REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATICE ET POPULAIRE

MINESTERE DE L'ENSEIGNEMENT
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI
CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :.........
Série :................

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister
En M athématiques

Thème

Etude de certains problèmes mixtes Avec conditions aux limites Non locales

Option

Equations aux dérivées partielles

Par

NADIA LEKRINE

Devant le jury :

Président : M.Denche Prof. Univ de constantine
Rapporteur : S.Mesloub M.C. C.U de Tebassa
Examinateur : A.Bouziani M.C C.U de O-El –Bouaghi
Examinateur : N-E.Kechkar Prof Univ de constantine

Soutenue le :2002..........

DEDICACE

A mes très chers et très chers parents :les plus braves et les plus généreux ; mon père et ma mère .

A ma très chère sœur Sihem et sa petite famille surtout à la petite Salsabil ;

A mes très chers frères :Said ; Moussa et sa petite famille surtout à la petite Rahma ;

A tous mes oncles et mes tantes ;

A tous mes cousins et cousines ;

A toutes mes voisines ;

A toutes mes amies : surtout à ma très et très chère amie Amel de Khanchela ;

Hanifa ,Samia, Razika , khadédja de(Z-Y) ,Rachida de Tebessa ,Rachida,

H'djila , Fatima d'Alger ,

Samira d'Annaba et sa famille , Messouada ,Ahlem ,Soria , de Setif ;

Adallette ,Hasnaa de Batna,

A tous mes collègues :N.Boulakroune ,A,-R- ,S.Maazouzi, A.Berkene

K.Becela, S.Guesmia .

A toute l'enfance innocente .

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissances au professeur M.DENCHE ;professeur à l'université de Constantine pour ses précieux conseils ,et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury de soutenance.

Je remercie sincèrement les professeurs : N.E.KECHKAR professeur à l'université de Constantine , et A.BOUZIANI professeur au C.U d'Oum – El- Bouaghi ont bien accepté de faire partie de ce jury et de rapporter ce travail.

Je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur S.MESLOUB,M.C. au D.U.de Tebessa pour la confiance qu'il m'a témoigné à avoir guider ce sujet, pour son aide morale et ses précieux conseils scientifiques ,qu'il trouve ici ma sincère gratitude .

Je ne saurais jamais oublier tous ceux qui à des titres et degrés divers ,m'ont fait profiter de leur aide pour l'élaboration de ce modeste travail.

Nadia .Lekrine.

Table de matières

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Le but de cette présente thèse est d'étudier quelques problèmes mixtes avec conditions intégrales appelées également conditions non-locales.

Plus précisement, on démontrel'éxistence, l'unicité, ainsi que leur dépendance continue par rapport aux donneés. Cela est établie à l'aide de l'une des méthodes les plus éfficaces de l'annalyse fonctionnelle, dite méthode des éstimations a priori ou méthode des inégalités de l'énergie. Cette méthode est basée sur les idées de J.leray [42], L.Garding [28], KO.Friedrich [26] et P.Lax [41]. Elle a été présentée sous forme d'une méthode par A.A Dezin [25] et particuliérement développée par O.A.Ladyzhenskaya [35] – [40]. Une condition intégrale, peut représenter physiquement une moyenne, un flux, une énergie totale ou une masse totale. L'aspect physique de ce type de conditions a servi comme raison fondamentale pour l'interêt croissant porté à ce type de problèmes mixtes avec conditions intégrales. Ces problèmes peuvent êtres rencontrés en théorie de transmission de la chaleur : B.Cahlon [22], J.Cannon [23], W.D.Day [24], N. I. Kamynin [34], K.Rektorys [60], N.I.Ionkin [33], en élasticité et thermoélasticité : A.Bouziani[6], P.Shi. [64], A.Samarskii [63], en physique du plasma : R.Sakamoto [62] ,et en théorie des populations : M.E.Gurtin [31], A.Hillon [32], L.A.Mouravey [54], P.A.Raviart [57], J. D.Murray [55], G. F. Webb [65]. Les équations liées au type des problemes mixtes étudiés sont tellement variées que l'élaboration d'une théorie générale est loin d'être achevée, et par conséquent chaque problème éxige à chaque fois une étude individuelle. Les problèmes mixtes avec conditions intégrales liés aux équations paraboliques et hyperboliques unidimensionnelles du second ordre sont étudiées en utilisant différentes méthodes. Par exemple, en utilisant la méthode du potentiel : J.R.Cannon [23], lors de l'étude de conduction thèrmique dans une barre mince chauffée a prouvé l'éxistence et l'unicité de la solution classique d'un problème mixte avec une condition classique (Dirichlet) et une condition intégrale pour l'équation de la chaleur. A l'aide de la méthode de séparation de variable de Fourier : N.I. Ionkin [33] a démontré l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte combinant une condition de Dirichlet avec une condition intégrale pour une équation parabolique. En se basant sur le principe du maximum : L.A. Mauravey et V. Philinovski [54]ont montré l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte en combinant une condition de Neumann et une condition intégrale pour une équation parabolique.

Concernant l'étude des problèmes mixtes avec conditions intégrales pour les équations paraboliques unidimensionnelles, en utilisant la méthode des estimation a priori : on cite les travaux de N.I. Yurchuk [66], Benouar et Yurchuk [4], A. Bouziani [7, 8, 9], A. Bouziani-N.E. Bennouar [17, 19] et S. Mesloub-A. Bouziani [51]. Pour les équations hyperboliques unidimensionnelles : on cite les résultats de A. Bouziani [5, 12, 14], A. Bouziani N.E. Benarar [20], S. Mesloub-Bouziani [50], S. Mesloub-N. Lekrine[52]. Pour les equations multidimensionnlles, on cite les travaux récents de S.Mesloub-A.Bouziani [46, 47, 48, 49]. Pour les problèmes mixtes avec conditions intégrales pour les equations pluri-paraboliques : on cite celui de A.Bouziani [13], N.Lekrine-S.Mesloub [44], S.Mesloub [45]. Pour le cas pluri-hyperbolique, on cite le travail de S.Mesloub - N.Lekrine [53].

On note que cette méthode fonctionnelle a été utilisée pour l'étude des problèmes mixtes avec conditions aux limites classiques (Dirichlet-Newmann) liés aux equations Elliptiques : O.A.Ladyzhenskaya [35, 38] et J.Lions [43]. Hyperboliques : O.A.Ladyzhenskaya [38, 39], S.K.Godounov [29, 30] et R.Sakamoto [61, 62]. Paraboliques : N. I. Kamynin [34], N.I.Yurchuk [68, 69] et J.Fritz [27]. Opérationnelles : F.Rebbani,V.I.Chessalin [58, 59] ,et N.I.Yurcuk [67, 72-77]. Pseudo-paraboliques : A.Bouziani [15]. De transmissions : A.Bouziani [16] et O.A.Laduzhenskaya, L.I.Stupialis [40]. Non-classiques : N.E.Benouar [1] ,ABouziani [10, 11]. Composites : N.E.Benouar [2], et N.E.Benouar-L.Bouguerra [3].

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

Chapitre I : est réservé l'exposétion des notions préliminaires qui nous servent comme outils dans nos démonsrations.

ChapitreII : est consacré à l'étude d'une équation hyperbolique unidimensionnlle du second ordre avec l'opérateur de Bessel liée avec une condition intégrale sans poids non homogène et une condition classique de Dirichlet. Dans le cas où au lieu de la condition de Dirichlet, on a la condition de Newmann on peut consulter S.Mesloub et A.Bouziani.[45].

Chapitre III : est destiné à l'étude d'un problème pluri-hyperbolique avec une singularité d'ordre un, unidimensionnelle où on combine une condition intégrale à poids avec une condition classique (Newmann).

Chapitre IV : est centré sur l'étude d'une équation pluri-parabolique bidimensionnelle ayant deux singularités d'ordres différents, où on combine une condition de Dirichlet par rapport à x, une condition de Newmann par rapport à y, et deux conditions intégrales. Dans le cas unidimensionnel non homogène où on a l'opérateur $(a(x, t_1, t_2)u_x\ )_x$ et la condition de Newmann au point zéro et la condition intégrale sans poids, le lecteur peut se reférer à A. Bouziani [13].

Les équations étudiées dans cette thèse sont de types parabolique et hyperbolique. Pour tous les problèmes considérés, l'étude se fait de la même manière à des variantes techniques prés.

On écrit d'abord le problème posé sous forme d'une équation opérationnelle :

$$Lu = F, \tag{1}$$

où L est un opérateur considéré d'un espace de Banach E, dans un espace de Hilbert H, covenablement choisis. Puit on établit des estimations a priori pour l'opérateur L. Ensuite on démontre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace H.

Plus précisement, on suivera dans ce travail le schéma suivant :

Schéma :

1- On établit une estimation a priori de type :

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_H . \tag{2}$$

On note que dans tous les problèmes posés dans cette thèse, ce type d'estimation a priori est obtenu en multipliant l'equation considérée par un opérateur intégro-différentiel Mu .

2- Ensuite on montre que l'opérateur L de E dans H est fermable (admet une fermeture que l'on note par $\overline{L}$).

