.
.

on suppose qu'on arrive à l'ordre n, c'est à dire, qu'il existe $k_n \in D_n$.

(#) si $A \subset k_n$, on prend $k = k_n$

(#) sinon $\exists\ x_{n+1} \in A\text{-}k_n$, $x_{n+1} \in A \Rightarrow \exists\ V_{n+1} \in B_1 \,/\, x_{n+1} \in V_{n+1} \subset A$.

on a : $\underbrace{V_3 \cup V_4 \cup \ldots \cup V_{n+1}}_{V'} \in B_1' \subset B$.

pour $V' \in B$, $\exists\ w_1 \in D$ tel que $\left(\{x_0\} \cup V'\right) \subset w_1 \subset E$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & D_{n-1} \\ w_1 \in \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & D_n \end{tikzcd}$$

* si $w_1 \in D_n \Rightarrow w_1 \in k_n$, contradiction avec le fait que $x_{n+1} \in A - K_n$ et $x_{n+1} \in w_1$.

donc forcement $A \subset k_n$ C.q.F.D.

CHAPITRE III

NOTION DE R-SUITES GÉNÉRALISÉES

Définition 1 :

Un ensemble non vide , S muni de la relation "$\geq$" est dit r-dirigé si :

1°) $\forall$ s $\in$ S ; s $\geq$ s

2°) $\forall$ $(s_1, s_2) \in S^2$, $\exists$ $s_0 \in S$ tel que $s_0 \geq s_1$ et $s_0 \geq s_2$.

Définition 2 :

Soient (X , D) un r-espace et S un ensemble r-dirigé. On appelle r-suite généralisée de points de X, toute application f tel que :

$f : S \longrightarrow X$

$s \longrightarrow f(s) = x_s$ et on note $(x_s)_{s \in S}$

Limite d'une r-suite généralisée :

Définition 3 :

Soit (X , D) un r-espace, $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée de points de X, et $A \subset X$.

On dit que $(x_s)_{s \in S}$ converge vers x_0 relativement à A ssi :

$\forall\, V \in V_A(x_0)$, $\exists$ $s_0 \in S$, $s \geq s_0$ on a : $x_s \in V$ et on note :

$\lim\limits_{S.A} x_s = x_0$ ou $(x_s)_{s \in S} \xrightarrow[A]{} x_0$. avec

$V_A(x_0) = [D_A(x_0)] = \{B \subseteq X / \exists V \in D_A(x_0), V \subseteq B\}$

$D_A(x_0)$: ensembles de voisinages de x_0 contenant A.

Théorème 1 :

Soient $A \subset B \subset X$, $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée qui converge vers x_0 relativement à A, alors $(x_s)_{s \in S}$ converge vers x_0 relativement à B.

Démonstration :

Soit $V \in V_B(x_0) \Rightarrow \exists V' \in D_B(x_0) : V' \subseteq V$ alors $B \subset V'$ et V' voisinage de x_0, or $A \subset B \Rightarrow V \in V_A(x_0)$ et donc : $\exists s_0 \in S$ tel que $\forall s : s \geq s_0$, $x_s \in V$

$\Rightarrow (x_s)_{s \in S} \xrightarrow[B]{} x_0$.

Théorème 2 :

Soit (X ; D) un r-espace, $A \subset X$, alors A est ouvert si et seulement si, pour toute r-suite généralisée $(x_s)_{s \in S}$ qui converge vers $x \in A$ relativement à $B \in \beta$ (β base de D) ($B \subset A$) $\exists k \in S$ tel que $x_s \in A$ $\forall s \geq k$.

Démonstration :

C.N : soit $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée qui converge vers $x \in A$ relativement à B ($B \subset A$) $\Leftrightarrow \forall V \in V_B(x)$, $\exists s_0 \in S / \forall s \in S$, $s \geq s_0$ on a : $x_s \in V$ ($B \in D$)

on a : $B \in D$ et $B \subset A$.

A étant ouvert, alors $\exists V_1 \in \beta$ tel que $(\{x\} \cup B) \subset V_1 \subset A$

$\Rightarrow V_1 \in V_B(x) \Rightarrow \exists k \in S$ tel que $x_s \in V_1$ $\forall s \geq k$

inversement :

soit $A \subset X$, $B \in \beta$, $B \subset A$ et $x \in A$.

et soit $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée tel que $(x_s)_{s \in S} \xrightarrow[B]{} x$, (ie $\forall V \in V_B(x)$, $\exists s_0 \in S$, $\forall s \in S$ $s \geq s_0$ on a $x_s \in V$) et telle que : $\exists k \in S$, $x_s \in A$ $\forall s \geq k$.

s_0 et $k \in S \Rightarrow \exists t \in S$ tq $t \geq s_0$ et $t \geq k$ (S ensemble r-dirigé).

donc : $\forall V \in V_B(x)$, $\exists t \in S$ tq $\forall s \geq t$ $x_s \in V \Rightarrow x_s \in A \Rightarrow V \subset A$ or $V \in V_B(x)$

donc $A \in V_B(x) \Rightarrow A$ ouvert.

