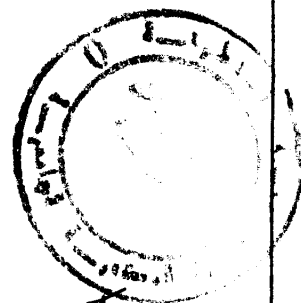


f

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : 43 / T.E. / 2005
N° série : 03 / M.A.T. / 2005



LAT
4269

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :
DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

Thème

PROBLEMES AUX LIMITES NON LOCAUX

Option

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Par :

LATROUS CHAHLA

Devant le jury :

Président :	Benkafadar N. M.	Prof.	Univ. Constantine
Rapporteurs :	Rebbani F.	Prof.	Univ. Annaba
	Marhoune A. L.	M.C.	Univ. Constantine
Examineurs :	Djellit A.	Prof.	Univ. Annaba
	Aibeche A.	M.C.	Univ. Setif
	Hebbeche A.	M.C.	Univ. Constantine

Soutenue le : 06/07/2005.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier en particulier mes encadreurs Melle. Rebbani F., Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, et Mr. Marhoune A. L., Maître de Conférences à l'université Mentouri Constantine, pour avoir dirigé ce travail, pour leurs conseils judicieux, leurs encouragements et leurs grande disponibilité et ouverture d'esprit qui m'ont énormément aidés à bien mener ce travail.

Je tiens à remercier vivement Mr. Benkafadar N. M., Professeur à l'université Mentouri Constantine qui me fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à Mr. Djellit A., Professeur à l'université Badji Mokhtar Annaba, Mr. Hebbeche A., Maître de conférences à l'université Mentouri Constantine, et Mr. Aibeche A., Maître de conférences à l'université Ferhat Abbas Setif, qui ont accepté de faire partie du jury et de juger ce travail.

Je ne voudrais pas oublier tous ceux et celles qui au long de ce travail m'ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement, je les remercie de leurs encouragements.



TEGRALE POUR UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE TROIS EN TEMPS	37
3.1 Introduction	38
3.2 Preliminaires	38
3.3 Inégalité de l'énergie et ses conséquences	39
3.4 Résolubilité du problème (3.1)-(3.5)	44

INTRODUCTION

Le but de la présente thèse est de développer la méthode des inégalités énergétique pour de nouvelles classes de problèmes, les problèmes du type mixte du troisième ordre et d'ordre supérieur, selon la variable spatiale, et les problèmes d'ordre trois selon la variable temporelle avec conditions intégrales à borne variable et intégrales à poids.

La signification physique de base des conditions intégrales (moyenne, flux total, énergie totale, masse totale, moment,...) a servi comme raison fondamentale pour l'intérêt croissant à ce type de problèmes.

La modélisation mathématique des problèmes mixtes avec conditions intégrales est rencontrée en théorie de la conduction thermique [6, 7, 22, 23], dans l'étude des déformations viscoélastiques, dans les matériaux à mémoire (en particulier les polymères) [37], en thermoélasticité [39], dans les semiconducteurs [1], en physique des plasmas [38], et en biotechnologie. On peut également citer qu'un nombre important de problèmes paraboliques avec conditions non locales sont rencontrés en théorie quasistatique de thermoélasticité [11, 12], pour plus de détails voir aussi [19].

De tels problèmes ont été étudiés dans [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 22, 23, 24, 40, 49] pour les équations paraboliques, dans [10] pour les équations pseudo-paraboliques, dans [30, 31, 32, 33, 34, 41] pour les équations hyperboliques et dans [13, 14, 15] pour les équations du type mixte. La méthode utilisée dans [4, 5, 13, 14, 16, 17, 24, 49] est celle des inégalités énergétiques. Le but de ce travail est l'extension de cette méthode aux équations du type mixte, ainsi qu'aux équations d'ordre supérieur selon la variable temporelle.

La méthode des inégalités de l'énergie, appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle trouve son origine dans les travaux de I. G. Petrovsky [29] utilisés dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations du type hyperbolique. Par la suite les développements importants

de la méthode sont dus à J. Leray [28] et I. Garding [21].

La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O. A. Ladyzenskaja [25], K. Friedrichs [20] et N. I. Yurchuk [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49], on peut également citer les travaux de F. Rebbani et V. I. Chesalyn [35, 36].

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A. A. Dezin [18], et qui peut être résumé comme suit :

D'abord on ramène le problème posé à une équation opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F}, \quad u \in D(L),$$

où l'opérateur L est considéré de l'espace de Banach E dans l'espace de Hilbert F convenablement choisis

On établit les estimations a priori pour l'opérateur L .

Après on démontre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F .

Plus précisément on suivra dans ce travail l'un des deux schémas suivants :

SCHEMA 1

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, on démontre l'inégalité énergétique du type

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F, \quad \forall u \in D(L), \quad (1)$$

cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine fonction poids et en intégrant sur le domaine. Le choix de l'opérateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites. Ensuite dans les topologies fortes des espaces E et F on construit la fermeture $\bar{L}$ de l'opérateur L et la solution de l'équation $\bar{L}u = \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in F$ est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1) à $u \in D(\bar{L})$ et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R(\bar{L})$ de l'opérateur $\bar{L}$.

Comme l'image de l'opérateur $\bar{L}$ est fermée dans F et que $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$. Pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in F$ il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans F qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation.

Le choix des opérateurs de régularisations est lié au caractère du problème étudié. Dans notre cas nous utiliserons les opérateurs de régularisation par rapport à la variable t introduits dans [49].

SCHEMA 2

On établit deux estimations à priori bilatérales

$$\|Lu\|_F \leq C \|u\|_E,$$

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F,$$

De la première estimation résulte que l'opérateur L de E dans F est continu. De la deuxième estimation, il s'ensuit qu'il admet un inverse continu, et que l'ensemble des valeurs de l'opérateur L est fermé. En d'autres termes, l'opérateur L réalise un homéomorphisme linéaire de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L)$. Ainsi pour démontrer l'unicité de la solution il est suffisant de démontrer que $R(L)$ est dense dans F .

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

- Le choix de l'espace des solutions.
- Le choix du multiplicateur.
- Le choix de l'opérateur de régularisation.

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée. Chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

Dans le present travail on commence par étudier dans le premier chapitre de cette thèse, un problème mixte avec condition au bord du type intégral à borne variable pour une équation aux dérivées partielles du troisième ordre du type mixte. Les resultats de ce chapitre constituent une extension de la méthode des inégalités énergétiques aux équations du type mixte.

Au deuxième chapitre on étend la méthode développée au chapitre précédent à l'étude des problèmes aux limites pour équation aux dérivées partielles d'ordre supérieur du type mixte combinant des conditions aux bords locales et des conditions intégrales à poids.

Au chapitre trois on s'intéresse à l'étude d'un problème mixte avec condition intégrale à borne variable pour une équation d'ordre trois en temps.

Le présent travail est considéré comme prolongement des résultats obtenus dans [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 22, 23, 24, 40, 49] pour les équations paraboliques, dans [10] pour les équations pseudo-paraboliques, dans [30, 31, 32, 33, 34, 41] pour les équations hyperboliques et dans [13, 14, 15] pour les équations du type mixte.

NOTIONS PRELIMINAIRES

Opérateurs abstraits de régularisation

Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur défini de

$$D(A) \subset H \rightarrow H \text{ avec } \overline{D(A)} = H.$$

Définition 1 On dit que l'opérateur A est un opérateur dissipatif si

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Définition 2 On dit que l'opérateur A est accretif si $(-A)$ est un opérateur dissipatif i.e.

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Proposition 1 [9] Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ($\overline{D(A)} = H$) alors les propriétés suivantes sont équivalentes

- A est un opérateur dissipatif
- $\|(A - \lambda I)u\| \geq \operatorname{Re} \lambda \|u\| \quad \forall u \in D(A)$ et pour tout λ telle que $\operatorname{Re} \lambda > 0$.
- $\|(A - \lambda I)u\| \geq \operatorname{Re} \lambda \|u\| \quad \forall u \in D(A)$ et pour tout λ telle que $\lambda > 0$.

Théorème 1 [9] Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.

Corollaire 1 Un opérateur dissipatif maximal est toujours fermé.

Théorème 2 [9] tout opérateur dissipatif admet un prolongement maximal dissipatif.

Proposition 2 [9] Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ($\overline{D(A)} = H$) un opérateur dissipatif, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- A est un opérateur maximal dissipatif
- $\text{Im}(A - \lambda I) = H$ pour un certain λ telle que $\text{Re } \lambda > 0$.
- $\text{Im}(A - \lambda I) = H$ pour tout λ telle que $\lambda > 0$.

Théorème 3 [9] Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ($\overline{D(A)} = H$), alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- A maximal dissipatif
- A fermé, $\{\lambda : \text{Re } \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq (\text{Re } \lambda)^{-1}$.

Théorème 4 Soit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ($\overline{D(A)} = H$) un opérateur dissipatif maximal, alors

- $A_\epsilon^{-1} \in L(H)$
- $\|A_\epsilon^{-1}\| \leq 1$
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon^{-1}u = u$, pour tout $u \in H$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ alors $\{\epsilon : \epsilon > 0\} \subset \rho(A)$ donc $(A - \lambda I)$ est continument inversible d'où $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, borné et défini sur H tout entier. Puisque $\frac{1}{\epsilon} \in \{\epsilon : \epsilon > 0\}$ on déduit que $(A - \frac{1}{\epsilon}I)^{-1} \in L(H)$ mais $(A - \frac{1}{\epsilon}I) = -\frac{1}{\epsilon}(I - \epsilon A)$ d'où $(A - \frac{1}{\epsilon}I)^{-1} = -\epsilon(I - \epsilon A)^{-1}$, on pose $A_\epsilon^{-1} = (I - \epsilon A)^{-1}$, on déduit que

$$A_\epsilon^{-1} \in L(H)$$

et en utilisant le théorème 2 on trouve que

$$\left\| (A - \frac{1}{\epsilon}I)^{-1} \right\| \leq (\frac{1}{\epsilon})^{-1} = \epsilon$$

donc

$$\|A_\epsilon^{-1}\| \leq 1.$$

Supposons tout d'abord $u \in D(A)$, d'où

$$\|A_\epsilon^{-1}u - u\| = \|(I - \epsilon A)^{-1}u - u\| = \|\epsilon(I - \epsilon A)^{-1}Au\| \leq \epsilon \|Au\|,$$

D'où par passage à la limite, on a

$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon^{-1} u = u$, pour tout $u \in D(A)$ et comme on a $\overline{D(A)} = H$ alors $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon^{-1} u = u$, pour tout $u \in H$. ■

Exemple 1 Soit $A = \frac{\partial}{\partial t}$ où $D(A) = \{u \in L_2(Q) / u(0, t) = 0\}$ et $Q = (0, 1) \times (0, T)$. Alors A est un opérateur accréatif.

Démonstration. $\langle Au, u \rangle = \int_Q \frac{\partial u}{\partial t} \bar{u} dx dt = \int_0^1 u \bar{u} |_0^T dx - \int_Q u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx dt$

donc $\langle Au, u \rangle + \overline{\langle Au, u \rangle} = \int_0^1 |u|^2 |_T dx - \int_0^1 |u|^2 |_0 dx$

alors $2\text{Re} \langle Au, u \rangle = \int_0^1 |u(x, T)|^2 dx$ car $u(0, x) = 0$ d'où $\text{Re} \langle Au, u \rangle \geq 0$. ■

ϵ -inégalités :

On applique tout le long de ce travail l' ϵ -inégalité suivante

$$\text{Re}(a, b) \leq \frac{\epsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |b|^2, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Chapitre 1

PROBLEME AUX LIMITES EN TROIS POINTS AVEC CONDITION INTEGRALE POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE TROIS DU TYPE MIXTE.

Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites en trois points pour une équation aux dérivées partielles d'ordre trois du type mixte avec condition integrale. On montre que l'opérateur engendré par le problème en question est un homéomorphisme linéaire entre des espaces adéquats. L'étude est basée sur une estimation à priori bilatérale et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

1.1 Introduction

Dans le rectangle $\Omega = (0, \ell) \times (0, T)$, on considère l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = f(x, t), \quad (1.1)$$

où la fonction $a(x, t)$ et ses dérivées sont bornées dans $\overline{\Omega}$ et vérifiant les conditions

$$0 < a_0 < a(x, t) \leq a_1, \quad 0 < a_2 \leq \frac{\partial a(x, t)}{\partial t} \leq a_3 \quad \text{and} \quad 0 < a_4 \leq \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} \leq a_5. \quad (1.2)$$

A l'équation (1.1) on associe les conditions initiales

$$l_1 u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad l_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in (0, \ell), \quad (1.3)$$

la condition au bord du type Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (1.4)$$

et la condition intégrale

$$\int_{\ell_1}^{\ell} u(\xi, t) d\xi = 0 \quad 0 < \ell_1 < \ell, \quad t \in (0, T). \quad (1.5)$$

Où les fonctions φ et ψ sont données et vérifient les conditions de compatibilité de la forme (1.4)- (1.5), c'est à dire

$$\varphi(0) = 0, \quad \int_{\ell_1}^{\ell} \varphi(x) dx = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \int_{\ell_1}^{\ell} \psi(x) dx = 0.$$

En se basant sur la méthode des inégalités énergétiques développée par Yurchuk [49], on montre que l'opérateur engendré par le problème en question est un homéomorphisme linéaire entre des espaces adéquats. La démonstration est basée sur une estimation à priori bilatérale et sur la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur. Un problème similaire en deux points avec condition intégrale a été traité dans [14].

1.2 Notions Préliminaires

Tout d'abord on ramène le problème (1.1)-(1.5) à la forme opérationnelle suivante

$$Lu = \mathcal{F},$$

où $L = (\mathcal{L}, l_1, l_2)$, de domaine de définition $D(L)$ constitué de l'ensemble des fonctions $u \in L_2(\Omega)$, telles que $\frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial t^3} \in L^2(\Omega)$, et vérifiant (1.4)-(1.5); l'opérateur L est considéré de E dans F , où E est l'espace de Banach des fonctions $u \in L_2(\Omega)$, et vérifiant les conditions (1.4)-(1.5), et dont la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_E^2 = & \int_{\Omega} \theta(x) \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right|^2 \right] dx dt + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\ell \theta(x) \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right] dx \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\ell_1}^\ell \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx, \end{aligned} \quad (1.6)$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ obtenu comme complété de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0, \ell) \times W_2^2(0, \ell)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_F^2 = & \int_{\Omega} \theta(x) |f|^2 dx dt + \int_0^\ell \theta(x) \left[\left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \right] dx \\ & + \int_{\ell_1}^\ell |\psi|^2 dx, \end{aligned}$$

où

$$\theta(x) = \begin{cases} (\ell_1 - \ell)^2 & 0 < x \leq \ell_1, \\ (x - \ell)^2 & \ell_1 \leq x < \ell \end{cases}$$

Lemme 1 Pour $u \in E$ vérifiant la première condition de (1.3) on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \exp(-c\tau) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx + \frac{c}{2} \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\ & = \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 dx. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Démonstration. Partant de l'égalité

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx dt = \\ \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \Big|_0^\tau dx + \frac{c}{2} \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt, \end{aligned}$$

on obtient (1.7). ■

Lemme 2 Pour $u \in E$, on a

$$\int_{\ell_1}^\ell \left| J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx \leq 4 \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx. \quad (1.8)$$

Démonstration. Partant de l'expression

$$\operatorname{Re} \int_{\ell_1}^\ell \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x - \ell) J \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\ell_1}^\ell \left| J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx,$$

et en utilisant l' ε -inégalité on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\ell_1}^\ell \left| J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx &\leq 4 \int_{\ell_1}^\ell (x - \ell) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx \\ &\leq 4 \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

1.3 Estimations a priori bilatérales

Théorème 5 Pour tout $u \in E$ on a l'estimation :

$$\|Lu\|_F \leq C \|u\|_E, \quad (1.9)$$

où $C = \max(3, 3a_5^2, 3a_1^2 T)$.