La solution de l'équation oppérationnelle :

$$\overline{L}u = F, \qquad \forall u \in D(\overline{L}) \tag{3}$$

sera appelée solution forte du problème considéré.

Par passage à la limite, l'estimation (I.2) sera prolongée à $\overline{L}$, c.à.d :

$$\|u\|_E \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_H . \tag{4}$$

Ainsi, on déduit l'unicité de la solution de l'équation (I.3), l'égalité des ensembles $R(\overline{L})$ et $\overline{R(L)}$, et l'inversibilité de $\overline{L}$, $\left(\overline{L}\right)^{-1}$ étant défini sur l'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$.

3- la dernière étape, consiste à établir la densité de l'enesmble $R(L)$ dans l'espace H et par suite l'existence d'une solution forte du problème (1.1).

CHAPITRE I

Notions Préliminaires

Chapitre 1

Notions Préliminaires

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions et résultats classiques fondamentaux d'analyse fonctionnelle utiles pour aborder les chapitres qui suivent. Les résultas sont présentés sans demonstrations.

Pour plus d'informtions concernant ces resultats, on pourra consulter une abondante bibliogrphie.

1.1 Operateurs fermés et fermables. [43] .

Définition.1

Un operateur $L : E \longrightarrow H$ (E, H deux espaces de Banach) de domaine de définition $D(L)$ est dit fermé, si toute suite $\{x_n\}_n \subset D(L)$ vérifiant :

$$\begin{cases} x_n \longrightarrow x \text{ dans } E(\text{fort}) \\ Lx_n \longrightarrow y \text{ dans } H(\text{fort}) \end{cases} \text{alors } x \in D(L) \text{ et } y = Lx$$

c.à.d, son graphe $Gr(L)= \{(x, Lx) : x \in D(L)\}$ (comme étant sous espace de $E \times H$) est fermé.

Définition 2. Un operateur $L : E \longrightarrow H$, $(E, H$ deux espaces de Banach) de domaine $D(L)$ est dit fermable s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussitôt que L est fermable si est seulement si $\overline{Gr(L)}$ est un graphe.

L'opérateur L est fermable si est seulement si pour toute suite $\{x_n\}_n \subset D(L)$ telle que $x_n \xrightarrow{E} 0$ on a $Lx_n \xrightarrow{H} 0$.

1.2 Quelques inégalités utiles. [21]

1-Inégalité de Cauchy avec ε :

$$\forall (a,b) \in R^2 : ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

2-Inégalité de Cauchy-Shwarz :

$$\forall \left(f,g\right) \in L^2(\Omega) : \left| \int_\Omega fg \right| \leq \left(\int_\Omega f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_\Omega g^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3- Operateurs de régularisation :

Le développement et l'étude des opérateurs de régularisation sont dûs principalement à Sobolev et Fredrichs.

Dans la suite on utilisera le schéma proposé par Fredrichs .

Soit : $w : t \longmapsto w(t)$ une fonction paire de classe C^∞, d'une seule variable, avec $w(t) > 0$, si $|t| \leq 1$,

$w \equiv 0$ si $|t| > 1$, et $\int_R w(t)\, dt = 1$.

On pose :

$$w_\varepsilon \left(x, x'\right) = \frac{1}{\varepsilon} w \left(\frac{x - x'}{\varepsilon} \right).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$,on a :

$$\int_{|x-x'|} w_\varepsilon \left(x, x'\right) dx' = \int_{|x-x'|} w_\varepsilon \left(x, x'\right) dx = 1,$$

et

$$w_\varepsilon \left(x, x'\right) = 0, \text{ si } |x - x'| \geq \varepsilon.$$

Et soit $\Omega = (a,b) \subset IR$ et $u \in L^2(\Omega)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit l'opérateur de régularisation, $J_\varepsilon : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$, $u \longmapsto J_\varepsilon u$ tel que

$$\begin{aligned} (J_\varepsilon u)(x) &= \int_\Omega w_\varepsilon \left(x, x'\right) . u\left(x'\right) dx' \\ &= \int_{|x-x'|<\varepsilon} w_\varepsilon \left(x, x'\right) . u\left(x'\right) dx'. \end{aligned}$$

L'opérateur défini ci-dessus a les propriétés suivantes :

Proposition :

P_1 : $\forall u \in L^2(\Omega)$ on a : $J_\epsilon u \in C^\infty(\Omega)$,et $D^m(J_\epsilon u) = J_\epsilon(D^m u)$, si $u \in C^m(\Omega)$.

P_2 : $\forall u \in L^2(\Omega)$ on a : $\|J_\epsilon u - u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$, qd $\epsilon \longrightarrow 0$.

P_3: $\forall u \in L^2(\Omega)$, si $a(x) \in C(\Omega)$, on a : $\|aJ_\epsilon u - J_\epsilon au\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$, qd $\epsilon \longrightarrow 0$.

P_4: $\forall u \in L^2(\Omega)$, si $a(x) \in C^1(\Omega)$, on a : $\|D(aJ_\epsilon u) - D(J_\epsilon au)\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$, qd $\epsilon \longrightarrow 0$.

1.3 Espaces de Sobolev :[56, 57]

.1-Définitions et propreités élémentaires :

Ω étant un ouvert de IR^n, on désigne par $L^2(\Omega)$ l'espace des (classes) fonctions de carré intégrable sur Ω.

On rappelle que $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx.$$

On note :

$$\|u\|_{0,\Omega} = (u,u)^{\frac{1}{2}},$$

la norme correspndante .

Pour $m \in N^*$, on introduit l'espace de Sobolev d'ordre m sur Ω.

$$H^m = \left\{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\right\}$$

où : $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ est un multi-indice et $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$. avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

On munit H^mdu produit scalaire :

$$(u,v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx,$$

auquel on associe la norme :

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2-Proposition : L'espace H^m est un espace de Hilbert, séparable pour le produit scalaire :$(.,.)_{m,\Omega}$

Désignons par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différntiables sur Ω,à support compact dans Ω. On définit $H_0^m(\Omega)$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans H^m.

3-Inégalité de Poincaré-Fredrichs :

Propositon : Si Ω est un ouvert de IR^n borné, alors pour tout $m \in N^*$, il existe une constante $C_m(\Omega) > 0$ telle que :

$$\|v\|_{m,\Omega} \leq C_m(\Omega) \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u(x)\|_{0,\Omega}^2 \, dx. \right)^{\frac{1}{2}} , \quad \forall v \in H_0^m$$

4-Applications traces :

Dans ce qui suit, on suppose que la frontiere Γ de Ω est bornée et lipschitzienne, i.e Γ peut être représenter paramétriquement par des fonctions continues au sens de lipschitz . On dénote par $d\sigma$ la mesure superficielle sur Γinduite par la mesure de Lebesgue dx. Inroduisons l'ensemble, noté $L^2(\Gamma)$, des fonctions de carré intégrable sur Γ relativement à $d\sigma$. C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u,v)_\Gamma = \int_\Gamma u(\sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma,$$

.dont la norme correspondante est :

$$\|v\|_{0,\Gamma} = \int_\Gamma |v(\sigma)|^2 \, d\sigma.$$

Désignons par $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ l'ensmble des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctins de $\mathcal{D}(IR^n)$. On a la :

Proposition.1. On a les propriétés suivantes :

i- $\overline{\mathcal{D}(\overline{\Omega})} = H^1(\Omega)$.

ii- $\exists c > 0 : \|\gamma_0 \varphi\|_{0,\Gamma} \leq c \|\varphi\|_{1,\Omega} \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$,

où : $\gamma_0 \varphi = \varphi|_\Gamma$ dénote la valeur de φ sur le bord Γ.

Corollaire. L'application $\gamma_0 : \varphi \longmapsto \gamma_0 \varphi = \varphi|_\Gamma$ définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ se prolonge par continuité en une

application, encore notée γ_0, lineaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$. $\gamma_0 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), L^2(\Gamma))$.

L'application ainsi définie est appelée application trace d'ordre zéro et sa valeur $\gamma_0 v$ est appelée trace de v sur Γ.

Caractérisons, maintenant le noyau de γ_0 dans la proposition suivante :

Proposition 2. On a :

i- le noyau $Ker\ \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$ i.e $H_0^1 = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0 v\,|_\Gamma \equiv 0\}$.

ii- image $Im\gamma_0 \equiv \gamma_0(H^1(\Omega))$ est un espace dense dans $L^2(\Gamma)$,qu'on note $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Soit $\eta(\eta_1, ..., \eta_n)$ le vecteur unitaire de la normale à Γ, dirigé vers l'extérieur de Ω qui existe presque partout sur Γ . En raison de la régularité de Γ, et si $v \in H^2(\Omega)$, alors $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, et on peut donc définir la trace

$$\gamma_0\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_i}\,|_\Gamma \in L^2(\Gamma).$$

La fonction $\eta_i.\frac{\partial v}{\partial x_i}\,|_\Gamma$ est alors définie dans $L^2(\Gamma)$, comme produit d'une fonction($\eta_i = \cos(\eta, x_i)$)de $L^2(\Gamma)$ par une fonction $\frac{\partial v}{\partial x_i}\,|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$, de sorte que la dérivée normale $\frac{\partial v}{\partial \eta}\,|_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\,|_\Gamma$ est définie en tant que fonction de $L^2(\Gamma)$. Donc on a la :

Proposition 3 :

Lorsque Ω est un ouvert borné de IR^n de frontière Γ, C^1 par morçeaux, l'application :

$$\tilde{\gamma} : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma).$$

$$v \longmapsto \tilde{\gamma}v = (\gamma_0 v, \gamma_1 v) = \left(v\,|_\Gamma\,, \frac{\partial v}{\partial \eta}\,|_\Gamma\right).$$

se prolonge par continuité d'une application lineaire de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

Parmi les plus importants applications de ce théorème qu'on a besoin est la formule de Green.

