

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**Université Constantine 1
Faculté des sciences exactes
Département de mathématique**

N° d'ordre :

N° de série :

THÈSE

**Présentée pour l'obtention du Diplôme de
Doctorat en Sciences**

Par
Laouira Widad

Intitulé

Contrôle des systèmes dynamiques chaotiques

Devant le jury :

Bessila Khaled	M.C.A Université de Constantine 1	Président
Hamri Nasr-Eddine	Prof Centre universitaire de Mila	Rapporteur
Zeraoulia ElHadj	Prof Université de Tebessa	Examineur
Hameida Ali	M.C.A Université de Constantine 1	Examineur
Abdelouahab Med Salah	M.C.A Centre universitaire de Mila	Examineur
Berkane Abdelhak	M.C.A Université de Constantine 1	Examineur
Houmor Tarek	M.C.B Université de Constantine 1	Invité

Soutenue le : 29/11/2018

Année Universitaire :2017-2018

Remerciements

Avant tout, ma reconnaissance va à Allah le tout puissant qui m'a donnée la volonté, le courage, la patience et qui a mis à ma disposition des gens merveilleux qui m'ont supporté et soutenu et m'a aidée à compléter ce travail.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma reconnaissance à **Mr HAMRI Nasr-Eddine**, professeur au département de mathématiques du centre universitaire de Mila, que je remercie énormément pour avoir encadré ce travail de thèse avec ces précieux conseils et beaucoup de compétence et de disponibilité et la confiance qu'il m'avait accordé au cours de ces années.

J'exprime également mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de thèse.

Je remercie énormément Monsieur **BESSILA Khaled** du département de mathématiques à l'université de Constantine1, de m'avoir fait l'honneur de présider ma soutenance.

Et également les examinateurs : le professeur **ZERAOULIA ElHadj** du département de mathématiques de l'université de Tebessa, pour avoir accepté d'examiner ce manuscrit et de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie profondément Monsieur **Hameida Ali** du département de mathématiques à l'université de Constantine1, de m'avoir fait l'honneur en acceptant d'embellir ce travail avec leurs remarques et conseils.

Mes chaleureux remerciements vont à Monsieur **Abdelouahab Med Salah** Centre universitaire de Mila, qui ont accepté d'examiner ce modeste travail de recherche.

Je remercie énormément Monsieur **BERKANE Abdelhak**, Chef de département de mathématiques à l'université de Constantine1, d'avoir bien voulu participer au Jury de ma soutenance de thèse.

Je remercie également Monsieur **Houmor Tarek** M.C.B Université de Constantine 1 de m'avoir fait l'honneur de présider ma soutenance.

Ces remerciements ne seraient pas complets si je ne mentionner pas mes parents, Mon Mari, mes frères, mes sœurs et l'ensemble de mes proches, mes amis et mes collègues dont les encouragements m'ont accompagné durant cette thèse.

Dédicaces

A la mémoire de mon cher grand-père « **Ali** »

A ma chère grand-mère

A mon cher père « **Mahfoud** » et ma chère mère « **Zelikha** »

A mon mari **Abdelaali**

A mes enfants « **Assem, Med Mendir, Nourlyakin Assil** »

A mes frères et mes sœurs

A toute ma famille et ma belle famille

A tous mes amis.

Table des matières

Introduction générale	6
I Systèmes dynamiques chaotiques, stabilité et contrôle	10
1 Systèmes dynamiques et chaos	11
1.1 Introduction	11
1.2 Systèmes dynamiques	11
1.2.1 Point fixe (critique ou équilibre)	12
1.2.2 Flot et trajectoire	15
1.2.3 Systèmes conservatifs et dissipatifs	16
1.2.4 Bifurcation	16
1.2.5 Attracteurs	20
1.2.6 Section de Poincaré	21
1.3 Chaos	23
1.3.1 Propriétés du chaos	23
1.3.2 Les transitions vers le chaos	25
1.4 Outils de caractérisation du chaos	26
1.4.1 Exposants de Lyapunov	26
1.4.2 Dimensions fractales	29

1.4.3	Diagramme de bifurcations	32
1.5	Conclusion	33
2	La théorie de la stabilité d'un système non linéaire	34
2.1	Introduction	34
2.2	Théorème de Hartman-Grobman	35
2.3	Theorie de Lyapounov	36
2.3.1	La fonction de Lyapunov	38
2.4	Le critère de Routh-Hurwitz	43
2.4.1	Critère de Routh-Hurwitz dans \mathbb{R}^3	44
2.5	Conclusion	46
3	Contrôle du chaos	47
3.1	Introduction	47
3.2	La méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY)	49
3.2.1	Principe de la méthode	49
3.3	La méthode de contrôle en boucle ouverte (nonfeedback)	51
3.4	La méthode de contrôle en boucle fermée (feedback)	51
3.4.1	La méthode de Pyragas	52
3.5	Le contrôle adaptatif	53
3.6	La méthode Backstepping	54
3.6.1	Commande poursuite de trajectoire par la méthode du Backstepping	60
3.7	La synchronisation	63
3.8	Conclusion	64
II	Contrôle et Application	65
4	Contrôle du système de Liu et système de Chua	66
4.1	Introduction	66
4.2	Système de Liu	67

4.2.1	Calcul des points d'équilibres	67
4.2.2	La dissipation du système de Liu	68
4.2.3	Stabilité des points d'équilibres	69
4.2.4	Le contrôle en boucle fermé décollé	72
4.2.5	Le contrôle du système de Liu en boucle amélioré (Enhacing)	82
4.3	Le circuit de Chua	89
4.3.1	Les équations de Chua	91
4.3.2	Résultats et tests numériques	93
4.3.3	Contrôle du système de Chua par la méthode du Backstepping	96
4.4	Conclusion	99
5	Application du contrôle à quelques systèmes dynamiques chaotiques	100
5.1	Introduction	100
5.2	Conditions sur la matrice Jacobienne	100
5.3	Application sur les systèmes chaotiques	102
5.3.1	La deuxième forme de Rössler	102
5.3.2	Contrôle de système de Liu	107
5.3.3	Le système de Genesio modifié	111
5.4	Contrôle linéaire en boucle fermée du système de Lorenz	115
5.5	Contrôle non linéaire du système de Lorenz	118
5.6	Le contrôle non linéaire du système de Genesio	121
5.6.1	Le contrôle du système de Genesio au point E_1	122
5.6.2	Le contrôle du système de Genesio au point E_2	123
	Conclusion générale	126
	Bibliographie	127

Table des figures

1-1	La bifurcation Noeud-col	17
1-2	Diagramme de la bifurcation transcritique.	18
1-3	Diagramme de bifurcation fourche.	18
1-4	Diagramme de la bifurcation de Hopf.	19
1-5	Attracteurs régulier	21
1-6	Section de Poincaré	22
1-7	Le diagramme de bifurcation de L'application logistique	33
2-1	Portrait de phase du système (2.2)	36
2-2	Portrait de phase du système linéarisé.	37
4-1	Attracteur chaotique de Liu.	69
4-2	Le contrôle en boucle fermé décollé du système de Liu au point \bar{x}_1	73
4-3	Le contrôle en boucle fermée décollée du système de Liu au point \bar{x}_2	75
4-4	Le contrôle en boucle fermée décollée du système de Liu au point \bar{x}_3	77
4-5	Le contrôle en boucle fermée décollée au 2 ^{ème} cas du système de Liu au point \bar{x}_1	79
4-6	Le contrôle en boucle fermée décollée au 2 ^{ème} cas du système de Liu au point \bar{x}_2	80
4-7	Le contrôle en boucle fermée décollée au 2 ^{ème} cas du système de Liu au point \bar{x}_3	82
4-8	Le contrôle du système de Liu en boucle amélioré au point \bar{x}_1	84
4-9	Le contrôle du système de Liu en boucle améliorée au point \bar{x}_2	86
4-10	Le contrôle du système de Liu en boucle améliorée au point \bar{x}_3	87

4-11	Le contrôle du système de Liu en boucle amélioré au point \bar{x}_1 au 2 ^{ème} cas.	89
4-12	Le circuit de Chua.	90
4-13	Caractéristique i-v de la diode de Chua.	90
4-14	Les séries temporelle $x(t), y(t)$ et $z(t)$	94
4-15	Projection de l'attracteur de Chua sur le plan (x, y)	95
4-16	L'attracteur "Double scroll" de Chua dans l'espace de phase (x, y, z)	95
4-17	Convergence du système de Chua au point d'équilibre O	97
4-18	Convergence du Chua système dans l'espace de phases	98
4-19	Variation de la loi de contrôle finale u	98
5-1	Le contrôle du système de Rössler au point fixe E_1	103
5-2	Le contrôle du système de Rössler au point fixe E_2	105
5-3	Contrôle du système de Liu au point E_1	108
5-4	Le Contrôle du système de Liu au point E_2	110
5-5	Le contrôle du système de Genesio au point d'origine.	112
5-6	Le contrôle du système de Genesio au point E_2	113
5-7	Contrôle linéaire du système de Lorenz au point fixe E_1	116
5-8	Contrôle linéaire du système de Lorenz au point fixe E_2	117
5-9	Contrôle non-linéaire du système de Lorenz au point fixe E_1	119
5-10	Contrôle non-linéaire du système de Lorenz au point fixe E_2	120
5-11	Attracteur du système de Genesio modifié	121
5-12	Le contrôle non-linéaire du système de Genesio au point E_1	123
5-13	Le contrôle non-linéaire du système de Genesio au point E_2	125

Introduction générale

Les effets dynamiques des non linéarités font l'objet d'études effectuées par un grand nombre de chercheurs : mathématiciens, physiciens, géologues, chimistes, biologistes, astronomes, économistes et ingénieurs etc.... Souvent, ces chercheurs s'inspirent mutuellement de leurs travaux, puisque des motifs "universels" émergent souvent des systèmes non linéaires apparemment différents. Dans ce sens, la dynamique non linéaire est fortement interdisciplinaire. Cependant, la dynamique non linéaire était à l'origine une branche de la physique.

L'intérêt pour les systèmes dynamiques rejaillit dans les années 60 sous l'influence de mathématiciens américains (Moser, Smale), brésiliens (Peixoto), et soviétiques (Kolmogorov, Arnol'd et Sinai) qui utilisèrent les techniques différentielles topologiques pour développer cette théorie. Plus récemment, les systèmes dynamiques ont bénéficié de l'intérêt et des techniques d'horizons divers tels que la physique bien sûr, mais aussi l'économie, la biologie, la météorologie, . . . lorsque l'on s'est aperçu de l'importance et de l'étendue des domaines où la notion de stabilité des systèmes dynamiques intervenait. L'avènement de l'étude, à l'aide d'ordinateur, de systèmes dynamiques même simples (comme ceux de Julia et Mandelbrot) a permis de mieux les comprendre.

Poincaré, au début du siècle, a bien pressenti ce concept mais n'a pas pu aller jusqu'au bout, faute de moyens techniques. Birkhoff, Kolmogorov, Arnol'd et Moser ont aussi été des précurseurs mais il faut attendre l'arrivée des ordinateurs rapides, dans les années 50-60, pour voir s'édifier la théorie du chaos. Lorenz[1], en 1963, pose la première brique importante en mettant en évidence la sensibilité aux conditions initiales de son modèle atmosphérique. Cette sensibilité deviendra la définition moderne du chaos. Par la suite, des contributions de Ruelle, Takens, May, Feigenbaum,

Winfree et Mandelbrot ont consolidé les acquis et élargi le cadre d'applicabilité de la théorie. La dernière percée importante date de 1990 et continue encore aujourd'hui à faire des remous : le contrôle du chaos par Ott, Grebogi et Yorke (OGY) [2].

C'est en 1975 exactement que Tien-Yien LI et James A. Yorke ont introduit le mot Chaos avec le sens qu'on lui connaît maintenant en mathématique [3].

Depuis lors, de nombreux ajouts, modifications et améliorations ont été apportés à la méthode de contrôle originelle. Ces variations sur un même thème sont nées d'un besoin d'adapter la technique à différentes situations. En particulier, les expérimentateurs en sont venus à simplifier au maximum l'algorithme de contrôle de façon à pouvoir l'incorporer facilement dans un montage. Aussi, cette capacité nouvelle de contrôler le chaos a engendré une réorganisation de l'échelle d'appréciation des systèmes dynamiques. Avant 1990, un comportement chaotique signifiait l'échec, du moins en ingénierie [4]. Aujourd'hui, ce même comportement est synonyme de versatilité et de souplesse.

Les phénomènes chaotiques que l'on observe sont souvent dus aux non-linéarités que présentent les systèmes, dans des domaines très variés : mécanique, circuits électroniques [9][10][11], réactions chimiques [8], dynamique des fluides, processus biologiques, la médecine [13] et les systèmes de sécurité de L'information [12].

L'idée innovatrice du contrôle du chaos est que la trajectoire d'un système chaotique se rapproche d'une façon ergodique d'une orbite périodique. Ce qui signifie que la dynamique chaotique peut être vue comme un comportement périodique à un moment donné puis passe à un autre comportement périodique mais sans ordre déterminé, ce qui permet à la trajectoire de visiter toutes les orbites périodiques instables du système. Ce fait a suggéré l'idée que la sensibilité aux conditions initiales, puisse être, très souhaitable dans des situations expérimentales pratiques. S'il est vrai, qu'une petite perturbation puisse provoquer une réponse très grande au cours du temps, il est également vrai qu'un choix judicieux d'une telle perturbation peut diriger la trajectoire du système vers des états dynamiques désirés. C'est exactement l'idée qui a amené à une nouvelle ère de l'application des systèmes chaotiques. Ce comportement irrégulier et imprévisible a été habituellement considéré comme un ennui à éviter. De plus, le négliger ne résoud pas les problèmes. Afin de supprimer le chaos, une méthode dite " de contrôle du chaos " est nécessaire.

Ainsi, Ott, Grebogi et Yorke [2] ont développé l'algorithme OGY qui supprime toujours le chaos, par des petites perturbations des paramètres accessibles du système. Le système caractérisé par un mouvement chaotique est ainsi amené à un comportement dynamique désiré, par exemple une orbite périodique. Depuis, d'autres méthodes ont été développées pour contrôler le chaos [5][6][7]

Plusieurs autres méthodes ont été proposées depuis; nous citerons en particulier, celle proposée par Pyragas[14]. Cette méthode se base sur le contrôle à retard d'état, c'est à dire que la loi de contrôle est calculée à partir de la différence entre l'état actuel et l'état avec un retard de temps T , où T représente une période de l'orbite à stabiliser. Les états contrôlés par cette technique, convergent vers l'orbite désirée et non pas vers une approximation comme c'est le cas avec la méthode OGY.

De nombreuses applications potentielles se sont réalisées dans la sécurisation de la communication, des systèmes laser et biologiques, et d'autres domaines [15][16][17][18][20]. Différentes stratégies de contrôle ont été proposées pour stabiliser le chaos, telles que le contrôle adaptatif, le contrôle du délai et le contrôle flou. De manière générale, il existe deux approches principales pour contrôler le chaos : le contrôle par rétroaction (feedback) et le contrôle sans rétroaction (non-feedback). L'approche de contrôle de retour [19][21][22] offre de nombreux avantages tels que la robustesse et la complexité de calcul par rapport à la méthode de contrôle sans rétroaction.

L'ambition de ce travail de thèse est d'apporter une contribution aux deux voies de développement autour du chaos, détaillées dans la section précédente :

- Remplaçant les conditions de la stabilité du système chaotique ou non linéaire généralement du critère de Routh-Hurwitz par d'autres conditions définies par la matrice jacobienne.

- Utilisation de ces conditions pour accélérer la stabilité du système autour du point fixe.

Le travail développé dans ce mémoire entre dans ce cadre et est organisé de la façon suivante :

Partie1 : elle est consacré à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques en général;

- **Le premier chapitre** est consacré à une étude bibliographique aux définitions, aux méthodes et concepts de base nécessaires à la compréhension des systèmes chaotiques avec les différents outils pour l'étude qualitative des systèmes chaotiques : les systèmes dynamiques, le

point fixe, la bifurcation et l'exposants, dimension de Lyapunov.. .

Au **chapitre 2** nous présentons différents critères pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires : fonctions de Lyapounov, Le critère de Routh-Hurwitz.

Le troisième chapitre va exposer les principes de quelques méthodes pour contrôler les systèmes chaotiques; La méthode OGY, méthode de contrôle en boucle fermée (feedback) et ouverte , la méthode de Pyragas, Le contrôle adaptatif et finalement la méthode du Backstepping .

La partie 2 représente une partie d'application du contrôle sur les systèmes chaotiques.

Le chapitre 4 a pour objectif l'étude du contrôle des deux systèmes chaotiques par différentes stratégies avec les simulations numériques, le contrôle en boucle fermée sous deux formes pour le système de Liu, et le Backstepping, pour le système de Chua.

Le chapitre 5 est réservé à l'étude de la stabilité d'un système dynamique à comportement chaotique est établi par deux méthode principales; le théorème de Routh-Hirwitz ou par la recherche d'une fonction de Lyapunov. Ce chapitre a pour but le contrôle des systèmes chaotiques par la méthode en boucle fermée (linéaire et non-linéaire), et pour justifier la stabilité de système, on utilise d'abord une méthode avec de nouvelles conditions définies par la matrice Jacobienne du système, ces conditions sont déterminés à partir de théorème de Routh-Hirwitz, pour le deuxième cas, on fait le contrôle du système de Genesio, mais cette fois-ci on utilise la fonction de Lyapounov pour montrer la stabilité.

Première partie

Systemes dynamiques chaotiques, stabilité et contrôle

Chapitre 1

Systemes dynamiques et chaos

1.1 Introduction

Un systeme dynamique est un ensemble mecanique, physique, economique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'etat (ensemble de grandeurs suffisant a qualifier le systeme) evolue en fonction du temps. L'etude de l'evolution d'un systeme necessite donc la connaissance :

- de son etat initial, c'est-a-dire son etat a l'instant t_0 ;
- de sa loi d'evolution.

Un systeme peut etre :

- * continu : equations differentielles ordinaires, equations aux derivees partielles, .
- * discret : systeme d'equations algebriques recurrentes.

1.2 Systemes dynamiques

Cas continu

Un systeme dynamique presente deux aspects, son etat et sa dynamique, c'est-a-dire son evolution en fonction du temps.

On appelle systeme dynamique tout systeme d'equations differentielles du premier ordre defini par :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, v), \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad v \in V \subseteq \mathbb{R}^p \quad (1.1)$$

Le système (1.1) s'appelle un systèmes dynamiques. \mathbb{R}^n est l'espace des phases, \mathbb{R}^p est l'espace des paramètres et x est appelé vecteur d'état.

* $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ est un champ de vecteurs.

Cas discret

On appelle système dynamique discret tout système d'équations algébriques récurrentes défini par :

$$X_{k+1} = F(X_k, \mu) \quad X_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$$

Où F est la fonction matricielle de récurrence, $X_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état à l'instant t_k et $\mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres et $k \in \mathbb{N}$.

* Quand f (ou F) ne dépend pas explicitement du temps, mais seulement de x le système est dit "autonome", Dans le cas contraire, lorsque f dépend explicitement du temps, on a un système "non autonome".

Dans ce qui suit le système est autonome c'est-à-dire

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

Exemple 1.1 *L'oscillateur de Duffing :*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3 - \delta y + \gamma \cos \omega t, \end{aligned}$$

ou δ, γ et ω sont des paramètres physiques réels. L'espace des phases est \mathbb{R}^2 et L'espace des paramètres est \mathbb{R}^3 .

1.2.1 Point fixe (critique ou équilibre)

Une première approche pour l'étude de ces systèmes consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas d'évolution temporelle.

Définition 1.1 *Le point x^* est un point fixe du système dynamique (1.1) si*

$f(x^*) = 0$, c'est à dire que c'est le zéro du champ de vecteur.

Stabilité des points fixe : Nous illustrons les concepts de point fixe stable, asymptotiquement stable et instable.

Définition 1.2 *Un point fixe $x^* \in \mathbb{R}^n$ est stable si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : \quad \|x(0) - x^*\| < \sigma \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

si de plus, il existe σ_0 avec $0 < \sigma_0 < \sigma$ tel que :

$$\|x(0) - x^*\| < \sigma_0 \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$$

x^* est asymptotiquement stable . Si x^* n'est pas stable , alors il est instable .

Définition 1.3 [24] *On dira que x_0 est localement attractif pour le système (1.2) s'il existe un voisinage U de x_0 tel que $\forall x \in U, \phi_t(x)$ existe (flot) pour tout $t > 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0$. Si $U = \mathbb{R}^n, x_0$ est globalement attractif.*

Système linéarisé-valeurs propres Supposons que par un changement de coordonnées le point fixe ait été ramené à l'origine : $f(0) = 0$. Le développement de Taylor en $x = 0$ s'écrit :

$$f(x) = Df(o)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots \quad (1.3)$$

où

$$f = (f_1, \dots, f_n)^T, x = (x_1, \dots, x_n)^T$$

$$Df(x)x = \sum_j \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right) x_j$$

$$D^2f(x)(x, x) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) x_i x_j$$

$$D^3 f(x)(x, x, x) = \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \right) x_i x_j x_k \cdots \quad (1.4)$$

la matrice

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)$$

S'appelle la matrice jacobienne de $f(x)$. Pour x petit, (1.3) montre que le comportement du système au voisinage de 0 est celui du système linéarisé :

$$\dot{x} = Df(0)x \quad (1.5)$$

Dans le cas où la matrice $Df(0)$ possède n valeurs propres λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ distinctes, la solution de (1.5) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i \alpha^{(i)} \exp \lambda_i t$$

tel que : $\alpha^{(i)}$ est les vecteurs propres, c_i les constantes (déterminées par les conditions initiales).

Nature des points fixes

Théorème 1.1 • *Si toutes les valeurs propres ont leurs parties réelles négatives : le point fixe est asymptotiquement stable.*

- *Si une ou plusieurs valeurs propres sont des imaginaires pures, les autres valeurs ayant leurs parties réelles négatives, le point fixe est un point centre ou un point elliptique (stable mais pas asymptotiquement stable), pour les systèmes linéaires.*

- *Si une des valeur propres a sa partie réelle positive le point fixe est instable.*

- *Si DF n'a pas de valeurs propres nulles ou purement imaginaires le point fixe est un point hyperbolique, dans le cas contraire il est non hyperbolique.*

- *S'il existe i et j tel que $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ et $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ le point fixe est un point selle.*

- Si toutes les valeurs propres de DF sont réelles et de même signe, le point fixe est un nœud.

Un nœud stable est un puits, un nœud instable est une source.

1.2.2 Flot et trajectoire

Définition 1.4 Soit x_0 une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution du système dynamique autonome. L'ensemble des points $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t, x_0)$ est la trajectoire dans l'espace d'état passant au point x_0 à l'instant initial.

Soit le système dynamique autonome :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(U), \quad U \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

Définition 1.5 Toute solution du système autonome (1.6) $\phi_t(x)$ considérée comme un ensemble de trajectoires de différentes conditions initiales, est appelée flot.

On suppose que les solutions du système (1.6) sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le flot du système (1.6) est la famille avec un paramètre d'applications $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de U dans lui-même définies par $\phi_t(\alpha) = x(t, \alpha)$, pour tout $\alpha \in U$, $x(t, \alpha)$ est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(0) = \alpha \end{cases} \quad (1.7)$$

* $\phi_t(x_0)$ est de classe C^r .

* $\phi_0(x_0) = x_0$.

* $\phi_{t+s}(x_0) = \phi_t(\phi_s(x_0))$.

Soit $x_0 \in U$ une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution de (1.7).

Donc, deux trajectoires identiques émanent obligatoirement du même état initial :

$$\forall t, \phi(t, x_1) = \phi(t, x_2) \implies x_1 = x_2$$

1.2.3 Systèmes conservatifs et dissipatifs

Un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.

Théorème 1.2 *Théorème de divergence*

Soient ϕ_t le flot de (1.6), V un volume de l'espace des phases au temps $t = 0$, $V(t) = \phi_t(V)$ l'image de V par ϕ_t , on a :

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{t=0} = \int_V \operatorname{div} f dx_1 \dots dx_n \quad \text{et} \quad \operatorname{div} f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Le système est dissipatif si : $\frac{dV}{dt} < 0$.

Le système est conservatif si : $\frac{dV}{dt} = 0$.

1.2.4 Bifurcation

Lorsqu'un système dépend d'un paramètre μ (scalaire ou vectoriel), son comportement change-t-il qualitativement quand le paramètre varie ? Si oui, un tel changement est appelé bifurcation ; par abus de langage courant, on donnera le même nom à la valeur du paramètre autour de laquelle le changement se produit.

Les bifurcations sont présentes dans tout type de système :

- Physico-chimique : changement d'état lorsque le paramètre (température) atteint une certaine valeur ;
- Economique : effondrement d'un cours de bourse lorsque l'un des paramètres de la vie économique franchit un seuil donné ;
- Mécanique : apparition d'un équilibre asymptotiquement stable lorsqu'un amortissement, aussi faible soit-il, apparaît ;
- Social : basculement brutal d'un groupe dans la violence après dégradation continue de ses conditions de vie.

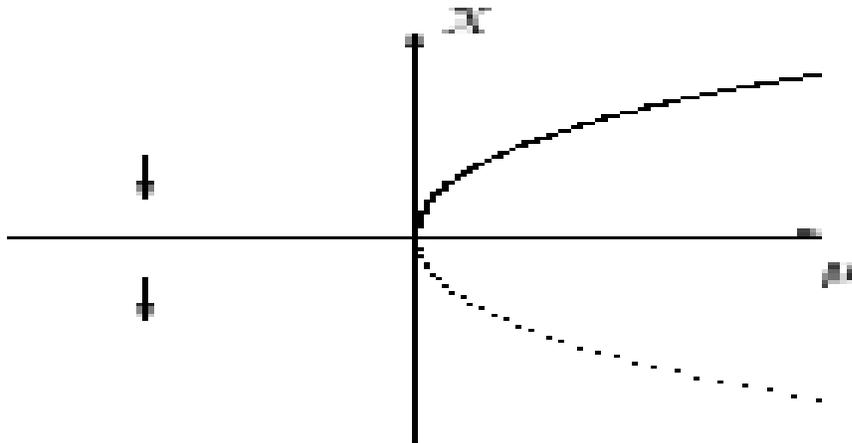


FIG. 1-1 – La bifurcation Noeud-col

Bifurcation noeud-col

C'est la bifurcation associée à l'équation :

$$\dot{x} = x^2 - \mu$$

avec μ le paramètre de contrôle.

- pour $\mu < 0$, il n'y a aucun point d'équilibre ;
- pour $\mu = 0$, $x = 0$ est un point d'équilibre instable ; plus précisément il est « stable à gauche » et « instable à droite », donc semi-stable ;
- pour $\mu > 0$, il y a deux points d'équilibres : point d'équilibre asymptotiquement stable $-\sqrt{\mu}$ et point d'équilibre instable $\sqrt{\mu}$.

Bifurcation d'échange de stabilité (transcritique)

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

système présentant un ou deux équilibres :

- pour $\mu < 0$, il y a l'équilibre asymptotiquement stable 0 et l'équilibre instable μ ;

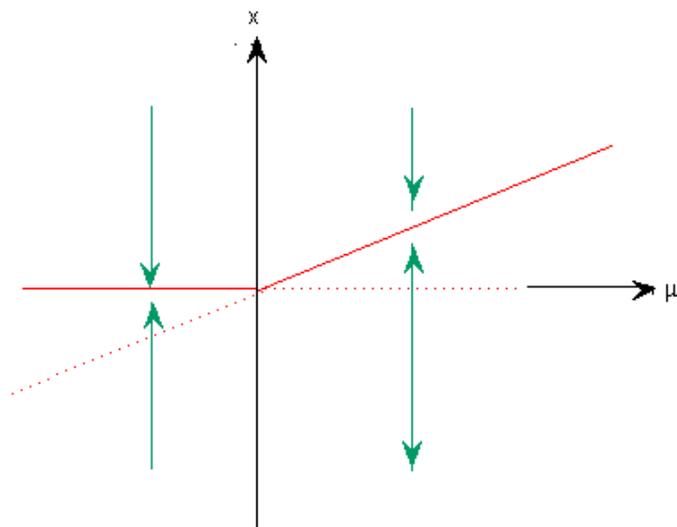


FIG. 1-2 – Diagramme de la bifurcation transcritique.