Démonstration. En utilisant l'équation (1.1) et les conditions initiales (1.3) on obtient

$$\int_{\Omega} \theta(x) |\mathcal{L}u|^2 dx \leq 3 \int_{\Omega} \theta(x) \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + a_5^2 \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right|^2 \right] dx dt + 3a_1^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx, \quad (1.10)$$

$$\int_0^\ell \theta(x) \left[\left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \right] dx \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^\ell \theta(x) \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right] dx, \quad (1.11)$$

et

$$\int_{\ell_1}^\ell |\psi|^2 dx \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\ell_1}^\ell \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx. \quad (1.12)$$

En combinant les inégalités (1.10), (1.11) et (1.12), on obtient (1.9) pour $u \in E$. ■

Théorème 6 *Pour toute fonction $u \in E$, on a l'estimation à priori*

$$\|u\|_E \leq \beta \|Lu\|_F, \quad (1.13)$$

où la constante

$$\beta = \frac{\exp(cT) \max\left(\frac{167}{10}, a_1\right)}{\min\left(\frac{1}{20}, \frac{a_0^2}{15}, \frac{a_0}{2}\right)}$$

et la constante c vérifie

$$c \geq 1, \quad ca_0 - a_3 \geq \max\left(\frac{1}{5}(a_5^2 + 5), 2a_5^2\right). \quad (1.14)$$

Démonstration. Soit

$$Mu = \begin{cases} (\ell_1 - \ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0 < x \leq \ell_1, \\ (x - \ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2(\ell - x) J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \ell_1 \leq x < \ell, \end{cases}$$

où

$$Ju = \int_x^\ell u(\xi, t) d\xi.$$

Pour la constante c vérifiant (1.14), considérons la forme quadratique :

$$\operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \mathcal{L}u \overline{Mu} dx dt, \quad (1.15)$$

obtenue en multipliant l'equation (1.1) par $\exp(-ct)\overline{Mu}$, en integrant sur Ω^τ , où $\Omega^\tau = (0, \ell) \times (0, \tau)$, $0 \leq \tau \leq T$, et en prenant la partie réelle.

En integrant par parties chaque terme figurant dans la formule (1.15), et en prenant en compte les conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\ell_1} \exp(-ct) (\ell_1 - \ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx = \int_0^{\ell_1} \exp(-ct) (\ell_1 - \ell)^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx, \\
& \int_0^{\ell_1} \exp(-ct) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \right) (\ell_1 - \ell)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx = \left[-\exp(-ct) a(\ell_1, t) \frac{\partial^2 u(\ell_1, t)}{\partial x \partial t} \right. \\
& \quad \left. \times (\ell_1 - \ell)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}(\ell_1, t)}{\partial t^2} \right] + \int_0^{\ell_1} \exp(-ct) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (\ell_1 - \ell)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right) dx, \\
& \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) (x - \ell)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx = \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) (x - \ell)^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx, \\
& \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \right) (x - \ell)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx = \exp(-ct) a(\ell_1, t) \frac{\partial^2 u(\ell_1, t)}{\partial x \partial t} (\ell_1 - \ell)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}(\ell_1, t)}{\partial t^2} \\
& \quad + \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (x - \ell)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right) dx + 2 \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (x - \ell) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx, \\
& \quad \text{Re} \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (x - \ell) J \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) \left| J \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right|^2 dx, \\
& -2 \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \right) (x - \ell) J \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx = -2 \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} (x - \ell) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx \\
& \quad + 2 \int_{\ell_1}^{\ell} \exp(-ct) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} J \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx.
\end{aligned}$$

En sommant tous ces termes on obtient

$$\begin{aligned}
& \text{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \mathcal{L}u M \bar{u} dx dt = \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \\
& \quad \text{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right) dx dt + \\
& \quad \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) \left| J \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + 2 \text{Re} \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial t} (x - \ell)^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dx dt \\
& \quad - 2 \text{Re} \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} J \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx dt. \tag{1.16}
\end{aligned}$$

En utilisant des inégalités élémentaires, on obtient

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \mathcal{L}u M \bar{u} dx dt \geq \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dt \\
& + \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} \right) dx dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) \frac{\partial u}{\partial t} a \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx dt \\
& - 2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt. \tag{1.17}
\end{aligned}$$

En intégrant le second et le troisième terme dans le membre droit de l'inégalité (1.17), en prenant en compte (1.2), (1.3), les formules suivantes

$$\begin{aligned}
2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx dt &= \int_0^\ell \theta(x) \exp(-c\tau) a(x, \tau) \left| \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \\
&- \int_0^\ell a(x, 0) \theta(x) \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx + c \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\
&- \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial t} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\
2 \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dx dt &= \int_{\ell_1}^\ell \exp(-c\tau) a(x, \tau) \left| \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \right|^2 dx \\
&- \int_{\ell_1}^\ell a(x, 0) |\psi|^2 dx + c \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) a \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt - \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt,
\end{aligned}$$

et le lemme 1, on trouve

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \mathcal{L}u M \bar{u} dx dt + \int_{\ell_1}^\ell a(x, 0) |\psi|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell a(x, 0) \theta(x) \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 dx dt + \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx dt \\
& \geq \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^\ell a(x, \tau) \exp(-c\tau) \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, \tau) \right|^2 dx \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\ell \exp(-c\tau) \theta(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \right|^2 dx \\
& + (ca_0 - \frac{a_3}{2}) \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt + \int_{\ell_1}^\ell \exp(-c\tau) a(x, \tau) \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right|^2 dx
\end{aligned}$$

$$+(ca_0 - a_3 - 2a_5^2) \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dxdt + \frac{c}{2} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dxdt. \quad (1.18)$$

En remplaçant l'expression de Mu dans (1.15), en utilisant des inegalités élémentaires, l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \mathcal{L}u M \bar{u} dxdt &\leq \frac{33}{2} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) |\mathcal{L}u|^2 dxdt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt + \frac{1}{16} \int_0^\tau \int_{\ell_1}^\ell \exp(-ct) \left| J \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt \end{aligned}$$

et le lemme 2, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \mathcal{L}u M \bar{u} dxdt &\leq \frac{33}{2} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) |\mathcal{L}u|^2 dxdt \\ &+ \frac{3}{4} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (1.19)$$

D'autre part de l'equation (1.1), en utilisant des inégalités élémentaires et les conditions (1.2), il vient

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{3} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right|^2 dxdt &\leq \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) |\mathcal{L}u|^2 dxdt \\ &+ a_5^2 \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dxdt + \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

En combinant les inégalités (1.18) et (1.20), en utilisant les conditions (1.14), et l'inégalité (1.19), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{167}{10} \int_\Omega \theta(x) |\mathcal{L}u|^2 dxdt + \frac{a_1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx + a_1 \int_{\ell_1}^\ell |\psi|^2 dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 dx \geq \exp(-cT) \left(\frac{1}{20} \int_0^\tau \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt \right. \\ &\quad + \frac{a_0}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x, \tau) \right|^2 dx + a_0 \int_{\ell_1}^\ell \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) \right|^2 dx \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau) \right|^2 dx + \frac{a_0^2}{15} \int_0^\tau \int_0^\ell \exp(-ct) \theta(x) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right|^2 dxdt \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Puisque le membre de gauche de l'inégalité ainsi obtenue (1.21) ne dépend pas de τ , en passant au supremum par rapport à τ de 0 à T , on obtient l'inégalité (1.13).

1.4 Résolubilité du problème

Des estimations (1.9) et (1.13), résulte que l'opérateur $L : E \longrightarrow F$ est continu et que son ensemble des valeurs est fermé dans F . Il s'ensuit que l'opérateur inverse L^{-1} existe et continu sous espace fermé $R(L)$ sur E , d'où L est un homéomorphisme de E dans $R(L)$ d'où pour montrer l'existence de la solution du problème il suffit de montrer que $R(L) = F$.

Dans ce but on montre la proposition suivante.

Lemme 3 *On suppose que $\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t}$ est borné Soit $D_0(L) = \{u \in D(L) : l_1 u = 0, l_2 u = 0\}$. Si pour $u \in D_0(L)$ et pour un certain $\omega \in L_2(\Omega)$ on a*

$$\int_{\Omega} \Phi(x) \mathcal{L}u \varpi dx dt = 0, \quad (1.22)$$

où

$$\Phi(x) = \begin{cases} (\ell - \ell_1) & 0 < x \leq \ell_1, \\ (\ell - x) & \ell_1 \leq x < \ell, \end{cases}$$

alors $\omega = 0$.

Démonstration. L'égalité (1.22) peut être écrite sous la forme

$$\int_{\Omega} \Phi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \varpi dx dt = \int_{\Omega} \Phi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \varpi dx dt. \quad (1.23)$$

Pour $\omega(x, t)$ donné, on introduit la fonction

$$v(x, t) = \begin{cases} \omega(x, t) & 0 < x \leq \ell_1, \\ \omega(x, t) - \int_{\ell_1}^x \frac{\omega(\xi, t)}{\ell - \xi} d\xi & \ell_1 \leq x < \ell, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\Phi(x) \omega = \begin{cases} (\ell - \ell_1) v & 0 < x \leq \ell_1, \\ (\ell - x) v + \int_{\ell_1}^x v(\xi, t) d\xi & \ell_1 \leq x < \ell. \end{cases}$$

En intégrant par parties selon ξ , on obtient

$$\int_{\ell_1}^x v(\xi, t) d\xi = \int_{\ell_1}^x \omega(\xi, t) d\xi + \int_{\ell_1}^x \frac{\partial}{\partial \xi} (\ell - \xi) \int_{\ell_1}^{\xi} \frac{\omega(\eta, t)}{\ell - \eta} d\eta d\xi = (\ell - x) (\omega(x, t) - v(x, t)).$$

D'où

$$\int_{\ell_1}^{\ell} v(x, t) dx = 0. \quad (1.24)$$

D'autre part de l'égalité (1.23) on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \overline{Nv} dx dt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \overline{Nv} dx dt,$$

une integration par parties dans le membre de cette égalité donne

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \overline{Nv} dx dt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \Phi(x) \bar{v} dx dt - \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \bar{v} dx dt,$$

et comme

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((\ell - x) a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) = -a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (\ell - x) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right),$$

on a

$$- \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \overline{Nv} dx dt = \int_{\Omega} A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \bar{v} dx dt, \quad (1.25)$$

où

$$Nv = \Phi(x)w, \text{ and } A(t)u = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x)a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Introduisons les t -opérateurs de régularisation de la forme $J_{\xi}^{-1} = (I + \xi \frac{\partial}{\partial t})^{-1}$ et $(J_{\xi}^{-1})^*$ [49], ces opérateurs donnent les solutions respectivement des problemes suivants :

$$\begin{aligned} \xi \frac{dg_{\xi}(t)}{dt} + g_{\xi}(t) &= g(t), \\ g_{\xi}(t)|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

et

$$\begin{aligned} -\xi \frac{dg_{\xi}^*(t)}{dt} + g_{\xi}^*(t) &= g(t), \\ g_{\xi}(t)|_{t=T} &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ces solutions possèdent les propriétés suivantes : Pour tout $g \in L_2(0, T)$, les fonctions $g_{\xi} = (J_{\xi}^{-1})g$ et $g_{\xi}^* = (J_{\xi}^{-1})^*g$ appartiennent à $W_2^1(0, T)$ et vérifient $g_{\xi}|_{t=0} = 0$ et $g_{\xi}^*|_{t=T} = 0$. De plus, J_{ξ}^{-1} commutent avec $\frac{\partial}{\partial t}$, $\int_0^T |g_{\xi} - g|^2 dt \longrightarrow 0$ et $\int_0^T |g_{\xi}^* - g|^2 dt \longrightarrow 0$ pour $\xi \longrightarrow 0$.

En remplaçant dans (1.25), $\frac{\partial u}{\partial t}$ par la fonction régularisée $J_\xi^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}$, en utilisant la relation $A(t) J_\xi^{-1} = J_\xi^{-1} A(\tau) + \xi J_\xi^{-1} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} J_\xi^{-1}$, et les propriétés des opérateurs de régularisation, on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \overline{N \frac{\partial v_\xi^*}{\partial t}} dx dt = \int_{\Omega} A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{v_\xi^*} dx dt + \xi \int_{\Omega} \frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_\xi \overline{v_\xi^*} dx dt.. \quad (1.28)$$

D'autre part la résolution de l'équation

$$A(t) u = g$$

nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\alpha}{\Phi(x)a(x,t)} - \frac{1}{\Phi(x)a(x,t)} \int_0^x g(\eta) d\eta \\ u &= - \int_0^x \frac{d\xi}{\Phi(\xi)a(\xi,t)} \int_0^\xi g(\eta) d\eta + \alpha \int_0^x \frac{d\xi}{\Phi(\xi)a(\xi,t)}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Ainsi l'opérateur $A(t)$ possède un inverse continu sur $L_2(0, \ell)$ défini par

$$A^{-1}(t) g = - \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi,t)\psi(x)} \int_0^\xi g(\eta) d\eta + \alpha \int_0^x \frac{d\xi}{a(\xi,t)\psi(x)}. \quad (1.30)$$

De 1.29 on tire que

$$\Phi(x) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha}{a(x,t)} - \frac{1}{a(x,t)} \int_0^x g(\eta) d\eta,$$

en intégrant de 0 à ℓ on a

$$\int_0^\ell \Phi(\xi) \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial x} d\xi = \alpha \int_0^\ell \frac{dx}{a(x,t)} - \int_0^\ell \frac{dx}{a(x,t)} \int_0^x g(\eta) d\eta$$

Après une intégration par parties du premier membre de cette égalité on a

$$\int_0^\ell \Phi(\xi) \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial x} d\xi = 0,$$

donc

$$\alpha = \frac{\int_0^\ell \frac{dx}{a(x,t)} \int_0^x g(\xi) d\xi}{\int_0^\ell \frac{dx}{a(x,t)}} \quad (1.31)$$

Ainsi on obtient

$$\int_{\ell_1}^\ell A^{-1}(t) g dx = 0. \quad (1.32)$$

Puisque, la fonction $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\xi$ peut etre mise sous la forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\xi = J_\xi^{-1} A^{-1}(t) A(t) \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Alors

$$\frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\xi = A_\xi(t) A(t) \frac{\partial u}{\partial t},$$

où

$$A_\xi(t) = \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} J_\xi^{-1} - \frac{\partial a}{\partial t} J_\xi^{-1} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{1}{a} \right) \frac{1}{a} \left(\int_0^x g(\eta, t) d\eta - \alpha \right) + \frac{\partial a}{\partial t} J_\xi^{-1} \frac{1}{a} g, \quad (1.33)$$

et la constante α est donnée par (1.31).