Proposition.4. On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ, C^1 par morçeaux, alors

$1° -$ si $(u, v) \in (H^1(\Omega))^2$on a:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma uv\eta_i d\sigma, (i = \overline{1.n}).$$

2°−si $u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$\int_\Omega \Delta u.v dx = -\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial x_i}.v\eta_i d\sigma,$$

où

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Donnons maintenant un lemme trés important qu'on utilise de façon constante dans les chapitres suivants, c'est pour cela qu'on donne à titre exceptionnel sa démonstration.

1.4 Lemme de Gronwall :[13]

Forme.1 :

Si f_1, f_2 et f_3 sont des fonctions positives sur $[0,T]$, f_1, f_2 sont intégrables, f_3 nondécroissante, alors de l'inégalité :

$$\int_0^t f_1(\tau)\,d\tau + f_2(t) \le c\int_0^t f_2(\tau)\,d\tau + f_3(t) \tag{1.1}$$

découle l'inégalité :

$$\int_0^t f_1(\tau)\,d\tau + f_2(t) \le e^{ct} f_3(t)$$

Preuve : posons

$$\Im_t f_1 = \int_0^t f_1(\tau)\,d\tau.$$

L'inégalité (1.1) prend la forme :

$$\Im_t f_1 + f_2 \le c\Im_t f_2 + f_3 \qquad ((1.2))$$

Puisque $f_1 \ge 0$,de (1.2), on a donc :

$$f_2 \le c\Im_t f_2 + f_3. \qquad ((1.3))$$

Si on applique $c\Im_t$ à (1.3), on a :

$$c\Im_t f_2 \leq c^2\Im_t^2 f_2 + c\Im_t f_3. \qquad ((1.4))$$

En vertu de l'inégalité (1.2), on a :

$$\Im_t f_1 + f_2 \leq c^2\Im_t^2 f_2 + c\Im_t f_3 + f_3. \qquad ((1.5))$$

Si on applique encore $c\Im_t$ à (1.4), on obtient :

$$c^2\Im_t^2 f_2 \leq c^3\Im_t^3 f_2 + c^2\Im_t^2 f_3. \qquad ((1.6))$$

Et l'inégalité (1.5) prend la forme :

$$\Im_t f_1 + f_2 \leq c^3\Im_t^3 f_2 + c^2\Im_t^2 f_3 + c\Im_t f_3 + f_3. \qquad ((1.7))$$

Si on continue cette procédure, on obtient l'inégalité :

$$\Im_t f_1 + f_2 \leq c^{n+1}\Im_t^{n+1} f_2 + \sum_{j=1}^{n} c^j \Im_t^j f_3. \qquad ((1.8))$$

Mais comme :

$$\Im_t^{n+1} f_2 \leq \frac{\int_0^t (t-\tau)^n f_2(\tau)\, d\tau}{n!} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} c^j \Im_t^j f_3 \leq e^{ct} f_3(t),$$

il s'ensuit alors que

$$\Im_t f_1 + f_2(t) \leq e^{ct} f_3(t).$$

Ce qui complète la preuve du Lemme.

Forme .2 :

Si f_1, f_2 sont deux fonctions non négatives sur le rectangle $[0, T_1] \times [0, T_2]$, et sont intégrables, et f_3 est non décroissante par rapport à chacune de ces variables séparement, il s'ensuit de l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f_1(\tau_1.\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + f_2(t_1,t_2) \\
\leq\ & c\left(\int_0^{t_1} f_2(\tau_1,t_2)\,d\tau_1 + \int_0^{t_2} f_2(t_1,\tau_2)\,d\tau_2\right) \\
&+f_3(t_1,t_2), \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

que :

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f_1(\tau_1.\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 + f_2(t_1,t_2) \leq e^{c(t_1+t_2)}\, f_3(t_1,t_2).$$

Preuve : Si on pose

$$\Im_{t_1t_2}f_1 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \qquad ((1.10))$$

alors l'inégalité (1.9) s'écrit alors sous la forme :

$$\Im_{t_1t_2}f_1 + f_2(t_1,t_2) \leq c(\Im_{t_1}f_2 + \Im_{t_2}f_2) + f_3(t_1,t_2) \qquad ((1.11))$$

comme $f_1 \geq 0$, (1.11) devient alors

$$f_2(t_1,t_2) \leq c(\Im_{t_1}f_2 + \Im_{t_2}f_2) + f_3(t_1,t_2). \qquad ((1.12))$$

Si on applique l'opérateur $c(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})$ à l'négalité (1.12), on obtient

$$c(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})\,f_2 \leq c^2(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^2 f_2 + c(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})\,f_3. \qquad ((1.13))$$

En vertu de (1.11), on obtient :

$$\Im_{t_1t_2}f_1 + f_2(t_1,t_2) \leq c^2(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^2 f_2 + c(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})\,f_3 + f_3(t_1,t_2). \quad (1.13)$$

Si on applique encore $c(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})$ à (1.12) on obtient :

$$c^2(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^2 f_2 \leq c^3(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^3 f_2 + c^2(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^2 f_3. \qquad ((1.14))$$

Et donc (1.13) devient :

$$\begin{aligned}
\Im_{t_1t_2}f_1 + f_2(t_1,t_2) \leq\ & c^3(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^3 f_2 + c^2(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^2 f_3 + \\
&+c(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})\,f_3 + f_3(t_1,t_2).
\end{aligned}$$

Si on continue cette procédure, on obtient :

$$\Im_{t_1 t_2} f_1 + f_2 \leq c^{n+1} (\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^{n+1} f_2 + \sum_{j=0}^{n} c^j \left(\Im_{t_1} + \Im_{t_2}\right)^j f_3.$$

Mais comme

$$(\Im_{t_1} + \Im_{t_2})^{n+1} f_2 \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} (t_1 + t_2)^{n+1} \sup f_2 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors

$$\begin{aligned} \Im_{t_1 t_2} f_1 + f_2 &\leq \sum_{j=0}^{n} c^j \left(\Im_{t_1} + \Im_{t_2}\right)^j f_3 \\ &\leq \exp(2c(t_1 + t_2)) \cdot f_3(t_1 + t_2). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme.

Chapitre II

Sur
Une equation Hyperbolique
Avec Une Condition Intégrale

Chapitre 2

Sur
Une equation Hyperbolique
Avec Une Condition
Intégrale

2.1 Position du problème.

Dans le domine $Q = (0, d) \times (0, T)$ où $0 < d < +\infty$, $0 < T < +\infty$, on considère l'équation hyperbolique du second ordre avec l'opérateur de Bessel

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - \frac{1}{x}\left(xu_x\right)_x = f\left(x, t\right), \tag{2.1}$$

on associé à l'équation (2.1) les conditions initiales :

$$\ell_1 u = u\left(x, 0\right) = \varphi_1\left(x\right) \tag{2.2}$$

$$\ell_2 u = u_t\left(x, 0\right) = \varphi_2\left(x\right) \qquad ((2.3))$$

la condition intégrale

$$\int_0^d u\left(x, t\right) dx = m_1\left(t\right), \tag{2.4}$$

et la condition au bord de Dirichlet

$$u(d,t) = m_2(t), \tag{2.5}$$

où f, φ_i, m_i, $i = \overline{1,2}$ sont du fonctions données.

On suppose que les conditions initiales vérifient les conditions de compatibilité suivantes :

$$\int_0^d \varphi_1(x)\,dx = m_1(0), \ \varphi_1(d) = m_2(0),$$
$$\int_0^d \varphi_2(x)\,dx = m_1'(0), \ \varphi_2(d) = m_2'(0).$$

Le problème (2.1) – (2.5) peut être considéré comme un problème aux limites non locale pour une équation hyperbolique singulière.

Dans ce chapitre, on démontre l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution forte par rapport aux donnés du problème (2.1) – (2.5).