- pour $\mu = 0, x = 0$ est un équilibre instable : c'est comme pour la bifurcation noeud-col l'équilibre semi-stable du système $\dot{x} = -x^2$;
- pour $\mu > 0$, il y a deux équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable μ et l'équilibre instable 0.

Bifurcation fourche

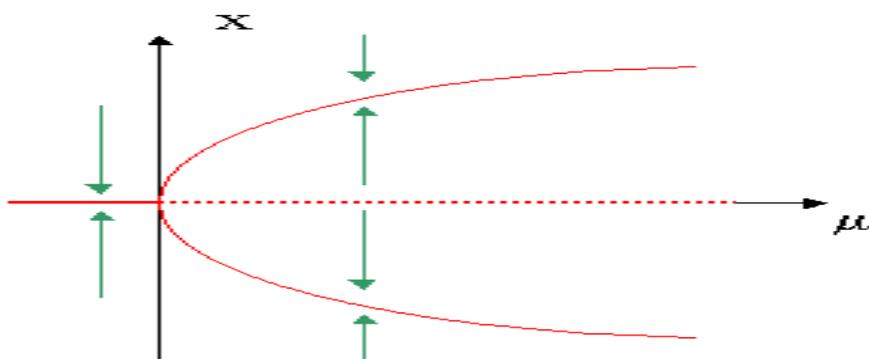


FIG. 1-3 – Diagramme de bifurcation fourche.

$$\dot{x} = x^3 - \mu x$$

- pour $\mu < 0$, il y a un seul équilibre 0, qui est instable ;
- pour $\mu = 0$, on a $\dot{x} = x^3$: 0 est toujours l'équilibre unique, instable ;
- pour $\mu > 0$, il y a trois équilibres : l'équilibre asymptotiquement stable 0, et les deux équilibres instables $\pm\sqrt{\mu}$.

Bifurcation Hopf

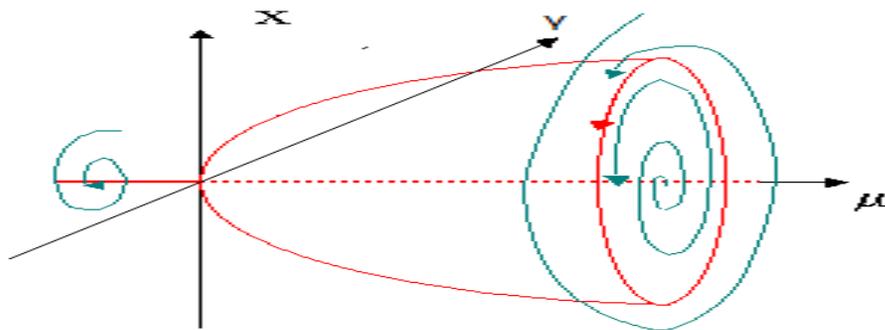


FIG. 1-4 – Diagramme de la bifurcation de Hopf.

C'est la bifurcation associée à l'équation dans le plan complexe

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) = (\mu + iw)z(t) - |z|^2 z(t)$$

pour $z(t) = x(t) \exp i\theta(t)$, l'équation s'exprime sous forme d'un système

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{\theta} = w \end{cases}$$

la première équation n'est autre qu'une bifurcation fourche de paramètre de contrôle μ .

- Si $\mu < 0$ le système possède un point d'équilibre stable.

· Lorsque $\mu = 0$, ce point d'équilibre perd sa stabilité. lorsque $\mu > 0$, il se forme alors une trajectoire périodique stable ou un cycle limite.

1.2.5 Attracteurs

Définition 1.6 *un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers les quels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.*

Définition 1.7 *Soit A un ensemble compact, fermé, de l'espace des phases. On suppose A ensemble invariant par le flot : $\phi_t(A) = A$ pour tout t . A est dit stable si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $X(X_0, t) = \phi_t(X_0)$ restera dans U si $X_0 \in V$. Si de plus*

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$$

et s'il existe une orbite dense dans A , alors A est un attracteur. Lorsque A est un attracteur, l'ensemble

$$W = \bigcup_{t < 0} \phi_t(V)$$

est appelé bassin d'attraction. C'est l'ensemble des points dont les trajectoires asymptotiques convergent vers A .

Guckenheimer et Holmes [23] donnent une définition de l'attracteur comme suit : Un ensemble A est un attracteur si :

Définition 1.8 *i) A est fermé et invariant.*

ii) A est indécomposable

iii) L'union de A avec son bassin d'attraction et de mesure de Lebesgue positive

Les différents types d'attracteurs sont :

1- Le point fixe ; représente par un point dans l'espace de phase.

2- L'attracteur périodique (ou cycle limite) qui représente par une trajectoire fermée dans l'espace de phase.

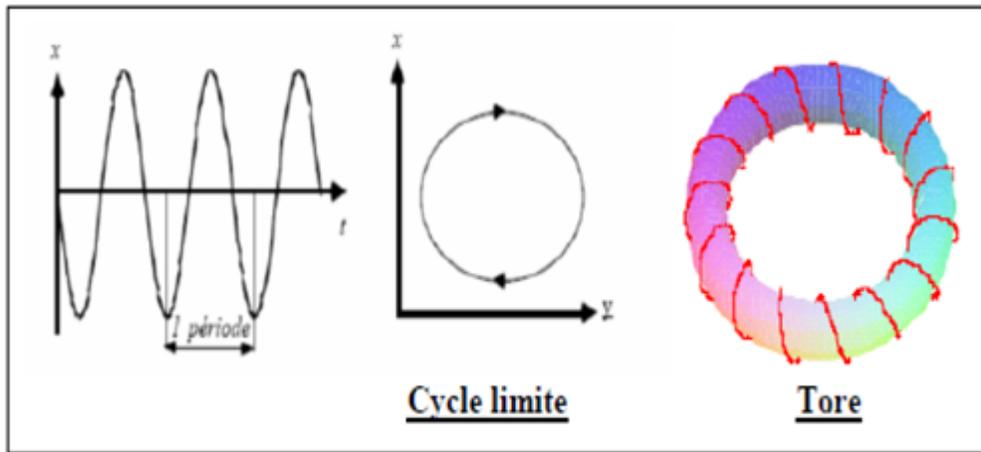


FIG. 1-5 – Attracteurs régulier

3- L'attracteur quasi-périodique (tore T^2); c'est une trajectoire s'enroule le long d'un tore, ne se referme plus sur elle-même, la seule possibilité pour notre trajectoire est alors de s'enroule autour du tore et de remplir sa surface de manière dense, la trajectoire finira par se refermer sur elle-même au bout d'un temps infini .

4- L'attracteur étrange; est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes chaotique.

1.2.6 Section de Poincaré

L'application de Poincaré est un outil mathématique simple permettant de transformer un système dynamique en temps continu en un système dynamique discret. Cette transformation s'opère via une réduction d'une unité de l'ordre du système.

Soit un système dynamique continu, décrit dans un espace d'état de dimension n et la trajectoire de sa solution en X_0 . Définissons dans cet espace une hyper surface de dimension $n - 1$. L'application de Poincaré est le système dynamique en temps discret dont la suite des itérés correspond aux coordonnées des points d'intersection successifs de la trajectoire avec cette surface. L'ensemble des points d'intersections, situés sur l'hyper surface est appelé section de Poincaré.



FIG. 1-6 – Section de Poincaré

Soit un système différentiel autonome

$$\frac{dX}{dt} = F(X)$$

où $X \in M$ une variété de dimension n , et

$$F : M \rightarrow TM$$

un champ de vecteur de classe C^r , et ϕ le flot associé. Supposant que le système admette une solution périodique de période $T > 0$, contenant un point X_0 tel que :

$$\phi(X_0, t + T) = \phi(X_0, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Soit Σ une surface, de dimension $n - 1$, transverse au F en X_0 , dans ce cas on peut trouver un ouvert U dans Σ contenant X_0 tel que, quelque soit $X \in U$, il existe $\tau(X)$ proche de t :

$$\phi(X, \tau(X)) \in \Sigma.$$

Donc l'application de Poincaré est définie par :

$$\begin{aligned} \pi & : \Sigma \rightarrow \Sigma \\ X & \rightarrow \pi(X) \end{aligned}$$

$\pi(X)$ est le point d'intersection de Σ avec la trajectoire du système issue de X_0 . On note que X_0 est fixe ou périodique pour π si et seulement si X_0 est sur une orbite périodique; par conséquent l'étude de la stabilité d'une orbite périodique du système considéré peut se faire à travers une analyse de π .

1.3 Chaos

Depuis longtemps, le chaos était synonyme de désordre et de confusion. Il s'opposait à l'ordre et devait être évité. La science était caractérisée par le déterminisme, la prévisibilité et la réversibilité. Poincaré [40] fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème de l'interaction de trois corps célestes.

Le terme chaos définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales, et imprédictible à long terme. Des chercheurs d'horizons divers ont alors commencé à s'intéresser à ce comportement.

Le chaos au sens de Li et Yorke (1975) [25]

Définition 1.9 Soit $g : X \rightarrow X$ une application continue sur un espace métrique $(X; d)$ compact. On dit que g est chaotique dans le sens de Li et Yorke s'il existe un sous-ensemble dénombrable S de X vérifiant les propriétés suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(g^n(x), g^n(y)) > 0 \text{ pour tout } x, y \in S, x \neq y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf d(g^n(x), g^n(y)) = 0 \text{ pour tout } x, y \in S, x \neq y$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup d(g^n(x), g^n(p)) > 0 \text{ pour tout } x \in S, p \in X, p \text{ périodique.}$$

1.3.1 Propriétés du chaos

Les définitions et propriétés suivantes permettent de comprendre qualitativement les points marquants des systèmes chaotiques.

1- La non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.

2- Le déterminisme

Un système est dit déterministe lorsqu'il est possible de prédire (de calculer) son évolution au cours du temps : la connaissance exacte de l'état de système à un instant donné, l'instant initiale permet le calcul précis de l'état de système à n'importe quel autre moment.

3- Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

où $x \in R^n$ est la variable d'état, et soit $\phi_t(x_0)$ la solution de l'équation (1.8) qui passe par x_0 quand $t = t_0$:

Définition 1.10 [23] *On dit que la fonction $f : I \rightarrow I$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in I$ et un certain voisinage $V \subset I$ de x , il existe $y \in I$ tel que $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$.*

4- Dimension fractale

Berge et al[26] imposent une condition supplémentaire d'un type dimensionnel[27] :

Définition 1.11 *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

5- Attracteurs étranges

Un autre type d'attracteur intéressant est l' attracteur étrange. Cet attracteur a été introduit par Ruelle et Takens. Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

- 1) Dans l'espace des phases, l'attracteur est de volume nul.

2) La dimension d de l'attracteur d'un système continu et autonome est fractale (non-entière) avec $2 < d < n$, où n est la dimension de l'espace de phases.

3) Sensibilité aux conditions initiales : deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'écarter l'une de l'autre.

D. Ruelle et F. Takens [23] donnent la définition suivante :

Définition 1.12 *Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.*

1.3.2 Les transitions vers le chaos

Les systèmes présentant un comportement chaotique possèdent en général des transitions entre un état chaotique et un état non chaotique.

Les trois grands scénarios de transition vers le chaos sont :

- L'intermittence
- Le doublement de période ou route de Feigenbaum.
- Le quasi-périodicité qui se traduit par des bifurcation de Hopf répétées.

L'intermittence vers le chaos

Le comportement caractéristique des intermittences est celui d'un signal qui est régulier-périodique, pendant un certain intervalle de temps et qui évolue pour donner pendant un bref instant, une "bouffée" généralement chaotique, il reprend ensuite son comportement régulier et le processus recommence. Le comportement chaotique global est alors donné par les bouffées elles-mêmes mais surtout par la distribution aléatoire de la longueur des périodes régulières, appelées encore périodes laminaires .

Par variation d'un paramètre de contrôle du système, l'une des valeurs propres d'une matrice dite "matrice de Floquet" augmente jusqu'à croiser le cercle unité dans le plan complexe, il existe trois types de croisement du cercle unité, par les valeurs $(+1)$ (intermittence de type I), (-1) (intermittence de type III) et $(\alpha \pm i\beta)$ (intermittence de type II).

Le doublement de période ou route de Feigenbaum

La route de Feigenbaum se traduit par des doublements de période successifs au fur et à mesure que la contrainte augmente, la période est multipliée par 2, 4, 8, ... avec des doublement de période de plus en plus rapprochés. Lorsque la période est infinie, le système est chaotique.

Quasi-périodicité et bifurcation de Hopf

Contrairement aux deux routes précédentes, les bifurcations de Hopf ne se trouvent pas dans les systèmes à une dimension. Cette troisième route découle de la théorie de Ruelle et Takens [41] proposée en 1971 est complétée en 1978 par Ruelle, Takens et Newhouse [42](R.T.N)

Considérons un système dynamique dans un état stationnaire (point fixe). Supposons que par augmentation d'un paramètre de contrôle ce système perde cet état stationnaire pour osciller à la fréquence f_1 par l'intermédiaire d'une bifurcation de Hopf. Imaginons qu'à la suite périodique à deux fréquences f_1 et f_2 . L'attracteur correspondant est de ce fait un tore de dimension 2. A la suite d'une troisième bifurcation de Hopf ce fait un tore de dimension 2 devient un tore de dimension 3, soit un régime quasi périodique à trois fréquences f_1, f_2, f_3 .

D'après Ruelle, Takens et Newhouse (RTN), sous l'effet de perturbations, ce nouveau tore peut devenir instable et être remplacé par un attracteur étrange. Le comportement dynamique du système n'est plus quasi périodique à trois fréquences mais chaotique. Ainsi à partir d'un point fixe, le régime chaotique est obtenu à partir de trois bifurcations de Hopf.

1.4 Outils de caractérisation du chaos

1.4.1 Exposants de Lyapunov

Les systèmes dynamiques chaotiques sont très sensibles aux petites variations de leurs conditions initiales, Ces variations peuvent rapidement prendre d' énormes proportions. Le mathématicien russe **Alexander Lyapunov** s'est penché sur ce phénomène et a développé une quantitative permettant de mesurer la vitesse à laquelle ces petites variations peuvent s'amplifier. Cette quantité appelée "exposant de Lyapunov" mesure en fait le degré de sensibilité d'un système

dynamique.

Les exposants de Lyapunov mesurent l'attraction exponentielle ou la séparation dans le temps de deux trajectoires adjacentes, dans l'espace des phases, ayant des conditions initiales différentes.

Si d_0 est la distance qui sépare deux points initiaux de deux trajectoires, la distance après un temps t est :

$$d(t) = d_0 \exp \lambda t \quad (\text{ou également défini par } d(t) = d_0 2^{\lambda t})$$

où λ est exposant de Lyapunov.

Exposant de Lyapunov des attracteurs non chaotiques :

Les exposants de Lyapunov peuvent caractériser le comportement d'un état stationnaire ainsi, on a :

- Pour un point d'équilibre asymptotiquement stable, $\lambda_i < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.
- Pour un cycle limite asymptotiquement stable, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_i < 0$ pour $i = 2, \dots, n$.
- Pour k-tore asymptotiquement stable, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k$ et $\lambda_i < 0$ pour $i = k + 1, \dots, n$.

Exposant de Lyapunov des attracteurs chaotiques :

Pour mettre en évidence des attracteurs chaotiques il faut mettre à profit ce qui les caractérise, c'est-à-dire, le phénomène de dépendance sensible aux conditions initiales et leur structure fractale. Cela va faire en essayant de déterminer la grandeur qui correspond à ces propriétés : exposants de Lyapunov et dimension fractale.

Cette sensibilité aux conditions initiales est due à l'imprédictibilité de la solution, qui provient de l'existence d'au moins un composant de répulsion ; c'est à dire, exposant de Lyapunov positif. Ainsi, l'exposant de Lyapunov le plus large quantifie la sensibilité aux conditions initiales.

En effet, ce qui distingue les attracteurs étranges ou chaotiques des attracteurs non chaotiques c'est bien l'existence d'un exposant de Lyapunov positif.

Du fait qu'au moins un exposant de Lyapunov d'un attracteur chaotique doit être positif, (un $\lambda_i > 0$), et que n'importe quel ensemble limite autre qu'un point d'équilibre doit avoir au moins un exposant de Lyapunov nul (un $\lambda_i = 0$) d'après le théorème de Haken , et que la somme des

λ_i pour un attracteur doit être négative ($\sum \lambda_i < 0$) ce qui impliquera l'existence d'au moins un exposant de Lyapunov négatif (un $\lambda_i < 0$) on a alors :

- un $\lambda_i > 0$ caractéristique du chaos
- un $\lambda_i = 0$ théorème de Haken.
- $\sum \lambda_i < 0$ définition du chaos

Ce qui précède, un attracteur étrange doit avoir au moins trois exposants de Lyapunov ; il en résulte que le chaos ne peut pas se manifester dans les systèmes autonomes du premier et du deuxième ordre et dans les systèmes non autonomes du premier ordre.

Remarque :

• si la trajectoire $\phi(X_0, t)$ est un point fixe X_e alors la matrice des solutions fondamentales s'écrit :

$$\Phi(X_0, t) = e^{DF(X_e)t}$$

Ce qui implique : $\mu_i(t) = e^{\hat{\lambda}_i t}$ si $\hat{\lambda}_i$ est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre de la matrice jacobienne $DF(X_e)$ et $\mu_i(t)$ la valeur propre de $\Phi(X_0, t)$.

d'où :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\mu_i(t)| = \text{Re} [\hat{\lambda}_i]$$

Cela signifie que l'exposant de Lyapunov λ_i d'un point fixe est égal à la partie réelle de la valeur propre $\hat{\lambda}_i$ du point fixe.

Exemple 1.2 *Considérons une itération à une dimension :*

$$X_{n+1} = F(X_n)$$

et deux conditions initiales différentes X_0 et $X_0 + \delta X_0$ la première itération conduit à :

$$X_1 + \delta X_1 = F(X_0) + \left(\frac{dF(X_0)}{dX} \right) \delta X_0,$$

soit

$$\delta X_1 = \left(\frac{dF(X_0)}{dX} \right) \delta X_0.$$

Après n itérations, on a :

$$\delta X_n = \left(\frac{dF^n(X_0)}{dX} \right) \delta X_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{dF(X_i)}{dX} \right) \delta X_0,$$

les termes

$$\gamma_n = \left(\frac{dF^n(X_0)}{dX} \right)^{1/n}$$

caractérisent la divergence. On définit alors l'exposant de Lyapunov de l'itération par :

$$\lambda(X_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dF^n(X_0)}{dX} \right|$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda(X_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \dot{F}(X_i) \right|$$

Si cet exposant est positif, les trajectoires divergent la trajectoire est chaotique. Les exposant de Lyapunov des différents types d'ensembles limites sont résumés dans le tableau ci dessous :

Espace de phase	Exposant de Lyapunov
point fixe	$0 > \lambda_1 \geq \lambda_1 \cdots \geq \lambda_n$
cycle	$\lambda_1 = 0, 0 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n$
tore	$\lambda_1 = \lambda_2, 0 > \lambda_3 \geq \lambda_4 \cdots \geq \lambda_n$
K -tore	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \cdots \lambda_K = 0, 0 > \lambda_{K+1} \geq \lambda_{K+2} \cdots \geq \lambda_n$
attracteur étrange	$\lambda_1 > 0, \sum \lambda_i < 0$

1.4.2 Dimensions fractales

Un attracteur étrange est caractérisé, entre autres, par sa dimension fractale. Nous allons, dans cette section, expliquer ce qu'est une dimension fractale.

Un ensemble A est fractale si sa dimension de Hausdorff [43] n'est pas entier. Il existe aussi

d'autres dimension non entières ou fractales comme la dimension de Kolmogorov ou de Capacité, la dimension de corrélation[45], la dimension de Lyapunov ... Toutes ces dimensions sont très proches l'une de l'autres et satisfont les propriétés suivantes [27] :

- 1- $A \subset B$, alors $d(A) \leq d(B)$.
- 2- Si $A = \emptyset$, alors $d(A) = 0$.
- 3- $d(A \times B) = d(A) + d(B)$.
- 4- Si f est une application différentiable sur A , alors $d(f(A)) = d(A)$.

Dimension de Hausdorff

Si U est un ensemble de \mathbb{R}^n , le diamètre de U est défini par :

$$|U| = \sup \{|X - Y|, X, Y \in U\}.$$

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ recouvert par des ensembles U_i de diamètre plus petit qu'un ε donné c'est-à-dire :

$$A \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < |U_i| \leq \varepsilon.$$

Soit d un nombre réel, $d \geq 0$, on pose :

$$\mu_d(A, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^d \right\}, U_i \leq \varepsilon$$

on définit alors la d -mesure de Hausdorff par :

$$\mu_d(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_d(A, \varepsilon).$$

Hausdorff [43] à démontré qu'il existe une valeur unique d_H pour laquelle

$$\mu_d(A) = \begin{cases} 0 & \text{quand } d > d_H. \\ \infty & \text{quand } d < d_H. \end{cases}$$

d_H appelé la dimension de Hausdorff de l'ensemble A .

Dimension de Kolmogorov ou de Capacité

Soit A un ensemble non vide muni d'une métrique et $N(\varepsilon, A)$ le nombre minimal d'ensembles de diamètre moins ou égale à ε qui peut donner un recouvrement de A . La dimension de Capacité [44] d_c est définie par :

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon, A)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Intuitivement cette dimension mesure la croissance du nombre d'ensembles de diamètres nécessaires pour couvrir A quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dimension de corrélation

Dans un régime chaotique les positions de deux points d'une même trajectoire éloignés dans le temps sont sans corrélation entre elles, et ceci par définition d'un tel régime. En revanche, tous les points étant situés sur l'attracteur, il existe entre eux une certaine corrélation spéciale que l'on peut chercher à caractériser à l'aide d'une fonction appropriée.

Une telle fonction peut s'écrire :

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \times [\text{nombre de paires } i, j \text{ dont la distance } |X_i - X_j| < R]$$

où i, j sont deux indices repérant les points sur la trajectoire qui en compte au total N . La fonction $C(R)$ compte le nombre de paires de points séparés d'une distance $|X_i - X_j| < R$, soit formelles

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^n H(R - |X_i - X_j|)$$

où H la fonction de Heaviside, $H(Z) = 1$ pour Z positif, et 0 autrement. La dimension de corrélation est alors définie par [45]

$$v = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log(C(R))}{\log(R)}$$

à la résolution ε , $C(R = \varepsilon)$ est la probabilité d'avoir une paire de points dans une cellule latérale ε . La distribution des distances sur l'attracteur étant relativement facile à estimer l'aspect

fractal des attracteurs est souvent caractérisé simplement par cette dimension de corrélation.

Dimension de Lyapunov

Une autre méthode pour estimer l'aspect fractal des attracteurs est la dimension de Lyapunov

.
Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ sont les exposant de Lyapunov du système dynamique, classés dans l'ordre décroissant et j un entier tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_j \geq 0$, alors, pour les espaces de phase de dimension plus grand que 2, Dimension de Lyapunov telle que proposée par Fredrickson et al.[29][28] sera définie comme suit :

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

Une dimension non entière est considérée comme un critère d'existence d'un comportement chaotique. Les attracteurs chaotiques sont donc des fractales car ils possèdent une dimension fractionnaire.

1.4.3 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint. Un diagramme de bifurcation délimite des zones de l'espace paramétrique dans lesquelles le comportement qualitatif du système est similaire. On voit apparaître aussi un enchaînement très rapide de doublements de période qui mène à une situation chaotique. Ce mécanisme de doublements de période est une des routes vers le chaos.

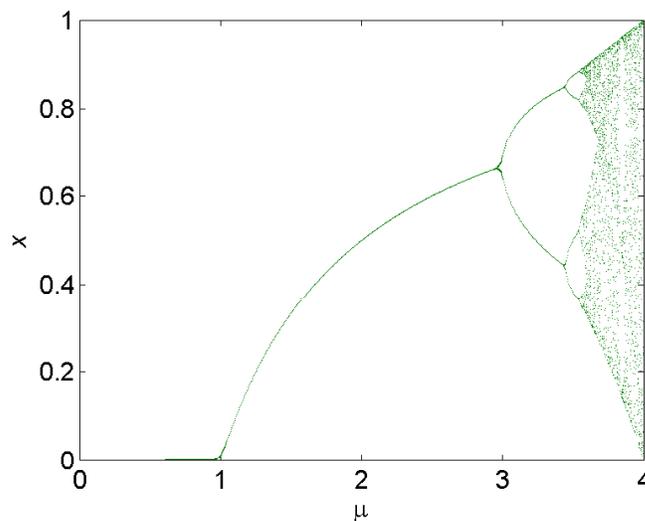


FIG. 1-7 – Le diagramme de bifurcation de L’application logistique

1.5 Conclusion

Ce chapitre fournit les moyens d’appréhender et de reconnaître un comportement chaotique, qualitativement et quantitativement. Nous avons présenté les différents outils présentant le comportement chaotique des systèmes, ce dernier est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, son attracteur étrange, sa dimension fractale et au moins l’un des ses exposants de Lyapunov est positif.

Chapitre 2

La théorie de la stabilité d'un système non linéaire

2.1 Introduction

Dans les études mathématiques de la stabilité on procède généralement avec un modèle mathématique de la dynamique du système et on étudie si le système possède la propriété de stabilité. Avec cette approche, on peut s'assurer que le modèle est stable ou non. Les conclusions concernant la stabilité du modèle ne s'appliquent pas au système physique réel que si le modèle utilisé est assez précis. La théorie de la stabilité joue un rôle central en théorie des systèmes ; différents types de problèmes de stabilité peuvent être rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques.

L'objet de la théorie de la stabilité est de tirer des conclusions quant au comportement du système sans calculer explicitement ses trajectoires. La contribution majeure fut apportée par A.M. Lyapunov, en 1892, dont les travaux n'ont été connus qu'à partir des années 60. Il a introduit la majorité des concepts et définitions de base concernant la stabilité des systèmes représentés par des systèmes différentiels arbitraires mais a aussi fourni les principaux résultats théoriques. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilité au sens de Routh-Hurwitz.

2.2 Théorème de Hartman-Grobman

En mathématiques, dans l'étude des systèmes dynamiques, le théorème de **Hartman-Grobman** ou théorème de linéarisation est un théorème important concernant le comportement local des systèmes dynamiques au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique [38] [39].

Soit le système dynamique :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

Définition 2.1 Deux flots φ_t et ψ_t sont dits topologiquement équivalents dans des voisinages de points d'équilibre, s'il existe un homeomorphisme h qui envoie le point d'équilibre du premier flot en le point d'équilibre du deuxième flot et qui conjugue les flots, c'est à dire $h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$.

Théorème 2.1 (Hartman-Grobman). *Considérons un système (2.1), de flot φ_t . Si x^* est un point d'équilibre hyperbolique, alors il existe un voisinage V de x^* sur lequel le flot φ_t est topologiquement équivalent au flot du linéarisé du système en x^* .*

En d'autres termes le théorème signifie que dans le voisinage V d'un point d'équilibre, les orbites d'un système peuvent être déformées continuellement dans les orbites de son linéarisé. En particulier, si toutes les valeurs propres du linéarisé sont de parties réelles strictement négatives, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$. De la même manière, lorsque toutes les valeurs propres sont de parties réelles strictement positives, alors toutes les solutions issues du voisinage V tendent vers l'équilibre lorsque $t \rightarrow -\infty$.