Par conséquent, la relation (1.28) s'écrit

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \overline{N \frac{\partial v_\xi^*}{\partial t}} dx dt = \int_\Omega A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{(v_\xi^* + \xi A_\xi^* v_\xi^*)} dx dt, \quad (1.34)$$

où $A_\xi^*(t)$ est l'adjoint de l'opérateur $A_\xi(t)$. Comme le membre de gauche de l'égalité (1.34) est une fonctionnelle linéaire continu en $\frac{\partial u}{\partial t}$. Ainsi, la fonction $h_\xi = v_\xi^* + \xi A_\xi^* v_\xi^*$ possèdent des dérivées partielles vérifiant $\Phi(x) \frac{\partial h_\xi}{\partial x} \in L_2(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x) \frac{\partial h_\xi}{\partial x} \right) \in L_2(\Omega)$, et les propriétés suivantes sont satisfaites

$$h_\xi|_{x=0} = 0, \quad h_\xi|_{x=\ell} = 0 \text{ and } \Phi(x) \frac{\partial h_\xi}{\partial x} \Big|_{x=\ell} = 0. \quad (1.35)$$

D'autre part, comme les opérateurs $A_\xi^*(t)$ sont bornés dans $L_2(\Omega)$, alors pour ξ suffisamment petit on a

$\|\xi A_\xi^*(t)\|_{L_2(\Omega)} < 1$; alors l'opérateur $I + \xi A_\xi^*(t)$ possède un inverse borné dans $L_2(\Omega)$. De plus la dérivée de cet opérateur par rapport à x est un opérateur borné dans $L_2(\Omega)$. De plus de l'égalité

$$h_\xi = (I + \xi A_\xi^*(t)) v_\xi^*, \quad (1.36)$$

on déduit que v_ξ^* possède une dérivée partielle vérifiant $\Phi(x) \frac{\partial v_\xi^*}{\partial x} \in L_2(\Omega)$ and $\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x) \frac{\partial v_\xi^*}{\partial x} \right) \in L_2(\Omega)$. En prenant en compte (1.35) et (1.36), on a

$$[(I + \xi A_\xi^*(t)) v_\xi^*]_{x=0} = 0, \quad (1.37)$$

$$[(I + \xi A_\xi^*(t))v_\xi^*]_{x=\ell} = 0. \quad (1.38)$$

D'une manière similaire, on montre que pour chaque $x \in [0, \ell]$ fixé et pour ξ suffisamment petit, l'opérateur $I + \xi A_\xi^*(t)$ est continument inversible dans $L_2(\Omega)$. Finalement de (1.37) et (1.38) on obtient

$$v_\xi^*|_{x=0} = 0, \quad v_\xi^*|_{x=\ell} = 0 \text{ and } \Phi(x) \frac{\partial v_\xi^*}{\partial x} |_{x=\ell} = 0.$$

Ainsi, pour ξ suffisamment petit la fonction v_ξ^* possède les memes propriétés que celles de la fonction h_ξ . En plus, v_ξ^* satisfait la condition intégrale dans (1.24).

En remplaçant $u = \int_0^t \int_0^\tau \exp(c\eta) v_\xi^*(\eta, \tau) d\eta d\tau$ dans (1.25), où la constante c vérifie $ca_0 - a_3 - \frac{a_3^2}{a_0} \geq 0$, et en utilisant (1.27), on obtient

$$\int_\Omega \exp(ct) v_\xi^* \overline{Nv} dx dt = - \int_\Omega A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \exp(-ct) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx dt + \xi \int_\Omega A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{v}_\xi^*}{\partial t} dx dt, \quad (1.39)$$

En intégrant par parties chaque terme du membre droit de (1.39), et en passant à la partie réelle on a

$$\int_\Omega A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \exp(-ct) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx dt = \int_\Omega \Phi(x) a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx dt,$$

une integration par parties dans le second membre par rapport à t et en utilisant l' ε - inégalité on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_\Omega A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \exp(-ct) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx dt &\geq \frac{c}{2} \int_\Omega \Phi(x) a(x, t) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_\Omega \Phi(x) \frac{\partial a}{\partial t} \exp(-ct) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (1.40)$$

pour le deuxième terme de (1.39) on a

$$-\xi \int_\Omega A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{v}_\xi^*}{\partial t} dx dt = \xi \int_0^T \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x) a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial \bar{v}_\xi^*}{\partial t} dx dt$$

une integration par parties dans le deuxième terme de cette égalité donne

$$-\xi \int_\Omega A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \bar{v}_\xi^*}{\partial t} dx dt = -\xi \int_\Omega \bar{v}_\xi^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x) a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx dt$$

$$-\xi \int_{\Omega} \overline{v_{\xi}^*} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x) a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx dt \quad (1.41)$$

on integre chaque terme de (1.41) on trouve

$$\begin{aligned} -\xi \int_{\Omega} \overline{v_{\xi}^*} \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi(x) a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx dt &= \xi \int_{\Omega} \Phi(x) a(x, t) \exp(-ct) \left| \frac{\partial v_{\xi}^*}{\partial x} \right|^2 dx dt \\ &+ \xi \int_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial t} \Phi(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial \overline{v_{\xi}^*}}{\partial t} dx dt \end{aligned}$$

en utilisant l' ε -inégalité et les conditions (1.2) on trouve

$$\operatorname{Re} \left(-\xi \int_{\Omega} A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \overline{v_{\xi}^*}}{\partial t} dx dt \right) \geq \frac{-\xi a_3^2}{2a_0} \int_{\Omega} \Phi(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt. \quad (1.42)$$

Enfin, en utilisant (1.40) et (1.42) dans (1.39) et en prenant la constante c selon le choix indiqué précédemment, on obtient

$$2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct) v_{\xi}^* \overline{N} v dx dt \leq 0.$$

Alors, pour $\xi \rightarrow 0$, on obtient $2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct) v \overline{N} v dx dt \leq 0$. Ainsi

$2 \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct) (\ell - x) |v|^2 dx dt = 0$, d'où $v = 0$, ainsi $\omega = 0$, d'où le lemme est démontré. ■

Théorème 7 *L'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'opérateur L coïncide avec F .*

Démonstration. Comme F est un espace de Hilbert, on a $R(L) = F$ si et seulement si l'implication suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta(x) \mathcal{L} u \overline{f} dx dt + \int_0^{\ell} \left[\theta(x) \left(\frac{dl_1 u}{dx} \frac{d\overline{\varphi}}{dx} + \frac{dl_2 u}{dx} \frac{d\overline{\psi}}{dx} \right) \right] dx \\ + \int_{\ell_1}^{\ell} l_2 u \overline{\psi} dx = 0, \end{aligned} \quad (1.43)$$

pour $u \in E$ arbitraire et $(f, \varphi, \psi) \in F$, implique que f , φ et ψ sont nulles.

En prenant $u \in D_0(L)$ dans (1.43), du lemme 3 on tire que $\Phi(x)f = 0$, alors $f = 0$.

Finalement, $\forall u \in D(L)$, on a

$$\int_0^{\ell} \theta(x) \left(\frac{dl_1 u}{dx} \frac{d\overline{\varphi}}{dx} + \frac{dl_2 u}{dx} \frac{d\overline{\psi}}{dx} \right) dx + \int_{\ell_1}^{\ell} l_2 u \overline{\psi} dx = 0. \quad (1.44)$$

Puisque l'ensemble des valeurs de l'opérateur trace (l_1, l_2) est partout dense dans l'espace de Hilbert munit de la norme

$$\left[\int_0^\ell \theta(x) \left(\left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 + \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \right) dx + \int_{\ell_1}^\ell |\psi|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, $(\varphi, \psi) = (0, 0)$ ce qui achève la démonstration.

Chapitre 2

SOLUTION FORTE POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE SUPERIEUR DU TYPE MIXTE AVEC CONDITIONS INTEGRALES A POIDS

Dans ce chapitre on développe la méthode des inégalités énergétique à l'étude d'un problème mixte pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur du type mixte. Un problème similaire pour le cas $k = 1$ a été traité dans [15].

2.1 Introduction

Dans le rectangle $Q = (0, 1) \times (0, T)$, on considère l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^\alpha a(t) \frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial x^{2\alpha} \partial t} = f(x, t), \quad (2.1)$$

où la fonction $a(t)$ est bornée $0 < a_0 < a(t) \leq a_1$ et possède une dérivée bornée :

$0 < a_2 \leq \frac{da(t)}{dt} \leq a_3$ pour $t \in (0, T)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

A l'équation (2.1) on associe les conditions initiales

$$l_1 u = u(x, 0) = \varphi(x), \quad l_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad x \in (0, 1), \quad (2.2)$$

les conditions aux limites

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} u(0, t) = 0, \quad \text{for } 0 \leq i \leq \alpha - k, t \in (0, T), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} u(1, t) = 0, \quad \text{for } 0 \leq i \leq \alpha - k - 1, t \in (0, T), \quad (2.4)$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 x^i u(\xi, t) d\xi = 0, \quad \text{for } 0 \leq i \leq 2k - 2, 1 \leq k \leq \alpha, \quad t \in (0, T). \quad (2.5)$$

où φ, ψ sont des fonctions données satisfaisant aux conditions de compatibilité données par (2.3)-(2.5).

On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur une inégalité de l'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème en question.

2.2 Notions Préliminaires

Tout d'abord on écrit le problème (2.1)-(2.5) sous forme opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F}, \quad (2.6)$$

où $L = (\mathcal{L}, l_1, l_2)$, de domaine de définition $D(L)$ constitué des fonctions $u \in W_2^{2\alpha,2}(Q)$ tel que $\frac{\partial^i}{\partial x^i}(\frac{\partial^{\alpha+1}u}{\partial x^\alpha \partial t}) \in L_2(Q)$, $\frac{\partial^{i+1}u}{\partial x^{i+1} \partial t} \in L_2(Q)$, $i = \overline{1, \alpha}$ et u vérifie les conditions (2.3)-(2.5); l'opérateur L est considéré de E dans F , où E est l'espace de Banach constitué de toutes les fonctions $u \in L_2(Q)$, satisfaisant (2.3)-(2.5), de norme finie

$$\begin{aligned} \|u\|_E^2 = & \int_Q (1-x) \left[\left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 + \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial x^{2\alpha} \partial t} \right) \right|^2 \right] dx dt \\ & + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^1 (1-x) \left[\sum_{i=0}^{\alpha} \left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} (J^{k-1} u) \right|^2 + \left| \frac{\partial^{\alpha+1} (J^{k-1} u)}{\partial x^\alpha \partial t} \right|^2 + \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|^2 \right] dx, \end{aligned} \quad (2.7)$$

et F est l'espace de Hilbert des fonctions vectorielles $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ obtenu comme complété de l'espace $L_2(Q) \times W_2^{2\alpha,2}(0,1) \times W_2^{2\alpha,2}(0,1)$ par rapport à la norme

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_F^2 = & \int_Q (1-x)^\nu |f|^2 dx dt \\ & + \int_0^1 (1-x) \left[\sum_{i=0}^{\alpha} \left| \frac{\partial^i (J^{k-1} \varphi)}{\partial x^i} \right|^2 + \left| \frac{\partial^\alpha (J^{k-1} \psi)}{\partial x^\alpha} \right|^2 + |(J^{k-1} \psi)|^2 \right] dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

où ν est un nombre arbitraire tel que $\frac{1}{2} < \nu < 1$, et

$$J^k u = \int_0^x \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_{k-1}} u(\xi, t) d\xi_{k-1} d\xi_{k-2} \dots d\xi_1 d\xi.$$

Lemme 4 Soit α et β tel que $\alpha + \beta = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\operatorname{Re} \int_0^1 J^\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) J^\beta \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) dx = 0.$$

Démonstration. Sans exclure le cas général supposons que $\alpha > \beta$, alors $\alpha - \beta > 0$,

$$\int_0^1 J^\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) J^\beta \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) dx = (-1)^{\alpha-\beta} \int_0^1 J^\beta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) J^\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) dx. \blacksquare$$

Lemme 5 Pour toute fonction $u \in E$ vérifiant la condition (2.2), on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \exp(-c\tau)(1-x) \left| \left(J^{k-1} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (x, \tau) \right|^2 dx &\leq \int_0^1 (1-x) |J^{k-1} \psi|^2 dx \\ &+ \frac{1}{8} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct)(1-x) \left| J^{k-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Démonstration. Partant de $\int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct)(1-x) \frac{\partial}{\partial t} \left(J^{k-1} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(J^{k-1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) dx dt$, en faisant une integration par parties, on obtient (2.9). ■

Lemme 6 Pour $u \in E$, on a

$$\int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^{i+1} (J^{k-1} u)}{\partial x^i \partial t} \right|^2 dx \leq \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha+1} (J^{k-1} u)}{\partial x^\alpha \partial t} \right|^2 dx. \quad (2.10)$$

Démonstration. Partant de $\int_0^1 (1-x)^2 \frac{\partial^{i+1} (J^{k-1} u)}{\partial x^{i+1}} \frac{\partial^i (J^{k-1} \bar{u})}{\partial x^i} dx$, et en utilisant des inégalités élémentaires on obtient (2.10). ■

Lemme 7 Pour $u \in E$ satisfaisant à la condition (2.2), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^\alpha \int_0^1 \exp(-c\tau)(1-x) \left| \frac{\partial^i (J^{k-1} u(x, \tau))}{\partial x^i} \right|^2 dx &\leq \sum_{i=0}^\alpha \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^i (J^{k-1} \varphi)}{\partial x^i} \right|^2 dx \\ &+ (\alpha + 1) \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct)(1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha+1} (J^{k-1} u)}{\partial x^\alpha \partial t} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Démonstration. En Intégrant par parties l'expression $\int_0^\tau \exp(-ct) \frac{\partial^{i+1} (J^{k-1} u)}{\partial x^i \partial t} \frac{\partial^i (J^{k-1} \bar{u})}{\partial x^i} dt$ pour $i = \overline{0, \alpha}$, en utilisant des inégalités élémentaires et le lemme 6, on obtient (2.11). D'où le résultat ■

2.3 Inégalité de l'énergie et ses conséquences

Théorème 8 Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'inégalité

$$\|u\|_E \leq C_1 \|Lu\|_F, \quad (2.12)$$

avec la constante $C_1 = \frac{\exp(cT) \max((4(\alpha+k-1)^2/(1-\nu)^2) + \frac{9}{8}, a_1/2)}{\min(\frac{1}{4}, a_1^2/16)}$, où la constante c vérifie

$$c \geq 8 \quad \text{and} \quad ca_0 - (\alpha + 1) \geq a_3. \quad (2.13)$$

Démonstration. Notons par

$$Mu = (-1)^{k-1} \left\{ (1-x) J^{2(k-1)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + (\alpha + k - 1) J^{2k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right\}.$$