Dans ce qui suit, nous exposerons une méthode de construction d'une r-suite généralisée à partir d'un r-filtre et vice-versa, à savoir que la notion de r-filtres a été étudié en détails dans [6].

Nous citerons ici quelques définitions qu'on va utiliser dans notre travail.

Définition d'un r-filtre (*)

X un ensemble donné, $F \subseteq P(X)$, on dit que F est un r-filtre sur X, s'il vérifie les axiomes suivants :

i) $F \neq \varnothing$

ii) $\forall$ $A, B \in F$, $A \cap B \neq \varnothing$

iii) $\forall$ $A \in F$, $B \subseteq X$, $A \subset B$ alors $B \in F$.

Limite d'un r-filtre (**)

(X , D) un r-espace, F un r-filtre sur X , $A \subset X$. On dit que $x_0 \in X$ est limite de F relativement à A si $V_A(x_0) = [(D_A(x_0)] \subseteq F$ et on note :

$\lim\limits_{A} F = x_0$ ou $F \xrightarrow[A]{} x_0$

Bases de r-filtre :

X un ensemble donné , $\beta \subset P(X)$ /

- $\beta \neq \emptyset$

- $\forall A , B \in \beta , A \cap B \neq \emptyset$

Alors β est appelée base de r-filtre qu'elle engendre c-à-d du r-filtre

$F = [\beta] = \{A \subseteq X \,/\, \exists V \in \beta , V \subseteq A\}$

Construction d'une r-suite généralisée à partir d'un r-filtre :

Proposition 1 :

(X , D) un r-espace, F un r-filtre sur X.

Soit : $S = \{(A , x) ; A \in F \text{ et } x \in A\}$ alors :

l'ensemble S est r-dirigé par la relation "$\geq$" définie comme suit :

$(A , x) \geq (B , y) \Leftrightarrow x \in A \cap B$, $(A , B \in F$ alors $A \cap B \neq \emptyset)$

Démonstration :

1°/ $\forall A \in F , \forall x \in A , x \in A \cap A \Leftrightarrow (A , x) \geq (A , x) \Rightarrow$ "$\geq$" est réflexive.

2°/ soient (A , x) et $(B , y) \in S$ existe t-il $(C , z) \in S$ tel que $(C , z) \geq (A , x)$ et $(C , z) \geq (B , y)$?

On a : $A , B \in F \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ alors $\exists z \in A \cap B$, et par suite il existe

$(C , z) = (A , z) \in S$ tel que : $(C , z) \geq (A , x)$ et $(C , z) \geq (B , y)$

en effet : $z \in A \cap C = A$ et $z \in C \cap B = A \cap B$.

et par suite S est r-dirigé.

A partir d'un r-filtre F , on obtient alors une r-suite généralisée définie de la façon suivante :

$$f : S \longrightarrow X$$

$$(A , x) \longrightarrow x_{(A , x)}$$

qu'on note : $x_F = \left(x_{(A , x)}\right)_{(A , x) \in S}$

Construction d'un r-filtre à partir d'une r-suite généralisée

Proposition 2 :

(X , D) un r-espace , $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée de points de X.

Soit $F_x = \{A \subset X , \exists\, k \in S , x_s \in A \ \forall s \geq k\}$ alors : F_x est un r-filtre.

Démonstration :

i) $\phi \notin F_x$ (par définition de F_x)

ii) $A \in F_x$ et $B \in F_x \overset{?}{\Rightarrow} A \cap B \neq \varnothing$.

on a : $A \in F_x \Rightarrow \exists\, k_1 \in S , x_s \in A \quad \forall s \geq k_1$

$B \in F_x \Rightarrow \exists\, k_2 \in S , x_s \in B \quad \forall s \geq k_2$

k_1 et $k_2 \in S \Rightarrow$ il existe $k \in S$ tel que $k \geq k_1$ et $k \geq k_2$ et $x_s \in A \cap B \ \forall s \geq k$ et par suite $A \cap B \neq \varnothing$.

iii) soit $A \in F_x$, $A \subset B \subset X$.

$A \in F_x \Rightarrow \exists\, k \in S , x_s \in A \ \forall s \geq k$ or $(A \subset B) \Rightarrow x_s \in B \Rightarrow \forall s \geq k$, $x_s \in B \Rightarrow B \in F_x$.

Conclusion :

F_X est un r-filtre sur X, construit à partir de la r-suite généralisée $(x_s)_{s \in S}$.

Théorème 3 :

(X , D) un r-espace, F un r-filtre sur X, (x_F) la r-suite généralisée construite à partir de F, alors le r-filtre construit à partir de (x_F) est égal à F.

Démonstration :

Soit F un r-filtre sur X

$S = \{(A , x) ; A \in F , x \in A\}$

$(x_F) = (x_{(A,x)})_{(A,x) \in S}$ r-suite généralisée construite à partir de F.

$F_{x_F} = \{G \subset X \,/\, \exists\, (A_0 , x_0) \in S,\ x_{(A,x)} \in G,\quad (A , x) \geq (A_0 , x_0)\}$

F_{x_F} : r-filtre construit à partir de x_F.

Montrons que $F = F_{x_F}$?