Au point de vue de la méthode appliquée, il est préférable de transformer le problème (2.1) – (2.5) avec conditions aux limites non homogènes (2.4) – (2.5) à un problème équivalent avec conditions aux limites homogènes. Pour cela on introduit une nouvelle fonction inconnue v définie par :

$$v(x,t) = u(x,t) - u_0(x,t),$$

où

$$u_0(x,t) = m_2(t) + 2\frac{(d-x)}{d^2}(m_1(t) - dm_2(t)).$$

Alors, le problème (2.1) – (2.5) peut être formuler de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = f(x,t) - \mathcal{L}u_0(x,t) = F(x,t), & (2.6) \\ \ell_1 v = \varphi_1(x) - \ell_1 u_0 = \phi_1(x), & (2.7) \\ \ell_2 v = \varphi_2(x) - \ell_2 u_0 = \phi_2(x), & (2.8) \\ \int_0^d v\,dx = 0, & (2.9) \\ v(d,t) = 0, & (2.10) \end{cases}$$

Ainsi, au lieu de chercher la fonction u, solution du problème (2.1) – (2.5), on cherche la fonction v solution du problème (2.6) – (2.10) et le problème initial posé aura lieu la solution :

$$u = v + u_0.$$

2.2 Espaces fonctionnels associés :

Pour l'étude du problème posé (2.6) – (2.10), introduisons tout d'abord certains espaces fonctionnels qui nous sont nécessaires.

Soit $L^2_\rho(Q)$ l'espace de Hilbert des (classes) des fonctions de carré intégrables avec poids ayant la norme finie :

$$\|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} = \int_Q xu^2 dxdt,$$

le produit scalaire dans l'espace $L^2_\rho(Q)$ est défini par :

$$(u, v)_{L^2_\rho(Q)} = (xu, v)_{L^2(Q)} .$$

$V^{1,1}_\rho(Q)$: est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{V^{1,1}_\rho(Q)} = (u, v)_{L^2_\rho(Q)} + (u_x, v_x)_{L^2_\rho(Q)} + (u_t, v_t)_{L^2_\rho(Q)} ,$$

et de la norme associe :

$$\|u\|^2_{V^{1,1}_\rho(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q)} .$$

Les espaces avec poids sur l'intervalle $(0, d)$, tels que $L^2_\rho(0, d)$ et $V^{1,1}_\rho(0, d)$ sont aussi utilisés. Leurs définitions sont analogues à celle des espaces sur Q.

Ecrivons maintenant le problème (2.6) – (2.10) sous la forme opérationnelle suivante :

$$Lv = \mathcal{F},$$

où

$$Lv = (\mathcal{L}v, \ell_1 v, \ell_2 v), \text{ et } \mathcal{F} = (F, \phi_1, \phi_2) ,$$

avec

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{c} v \in L^2_\rho(Q) : v_x, v_{xx}, v_t, v_{tx}, v_{tt} \in L^2_\rho(Q) \\ \text{et verifiant lesconditions (2.9) – (2.10)} \end{array} \right\},$$

L'opérateur L est considéré de l'espaces E dans l'espace H, où :

E : est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2_\rho(Q)$ vérifiant les conditions (2.9) – (2.10),

et ayant la norme finie :

$$\|u\|^2_E = \sup_{0 \le \tau \le T} \|u(., \tau)\|^2_{V^{1,1}_\rho(0,d)} .$$

Et H :l'espace de Hilbert :

$$\begin{aligned} H &= L^2_\rho(Q) \times V^1_\rho(0,d) \times L^2_\rho(0,d). \\ H &= H_0 \times H_1 \times H_2, \end{aligned}$$

constitué des éléments $\mathcal{F} = (F, \phi_1, \phi_2)$, et ayant la norme :

$$\|\mathcal{F}\|^2_H = \|F\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\phi_1\|^2_{V^1_\rho(0,d)} + \|\phi_2\|^2_{L^2_\rho(0,d)}.$$

*** Notations :**

Dans les §-paragraphes suivants, on utilise les notations :

$$Q_\tau = (0,d) \times (0,\tau), \quad 0 \leq \tau \leq T$$

$$Q_s = (0,d) \times (s,T), 0 \leq s \leq T$$

Et on désigne par :

$$\int_Q f,$$

au lieu de

$$\int_Q f(x)dx,$$

par :

$$\int_{\Omega_1} \cdots \int_{\Omega i-1} \cdot \int_{\Omega_{i+1}} \cdots \int_{\Omega_n} f(x_i)\Big|_{x_i=x_i^0}^{x_i^1},$$

au lieu de :

$$\int_{\Omega_1} \cdot\cdot \int_{\Omega i-1} \cdot \int_{\Omega_{i+1}} \cdot\cdot \int_{\Omega_n} f(x_1,..,x_{i-1},x_i,x_{i+1},..,x_n)dx..dx_{i-1}dx_{i+1}..dx_n\Big|_{x_i=x_i^0}^{x_i^1}$$

et par

$$u_{x^i}$$

au lieu de :

$$\partial^i u/\partial x^i$$

2.3 Estimation a priori :

Théorème 2.1

Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'inégalité de l'énergie

$$\|v\|_E \leq c\,\|Lv\|_H\,, \tag{2.11}$$

où c est une constant positive indépendante de la solution u.

Preuve :

Considérons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de l'équation (2.6) et l'opérateur intégro-différentiel :

$$Mv\,(x,t) = xv_t - x\,(\tau - t)\int_0^t \Im_x(\xi v_\xi)ds$$

où

$$Q^\tau = (0,d) \times (0,\tau)\,,: 0 < \tau < T,$$

et

$$\Im_x(\xi v_\xi) = \int_0^x \xi v_\xi d\xi.$$

on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}v, Mv)_{L^2(Q^T)} &= -\int_{Q^T} xv_{tt}\ .\ (\tau - t)\int_0^t \Im_x(\xi v_\xi)ds \\ &+ \int_{Q^T} (xv_x)_x\ .\ (\tau - t)\int_0^t \Im_x(\xi v_\xi)ds \\ &+ \int_{Q^\tau} xv_t v_{tt} - \int_{Q^\tau} v_t\ .\ (xv_x)_x\,. \end{aligned} \tag{(2.12)}$$

En utilisant les conditions aux limites $(2.9) - (2.10)$, et en intégrant par parties chaque terme du membre droit de (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}(1) &= \int_{Q^\tau} xv_t.v_{tt} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^d x(v_t(x,\tau))^2 - \frac{1}{2}\int_0^d x\,(\phi_2)^2\,,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= -\int_{Q^\tau} v_t \,.\, (xv_x)_x \\
&= -\int_0^\tau (v_t.xv)\,dt\,\Big|_{x=0}^{x=d} + \int_{Q^\tau} v_{xt}.\, xv_x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^d xv_x^2(x,\tau) - \frac{1}{2}\int_0^d x(\frac{\partial\phi_1}{\partial x})^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= -\int_{Q_T} xv_{tt}.(\tau - t)\int_0^t \Im_x(\xi v_\xi)ds \\
&= -\int_0^d xv_t\,(\tau - t)\int_0^t \Im_x\,(\xi v_\xi)\,\Big|_{t=0}^{t=\tau} + \int_{Q_T} xv_t\,(\tau - t)\,\Im_x\,(\xi v_\xi) \\
&\quad -\int_{Q_T} xv_t \int_0^t \Im_x\,(\xi v_\xi) \\
&= \int_{Q_T} xv_t\,(\tau - t)\,\Im_x\,(\xi v_\xi) - \int_{Q_T} xv_t \int_0^t \Im_x\,(\xi v_\xi)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4) &= \int_{Q_T} (xv_x)_x\,.\,(\tau - t)\int_0^t \Im_x\,(\xi v_\xi) \\
&= \int_0^\tau xv_x\,(\tau - t)\,.\left(\int_0^t \Im_x\,(\xi v_\xi)\right)\Big|_{x=0}^{x=d} - \int_{Q_T} x^2 v_x\,(\tau - t)\,.\left(\int_0^t v_\xi\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^d x^2\,(\tau - t)\left(\int_0^t v_x\right)^2\Big|_{t=0}^{t=\tau} - \frac{1}{2}\int_{Q_T} x^2\left(\int_0^t v_x\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\int_{Q_T} x^2\left(\int_0^t v_x\right)^2.
\end{aligned}
$$

Posons :

$$(a) = \int_{Q_T} xv_t.\,(\tau - t)\,\Im_x(\xi v_\xi),$$

$$(b) = -\int_{Q_T} xv_t.\int_0^t \Im_x\,(\xi v_\xi)\,,$$

$$(c) = -\frac{1}{2}\int_{Q_\tau} x^2 \left(\int_0^t v_x\right)^2 .$$

En sommant (1)-(4), l'égalité (2.12) devient :

$$\frac{1}{2}\int_0^d x\,(v_t(x,\tau))^2 + \frac{1}{2}\int_0^d x\,(v_x(x,\tau))^2 =$$

$$= \int_{Q_\tau} \mathcal{L}v.Mv + \frac{1}{2}\int_0^d x\,(\phi_2)^2 + \frac{1}{2}\int_0^d x\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 +$$
$$-(a) - (b) - (c). \qquad ((2.13))$$