Considérons la forme quadratique

$$\operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) \mathcal{L}u \overline{Mu} dx dt, \quad (2.14)$$

où la constante c vérifie (2.13), cette forme est obtenue en multipliant l'équation (2.1) par $\exp(-ct) \overline{Mu}$, en faisant une intégration sur Q^τ , où $Q^\tau = (0, 1) \times (0, \tau)$, avec $0 \leq \tau \leq T$, et en prenant la partie réelle. En faisant une intégration par parties dans (2.14) dans laquelle on prend en compte les conditions aux limites (2.3), (2.4) et (2.5) et le lemme 4, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) \mathcal{L}u \overline{Mu} dx dt &= \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x) \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx dt \\ &+ \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x) a(t) \frac{\partial^{\alpha+1} (J^{k-1} u)}{\partial x^\alpha \partial t} \frac{\partial^{\alpha+2} (J^{k-1} \overline{u})}{\partial x^\alpha \partial t^2} dx dt. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En substituant l'expression de Mu dans (2.14), et en utilisant des inégalités élémentaires on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) \mathcal{L}u \overline{Mu} dx dt &\leq \left(\frac{4(\alpha + k - 1)^2}{(1-\nu)^2} + 1 \right) \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x)^\nu |\mathcal{L}u|^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x) \left| J^{2(k-1)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx dt \\ &+ \frac{(1-\nu)^2}{16} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\left| J^{2k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2}{(1-x)^\nu} dx dt \end{aligned} \quad (2.16)$$

En utilisant les inégalités

$$\int_0^1 \frac{\left| J^{2k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2}{(1-x)^\nu} dx \leq \frac{4}{(1-\nu)^2} \int_0^1 (1-x) \left| J^{2(k-1)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx, \quad \text{où } 0 < \nu < 1,$$

et

$$\int_0^1 (1-x) \left| J^{2(k-1)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx \leq \int_0^1 (1-x) \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx,$$

dans (2.16), on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) \mathcal{L}u \overline{M}u dx dt &\leq \left(\frac{4(\alpha+k-1)^2}{(1-\nu)^2} + 1 \right) \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x)^\nu |\mathcal{L}u|^2 dx dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x) \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'autre part de l'équation (2.1), on a

$$\frac{1}{2} \left| a(t) J^{k-1} \left(\frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial x^{2\alpha} \partial t} \right) \right|^2 \leq |J^{k-1}(\mathcal{L}u)|^2 + \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2, \quad (2.18)$$

En intégrant le dernier terme figurant dans le membre droit de (2.15) et en combinant le résultat obtenu avec les lemmes 5, 6, 7 et les inégalités (2.17) et (2.18), on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4\alpha^2}{(1-\nu)^2} + \frac{9}{8} \right) \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x)^\nu |\mathcal{L}u|^2 dx dt + \frac{a_1}{2} \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^\alpha J^{k-1}(\psi)}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx \\ &+ \int_0^1 (1-x) |J^{k-1}(\psi)|^2 dx + \sum_{i=0}^\alpha \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^i J^{k-1}(\varphi)}{\partial x^i} \right|^2 dx \\ &\geq \sum_{i=0}^\alpha \int_0^1 \exp(-c\tau) (1-x) \left| \frac{\partial^i J^{k-1}u(x, \tau)}{\partial x^i} \right|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x) \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx dt \\ &+ \frac{a_0}{2} \int_0^1 \exp(-c\tau) (1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha+1} J^{k-1}u(x, \tau)}{\partial x^\alpha \partial t} \right|^2 dx \\ &+ \frac{a_1^2}{16} \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x) \left| J^{k-1} \left(\frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial x^{2\alpha} \partial t} \right) \right|^2 dx dt + \int_0^1 \exp(-c\tau) (1-x) \left| J^{k-1} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \right|^2 dx \\ &+ (ca_0 - a_3 - (\alpha+1)) \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha+1} J^{k-1}u}{\partial x^\alpha \partial t} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

En utilisant des inégalités élémentaires et (2.13), de (2.19) on a

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4\alpha^2}{(1-\nu)^2} + \frac{9}{8} \right) \int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct) (1-x)^\nu |\mathcal{L}u|^2 dx dt + \frac{a_1}{2} \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^\alpha J^{k-1}\psi}{\partial x^\alpha} \right|^2 dx + \int_0^1 (1-x) |J^{k-1}\psi|^2 dx \\ &+ \sum_{i=0}^\alpha \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^i J^{k-1}\varphi}{\partial x^i} \right|^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \exp(-cT) \left[\sum_{i=0}^{\alpha} \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^i J^{k-1} u(x, \tau)}{\partial x^i} \right|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^{\tau} \int_0^1 (1-x) \left| J^{k-1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dt \right. \\
&\quad + \frac{a_0}{2} \int_0^1 (1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha+1} J^{k-1} u(x, \tau)}{\partial x^{\alpha} \partial t} \right|^2 dx + \frac{a_1^2}{16} \int_0^{\tau} \int_0^1 (1-x) \left| J^{k-1} \frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial x^{2\alpha} \partial t} \right|^2 dx dt \\
&\quad \left. + \int_0^1 (1-x) \left| J^{k-1} \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial t} \right|^2 dx \right]. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Puisque le membre de gauche de l'inégalité (2.20) ainsi obtenue est independant de τ , en passant au supremum dans le membre droit de cette inégalité par rapport à τ de 0 à T , on obtient l'inégalité cherchée. ■

D'une manière standard on peut montrer que l'opérateur $L : E \rightarrow F$ est fermable. Désignons par $\bar{L}$ sa fermeture ayant pour domaine de définition $D(\bar{L})$.

Définition 3 *La solution de l'equation opératorielle*

$$\bar{L}u = \mathcal{F}$$

est dite solution forte du problème (2.1)-(2.5).

Comme les points du graphe de l'opérateur $\bar{L}$ sont limites des suites de points du graphe de l'opérateur L , L'estimation à priori (2.12) peut etre prolongée aux solutions fortes en passant à la limite, soit

$$\|u\|_E \leq C_1 \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}). \tag{2.21}$$

De l'inégalité (2.20) découlent les corollaires suivants.

Corollaire 2 *La solution forte du problème (2.1)-(2.5) si elle existe est unique et dépend continument du second membre de l'équation et des conditions initiales , i.e. de $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in F$.*

Corollaire 3 *L'image $R(\bar{L})$ de l'opérateur $\bar{L}$ est fermée dans F , et on a $R(\bar{L}) = \overline{R(L)}$.*

De ce dernier corollaire il apparait clair que pour montrer que le problème (2.1)-(2.5) admet une solution forte pour $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ arbitraire, il suffit de montrer que l'ensemble des valeurs $R(L)$ est dense dans F .

2.4 Existence de la Solution

Lemme 8 Soit $D_0(L) = \{u \in D(L) : l_1 u = 0, l_2 u = 0\}$. Si pour $u \in D_0(L)$ et un certain $\omega \in L_2(Q)$, on a

$$\int_Q (1-x) \mathcal{L}u \varpi dx dt = 0, \quad (2.22)$$

alors $\omega = 0$.

Démonstration. Il est facile de voir que l'égalité (2.22) peut être écrite sous la forme

$$-\int_Q (1-x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \varpi dx dt = (-1)^\alpha \int_Q (1-x) a(t) \frac{\partial^{2\alpha+1} u}{\partial x^\alpha \partial t} \varpi dx dt. \quad (2.23)$$

Introduisant les t -opérateurs de régularisation [49] $J_\varepsilon^{-1} = (I + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t})^{-1}$ et $(J_\varepsilon^{-1})^*$, alors ces opérateurs donnent les solutions des problèmes respectifs :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dg_\varepsilon(t)}{dt} + g_\varepsilon(t) &= g(t), \\ g_\varepsilon(t)|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

et,

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{dg_\varepsilon^*(t)}{dt} + g_\varepsilon^*(t) &= g(t), \\ g_\varepsilon^*(t)|_{t=T} &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

et on a aussi les propriétés suivantes : pour tout $g \in L_2(0, T)$, les fonctions $g_\varepsilon = (J_\varepsilon^{-1})g$ et $g_\varepsilon^* = (J_\varepsilon^{-1})^*g$ appartiennent à $W_2^1(0, T)$ et vérifient $g_\varepsilon|_{t=0} = 0$ et $g_\varepsilon^*|_{t=T} = 0$. de plus, J_ε^{-1} commute avec $\frac{\partial}{\partial t}$, et on a $\int_0^T |g_\varepsilon - g|^2 dt \rightarrow 0$ et $\int_0^T |g_\varepsilon^* - g|^2 dt \rightarrow 0$, pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

D'autre part pour la fonction donnée $\omega(x, t)$, introduisons la fonction suivante $v(x, t)$ telle que

$$v(x, t) = (1-x)^{\alpha+k-2} \left\{ \int_0^x (1-\xi)^{2+\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x}(\xi, t) d\xi + (\alpha+k+\nu) \int_0^x (1-\xi)^{1+\nu} \omega(\xi, t) d\xi \right\},$$

alors on a $J^{k-2}v = (-1)^k \left\{ \omega(\xi, t) + (\alpha + k - 1)(1 - x)^{\alpha+k-2} \int_0^x \frac{\omega(\xi, t)}{(1-\xi)^{\alpha+k-1}} d\xi \right\}$, en integrant par parties, on obtient

$$(-1)^{k-1}(1-x)J^{2k-2}v + (-1)^{k-1}(\alpha+k-1)J^{2k-1}v = (1-x)\omega, \quad \int_0^1 J^{2(k-1)}v(\xi, t) d\xi = 0. \quad (2.26)$$

Alors, de l'egalité (2.23), on a

$$- \int_Q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} N \bar{v} dx dt = \int_Q A(t) \frac{\partial u}{\partial t} J^{2k-2} \bar{v} dx dt, \quad (2.27)$$

où, $Nv = (-1)^{k-1}(1-x)J^{2k-2}v + (-1)^{k-1}(\alpha+k-1)J^{2k-1}v$, et

$A(t)u = (-1)^{\alpha+k-1} \frac{\partial^{\alpha+k-1}}{\partial x^{\alpha+k-1}} \left((1-x)a(t) \frac{\partial^{\alpha-k+1}u}{\partial x^{\alpha-k+1}} \right)$. En remplaçant dans (2.27) $\frac{\partial u}{\partial t}$ par sa régularisée $J_\epsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial t}$ et en utilisant la relation $A(t)J_\epsilon^{-1} = J_\epsilon^{-1}A(\tau) + \epsilon J_\epsilon^{-1} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} J_\epsilon^{-1}$, on obtient

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} \overline{N \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial t}} dx dt = \int_Q A(t) \frac{\partial u}{\partial t} J^{2k-2} \overline{v_\epsilon^*} dx dt + \epsilon \int_Q \frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_\epsilon J^{2k-2} \overline{v_\epsilon^*} dx dt. \quad (2.28)$$

En passant à la limite on voit que l'egalité (2.28) est satisfaite pour toutes les fonctions vérifiant les conditions (2.2)-(2.5) tel que $(1-x) \frac{\partial^{i+1}u}{\partial x^i \partial t} \in L_2(Q)$ pour $0 \leq i \leq \alpha - k + 1$, et $\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left((1-x) \frac{\partial^{\alpha-k+2}u}{\partial x^{\alpha-k+1} \partial t} \right) \in L_2(Q)$ pour $0 \leq i \leq \alpha + k - 1$. Il est clair que l'operateur $A(t)$ possède dans l'espace $L_2(0, 1)$, un inverse continu definit par la relation

$$\begin{aligned} A^{-1}(t)g = & (-1)^{\alpha+k-1} \int_0^x \int_0^{\eta_{\alpha-k}} \dots \int_0^{\eta_1} \frac{1}{a(t)(1-\eta)} \left[\int_0^\eta \int_0^{\xi_{\alpha+k-2}} \dots \int_0^{\xi_1} g(\xi) d\xi d\xi_1 \dots d\xi_{\alpha+k-2} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\alpha} C_i \frac{\eta^{i-1}}{(i-1)!} \right] d\eta d\eta_1 \dots d\eta_{\alpha-k}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

et verifie

$$\int_0^1 x^i A^{-1}(t) g dx = 0 \quad \text{for } 0 \leq i \leq 2k-2 \quad (2.30)$$

Comme la fonction $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_\epsilon$ peut etre représentée sous la forme $\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_\epsilon = J_\epsilon^{-1} A^{-1} A \frac{\partial u}{\partial t}$. Alors,

$\frac{\partial A}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_\epsilon = A_\epsilon(t) A(t) \frac{\partial u}{\partial t}$, où

$$A_\epsilon(t)g = \frac{da}{dt} J_\epsilon^{-1} \frac{1}{a} g \quad (2.31)$$

Ainsi, (2.28) s'écrit sous la forme

$$\int_Q \frac{\partial u}{\partial t} \overline{N \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial t}} dx dt = \int_Q A(t) \frac{\partial u}{\partial t} (J^{2k-2} v_\epsilon^* + \epsilon A_\epsilon^* J^{2k-2} v_\epsilon^*) dx dt, \quad (2.32)$$

où $A_\epsilon^*(t)$ est l'adjoint de l'opérateur $A_\epsilon(t)$.

Il est clair que le membre de gauche de (2.32) est une fonctionnelle linéaire continue en $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Alors la fonction

$h_\epsilon = J^{2k-2} v_\epsilon^* + \epsilon A_\epsilon^* J^{2k-2} v_\epsilon^*$ possède des dérivées $\frac{\partial^i h_\epsilon}{\partial x^i} \in L_2(Q)$, $i = \overline{0, \alpha - k + 1}$,

$\frac{\partial^i}{\partial x^i} \left(\frac{\partial^{\alpha-k+1} h_\epsilon}{\partial x^{\alpha-k+1}} \right) \in L_2(Q)$, $i = \overline{0, \alpha + k - 1}$, et les conditions suivantes sont satisfaites

$$\frac{\partial^i h_\epsilon}{\partial x^i} \Big|_{x=0} = 0, \quad i = \overline{0, \alpha + k - 2}, \quad \frac{\partial^i h_\epsilon}{\partial x^i} \Big|_{x=1} = 0, \quad i = \overline{1, \alpha + k - 1}. \quad (2.33)$$

Les opérateurs $A_\epsilon^*(t)$ sont bornés dans $L_2(Q)$. Pour ϵ suffisamment petit on a

$\|\epsilon A_\epsilon^*(t)\|_{L_2(Q)} < 1$, alors l'opérateur $I + \epsilon A_\epsilon^*(t)$ possède un inverse borné dans l'espace $L_2(Q)$.