*) Soit $A \in F \Rightarrow A \neq \varnothing$ alors $\exists\, a \in A$ tel que $(A , a) \in S$

soit $(B , y) \in S$ tel que $(B , y) \geq (A , a) \Leftrightarrow y \in A \cap B$.

$\Rightarrow x_{(B,y)} \in A \cap B \subset A \Rightarrow x_F \in A$ à partir du rang $(A , a) \Rightarrow A \in F_{x_F}$

et $\boxed{F \subset F_{x_F}}$.

*) Inversement : soit $A \in F_{x_F} \Rightarrow \exists\, (B , y) \in S \,/\, x_F \in A$

$\forall\, (G , z) \in S : (G , z) \geq (B , y)$ on a : $x''_{(G,z)} \in A \Rightarrow z \in A , \forall\, z \in G$

$\Rightarrow G \subseteq A$ or $G \in F \overset{iii)}{\Rightarrow} A \in F$

$$\Rightarrow \boxed{F_{x_F} \subset F}$$

ce qui donne l'égalité : $F = F_{x_F}$.

Théorème 4 :

Soient (X, D) un r-espace, F un r-filtre sur X et $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée sur X, on a alors les deux équivalences suivantes :

1) $(x_s)_{s \in S} \xrightarrow[A]{} x \Leftrightarrow F_x \xrightarrow[A]{} x \qquad x \in X$

2) $F \xrightarrow[A]{} x \Leftrightarrow x_F \xrightarrow[A]{} x$.

Démonstration :

1)

C.N) : soit $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée sur X tel que :

$(x_s) \xrightarrow[A]{} x \Leftrightarrow \forall V \in V_A(x), \exists s_0 \in S, \forall s \in S \;\; s \geq s_0$. On a : $x_s \in V$

$\Rightarrow V \in F_x \Rightarrow V_A(x) \subset F_x \Rightarrow F_x \xrightarrow[A]{} x$.

C.S) : F_x le r-filtre construit sur X à partir de la r-suite généralisée $(x_s)_{s \in S}$ tel que :

$F_x \xrightarrow[A]{} x \;\Leftrightarrow\; v_A(x) \subset F_x \;\Rightarrow\; \forall w \in v_A(x), \exists k \in S, \forall s \in S, s \geq S, s \geq k, x_s \in w$

$\Rightarrow (x_s)_{s \in S} \xrightarrow[A]{} x$.

2) En utilisant la proposition 1 (ie la construction du r-filtre F_{x_F} à partir de la r-suite généralisée (x_F) on déduit la deuxième équivalence à partir de la première.

Théorème 5 :

(X , D) un r-espace, $x_0 \in X$, $A \subseteq X$, on dit que x_0 est un point adhérent à une partie $(B \subset X)$ relativement à A si et seulement si, il existe une r-suite généralisée de points de B qui converge vers x_0 relativement à A.

Démonstration :

C.S : Soit $(x_s)_{s \in S}$ une r-suite généralisée de points de B qui converge vers x_0 relativement à A, et soit $V \in V_A(x_0) \Rightarrow \exists\ s_0 \in S, \forall\ s \in S \quad s \geq s_0 , x_s \in V$

D'autre part $x_s \in B \Rightarrow V \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x_0$ est un point adhérent à B relativement à A.

C.N : $D_A(x_0)$: ensemble de voisinage de x_0 contenant A

- $D_A(x_0) \neq \varnothing$

- $\forall\ V_1 , V_2 \in D_A(x_0) , V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$.

Alors $D_A(x_0)$ est une base de r-filtre qu'elle engendre

ie $F = [D_A(x_0)] = V_A(x_0) = \{K \subset X ; \exists\ V \in D_A(x_0) \ , \ V \subset K\}$

$V_A(x_0)$ est un r-filtre qui converge vers x_0; alors on peut construire une r-suite généralisée qui converge vers x_0 (Prop 1 et Th 4).

Considérons maintenant la r-suite généralisée de points de B :

$\left(x_{(V , x)}\right)_{(V , x) \in S}$ tel que $x_{(V, x)} \in V \cap B \neq \varnothing$ et montrons qu'elle converge vers x_0.

Soit $V \in V_A(x_0)$, existe t-il $(w , x) \in S$ tel que $\forall\ (u , y) \in S, (u , y) \geq (w , x)$

on a : $x_{(u , y)} \in V$?

$V \in V_A(x_0) \Rightarrow V \neq \varnothing \Rightarrow \exists\ x \in V$ tel que $(V , x) \in S$ prenons $(w , x) = (V , x)$

$(u , y) \geq (V , x) \Rightarrow y \in v \cap u \Rightarrow x_{(u , y)} \in v \cap u \subset V$ C.q.F.D.

CHAPITRE IV

LIMITES ET CONTINUITÉS

Définition 1 :

(X , D_1) et (Y , D_2) deux r-espaces, D_1 et D_2 étant les classes de tous les ouverts de X et Y respectivement.

Soit $f : X \longrightarrow Y$, alors f est dite continue ssi :

$\forall A \in D_2 , f^{-1}(A) \in D_1$.