En utilisant les inégalités de Cauchy, estimons les termes $-(a), -(b), -(c)$ et $(\mathcal{L}v, Mv)_{Q_\tau}$ dans le membre droit de (2.13), comme suit :

$$\begin{aligned} -(a) &= -\int_{Q_\tau} xv_t.\,(\tau - t)\,\Im_x(\xi v_\xi) \le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} xv_t^2. \\ &\quad + \frac{T^2 d^4}{4}\int_{Q_\tau} xv_x^2, \end{aligned} \qquad ((2.14))$$

$$\begin{aligned} -(b) &= +\int_{Q_\tau} xv_t.\int_0^t \Im_x(\xi v_\xi) \le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} xv_t^2 \\ &\quad + \frac{T^2 d^4}{4}\int_{Q_\tau} xv_x^2, \end{aligned} \qquad ((2.15))$$

$$(c) = +\frac{1}{2}\int_{Q_\tau} x^2\left(\int_0^t v_x\right)^2 \le \frac{T^2}{2} d\int_{Q_\tau} xv_x^2, \qquad ((2.16))$$

$$\int_{Q_\tau} \mathcal{L}v.xv_t \le \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} xv_t^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} x\,(\mathcal{L}v)^2, \qquad ((2.17))$$

$$\begin{aligned} -\int_{Q_\tau} \mathcal{L}v.x\,(\tau - t)\left(\int_0^t \Im_x(\xi v_\xi)\right) &\le \frac{1}{8}T^2 d^4\int_{Q_\tau} xv_x^2 \\ &\quad + \frac{T^2}{2}\int_{Q_\tau} x\,(\mathcal{L}v)^2. \end{aligned} \qquad ((2.18))$$

On considère l'inégalité élémentaire :

$$\frac{1}{2}\int_0^d xv^2(x,\tau) \leq \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} xv_t^2 + \frac{1}{2}\int_0^d x\phi_1^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} xv^2. \qquad ((2.19))$$

En combinant les inégalités (2.14)-(2.19) et l'égalité (2.13), on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^d xv^2(x,\tau) + \frac{1}{2}\int_0^d xv_t^2(x,\tau) + \frac{1}{2}\int_0^d xv_x^2(x,\tau) \\ \leq\ & 2\int_{Q_\tau} xv_t^2 + (\frac{1}{2}+\frac{T^2}{2})\int_{Q_\tau} x(\mathcal{L}v.)^2 + \frac{1}{2}\int_0^d x\phi_1^2 \\ &+\left(\frac{5T^2}{8}d^4 + \frac{T^2}{2}d\right)\int_{Q_\tau} xv_x^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} xv^2 \\ &+\frac{1}{2}\int_0^d x\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^d x\phi_2^2. \end{aligned} \qquad ((2.20))$$

D'où

$$\begin{aligned} &\int_0^d xv^2(x,\tau) + \int_0^d xv_t^2(x,\tau) + \int_0^d xv_x^2(x,\tau) \\ \leq\ & M\left[\int_{Q_\tau} x(\mathcal{L}v)^2 + \int_0^d x(\phi_1)^2 + \int_0^d x\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 \right. \\ &\left. + \int_0^d x(\phi_2)^2 + \int_{Q_\tau} xv_t^2 + \int_{Q_\tau} xv^2 + \int_{Q_\tau} xv_x^2\right]. \end{aligned} \qquad ((2.21))$$

Avec

$$M = Max\left(4, \frac{5T^2}{4}d^4 + T^2 d, 1+T^2\right).$$

Posons :

$$f_1(\tau) = 0$$

$$f_2(\tau) = \int_0^d xv^2(.,\tau) + \int_0^d xv_t^2(.,\tau) + \int_0^d xv_x^2(.,\tau),$$

$$\begin{aligned} f_3(\tau) &= \int_{Q_\tau} x(\mathcal{L}v)^2 + \int_0^d x(\phi_1)^2 \\ &\quad + \int_0^d x\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2 + \int_0^d x(\phi_2)^2. \end{aligned}$$

Et utilisons le lemme de Gronwall forme 1, on obtient :

$$\begin{aligned} &\|v(.,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,d)} + \|v_x(.,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,d)} + \|v_t(.,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,d)} \\ \leq\ & Me^{MT}\left(\|\mathcal{L}v\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\phi_1\|^2_{V^1_\rho(0,d)} + \|\phi_2\|^2_{L^2_\rho(0,d)}\right). \end{aligned}$$

Par passage au suprumum par rapport à τ sur $[0,T]$ on trouve :

$$\begin{aligned} &\sup_{0\leq\tau\leq T} \|v(.,\tau)\|^2_{V^{1,1}_\rho(0,d)} \\ \leq\ & Me^{MT}\left(\|\mathcal{L}v\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\phi_1\|^2_{V^1_\rho(0,d)} + \|\phi_2\|^2_{L^2_\rho(0,d)}\right). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité désirée (2.11), avec $c = \sqrt[2]{M}e^{\frac{MT}{2}}$.

Proposition.2.1

L'opérateur$L$: $E \longrightarrow H$,est fermable.

Preuve.

Si $u_n \in D(L)$ est une suite telle que :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } E, \qquad ((2.22))$$

et

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}= (F,\phi_1,\phi_2) \quad \text{dans } H, \qquad ((2.23))$$

on démontre que $F = 0$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$.

Puisque (2.22) est vraie, alors.

$$x\mathcal{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{dans } L^2(Q), \qquad ((2.24))$$

alors :

$$x\mathcal{L}u_n \to 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(Q). \qquad ((2.25))$$

Mais comme

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F \qquad \text{dans } L^2_\rho(Q), \qquad ((2.26))$$

alors :

$$x\mathcal{L}u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{x}F \qquad \text{dans } L^2(Q), \ . \qquad ((2.27))$$

De l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q)$, on conclut que $F = 0$.

De (2.23), on a

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi_1 \qquad \text{dans } V^{1,0}_\rho(0,a), \qquad ((2.28))$$

et du fait que l' injection canonique de $V^{1,0}_\rho(0,a)$ dans $\mathcal{D}'(0,a)$ est continue, (2.28) implies

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi_1 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(0,a). \qquad ((2.29))$$

De plus, puisque (2.22) est vraie et que

$$\|\ell_1 u_n\|_{V^{1,0}_\rho(0,a)} \leq \|u_n\|_E \qquad \forall n, \qquad ((2.30))$$

on a

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{dans } V^{1,0}_\rho(0,a). \qquad ((2.31))$$

Par conséquent

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(0,a). \qquad ((2.32))$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(0,a)$, on déduit de (3.19) et (3.22), that $\phi_1 = 0$. De la même façon on démontre que $\phi_2 = 0$. Donc L est fermable, et on note par $\overline{L}$ sa femuture dont le domaine de définition est $D(\overline{L})$.

définition 2.1

On appelle solution de l'équation

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \qquad \forall u \in D(\overline{L}),$$

solution forte du problème posé.

Par passage à la limite, on prolonge l'inégalité (3.1) pour être appliquée à la solution forte, d'où on a :

corollaire 2.1.

Si la solution forte du problème $(1.1)' - (1.5)'$ existe, alors elle est unique et dépend continuement des données $F = (f, \phi_1, \phi_2)$.

corollaire 2.2.

L est femable de fermuture $\overline{L}$ et on a : $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)}$.

Preuve :

Démontrons d'abord l'inclusion $R\left(\overline{L}\right) \subset \overline{R(L)}$: Soit $y \in R\left(\overline{L}\right)$, donc il existe une suite fondamentale $(y_n)_{n \in IN} \in H$ constituée des éléments de $R(L)$ telle que

$$y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y .$$

Il existe alors une suite $(v_n)_{n \in IN} \in D(L)$ telle que

$$Lv_n = y_n.$$

De l'inégalité de l'énergie (2.11), on a

$$\|v_p - v_q\|_E \leq c \|Lv_p - Lv_q\|_H \underset{p \to \infty,\ q \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$

On déduit que la suite $(v_n)_{n \in IN}$ est une suite fondamentale dans E. Et par conséquent il existe une fonction $v \in E$ telle que

$$y_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} y \quad \text{dans } H.$$

Mais comme

$$v \in D(\overline{L}), \quad \overline{L}v = y.$$

Alors $y \in \overline{R(L)}$.

L'inclusion $\overline{R(L)} \subset R\left(\overline{L}\right)$ est évidente de la définition de l'ensemble $R\left(\overline{L}\right)$.

2.4 Existence de la solution :

Pour démontrer l'existence de la solution forte, il faut montrer que $\overline{L}$: $E \longrightarrow H$

est surjectif, ceci équivalent à montrer que $\overline{R(L)}. = H$, et cela équivalent à montrer

que : $R(L)^{\perp} \equiv \{0\}$.

Proposition2.2 :

Si pour $w \in L^2(Q)$ et pour toute $u \in D_0(L) = \{u \in D(L) : \ell_i u = 0, (i = 1,2\}$ vérifiant $(2.9) - (2.10)$ on a :

$$(\mathcal{L}u, w)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \qquad ((2.33))$$

alors w s'annulle presque partout dans Q.

Preuve.