De plus $\frac{\partial^i A_\epsilon^*(t)}{\partial x^i}$, $i = \overline{1, \alpha}$ sont des opérateurs bornés dans $L_2(Q)$. D'autre part de l'égalité

$$\frac{\partial^i h_\epsilon}{\partial x^i} = (I + \epsilon A_\epsilon^*(t)) \frac{\partial^i J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^i} + \epsilon \sum_{k=1}^i C_i^k \frac{\partial^k A_\epsilon^*(t)}{\partial x^k} \frac{\partial^{i-k} J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^{i-k}}, \quad i = \overline{0, \alpha}, \quad (2.34)$$

on conclut que la fonction v_ϵ^* possède des dérivées $\frac{\partial^i J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^i} \in L_2(Q)$, $i = \overline{0, \alpha + k - 1}$. En

prenant en compte (2.34), et (2.33), on a

$$\left[(I + \epsilon A_\epsilon^*(t)) \frac{\partial^i J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^i} + \epsilon \sum_{k=1}^i C_i^k \frac{\partial^k A_\epsilon^*(t)}{\partial x^k} \frac{\partial^{i-k} J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^{i-k}} \right]_{x=0} = 0, \quad i = \overline{0, \alpha + k - 2}, \quad (2.35)$$

$$\left[(I + \epsilon A_\epsilon^*(t)) \frac{\partial^i J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^i} + \epsilon \sum_{k=1}^i C_i^k \frac{\partial^k A_\epsilon^*(t)}{\partial x^k} \frac{\partial^{i-k} J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^{i-k}} \right]_{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, \alpha + k - 1}. \quad (2.36)$$

D'une manière similaire, pour ϵ suffisamment petit, en chaque point fixé $x \in [0, 1]$ les opérateurs

$\frac{\partial^i A_\epsilon^*(t)}{\partial x^i}$, $i = \overline{0, \alpha}$ sont bornés dans $L_2(Q)$ et l'opérateur $I + \epsilon A_\epsilon^*(t)$ est continument inversible

dans $L_2(Q)$.

De (2.35) et (2.36) résulte que v_ϵ^* vérifie les conditions suivantes

$$\frac{\partial^i J^{2k-2} v_\epsilon^*}{\partial x^i} \Big|_{x=0} = 0, \quad i = \overline{0, \alpha + k - 2},$$

$$\frac{\partial^i J^{2k-2} v_\varepsilon^*}{\partial x^i} \Big|_{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, \alpha + k - 1}. \quad (2.37)$$

Finalement, pour ε suffisamment petit, la fonction v_ε^* possède les memes propriétés que celles de la fonction h_ε . De plus v_ε^* verifie la condition intégrale dans (2.26).

En remplaçant, $u = \int_0^t \int_0^\tau \exp(c\eta) v_\varepsilon^*(\eta, \tau) d\eta d\tau$ dans (2.27), où la constante c vérifie $ca_0 - a_3 - \frac{a_3^2}{a_0} \geq 0$, et en utilisant (2.25), on obtient

$$\int_Q \exp(ct) v_\varepsilon^* \overline{Nv} dx dt = - \int_Q A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \exp(-ct) J^{2k-2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx dt + \varepsilon \int_Q A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial J^{2k-2} \overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t} dx dt, \quad (2.38)$$

en integrant par parties chaque terme dans le membre gauche de (2.38) et en passant aux parties réelles on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_Q A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \exp(-ct) J^{2k-2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} dx dt &\geq \frac{c}{2} \int_Q a(t) \exp(-ct) (1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha-k+2} u}{\partial x^{\alpha-k+1} \partial t} \right|^2 dx dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_Q \frac{da}{dt} \exp(-ct) (1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha-k+2} u}{\partial x^{\alpha-k+1} \partial t} \right|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\operatorname{Re} \left(-\varepsilon \int_Q A(t) \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial J^{2k-2} \overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t} dx dt \right) \geq \frac{-\varepsilon a_3^2}{2a_0} \int_Q \exp(-ct) (1-x) \left| \frac{\partial^{\alpha-k+2} u}{\partial x^{\alpha-k+1} \partial t} \right|^2 dx dt. \quad (2.40)$$

Maintenant, en utilisant (2.39) et (2.40) dans (2.38) avec le choix de la constante c indiqué en haut on obtient

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \int_Q \exp(ct) v_\varepsilon^* \overline{Nv} dx dt &\leq 0, \text{ alors pour } \varepsilon \longrightarrow 0, \text{ on obtient } 2 \operatorname{Re} \int_Q \exp(ct) v \overline{Nv} dx dt \leq 0, \text{ i.e.,} \\ 2 \operatorname{Re} \int_Q \exp(ct) (1-x) |J^{k-1} v|^2 dx dt &+ 2(\alpha + k - 1) \operatorname{Re} \int_Q \exp(ct) v J^{2k-1} \bar{v} dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

Comme, $\operatorname{Re} \int_Q \exp(ct) v J^{2k-1} \bar{v} dx dt = 0$, on conclut que $J^{k-1} v = 0$, alors $\omega = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Théorème 9 *L'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'opérateur L coïncide avec F .*

Démonstration. Comme F est un espace de Hilbert alors, on a $R(L) = F$ de la relation

$$\int_Q (1-x)^\nu \mathcal{L} u \bar{f} dx dt + \int_0^1 (1-x) \left(\sum_{i=0}^\alpha \frac{\partial^i l_1 u}{\partial x^i} \frac{\partial^i \bar{\varphi}}{\partial x^i} + \frac{\partial^\alpha l_2 u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{\psi}}{\partial x^\alpha} + l_2 u \bar{\psi} \right) dx = 0, \quad (2.41)$$

pour $u \in E$ arbitraire et $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in F$, résulte que $f = 0$, $\varphi = 0$ and $\psi = 0$.

En remplaçant, $u \in D_0(L)$ dans (2.41), on obtient $\int_Q (1-x)^\nu \mathcal{L}u \bar{f} dx dt = 0$. En posant $\omega = \frac{f}{(1-x)^{1-\nu}}$, où $\frac{1}{2} < \nu < 1$ et en utilisant le lemme 8 on obtient $\omega = \frac{f}{(1-x)^{1-\nu}} = 0$, alors $f = 0$.

Ainsi résulte que, $\forall u \in D(L)$ on a

$$\int_0^1 (1-x) \left(\sum_{i=0}^{\alpha} \frac{\partial^i l_1 u}{\partial x^i} \frac{\partial^i \bar{\varphi}}{\partial x^i} + \frac{\partial^\alpha l_2 u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^\alpha \bar{\psi}}{\partial x^\alpha} + l_2 u \bar{\psi} \right) dx = 0 . \quad (2.42)$$

Comme l'image de l'opérateur trace (l_1, l_2) est partout dense dans l'espace de Hilbert munit de la norme

$$\left[\int_0^1 (1-x) \left(\sum_{i=0}^{\alpha} \left| \frac{\partial^i \varphi}{\partial x^i} \right|^2 + \left| \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x^\alpha} \right|^2 + |\psi|^2 \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} ,$$

alors $(\varphi, \psi) = (0, 0)$. ■

Chapitre 3

PROBLEME AUX LIMITES EN TROIS POINTS AVEC CONDITION INTEGRALE POUR UNE EQUATION AUX DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE TROIS EN TEMPS

Dans le présent chapitre on montre l'existence et l'unicité de la solution forte d'un problème aux limites en trois points combinant une condition de Dirichlet avec une condition integrale pour une equation aux dérivées partielles d'ordre trois. La démonstration est basée sur une inégalité de l'énergie et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème étudié.

3.1 Introduction

Dans le rectangle $\Omega=(0, 1) \times (0, T)$, on considère l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t), \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.2)$$

la condition finale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (3.3)$$

la condition de Dirichlet

$$u(0, t) = 0, \quad \forall t \in (0, T), \quad (3.4)$$

et la condition integrale

$$\int_l^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq l < 1, \quad t \in (0, T). \quad (3.5)$$

En plus, on suppose que la fonction $a(x, t)$ et ses dérivées verifient les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a_0 < a(x, t) < a_1 \quad \forall x, t \in \Omega \\ \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right| \leq b \quad \forall x, t \in \Omega \\ c'_k < \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t) < c_k, \quad \forall x, t \in \Omega, \quad k = \overline{1, 3}, \quad \text{with } c'_1 > 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

3.2 Preliminaires

Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte du probleme (3.1)-(3.5). Dans ce but on considère la solution du problème (3.1)-(3.5) comme étant la solution de l'équation opératorielle

$$Lu = \mathcal{F}, \quad (3.7)$$

où l'opérateur L est de domaine de définition $D(L)$ constitué des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial^{k+1}u}{\partial t^k \partial x}(x, t) \in L^2(\Omega)$, $k = \overline{1, 3}$ et vérifiant les conditions (3.4)-(3.5).

L'opérateur L est considéré de E dans F , où E est l'espace de Banach constitué des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, dont la norme suivante est finie

$$\begin{aligned} \|u\|_E^2 = & \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 \right] dxdt + \\ & + \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 \right] dxdt + \int_{\Omega} \Phi(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |u|^2 \right] dxdt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

F est l'espace de Hilbert des fonctions $\mathcal{F} = (f, 0, 0, 0)$, $f \in L^2(\Omega)$, de norme finie

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_{\Omega} \Theta(x) |f(x, t)|^2 dxdt, \quad (3.9)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \begin{cases} (1-l)^2 & 0 < x \leq l, \\ (1-x)^2 & l \leq x < 1. \end{cases} \\ \Phi(x) &= \begin{cases} 0 & 0 < x < l, \\ 1 & l \leq x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

3.3 Inégalité de l'énergie et ses conséquences

Théorème 10 *Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'estimation à priori*

$$\|u\|_E \leq k \|Lu\|_F, \text{ pour } u \in D(L). \quad (3.10)$$

où $k^2 = \frac{40 \exp(cT)}{k_1}$ avec $k_1 = \inf \left\{ \frac{1}{4}, \frac{c'_3 - 3cc'_1 + 3c^2c'_1 - c^3a_1 - b^2}{2}, \frac{a_0^2}{2}, \frac{3}{2}(ca_0 - c_1) \right\}$.

La constante c satisfait

$$\begin{cases} \sup_{(x,t) \in \Omega} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) < c < \inf_{(x,t) \in \Omega} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + 1 \right) \\ c'_3 - 3cc'_1 + 3c^2c'_1 - c^3a_1 - b^2 > 0 \\ c'_2 - 2cc'_1 + c^2a_1^2 + ca_0 - c_1 > 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Démonstration. Soit

$$Mu = \begin{cases} (1-l)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} & 0 < x < l \\ (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 2(1-x)J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} & l < x < 1, \end{cases} \quad (3.12)$$

où $J_x u = \int_l^x u(x, t) dx$.

Considérons la forme quadratique obtenue en multipliant l'équation (3.1) par $\exp(-ct)\overline{Mu}$, où la constante c vérifie (3.11), en intégrant sur $\Omega = [0,1] \times [0,T]$ et en prenant la partie réelle

$$\Phi(u, u) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(-ct) \mathcal{L}u(x, t) \overline{Mu} dx dt, \quad (3.13)$$

En substituant l'expression de Mu dans (3.13), et en faisant une intégration par rapport à x en tenant en compte la condition de Dirichlet on obtient

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(-ct) \mathcal{L}u(x, t) \overline{Mu} dx dt = \\ & \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \overline{Mu} dx dt + \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{Mu} dx dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

De l'expression de Mu on a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \overline{Mu} dx dt = \\ & \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 (1-x) \exp(-ct) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \overline{J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt, \end{aligned}$$

En faisant une intégration en x , en tenant en compte la condition intégrale, on obtient

$$\operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \overline{Mu} dx dy = \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt + \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left| J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt.$$

De même pour le second terme du second membre de (3.14) on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{Mu} dx dt = \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^l (1-l)^2 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt \\ & + \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 (1-l)^2 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt \end{aligned}$$

$$+2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 (1-x) \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt, \quad (3.15)$$

En faisant une intégration en x dans chaque terme de (3.15), en tenant en compte la condition de Dirichlet et la condition intégrale on obtient

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^l (1-l)^2 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dx dt = \\ & \operatorname{Re} \int_0^T (1-l)^2 \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dt \Big|_{x=l} - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^l (1-l)^2 \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} dx dt. \\ & \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 (1-l)^2 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dx dt = \\ & - \operatorname{Re} \int_0^T (1-l)^2 \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dt \Big|_{x=l} - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^l (1-x)^2 \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} dx dt \\ & + 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 (1-x) \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dx dt. \\ & 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 (1-x) \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt = -2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 (1-x) \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} dx dt \\ & - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial x} u J_x \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) a u \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt. \end{aligned}$$

En substituant ces termes dans (3.16) on a

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{M u} dx dt = - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} dx dt \\ & - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) a(x, t) u \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial x} J_x \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dx dt. \quad (3.16) \end{aligned}$$

En intégrant selon x et t dans le second membre de droite de (3.16) en utilisant les conditions (1-5) on aura

$$\begin{aligned} & - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} dx dt = - \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) a(x, t) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} - \operatorname{Re} \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left(\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right) \frac{\partial u}{\partial x} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}} dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) a \frac{\partial u}{\partial x} \overline{\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3}} dx dt = -\frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 \frac{\Phi(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] |u|^2 dx dt \\
& + \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) a(x, t) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} - \operatorname{Re} \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left(\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right) \frac{\partial u}{\partial x} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}} dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_0^1 \frac{\Phi(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

En substituant (3.17), (3.18) dans (3.16) et en utilisant l' ϵ -inégalité on obtient

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 \exp(-ct) \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{M u} dx dt \geq -\frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 \frac{\Phi(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a - \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 \right] |u|^2 dx dt \\
& - \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
& + \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left(a - \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& + \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left(a - \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_0^1 \frac{\Phi(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] |u|^2 dx \Big|_{t=T}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Une combinaison de (3.19) et (3.14) donne

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt - \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
& + \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left| J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt + \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] |u|^2 dx dt \\
& - \frac{3}{2} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt + \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[a - \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& + \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left[a - \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] |u|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& \leq 17 \int_0^T \int_l^1 \Theta(x) \exp(-ct) |f|^2 dx dt. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

D'autre part de l'équation (3.1), on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Theta(x) a^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dx dt \leq 2 \int_{\Omega} \Theta(x) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt \\
& + 2 \int_{\Omega} \Theta(x) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt + 4 \int_{\Omega} \Theta(x) |f|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

En Combinant cette dernière inégalité avec l'inégalité (3.20) et en utilisant les conditions (3.11)

on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 \right] dx dt + \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 \right] dx dt \\
& + \int_{\Omega} \Phi(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |u|^2 \right] dx dt \leq k \int_{\Omega} \Theta(x) |f(x, t)|^2 dx dt
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. ■

D'une manière standard on peut montrer facilement que l'opérateur $L : E \rightarrow F$ est fermé. Désignons par $\bar{L}$ sa fermeture de domaine of définition $D(\bar{L})$.

Définition 4 La solution de l'équation operatorielle $\bar{L}u = \mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (3.1)-(3.5).

Comme les points du graphe de l'opérateur $\bar{L}$ sont limites des suites de points du graphe de l'opérateur L , on peut prolonger l'inégalité (3.10) en passant à la limite, soit

$$\|u\|_E \leq c \|\bar{L}u\|_F, \quad \forall u \in D(\bar{L}).$$

Cette dernière inégalité entraîne les corollaires suivants :

Corollaire 4 La solution forte du problème (3.1)-(3.5) est unique si elle existe et dépend continuellement du second membre $\mathcal{F}$.

Corollaire 5 L'ensemble des valeurs $R(\bar{L})$ de l'opérateur $\bar{L}$ est égal à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.

Du corollaire 5 résulte que pour montrer que le problème (3.1)-(3.5) admet une solution forte pour tout second membre arbitraire $\mathcal{F}$, il est suffisant de montrer que l'ensemble $R(L)$ est dense dans F .