La continuité en un point x_0 dans un r-espace peut être introduite de la même manière que dans un espace topologique :

Définition 2 :

Soit $x_0 \in X , f : X \longrightarrow Y$ f est dite continue en x_0 ssi :

$\forall V \in D[f(x_0)] , \exists U \in D(x_0)$ tel que $f(U) \subseteq V$.

Dans un r-espace, la continuité en tout point $x \in X$, n'entraine pas la continuité de f.

Exemple 1 :

Soit X un ensemble infini $D_1 , D_2 \subset P(X)$

$D_1 = \{\phi$, tous les sous-ensembles infinis de X, et tous les sous-ensembles de X ayant exactement 10 k éléments $k = 1, 3, 5,\ldots\}$

$D_2 = \{\phi$, tous les sous-ensembles infinis de X, et tous les sous-ensembles de X ayant exactement 10 k éléments $k = 1, 2, 4, 6, \ldots\}$

(X, D_1) et (X, D_2) sont deux r-espaces.

Considérons $f : (X, D_1) \longrightarrow (X, D_2)$

$$x \longrightarrow f(x) = x$$

soit $x_0 \in X$, $f(x_0) = x_0$

et soit $V \in D(f(x_0)]$ ie $V \in D_2$ et $f(x_0) \in V$, alors $\exists\, u \subseteq V = f^{-1}(V)$,

u contient exactement 10 éléments tel que $x_0 \in u$ et $u = f(u) \subseteq V \Rightarrow u \in D_1$

et par suite f est continue en $x_0 \in X$.

D'autre part, il est clair que si $V \subset X$ et V contient 20 éléments alors $V \in D_2$, mais $f^{-1}(V) = V \notin D_1$ ce qui montre que f n'est pas continue.

<u>Définition 3</u> :

(X, D_1) et (Y, D_2) deux r-espaces, $f : X \longrightarrow Y$, $x_0 \in X$ f est dite r-continue en x_0 si :

$\forall\, V \in D[f(x_0)]$ et $\forall$ U prévoisinage de x_0 tel que $f(U) \subseteq V$, il existe

$U_1 \in D(x_0)$ tel que $U \subseteq U_1$ et $f(U_1) \subseteq V$.

Dans l'article [3], on démontre les résultats suivants :

a) f continue ssi f est r-continue en tout point $x_0 \in X$

b) Si f est r-continue en x_0, alors f est continue en x_0

c) Dans un espace topologique, f r-continue en $x_0 \Leftrightarrow$ f continue en x_0.

Considérons l'application $f : (X , D_1 \cup D_2) \longrightarrow (y , D_3 \cup D_4)$ et donnons la définition suivante :

<u>Définition 4</u> :

f est r-continue en $x_0 \in X$ ssi $\forall\ V \in D[f(x_0)]$, $\forall\ x \in X$ tel que $f(x) \in V$,

$\exists\ U_1 \in D_1 \cup D_2$ tel que $\{x , x_0\} \subset U_1$ et $f(U_1) \subseteq V$.

On va démontrer que dans le cas de r-topologies de la forme $D_i \cup D_j$, les définitions 3 et 4 sont équivalentes.

<u>en effet</u> :

Notons par (1) et (2) les seconds membres des déf 3 et 4 respectivement.

$(1) \overset{?}{\Rightarrow} (2)$ faisons un raisonnement par l'absurde, supposons que (1) est satisfaite mais, $\exists\ V \in D[f(x_0)]$ et $x \in X$ tel que $f(x) \in V$ et $\forall\ U_1 \in D_1 \cup D_2$ tel que $\{x , x_0\} \subset U_1$ $f(U_1) \not\subseteq V$. contradiction avec (1).

$(2) \overset{?}{\Rightarrow} (1)$

Soit $V \in D[f(x_0)]$ et U prèvoisinage de x_0 tel que $f(U) \subseteq V$

on a : $f(U) \subseteq V \Leftrightarrow \forall\ y = f(x) \in f(U)$; $f(x) \in V$

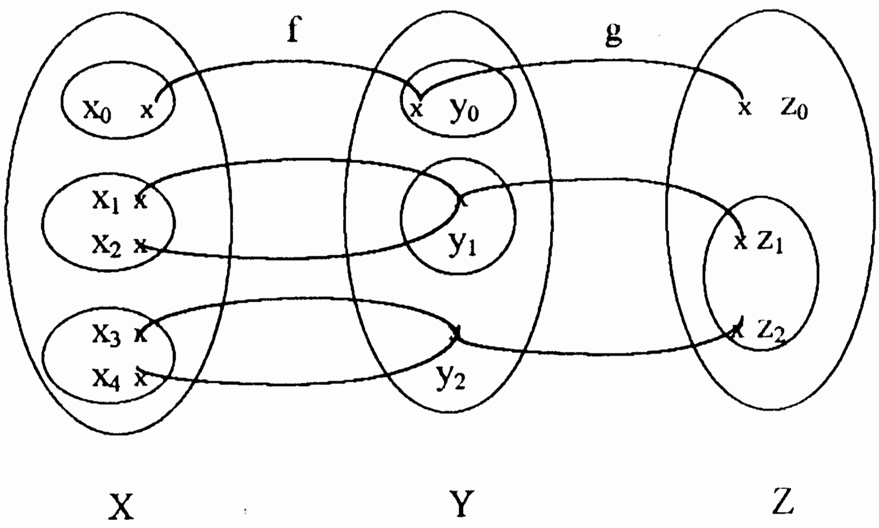
donc pour $x \in U \subset X$ tel que $f(x) \in V$, $\exists\ U_1 \in D_1 \cup D_2$ tel que $\{x , x_0\} \subset U_1$ et $f(U_1) \subseteq V$ (par hypothèse).