Exemple 2.1 *Considérons le système dynamique suivant :*

$$\begin{cases} x' &= x(1 - \frac{x}{2}) - xy \\ y' &= xy - y \end{cases} \tag{2.2}$$

avec

$$\begin{cases} f_1(x, y) &= x(1 - \frac{x}{2}) - xy \\ f_2(x, y) &= xy - y. \end{cases}$$

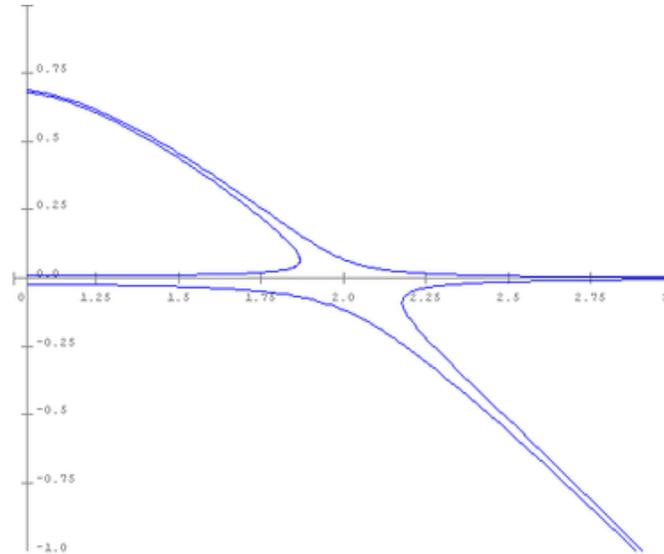


FIG. 2-1 – Portrait de phase du système (2.2)

Ce système admet trois points équilibres : $(0, 0)$, $(2, 0)$ et $(1, 1/2)$. On va étudier le comportement des trajectoires de ce système autour de l'équilibre $(2, 0)$.

Pour cela, on calcule la matrice jacobienne f en $(2, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont -1 et 1 ; l'équilibre $(2, 0)$ est donc hyperbolique. Concernant le comportement du système linéaire, l'étude du portrait de phase nous indique que l'équilibre est un point-selle, voir figure (Fig 2 – 2). L'utilisation du théorème de linéarisation nous indique qu'au voisinage de $(2, 0)$, le système (2.2) se comporte de la même manière, voir figure (Fig 2 – 1).

2.3 Théorie de Lyapounov

Nous avons vu qu'un point singulier pour lequel la matrice du linéarisé a des valeurs propres a partie réelle négative est asymptotiquement stable. Si certaines des valeurs propres ont des parties réelles positives, le point est instable. Mais qu'en est-il dans les autres cas ? Beaucoup

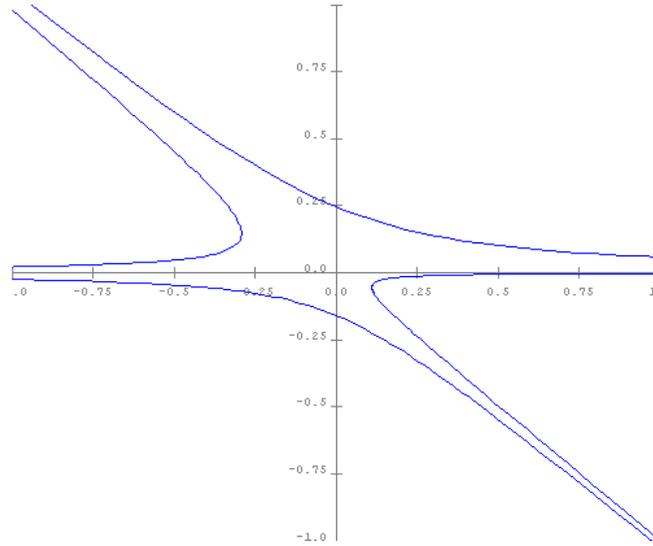


FIG. 2-2 – Portrait de phase du système linéarisé.

de situations peuvent se produire et il n'existe pas de méthode générale permettant de conclure dans tous les cas, mais plutôt un certain nombre de méthodes ad hoc. La méthode de Lyapunov en est une. Elle est très importante parce qu'elle permet de conclure dans plusieurs cas où les autres méthodes ne fonctionnent pas.

Définition 2.2 (Fonction de classe \mathcal{K})[30]. Une fonction continue $\alpha : [0, a[\rightarrow [0, +\infty[$ est dite de classe \mathcal{K} , si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$. Elle est dite de classe \mathcal{K}_∞ , si de plus, on a $a = +\infty$ et $\alpha(r) \rightarrow +\infty$ quand $r \rightarrow +\infty$.

Définition 2.3 (Fonction de classe \mathcal{KL}). Une fonction continue $\beta : [0, a[\times [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est dite de classe \mathcal{KL} , si pour tout s fixé, l'application $r \mapsto \beta(r, s)$ est de classe \mathcal{K} et pour tout r fixé, l'application $s \mapsto \beta(r, s)$ est décroissante et $\beta(r, s) \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow +\infty$.

une autre reformulation [30] des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe \mathcal{K} et \mathcal{KL}

Proposition 2.1 L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre

i. Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction $\alpha(\cdot)$ de classe \mathcal{K} et une constante positive c indépendante de t_0 telle que,

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x_0\|), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x_0\| < c.$$

ii. Globalement uniformément stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0 .

Proposition 2.2 L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre

i. Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction $\beta(.,.)$ de classe \mathcal{KL} et une constante positive c indépendante de t_0 telle que,

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0), \forall t \geq t_0 \geq 0, \forall \|x_0\| < c.$$

ii. Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0 .

Proposition 2.3 L'origine $x = 0$ est un point d'équilibre

i. Exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, k > 0, \gamma > 0, \forall \|x_0\| < c.$$

ii. Globalement exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0 .

Définition 2.4 Une fonction continue $V : R^+ \times R^n \rightarrow R^+$ est dite :

- Définie positive, s'il existe une fonction α de classe \mathcal{K} , telle que $\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \geq \alpha(\|x\|)$.

- Définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $x \in R^n$ avec une fonction α de classe \mathcal{K}_∞ . limitée ou decresent, s'il existe une fonction γ de classe \mathcal{K} , telle que

$$\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \leq \gamma(\|x\|).$$

2.3.1 La fonction de Lyapunov

On considère le système autonome défini par[24] :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ f(x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Définition 2.5 Une fonction $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un voisinage U de x_0 , et différentiable sur $U - \{x_0\}$ telle que :

- $V(x_0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq x_0$

- $\dot{V}(x) = f.V(x) \leq 0 \forall x \in U$ où $f.V(x) = \left. \frac{d}{dt} V f_t(x) \right|_{t=0}$ est appelée fonction de Lyapounov

large pour (2.3) en x_0 .

Si de plus la fonction vérifie la condition :

$V(x) < 0, \forall x \in U - \{x_0\}$ alors V est appelée fonction de Lyapounov stricte pour (2.3) en x_0 .

Théorème 2.2 (Lyapounov)

Si le système (2.3) admet une fonction de Lyapounov large (resp. stricte) alors x_0 est un point d'équilibre stable (resp. asymptotiquement stable) pour le système considéré.

Théorème 2.3 Soit $x = 0$ un point d'équilibre du système (2.3) et $U(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$

Soit $V : \mathbb{R}^+ \times U(0) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle qu'il existe des fonctions de classe \mathcal{K} α_1, α_2 et α_3 définies sur $[0, r[$ vérifiant : $\forall t \geq t_0$ et $\forall x \in U(0)$,

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|).$$

Alors, $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable. Si $U(0) = \mathbb{R}^n$

et α_1 et α_2 sont de classe \mathcal{K}_∞ , alors $x = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.

Théorème 2.4 Considérons le système (2.3). Supposons que ce système admette une fonction de Lyapounov $V(t, x)$ et supposons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3 et $c_4 > 0$, telles que, $\forall x \in U(0), \forall t \geq t_0$ on a :

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|,$$

alors, $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable. Si $U(0) = \mathbb{R}^n$, alors l'origine est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable.

Exemple 2.2 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2(x_2)^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$x = 0$ est un point d'équilibre. Soit $V(x) = 6x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_1x_2^4 + x_2^8$.

On peut écrire cette quantité sous la forme :

$$V(x) = (2x_1 + x_2^4)^2 + 2x_1^2 + 12x_2^2$$

Elle est donc définie positive, de plus

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2$$

On vérifie que

$$\dot{V}(x) = -24(x_1^2 + x_2^2)$$

$\dot{V}(x)$ est donc définie négative, V est une fonction de Lyapunov, et le théorème de Lyapunov permet de conclure que le point d'équilibre $x = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

Pour prouver les propriétés de stabilité d'un système, de nombreuses méthodes sont basées sur le théorème de Lyapunov, pour les systèmes autonomes, il est possible de prouver la stabilité asymptotique quand $\dot{V}(x) \leq 0$ en considérant le théorème d'invariance de LaSalle

Théorème 2.5 [58](Théorème de LaSalle) Le point d'équilibre $x = x_{eq}$ de (2.3) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction $V(x)$ de $D \rightarrow \mathbb{R}$ continument différentiable ayant les propriétés suivantes :

- $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \neq 0$
- $S = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$

Ou :

- D est un ensemble ouvert de R^n et $x_{eq} \in D$,
- $V(x) \geq V(x_{eq}) \forall x \neq 0$ dans D , ($V(x)$ est minimale en x_{eq}),
- $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in D$,
- L'ensemble $S \subset D$ tel que $\dot{V}(x) = 0$ ne contient pas de trajectoires du système $x(t) = x_{eq}$.

Alors, pour toute condition initiale $x_0 \in D$, la solution de (2.3) reste dans D , est définie pour tout temps $t > 0$ et converge vers le plus grand sous-ensemble invariant inclus dans S [56], [57], [58]. Le théorème d'invariance de LaSalle, s'applique aussi bien aux points d'équilibres qu'aux cycles limites.

Concept de passivité et fonction de Lyapunov

Un système est passif lorsque la puissance soutirée se fait au détriment du stock interne d'énergie. Ainsi, il ne peut pas y avoir de génération interne de puissance. L'idée est de considérer des systèmes pour lesquels la dissipation est positive ou nulle. En d'autres termes lorsque la puissance est injectée la puissance en entrée positive elle est soit stockée soit dissipée et lorsque le système restitue de la puissance en entrée négative, elle est fournie par le stock interne. Il n'y a pas de génération interne de puissance [59] [60], [58].

Définissons la fonction de Lyapunov pour un système sans entrée :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{V}(x) \leq 0 \end{cases}$$

Tandis que la passivité pour système entrée-sortie est :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{V}(x) \leq \text{puissance fournie} \\ y = h(x) \end{cases}$$

La Passivité permet d'obtenir des contrôleurs robustes qui ont une interprétation physique claire en termes d'interconnexions du système avec son environnement. En particulier, l'énergie totale du système en boucle fermée est la différence entre l'énergie du système et l'énergie fournie par le contrôleur .

Contrôle Basé sur la théorie de Lyapunov

Considérons le système autonome avec entrée suivant :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Où x est le vecteur d'état du système et u est la loi de commande à l'entrée, procédons déferrement, notre objectif est de trouver une loi de commande qui ramène le système au point d'équilibre $x = 0$, soit $u = k(x)$ tel que $x = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système à boucle de retour fermé $\dot{x} = f(x, k(x))$.

Pour démontrer le critère de stabilité globalement asymptotiquement stable (GAS), on a besoin de construire une fonction de Lyapunov $V(x)$, qui satisfait les conditions des théorèmes précédents, la conception de la loi de contrôle $u = k(x)$ associée avec la fonction de Lyapunov est ce qu'on appelle un contrôle basée sur la théorie de Lyapunov.

Une approche simple de trouver $u = k(x)$ est de prendre une fonction définie positive, bornée $V(x)$, et choisir $k(x)$ telle que $\dot{V}(x) = V(x)f(x) < 0, \forall x \neq 0$.

Pour réussir dans cette approche $V(x)$ doit être soigneusement choisie.

Définition 2.6 *Une fonction définie positive, bornée $V(x)$ est appelée un contrôle basé sur la fonction de Lyapunov si :*

$$\inf V(x)f(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

On peut donc trouver une loi de contrôle assurant une stabilité globale du système par le théorème d'Artstein [61]

Théorème 2.6 (théorème d'Artstein) *Un système dynamique a une loi de contrôle basée sur*

la fonction de Lyapunov si et seulement si il existe une fonction de stabilisation régulière dans la boucle de retour (feedback) $u(x)$.

2.4 Le critère de Routh-Hurwitz

Pour démontrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il faut donc a priori calculer les n valeurs propres λ_i de A et vérifier que $\forall i \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$. Une méthode algébrique a été développée par Routh-Hurwitz, basée sur le calcul des déterminants particuliers dits déterminants de Routh-Hurwitz.

Supposons le système :

$$\dot{x} = \phi(x)$$

Son linéarisé s'écrit :

$$\dot{x} = Ax$$

Les valeurs propres de A sont solutions de l'équation caractéristique :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \iff \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

$$H_1 = |a_1|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$H_j = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2j-1} & a_{2j-2} & a_{2j-3} & \cdots & a_j \end{vmatrix}$$

Proposition 2.4 Dans le cas d'une matrice de dimension n , les termes h_{jk} des déterminants de Routh-Hurwitz sont définis de la manière suivante :

$$* h_{jk} = a_{2j-k} \text{ pour } 0 \leq 2j - k \leq n$$

$$* h_{jk} = 1 \text{ pour } 2j = k \iff 2j - k = 0$$

$$* h_{jk} = 0 \text{ pour } 2j < k \iff 2j - k < 0 \text{ ou } 2j > n + k \iff 2j - k < n$$

Proposition 2.5 Le point d'équilibre \bar{x} est asymptotiquement stable

$$\iff \forall \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \iff \forall \operatorname{Re}(H_i) > 0$$

Théorème 2.7 (Critère de Routh-Hurwitz)

Soit $p(\lambda)$ un polynôme tel que $a_0 > 0$.

Pour que P soit uniformément asymptotiquement stable (u. a. s), il faut que les déterminants principaux de la matrice de Hurwitz soient strictement positifs.

2.4.1 Critère de Routh-Hurwitz dans \mathbb{R}^3

Considérons le système :

$$\dot{x} = Ax$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

L'équation caractéristique est :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Les déterminants de Routh-Hurwitz sont :

$$H_1 = |a_1| = a_1$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_3$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_3H_2$$

Ainsi les conditions de stabilité du point d'équilibre sont :

$$H_1 > 0, H_2 > 0 \text{ et } H_3 > 0.$$

Donc le point est asymptotiquement stable.

Exemple 2.3 $f(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$

La matrice d'Hurwitz s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

donc le critère de Routh-Hurwitz s'écrit :

$$\begin{cases} H_3 = a_1a_2a_3 - a_3^2 > 0, \\ H_2 = a_1a_2 - a_3 > 0, \\ H_1 = a_1 > 0. \end{cases}$$

Ces hypothèses se réduisent donc dans le cas $n = 3$ à :

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0$$

Critère de Routh-Hurwitz en dimension 3

Si $a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0$, alors les racines du polynôme

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

sont à parties réelles négatives.

2.5 Conclusion

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions [32]. Dans le présent chapitre, nous avons présenté les principales méthodes proposées dans la littérature pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques à comportement chaotiques ; La méthode de Lyapunov et la méthode de Routh-Hurwitz.

Chapitre 3

Contrôle du chaos

3.1 Introduction

La sensibilité aux conditions initiales des systèmes chaotiques a fait du chaos une situation indésirable pendant plusieurs années.

Cependant, mis à part cette caractéristique, l'attracteur d'un système chaotique contient un ensemble infini d'orbites périodiques instables, durant son évolution dans le temps, le système va visiter un petit voisinage de chaque point de chacune des orbites périodiques (instables) dans l'attracteur, c'est-à-dire que l'on peut décrire une dynamique chaotique comme une suite erratique de sauts d'une orbite périodique à une autre. De ces importantes propriétés est née l'idée du contrôle du chaos.

On considère le système dynamique continu défini par :

$$\dot{x} = F(x, u) \tag{3.1}$$

Où x est un vecteur de dimension n d'une variable d'état, u est un vecteur de variable de contrôle (l'entrée(input)). On pose que $F(x, u)$ est continuellement différentiable. Si des perturbations extérieures sont présentes, plusieurs modèles généraux de variation de temps seront considérés

$$\dot{x} = F(x, u, t)$$

le vecteur de dimension l de la variable de sortie (output) y est définie par exemple par :

$$y = h(x)$$

Si la sortie (output) n'est pas définie explicitement, on peut supposer que toutes les variables d'état sont disponible pour $y = x$.

Dans le modèle discret, on considère

$$x_{k+1} = F_d(x_k, u_k)$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n, u_k \in \mathbb{R}^m, y_k \in \mathbb{R}^l$, le vecteur d'état, le vecteur d'entre et le vecteur de sorti à k -ieme itération respectivement.

Le contrôle d'un système chaotique a pour but la stabilisation d'orbite périodique instable. Soit $\hat{x}(t)$ la solution périodique de période T du système (3.1) , avec $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$ condition initiale

Si la solution $x(t)$ est instable, la stabilité est prendre une certain sens, par exemple :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \tag{3.2}$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - \hat{y}(t)) = 0 \tag{3.3}$$

pour toute solution $x(t)$ de l'équation (3.1) avec $x(0) = x_0 \in \Omega$ sont les conditions initiales , et Ω est un ensemble des conditions initiales quelconque, de plus $\hat{y}(t)$ la fonction de sortie (output) désire.

Le problème est la recherche d'une fonction du contrôle pour les deux forme : non feedback contrôle :

$$u(t) = u(t, x_0)$$

ou dans la forme feedback

$$u(t) = u(x(t))$$

qui est de vérifier l'équation (3.2) ou l'équation (3.3).

Parmi les méthodes en boucle fermée, nous rappelons la rétroaction proportionnelle occasionnelle (OPF) introduite simultanément par Hunt [34] et Showalter [35], la méthode de Huebler [36] et la méthode introduite par Pyragas (TDFC) [14] qui applique une rétroaction retardée sur l'une des variables d'état de système.

Il est important de préciser que la littérature dans ce domaine est très large et les méthodologies décrites dans cette thèse ne représentent qu'une partie d'entre elle, dans ce chapitre on introduit les principes de quelques méthodes.

3.2 La méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY)

La méthode de Ott, Grebogi et Yorke (OGY) de contrôle, s'appuie sur le fait qu'un attracteur chaotique étant la superposition d'une infinité d'orbites périodiques instables, constitue un réservoir dans lequel on peut choisir un comportement périodique particulier. On laisse alors le système évoluer librement ; jusqu'à ce qu'il s'approche de l'orbite choisie, puis par une perturbation d'un paramètre approprié, on le force à rester sur cette orbite.

3.2.1 Principe de la méthode

Soit un système dynamique non linéaire à comportement chaotique donné par [33] :

$$x(i+1) = F(x(i), p), \quad (3.4)$$

où le vecteur x représente les variables d'états du système et p est un paramètre de contrôle accessible de l'extérieur pour des petits ajustements.

Le but du contrôle est de bien choisir ces ajustements afin de réaliser la stabilisation d'une certaine orbite périodique instable (UPO) de l'attracteur chaotique. Pour cela, on suppose que le paramètre de contrôle p peut varier dans un petit intervalle autour d'une certaine valeur nominale p_0 et que le système chaotique admet des points fixes instables dans la section de Poincaré.

Soit x_f un point fixe donné. La linéarisation du système (3.4) autour de son point fixe est donnée par :

$$\delta x(i+1) = A\delta x(i),$$

où

$$\delta x(i+1) = x(i+1) - x_F(p) \text{ et } A = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s$$

Si on applique des petits changements au paramètre p , alors la coordonnée du point fixe est décalée également à un certain point voisin $x_F(\bar{p})$.

Autour de ce point, on peut écrire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} x_f(\bar{p}) &= x_f(p) + (\bar{p} - p_0) \left(\frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0} \\ &= x_f(p) + \delta p(i)B \end{aligned}$$

où $\delta p(i) = (\bar{p} - p_0)$ et $B = \left(\frac{\partial x_f}{\partial p} \right)_{p=p_0}$

$\delta x(i+1)$ peut alors être réécrite sous la forme :

$$\delta x(i+1) = \delta p(i)B + A[\delta x(i) - \delta p(i)B]$$

Si on veut que la variation à imposer soit telle que le point $x(i+1)$ corresponde au point fixe instable, ce qui signifie que la trajectoire du système suive la direction stable et que :

$$f_u \delta x(i+1) = 0$$

Donc

$$\delta p(i) = \frac{\lambda_u}{\lambda_u - 1} \frac{f_u}{f_u B} \delta x(i) = K \delta x(i)$$

Cette variation paramétrique est activée seulement lorsque $x(i)$ est située dans un interval $|\delta x(i)| < \delta p_{max}$

3.3 La méthode de contrôle en boucle ouverte (nonfeedback)

La première catégorie inclue les méthodes dans lesquelles le contrôle du chaos est réalisé en convertissant le comportement chaotique en n'importe quel comportement périodique désiré. Dans ce type d'algorithmes, le but est de faire en sorte que le flot $x(t)$ suit une dynamique $g(t)$ choisie au préalable. Ceci implique l'addition à l'équation du mouvement :

$$\dot{x} = F(x)$$

d'un terme $u(t)$ de tel sorte que

$$|x(t) - g(t)| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty$$

Dans ce cas, les auteurs choisissent :

$$u(t) = dg/dt - F(g(t))$$

Le problème est que la valeur de la perturbation u est généralement grande .

3.4 La méthode de contrôle en boucle fermée (feedback)

Cette méthode consiste à perturber les variables d'état de système pour atteindre l'orbite cible, elle a l'avantage de garantir la stabilité robuste, la forte capacité de rejet de bruit[25][37].

Généralement elle est formulée comme suit :

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état de système et $u(t)$ le vecteur de contrôle.

Le problème est de déterminer le contrôle $u(t) = g(x, t)$, g est un vecteur non linéaire (inclus le cas linéaire) de telle manière que Le système contrôlé :

$$\dot{x}(t) = f(x, g(x, t), t)$$

peut se conduire par le contrôle en boucle fermé $g(x, t)$ pour atteindre l'orbite cible $x^*(t)$

$$\lim_{t \rightarrow t_f} \|x(t) - x^*(t)\| = 0$$

Généralement on détermine le contrôle $u(t)$ qui guide le vecteur d'état $x(t)$ correspondant au système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + u(t)$$

vers l'orbite cible $x^*(t)$ de la manière suivante

$$u(t) = \dot{x}^*(t) - f(x(t), t) + K(x(t) - x^*(t))$$

Où K est une matrice dont les parties réelles de ses valeurs propres sont toutes négatives.

Si on pose

$$e(t) = x(t) - x^*(t)$$

alors

$$\dot{e}(t) = Ke(t)$$

et on a $e(t) \rightarrow 0$ par suite $x(t) \rightarrow x^*(t)$ pour $t \rightarrow \infty$.

3.4.1 La méthode de Pyragas

Pyragas [14] en 1992 propose une méthode qui permet de stabiliser des orbites périodiques instables, en se basant sur la connaissance de leurs ordres mais sans connaître leurs positions. Elle se base sur l'application d'un terme de retard d'état, afin de forcer l'évolution dynamique du système à suivre une dynamique périodique désirée le long de sa période. Ainsi, le retard doit avoir la valeur exacte de la période de l'orbite périodique instable à stabiliser.

Soit le système dynamique défini par :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Q(x, y) \\ \dot{y} &= P(x, y) + F(t)\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ représente les variables de système qui sont pas intéressent et $y \in \mathbb{R}$ peut être mesure, $Q : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, et $P : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et F est un signal de contrôle.

Pyragas propose deux types de feedback contrôle

1- Contrôle par feedback retardé

$$F(t) = \eta(y(t - \tau) - y(t))$$

2- Contrôle par feedback extérieur

$$F(t) = \delta(\bar{y}(t) - y(t))$$

Pour stabiliser les orbites périodiques instables avec $\bar{y}(t)$ est un orbite périodique instable doit stabiliser et τ est la période. Si la période de la force extérieure $T = 1/f$ ou le temps de retarde égale a τ , donc il est possible de trouve un feedback capacité η et δ qui permettent la stabilisation de OPI

Plusieurs modifications ont été apportés à la méthode de Pyragase pour contrôler tout type de systèmes chaotique, par exemple Nakajima & Ueda [46] l'appliquent aux systèmes avec symétrie. Konishi & Kokam [47] étendent la méthode et l'appliquent aux système couplés.

3.5 Le contrôle adaptatif

Développé dans la seconde moitié du dernier siècle [48] [49], le champ de contrôle adaptatif est encore intéressant, défiant, et excitant avec une variété d'applications dans les systèmes de contrôle modernes.

Le contrôle adaptatif couvre un ensemble de techniques qui fournissent une approche pour

l'ajustement automatique des contrôleurs en temps réel, afin d'atteindre ou de maintenir un niveau souhaité de performance du système de contrôle lorsque les paramètres du modèle dynamique sont inconnus ou changent avec le temps. Dans ce cas le modèle du système est représenté sous une forme paramétrique :

$$\dot{x} = F(x, \theta, u) \quad (3.5)$$

$$y = h(x) \quad (3.6)$$

Où $\theta \in R^p$ est le vecteur des paramètres inconnus. D'après (3.5), la loi de contrôle est aussi mise sous une forme paramétrique :

$$u = U(x, \zeta)$$

Où ζ dépend de θ , c'est-à-dire $\zeta = \varphi(\theta)$ pour une application $\varphi(\cdot)$.

Le processus est obtenu en mesurant les états du système $x(t)$, ou les sorties $y = h(x(t))$ sont utilisées, pour évaluer les paramètres d'adaptation qui sont des estimations, soit $\hat{\theta}(t)$ les valeurs estimées des paramètres inconnus $\theta(t)$, soit des paramètres du contrôleur $\hat{\zeta}(t)$.

Une large variété des méthodes d'adaptation existe tel que les méthodes du gradient et le gradient incliné, les moindres carrés, probabilité maximale, et ainsi de suite peuvent être utilisées pour développer des algorithmes de contrôle adaptatif et l'identification paramétrique.

Ces méthodes sont bien connues dans la littérature de la théorie de contrôle [50] [51], leur validation est basé habituellement sur la fonctions de Lyapunov.

3.6 La méthode Backstepping

Le Backstepping est une méthode systématique pour la conception de contrôle non linéaire, elle peut être appliquée pour une classe générale de systèmes. Son nom se reporte à la nature récursive de la conception de la procédure. En premier, un petit sous système est considéré pour lequel une loi de commande virtuelle est conçue, puis la conception est étendue sur plusieurs

étapes jusqu'à ce que la loi de commande finale pour le système globale est construite. Durant la conception une fonction de Lyapunov du système contrôlé est successivement construite.

Cette technique met à profit des relations causales successives pour construire de manière itérative et systématique une loi de commande et une fonction de Lyapunov stabilisante. De plus, et contrairement au bouclage linéarisé, le backstepping offre la possibilité de conserver dans le bouclage les non linéarités stabilisantes. Pour qu'elle puisse s'appliquer, le système non linéaire doit être sous la forme paramétrique de boucle de retour stricte.

Considérons le système sous la forme paramétrique du type boucle de retour stricte suivant [58] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = g_i(x_i, t)x_{i+1} + f_i(x_i, t) \quad , i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n = g_n(x_n, t)u + f_n(x_n, t) \\ y = x_1 \\ x_{t_0} = x_0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Où $x_i = [x_1, x_2, \dots, x_i] \in \mathbb{R}^i$ ($i = 1, \dots, n-1$), $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$:

Sont respectivement vecteurs des états d'entrées et de sortie.

$g_i(\cdot) \neq 0$, $f_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n-1$ sont des fonctions non linéaires continues et dérivables. $g_n(\cdot) \neq 0$, $f_n(\cdot)$ sont des fonctions non linéaires continues.

L'objectif est de concevoir un contrôleur dans la contre réaction pour le système (3.7) garantissant une stabilité globale et force le système vers le point d'équilibre c .à .d :

$$y(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

La conception de la procédure du backstepping contient n étapes, durant la $i^{\text{ème}}$ étape une loi de commande intermédiaire appelée aussi fonction stabilisante ou loi de contrôle virtuelle α_i doit être déterminée en utilisant une fonction de Lyapunov appropriée V_i .