3.4 Résolubilité du problème (3.1)-(3.5)

Pour montrer l'existence de la solution du problème (3.1)-(3.5) il est suffisant de montrer que $R(L)$ est dense dans F . La démonstration est basée sur le lemme suivant :

Lemme 9 Supposons que la fonction $a(x, t)$ et ses dérivées sont bornées. Soit $u \in D_0(L) = \left\{ u \in D(L), u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, T) = 0 \right\}$. Si pour $u \in D_0(L)$ et une certaine fonction $w(x, t) \in L^2(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} h(x) \mathcal{L}u \bar{w} dx dt = 0, \tag{3.21}$$

où

$$h(x) = \begin{cases} 1-l & 0 < x < l, \\ 1-x & l < x < 1. \end{cases}$$

talors $w = 0$.

Démonstration. Il est clair que l'égalité (3.21) peut être écrite sous la forme :

$$\int_{\Omega} h(x) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \bar{w} dx dt = \int_{\Omega} A(t) u \bar{v} dx dt, \quad (3.22)$$

pour $w(x, t)$ donné, où

$$\begin{aligned} v &= \begin{cases} (1-l)w & 0 < x < l, \\ w - \int_l^x \frac{w}{1-\zeta} d\zeta & l < x < 1. \end{cases} \\ A(t)u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x)a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ Nv &= \begin{cases} (1-l)v & 0 < x < l, \\ (1-x)v + J_x v & l < x < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

pour $v = w - \int_l^x \frac{w}{1-\zeta} d\zeta$, $l < x < 1$ on déduit que $\int_l^x v(\zeta, t) d\zeta = (1-x) \int_l^x \frac{w}{1-\zeta} d\zeta$, alors $\int_l^1 v(\zeta, t) d\zeta = 0$.

En suivant [49], introduisons les t -opérateurs de régularisation, $(J_{\epsilon}^{-1}) = \left(I - \epsilon \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right)^{-1}$ et $(J_{\epsilon}^{-1})^* = \left(I + \epsilon \frac{\partial^3}{\partial t^3} \right)^{-1}$ qui donnent en réalité les solutions des problèmes respectifs :

$$\begin{cases} u_{\epsilon} - \epsilon \frac{\partial^3 u_{\epsilon}}{\partial t^3} = u \\ u_{\epsilon}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u_{\epsilon}}{\partial t^2}(x, T) = 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} v_{\epsilon}^* + \epsilon \frac{\partial^3 v_{\epsilon}^*}{\partial t^3} = v \\ v_{\epsilon}^*(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v_{\epsilon}^*}{\partial t}(x, T) = 0, \quad \frac{\partial^2 v_{\epsilon}^*}{\partial t^2}(x, T) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Et possèdent aussi les propriétés suivantes : Pour tout $u \in L^2(0, T)$, les fonctions $J_{\epsilon}^{-1}u \in W_2^3(0, T)$, $(J_{\epsilon}^{-1})^* u \in W_2^3(0, T)$. Si $u \in D(L)$, $J_{\epsilon}^{-1}u \in D(L)$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|J_{\epsilon}^{-1}u - u\|_{L^2(0, T)} = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(J_\epsilon^{-1})^* u - u\|_{L^2(0,T)} = 0$$

En remplaçant la fonction u dans (3.22) par sa régularisée et en utilisant la relation

$$A(t)u_\epsilon = J_\epsilon^{-1} A(t)u + \epsilon J_\epsilon^{-1} B_\epsilon(t)u,$$

où

$$B_\epsilon(t) = \frac{3\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial A(t)}{\partial t} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} \right) + \frac{\partial^3 A(t)}{\partial t^3} u_\epsilon$$

On obtient

$$\int_{\Omega} u N \overline{\frac{\partial^3 v_\epsilon^*}{\partial t^3}} dx dt = \int_{\Omega} A(t) u \overline{v_\epsilon^*} dx dt - \epsilon \int_{\Omega} B_\epsilon(t) u \overline{v_\epsilon^*} dx dt. \quad (3.26)$$

L'opérateur $A(t)$ possède inverse continu défini dans $L^2(0,1)$ par

$$A^{-1}(t)g = \begin{cases} -\frac{1}{1-l} \int_0^x \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} \int_0^\zeta g(\eta) d\eta + \frac{C_1(t)}{1-l} \int_0^x \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} & 0 < x < l \\ \int_l^x \frac{-d\zeta}{(1-\zeta)a(\zeta,t)} \int_l^\zeta g(\eta) d\eta + C_2(t) \int_l^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)a(\zeta,t)} + u(l) & l < x < 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

où

$$C_1(t) = \frac{(1-l)u(l) + \int_0^l \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} \int_0^\zeta g(\eta) d\eta}{\int_0^l \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)}}, \quad (3.28)$$

$$C_2(t) = \frac{-(1-l)u(l) + \int_l^1 \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} \int_l^\zeta g(\eta) d\eta}{\int_l^1 \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)}}. \quad (3.29)$$

Alors on a

$$\int_l^1 A^{-1}(t)u = 0$$

comme la fonction $J_\epsilon^{-1}u = u_\epsilon$ peut être représenté sous la forme

$$u_\epsilon = J_\epsilon^{-1} A^{-1}(t) A(t) u. \quad (3.30)$$

L'opérateur adjoint de $B_\epsilon(t)$ s'écrit

$$B_\epsilon^*(t)v = \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} v + \frac{3}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - G_\epsilon(v)(x) + \frac{\int_0^x \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)}}{\int_0^1 \frac{d\zeta}{a(\zeta,t)}} G_\epsilon(v)(1), \quad (3.31)$$

où

$$G_\epsilon(v)(x) = \int_0^x \left[\frac{3}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial \zeta} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{3}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \zeta} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 a}{\partial t^3 \partial \zeta} v \right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \zeta} (J_\epsilon^{-1})^* \left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} v \right) \right] d\zeta. \quad (3.32)$$

Finalement, l'égalité (3.26) s'écrit

$$\int_\Omega u N \overline{\frac{\partial^3 v_\epsilon^*}{\partial t^3}} dx dt = \int_\Omega A(t) u \overline{h_\epsilon} dx dt, \quad (3.33)$$

où $h_\epsilon = v_\epsilon^* - \epsilon B_\epsilon^*(t) v_\epsilon^*$.

Comme le membre de gauche de (3.33) est une fonctionnelle lineaire continu en u , alors la fonction h_ϵ possédent des dérivées partielles en x , telles que :

$$\frac{\partial h_\epsilon}{\partial x}, (1-x) \frac{\partial h_\epsilon}{\partial x} \in L^2(\Omega)$$

et verifie la condition $h_\epsilon(0, t) = 0$.

De l'égalité

$$(1-x) \frac{\partial h_\epsilon}{\partial x} = \left[I - \epsilon \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right) \right] (1-x) \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x} - 3\epsilon \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (1-x) \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x} \right),$$

vu le faite que l'opérateur $(J_\epsilon^{-1})^*$ est borné dans $L^2(\Omega)$, pour ϵ suffisement petit, on a

$$\left\| \epsilon \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right) \right\| < 1$$

Comme, l'opérateur $I - \epsilon \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right)$ possède un inverse borné dans $L^2(\Omega)$. On conclut que $(1-x) \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x} \in L^2(\Omega)$. D'une manière similaire, on montre que $\frac{\partial}{\partial x} \left((1-x) \frac{\partial v_\epsilon^*}{\partial x} \right)$ existe et appartient à $L^2(\Omega)$, et les condition suivante est satisfaite $v_\epsilon^*(0, t) = 0$.

En remplaçant $u = \int_0^t \int_0^\zeta \int_\eta^T \exp(c\tau) v_\epsilon^* d\tau d\eta d\zeta$, dans (3.22), où la constante c vérifie (3.11) aEn utilisant les propriétés des operateurs de régularisation, on obtient

$$\int_\Omega \exp(ct) v_\epsilon^* \overline{N v} dx dt = - \int_\Omega A(t) u \overline{v_\epsilon^*} dx dt - \epsilon \int_\Omega A(t) u \overline{\frac{\partial^3 v_\epsilon^*}{\partial t^3}} dx dt, \quad (3.34)$$

par un calcul simple on a

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \operatorname{Re} \int_{\Omega} A(t) u \overline{\frac{\partial^3 v_{\varepsilon}^*}{\partial t^3}} dx dt = \\
& 3 \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx dt - 3 \operatorname{Re} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right] \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}} dx dt \\
& + 3 \int_0^1 \frac{h(x)}{2} \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial t} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} + 3 \int_0^1 \frac{h(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - c \frac{\partial a}{\partial t} \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) a \left| \frac{\partial^3 v_{\varepsilon}^*}{\partial t^3} \right|^2 dx dt - \operatorname{Re} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}} dx dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \operatorname{Re} \int_{\Omega} A(t) u \overline{\frac{\partial^3 v_{\varepsilon}^*}{\partial t^3}} dx dt & \leq \varepsilon \left\{ 3 \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right| \right] \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx dt \right. \\
& + \frac{3}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - c \frac{\partial a}{\partial t} + \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right| \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx dt \\
& - \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) a \left| \frac{\partial^3 v_{\varepsilon}^*}{\partial t^3} \right|^2 dx dt + \frac{3}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
& \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right| \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} \right|^2 dx dt \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial t} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx dt \right\} \quad (3.35)
\end{aligned}$$

En intégrant le premier terme du membre droit de (3.34) par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \operatorname{Re} \int_{\Omega} A(t) u \overline{v_{\varepsilon}^*} dx dt & = \frac{3}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx dt \\
& - \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c^2 \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right\} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
& - \int_0^1 \frac{1}{2} h(x) \exp(-ct) a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} + \int_0^1 \frac{1}{2} h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a \right\} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& - \operatorname{Re} \int_0^1 h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right\} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx \Big|_{t=T}
\end{aligned}$$

Cette dernière égalité donne

$$-\varepsilon \operatorname{Re} \int_{\Omega} A(t) u \overline{v_{\varepsilon}^*} dx dt \leq - \int_0^1 h(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial a}{\partial t} + a - ca \right| \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T}$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{2} h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + ca - \frac{\partial a}{\partial t} \right\} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \quad (3.36)$$

Finalement en utilisant les conditions (3.11), l'inégalité (3.35) et (3.36), on obtient

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct) v_{\epsilon}^* \overline{Nv} dx dt \leq 0 \text{ pour } \epsilon \rightarrow 0$$

D'où

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct) (v_{\epsilon}^* - v) \overline{Nv} dx dt + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct) v \overline{Nv} dx dt \leq 0$$

ainsi

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \exp(-ct) (1-l) |v|^2 dx dt + \int_0^T \int_l^1 \int_0^l \exp(-ct) (1-x) |v|^2 dx dt + \\ & \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) |J_x v|^2 dx dt + \int_0^T \int_0^l \frac{1-l}{2l} \exp(-ct) |J_x v|^2 dx dt \leq 0. \end{aligned}$$

Alors $v = 0$.

Finalement de (3.23), on tire que $w = 0$. ■

Théorème 11 *L'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de $\overline{L}$ coïncide avec F .*

Démonstration. Comme F est un espace de Hilbert alors $R(\overline{L}) = F$ si et seulement si de la relation

$$\int_{\Omega} \Theta(x) f \overline{g} dx dt = 0. \quad (3.37)$$

Pour $u \in D_0(L)$ arbitraire et $\mathcal{F} = (f, 0, 0, 0) \in F$ implique $f = 0$.

En prenant en compte dans (3.37) $u \in D_0(L)$ et en utilisant le lemme 9, on obtient

$$w = \begin{cases} (1-l)g & 0 < x < l \\ (1-x)g & l < x < 1, \end{cases}$$

alors $g = 0$. Ce qui achève la démonstration. ■

Bibliography

- [1] Allegretto W., Lin Y. and Zhou A. : *A box scheme for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems*, Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems, **5** (1999), 1-4, 573-578.
- [2] Batten G. W. Jr., *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations*, Math. Comp., **17** (1963), 405-413.
- [3] Beilin A. B., *Existence of solutions for one-dimensional wave equation with a nonlocal condition*, Electron. J. Diff. Equa., Vol. **2001** (2001), no. 76, 1-8.
- [4] Benouar N. E., Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Differ. Equ., **27** (1991), 12, 1482-1487.
- [5] Bouziani A., Benouar N. E., *Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation*, Kobe J. Math., **15** (1998), 47-58.
- [6] Cahlon B., Kulkarni D. M. and Shi P., *Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint*, SIAM J. Numer. Anal., **32** (1995), 2, 571-593.
- [7] Cannon J. R., *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., **21** (1963), 155-160.
- [8] Cannon J. R., *The One-dimensional heat equation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 23, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, (1984).

- [9] Choi Y. S., Chan K. Y., *A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry*, Nonlinear Anal., **18** (1992), 317-331.
- [10] Chouiter, F., *Problemes mixtes avec conditions aux limites du type non classique*.
- [11] Day W. A., *A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity*, Quart. Appl. Math. **40** (1982), 4, 468-475.
- [12] Day W. A., *Extensions of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories*, Quart. Appl. Math. **41** (1983), 3, 319-330.
- [13] Denche M., Marhoune A. L., *High order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions*, Electron. J. Differential. Equations **2000** (2000), no. 60, 1-10.
- [14] Denche M., Marhoune A. L., *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third order partial differential equation of mixed type*, Int. J. Math. Math. Sci., **26** (2001), 7, 417-426.
- [15] Denche M., Marhoune A. L., *Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, **16** (2003), 1, 69-79.
- [16] Denche, M., Marhoune, A. L., *A Three-point Boundary Value Problem with an Integral condition for Parabolic Equation with the Bessel operator*, Appl. Math. Lett. **13** (2000), no. 6, 85-89.
- [17] Denche, M.; Memou, A. *Boundary value problem with integral conditions for a linear third-order equation*. J. Appl. Math. (2003), no. 11, 553-567.
- [18] Dezin, A. A., *Theoremes d'existence et d'unicite de la solution pour les problemes aux limites des equations aux derivees partielles dans les espaces fonctionnels*. Usp. Math. Naouk, T. **14** (1987), no3, 22-73.

- [19] Fairweather G., Salor R. D., *The reformulation and numerical solution of certain non-classical initial-boundary value problems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., **12** (1991), 1, 127-144.
- [20] Friderichs, k., *Symetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math. **7** (1954), no 2, 345-392.
- [21] Garding, L., *Cauchy's problem for hyperbolic equations* University of Chicago, Lecture notes, 1957.
- [22] Ionkin N. I., *The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclasical boundary condition*, Differ. Uravn., **13** (1977), no 2, 294-304 (Russian).
- [23] Kamynin N. I., *A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary conditions*, U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., **4** (1964), 33-59.
- [24] Kartynnik A. V., *A three-point boundary-value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equations*, Differ. Equ., **26** (1990), 9, 1160-1166.
- [25] Ladyzhenskaya, O. A., *Mixed problem for hyperbolic equations*. Edition Mir nauka, 1974.
- [26] Latrous C., *Mixed problem with integral boundary conditions for a third order partial differential equation*, Tr. Inst. Mat., Minsk, 2004, 6, 115-119.
- [27] Latrous, C.; Memou, A., *A three-point boundary value problem with an integral condition for a third-order partial differential equation*, Abstract and Applied Analysis, **1** (2005), 33-44.
- [28] Leray, J., *Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients*. Princeton, Just for adv. Study, 1952.