$U_1 \in D_1 \cup D_2$ et $x_0 \in U_1 \Rightarrow U_1$ voisinage de x_0, d'autre part pour tout $x \in U$ tel que $f(x) \in V$, on a $x \in U_1 \Rightarrow U \subseteq U_1$ et par suite la condition (1) est vérifiée C.q.F.D.

Remarque 1 :

Etant donnée deux applications $f : (X, D_1) \longrightarrow (Y, D_2)$ et $g : (Y, D_2) \longrightarrow (Z, D_3)$, dans le cas général des r-espaces, si f est r-continue en x_0 et g r-continue en $f(x_0)$, alors gof n'est pas toujours r-continue en x_0.

Exemple 2 :



$D_1 = \{\phi, X, \{x_0\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\}$

$D_2 = \{\phi, Y, \{y_0\}, \{y_1\}\}$

$D_3 = \{\phi, Z, \{z_1, Z_2\}\}$

$f(x_1) = y_1 \qquad gof(x_1) = z_1$

f est r-continue en x_1 ; en effet :

si $V = \{y_1\}$

$\nearrow$ $U = \{x_1\}$; $\exists\, U_1 = \{x_1, x_2\}$ tq $U \subseteq U_1$ et $f(U_1) \subseteq V$

$\searrow$ $U = \{x_1, x_2\}$, $\exists\, U_1 = U$ et $f(U_1) \subseteq V$.

si $V = Y$, il suffit de prendre dans tous les cas $U_1 = X$ de même, on montre que g est r-continue en $y_1 = f(x_1)$.

si $W = \{z_1 , z_2\} \longrightarrow U = \{y_1\}$, $\exists\, U_1 = U$ tel que $U \subset U_1$ et $g(U_1) \subseteq W$

si $W = Z$, on choisit $U_1 = Y$.

Par contre, on voit bien que pour $W = \{z_1 , z_2\}$ et U prévoisinage de x_1 tel que $U = \{x_1 , x_3 , x_4\}$ avec $gof(U) = \{z_1 , z_2\} \subseteq W$ il n'existe pas de voisinage U_1 de x_1 tel que $U \subseteq U_1$ et $gof(U) \subseteq W$, ce qui montre que gof n'est pas r-continue en x_1.

On peut voir que, la composée de deux applications est r-continue dans les cas suivants :

i) si f r-continue en x_0 et g continue

ii) si f r-continue en x_0, f ouverte et g r-continue en $f(x_0)$

iii) si f r-continue en x_0, g r-continue en $f(x_0)$ et $\forall$ W voisinage de $g[f(x_0)]$, $\forall\, U \in D_1$ tel que $f(U) \subseteq g^{-1}(W)$, $\exists$ V ouvert de Y

tel que $f(U) \subseteq V \subseteq g^{-1}(W)$.

<u>Démonstration</u> :

$f : (X , D_1) \longrightarrow (Y , D_2)$

$g : (Y , D_2) \longrightarrow (Z , D_3)$

-i) Soit W un voisinage de $gof(x_0)$ et U un prés voisinage de x_0 tel que $gof(U) \subseteq W$ alors $f(U) \subseteq g^{-1}(W)$.

existe t-il U_1 voisinage de x_0 tel que $U \subseteq U_1$ et $gof(U_1) \subseteq W$.

On a :

$gof(x_0) \in W \in D_3 \Rightarrow f(x0) \in g^{-1}(W) \in D_2$ (car g continue)

$g^{-1}(W)$ ouvert de Y contenant $f(x_0)$, donc voisinage de $f(x_0)$, et il vérifie $f(U) \subseteq g^{-1}(W)$.

f étant r-continue en x_0, alors il existe U_1 voisinage de x_0 tel que $U \subseteq U_1$ et

$f(U_1) \subseteq g^{-1}(W) \Rightarrow gof(U_1) \subseteq g[g^{-1}(W)] \subseteq W \Rightarrow$ gof est r-continue en x_0.

- ii) Soit W un voisinage de $gof(x_0)$ et U prévoisinage de x_0 tel que $gof(U) \subseteq W$.

$U = U' \cup \{x_0\}$ avec $U' \in D_1$.

$V = f(U) = f(U') \cup \{y_0\}$ est un prévoisinage de $y_0 = f(x_0)$ (car $f(U')$ est un ouvert de Y) et il verifie $g(V) \subseteq W$.

g étant r-continue en $y_0 \Rightarrow \exists\ V_1$ voisinage de y_0 tel que $V \subseteq V_1$ et $g(V_1) \subseteq W$.