Quand $i = 1$, dans la première étape, le premier sous système avec une sortie passive z_1 et une entrée x_2 , est rendue passive par une loi de contrôle virtuelle $\alpha_1(x_1)$, le second sous système avec une sortie passive $z_2 = x_2 - \alpha_1$ et une entrée x_3 , est rendue passive par une loi de commande virtuelle $\alpha_2(x_1, x_2)$, cette procédure est applicable jusqu'au $n^{\text{ème}}$ sous système avec une sortie

$z_n = x_n - \alpha_{n-1}$ et une entrée u . La sortie z_n est rendue passive et globalement asymptotiquement stable (GAS) par une loi de commande finale u .

A chaque étape une fonction de Lyapunov est construite qui est considérée aussi comme une fonction de stockage de type quadratique et peut être déterminée par les deux méthodes Krasovskii ou le gradient variable.

Première étape

Définissons la première variable de la procédure soit z_1 comme sortie virtuelle du premier sous système $z_1 = x_1$. La dérivée rapport au temps est :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = g_1 z_2 + g_1 \alpha_1 + f_1$$

Et une deuxième variable du Backstepping $z_2 = x_2 - \alpha_1$, avec α_1 une loi de commande virtuelle qui doit être déterminé plus tard. Pour trouver cette loi de commande nous construisons une fonction Lyapunov partielle de type quadratique :

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = g_1 z_2 z_1 + z_1 (g_1 \alpha_1 + f_1)$$

avec $-c_1 z_1 = g_1 \alpha_1 + f_1$

La non linéarité est remplacé par un controle linéaire et α_1 est choisie de telle sorte que \dot{V}_1 soit négative définie :

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1} (-c_1 z_1 - f_1)$$

Où $c_1 > 0$ est une constante de conception positive. Notant que α_1 a été choisi de manière à éliminer la non linéarité f_1 et d'avoir $\dot{V}_1 < 0$. On substituant α_1 dans V_1 et dans on z_1 trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + g_1 z_2 z_1 \\ \dot{z}_1 = -c_1 z_1 + g_1 z_2 \end{cases}$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_1 z_2 z_1$ dans \dot{V}_1 sera éliminé dans la prochaine étape.

Deuxième étape

Dans cette étape nous utilisons une nouvelle variable $z_3 = x_3 - \alpha_2$ comme une sortie pour le second sous système avec x_3 comme entrée et réécrivant la seconde équation du système (3.7)

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = g_2 z_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \dot{\alpha}_1$$

Puisque $\alpha_1(x_1)$ est la fonction stabilisante du sous système alors :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1)$$

En substituant $\dot{\alpha}_1$ dans \dot{z}_2

$$\dot{z}_2 = g_2 z_3 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1)$$

Maintenant il faut trouver une fonction de Lyapunov V_2 pour le second sous système, Parce que z_2 est une sortie passive, un choix possible de la fonction du stockage :

$$V_2(z_1, z_2) = V_1(z_1) + \frac{1}{2} z_2^2$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 = -c_1 z_1^2 + g_2 z_2 z_3 + z_2 (g_1 z_1 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1))$$

avec $-c_2 z_2 = g_1 z_1 + g_2 \alpha_2 + f_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1)$

La propriété clé de cette expression est que tous les termes potentiellement indéfinis paraissent multiplié par z_2 . D'où, notre contrôle virtuelle $x_3 = \alpha_2(x_1, x_2)$ peut être choisi de faire \dot{V}_2 négative défini une conception possible est :

$$\alpha_2 = \frac{1}{g_2} (-c_2 z_2 - g_1 z_1 - f_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1))$$

Où c_2 est une constante positive. On substituant α_2 dans V_2 et dans on z_2 trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + g_2 z_2 z_3 \\ \dot{z}_2 = g_2 z_3 - c_2 z_2 - g_1 z_1 \end{cases} .$$

De même, pour une stabilité globale, le dernier terme $g_2 z_2 z_3$ dans \dot{V}_2 sera éliminé dans la prochaine étape.

Troisième étape

Commençons par la troisième variable de la procédure soit $z_3 = x_3 - \alpha_2$ comme une sortie pour le troisième sous système avec x_4 comme entrée, définissant une nouvelle variable $z_4 = x_4 - \alpha_3$, α_3 est la fonction stabilisante du troisième sous système et réécrivant la troisième équation du système (3.7) : La dérivée rapport au temps est :

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2 = g_3 z_4 + g_3 \alpha_3 + f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1)$$

Parce que z_3 est une sortie passive, un choix possible de la fonction du stockage (Lyapunov) :

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = V_1 + V_2 + \frac{1}{2} z_3^2$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 \\ &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + g_3 z_3 z_4 + z_3 (g_2 z_2 + g_3 \alpha_3 + f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1)) \end{aligned}$$

avec $-c_2 z_2 = g_2 z_2 + g_3 \alpha_3 + f_3 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1)$.

Le contrôle virtuelle $x_4 = \alpha_3(x_1, x_2, x_3)$ peut être choisi en rendant \dot{V}_3 négative défini une conception possible est :

$$\alpha_3 = \frac{1}{g_3} (-c_3 z_3 - g_2 z_2 - f_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1))$$

α_3 est choisie de telle sorte que \dot{V}_3 soit définie négative, c_3 est une constante positive .

On substituant α_3 dans V_3 et dans on z_3 trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 + g_3 z_3 z_4 \\ \dot{z}_3 = g_3 z_4 - c_3 z_3 - g_2 z_2 \end{cases}$$

Pour une stabilité globale, le dernier terme $g_3 z_3 z_4$ dans \dot{V}_3 sera éliminé dans la prochaine étape.

La $n^{\text{ième}}$ étape

C'est le dernier pas de conception, du moment que le contrôle final u apparaît dans la dérivée de \dot{z}_n

$$\dot{z}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = g_n u + f_{nth}$$

avec

$$f_{nth} = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1})$$

La loi de contrôle u est conçu pour rendre négative définie la dérivée de la fonction Lyapunov globale :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2$$

Sa dérivée par rapport le temps est :

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + z_n \dot{z}_n$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n (g_{n-1} z_{n-1} + f_{nth} + g_n u)$$

avec

$$-c_n z_n = (g_{n-1} z_{n-1} + f_{nth} + g_n u)$$

Le choix du contrôle actuel est :

$$u = \frac{1}{g_n}(-c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} - f_{nth})$$

Nous avons maintenant conçu une loi de commande dans la contre réaction pour la stabilisation du système (3.7) d'ordre n .

u existe et est une fonction de stabilisation régulière dans la boucle de retour , d'après le théorème d'Artstein le système dynamique (3.7) a une loi de contrôle basée sur la fonction de Lyapunov.

On substituant u dans z_n et \dot{V}_n on trouve :

$$\begin{cases} \dot{V}_n = - \sum_{k=1}^n c_k z_k^2 \\ \dot{z}_n = -c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} \end{cases}$$

$\dot{V}(z) < 0 \forall z \neq 0$, alors Le point d'équilibre $x = x_{eq}$ de (3.7) est asymptotiquement stable car la fonction $V(z)$ est continument différentiable ayant les propriétés citées dans le théorème de LaSalle, d'où le système globale dans les coordonnées (z_1, \dots, z_n) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -c_1 z_1 - g_1 z_2 \\ \dot{z}_i = -c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1}; \quad (i = 2, \dots, n-1) \\ \dot{z}_n = -c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} \end{cases}$$

est globalement asymptotiquement stable(GAS).

3.6.1 Commande poursuite de trajectoire par la méthode du Backstepping

Dans ce paragraphe, nous traitons le problème de poursuite de trajectoires. La définition formelle du concept de poursuite peut être établi en conformité avec la définition donnée par [58] :

Définition 3.1 *Quand l'objectif est de forcer la sortie du système $y(t) \in R^m$ pour le suivi d'une*

sortie désirée $y_r(t) \in R^m$, il sera défini comme un problème de suivi.

Dans le problème de poursuite du système non linéaire (3.7), l'objectif de commande n'est pas seulement de stabiliser globalement le procédé (3.7), mais aussi de forcer la sortie $y(t) = x_1$ à suivre un signal référence y_r sous les conditions suivantes :

1. $g_n(\cdot) \neq 0$.

2. le signal de référence y_r et ses n dérivées sont connues et bornées et $y_r^{(n)}$ est continue au moins par morceaux.

Les mêmes étapes de conception sont répétées dans ce cas avec des modifications mineures. Les commande virtuelles α_i sont alors déterminées après la dérivée de z_i et de choisir une fonction de Lyapunov appropriée V_i et la rendre négative définie soit :

Première étape : Pour le premier sous système, la première variable du backstepping est choisie comme l'erreur de poursuite :

$$z_1 = x_1 - y_r$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{g_1}(-c_1 z_1 - f_1 + \dot{y}_r)$$

Deuxième étape : Puisque α_1 est la fonction stabilisante du sous système est $\alpha(x_1, y_r, \dot{y}_r)$ alors :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r$$

En remplaçant on trouve :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r$$

D'ou la fonction stabilisante pour le second sous système du (3.7),

$$\alpha_2 = \frac{1}{g_2}(-c_2 z_2 - g_1 z_1 - f_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r - \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r))$$

Troisième étape Sachant que :

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \ddot{y}_r} y_r^{(3)}$$

Une conception possible est :

$$\alpha_3 = \frac{1}{g_3} (-c_3 z_3 - g_2 z_2 - f_3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} (g_2 x_3 + f_2) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (g_1 x_2 + f_1) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \ddot{y}_r} y_r^{(3)})$$

La $n^{\text{ième}}$ étape C'est le dernier pas de conception, du moment que le contrôle actuel u apparaît dans la dérivée de \dot{z}_n

$$z_n = x_n - \alpha_{n-1} = g_n u + f_{nth}$$

Avec :

$$f_{nth} = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_k} (f_k + g_k x_{k+1})$$

La loi de contrôle u est conçu pour rendre négative définie la dérivée de la fonction Lyapunov globale :

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2$$

Sa dérivée par rapport le temps est :

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + z_n \dot{z}_n$$

Ce qui conduit à :

$$\dot{V}_n = - \sum_{k=1}^{n-1} c_k z_k^2 + z_n (g_{n-1} z_{n-1} + f_{nth} + g_n u)$$

avec

$$-c_n z_n = (g_{n-1} z_{n-1} + f_{nth} + g_n u)$$

Le choix du contrôle actuel est :

$$u = \frac{1}{g_n}(-c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} - f_{nth}) \quad (3.8)$$

donc

$$\begin{cases} \dot{V}_n = -\sum_{k=1}^n c_k z_k^2 \\ \dot{z}_n = -c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} \end{cases}$$

D'où le système globale dans le système des coordonnées (z_1, \dots, z_n) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -c_1 z_1 - g_1 z_2 \\ \dot{z}_i = -c_i z_i - g_{i-1} z_{i-1} + g_i z_{i+1}; \quad (i = 2, \dots, n-1) \\ \dot{z}_n = -c_n z_n - g_{n-1} z_{n-1} \end{cases} \quad (3.9)$$

Sachant que :

$$z_i = x_i - x_{ri} - \alpha_{i-1}; \quad (i = 1, \dots, n)$$

\dot{V}_n est négative définie, lorsque $t \rightarrow \infty$, z_i ($i = 1, \dots, n \rightarrow \infty$), alors $x_i \rightarrow x_{ri}$ le système d'équation des erreurs en z_i , ($i = 1, \dots, n$) correspondant au système final en boucle fermé, le système des lois de mise à jour θ_i , ($i = 1, \dots, n$) admet un point d'équilibre

$$x_{eq} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = 0 \text{ globalement uniformément asymptotiquement stable.}$$

Puisque le modèle de référence x_{r1} est borné et sachant que $z_1 = x_1 - x_{r1}$ alors ceci garantit que l'état $x(t)$, la loi de contrôle actuelle u , sont globalement bornés et $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_r(t)| = 0$.

Le système en boucle fermé (3.9) avec le modèle de la référence y_r et le contrôleur (3.8) a un point équilibre globalement uniformément stable au $z = [z_1, z_2, z_3, \dots, z_n]^T = 0$.

3.7 La synchronisation

La synchronisation du chaos est une suite de développement de la théorie du contrôle. Les méthodes de stabilisation du chaos ont prouvé non seulement la possibilité de stabiliser un sys-

tème chaotique sur une orbite périodique, mais aussi pour faire une poursuite d'une trajectoire périodique. Ce phénomène de contrôle peut donc être considéré comme un phénomène de synchronisation d'un système chaotique avec un signal périodique.

De façon générale, la synchronisation est comprise comme une concordance ou changement simultané des états de deux ou plusieurs systèmes ou, peut-être, des changements simultanés de certaines quantités liées aux systèmes. Dans la littérature plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés en premier par Yamada et Fujisaka [52] [53]. Par la suite des concepts importants liés à la synchronisation chaotique ont été développés par Afraimovich et al dans [54] et ultérieurement Pecora et Carroll [55] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique. Après cette découverte, plusieurs méthodes de suppression de chaos ont été appliquées pour la synchronisation chaotique puisqu'un problème de synchronisation peut être aussi transformé en un problème de contrôle de l'erreur pour qu'elle se stabilise à l'origine.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principales méthodes proposées dans la littérature pour le contrôle du système chaotique; la méthode de contrôle en boucle fermée (feedback) et ouvert (non-feedback), la méthode de Pyragas, Le contrôle adaptatif et finalement la méthode Backstepping .

L'avantage de la méthode OGY est qu'on a pas besoin de calculer les valeurs propres de la matrice Jacobienne. Concernant la méthode Backstepping, on a établi des lois de contrôle virtuelles, des lois de contrôle finales et des fonctions de Lyapunov quadratiques définies négatives pour que le système chaotique converge vers le point d'équilibre ou vers le trajectoire qui nous avons choisi.

Deuxième partie

Contrôle et Application

Chapitre 4

Contrôle du système de Liu et système de Chua

4.1 Introduction

Le contrôle du chaos a trouvé des applications expérimentales intenses dans divers domaines physiques. La première application expérimentale était réalisée à la fin de 1990[62]. L'implémentation du contrôle permet de stabiliser une orbite périodique dans la dynamique d'un ruban magnétoélastique. Après, le contrôle du chaos a atteint plusieurs domaines par exemple : Contrôle du chaos dans les systèmes biologiques ; contrôle d'un muscle cardiaque d'un lapin par Garfinkel et al [66], Contrôle du chaos dans les fluides ont été rapportées par Singer et al [67], Contrôle du chaos dans les lasers [68], La première expérience de contrôle dans les systèmes chimiques a été réalisée par le groupe de Showalter [69], Contrôle du chaos dans les circuits électroniques par exemple le circuit de Chua.

Le circuit de Chua a été proposé par Leon Chua en 1983 en réponse à deux questions non résolues par beaucoup de chercheurs au sujet du système chaotique de Lorenz. La première est la conception d'un système de laboratoire qui peut être normalement modélisé par les équations de Lorenz, afin de démontrer que le chaos est un phénomène physique robuste, et pas simplement une simulation réalisée à l'aide d'ordinateurs. La deuxième est le besoin de montrer que l'attracteur de Lorenz simulé par ordinateur, est en effet chaotique dans un sens mathématique rigoureux.

L'existence des attracteurs chaotiques du circuit de Chua avait été confirmée numériquement par Matsumoto [63] et expérimentalement observée par Zhong et Ayrom [64].

Ce chapitre a pour objectif le contrôle de deux systèmes chaotiques ; système de Liu et système de Chua.

4.2 Système de Liu

En 2004, Liu Chongxin [70] a trouvé un nouveau système dynamique chaotique. Il est tridimensionnel système autonome qui repose sur une multiplier et un terme quadratique pour introduire la non-linéarité nécessaire . Ce système est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = x(b - ez), \\ \dot{z} = dx^2 - cz, \end{cases} \quad (4.1)$$

où a, b, c, d et e sont des paramètres du système.

4.2.1 Calcul des points d'équilibres

Les points fixes sont par définition $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$.

Le premier point fixe trivial est $\bar{x}_1 : x = y = z = 0$.

$$\begin{cases} a(y - x) & = 0 \\ bx - exz & = 0 \\ -cz + dx^2 & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = y \\ x(b - ez) & = 0 \\ x^2 & = \frac{c}{d}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (1) \\ x = 0 \vee z = \frac{b}{e} & (2) \\ x = \sqrt{\frac{c}{d}}z \vee x = -\sqrt{\frac{c}{d}}z \dots & (3) \end{cases}$$

(2) dans (3) donne $\sqrt{\frac{c}{d}}z$ les points fixes \bar{x}_2 et \bar{x}_3 sont donc :

$$\bar{x}_2 = \left(\sqrt{\frac{bc}{de}}, \sqrt{\frac{bc}{de}}, \frac{b}{e} \right), \bar{x}_3 = \left(-\sqrt{\frac{bc}{de}}, -\sqrt{\frac{bc}{de}}, \frac{b}{e} \right)$$

Pour $b = 0$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3$ il n'y a qu'un seul point fixe \bar{x}_1 et pour $\frac{bc}{de} \geq 0$ avec $de \neq 0$, il y a trois points fixes \bar{x}_1 , \bar{x}_3 et \bar{x}_3 .

4.2.2 La dissipation du système de Liu

Le système de Liu est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - exz \\ \dot{z} = -cz + dx^2 \end{cases}$$

Supposant

$$\dot{X} = f(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ f_3(X) \end{bmatrix},$$

avec : $f_1(X) = \dot{x}$ et $f_2(X) = \dot{y}$ et $f_3(X) = \dot{z}$

La divergence de vecteur $f(X)$ on R^3 donner par :

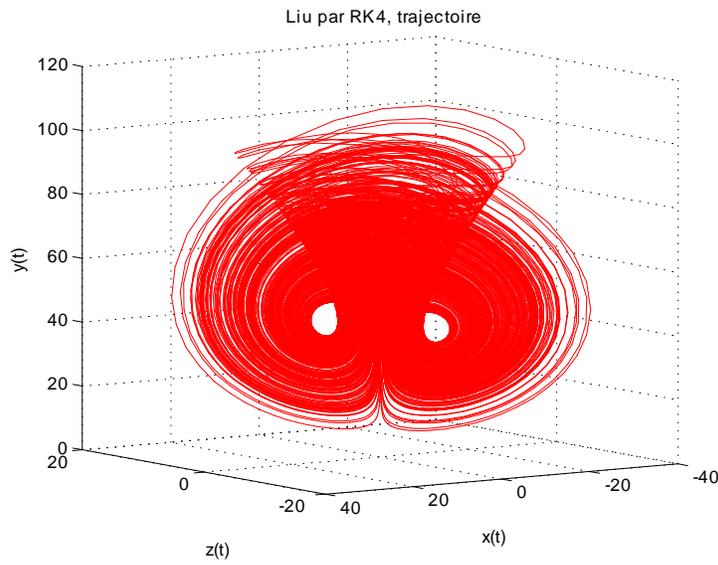


FIG. 4-1 – Attracteur chaotique de Liu.

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1(X)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(X)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(X)}{\partial z} = -(a + c),$$

le système est dissipatif si $\operatorname{div} f < 0$, Donc le système est dissipatif pour : $a > c$.

Alors le système (4.1) possède un attracteur chaotique pour : $a = 10, b = 40, c = 2.5, d = 4$ et $e = 1$.

Le trajectoire du système pour $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 20)$ est donné par la figure (4-1)

4.2.3 Stabilité des points d'équilibres

La stabilité des points d'équilibres est déterminée par la méthode de la linéarisation au voisinage de ces points fixes et en calculant les valeurs propres, notées λ_i , de la matrice jacobienne en ces points.

La matrice jacobienne s'écrit :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 - z & 0 & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

La stabilité de point \bar{x}_1

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Alors l'équation caractéristique est :

$$\begin{aligned} &(-2.5 - \lambda)(\lambda^2 + 10\lambda - 400) = 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2.5 - \lambda = 0 & (4) \\ \vee \\ \lambda^2 + 10\lambda - 400 = 0 & (5) \end{cases} \end{aligned}$$

On a d'après (4) $\lambda_1 = -2.5$

Les autres valeurs propres λ_2 et λ_3 sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + 10\lambda - 400 = 0$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_2 = -5 - 5\sqrt{17}$$

$$\lambda_3 = -5 + 5\sqrt{17}$$

comme $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ et $\lambda_3 > 0$ alors le point \bar{x}_1 est un point instable.

La stabilité de point \bar{x}_2

La matrice jacobienne au point \bar{x}_2 s'écrit :

$$A = Df(5, 5, 40) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + 25\lambda + 2000 = 0$$

Le polynôme est d'ordre trois, d'après les condition de Routh-Hurwitz on a :

$$ab - c = 12.5 \times 25 - 2000 = -1687.5 < 0,$$

donc le point fixe \bar{x}_2 est un point instable.

La stabilité de point \bar{x}_3

La matrice jacobienne correspond à \bar{x}_3 s'écrit :

$$A = Df(-5, -5, 40) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix},$$

alors le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + 25\lambda + 2000 = 0$$

Donc le même que \bar{x}_2 le point \bar{x}_3 est un point instable.

4.2.4 Le contrôle en boucle fermé décollé

Cas 1 :

Le contrôle du système de Liu au point \bar{x}_1

Le système avec contrôle [72] est :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = 40x - xz - Kx \quad (4.2) \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 \end{cases}$$

avec : K est le coefficient feedback .

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 - K - z & 0 & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 - K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

et comme $\det(J - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation suivante :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + (10K - 375)\lambda + 25K - 1000 = 0$$

D'après les condition de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instables \bar{x}_1 si et seulement si :

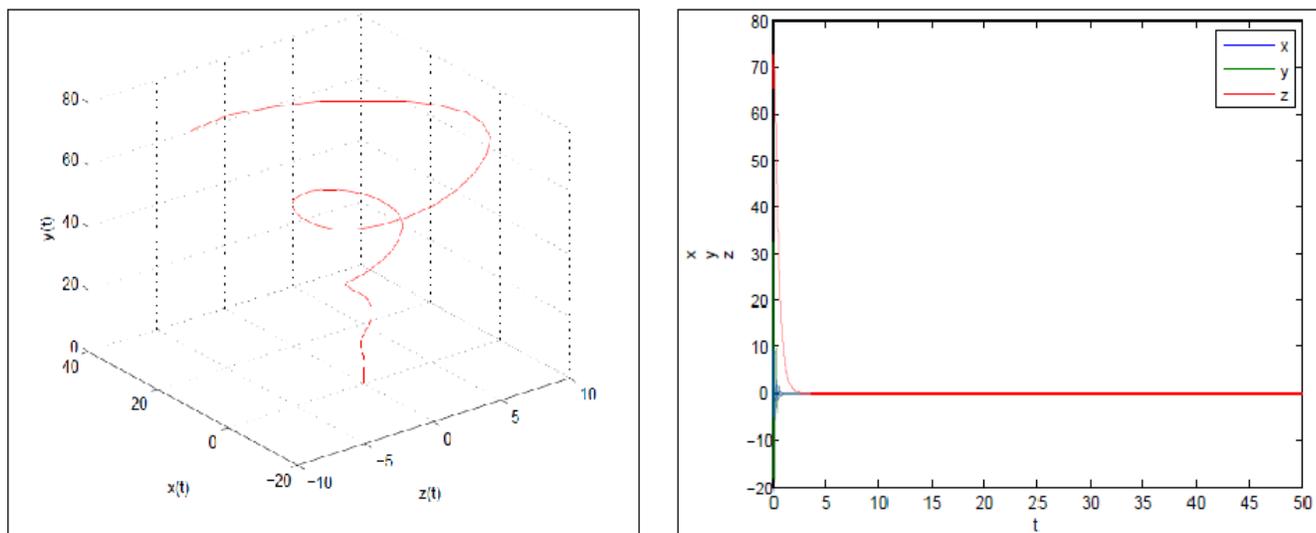


FIG. 4-2 – Le contrôle en boucle fermé décollé du système de Liu au point \bar{x}_1 .

$$\begin{cases} 10K - 375 > 0 \\ 25K - 1000 > 0 \\ 12.5(10K - 375) - (25K - 1000) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]37.5, +\infty[\\ K \in]40, +\infty[\\ K \in]36,875, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K \in]40, +\infty[$$

Donc le système converge vers le point instables \bar{x}_1 pour $K \in]40, +\infty[$

La représentation dans l'espace de phase est créée par l'utilisation du matlab, elle est donné par les figures(4-2)

Le contrôle au point \bar{x}_2

Le système avec contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = 40x - xz - K(x - 5) \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 \end{cases} \quad (4.3)$$

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 - K - z & 0 & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(5, 5, 40) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -K & 0 & -5 \\ 40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Alors le polynôme caractéristique est de la forme suivante :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + (10K + 25)\lambda + 25K + 2000 = 0$$

Avec l'utilisation de critère de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instables \bar{x}_2 si et seulement si :

$$\begin{cases} 25 + 10K > 0 \\ 25K + 2000 > 0 \\ 12.5(25 + 10K) - 25K - 2000 > 0 \end{cases}$$

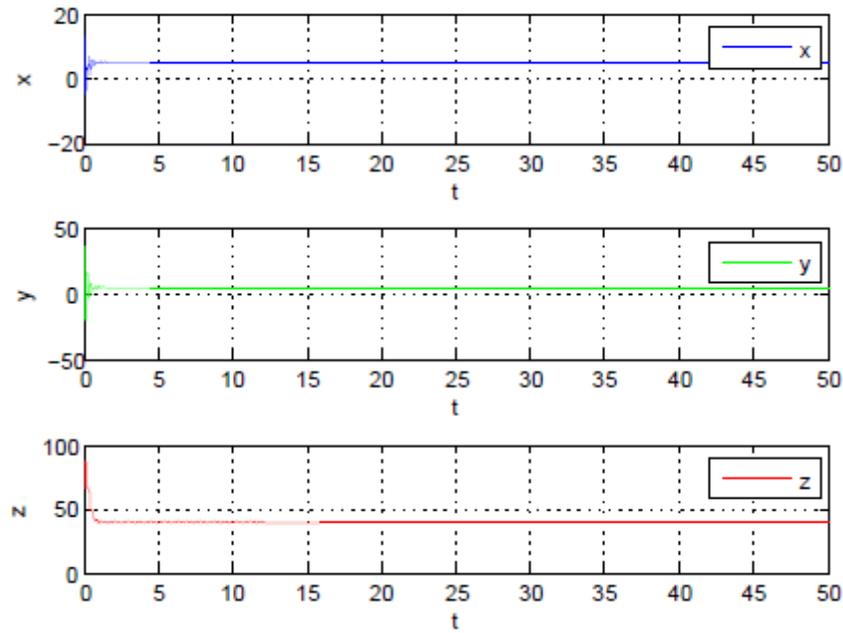


FIG. 4-3 – Le contrôle en boucle fermée décollée du système de Liu au point \bar{x}_2 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]-2.5, +\infty[\\ K \in]-2.5, +\infty[\\ K \in]16.875, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K \in]16.875, +\infty[$$

Donc le système converge vers le point instable \bar{x}_2 pour $K \in]16.875, +\infty[$

Le contrôle au point \bar{x}_3

Pour $\bar{x}_3 = (-5, -5, 40)$, en utilisant le changement de variable suivant [72] : $x_1 = x + 5, y_1 = y + 5, z_1 = z - 40$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10[(y_1 - 5) - (x_1 - 5)] \\ \dot{y}_1 = 40(x_1 - 5) - (x_1 - 5)(z_1 + 40) , \\ \dot{z}_1 = -2,5(z_1 + 40) + 4(x_1 - 5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 - 5z_1 \\ \dot{z}_1 = -2,5z_1 + 40x_1 + 4x_1^2 \end{cases} .$$

Donc Le système avec contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = -x_1 z_1 - 5z_1 - Kx_1 \\ \dot{z}_1 = -2,5z_1 + 40x_1 + 4x_1^2 \end{cases} \quad (4.4)$$

La matrice jacobienne s'écrit :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -z_1 - K - x & 0 & -5 - x \\ 8x_1 + 40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ -K & 0 & -5 \\ 40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique a la forme suivante :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + (10K + 25)\lambda + 25K + 2000 = 0.$$

Avec l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instable \bar{x}_3 si et seulement si :

$$\begin{cases} 25 + 10K > 0 \\ 25K + 2000 > 0 \\ 12.5(25 + 10K) - 25K - 2000 > 0 \end{cases}$$