- [29] Petrovsky, I. G., *Über das Cauchy'sche Problem für Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen in Gebieten der nichtanalytischen Funktionen*, bull. Univ. d'état, Moscow, 1938, no 7, 1-74.
- [30] Pulkina L. S., *A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electron. J. Differential Equations, **1999** (1999), no. 45, 1-6.
- [31] Pulkina, L. S., *A nonlocal problem for a loaded hyperbolic equation*. (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova **236** (2002), Differ. Uravn. i Din. Sist., 298-303; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2002, no. 1 (236), 285-290.
- [32] Pulkina, L. S., *A nonlocal problem for the hyperbolic equation*. J. Nat. Geom. **22** (2002), no. 1-2, 81-90.
- [33] Pulkina, L. S. *A mixed problem with an integral condition for a hyperbolic equation*. (Russian) Mat. Zametki **74** (2003), no. 3, 435-445; translation in Math. Notes **74** (2003), no. 3-4, 411-421.
- [34] Pulkina, L. S., *A nonlocal problem with Integral Conditions for a hyperbolic equation*. Differential Equations, **40** (2004), no. 7, 887-892.
- [35] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., *Problèmes aux limites pour équations différentielles d'ordre impair dans le rectangle*. Izvestia Akad. Nauk BSSR, Serie phys. Math. Nauk, 1985, no 3 .
- [36] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., *Problèmes aux limites pour certaines équations différentielles opérationnelles dans le rectangle*. Doklady acad. Nauk. BSSR, T. **30**, no 12, 1061-1063.
- [37] Renardy M., Hrusa W. J. and Nohel J. A., *Mathematical problems in viscoelasticity*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, V. **35**, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.
- [38] Samarski A. A., *Some problems in the modern theory of differential equations*, Differ. Uravn., **16** (1980), 1221-1228 (Russian).

- [39] Shi, P., Shillor, M., *On Design of contact patterns in one dimensional thermoelasticity*, Theoretical Aspects of Industrial Design (Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1990), SIAM, Pennsylvania, 1992, pp. 76-82.
- [40] Shi P., *Weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), no 1, 46-58.
- [41] Volkodavov V. F., Zhukov V. E., *Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic*, Differ. Equ., **34** (1998), 4, 501-505.
- [42] Yurchuk, N. I., *Boundary value problems for equations whose principal part contains operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m+1}}\right) + A$* , Diff. Equa. **10** (1974), no 4, 589-592.
- [43] Yurchuk, N. I., *Boundary value problems for equations involving operators of the form $\left(\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}\right) + A$* , Diff. Equa. **10** (1974), no 5, 735-737.
- [44] Yurchuk, N. I., *A priori estimates of solutions of boundary value problems for certain differential equations*, Diff. Equa. **12**(1976), no 4, 512-518.
- [45] Yurchuk, N. I., *Boundary value problems for differential equations with operator valued coefficients depending on parameter*, Diff. Equa. **12** (1976), no 9, 1157-1168.
- [46] Yurchuk, N. I., *Solvability of boundary value problems for certain differential operational equations*, Diff. Equa. **13**, N° 4 (1977), pp. 423-429.
- [47] Yurchuk, N. I., *the energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equation*, Diff. Equa. **14**(1978), no 12, 1558-1567.
- [48] Yurchuk, N.I., *Mixed problem for parabolic equation of variable order*, Soviet. Math. Dokl., **26**, N° 12 (1982), pp. 39-41.
- [49] Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differ. Equ., **22** (1986), 1457-1463.

A THREE-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INTEGRAL CONDITION FOR A THIRD-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

C. LATROUS AND A. MEMOU

Received 9 February 2004

We prove the existence and uniqueness of a strong solution for a linear third-order equation with integral boundary conditions. The proof uses energy inequalities and the density of the range of the operator generated.

1. Introduction

In the rectangle $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$, we consider the equation

$$f(x, t) = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.1)$$

with the initial conditions

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1.2)$$

the final condition

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, T) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (1.3)$$

the Dirichlet condition

$$u(0, t) = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad (1.4)$$

and the integral condition

$$\int_l^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 \leq l < 1, \quad t \in (0, T). \quad (1.5)$$

34 Three-point boundary value problem

In addition, we assume that the function $a(x, t)$ and its derivatives satisfy the conditions

$$\begin{aligned} 0 < a_0 < a(x, t) < a_1 \quad \forall x, t \in \Omega, \\ \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right| &\leq b \quad \forall x, t \in \Omega, \\ c'_k < \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t) < c_k \quad \forall x, t \in \Omega, k = \overline{1, 3}, \text{ with } c'_1 > 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Over the last few years, many physical phenomena were formulated into nonlocal mathematical models with integral boundary conditions [1, 9, 10, 11]. The reader should refer to [13, 14] and the references therein. The importance of these kinds of problems has also been pointed out by Samarskii [22]. This type of boundary value problems has been investigated in [2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 18, 19, 20, 23, 25] for parabolic equations, in [21, 24] for hyperbolic equations, and in [15, 16, 17] for mixed-type equations. The basic tool in [5, 15, 16, 17, 20, 25] is the energy inequality method which, of course, requires appropriate multipliers and functional spaces. In this paper, we extend this method to the study of a linear third-order partial differential equation.

2. Preliminaries

In this paper, we prove the existence and uniqueness of a strong solution of the problem (1.1)–(1.5). For this, we consider the solution of problem (1.1)–(1.5) as a solution of the operator equation

$$Lu = \mathcal{F}, \quad (2.1)$$

where the operator L has domain of definition $D(L)$ consisting of functions $u \in L^2(\Omega)$ such that $(\partial^{k+1}u/\partial t^k \partial x)(x, t) \in L^2(\Omega)$, $k = \overline{1, 3}$ and satisfying the conditions (1.4)–(1.5).

The operator L is considered from E to F , where E is the Banach space consisting of function $u \in L^2(\Omega)$, with the finite norm

$$\begin{aligned} \|u\|_E^2 &= \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 \right] dx dt \\ &+ \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 \right] dx dt \\ &+ \int_{\Omega} \Phi(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |u|^2 \right] dx dt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

F is the Hilbert space of functions $\mathcal{F} = (f, 0, 0, 0)$, $f \in L^2(\Omega)$, with the finite norm

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_{\Omega} \Theta(x) |f(x, t)|^2 dx dt, \quad (2.3)$$

where

$$\begin{aligned}\Theta(x) &= \begin{cases} (1-l)^2, & 0 < x \leq l, \\ (1-x)^2, & l \leq x < 1, \end{cases} \\ \Phi(x) &= \begin{cases} 0, & 0 < x < l, \\ 1, & l \leq x < 1. \end{cases}\end{aligned}\quad (2.4)$$

3. An energy inequality and its application

THEOREM 3.1. *For any function $u \in D(L)$, the a priori estimate*

$$\|u\|_E \leq k \|Lu\|_F \quad \text{for } u \in D(L), \quad (3.1)$$

where $k^2 = 40 \exp(cT)/k_1$ with $k_1 = \inf \{1/4, (c'_3 - 3cc'_1 + 3c^2c'_1 - c^3a_1 - b^2)/2, a_0^2/2, (3/2)(ca_0 - c_1)\}$. The constant c satisfies

$$\begin{aligned}\sup_{(x,t) \in \Omega} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \right) &< c < \inf_{(x,t) \in \Omega} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} + 1 \right), \\ c'_3 - 3cc'_1 + 3c^2c'_1 - c^3a_1 - b^2 &> 0, \\ c'_2 - 2cc'_1 + c^2a_1^2 + ca_0 - c_1 &> 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Proof. Let

$$Mu = \begin{cases} (1-l)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, & 0 < x < l, \\ (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 2(1-x)J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, & l < x < 1, \end{cases}\quad (3.3)$$

where $J_x u = \int_l^x u(x, t) dx$.

We consider the quadratic form obtained by multiplying (1.1) by $\exp(-ct)\overline{Mu}$, with the constant c satisfying (3.2), integrating over $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$, and taking the real part:

$$\Phi(u, u) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(-ct) f(x, t) \overline{Mu} dx dt. \quad (3.4)$$

36 Three-point boundary value problem

By substituting the expression of Mu in (3.4), integrating with respect to x , and using the Dirichlet and integral conditions, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(-ct) f(x, t) \overline{Mu} dx dt \\
 &= \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt \\
 &\quad - \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left| J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt \\
 &\quad - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) a(x, t) u \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial t^3} dx dt \\
 &\quad + \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) a(x, t) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
 &\quad - \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left(\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x \partial t} dx \Big|_{t=T} \\
 &\quad - \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
 &\quad - 2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial x} u J_x \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial t^3} dx dt.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Integrating by parts $-2 \operatorname{Re} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) a(x, t) u \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial t^3} dx dt$ with respect to t , and using the initial conditions, the final conditions, and the elementary inequalities, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt \\
 &\quad - \frac{3}{2} \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left| J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right] |u|^2 dx dt \\
 &\quad - \frac{3}{2} \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[a - \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \frac{\Theta(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& + \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left[a - \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& - \int_0^1 \Phi(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + \left| \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right| \right] |u|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& \leq 17 \int_0^T \int_0^1 \Theta(x) \exp(-ct) |f|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

From (1.1), we get

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Theta(x) a^2 \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 dx dt \\
& \leq 2 \int_{\Omega} \Theta(x) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dx dt + 2 \int_{\Omega} \Theta(x) \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
& \quad + 4 \int_{\Omega} \Theta(x) |f|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Combining this last inequality with (3.6) and using the conditions (3.2) yield

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|^2 \right] dx dt \\
& + \int_{\Omega} \Theta(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 \right] dx dt + \int_{\Omega} \Phi(x) \left[\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + |u|^2 \right] dx dt \\
& \leq k \int_{\Omega} \Theta(x) |f(x, t)|^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

which is the desired inequality. $\square$

It can be proved in a standard way that the operator $L : E \rightarrow F$ is closable. Let $\bar{L}$ be the closure of this operator, with the domain of definition $D(\bar{L})$.

Definition 3.2. A solution of the operator equation $\bar{L}u = \mathcal{F}$ is called a strong solution of problem (1.1)–(1.5).

The a priori estimate (3.1) can be extended to strong solutions, that is, we have the estimate

$$\|u\|_E \leq c \|\bar{L}u\|_F \quad \forall u \in D(\bar{L}). \tag{3.9}$$

This last inequality implies the following corollaries.

COROLLARY 3.3. A strong solution of (1.1)–(1.5) is unique and depends continuously on $\mathcal{F}$.

COROLLARY 3.4. The range $R(\bar{L})$ of $\bar{L}$ is closed in F and $\overline{R(\bar{L})} = R(\bar{L})$.

Corollary 3.4 shows that to prove that problem (1.1)–(1.5) has a strong solution for arbitrary $\mathcal{F}$, it suffices to prove that set $R(L)$ is dense in F .

4. Solvability of problem (1.1)–(1.5)

To prove the solvability of problem (1.1)–(1.5) it is sufficient to show that $R(L)$ is dense in F . The proof is based on the following lemma.

LEMMA 4.1. *Suppose that the function $a(x, t)$ and its derivatives are bounded. Let $u \in D_0(L) = \{u \in D(L), u(x, 0) = 0, (\partial u / \partial t)(x, 0) = 0, (\partial^2 u / \partial t^2)(x, T) = 0\}$. If for $u \in D_0(L)$ and some functions $w(x, t) \in L^2(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} h(x) f \bar{w} dx dt = 0, \quad (4.1)$$

where

$$h(x) = \begin{cases} 1 - l, & 0 < x < l, \\ 1 - x, & l < x < 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

holds, for arbitrary $u \in D_0(L)$, and then $w = 0$.

Proof. The equality (4.1) can be written as follows:

$$\int_{\Omega} h(x) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \bar{w} dx dt = \int_{\Omega} A(t) u \bar{v} dx dt, \quad (4.3)$$

for a given $w(x, t)$, where

$$\begin{aligned} v &= \begin{cases} (1 - l)w, & 0 < x < l, \\ w - \int_l^x \frac{w}{1 - \zeta} d\zeta, & l < x < 1, \end{cases} \\ A(t)u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x) a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ Nv &= \begin{cases} (1 - l)v, & 0 < x < l, \\ (1 - x)v + J_x v, & l < x < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

For $v = w - \int_l^x (w/(1 - \zeta)) d\zeta$, $l < x < 1$ we deduce $\int_l^x v(\zeta, t) d\zeta = (1 - x) \int_l^x (w/(1 - \zeta)) d\zeta$, then $\int_l^1 v(\zeta, t) d\zeta = 0$.

Following [25], we introduce the smoothing operators with respect to t , $(J_{\epsilon}^{-1}) = (I - \epsilon(\partial^3/\partial t^3))^{-1}$, and $(J_{\epsilon}^{-1})^* = (I + \epsilon(\partial^3/\partial t^3))^{-1}$ which provide the solution of the respective problems:

$$\begin{aligned} u_{\epsilon} - \epsilon \frac{\partial^3 u_{\epsilon}}{\partial t^3} &= u, & u_{\epsilon}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial t}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial^2 u_{\epsilon}}{\partial t^2}(x, T) &= 0, \\ v_{\epsilon}^* + \epsilon \frac{\partial^3 v_{\epsilon}^*}{\partial t^3} &= v, & v_{\epsilon}^*(x, 0) &= 0, & \frac{\partial v_{\epsilon}^*}{\partial t}(x, T) &= 0, & \frac{\partial^2 v_{\epsilon}^*}{\partial t^2}(x, T) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

And also, we have the following properties: for any $u \in L^2(0, T)$, the function $J_\epsilon^{-1}u \in W_2^3(0, T)$, $(J_\epsilon^{-1})^*u \in W_2^3(0, T)$. If $u \in D(L)$, $J_\epsilon^{-1}u \in D(L)$.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|J_\epsilon^{-1}u - u\|_{L^2(0, T)} = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(J_\epsilon^{-1})^*u - u\|_{L^2(0, T)} = 0. \quad (4.6)$$

Substituting the function u in (4.3) by the smoothing function u_ϵ and using the relation $A(t)u_\epsilon = J_\epsilon^{-1}A(t)u + \epsilon J_\epsilon^{-1}B_\epsilon(t)u$, where $B_\epsilon(t) = (3\partial/\partial t)((\partial A(t)/\partial t)(\partial u_\epsilon/\partial t)) + (\partial^3 A(t)/\partial t^3)u_\epsilon$, we obtain

$$\int_{\Omega} u N \frac{\partial^3 v_\epsilon^*}{\partial t^3} dx dt = \int_{\Omega} A(t) u \overline{v_\epsilon^*} dx dt - \epsilon \int_{\Omega} B_\epsilon(t) u \overline{v_\epsilon^*} dx dt. \quad (4.7)$$