V_1 voisinage de $f(x_0)$ et U prévoisinage de x_0 tel que $f(U) \subseteq V_1$ alors, puisque f est r-continue en x_0, $\exists\ U_1$ voisinage de x_0 tel que $U \subseteq U_1$ et $f(U_1) \subseteq V_1$

$\Rightarrow gof(U_1) \subseteq g(V_1) \subseteq W$ et gof est r-continue en x_0

- iii) Soit W un voisinage de $gof(x_0)$ et U un prévoisinage de x_0 tel que $gof(U) \subseteq W$ alors $f(U) \subseteq g^{-1}(W)$.

$U = U' \cup \{x_0\}$ tel que $U' \in D_1$

on a : $U' \subseteq U \Rightarrow f(U') \subseteq f(U) \subseteq g^{-1}(W)$

et d'après l'hypothèse iii), il existe $V \in D_2$ tel que $f(U') \subseteq V \subseteq g^{-1}(W)$

Si on prend $M = V \cup \{f(x_0)\}$, M sera un prévoisinage de $f(x_0) = y_0$

tel que $g(M) = g(V) \cup \{gof(x_0)\} \subseteq W$

$\Rightarrow \exists\, M_1$ voisinage de y_0 tel que $M \subseteq M_1$ et $g(M_1) \subseteq W$ (g r-continue)

$\overset{(f\ r\text{-continue})}{\Rightarrow} \quad \exists\, U_1$ voisinage de x_0 tel que $U \subseteq U_1$ et $f(U_1) \subseteq M_1$

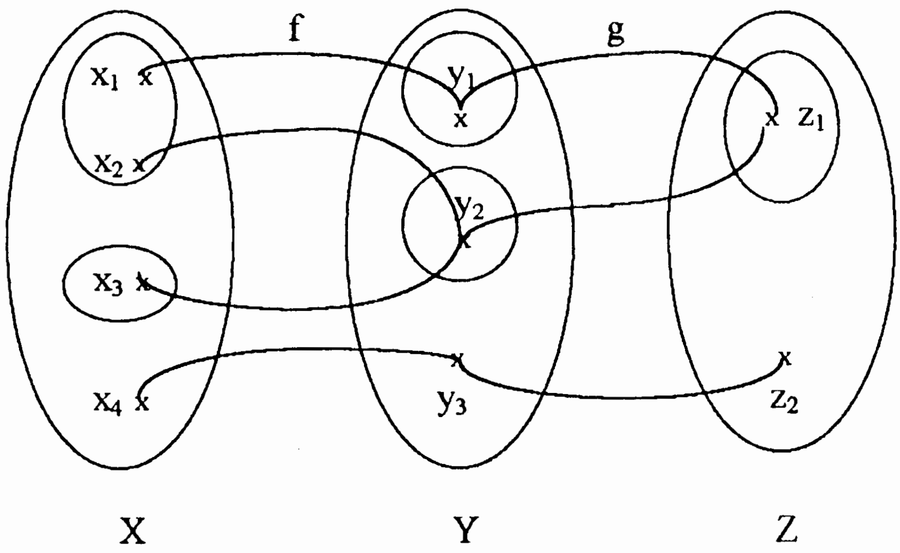
$\Rightarrow gof(U_1) \subseteq g(M_1) \subseteq W$

$\Rightarrow$ gof est r-continue en x_0.

Remarque 2 :

On peut montrer sur un exemple, qu'aucune des conditions i) , ii) et iii) n'est suffisante pour que gof soit r-continue.

Exemple 3 :



$D_1 = \{\phi , X , \{x_1 , x_2\} , \{x_3\}\}$

$D_2 = \{\phi , Y , \{y_1\} , \{y_2\}\}$

$D_3 = \{\phi , Z , \{z_1\}\}$

$$\text{Si } W = \{z_1\} \begin{cases} \nearrow\ U = \{x_1\} \text{ , } \exists\, U_1 = \{x_1 , x_2\} \ /\ U \subset U_1 \text{ et } gof(U_1) = \{z_1\} \subseteq W \\[2em] \searrow\ U = \{x_1 , x_2\} \text{ , } \exists\, U_1 = U \ /\ gof(U_1) = \{z_1\} \subseteq W \end{cases}$$

$$\text{Si } W = Z \begin{cases} \nearrow\ U = \{x_1\} \text{ , } \exists\, U_1 = \{x_1 , x_2\} \\ \nearrow\ U = \{x_1 , x_2\} \text{ , } \exists\, U_1 = U \\[1em] \searrow\ U = \{x_1 , x_2\} \text{ , } \exists\, U_1 = X \\ \searrow\ U = X \text{ , } \exists\, U_1 = X \end{cases}$$

Donc gof est r-continue en x_1.