La relation (2.33) est donnée pour toute fonction $u \in D_0(L)$,on peut alors l'éxprimer sous une forme particulière :

Soit u la solution de l'equation :

$$h = u_{tt}, \qquad ((2.34))$$

où

$$h = \int_t^T (w + \Im_x(u_{\tau\tau}))d\tau. \qquad ((2.35))$$

Et soit u la fonction définie par :

$$v(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ si } & 0 \leq t \leq s. \\ \int_s^t (t-\tau)\, u_{\tau\tau} d\tau & \text{si } \mathrm{s} \leq t \leq T. \end{cases} \qquad (2.36)$$

D'aprés les relations (2.34)-(2.35) on a :

$$w = -u_{t^3} - \Im_x(u_{t^2}). \qquad ((2.37))$$

***Remarque :** On peut aussi considérer l'equation :

$$u_{tt} + (\Im_x(\xi u_\xi + u))_{t^2} = h(x,t),$$

où :

$$h(x,t) = \int_t^T w(x,s)\,ds,$$

et u prend la forme (2.36).

de telle sorte qu'on obtient :

$$w = -u_{t^3} - \left(\Im_x \left(\xi u_\xi + u\right)_{t^2}\right)_t .$$

Avant de montrer la proposition il faut montrer que $w \in L^2_\rho(Q)$.

Pour cela on établit le :

lemme.

La fonction définie par (2.34) et (2.36) possède des dérivées par rapport à t jusqu'au troisième ordre inclus appartenant à $L^2(Q)$.

Preuve.

D'aprés la définition de $D(L)$, on a $\Im_x u_{tt} \in L^2(Q)$. Il reste à montrer que $u_{t^3} \in L^2(Q)$.

On va introduire les $t-$opérateurs de régularisation : J_ε définis par :

$$(J_\varepsilon g)(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T w\left(\frac{t-s}{\varepsilon}\right) g(x,s)\, ds,$$

où $w \in C^\infty(0,T), w \geq 0$,et $w \equiv 0$ au voisinage de $t=0$, $t=T$ et en dehors de l'intervalle $(0,T)$, et $\int_{IR} w(s)\, ds = 1$.

Appliquons à cet effet les operateurs $J_\varepsilon$et $\partial/\partial t$ à l'equation (2.34).

On obtient :

$$u_{t^3} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{t^2} - J_\varepsilon u_{t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(J_\varepsilon h\right)$$

alors :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{t^2}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} &\leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{t^2} - J_\varepsilon u_{t^2}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \\ &+2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(J_\varepsilon h\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}.\end{aligned}$$

Or :

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{t^2} - J_\varepsilon u_{t^2}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \longrightarrow 0 \ \text{ qd } \ \varepsilon \longrightarrow 0,$$

donc

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(u_{t^2})\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \leq \left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(J_\varepsilon h\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} < +\infty$$

Revenons maintenant à la peuve de la proposition. Remplaçons w dans (2.33) par sa représentation (2.37), il vient

$$\begin{aligned}(w, \mathcal{L}u)_{L^2_\rho(Q)} &= -\int_Q x u_{t^3}.u_{t^2} + \int_{Q_s} u_{t^3}.(x u_x)_x \\ &\quad -\int_Q x\Im_x(u_{t^2}).u_{t^2} \\ &\quad +\int_Q \Im_x(u_{t^2}).(x u_x)_x \qquad ((2.38)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

En intégrant par partie chaque terme de (2.38) et en tenant compte des conditions (2.9) – (2.10), on obtient :

$$(1) = -\int_Q x u_{t^3}.u_{t^2} = \frac{1}{2}\int_0^d x u_{t^2}^2(.,s),$$

$$(2) = \int_Q u_{t^3}.(x u_x)_x = \frac{1}{2}\int_0^d x u_{tx}^2(.,T),$$

$$(3) = -\int_Q x\Im_x(u_{t^2}).u_{t^2} = \frac{1}{2}\int_{Qs}(\Im_x(u_{t^2}))^2,$$

$$(4) = \int_Q \Im_x(u_{t^2}).(x u_x)_x = -\int_{Qs} x u_{t^2}.u_x.$$

(1)-(4) et (2.38) donne alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\|u_{t^2}(.,s)\right\|^2_{L^2_\rho(0,d)} + \frac{1}{2}\left\|u_{tx}(.,T)\right\|^2_{L^2_\rho(0,d)} \\ &+\frac{1}{2}\left\|\Im_x(u_{t^2})\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ = &\int_{Qs} x u_{t^2}.u_x \qquad ((2.39))\end{aligned}$$

Estimons le dernier terme du membre de droite, en utilisant l' inégalité de Cauchy avec ε ainsi que l'inégalité de poincaré, on a

$$\int_{Q_s} -xu_{t^2}.u_x \leq \frac{1}{2}\left\|u_{t^2}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \frac{1}{4}T^2\left\|u_{tx}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}. \tag{(2.40)}$$

Alors les inégalités (2.39) et (2.40) donnent :

$$\begin{aligned} & \left\|u_{t^2}(.,s)\right\|^2_{L^2_\rho(0,d)} + \left\|u_{tx}(.,T)\right\|^2_{L^2_\rho(0,d)} + \left\|\Im_x(u_{t^2})\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\ \leq \; & K\left(\left\|u_{t^2}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \left\|u_{tx}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}\right). \end{aligned} \tag{2.41}$$

avec $K = \max(1, \frac{T^2}{2})$.

Cette inégalité est essentielle dans notre démonstration, mais sa forme ne nous permet pas d'utiliser le lemme de Gronwall, afin d'éviter cette difficulté, on va introduire une nouvelle fonction β définie par :

$$\beta(x,t) = \int_t^T u_{\tau^2}d\tau.$$

alors :

$$\begin{aligned} u_{tx}(x,t) &= \beta_x(x,s) - \beta_x(x,t), \\ u_{tx}(x,T) &= \beta_x(x,s), \\ u_{t^2}(x,s) &= -\beta_t(x,s) \end{aligned}$$

donc :

$$u^2_{tx}(x,t) = \beta^2_x(x,s) - 2\beta_x(x,s).\beta_x(x,t) + \beta^2_x(x,t)$$

alors :

$$\int_s^T x(u_{tx})^2(x,t)\,dt \leq 2(T-s)x\beta^2_x(x,s) + 2\int_s^T x\beta^2_x(x,t)\,dt.$$

Alors l'inégalité (2.40) devient :

$$\begin{aligned} & \left\|\beta_t(x,s)\right\|^2_{L^2_\rho(0,d)} + (1 - 2c(T-s))\left\|\beta_x(x,s)\right\|^2_{L^2_\rho(0,d)} \\ \leq \; & 2K\left\{\left\|\beta_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \left\|\beta_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}\right\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

On fixe s_0 tel que : $1 - 2K(T - s_0) = \frac{1}{2}$ et on prend s varier dans $(T - s_0, T)$,alors (2.42) devient :

$$\begin{aligned} & \|\beta_t (x,s)\|^2_{L^2_\rho(0,d)} + \|\beta_x (x,s)\|^2_{L^2_\rho(0,d)} \\ \leq & \; 4K \left\{ \|\beta_t\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \|\beta_x\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \right\} \end{aligned} \tag{2.43}$$

Si on pose :

$$\alpha(s) = \|\beta_t\|^2_{L^2_\rho(Qs)} + \|\beta_x\|^2_{L^2_\rho(Qs)} .$$

De (2.43), on obtient :

$$\frac{-d\alpha(s)}{ds} \leq 4K\alpha(s) ,$$

et par conséquent on a :

$$\frac{-d}{ds}\left(e^{4Ks}\alpha(s)\right) \leq 0 . \tag{2.44}$$

En prenant compte du fait que : $\alpha(T) = 0$,une intégration par partie de (2.44),

sur l'intervalle (s, T) donne :

$$e^{4cs}\alpha(s) \leq 0,$$

. d'où

$$\alpha(s) = 0. \tag{2.45}$$

De (2.45) on déduit que $w \equiv 0$ p.p dans Q_{T-s_0}.

Comme s ne dépend pas du choix de l'origine et $[0, T]$ est compact, raisonnons alors de

la même façon, au bout d'un nombre fini de fois on démontre que $w \equiv 0$ p.p dans Q.

Cela achève la démonstration de la proposition.

Revenons maintenant à la démonsration de $R(L)^{\perp} \equiv \{0\}$.

Soit $W = (w, w_1, w_2) \in R(L)^{\perp}$, tel que :

$$\left(\mathcal{L}u, w\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(\ell_1 u, w_1\right)_{V^1_\rho(0,d)} + \left(\ell_2 u, w_2\right)_{L^2_\rho(0,d)} = 0 \tag{2.46}$$

Posons $u \in D_0(L)$ dans (2.46) il vient :

$$\left(\mathcal{L}u, w\right)_{L^2_\rho(Q)} = 0.$$

D'où d'aprés la proposition (2.33), on déduit que $w = 0$, donc (2.46) devient :

$$\left(\ell_1 u, w_1\right)_{V^1_\rho(0,d)} + \left(\ell_2 u, w_2\right)_{L^2_\rho(0,d)} = 0. \tag{2.47}$$

Comme $R(\ell_i)$: les ensembles des valeures des ℓ_i ,$(i = 1, 2)$ sont partout denses dans les espaces de Hilbert H_i, $(i = 1, 2)$,et comme $\ell_1$et ℓ_2 sont indépendants , on déduit que $w_1 \equiv 0$, $w_2 \equiv 0$. Donc $W \equiv 0$.