The operator $A(t)$ has a continuous inverse in $L^2(0, 1)$ defined by

$$A^{-1}(t)g = \begin{cases} -\frac{1}{1-l} \int_0^x \frac{d\zeta}{a(\zeta, t)} \int_0^\zeta g(\eta) d\eta + \frac{C_1(t)}{1-l} \int_0^x \frac{d\zeta}{a(\zeta, t)}, & 0 < x < l, \\ \int_l^x \frac{-d\zeta}{(1-\zeta)a(\zeta, t)} \int_l^\zeta g(\eta) d\eta + C_2(t) \int_l^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)a(\zeta, t)} + u(l), & l < x < 1, \end{cases} \quad (4.8)$$

where

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{(1-l)u(l) + \int_0^l (d\zeta/a(\zeta, t)) \int_0^\zeta g(\eta) d\eta}{\int_0^l (d\zeta/a(\zeta, t))}, \\ C_2(t) &= \frac{-(1-l)u(l) + \int_l^1 (d\zeta/a(\zeta, t)) \int_l^\zeta g(\eta) d\eta}{\int_l^1 (d\zeta/a(\zeta, t))}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Then we have $\int_l^1 A^{-1}(t)u = 0$, hence, the function $J_\epsilon^{-1}u = u_\epsilon$ can be represented in the form

$$u_\epsilon = J_\epsilon^{-1}A^{-1}(t)A(t)u. \quad (4.10)$$

The adjoint of $B_\epsilon(t)$ has the form

$$\begin{aligned} B_\epsilon^*(t)v &= \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} v + \frac{3}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - G_\epsilon(v)(x) \\ &\quad + \frac{\int_0^x (d\zeta/a(\zeta, t))}{\int_0^1 (d\zeta/a(\zeta, t))} G_\epsilon(v)(1), \end{aligned} \quad (4.11)$$

where

$$\begin{aligned} G_\epsilon(v)(x) &= \int_0^x \left[\frac{3}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial \zeta} \frac{\partial v}{\partial t} \right) - \frac{3}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \zeta} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} (J_\epsilon^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^4 a}{\partial t^3 \partial \zeta} v \right) - \frac{1}{a^2} \frac{\partial a}{\partial \zeta} (J_\epsilon^{-1})^* \left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} v \right) \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Consequently, equality (4.7) becomes

$$\int_{\Omega} u N \frac{\overline{\partial^3 v_{\epsilon}^*}}{\partial t^3} dx dt = \int_{\Omega} A(t) u \overline{h_{\epsilon}} dx dt, \quad (4.13)$$

where $h_{\epsilon} = v_{\epsilon}^* - \epsilon B_{\epsilon}^*(t) v_{\epsilon}^*$.

The left-hand side of (4.13) is a continuous linear functional of u , hence the function h_{ϵ} has the derivatives $\partial h_{\epsilon} / \partial x$, $(1-x)(\partial h_{\epsilon} / \partial x) \in L^2(\Omega)$, and the condition $h_{\epsilon}(0, t) = 0$ is satisfied.

From the equality

$$(1-x) \frac{\partial h_{\epsilon}}{\partial x} = \left[I - \epsilon \frac{1}{a} (J_{\epsilon}^{-1})^* \left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right) \right] (1-x) \frac{\partial v_{\epsilon}^*}{\partial x} - 3\epsilon \frac{1}{a} (J_{\epsilon}^{-1})^* \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (1-x) \frac{\partial v_{\epsilon}^*}{\partial x} \right), \quad (4.14)$$

and since the operator $(J_{\epsilon}^{-1})^*$ is bounded in $L^2(\Omega)$, for sufficiently small ϵ , we have $\|\epsilon(1/a)(J_{\epsilon}^{-1})^*(\partial^3 a / \partial t^3)\| < 1$. Hence, the operator $I - \epsilon(1/a)(J_{\epsilon}^{-1})^*(\partial^3 a / \partial t^3)$ has a bounded inverse in $L^2(\Omega)$. We conclude that $(1-x)(\partial v_{\epsilon}^* / \partial x) \in L^2(\Omega)$. Similarly, we conclude that $(\partial / \partial x)((1-x)(\partial v_{\epsilon}^* / \partial x))$ exists and belongs to $L^2(\Omega)$, and the condition $v_{\epsilon}^*(0, t) = 0$ is satisfied.

Putting $u = \int_0^t \int_{\eta}^{\zeta} \exp(c\tau) v_{\epsilon}^* d\tau d\eta d\zeta$ in (4.3), where the constant c satisfies (3.2) and using the properties of smoothing operator, we obtain

$$\int_{\Omega} \exp(ct) v_{\epsilon}^* \overline{Nv} dx dt = - \int_{\Omega} A(t) u \overline{v_{\epsilon}^*} dx dt - \epsilon \int_{\Omega} A(t) u \frac{\overline{\partial^3 v_{\epsilon}^*}}{\partial t^3} dx dt, \quad (4.15)$$

and from

$$\begin{aligned} & -\epsilon \int_{\Omega} A(t) u \frac{\overline{\partial^3 v_{\epsilon}^*}}{\partial t^3} dx dt \\ &= 3 \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx dt \\ & - 3 \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right] \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \frac{\overline{\partial^2 u}}{\partial t \partial x} dx dt \\ & + 3 \int_0^1 \frac{h(x)}{2} \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial t} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx|_{t=T} \\ & + 3 \int_0^1 \frac{h(x)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - c \frac{\partial a}{\partial t} \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx|_{t=T} \\ & - \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) a \left| \frac{\partial^3 v_{\epsilon}^*}{\partial t^3} \right|^2 dx dt \\ & - \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\overline{\partial^3 u}}{\partial t^2 \partial x} dx dt, \end{aligned} \quad (4.16)$$

we have

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \operatorname{Re} \int_{\Omega} A(t) u \overline{\frac{\partial^3 v_{\varepsilon}^*}{\partial t^3}} dx dt \\
& \leq \varepsilon \left\{ 3 \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right| \right] \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx dt \right. \\
& \quad + \frac{3}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - c \frac{\partial a}{\partial t} + \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} \right| \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx dt \\
& \quad - \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) a \left| \frac{\partial^3 v_{\varepsilon}^*}{\partial t^3} \right|^2 dx dt \\
& \quad + \frac{3}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} \right| \left| \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial x} \right|^2 dx dt \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \frac{\partial a}{\partial t} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 dx dt \right\}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Integrating the first term on the right-hand side by parts in (4.15), we obtain

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \operatorname{Re} \int_{\Omega} A(t) u \overline{v_{\varepsilon}^*} dx dt \\
& = \frac{3}{2} \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left[\frac{\partial a}{\partial t} - ca \right] \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx dt \\
& \quad - \int_{\Omega} h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} - 3c \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 3c^2 \frac{\partial a}{\partial t} - c^3 a \right\} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dt \\
& \quad - \int_0^1 \frac{1}{2} h(x) \exp(-ct) a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& \quad + \int_0^1 \frac{1}{2} h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a \right\} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& \quad - \int_0^1 h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial a}{\partial t} - ca \right\} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx \Big|_{t=T}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

This last equality gives

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \operatorname{Re} \int_{\Omega} A(t) u \overline{v_{\varepsilon}^*} dx dt \\
& \leq - \int_0^1 h(x) \exp(-ct) \left| \frac{\partial a}{\partial t} + a - ca \right| \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right|^2 dx \Big|_{t=T} \\
& \quad + \int_0^1 \frac{1}{2} h(x) \exp(-ct) \left\{ \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} - 2c \frac{\partial a}{\partial t} + c^2 a + ca - \frac{\partial a}{\partial t} \right\} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \Big|_{t=T}. \tag{4.19}
\end{aligned}$$

By using the conditions (3.2), inequalities (4.17) and (4.19), we obtain

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct) v_{\varepsilon}^* \bar{N} v dx dt \leq 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0. \tag{4.20}$$

42 Three-point boundary value problem

This implies $\operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct)(v_{\epsilon}^* - v)\overline{N}v dx dt + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \exp(ct)v\overline{N}v dx dt \leq 0$, that is,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \exp(-ct)(1-l)|v|^2 dx dt \\ & + \int_0^T \int_l^1 \int_0^l \exp(-ct)(1-x)|v|^2 dx dt + \int_0^T \int_l^1 \exp(-ct)|J_x v|^2 dx dt \\ & + \int_0^T \int_0^l \frac{1-l}{2l} \exp(-ct)|J_x v|^2 dx dt \leq 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Then $v = 0$.

Finally from (4.4), we conclude $w = 0$. $\square$

THEOREM 4.2. *The range $R(\bar{L})$ of $\bar{L}$ coincides with F .*

Proof. Since F is Hilbert space, then $R(\bar{L}) = F$ if and only if the relation

$$\int_{\Omega} \Theta(x) f \bar{g} dx dt = 0 \quad (4.22)$$

holds.

Arbitrary $u \in D_0(L)$ and $\mathcal{F} = (f, 0, 0, 0) \in F$ implies $f = 0$. Taking in (4.22), $u \in D_0(L)$, and using Lemma 4.1, we obtain

$$w = \begin{cases} (1-l)g, & 0 < x < l, \\ (1-x)g, & l < x < 1, \end{cases} \quad (4.23)$$

then $g = 0$. $\square$

References

- [1] W. Allegretto, Y. Lin, and A. Zhou, *A box scheme for coupled systems resulting from microsensor thermistor problems*, *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* **5** (1999), no. 1–4, 209–223.
- [2] G. W. Batten, Jr., *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations*, *Math. Comp.* **17** (1963), 405–413.
- [3] S. A. Beilin, *Existence of solutions for one-dimensional wave equations with nonlocal conditions*, *Electron. J. Differential Equations* **2001** (2001), no. 76, 1–8.
- [4] N.-E. Benouar and N. I. Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, *Differ. Equ.* **27** (1991), no. 12, 1482–1487.
- [5] A. Bouziani and N.-E. Benouar, *Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation*, *Kobe J. Math.* **15** (1998), no. 1, 47–58.
- [6] B. Cahlon, D. M. Kulkarni, and P. Shi, *Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constraint*, *SIAM J. Numer. Anal.* **32** (1995), no. 2, 571–593.
- [7] J. R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, *Quart. Appl. Math.* **21** (1963), 155–160.
- [8] ———, *The One-Dimensional Heat Equation*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 23, Addison-Wesley Publishing, Massachusetts, 1984.
- [9] J. R. Cannon, Y. Lin, and S. Wang, *An implicit finite difference scheme for the diffusion equation subject to mass specification*, *Internat. J. Engrg. Sci.* **28** (1990), no. 7, 573–578.
- [10] J. R. Cannon and A. L. Matheson, *A numerical procedure for diffusion subject to the specification of mass*, *Internat. J. Engrg. Sci.* **31** (1993), no. 3, 347–355.

- [11] V. Capasso and K. Kunisch, *A reaction-diffusion system arising in modelling man-environment diseases*, Quart. Appl. Math. **46** (1988), no. 3, 431–450.
- [12] Y. S. Choi and K.-Y. Chan, *A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry*, Nonlinear Anal. **18** (1992), no. 4, 317–331.
- [13] J. H. Cushman and T. R. Ginn, *Nonlocal dispersion in porous media with continuously evolving scales of heterogeneity*, J. Transport in Porous Media **13** (1993), no. 1, 123–138.
- [14] J. H. Cushman, H. Xu, and F. Deng, *Nonlocal reactive transport with physical and chemical heterogeneity: localization error*, Water Resources Res. **31** (1995), no. 9, 2219–2237.
- [15] M. Denche and A. L. Marhoune, *High-order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions*, Electron. J. Differential Equations **2000** (2000), no. 60, 1–10.
- [16] ———, *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third-order partial differential equation of mixed type*, Int. J. Math. Math. Sci. **26** (2001), no. 7, 417–426.
- [17] ———, *Mixed problem with integral boundary condition for a high order mixed type partial differential equation*, J. Appl. Math. Stochastic Anal. **16** (2003), no. 1, 69–79.
- [18] N. I. Ionkin, *The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Differ. Uravn. **13** (1977), no. 2, 294–304 (Russian).
- [19] L. I. Kamynin, *A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Comput. Math. Math. Phys. **4** (1964), no. 6, 33–59.
- [20] A. V. Kartynnik, *Three-point boundary-value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation*, Differ. Equ. **26** (1990), no. 9, 1160–1166.
- [21] L. S. Pulkina, *A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electron. J. Differential Equations **1999** (1999), no. 45, 1–6.
- [22] A. A. Samarski, *Some problems in the modern theory of differential equations*, Differ. Uravn. **16** (1980), 1925–1935 (Russian).
- [23] P. Shi, *Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), no. 1, 46–58.
- [24] V. F. Volkodavov and V. E. Zhukov, *Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic*, Differ. Equ. **34** (1998), no. 4, 501–505.
- [25] N. I. Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differ. Equ. **22** (1986), 1457–1463.

C. Latrous: Laboratoire Equations Differentielles, Département de Mathématiques, Université Mentouri Constantine, 25000 Constantine, Algeria
 E-mail address: clatrous@wissal.dz

A. Memou: Laboratoire Equations Differentielles, Département de Mathématiques, Université Mentouri Constantine, 25000 Constantine, Algeria
 E-mail address: memoua@wissal.dz

ملخص

هذا العمل يتطرق إلى دراسة صنف من المسائل الحدية للمعادلات التفاضلية ذات مشتقات جزئية من النمط المختلط ومن الرتبة الثالثة و أعلى وفق المتغير الفضائي هذا من جهة ومن جهة أخرى من الرتبة الثالثة وفق المتغير الزمني وهذا تحت شروط حدية غير محلية من النمط التكاملي ، تكاملات ذات متغير محدود وتكاملات ذات وزن مع شروط حدية كلاسيكية.

نبرهن وجود ووحدانية الحل، وللبرهان على ذلك فإننا نعتمد على تقديرات قبلية وعلى كثافة صورة المؤثر المولد للمسألة المطروحة. النتائج المحصل عليها تعد تطوير جديد لطريقة المتراجحات الطاقوية لصنف المسائل المدروسة.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines classes de problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles du type mixte du troisième ordre et d'ordre supérieur selon la variable spatiale d'une part et d'ordre trois selon variable temporelle d'autre part, combinant des conditions aux limites non locales du type intégrales, intégrale à borne variable et intégrale à poids, avec des conditions aux limites classiques.

On montre l'existence et l'unicité de la solution. Les démonstrations sont basées sur des estimations à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème en question. Les résultats obtenus constituent un nouveau développement de la méthode des inégalités énergétiques aux classes de problèmes abordés.

Abstract

The present work is devoted to the study of some classes of boundary-value problems for third and higher order mixed type partial differential equations with respect to the spatial variable on one side and to the third order to the other time variable. In these problems, are combined non local boundary conditions of integral type, integral conditions for one variable integration limit and for weight with classical Boundary conditions.

We establish existence and uniqueness of the solution. The proofs are based on a priori estimates and the range density of the operator generated by the considered problems. The obtained results represent a new development of the energy inequality method for the studied problems.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines classes de problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles du type mixte du troisième ordre et d'ordre supérieur selon la variable spatiale d'une part et d'ordre trois selon variable temporelle d'autre part, combinant des conditions aux limites non locales du type intégrales, intégrale à borne variable et intégrale à poids, avec des conditions aux limites classiques.

On montre l'existence et l'unicité de la solution. Les démonstrations sont basées sur des estimations à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème en question. Les résultats obtenus constituent un nouveau développement de la méthode des inégalités énergétiques aux classes de problèmes abordés.