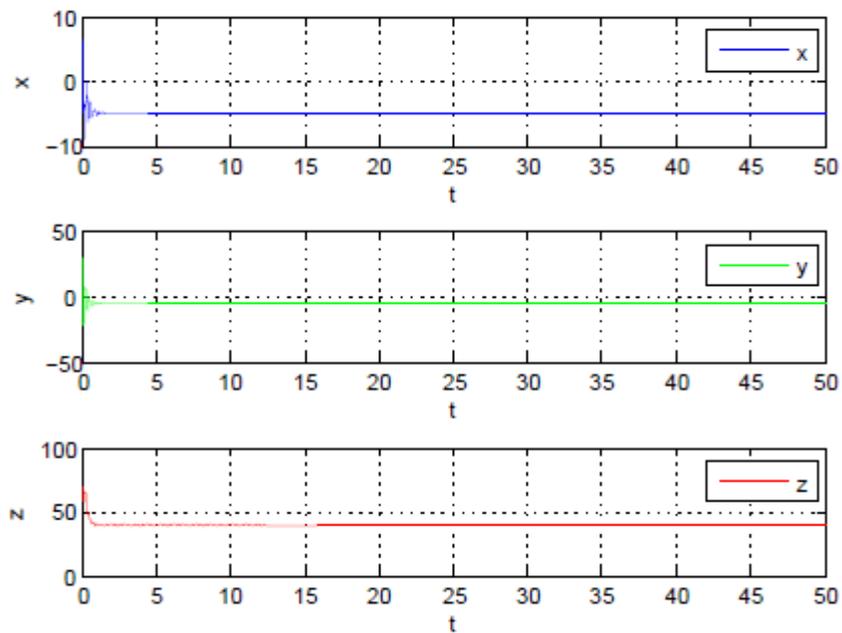


FIG. 4-4 – Le contrôle en boucle fermée décollée du système de Liu au point \bar{x}_3 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]-2.5, +\infty[\\ K \in]-2.5, +\infty[\\ K \in]16.875, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K \in]16.875, +\infty[$$

Donc le système converge vers le point instable \bar{x}_3 pour $K \in]16.875, +\infty[$

Cas 2 :

Le contrôle au point \bar{x}_1

Le système avec contrôle est [72] :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - Ky \\ \dot{y} = 40x - xz \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 - K & 0 \\ 40 - z & 0 & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 - K & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est donnée par :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + (40K - 375)\lambda + 100K - 1000 = 0$$

Avec l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instables \bar{x}_1 si et seulement si :

$$\begin{cases} 40K - 375 > 0 \\ 100K - 1000 > 0 \\ 12.5(40K - 375) - (100K - 1000) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]9.375, +\infty[\\ K \in]10, +\infty[\\ K \in]9.21875, +\infty[\end{cases}$$

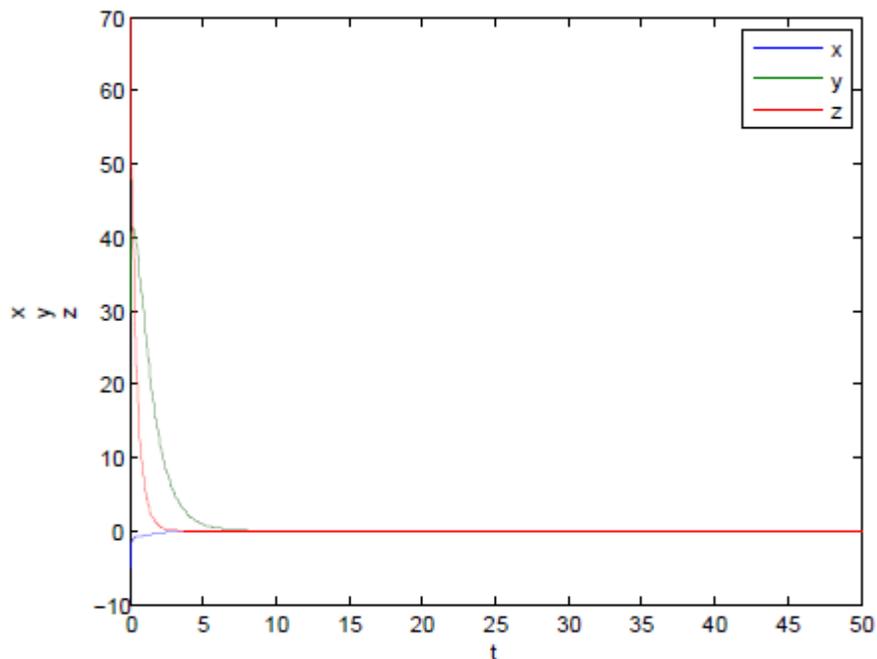


FIG. 4-5 – Le contrôle en boucle fermée décollée au 2^{ème} cas du système de Liu au point \bar{x}_1 .

$$\Leftrightarrow K \in]10, +\infty[$$

On a donc, le système converge vers le point instable \bar{x}_1 pour $K \in]10, +\infty[$

Le contrôle au point \bar{x}_2

Le système avec contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - K(y - 5) \\ \dot{y} = 40x - xz \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 \end{cases} \quad (4.6)$$

La matrice jacobienne est :

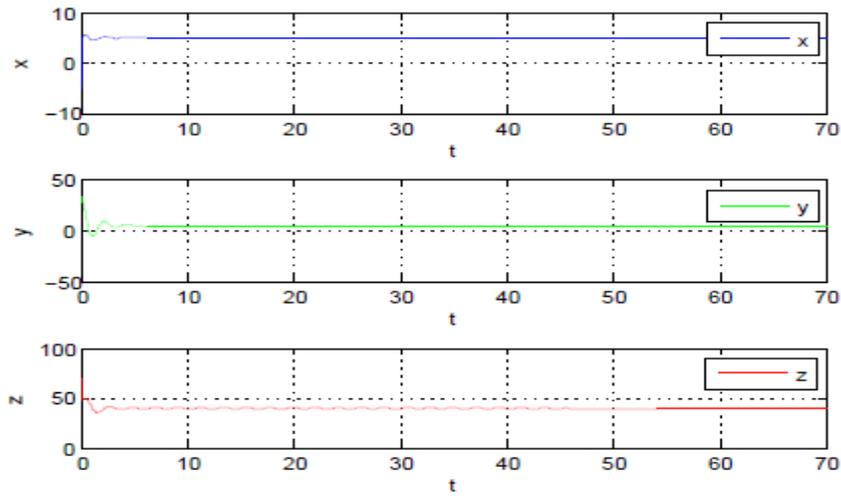


FIG. 4-6 – Le contrôle en boucle fermée décollée au 2^{ème} cas du système de Liu au point \bar{x}_2 .

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 - K & 0 \\ 40 - z & 0 & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(5, 5, 40) = \begin{pmatrix} -10 & 10 - K & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation caractéristique est à la forme suivante :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + 25\lambda - 200K + 2000 = 0$$

avec l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instable \bar{x}_2 si et seulement si :

$$\begin{cases} -200k + 2000 > 0 \\ -1687.5 + 200k > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]-\infty, 10[\\ K \in]8.4375, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K \in]8.4375, 10[$$

Donc le système converge vers le point instable \bar{x}_2 pour $K \in]8.4375, 10[$

Le contrôle au point \bar{x}_3

Le système avec contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - K(y + 5) \\ \dot{y} = 40x - xz \\ \dot{z} = -2.5z + 4x^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 - K & 0 \\ 40 - z & 0 & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(-5, -5, 40) = \begin{pmatrix} -10 & 10 - K & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^3 + 12.5\lambda^2 + 25\lambda - 200K + 2000 = 0$$

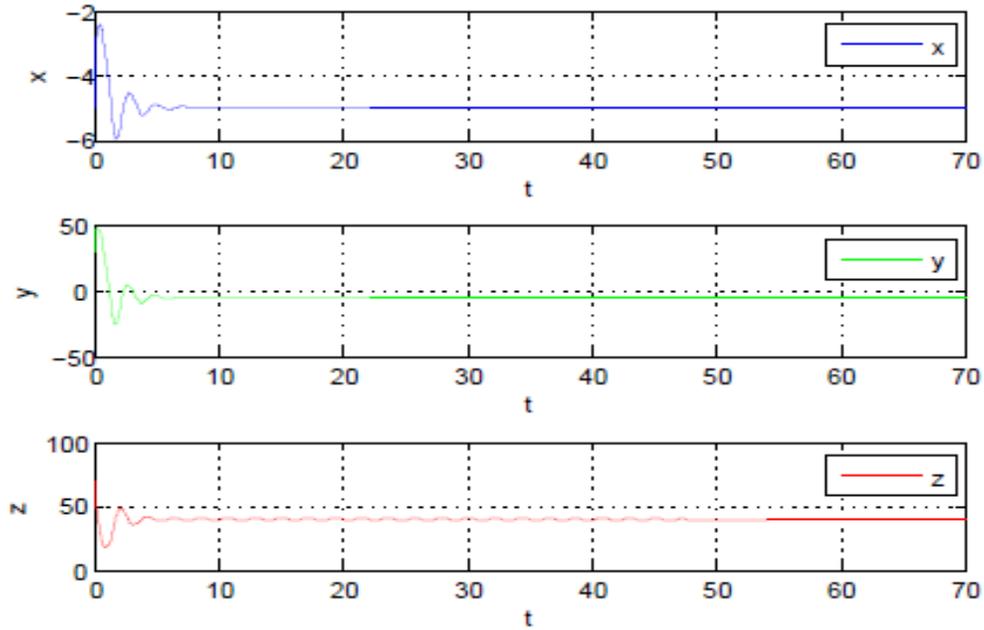


FIG. 4-7 – Le contrôle en boucle fermée décollée au 2^{ème} cas du système de Liu au point \bar{x}_3 .

De même que \bar{x}_2 , le système converge vers le point instable \bar{x}_3 pour $K \in]8.4375, 10[$

4.2.5 Le contrôle du système de Liu en boucle amélioré (Enhacing)

Cas 1 :

Le contrôle au point \bar{x}_1

Le système de Liu avec contrôle est sous la forme [72] :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - Kx \\ \dot{y} = 40x - xz - Ky \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 \end{cases} \quad (4.8)$$

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 - K & 10 & 0 \\ 40 - z & -K & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 - K & 10 & 0 \\ 40 & -K & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

$$\lambda^3 + (12.5 + 2K)\lambda^2 + (K^2 + 15K - 375)\lambda + 2.5K^2 + 25K - 1000 = 0$$

Avec l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instable \bar{x}_1 si et seulement si :

$$\begin{cases} 12.5 + 2K > 0 \\ 2.5K^2 + 25K - 1000 > 0 \\ (12.5 + 2K)(K^2 + 15K - 375) - (2.5K^2 + 25K - 1000) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]-6.25, +\infty[\\ K \in]-\infty, -25.616[\cup]15.616, +\infty[\\ K \in]-28.116, -5[\cup]13.116, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K \in]15.616, +\infty[$$

Donc le système de Liu converge vers le point instable \bar{x}_1 si $K \in]15.616, +\infty[$

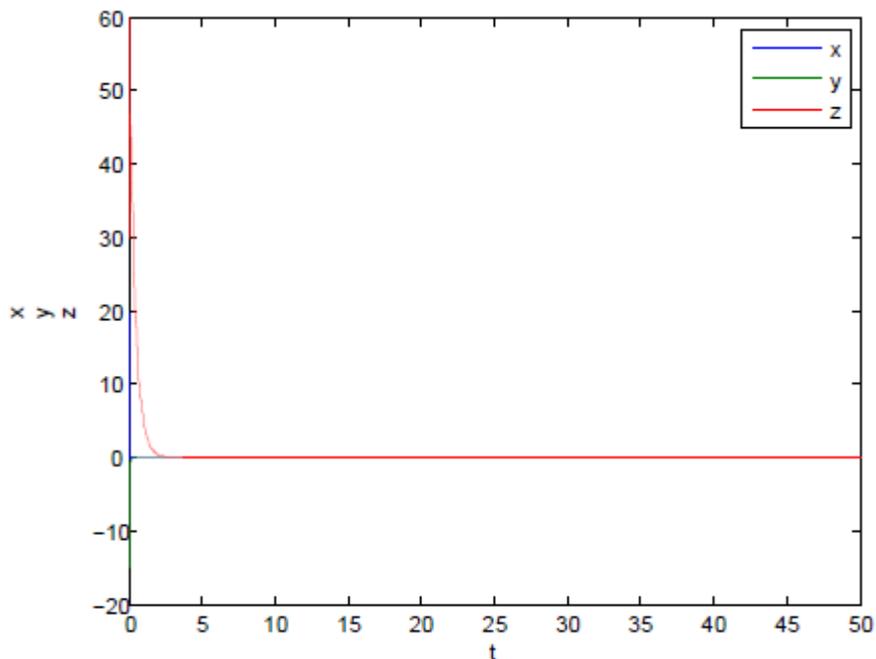


FIG. 4-8 – Le contrôle du système de Liu en boucle amélioré au point \bar{x}_1 .

Le contrôle au point \bar{x}_2

Le système avec contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - K(x - 5) \\ \dot{y} = 40x - xz - K(y - 5) \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 \end{cases} \quad (4.9)$$

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 - K & 10 & 0 \\ 40 - z & -K & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$A = Df(5, 5, 40) = \begin{pmatrix} -10 - K & 10 & 0 \\ 0 & -K & -5 \\ 40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Donc le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne est :

$$\lambda^3 + (12.5 + 2K)\lambda^2 + (k^2 + 15K + 25)\lambda + 2.5K^2 + 25K + 2000 = 0$$

Avec l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instable \bar{x}_2 si et seulement si :

$$\begin{cases} 12.5 + 2K > 0 \\ 2.5K^2 + 25K + 2000 > 0 \\ (12.5 + 2K)(k^2 + 15K + 25) - (2.5K^2 + 25K + 2000) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]-6.25, +\infty[\\ K \in \mathbb{R} \\ K \in]4.1094, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K \in]4.1094, +\infty[$$

Donc le système converge vers le point instable \bar{x}_2 pour $K \in]4.1094, +\infty[$

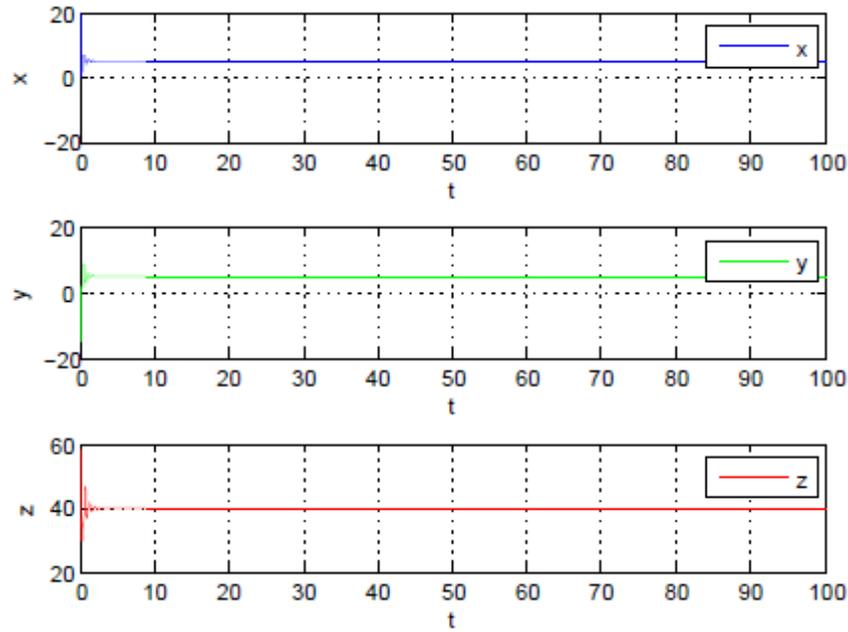


FIG. 4-9 – Le contrôle du système de Liu en boucle améliorée au point \bar{x}_2 .

Le contrôle au point \bar{x}_3

Le système avec contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - K(x + 5) \\ \dot{y} = 40x - xz - K(y + 5) \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 \end{cases} \quad (4.10)$$

La matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 - K & 10 & 0 \\ 40 - z & -K & -x \\ 8x & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

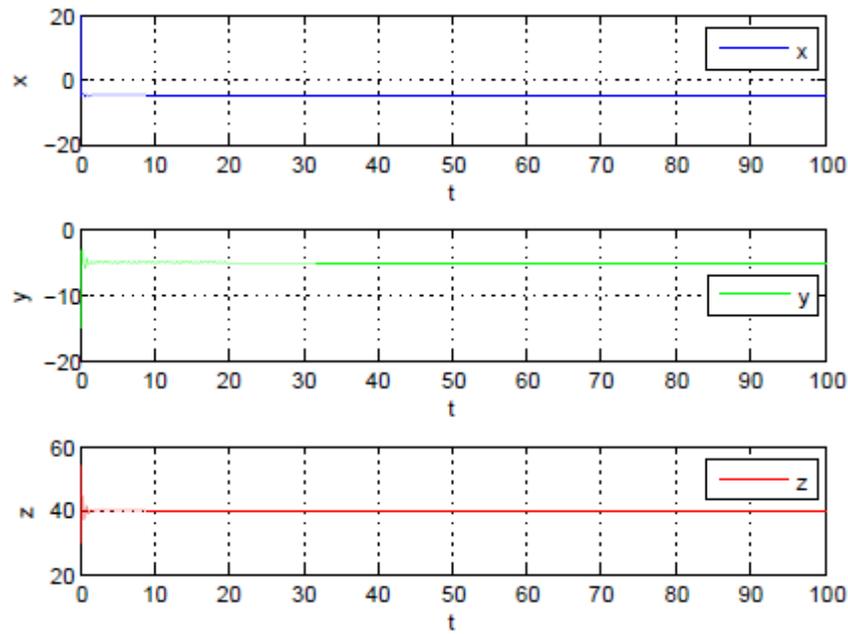


FIG. 4-10 – Le contrôle du système de Liu en boucle améliorée au point \bar{x}_3 .

$$A = Df(-5, -5, 40) = \begin{pmatrix} -10 - K & 10 & 0 \\ 0 & -K & 5 \\ -40 & 0 & -2.5 \end{pmatrix}$$

et comme $\det(J - \lambda I) = 0$, nous avons l'équation caractéristique suivante :

$$\lambda^3 + (12.5 + 2K)\lambda^2 + (k^2 + 15K + 25)\lambda + 2.5K^2 + 25K + 2000 = 0$$

De même que \bar{x}_2 , le système converge vers le point instable \bar{x}_3 pour $K \in]4.1094, +\infty[$

Cas 2 :

Le contrôle au point \bar{x}_1

Le système avec contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) \\ \dot{y} = 40x - xz - Ky \\ \dot{z} = -2,5z + 4x^2 - Kz \end{cases} \quad (4.11)$$

,

la matrice jacobienne est :

$$A = Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 - z & -K & -x \\ 8x & 0 & -2,5 - K \end{pmatrix}$$

$$A = Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & -K & 0 \\ 8 & 0 & -2,5 - K \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$\lambda^3 + (12,5 + 2K)\lambda^2 + (K^2 + 22,5K - 375)\lambda + 10K^2 - 375K - 1000 = 0$$

Avec l'utilisation du critère de Routh-Hurwitz le système converge vers le point instable \bar{x}_1 si et seulement si :

$$\begin{cases} 12,5 + 2K > 0 \\ 10K^2 - 375K - 1000 > 0 \\ (12,5 + 2K)(K^2 + 22,5K - 375) - 10K^2 + 375K + 1000 > 0 \end{cases}$$

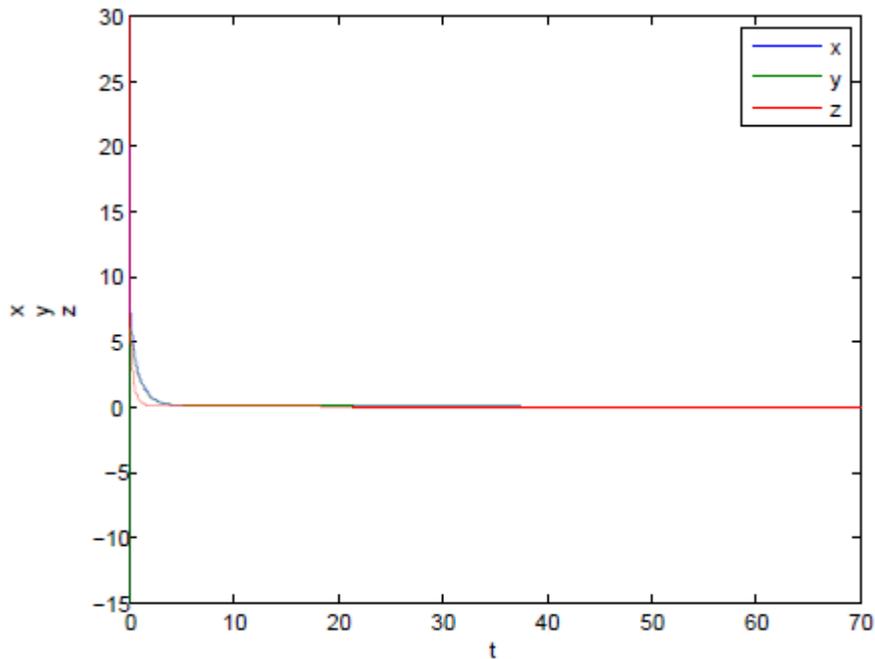


FIG. 4-11 – Le contrôle du système de Liu en boucle amélioré au point \bar{x}_1 au 2^{ème} cas.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} K \in]-6.5, +\infty[\\ K \in]-\infty, -2.5[\cup]40, +\infty[\\ K \in]-22.095, -10[\cup]8.3447, +\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow K \in]40, +\infty[$$

Donc le système converge vers le point instable \bar{x}_1 pour $K \in]40, +\infty[$

4.3 Le circuit de Chua

Le circuit de Chua, représenté par la figure 1, a été décrit et étudié pour la première fois par Matsumoto[63].

Ce circuit est le plus simple circuit autonome présentant une variété très riche de phénomènes

de bifurcations et d'attracteurs chaotiques dont l'existence a été établie expérimentalement et confirmée mathématiquement. Il est exploité aussi bien comme source physique de signaux chaotiques que comme outil expérimental de recherche.

Le circuit de Chua est constitué de deux capacités, d'une inductance, d'une résistance linéaire et d'une résistance non linéaire (qui peut être négative) caractérisée par une courbe voltage-intensité affine par morceaux, la caractéristique de l'élément non linéaire est présentée sur la figure(4-12).

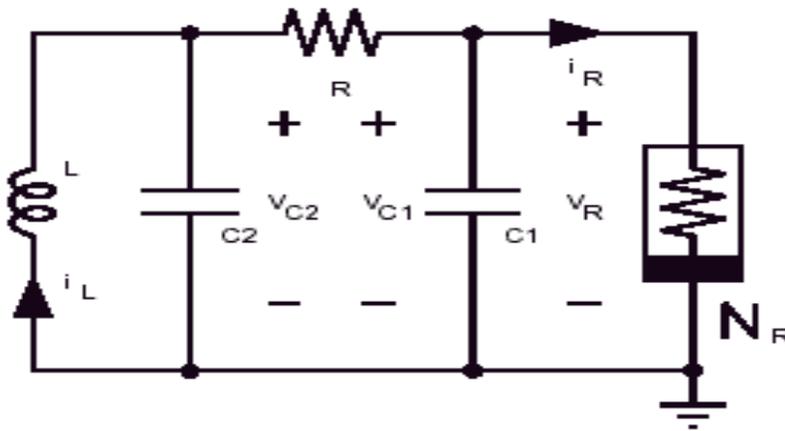


FIG. 4-12 – Le circuit de Chua.

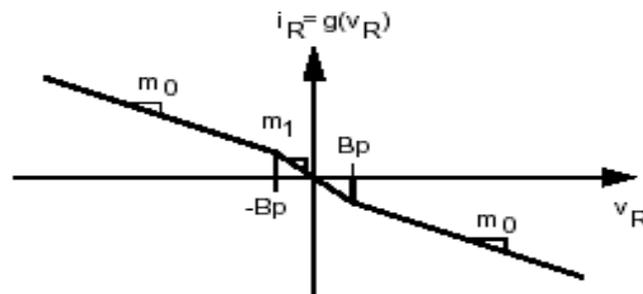


FIG. 4-13 – Caractéristique i-v de la diode de Chua.

Mathématiquement :un système définit par les équations d'état $\dot{x} = \Phi(x)$, $x \in IR^3$ appartient à la famille (FC) du circuit de Chua si et seulement si :

1. $\Phi(.)$ est continue,
2. $\Phi(.)$ est impaire, ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$)

3. IR^3 est partitionné par deux plans parallèles U_{+1} et U_{-1} en deux régions externes D_{-1} et D_{+1} et en une région interne D_0 , bien que les plans U_{+1} et U_{-1} peuvent avoir toute orientation, ils sont souvent, sans perte de généralité, donnés par $U_{+1} : x = +1$ et $U_{-1} : x = -1$, où x est la première coordonnée de $X = (x, y, z)^t$. Sous cette hypothèse, tout élément de (FC) peut être représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X} = A_0 X + b & \text{si } |x| \geq 1 \\ \dot{X} = A_1 X & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$$

A_0 et A_1 sont des matrices carrées réelles 3×3 et $b \in IR^3$, donc (FC) est une famille d'équations différentielles ordinaires.

4.3.1 Les équations de Chua

Pour retrouver les équations d'états du circuit de chua écrivons les divers lois électriques en adoptant les notions de Chua .

Les équations d'états du circuit de Chua sont les suivantes :

$$\begin{cases} c_1 \frac{dv_1}{d\tau} = \frac{1}{R}(V_2 - V_1) - g(V_1) \\ c_2 \frac{dv_2}{d\tau} = \frac{1}{R}(V_1 - V_2) + i_3 \\ L \frac{di_3}{d\tau} = -V_2 \\ g(V_1) = GV_1 + \frac{1}{2}(G_a - G_b) [|V_1 + E| - |V_1 - E|] \end{cases} \quad (4.12)$$

Où V_1 et V_2 sont les voltages respectifs à travers la capacité C_1 et C_2 et i_3 le courant à travers inductance L .

Ce circuit définit pour un ensemble fixe de ses paramètres $(R, C_1, C_2, L, G_a, G_b, E)$, où G_a, G_b sont les pentes des segments externes et internes de trois segment caractéristiques linéaires par morceaux de la diode de Chua et $\pm E$ sont les deux points d'arrêt.

On peut transformer les équations données par l'équation (4.12) en un système sans dimension en posant :

$$\begin{cases} x = \frac{V_1}{E}, y = \frac{V_2}{E}, z = \frac{i_3}{EG}, t = \frac{\tau G}{C_2} \\ \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{C_2}{LG^2}, m_0 = RG_a, m_1 = RG_b \end{cases}$$

On obtient alors le système suivant où x, y et z sont fonctions de t .

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (4.13)$$

où $f(x)$ la fonction linéaire par morceaux suivante :

$$f(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)[|x + 1| - |x - 1|],$$

.C'est le système (4.13) qui est connu sous le nom des équations sans dimension de Chua, il ne dépend plus que quatre paramètres (α, β, m_0 et m_1) et également appelé système du Double scroll.

Le système (4.13) est un système tri-dimensionnel autonome et non linéaire (linéaire par morceaux), il est symétrique par rapport à l'origine; c'est -à-dire que Φ est invariant par la transformation :

$$(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z).$$

On fait varier le paramètre de contrôle α et on fixe la valeur de β à 14.87, avec $m_0 = -\frac{1}{7}$ et $m_1 = \frac{2}{7}$.

La divergence :

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\alpha - k,$$

tel que

$$k = \begin{cases} m_0 & \text{si } x \in D_0 \\ m_1 & \text{si } x \in D_{-1} \text{ ou } D_1 \end{cases},$$

où

$$D_0 = \{(x, y, z) : |x| \leq 1\}$$

$$D_{-1} = \{(x, y, z) : x < -1\}$$

$$D_1 = \{(x, y, z) : |x| > 1\}$$

$\nabla V < 0$ implique que $-\alpha - k < 0$.