Ce qui nous a permé d'établir le :

Théorème 2.2 :

Pour toutefonction $\mathcal{F} = (f, \phi_1, \phi_2) \in H = L^2_\rho(Q) \times H_1 \times H_2$, le problème $(1.1)' - (1.5)'$ admet une solution forte unique $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\,\mathcal{F}$ telle que :

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leq \tau \leq T} \|u(.,\tau)\|^2_{V^{1,1}_\rho(0,d)} \\ \leq\ & c^2 \left\{ \|F\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\phi_1\|^2_{V^1_\rho(0,d)} + \|\phi_2\|^2_{L^2_\rho(0,d)} \right\}, \end{aligned}$$

où c est une constante positive indépendante de la solution u.

CHAPITRE III

Sur Une Equation Pluri-hyperbolique Singulière Avec Une Condition Non-Locale

Chapitre 3

Sur Une Equation Pluri-hyperbolique Singulière Avec Une Condition Non-Locale

3.1 Position du problème :

Dans la région $Q = (0, d) \times (0, T_1) \times (0, T_2)$,avec $d < +\infty$, $T_i < +\infty$, ($i = 1.2$).

On considère l'equation pluri-hyperbolique suivante

$$\mathcal{L}u = u_{t_1 t_2} - \frac{1}{x}(xu_x)_x = f(x, t_1, t_2). \qquad ((3.1))$$

On associe à l'equation (3.1) les conditions initiales :

$$\ell_1 u = u(x, t_1, 0) = H_1(x, t_1), \qquad ((3.2))$$

$$\ell_2 u = u(x, 0, t_2) = H_2(x, t_2), \qquad ((3.3))$$

la condition de Newmann

$$u_x(d, t_1, t_2) = g_1(t_1, t_2) \qquad ((3.4))$$

et la condition intégrale avec poids :

$$\int_0^d xudx = g_2(t_1, t_2), \qquad ((3.5))$$

où f, H_i, g_i, $(i = 1.2)$; sont des fonctions connues.

On suppose que les conditions initiales vérifient les conditions de compatibilité suivantes :

$$\frac{\partial H_1(d, t_1)}{\partial x} = g_1(t_1, 0),$$

$$\int_0^d xH_1(x, t_1)\, dx = g_2(t_1, 0),$$

$$\frac{\partial H_2(d, t_2)}{\partial x} = g_1(0, t_2),$$

$$\int_0^d xH_2(x, t_2)\, dx = g_2(0, t_2),$$

et

$$H_1(x, 0) = H_2(x, 0).$$

Dans ce chapitre, on veut démontrer l'existence, l'unicité ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème posé.

Au point de vue de la méthode utilisée, il est préférable de transformer le problème(3.1)-(3.5) avec onditions aux limites non homogènes (3.4)-(3.5), à un problème équivalent avec conditions aux limtes homogènes.

Pour cela, on introduit une nouvelle fonction v définie par :

$$v = u - u_0,$$

où u_0 vérifie les conditions (3.4)-(3.5).

On trouve:

$$u_0 = xg_1 + \frac{12}{d^4}(x - d)^2\left(g_2 - \frac{d^3}{3}g_1\right).$$

Alors au lieu du problème (3.1)-(3.5),on considère le problème homogène correspondant suivant :

$$\mathcal{L}v=\mathcal{L}u-\mathcal{L}u_0=g. \tag{3.6}$$

$$\ell_1 v = v\,(x, t_1, 0) = \ell_1 u - \ell_1 u_0 = h_1\,(x, t_1)\,, \tag{3.7}$$

$$\ell_2 v = v\,(x, 0, t_2) = \ell_2 u - \ell_2 u_0 = h_2\,(x, t_2)\,, \tag{3.8}$$

$$v_x\,(d, t_1, t_2) = 0, \tag{3.9}$$

$$\int_0^d xv\,(x, t_1, t_2)\,dx = 0. \tag{3.10}$$

Ainsi au lieu de cherecher la fonction u solution du problème (3.1)-(3.5), on cherche la fonction v solution du problème (3.6)-(3.10) et le problème (3.1)-(3.5) aura lieu la solution $u = v + u_0$.

Remarque. Dans tous ce que suit, on considère la notation u au lieu de v.

3.2 Espaces fonctionnels associés :

Pour l'étude du problème posé (3.1)-(3.5), introduisons tout d'abord certains espaces fonctonnels qui nous sont nécessaires.

Soit $L^2_\rho\,(Q)$ l'espace de Hilbert des fonctions(classes)de $L^2\,(Q)$ avec poids ayant la norme finie :

$$\|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} = \int_Q xu^2 dxdt.$$

Le produit scalaire dans $L^2_\rho\,(Q)$ est défini par :

$$(u, v)_{L^2_\rho(Q)} = (xu, v)_{L^2(Q)}\,.$$

Soit $V^{1,1}_\rho\,(Q_i)\,, (i = 1, 2),$ l'espace de Hilbert ayant la norme finie :

$$\|u\|^2_{V^{1,1}_\rho(Q_i)} = \|u\|_{L^2_\rho(Q_i)} + \|u_x\|_{L^2_\rho(Q_i)} + \|u_{t_i}\|_{L^2_\rho(Q_i)}\,.$$

et le produit scalaire :

$$(u,v)_{V_\rho^{1,1}(Q_i)} = (u,v)_{L_\rho^2(Q_i)} + (u_x, v_x)_{L_\rho^2(Q_i)} + (u_{t_i}, v_{t_i})_{L_\rho^2(Q_i)} .$$

Le problème(3.6)-(3.10) peut être considérer comme la résolution de l'equation opérationnelle suivante :

$$Lu = \mathcal{F},$$

où $\quad L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2) \quad$ et $\mathcal{F} = (g, h_1, h_2)$.

L :est un opérateur défini de E dans H :

E : est l'espace de Banach formé par les fonctions $u \in L_\rho^2(Q)$, satisfaisant les conditions (3.6)-(3.10),

avec la norme finie :

$$\begin{aligned} \|u\|_E^2 &= \sup_{0 \le \tau_2 \le T_2} \left\{ \|u(.,t_1,\tau_2)\|^2_{V_\rho^{1,1}(Q_1)} + \|\Im(\xi u_{t_1}(.,t_1,\tau_2))\|^2_{L^2(Q_1)} \right\} \\ &\quad + \sup_{0 \le \tau_1 \le T_1} \left\{ \|u(.,\tau_1,t_2)\|^2_{V_\rho^{1,1}(Q_2)} + \|\Im(\xi u_{t_2}(.,\tau_1,t_2))\|^2_{L^2(Q_2)} \right\}. \end{aligned}$$

H : est l'espace de Hilbert $L_\rho^2(Q) \times V_\rho^{1,1}(Q_1) \times V_\rho^{1,1}(Q_2)$, formé par les éléments $\mathcal{F} = (g, h_1, h_2)$,

avec la norme finie :

$$\|\mathcal{F}\|_H^2 = \|\mathcal{L}u\|_{L_\rho^2(Q)} + \|h_1\|_{V_\rho^{1,1}(Q_1)} + \|h_2\|_{V_\rho^{1,1}(Q_2)} .$$

Soit $D(L) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^2(Q) : u_x, u_{xx}, u_{t_i}, u_{t_i t_j}, u_{xt_i} \in L^2(Q), \\ (i,j = 1.2 \ , i \neq j) \end{array} \right\}$ et u satisfait les conditions (3.9)-(3.10).

*** Notations :**

Dans les §-paragraphes suivants, on utilise les notations :

$$Q_\tau = (0,d) \times (0,\tau_1) \times (0,\tau_2), \qquad Q_{\tau_i} = (0,d) \times (0,\tau_i),$$

$$Q_i = (0,d) \times (0,T_i) : \quad (0 \le \tau_i \le T_i et \ i = 1,2),$$

$$Q_s = (0, d) \times (s_1, T_1) \times (s_2, T_2.)\,,$$

$$Q_{s_i} = (0, d) \times (s_i, T_i) \ : \quad (0 \leq s_i \leq T_i \ et \ i = 1, 2).$$

Et on désigne par :

$$\int_Q f,$$

au lieu de

$$\int_Q f(x)dx,$$

par :

$$\int_{\Omega_1} \cdots \int_{\Omega i-1} \cdot \int_{\Omega_{i+1}} \cdots \int_{\Omega_n} f(x_i) \Big|_{x_i = x_i^0}^{x_i^1}\,,$$

au lieu de :

$$\int_{\Omega_1} .. \int_{\Omega i-1} \cdot \int_{\Omega_{i+1}} .. \int_{\Omega_n} f(x_{1,} .., x_{i-1}, x_i \,, x_{i+1}, .., x_n \,) dx..dx_{i-1} dx_{i+1}..dx_n \Big|_{x_i = x_i^0}^{x_i^1}$$

et par :

$$u_{x^i}$$

au lieu de :

$$\partial^i u / \partial x^i$$

3.3 Estimation a priori et ses conséquences :

Théorème3.1 :
Pour toute fonction $u \in D(L)$, il existe une constante $c > 0$ indépendante de u telle que :

$$\|u\|_E \leq c \,\|Lu\|_F \qquad ((3.11))$$

Preuve.