-i) g n'est pas continue :

Si $W = \{z_1\} \in D_3 \;\; g^{-1}(W) = \{y_1 , y_2\} \notin D_2$

-ii) f n'est pas ouverte :

$\{x_1 , x_2\} \in D_1$, mais $f(\{x_1 , x_2\}) = \{y_1 , y_2\} \notin D_2$

-iii) g n'est pas r-continue en $y_1 = f(x_1)$

Si $W = \{z_1\}$, $U = \{y_1 , y_2\}$, il n'existe pas U_1 tel que $U \subseteq U_1$ et $g(U_1) \subseteq W$.

on revient aux r-espaces de la forme $(X , D_i \cup D_j)$ et on démontre la proposition suivante :

<u>proposition 1</u> : $f : (X , D_1) \longrightarrow (Y , D_2)$ D_1 , $g : (Y , D_2) \longrightarrow (Z , D_3)$

D_1, D_2 et D_3 sont de la forme $D_i \cup D_j$.

Si f est r-continue en x_0 et g r-continue en $f(x_0) = y_0$, alors gof est r-continue en x_0.

Démonstration :

Soit $W \in D[gof(x_0)]$, $x \in X$ tel que $gof(x) \in W$

existe t-il $U_1 \in D_1$ tel que $\{x, x_0\} \subset U_1$ et $gof(U_1) \subseteq W$?

on a : $W \in D[gof(x_0)]$, $x \in X$ tel que $gof(x) \in W \Rightarrow f(x) \in Y$ et $g[f(x)] \in W$

(g étant r-continue en $f(x_0)$) $\Rightarrow \exists\, U_2 \in D_2$ tel que $\{f(x), f(x_0)\} \subset U_2$ et $g(U_2) \subseteq W$.

on a $U_2 \in D_2$ et $f(x_0) \in U_2 \Rightarrow U_2 \in D[f(x_0)]$ et $f(x) \in U_2$

(f r-continue en x_0) $\Rightarrow \exists\, U_1 \in D_1$ tel que $\{x_0, x\} \subset U_1$ et $f(U_1) \subseteq U_2$.

Donc : $\forall\, W \in D[gof(x_0)]$, $x \in X$ tel que $g[f(x)] \in W$, $\exists\, U_1 \in D_1$ tel que

$\{x, x_0\} \subset U_1$ et $g[f(U_1)] = gof(U_1) \subset g(U_2) \subseteq W \Rightarrow$ gof est r-continue en x_0.

Proposition 2 :

Soient (X, D_1) et (Y, D_2) deux r-espaces et $A \subset X$.

On dit que l'application $f : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si, pour toute r-suite généralisée $(x_s)_{s\in S}$ d'éléments de X, qui converge vers $x_0 \in X$ relativement à A, la r-suite généralisée $[f(x_s)]_{s\in S}$ converge vers $f(x_0)$ relativement à $f(A)$.

Démonstration :

C.N) Soit $W \in D_{f(A)}[f(x_0)]$, f étant continue, alors : $V = f^{-1}(W) \in D_A(x_0)$

$(V \in D_1, A \subset V$ et $x_0 \in V)$ et comme $(x_s) \xrightarrow[A]{} x_0$, alors il existe $s_0 \in S$ tel que

$\forall\, s \geq s_0$ on a: $x_s \in V = f^{-1}(W)$ et par suite $f(x_s) \in W \Rightarrow [f(x_s)]_{s\in S} \xrightarrow[f(A)]{} f(x_0)$

$\underline{C.S}$) Soit $B \in D_2 \overset{?}{\Rightarrow} f^{-1}(B) \in D_1$

$B \in D_2 \Rightarrow C = X - B$ est un fermé dans y.

Soit x_0 un point adhérent à $f^{-1}(C)$ relativement à A $\Leftrightarrow$ (d'après le théorème 5 du chapitre III) il existe une r-suite généralisée de points de $f^{-1}(C)$ qui converge vers x_0 relativement à A, qu'on note $(x_s)_{s\in S} \underset{\text{par hypothèse}}{\Rightarrow} (f(x_s))_{s\in S} \xrightarrow[f(A)]{} f(x_0) \overset{\text{Th III-5}}{\Leftrightarrow} f(x_0)$ est un point adhérent à C, donc $x_0 \in f^{-1}(C)$ fermé.

$f^{-1}(C) = f(X - B) = Y - f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(B)$ est ouvert

ie $f^{-1}(B) \in D_1 \Rightarrow f$ est continue.

Dans [6] on a introduit une classe d'applications qui présentent d'autres particularités en plus de la continuité, et qu'on a nommé applications totalement continues, définies de la façon suivante :

Définition :

(X , D_1) , (Y , D_2) deux r-espaces, f une application continue de X dans Y,

$A , B \subset Y / A \cap B = \varnothing$ et $B \in D_2$

f est dite totalement continue au point $x \in X$ si : elle vérifiée la condition suivante :

S: pour tout voisinage W de f(x) contenant B on a $W \cap A \neq \varnothing$ alors $\forall$ V voisinage de x contenant $f^{-1}(B)$ on a : $V \cap f^{-1}(A) \neq \varnothing$.

* f est totalement continue sur X, si elle est totalement continue en tout point $x \in X$.