Donc $\alpha > -k \geq -\frac{2}{7}$, alors le système est dissipatif pour $\alpha > 0$.

Le système admet trois points d'équilibres sont :

$$P^- \in D_1, O \in D_0, P^+ \in D_{-1},$$

où

$$P^- = (-c, 0, c), O = (0, 0, 0), P^+ = (c, 0, -c)$$

avec

$$c = \frac{m_0 - m_1}{m_0 + 1}.$$

Nous représentons la nature de ces points aux tableau suivant :

α	O	P^\pm
$0 < \alpha < 6.9635$	instable	stable
$\alpha > 6.9635$	instable	instable

4.3.2 Résultats et tests numériques

Nous avons utilisé la méthode d'intégration de Runge-Kutta d'ordre quatre, pour un base de discrétisation $h = 0.05$. Les trajectoires de ces solution sont tracées en utilisant matlab, pour

la même condition initiale $(-0.1, 0.1, 0.1)$.

Le système de Chua exhibe un attracteur "Double scroll" pour $\alpha = 9.8$, $\beta = 14.87$ et $m_0 = -1/7, m_1 = 2/7$ que nous représentons par les figures (Fig. 4-14, 4-15, 4-16)

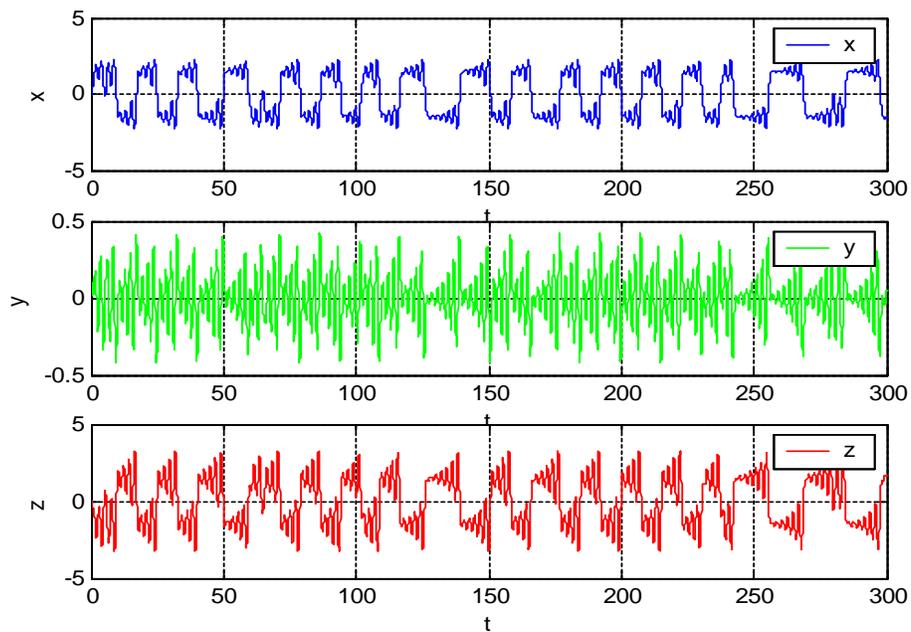


FIG. 4-14 – Les séries temporelle $x(t), y(t)$ et $z(t)$.

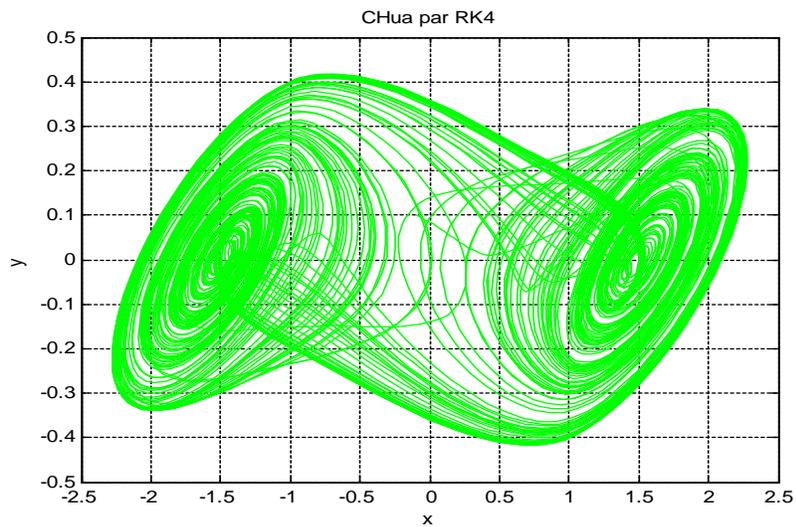


FIG. 4-15 – Projection de l'attracteur de Chua sur le plan (x, y)

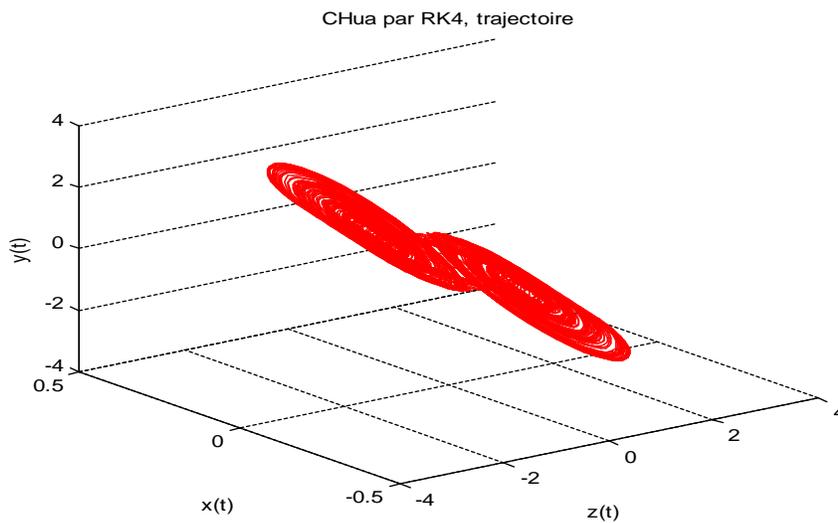


FIG. 4-16 – L'attracteur "Double scroll" de Chua dans l'espace de phase (x, y, z)

4.3.3 Contrôle du système de Chua par la méthode du Backstepping

Soit $O(0, 0, 0)$ le point fixe

Pour que le système (4.13) se stabilise sur l'orbite périodique O il faut que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X - O\| = 0$ avec $X = (x, y, z)^T$.

on fait un changement de variables des états suivant :

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = y \\ x_3 = x \end{cases}$$

Le système contrôlé est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_2 + x_1 \\ \dot{x}_3 = \alpha(x_2 - f(x_3)) + u \end{cases}$$

Où u représentent la loi de contrôle; elle est calculée par l'algorithme du backstepping.

Etape 1 :

On pose : $z_1 = x_1$, sa variation est :

La loi de contrôle virtuelle α_1, V_1, z_1 pour le premier sous système :

$$\begin{cases} \alpha_1 = z_1 \\ \dot{z}_1 = -\beta z_2 - \beta z_1 \\ \dot{V}_1 = -\beta z_2 z_1 - \beta z_1^2 \end{cases}$$

avec $z_2 = x_2 - \alpha_1$

Etape 2 :

La loi de contrôle virtuelle α_2, V_2, z_2 pour le second sous système :

$$\begin{cases} \alpha_2 = \beta z_1 \\ \dot{z}_2 = -\beta z_2 - \beta z_1 \\ \dot{V}_2 = -\beta z_1^2 - z_2^2 + z_2 z_3 \end{cases}$$

Etape 3 :

La loi de contrôle finale u , V_2 , z_2 pour le troisième sous système :

$$\begin{cases} u = (\alpha m_1 \beta - \beta^2) z_1 - (1 + \alpha + \beta^2) z_2 - \frac{1}{2}(m_0 - m_1) [|z_3 + \alpha_2 + 1| - |z_3 + \alpha_2 - 1|] \\ \dot{z}_3 = -z_2 + \alpha z_1 \\ \dot{V}_3 = -\beta z_1^2 - z_2^2 - \alpha(1 - m_1) z_3^2 \end{cases}$$

Résultats numériques

Les figures suivantes illustrent la convergence des états vers le point d'équilibre.

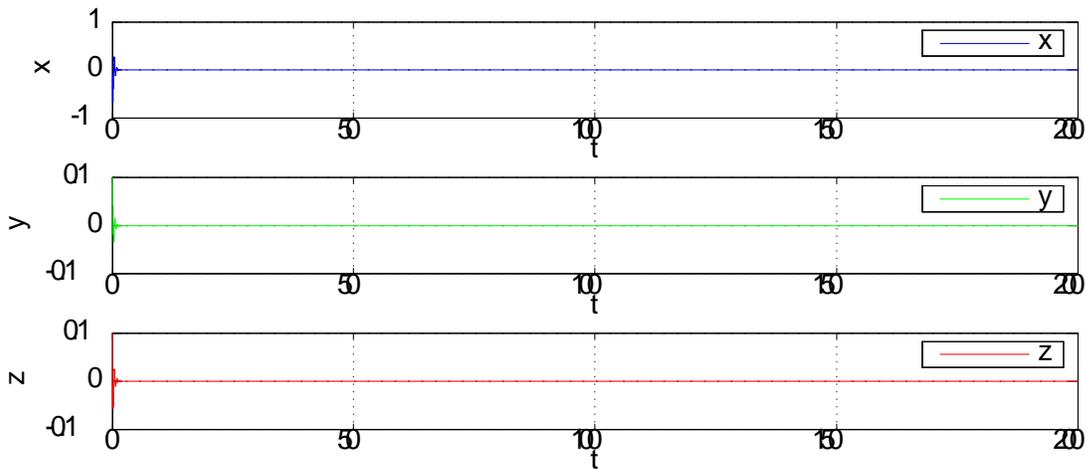


FIG. 4-17 – Convergence du système de Chua au point d'équilibre O

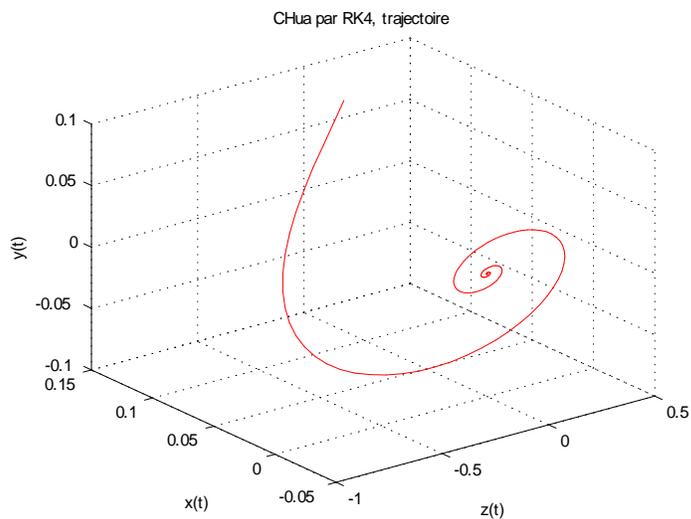


FIG. 4-18 – Convergence du Chua système dans l'espace de phases

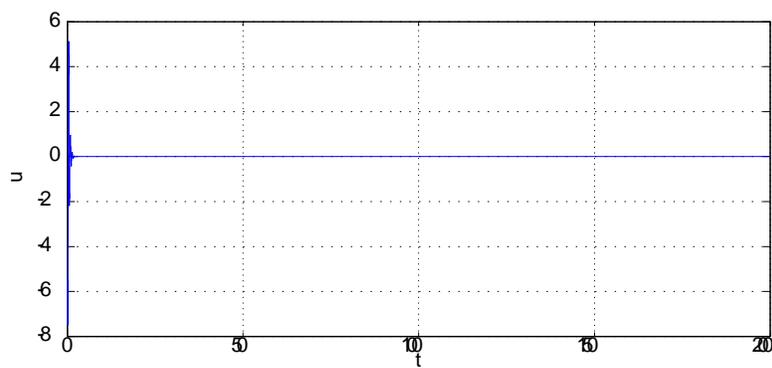


FIG. 4-19 – Variation de la loi de contrôle finale u

4.4 Conclusion

L'étude de la stabilité ou le contrôle du système chaotique en générale baser sur deux principes ; le théorème de Routh-Hurwitz ou la fonction de Lyapunov. Ce chapitre consacré pour le contrôle de deux systèmes chaotiques : Liu et Chua, avec l'application de deux méthodes différentes : le contrôle en boucle fermé sous deux formes, et le Backstepping, pour le premier on utilise le théorème de Routh-Hurwitz et le deuxième la fonction de Lyapunov pour arriver au contrôle du système chaotique.

Chapitre 5

Application du contrôle à quelques systèmes dynamiques chaotiques

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on propose le contrôle des systèmes chaotiques par la méthode de contrôle en boucle fermée (feedback). Pour l'étude de la stabilité des systèmes, on utilise des conditions modifiées conclues à partir du critère de Routh-Hurwitz. Les résultats numériques montrent l'efficacité de l'analyse théorique.

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de :

1- Une publication internationale '**Feedback Control of Chaotic Systems by Using Jacobian Matrix Conditions**' Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 18 (3) (2018) 285-296.

2- Une conférence internationale '**Feedback Control of Lorenz System**' ECMISciTech© 2017 - Freres Mentouri University Constantine, Algeria.

Finalement, un travail a pour but le contrôle non linéaire du système modifié de Genesio.

5.2 Conditions sur la matrice Jacobienne

Supposons que A est une matrice 3×3 de constantes réelles, son polynôme caractéristique est :

$$f(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

Soit A la matrice Jacobienne :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

alors, la relation entre les coefficients du polynôme caractéristique et la matrice Jacobienne est :

$$\begin{cases} a = -\text{trace}(A), \\ b = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \\ c = -\det(A), \end{cases} \quad (5.2)$$

avec : $A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, et $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

donc :

$$ab - c = -a_{11}(A_{22} + A_{33}) - a_{22}(A_{11} + A_{33}) - a_{33}(A_{22} + A_{11}) - 2a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Remarque 5.1 On remarque , si $a_{ii} < 0$, $A_{ii} > 0$, $i = 1, 2, 3$ et $\det(A) < 0$ tel que : $t = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \geq 0$, donc, les coefficients du polynôme caractéristique sont positifs. nous pouvons assurer la stabilité de tout système chaotique avec le théorème suivant.

On considère une matrice Jacobienne A a un point fixe , et $t = a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$.

Théorème 5.1 Si $t \geq 0$, toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont de parties réelles négatives, lorsque les conditions données sont vérifiées :

$\det(A) < 0$, $a_{ii} < 0$ et $A_{ii} > 0$, pour $i = 1, 2, 3$.

Demenstration On a :

$$\begin{cases} a = -\text{trace}(A) > 0, \\ b = A_{11} + A_{22} + A_{33} > 0, \\ ab - c > 0, \\ c = -\det(A) > 0 \end{cases}$$

donc, d'après le théorème de Routh-Hurwitz, toutes les racines du polynôme caractéristique ont des parties réelles négatives. ■

5.3 Application sur les systèmes chaotiques

5.3.1 La deuxième forme de Rössler

Soit le système de Rössler [71] défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + \alpha y, \\ \dot{z} = \beta x + xz - \gamma z, \end{cases}$$

ou $\alpha = 0.38, \beta = 0.3, \gamma = 4.5$. Les deux points d'équilibres sont :

$$E_1 = (0, 0, 0), \quad E_2 = \left(\gamma - \alpha\beta, \beta - \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha} - \beta\right).$$

Le contrôle au point E_1

On pose le contrôle du système de Rössler sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) - u_1, \\ \dot{y} = x + 0.38y - u_2, \\ \dot{z} = 0.3x + (x - 4.5)z - u_3, \end{cases} \quad (5.3)$$

tel que : $u_1 = kx, u_2 = ky, u_3 = kz$, et k le coefficient feedback ; quand $k > 0.38$, le système (5.3) se converge vers le point d'équilibre $(0, 0, 0)$.

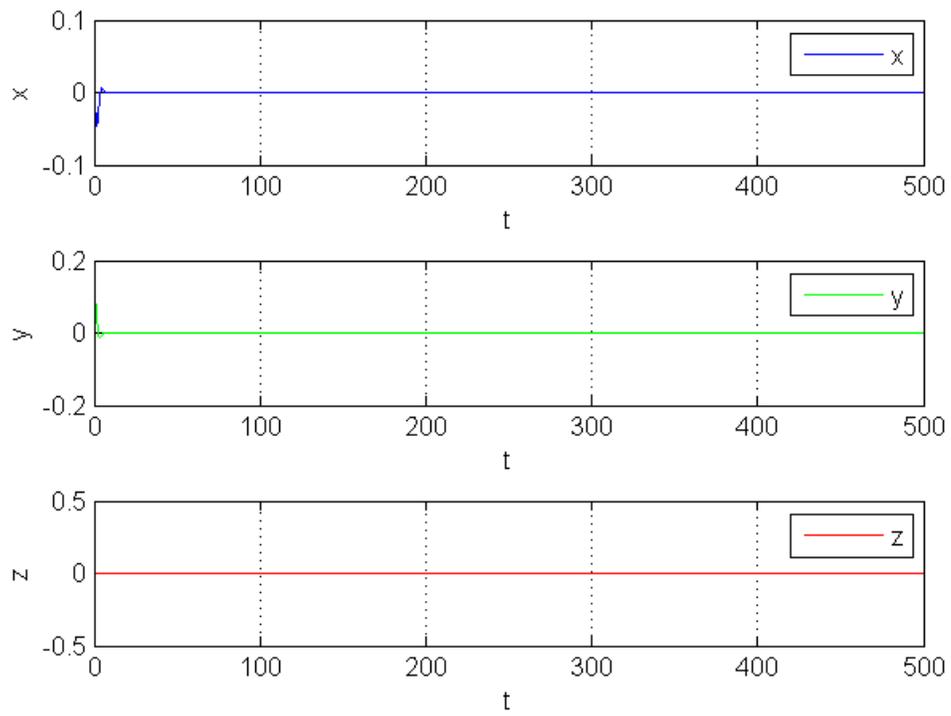


FIG. 5-1 – Le contrôle du système de Rössler au point fixe E_1 .

Demenstration la matrice Jacobienne du système (5.3) au voisinage de $(0, 0, 0)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -k & -1 & -1 \\ 1 & 0.38 - k & 0 \\ 0.3 & 0 & -4.5 - k \end{pmatrix},$$

tel que : $a_{11} = -k, a_{22} = 0.38 - k, a_{33} = -4.5 - k, A_{11} = k^2 + 4.12k - 1.71, A_{22} = k^2 + 4.5k + 0.3, A_{33} = k^2 - 0.38k + 1$ et $\det(A) = -1k^3 - 4.12k^2 + 0.41k - 4.386$. On a $t = 0$, donc :

$$\begin{cases} a_{11} < 0, \\ a_{22} < 0, \\ a_{33} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0, \\ k > 0.38, \\ k > -4.5, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_{11} > 0, \\ A_{22} > 0, \\ A_{33} > 0, \\ \det(A) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in]-\infty, -4.5[\cup]0.38, \infty[, \\ k \in]-6.7685 \times 10^{-2}, \infty[\cup]-\infty, -4.4323[, \\ k \in]-\infty, \infty[, \\ k \in]-4.4354, \infty[, \end{cases}$$

on remarque que, si $k > 0.38$, alors $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0, \det A < 0$ et $A_{11} > 0, A_{22} > 0, A_{33} > 0$. D'après le théorème (5.2), le système (5.3) se converge vers le point d'équilibre instable $(0, 0, 0)$ (voir Fig. 5-1). ■

De même, le système peut également être contrôlé en $E_2(4.386, -11.542, 11.542)$ par le même contrôle. Si le système de Rössler contrôlé est :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) - u_1, \\ \dot{y} = x + 0.38y - u_2, \\ \dot{z} = 0.3x + (x - 4.5)z - u_3, \end{cases} \quad (5.4)$$

avec : $u_1 = k(x - 4.386), u_2 = k(y + 11.542), u_3 = k(z - 11.542)$

Pour démontrer ce résultat, on fait le changement suivant : $x_1 = x - \beta, y_1 = y + \alpha, z_1 = z - \alpha$.

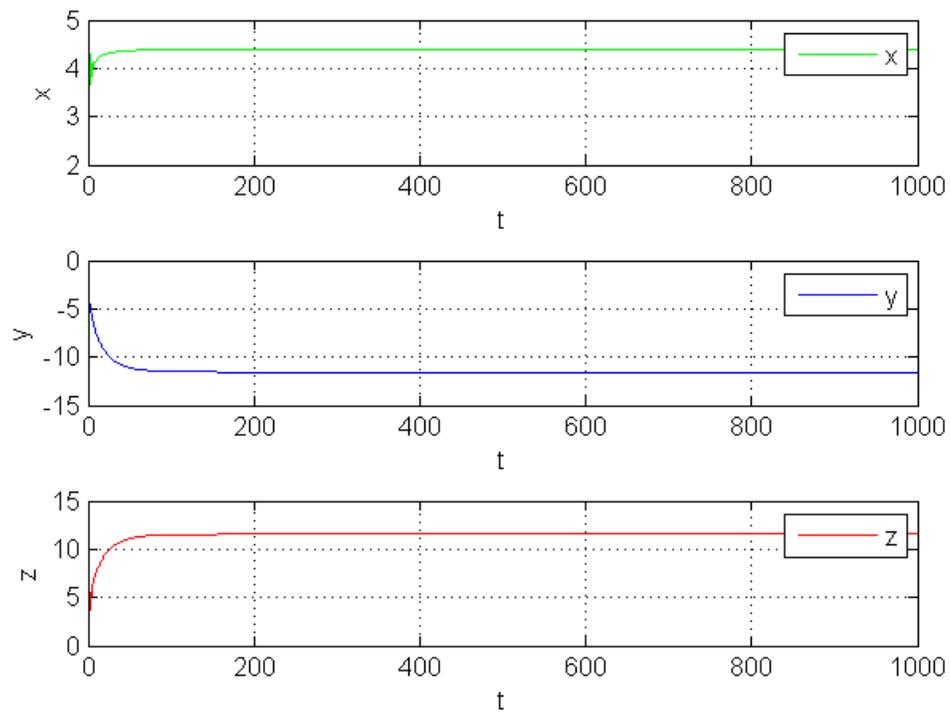


FIG. 5-2 – Le contrôle du système de Rössler au point fixe E_2 .

si $\alpha = 11.542$, $\beta = 4.386$, donc le système (5.4) a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) - kx_1, \\ \dot{y}_1 = x_1 + 0.38y_1 - ky_1, \\ \dot{z}_1 = 11.842x_1 + (x_1 - 0.114)z_1 - kz_1, \end{cases} \quad (5.5)$$

la matrice Jacobienne du système (5.5) est :

$$A = \begin{pmatrix} -k & -1 & -1 \\ 1 & 0.38 - k & 0 \\ 11.842 & 0 & -0.114 - k \end{pmatrix},$$

tel que k le coefficient feedback; si $k > 0.38$, on trouve que le système (5.5) se converge vers le point fixe $E_2(0, 0, 0)$, alors le système (5.4) converge vers le point fixe $E_2(4.386, -11.542, 11.542)$.

Démonstration On a : $\det(A) = -1.0k^3 + 0.266k^2 - 12.799k + 4.3860$

$a_{11} = -k, a_{22} = 0.38 - k, a_{33} = -0.114 - k, A_{11} = k^2 - 0.266k - 0.04332, A_{22} = k^2 + 0.114k + 11.842, A_{33} = 11.842k - 4.5000$, et $t = 0$, alors :

$$\begin{cases} a_{11} < 0, \\ a_{22} < 0, \\ a_{33} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0, \\ k > 0.38, \\ k > -0.114, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_{11} > 0, \\ A_{22} > 0, \\ A_{33} > 0, \\ \det(A) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in]-\infty, -0.114[\cup]0.38, \infty[, \\ k \in \mathbb{R} \\ k \in]0.38, \infty[, \\ k \in]0.34199, \infty[. \end{cases}$$

donc si $k > 0.38$, on trouve $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0, \det A < 0, A_{11} > 0, A_{22} > 0$, et $A_{33} > 0$. D'après le Théorème (5.2), le système (5.5) converge vers le point E_2 (voir Fig. 5-2). ■

5.3.2 Contrôle de système de Liu

Le système de Liu [72] est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x), \\ \dot{y} = x(\lambda - \gamma z), \\ \dot{z} = \delta x^2 - \beta z, \end{cases}$$

avec $\alpha = 10, \lambda = 40, \gamma = 1, \delta = 4, \beta = 2.5$. Ses points fixes sont $E_1 : (0, 0, 0)$, $E_{2,3} : (\pm\sqrt{\frac{\beta\delta}{\gamma\lambda}}, \pm\sqrt{\frac{\beta\delta}{\gamma\lambda}}, \frac{\beta}{\gamma})$.

Le contrôle au point E_1

Le système de Liu sous contrôle est :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x) - u_1, \\ \dot{y} = x(\lambda - \gamma z) - u_2, \\ \dot{z} = \delta x^2 - \beta z - u_3, \end{cases} \quad (5.6)$$

tel que $u_1 = kx, u_2 = ky, u_3 = kz$,

si $k > 15.616$, le système (5.6) converge vers le point fixe $(0, 0, 0)$.

Demonstration la matrice Jacobienne de système (5.6) au voisinage du point $(0, 0, 0)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 - k & 10 & 0 \\ 40 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 - k \end{pmatrix},$$

alors $\det(A) = -1k^3 - 12.5k^2 + 375k + 1000 < 0$,

$a_{11} = -10 - k, a_{22} = -k, a_{33} = -2.5 - k$,

$A_{11} = k^2 + 2.5k$,

$A_{22} = k^2 + 12.5k + 25$.

$A_{33} = k^2 + 10k - 400$,

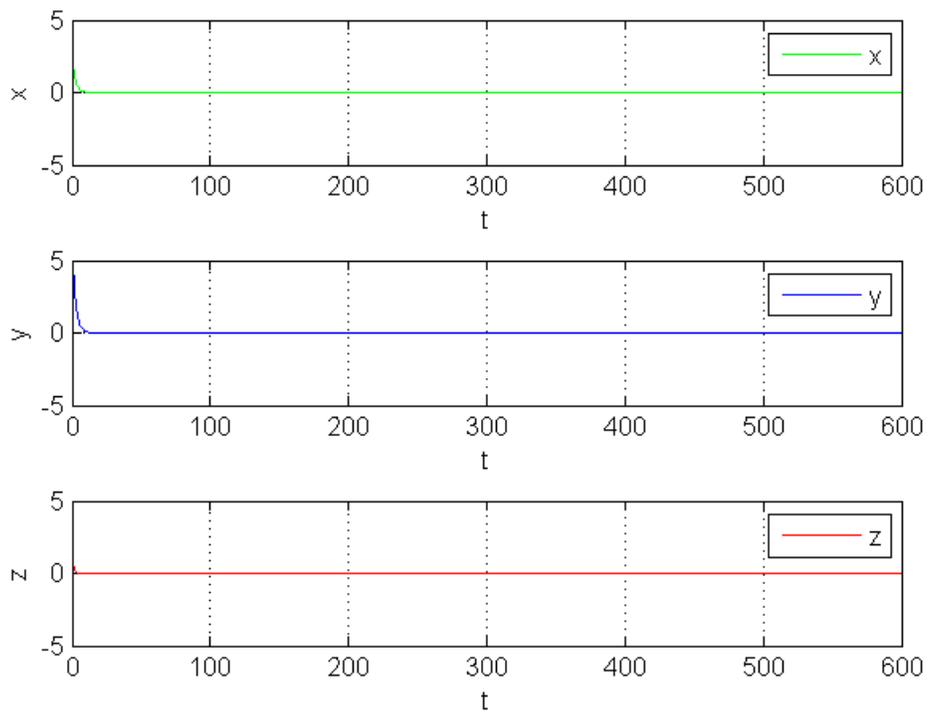


FIG. 5-3 – Contrôle du système de Liu au point E_1

avec $t = 0$, donc :

$$\begin{cases} a_{11} < 0, \\ a_{22} < 0, \\ a_{33} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -10, \\ k > 0, \\ k > -2.5, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_{11} > 0, \\ A_{22} > 0, \\ A_{33} > 0, \\ \det(A) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in]-\infty, -2.5[\cup]0, \infty[, \\ k \in]-\infty, -10.0[\cup]-2.5, \infty[, \\ k \in]-\infty, -25.616[\cup], 15.616, \infty[, \\ k \in]-10, -2.5[\cup]0, \infty[, \end{cases}$$

on peut facilement être vu quand $k > 15.616$, alors $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0, \det A < 0, A_{11} > 0$, et $A_{22} > 0, A_{33} > 0$. D'après le théorème (5.2), le système (5.6) converge vers le point $(0, 0, 0)$ (voir Fig. 5-3). ■

Le Contrôle au point E_2

On consider système de Liu avec controle sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x) - u_1, \\ \dot{y} = x(\lambda - \gamma z) - u_2, \\ \dot{z} = \delta x^2 - \beta z - u_3, \end{cases} \quad (5.7)$$

tel que : $u_1 = k(x + 5) + 10(y + 5), u_2 = k(y + 5), u_3 = k(z - 40)$.