Proposition 3 :

(X , D_1) , (Y , D_2) deux r-espace et f une application continue définie de X dans Y. f est totalement continue en tout point $x \in X$ Ssi :

$\forall$ A , B $\subset$ Y tel que $A \cap B = \emptyset$ $B \in D_2$, $\exists$ $(f(x_s))_{s\in S}$ r-suite généralisée de points de Y tel que à partir d'un certain rang $f(x_s)$ appartient à A et pour laquelle f(x) est un point adhérent relativement à B alors, il existe dans X une r-suite généralisée (x_s) tel que à partir d'un certain rang $x_s \in M$, $f(M) \subset A$ et pour laquelle x est un point adhérent relativement à $N \in D_1$, $F(N) \subset B$.

Démonstration :

C.N : f(x) point adhérent à $[f(x_s)]_{s\in S}$ relativement à B $\Leftrightarrow$ $\forall V \in D_B[f(x)]$, $\exists$ $k \in S$ tel que $\forall$ $s \geq k$, $f(x_s) \in V$ et comme $f(x_s) \in A$ à partir d'un certain rang, alors on peut dire qu'à partir d'un certain rang on a : $f(x_s) \in A \cap V \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$ $\forall$ $V \in D_B[f(x)]$,

$V \cap A \neq \emptyset$ et comme f est totalement continue en x $\Rightarrow$ $\forall$ U voisinage de x contenant $f^{-1}(B)$ ie $\forall$ $U \in D_{f^{-1}(x)}(x)$ on a : $U \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset$.

Posons $M = f^{-1}(A)$ et $N = f^{-1}(B) \in D_1$ (car f continue) donc on a :

$\forall$ $U \in D_N(x)$ $U \cap M \neq \emptyset$, si on considère la suite (x_s) tel que $x_s \in U \cap M \neq \emptyset$ alors $(x_s)_{s\in S}$ est une r-suite généralisée d'éléments de $M \subset X$, qui converge vers x relativement à N (voir démonstration du théorème III-5).

$\overset{\text{Th III3}}{\Rightarrow}$ x est un point adhérent à (x_s) relativement à N.

<u>C.S</u>) Montrons que f est totalement continue en tout point $x \in X$ ie $\forall$ A , B $\subset$ Y, $B \in D_2$, $A \cap B = \emptyset$, Si $W \in D_B[f(x)]$ on a : $W \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \forall$ $V \in D_{f^{-1}(B)}(x)$:

$V \cap f^{-1}(A) \neq \emptyset$.

Soient A , B $\subset$ Y , $B \in D_2$, $A \cap B = \emptyset$ et $W \in D_B[f(x)]$ tel que $W \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$

$\exists\ (y_s)_{s\in S}$ r-suite généralisée de points de Y qui converge vers f(x) relativement à B $\Rightarrow$ f(x) est un point adhérent à $(y_s)_{s\in S}$ relativement à B, ce qui donne par hypothèse l'existance d'une r-suite généralisée d'éléments de X, et tel que $x_s \in M$ à partir d'un certain rang et $f(M) \subset A$ et pour laquelle x est un point adhérent relativement à $N \in D_1$ et $f(N) \subset B \Rightarrow \forall\ V \in V_N(x)$, $\exists\ k \in S$ tel que $\forall\ s \geq k$, $x_s \in V$ et $x_s \in M$, à partir d'un certain rang $\Rightarrow M \cap V \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang, $f(M) \subset A \Rightarrow$ $f^{-1}[f(M)] \subset f^{-1}(A) \Rightarrow M \subset f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A) \cap V \neq \emptyset$, d'autre part $f(N) \subset B \Rightarrow$

$N \subset f^{-1}(B)$

donc $\forall$ V voisinage de x contenant $f^{-1}(B)$, V contient $N \Rightarrow f^{-1}(A) \cap V \neq \emptyset$

$\forall\ V \in D_{f^{-1}(B)}(x)$ et donc f est totalement continue.

Proposition 4 :

(X, D_1), (Y, D_2) deux r-espaces, f une application continue définie de X dans Y; alors f est totalement continue en tout point $x \in X$ ssi :

$\forall\ A, B \subset Y$, $A \cap B = \emptyset$, $B \in D_2$, il existe une r-suite généralisée (y_s) dans Y qui converge vers f(x) relativement à B et telle qu'à partir d'un certain rang $k_0 \in S$, $y_s \in A$ alors il existe dans X une r-suite généralisée $(x_s)_{s\in S}$ telle qu'à partir d'un certain rang $x \in M$, $f(M) \subset A$ et qui converge vers x relativement à $N \in D$ tel que $f(N) \subset B$.

Cette proposition découle directement de la proposition 3 et du Théorème III-5.

Références :

[1] ZUZCAR, IGOR : Généralised topological spaces, Math, slova, 33, 1983 N°249 - 256.

[2] ZUZCAR, IGOR : Bases in r-spaces Math - Slovaca 35, 1985 N°2 , 175 - 184

[3] Z.I. : Homéomorphism and continuity of r-spaces Math - Slovaca 34, 1984 N°4 , 345 - 354

[4] KELLY, J.L : Genéral Topology. D, VAN NOSTRAND, New york 1955.

[5] BOURBAKI : Eléments de mathématiques, topologie général, Hermann, Paris, 1971.

[6] LAOUIR DALILA : r-filtres dans un r-espaces, Thèse de Magister.