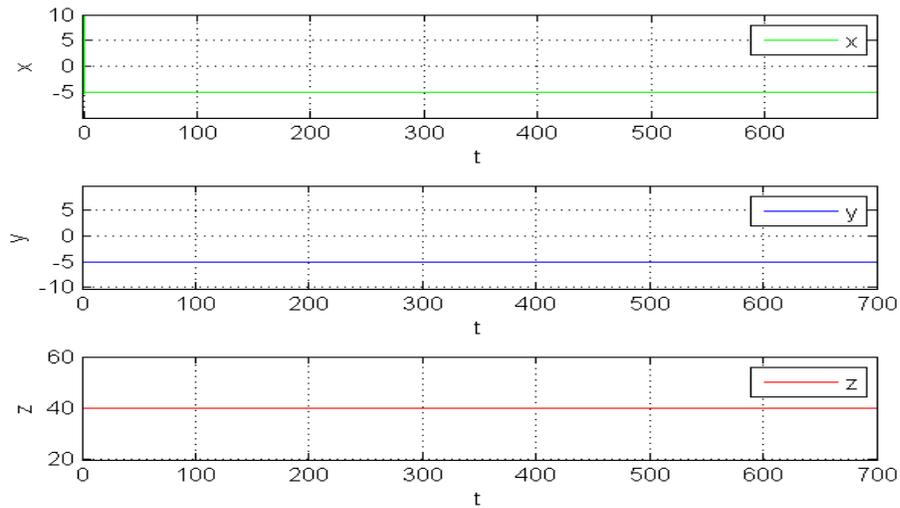
Si $k > 0$, on peut démontrer que le système que (5.7) converger vers le point l'équilibre $(-5, -5, 40)$.

Demenstration matric Jacobienne du système (5.7) at $(-5, -5, 40)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 - k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 5 \\ -40 & 0 & -2.5 - k \end{pmatrix},$$

où $\det(A) = -1.0k^3 - 12.5k^2 - 25k$

P2



32.png

FIG. 5-4 – Le Contrôle du système de Liu au point E_2 .

$$a_{11} = -10 - k, a_{22} = -k, a_{33} = -2.5 - k,$$

$$A_{11} = k^2 + 2.5k,$$

$$A_{22} = k^2 + 12.5k + 25.,$$

$$A_{33} = k^2 + 10k,$$

avec $t = 0$, donc :

$$\begin{cases} a_{11} < 0, \\ a_{22} < 0, \\ a_{33} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -10, \\ k > 0, \\ k > -2.5 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_{11} > 0, \\ A_{22} > 0, \\ A_{33} > 0, \\ \det(A) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in]-\infty, -2.5[\cup]0, \infty[, \\ k \in]-\infty, -10.0[\cup]-2.5, \infty[, \\ k \in]-\infty, -10[\cup]0, \infty[, \\ k \in]-10, -2.5[\cup]0, \infty[. \end{cases}$$

Si $k > 0$, on a $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0, \det A < 0, A_{11} > 0$, et $A_{22} > 0, A_{33} > 0$. Selon le théorème (5.2), le système (5.7) converge vers point fixe instable $(-5, -5, 40)$ (voir Fig 5-4). ■

Remarque 5.2 *De même, le système peut également être contrôlé pour $E_3(5, 5, 40)$ par le même contrôle $k > 0$.*

5.3.3 Le système de Genesio modifié

Le système de Genesio modifié [73, 21] est :

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \alpha_1 y + z, \\ \dot{z} = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 y + \alpha_5 z, \end{cases}$$

avec $\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = -6, \alpha_4 = -2.85, \alpha_5 = -0.5$, ces paramètres et ces points fixes sont $E_1 = (0, 0, 0), E_2 = (2, 0, 0)$.

Le contrôle du système au point E_1

Soit le système avec contrôle définie par :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - u_1, \\ \dot{y} = \alpha_1 y + z - u_2, \\ \dot{z} = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 y + \alpha_5 z - u_3, \end{cases} \quad (5.8)$$

tel que $u_1 = kx - y, u_2 = ky + z, u_3 = kz$. ou k est le coefficient feedback ; si $k > 0$, le système (5.8) converge vers le point d'équilibre $(0, 0, 0)$.

Demonstration La matrice Jacobienne de système (5.8) au voisinage du point d'équilibre (0.0.0) est :

$$A = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 - k & 0 \\ -6 & -2.85 & -0.5 - k. \end{pmatrix}$$

alors $\det(A) = -k^3 - k^2 - 0.25k$,

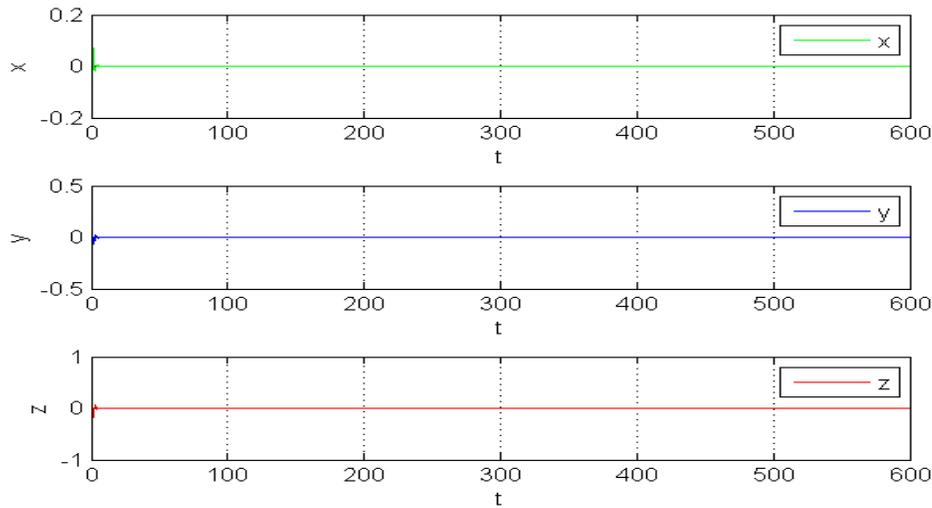


FIG. 5-5 – Le contrôle du système de Genesio au point d'origine.

$$a_{11} = -k, a_{22} = -0.5 - k, a_{33} = -0.5 - k,$$

$$A_{11} = k^2 + k + 0.25 > 0,$$

$$A_{22} = k^2 + 0.5k,$$

$$A_{33} = k^2 + 0.5k, \text{ et } t = 0, \text{ donc :}$$

$$\begin{cases} a_{11} < 0, \\ a_{22} < 0, \\ a_{33} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0, \\ k > -0.5, \\ k > -0.5, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_{11} > 0, \\ A_{22} > 0, \\ A_{33} > 0, \\ \det(A) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in]-\infty, -0.5[\cup]-0.5, \infty[\\ k \in]-\infty, -0.5[\cup]0, \infty[, \\ k \in]-\infty, -0.5[\cup]0, \infty[, \\ k \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

On remarque que, si $k > 0$, alors $a_{ii} < 0$, $A_{ii} > 0$, $i = 1, 2, 3$ et $\det(A) < 0$. Donc D'après le théorème (5.2), le système (5.8) se converge vers le point d'équilibre $(0, 0, 0)$. (voir Fig 5-5). ■

Le contrôle au point $E_2 : (2, 0, 0)$

Soit le système de Genesio modifié avec contrôle défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - u_1, \\ \dot{y} = \alpha_1 y + z - u_2, \\ \dot{z} = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 y + \alpha_5 z - u_3, \end{cases} \quad (5.9)$$

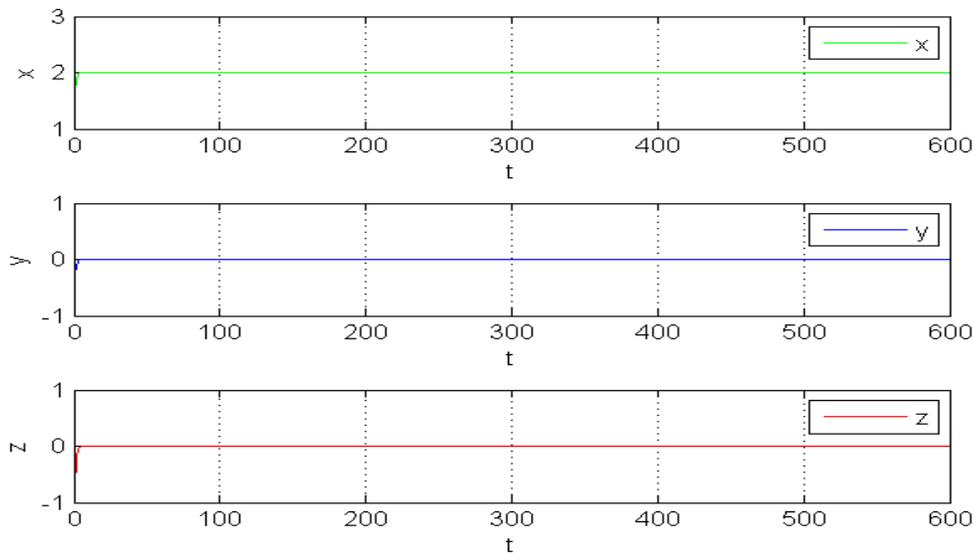


FIG. 5-6 – Le contrôle du système de Genesio au point E_2 .

avec $u_1 = k(x - 2)$, $u_2 = ky + z$, $u_3 = kz$, si $k > 0$, le système (5.9) converge vers le point d'équilibre $(2, 0, 0)$.

Demenstration La matrice Jacobienne de système (5.9) au point fixe $(2,0,0)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & -0.5 - k & 0 \\ 6 & -2.85 & -0.5 - k \end{pmatrix},$$

on trouve $\det(A) = -1k^3 - 1k^2 - 0.25k$,

$a_{11} = -k, a_{22} = -0.5 - k, a_{33} = -0.5 - k$,

$A_{11} = k^2 + k + 0.25$,

$A_{22} = k^2 + 0.5k$,

$A_{33} = k^2 + 0.5k$, on a $t = 0$, donc :

$$\begin{cases} a_{11} < 0, \\ a_{22} < 0, \\ a_{33} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0, \\ k > -0.5, \\ k > -0.5, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_{11} > 0, \\ A_{22} > 0, \\ A_{33} > 0, \\ \det(A) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in]-\infty, -0.5[\cup]-0.5, \infty[, \\ k \in]-\infty, -0.5[\cup]0, \infty[, \\ k \in]-\infty, -0.5[\cup]0, \infty[, \\ k \in]0, \infty[. \end{cases}$$

Donc, si $k > 0$, alors, $a_{ii} < 0, A_{ii} > 0, i = 1, 2, 3$ et $\det(A) < 0$. Donc D'après le théorème (5.2), le système (5.9) stabilisé sur le point d'équilibre $(2, 0, 0)$, (voir Fig 5-6).

■

5.4 Contrôle linéaire en boucle fermée du système de Lorenz

Le système de Lorenz avec un contrôle linéaire est posé comme :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - u_1 \\ \dot{y} = x(28 - z) - y - u_2 \\ \dot{z} = xy - 8/3z - u_3 \end{cases} \quad (5.10)$$

avec $u_1 = k(y - y^*)$, $u_2 = 0$, $u_3 = k(y - y^*)$, est la formule du contrôle linéaire, tel que k représente le coefficient (feedback) du contrôle.

Théorème 5.2 *Sous la formule du contrôle linéaire : $u_i (i = 1, 2, 3)$, le système en boucle fermée (5.10) est asymptotiquement stable aux points fixes $E_{1,2,3}$.*

Démonstration La matrice Jacobienne de système (5.10) au voisinage de point fixe (x^*, y^*, z^*) est :

$$J = \begin{pmatrix} -10 & 10 - k & 0 \\ (28 - z^*) & -1 & -x^* \\ 0 & x^* - k & (-8/3) \end{pmatrix}$$

donc pour le point $E_1(0, 0, 0)$ la matrice Jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} -10 & 10 - k & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & -k & (-8/3) \end{pmatrix}$$

de plus le polynôme caractéristique définie par :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{41}{3}\lambda^2 + \left(28k - \frac{722}{3}\right)\lambda + \left(\frac{224}{3}k - 720\right)$$

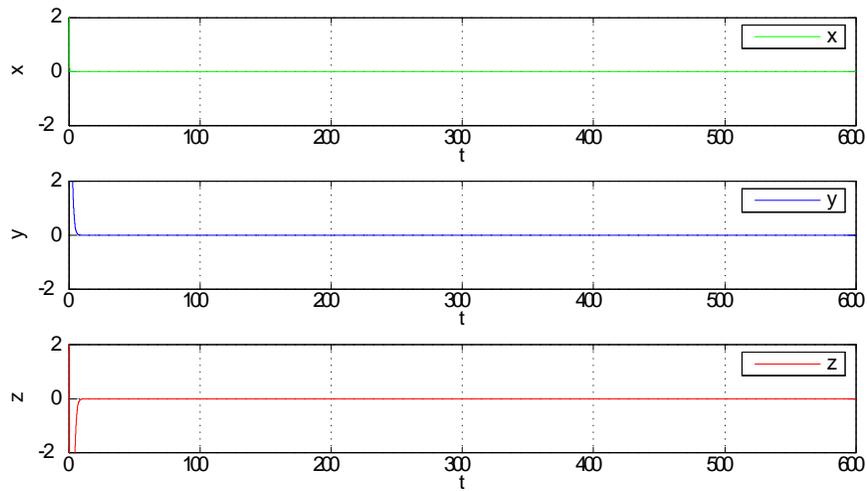


FIG. 5-7 – Contrôle linéaire du système de Lorenz au point fixe E_1 .

ainsi

$$\begin{cases} a = \frac{41}{3} \\ b = (28k - \frac{722}{3}) \\ c = (\frac{224}{3}k - 720) \end{cases}$$

d'après le théorème de Routh-Hurwitz , on doit trouver $a > 0, c > 0$ et $ab - c > 0$ donc :

$$\begin{cases} a = \frac{41}{3} > 0, \\ c = (\frac{224}{3}k - 720) > 0, \text{ si } k > 9.6429 \\ ab - c = \frac{41}{3} (28k - \frac{722}{3}) - (\frac{224}{3}k - 720) > 0, \text{ si } k > 8.3413, \end{cases}$$

Pour $k > 9.6429$, le système (5.10) converge vers le point d'équilibre $E_1(0, 0, 0)$. (voir 5-7).

De même, le système peut également être contrôlé au point d'équilibre $(-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$.

Nous considérons

$$u_1 = k(y + \sqrt{72}), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = k(y + \sqrt{72}).$$

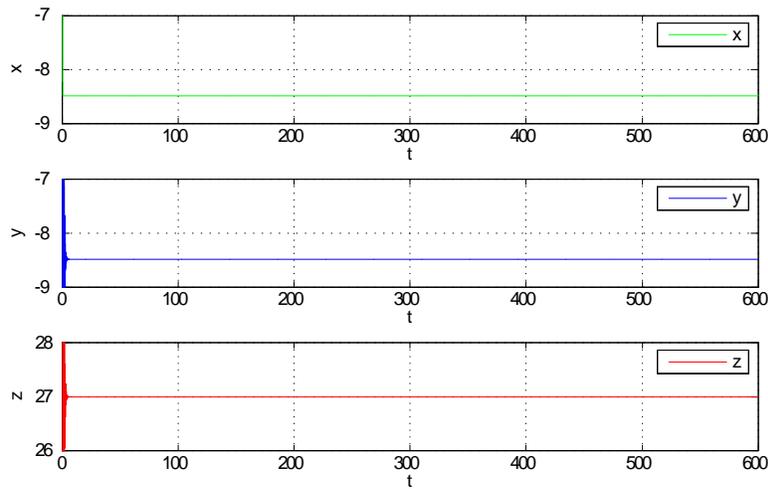


FIG. 5-8 – Contrôle linéaire du système de Lorenz au point fixe E_2 .

La matrice Jacobienne est

$$J = \begin{pmatrix} -10 & 10 - k & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{72} \\ -\sqrt{72} & -\sqrt{72} - k & (-8/3) \end{pmatrix},$$

avec la même méthode on trouve :

$$\begin{cases} a > 0, \forall k \\ c > 0, \text{ si } k > -92.787 \\ ab - c >, \text{ si } k > 0.48295 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0, \forall k \\ c > 0, \text{ si } k > -92.787 \\ ab - c >, \text{ si } k > 0.48295 \end{cases}$$

d'après le théorème de Routh-Hurwitz, si $k > 0.48295$ le système (5.10) converge vers le point d'équilibre $E_2(-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$ (voir Fig; 5-8). ■

5.5 Contrôle non linéaire du système de Lorenz

Supposant le système de Lorenz à contrôler sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10(y - x) - u_1 \\ \dot{y} = x(28 - z) - y - u_2 \\ \dot{z} = xy - 8/3z - u_3 \end{cases} \quad (5.11)$$

tel que $u_1 = k(y - y^*)$, $u_2 = k(z - z^*)x$, $u_3 = k(y - y^*)$, k est le coefficient feedback .

Théorème 5.3 *Sous la formule du contrôle non linéaire : $u_i (i = 1, 2, 3)$, le système (5.11) est asymptotiquement stable aux points fixes $E_{1,2}$.*

Démonstration On a la matrice Jacobienne de système (5.11) au point fixe $E_2(0, 0, 0)$ est :

$$J = \begin{pmatrix} -10 & 10 - k & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & -k & (-8/3) \end{pmatrix},$$

donc, le polynôme caractéristique est le suivant :

$$p(x) = x^3 + \frac{41}{3}x^2 + \left(28k - \frac{722}{3}\right)x + \left(\frac{224}{3}k - 720\right),$$

alors

$$\begin{cases} a = \frac{41}{3} \\ b = 28k - \frac{722}{3} \\ c = \frac{224}{3}k - 720 \end{cases}$$

d'après le théorème de Routh-Hurwitz , $a > 0, c > 0$ et $ab - c > 0$ si :

$$\begin{cases} a = \frac{41}{3} > 0, \forall k \\ c = \left(\frac{224}{3}k - 720\right) > 0, \text{ si } k \in]9.6429, +\infty[\\ ab - c = \frac{41}{3} \left(28k - \frac{722}{3}\right) - \left(\frac{224}{3}k - 720\right) > 0, \text{ si } k \in]8.3413, +\infty[\end{cases}$$

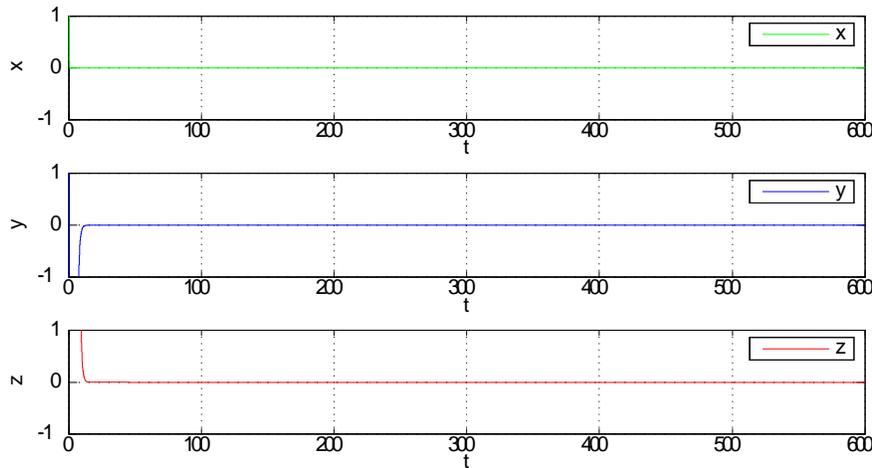


FIG. 5-9 – Contrôle non-linéaire du système de Lorenz au point fixe E_1 .

Donc, si $k > 9.6429$, le système (5.11) converge vers le point $E_1(0, 0, 0)$. (Voir Fig 5-9).

De même, pour stabiliser le système sur le point d'équilibre $E_2(-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$. La matrice Jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} -10 & 10 - k & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{72} + \sqrt{72}k \\ -\sqrt{72} & -\sqrt{72} - k & (-8/3) \end{pmatrix},$$

le polynome caracteristique est :

$$p(x) = x^3 + \frac{41}{3}x^2 + \left(73k + 6\sqrt{2}k + 6\sqrt{2}k^2 + \frac{304}{3}\right)x + \frac{4112}{3}k + 60\sqrt{2}k + 60\sqrt{2}k^2 - 72k^2 + 1440$$

donc

$$\begin{cases} a = \frac{41}{3} \\ b = 73k + 6\sqrt{2}k + 6\sqrt{2}k^2 + \frac{304}{3} \\ c = \frac{4112}{3}k + 60\sqrt{2}k + 60\sqrt{2}k^2 - 72k^2 + 1440 \end{cases}$$

d'après le théorème de Routh-Hurwitz ,

$$\begin{cases} a > 0, \\ c > 0 \\ ab - c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in IR, \\ k \in]-\infty, -112.25[\cup]-0.99813, +\infty[\\ k \in]-\infty, -0.15404[\cup]3.4697, +\infty[\end{cases}$$

On remarque que si $k \geq 3.4697$, le système (5.11) converge vers le point fixe $E_2(-\sqrt{72}, -\sqrt{72}, 27)$. (Voir Fig. 5-10).

■

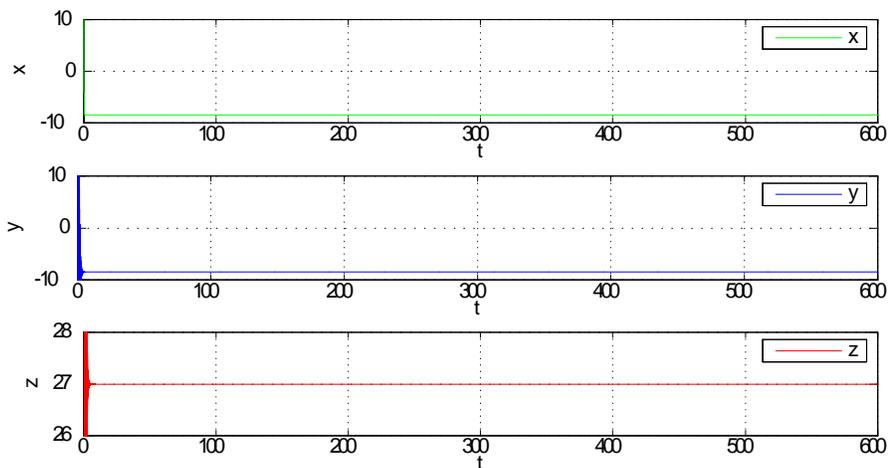


FIG. 5-10 – Contrôle non-linéaire du système de Lorenz au point fixe E_2 .

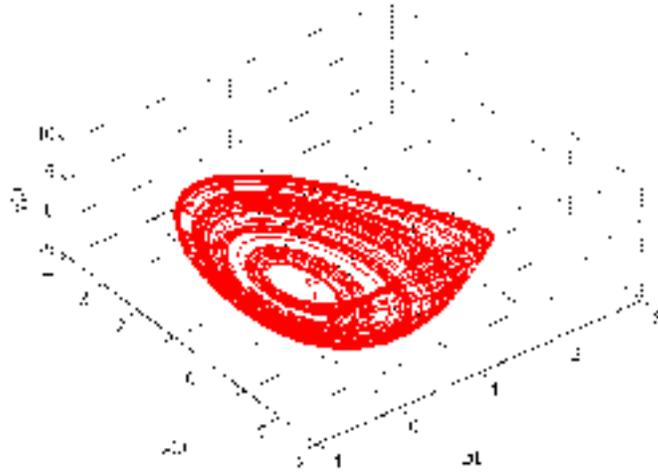


FIG. 5-11 – Attracteur du système de Genesis modifié

5.6 Le contrôle non linéaire du système de Genesis

Ce travail a pour but le contrôle du système de Genesis modifié, on utilise une loi de contrôle non linéaire sous forme de boucle fermée, de plus la stabilité du système est étudiée par la fonction de Lyapunov.

Nous avons déjà défini le système de Genesis modifié dans le chapitre précédent, Le système de Genesis modifié définit un attracteur chaotique représenté par la figure (5-11)

Soit le contrôle du système sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u_1 \\ \dot{y} = \alpha_1 y + z + u_2 \\ \dot{z} = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 y + \alpha_5 z + u_3 \end{cases} \quad (5.12)$$

On pose $u_i (i = 1, 2, 3)$ les lois de contrôle définies par :

$$\begin{cases} u_1 = -k_1(x - x^*) - 3xz - y \\ u_2 = -k_2y - z \\ u_3 = -k_3z \end{cases} \quad (5.13)$$

tel que $k_i (i = 1, 2, 3)$ est le gain de contrôle .

5.6.1 Le contrôle du système de Genesio au point E_1

Pour le premier point d'équilibre $E_1(0, 0, 0)$, nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.4 *Pour les lois de contrôle : $u_i (i = 1, 2, 3)$, Le système en boucle fermée (5.12) est asymptotiquement stable au point d'équilibre $E_1(0, 0, 0)$, si $k_i (i = 1, 2, 3)$ qui sont définis par (5.13) satisfait $k_1 > 3, k_2 > 0.925, k_3 > 3.925$.*

Demenstration en remplaçant (5.13) dans le système (5.12), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - k_1x - 3xz - y \\ \dot{y} = \alpha_1y + z - k_2y - z \\ \dot{z} = \alpha_2x^2 + \alpha_3x + \alpha_4y + \alpha_5z + -k_3z \end{cases}, \quad (5.14)$$

nous considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$v = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \dot{v} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &= xy - k_1x^2 - 3x^2z - yx + \alpha_1y^2 + zy - k_2y^2 - zy + \alpha_2x^2z + \alpha_3xz \\ &\quad + \alpha_4yz + \alpha_5z^2 + -k_3z^2 \\ &= -k_1x^2 - (k_2 + 0.5)y^2 - (k_3 + 0.5)z^2 - 6xz - 2.85yz \\ &\leq -k_1x^2 - (k_2 + 0.5)y^2 - (k_3 + 0.5)z^2 + 3x^2 + 3z^2 + \frac{2.85}{2}y^2 \\ &\quad + \frac{2.85}{2}z^2 \\ &= -(k_1 - 3)x^2 - (k_2 - 0.925)y^2 - (k_3 - 3.925)z^2 \end{aligned}$$

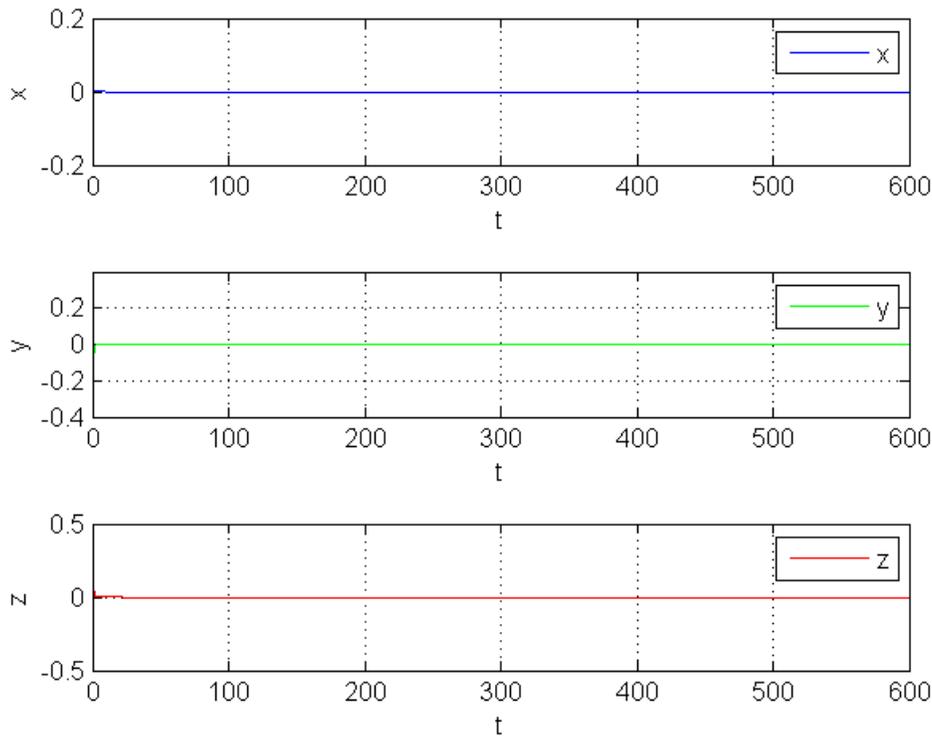


FIG. 5-12 – Le contrôle non-linéaire du système de Genesio au point E_1 .

Alors, si $k_1 > 3, k_2 > 0.925, k_3 > 3.925$, nous pouvons obtenir $\dot{v} < 0$. Par conséquent, selon les critères de stabilité de Lyapunov, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable. Et la preuve est terminée (voir fig 5-12).

■

5.6.2 Le contrôle du système de Genesio au point E_2

pour le premier point d'équilibre $E_2(x, 0, 0)$, nous avons le théorème suivant :

Théorème 5.5 *Pour les lois de contrôle : $u_i (i = 1, 2, 3)$, Le système en boucle fermée (5.12) est asymptotiquement stable au point d'équilibre $E_2(2, 0, 0)$, si $k_i (i = 1, 2, 3)$ qui sont défini par (5.13) satisfait $k_1 > 0, k_2 > 0.925, k_3 > 0.925$.*

Demenstration De même, en remplaçant (5.13) dans le système (5.12), on trouve :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - k_1(x - 2) - 3xz - y \\ \dot{y} = \alpha_1 y + z - k_2 y - z \\ \dot{z} = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 y + \alpha_5 z + -k_3 z \end{cases}, \quad (5.15)$$

on pose la fonction de Lyapunov quadratique suivante :

$$v = \frac{1}{2}((x - 2)^2 + y^2 + z^2)$$

Alors

$$\begin{aligned} \dot{v} &= (x - 2)\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ &= -k_1(x - 2)^2 - 3xz(x - 2) + \alpha_1 y^2 + zy - k_2 y^2 - zy + \alpha_2 x^2 z + \alpha_3 xz \\ &\quad + \alpha_4 yz + \alpha_5 z^2 + -k_3 z^2 \\ &= -k_1(x - 2)^2 - 3xz(x - 2) - 0.5y^2 + zy - k_2 y^2 - zy + 3x^2 z - 6xz \\ &\quad - 2.85yz - 0.5z^2 + -k_3 z^2 \\ &= -k_1(x - 2)^2 - (0.5 + k_2)y^2 - (0.5 + k_3)z^2 - 2.85yz \\ &\leq -k_1(x - 2)^2 - (0.5 + k_2)y^2 - (0.5 + k_3)z^2 + \frac{2.85}{2}y^2 + \frac{2.85}{2}z^2 \\ &= -k_1(x - 2)^2 - (k_2 - 0.925)y^2 - (k_3 - 0.925)z^2 \end{aligned}$$

Donc, si $k_1 > 0, k_2 > 0.925, k_3 > 0.925$, on trouve $\dot{v} < 0$. Par conséquent, selon les critères de stabilité de Lyapunov, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable. (voir fig 5-13).

■

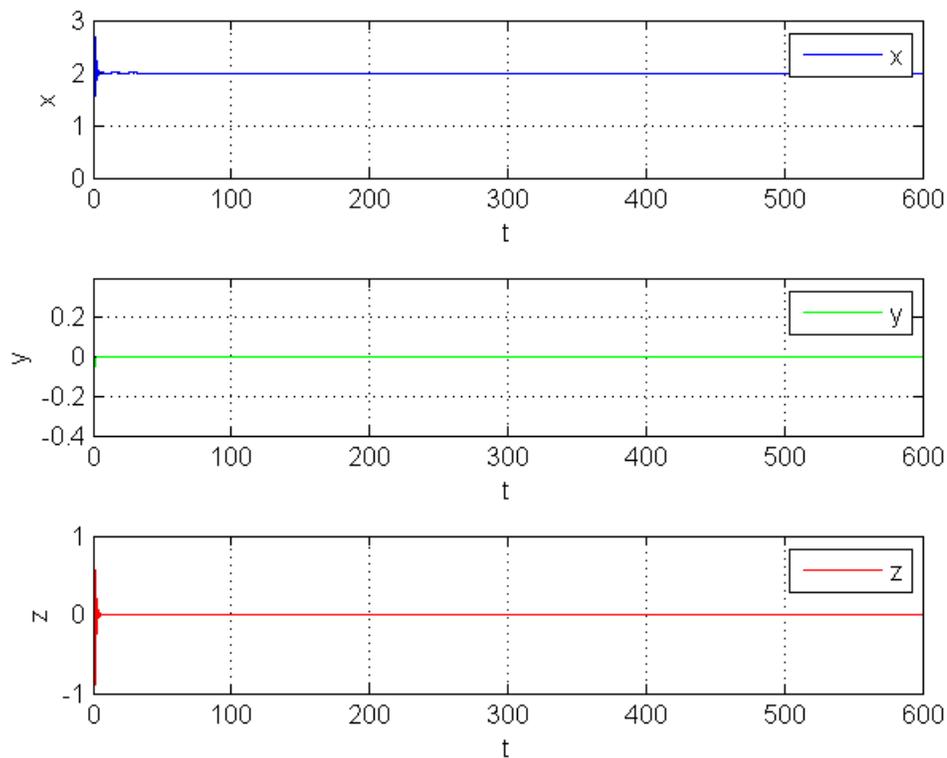


FIG. 5-13 – Le contrôle non-linéaire du système de Genesio au point E_2 .

Conclusion générale

Le travail développé dans le cadre de cette thèse, a pour objectif le contrôle des systèmes dynamiques chaotiques.

Nous avons abordé dans la première partie, les principales définitions mathématiques relatives aux systèmes dynamiques chaotiques, notamment des notions préliminaires pour l'analyse du comportement chaotique, et la stabilité du système par deux méthodes principales : théorème de Routh-Hurwitz et la fonction de Lyapunov.

Pour vérifier la convergence d'une trajectoire vers un équilibre donné, il suffit d'étudier l'évolution de la distance séparant le point courant de cet équilibre. C'est sur ce principe que sont basées les méthodes de Lyapunov dans lesquelles on considère des distances généralisées appelées fonctions de Lyapunov.

Pour démontrer qu'un point d'équilibre est stable, il faut donc a priori calculer les valeurs propres de la matrice Jacobine du système non linéaire . Une méthode algébrique a été développée par Routh-Hurwitz, basée sur le calcul des déterminants particuliers. Pour atteindre ce but, , nous avons donné quelques méthodes de contrôle les plus connues dans la littérature : La méthode de contrôle OGY ; L'idée développée par les auteurs sus-cités, est qu'un système chaotique peut être contrôlé en appliquant une petite perturbation à certains paramètres du système. Nous avons introduit les techniques de bases de la méthode de contrôle en boucle fermé (feedback) et ouvert (non-feedback), la méthode de Pyragas, Le contrôle adaptatif et finalement la méthode du Backstepping .

Nous avons présenté dans la deuxième partie, une application du contrôle sur quelques sys-

tèmes chaotiques :

Le premier chapitre est consacré pour le contrôle de deux systèmes chaotiques : Liu et Chua, avec l'application de deux méthodes différentes : le contrôle en boucle fermée sous deux formes, et le Backstepping, pour le premier on utilise le théorème de Routh-Hurwitz et le deuxième la fonction de Lyapunov pour arriver au contrôle du système chaotique.

Le deuxième a pour but le contrôle des systèmes chaotiques par la méthode en boucle fermée (linéaire et non-linéaire), et pour justifier la stabilité du système, on utilise d'abord une méthode avec de nouvelles conditions définies par la matrice Jacobienne du système, ces conditions sont défini à partir de théorème de Routh-Hurwitz, pour le deuxième cas, nous avons fait le contrôle du système de Genesio, mais cette fois-ci on utilise la fonction de Lyapunov pour montrer la stabilité.

Bibliographie

- [1] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, 20 (1963), p. 130.
- [2] E. Ott, C. Grebogi, and J. A. Yorke, Controlling chaos, *Phys.Rev.Lett.*, 64 (1990), pp. 1196–1199.
- [3] T.Y. Li, J.A. Yorke, Period three implies chaos, *Am. Math. Monthly*, Vol.82, 1975, pp.985-992.
- [4] Philippe Després, Contrôle et détection du chaos. Mémoire, Université Laval, (Mai 2000).
- [5] K. Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Physical Review Letters*,(1992) 170 :421-428, .
- [6] T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. York. Using small perturbation to control chaos. *Nature*, (1993) 362 :411-417.
- [7] V. Utkin, J. Gujdner, and J. Shi. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. London, Taylor-Francis, (1999).
- [8] R. J. Field and M. Burger. *Oscillations and traveling waves in chemical systems*. New York, Wiley, (1995).
- [9] F. Gordillo, F. Salas, R. Ortega, and J. Aracil. Hopf bifurcation in indirect field-oriented control of induction motors. *Automatica*, 38 :829-835, (2002).
- [10] J. Morales, A. Suarez, and R. Quéré. Chaos dans un diviseur de fréquence monolithique en bande millimétrique. In 10èmes Journées Nationales Microondes, Saint-Malo, pages 242-243, 21-23 mai (1997).

- [11] A. Suarez, J. Morales, and R. Quere. Chaos prediction in an MMIC frequency divider in millimetric band. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, 8(1) :21-23, (1998).
- [12] Baptista, MS, Cryptography with chaos, *Physics Letters A*, vol. 240, no. 1-2, pp. 50–54, 1998. 4
- [13] Garfinkel, Alan and Spano, Mark L and Ditto, William L and Weiss, James N. , “Controlling cardiac chaos,” *Science*, pp. 1230–1235, 1992.
- [14] K. Pyragas, “Continues control of chaos by self-controlling feedback,” *Phys . Lett.*,(1992)
- [15] K. Murali, M. Lakshmanan Drive-response scenario of chaos synchronization in identical nonlinear system. *Phys Rev E* (1994) ;49 :4482–5.
- [16] K. Murali, M. Lakshmanan Secure communication using a compound signal from generalized synchronizable chaotic system. *Phys Lett A* (1998) ;241 :303–10.
- [17] KM. Cuomo, V. Alan Oppenheim and Steven H. strogatz. Synchronization of lorzen-based chaotic circuits with application to communications. *IEEE Trans Circ Syst* (1993) ;40 :626–33.
- [18] Morgul, O. and Solak, E., Akgul, M. Observer based chaotic message transmission. *Int J Bifurc Chaos* (2002) ;13 :1003–17.
- [19] S. Barnett, R. G. Cameron, "Introduction to Mathematical Control Theory", Clarendon Press. OXFORD, Second Edition (1985).
- [20] M.S. Abdelouahab, N. Hamri, A new chaotic attractor from hybrid optical bistable system, *Nonlinear Dynamics* (2012) 67 :457-463.
- [21] R. Genesio and A. Tesi, "Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamycs in nonlinear systems", *Automatica*, (1992)vol. 28. no.3, pp. 531-548.
- [22] N. Hamri, Une méthode de contrôle linéaire des systèmes non linéaires in *Maghreb mathematical Review* Vol.9 N 1 et 2 (June 2000).
- [23] Zeraoulia Elhadj, Etude de quelques types de systèmes chaotiques : Généralisation d’un modèle issu du modèle de chen, Thèse, constantine, fevrier, (2006).
- [24] Ourida Chabour, Stabilisation des systèmes non linéaires, Thèse, Université de Metz, Mars 2000.

- [25] Ouahabi Rabiaa, Systèmes dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation, thèse, Université de Constantine 1, Mars 2018.
- [26] Mindlin, GB ; Hou, X-J ; Solari, HG ; Gilmore, R ; Tufilaro, NB, Classification of strange attractors by integers, Physical Review Letters , 64 ; pp : 2350 ; (1990) :
- [27] Tidjani Menacer, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, Université de Constantine 1, (Mai 2014).
- [28] Kaplan, JL and Yorke, JA and Peitgen, HO and Walter, HO. Lecture Notes in Mathematics, Kapitel Chaotic behaviour of multidimensional difference equations, vol. 730, pp . 204, 1979.
- [29] Frederickson, Paul and Kaplan, James L and Yorke, Ellen D and Yorke, James A. The Liapunov dimension of strange attractors, Journal of Differential Equations, vol. 49 no . 2, pp 185–207.1983.
- [30] W Hahn. Stability of Motion. Springer-Verlag, (1967).
- [31] Imen Ellouze, Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs, thèse, Université Paul Verlaine de Metz, décembre (2010).
- [32] H.K Khalil. Nonlinear Systems. Macmillan, New York, 3e édition, (2002).
- [33] Abdelkrim Boukabou, Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation Contribution à l'élaboration de nouvelles approches, Université de Constantine, Thèse, (Juin 2006)
- [34] Hunt, E. R. Stabilizing high period orbits in a chaotic system : The diode resonator, Physical Review Letters, vol. 67, no. 15, pp .(1953) .
- [35] Petrov, V., Gaspar, V., Masere, J., Showalter, K. Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction, Nature, vol. 361, no. 6409, pp .240–243, (1993).
- [36] Jackson, E Atlee and Hübler, Alfred. Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics, Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 44, no. 3, pp .407–420, (1990).
- [37] Hong, Yiguang and Qin, Hua-Shu. Introduction to chaos control and anti-control, Advanced topics in nonlinear control systems, vol. 40, pp .193, (2001).
- [38] Philip Hartman (de), A lemma in the theory of structural stability of differential equations , Proc. A.M.S., vol. 11, n° 4, (1960), p. 610-620.

- [39] P. Hartman, On local homeomorphisms of Euclidean spaces , Bol. Soc. Math. Mexicana, vol. 5, (1960), p. 220-241
- [40] Poincaré, H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Paris : Gauthier Villars. (1892)
- [41] David Ruelle and Floris Takens, On the Nature of Turbulence, Commun. math. Phys. 20, 167–192 (1971).
- [42] S. Newhouse, D. Ruelle, and F. Takens. Occurrence of strange Axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m , $m \leq 3$. Comm. Math. Phys., 64 :35–40, (1978).
- [43] Hausdorff, Felix. Dimension und äußeres Maß, Mathematische Annalen, vol. 79, no . 1-2, pp. 157–179, (1918).
- [44] B. B. Mandelbrot. Les Objects Fractals forme Hasard et dimension, Paris : Flammarion, vol. (1984), no . (1989), pp. 29, (1975).
- [45] Peter Grassberger. I.Procaccia. “ Measuring the strangeness of strange attractor," Physica D : Nonlinear Phenomena, vol. 9 no. (1,2), pp . 189–208. (1983).
- [46] Nakajima H. & Ueda, Y. Half-period delayed feedback control for dynamical systems with symmetries, Physical Review E 58, pp. 1757-1763 (1998).
- [47] Konishi, K. & Kokame, H. Learning control of time-delay chaotic systems and its applications, International Journal of Bifurcation and Chaos 8, 2457-2465 (1998).
- [48] Caldwell, William I. “Control system with automatic response adjustment," U. S. patent 2,517,081, 1950.
- [49] Aseltine, J and Mancini, A and Sarture, C. A survey of adaptive control systems, IRE Transactions on Automatic Control, vol. 6, no. 1, pp.102–108, (1958).
- [50] Fradkov, Aleksandr Lvovich and Pogromsky, Alexander Yu. Introduction to control of oscillations and chaos, Singapore : World Scientific, (1998)
- [51] Krstic, Miroslav and Kanellakopoulos, Ioannis and Kokotovic, Peter V. Nonlinear and adaptive control design, New York : Wiley, (1995).
- [52] T. Yamada and H. Fujisaca, Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator, Systems. II. Prog. Theor. Phys, Vol. 70, pp. 1240, (1983).

- [53] T. Yamada and H. Fujisaca, Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator, Systems. III. Prog. Theor. Phys, Vol. 72, pp. 885, (1984).
- [54] V. S. Afraimovich, N. N. Verochev and M. I. Robinovich, Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems, Radio. Phys. and Quantum Electron, Vol. 29, pp. 795-803, (1983).
- [55] L. Pecora and T. Carroll, Synchronization in chaotic systems, Phys. Rev. Lett, Vol. 64, pp. 821-823, (1990).
- [56] R. Sepulchre, M. Jankovic and P.V. Kokotovic Constructive Nonlinear Control Springer, Santa Barabra, California, (August 1996).
- [57] J. P. LaSalle, Stability theory for ordinary differential equations, Journal of Differential Equations 4, pp. 57-65, (1968).
- [58] Laarem Guessas, Backstepping Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques, thèse, Université Ferhat ABBAS – Sétif.
- [59] H. Sussmann, V. Jurdjevic, Controllability of nonlinear systems, Journal of Differential Equations, volume 12 , p. 95-116,(1972).
- [60] Jean-Michel Coron, Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires, (1999)X-UPS.pdf
- [61] Z. Artstein, Stabilization with relaxed controls. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, volume 7no.11, pp1163-1173, (1983).
- [62] Ditto W. L., Rauseau S. N., Spano M. L. Experimental control of chaos Physical Review Letters (1990)65, pp. 3211-3214.
- [63] T. Matsumoto A chaotic attractor from Chua's circuit IEEE Trans. Circuits Syst, vol .31, pp .1055-1058, (1984) .
- [64] G. Q. Zhong et F. Ayrom, Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit , Int. J. Circuit Theory Appl, Vol. 13, pp. 93-98, (1985).
- [65] M.P. Kennedy, Robust op amp implementation of Chua's Circuit , Frequenz Vol.46, pp.66-80, (1992) .

- [66] Garfinkel A., Spano M. L., Ditto W. L. & Weiss J. N. Controlling cardiac chaos *Science* (1992) 257, pp. 1230-1233.
- [67] Singer, J., Wang, Y.-Z. & Bau, H. H. Controlling a chaotic system, *Physical Review Letters* 66, pp. 1123-1126 (1991).
- [68] Bielański, S., Derozier, D. & Glorieux, P. Experimental characterization of unstable periodic orbits by controlling chaos, *Physical Review A* 47, pp. 2492-2495 (1993).
- [69] Petrov, V., Gaspar, V., Masere, J. & Showalter, K. Controlling chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction, *Nature* 361, pp. 240-242 (1993).
- [70] C. Liu, T. Liu, L. Liu, , and K. Liu, A new chaotic attractor, *Chaos Solitons Fractals* 22 (2004) 1031-1038.
- [71] Dang-Vu, H. and Delcarte, C. *Bifurcations et chaos* . Ellipses Edition : Marketing S.A. ISBN 2-7298-0109-X (2000).
- [72] Zhu, C. and Chen, Z. Feedback control strategies for the Liu chaotic system. *Phys. Lett. A* (2008) ; 372 :4033-4036.
- [73] Deng, K., Li, J. and Yu,S. Dynamics analysis and synchronization of a new chaotic attractor. *Optik-International Journal for Light and electron Optics, ELSEVIER*, (2014) ; 125 : 3071-3075 .
- [74] Carrol, TL. and Pecora, LM. Synchronizing chaotic circuits. *IEEE. Trans. Circ. Syst* (1991) ; 38 :453-456.
- [75] Baker, G.L. Control of the chaotic driven pendulum. *Am. J. Phys* (1995) ; 63 :832-838.
- [76] Cao, HJ. and Chi, XB. and Chen, GR. Suppressing or inducing chaos in a model of robot arms and mechanical manipulators. *J. Sound. Vib* (2004) ; 271 :705-724.
- [77] Cao, HJ. and Chen, GR. A simplified optimal control method for homoclinic. *Nonlinear. Dyn* (2005) ; 42 :43-61.
- [78] Barnett,S., Cameron RG. "Introduction to Mathematical Control Theory", Clarendon Press. OXFORD, Second Edition (1985).
- [79] Borrelli, R.L. and Coleman, C.S. *Differential Equations*, fourth ed. John Wiley and Sons, Inc. New York, (1998).

- [80] Boyce, W.E. and DiPrima, R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, eighth ed. John Wiley and Sons, Inc. United States of America, (2010).
- [81] AL-Azzawi, S.F. Stability and bifurcation of pan chaotic system by using Routh-Hurwitz and Gardan methods, *Appl. Math. Comput* (2012); 219 :1144-1152.
- [82] Ouannas, A. Chaos Synchronization Approach Based on New Criterion of Stability, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 14 (4) (2014) 395-401.
- [83] Ouannas, A. and Mossa Al-Sawalha, M. A New Approach To Synchronize Different Dimensional Chaotic Maps Using Two Scaling Matrices, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 15 (4) (2015) 400-408.
- [84] Vincent, T. L. and Yu., J., Control of a chaotic system, *Dynamics and Control*, Vol. 1, pp. 35–52, (1991).
- [85] Gallegos, J. A., Nonlinear regulation of a Lorenz system by feedback linearization techniques, *Dynamics and Control*, Vol. 4, pp. 277–298, (1994).
- [86] Chen M, Han Z. Controlling and synchronizing chaotic Genesio system via nonlinear feedback control. *Chaos, Solitons & Fractals* (2003);17 :709–716.
- [87] Huang L, Feng R, Wang M. Synchronization of chaotic systems via nonlinear control. *Phys Lett A* (2004);320 :271–5.
- [88] Deng K, Li J, Yu S Dynamics analysis and synchronization of a new chaotic attractor. *Opt Int J Light Electron Opt* (2014) 125(13) :3071–3075.
- [89] Brandt, M.E., Shih, H.T., and Chen, G., Linear Time-delay Feedback Control of a Pathological Rhythm in a Cardiac Conduction Model, *Phys. Rev. E*, (1997), vol. 56, pp. 1334-1337.
- [90] Lu, J.A., Han, X.P., Li, Y.T., Yu, M.H. : Adaptive coupled synchronization among multi-Lorenz systems family. *Chaos Solitons Fractals* 31, 866–878 (2007).
- [91] He, W., Cao, J. : Adaptive synchronization of a class of chaotic neural networks with known or unknown parameters. *Phys. Lett. A* 372, 408–416 (2008).
- [92] Jianxiong Zhang . Wansheng Tang : Control and synchronization for a class of new chaotic systems via linear feedback. *Nonlinear Dyn* (2009) 58 : 675–686.

- [93] Feng Gao, W. Q. Liu, V. Sreeram, K. L. Teo : Nonlinear Feedback Control for the Lorenz System. *Dynamics and Control*, 11, 57–69, (2001).
- [94] Yeap, T. H. and Ahmed, N. U., “Feedback control of chaos systems,” *Dynamics and Control*, Vol. 4, No. 1, pp. 97–114, (1994).
- [95] Zeng, Y. and Singh, S. N., Adaptive control of chaos in Lorenz system, *Dynamics and Control*, Vol. 7, pp. 143–154, (1997).
- [96] Chang W, Park JB, Joo YH, Chen GR. Output feedback control of Chen s chaotic attractor using fuzzy logic. In : *Proceedings of IECON 2000, Japan, October (2000)*, pp. 2159–2164.
- [97] W. Laouira and N. Hamri '**Feedback Control of Chaotic Systems by Using Jacobian Matrix Conditions**' *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 18 (3) (2018) 285-296.

Résumé

La théorie mathématique du contrôle a connu un développement très important et son champ d'application couvre actuellement de nombreux domaines, notamment l'industrie, l'économie, la biologie . . .

Cette thèse traite de l'étude du contrôle des systèmes dynamiques chaotiques. Ces derniers constituent une classe particulière des systèmes non linéaires et sont caractérisés par des comportements dynamiques très sensibles aux variations des conditions initiaux.

On a proposé une méthode pour étudier la stabilité du système chaotique sur le point fixe, en se basant sur le critère de Routh-Hurwitz.

Dans la première partie, Nous avons présenté les différents outils présentant le comportement chaotique des systèmes, et les principales méthodes proposées dans la littérature pour l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques à comportement chaotiques; La méthode de Lyapunov et la méthode de Routh-Hurwitz. Finalement nous avons présenté les principales méthodes proposées dans la littérature pour le contrôle du système chaotique.

Dans la deuxième partie, nous avons fait un' application théorique et numérique de contrôle du chaos sur quelques systèmes chaotiques. On utilise le critère de Routh-Hurwitz, et les conditions modifiées, de plus la fonction de Lyapunov pour arriver au contrôle des systèmes chaotiques.

Mots clés

Systemes chaotiques, Contrôle du chaos, Matrice Jacobienne, Critère de Routh-Hurwitz , Fonction de Lyapunov.

ملخص

خضعت النظرية الرياضية للتحكم إلى تطور هام للغاية ، ويشمل نطاقها حاليًا العديد من المجالات ، بما في ذلك الصناعة والاقتصاد والبيولوجيا.....
تتناول هذه الرسالة دراسة التحكم في الأنظمة الديناميكية الفوضوية. تشكل هذه الأخيرة فئة معينة من الأنظمة غير الخطية وتتميز بسلوكيات ديناميكية حساسة للغاية للتغيرات في الشروط الأولية.
تم اقتراح طريقة لدراسة استقرار النظام الفوضوي النقاط الثابتة ، استناداً إلى معيار روث-هورويتز.
في الجزء الأول ، قدمنا الأدوات المختلفة التي تدرس السلوك الفوضوي للأنظمة ، والطرق الرئيسية المقترحة في دراسة استقرار الأنظمة الفوضوية. طريقة روث-هورويتز و ليابونوف؛ أخيراً قدمنا الطرق الرئيسية المقترحة من أجل السيطرة على الأنظمة الديناميكية ذات السلوك الفوضوي.
في الجزء الثاني ، وضعنا تطبيقاً نظرياً و عددياً للتحكم في الفوضى في بعض الأنظمة الفوضوية. تم استخدام معيار روث هورويتز ، والظروف المعدلة ، بالإضافة إلى طريقة ليابونوف للوصول إلى السيطرة على الأنظمة الفوضوية (الشوشية).

كلمات مفتاحية

أنظمة الفوضى ، السيطرة على الفوضى ، المصفوفة اليعقوبية ، معيار روث-هورويتز ، دالة ليابونوف.

Abstract

The mathematical theory of control has undergone a very important development and its scope currently covers many fields, including industry, economics and biology. . .

This thesis deals with the study of the control of chaotic dynamical systems. The latter constitute a particular class of nonlinear systems and are characterized by dynamic behaviors that are very sensitive to variations in the initial conditions. A method has been proposed for studying the stability of the fixed-point chaotic system, based on the Routh-Hurwitz criterion.

In the first part, we presented the different tools presenting the chaotic behavior of the systems, and the main methods proposed in the literature for the study of the stability of dynamic systems with chaotic behavior; Lyapunov's method and the Routh-Hurwitz method. Finally we presented the main methods proposed in the literature for the control of the chaotic system.

In the second part, we made a theoretical and numerical application of chaos control on some chaotic systems. The Routh-Hurwitz criterion is used, and the modified conditions, in addition Lyapunov's function to arrive at the control of the chaotic systems.

Keywords

Chaotic systems, Control of chaos, the Jacobian matrix, the Routh-Hurwitz criterion, Lyapunov's function.