Considérons le produit scalaire dans $L^{\,2}(Q_\tau)$ de l'equation (3.6) et l'opérateur intégro-différentiel :

$$Mu = x\left(u_{t_1} + u_{t_2}\right) - x\Im_x^2\left(\rho\left(u_{t_1} + u_{t_2}\right)\right)$$

où

$$\Im_x^2\left(\rho h\right) = \int_0^x \left(\int_0^\xi \eta h d\eta\right) d\xi.$$

on a :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2_\rho(Q^\tau)} &= \int_{Q^\tau} x(u_{t_1} + u_{t_2})\left(u_{t_1 t_2} - \frac{1}{x}(xu_x)_x\right) \qquad ((3.12))\\
&- \int_{Q^\tau} x\Im_x^2(\rho u_{t_1} + u_{t_2})\left(u_{t_1 t_2} - \frac{1}{x}(xu_x)_x\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &= \int_{Q_\tau} xu_{t_1 t_2}(u_{t_1} + u_{t_2})\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_i}} x\left(u_{t_i}\right)^2(\tau_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_i}} x\left(\frac{\partial h_i}{\partial t_i}\right)^2,\ i \neq j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &= -\int_{Q_\tau} u_{t_1 t_2}.x\Im_x^2\left(\rho\left(u_{t_1} + u_{t_2}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{2}\int_{Q_T}\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\Im_x\left(\rho u_{t_1 t_2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_i}}\left(\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\right)^2(\tau_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_i}}\left(\Im_x\left(\rho\frac{\partial h_i}{\partial t_i}\right)\right)^2, i \neq j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) &= -\int_{Q_\tau} u_{xx}.x\left(u_{t_1} + u_{t_2}\right) - \int_{Q_\tau} u_x.\left(u_{t_1} + u_{t_2}\right)\\
&= \int_{Q_\tau} u_x.\left(u_{t_1} + u_{t_2}\right) - \int_{Q_\tau} u_x.\left(u_{t_1} + u_{t_2}\right) + \int_{Q_\tau} xu_x.\left(u_{t_1 x} + u_{t_2 x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_i}} x\left(u_x\right)^2(\tau_j) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_i}} x\left(\frac{\partial hi}{\partial x}\right)^2.(i \neq j),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(4) &= \int_{Q_\tau} u_x.\Im_x^2\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right)+\int_{Q_\tau} u_{xx}.x\Im_x^2\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right)\\
&= \int_{Q_\tau} u_x.\Im_x^2\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right)-\int_{Q_\tau} xu_x.\Im_x\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right)\\
&\quad -\int_{Q_\tau} u_x.\Im_x^2\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right)\\
&= -\int_{Q_\tau} xu_x.\Im_x\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right).
\end{aligned}
$$

En substituant (1)-(4)dans (3.12), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q\tau_i} x\left(u_{t_i}\right)^2(\tau_j)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q\tau_i}\left(\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\right)^2(\tau_j)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q\tau_i} x\left(u_x\right)^2(\tau_j)\\
=\; &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q\tau_i} x\left(\frac{\partial hi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q\tau_i}\left(\Im_x\left(\rho\frac{\partial h_i}{\partial t_i}\right)\right)^2\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q\tau_i} x\left(\frac{\partial h_i}{\partial t_i}\right)^2+\\
&+\int_{Q_\tau} xu_x.\Im_x\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right)+\int_{Q_\tau}\mathcal{L}u.x\left(v_{t_1}+u_{t_2}\right)\\
&-\int_{Q_\tau}\mathcal{L}u.x\Im_x^2\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right). \qquad ((3.13))
\end{aligned}
$$

Estimons les trois derniers termes du membre droit de (3.13), à l'aide de l'inégalité de Cauchy avec ε.

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_\tau} xu_x.\Im_x\left(\rho\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right)\right) \qquad ((3.14))\\
\leq\; & d\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q_\tau)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\right\|^2_{L^2(Q_\tau)}
\end{aligned}
$$

$$\int_{Q_\tau} \mathcal{L}u.x\,(u_{t_1}+u_{t_2}) \qquad ((3.15))$$

$$\leq \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{t_i}\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}$$

$$-\int_{Q_\tau} \mathcal{L}u.x\Im_x^2\left(\rho\,(u_{t_1}+u_{t_2})\right) \qquad ((3.16))$$

$$\leq \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)} + \frac{d^3}{4}\sum_{i=1}^{2}\|\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\|^2_{L^2(Q_T)}.$$

Le deuxième terme du membre droit de (3.13), peut être estimé comme suit

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{T_i}}\left(\Im_x\left(\rho\frac{\partial h_i}{\partial t_i}\right)\right)^2$$

$$\leq \frac{d^3}{4}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{T_i}} x\left(\frac{\partial h_i}{\partial t_i}\right)^2. \qquad ((3.17))$$

En substituant (3.14)-(3.17) dans (3.13),on obtient :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{T_i}} x\,(u_{t_i})^2(\tau_j) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{T_i}}\left(\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\right)^2(\tau_j)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{T_i}} x u_x^2(\tau_j)$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{T_i}} x\left(\frac{\partial hi}{\partial x}\right)^2 + (\frac{d^3}{4}+\frac{1}{2})\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{T_i}} x\left(\frac{\partial hi}{\partial ti}\right)^2$$

$$+2\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{t_i}\|^2_{L^2_\rho(Q_T)} + d\,\|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}$$

$$+(\frac{1}{2}+\frac{d^3}{4})\sum_{i=1}^{2}\|\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\|^2_{L^2(Q_T)}. \qquad ((3.18))$$

En vertu des inégalités élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\|u\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})} &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+\frac{1}{2}\left\|u_{t_j}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_T)} \\ +\frac{1}{2}\left\|h_i\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}\cdot,(i,j &= 1.2, i\neq j). \end{aligned}$$

et de l'inégalité (3.18),il vient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|u\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|u_x\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}+ \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|u_{t_i}\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2(Q_{T i})} \\ \leq\ & 2\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|h_i\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial hi}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})} \\ &\left(\frac{d^3}{12}+\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial hi}{\partial ti}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}+ \\ &+\|u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+d\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+\sum_{i=1}^{2}\left\|u_{t_i}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+ \\ &+\left(\frac{1}{2}+\frac{d^3}{4}\right)\sum_{i=1}^{2}\left\|\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\right\|^2_{L^2(Q_T)}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

D'où l'inégalité :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{2}\left\|u\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}+\sum_{i=1}^{2}\left\|u_x\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})} \\ &+\sum_{i=1}^{2}\left\|u_{t_i}\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_{T i})}+\sum_{i=1}^{2}\left\|\Im_x\left(\rho u_{t_i}\right)\left(\tau_j\right)\right\|^2_{L^2(Q_{T i})} \\ \leq\ & k\left\{\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+\sum_{i=1}^{2}\left\|h_i\right\|^2_{V^{1.1}_\rho(Q_{T i})}\right. \end{aligned}$$

$$+\|u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+\|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+\sum_{i=1}^{2}\|u_{t_i}\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{2}\|\Im_x(\rho u_{t_i})\|^2_{L^2(Q_T)}\right\}, \tag{3.20}$$

où

$$k=\max\left\{d^3+1,4,2d\right\}.$$

Grâce au lemme de Gronwall forme 2, il s'ensuit de (3.10) l'inégalité suivante :

$$\sum_{i=1}^{2}\|u(\tau_j)\|^2_{V^{1,1}_\rho(Q_{T_i})}+\sum_{i=1}^{2}\|\Im_x(\rho u_{t_i})(\tau_j)\|^2_{L^2(Q_{T_i})}$$

$$\leq \; ke^{2k(T_1+T_2)}\left\{\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\rho(Q_T)}+\sum_{i=1}^{2}\|h_i\|^2_{V^{1,1}_\rho(Q_{T_i})}\right\},\; i\neq j \tag{3.21}$$

Comme le membre de droite l'estimation (3.21) est indépendante de $\tau_i,(i=1.2)$. En passant au suprumum

par rapport à τ_i de 0 à T_i,il s'ensuit, alors l'inégalité de l'énergie désirée (3.11) avec $c=\sqrt[2]{k}e^{k(T_1+T_2)}$.

Proposition 3.1 :

L'opérateur $L:E\longrightarrow H$, est fermable.

Preuve :

La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition 2.1 .

On désigne par $\overline{L}$ sa fermuture et par $D(\overline{L})$ son domaine de définition.

Définition 3.1 :

On appelle solution forte du problème (3.6)-(3.10), la solution de l'equation opérationnelle :

$$\overline{L}u=F.$$

En passant à la limite, (3.11) peut être prolongée à $\overline{L}$, soit :

$$\|u\|_E\leq c\left\|\overline{L}u\right\|_H,$$

pour tout $u \in D(\overline{L}\ )$.

D'où on a :

corollaire 3.1 :

La solution forte du problème (3.6)-(3.10), si elle existe, elle est unique et dépend continûement des éléments : $\mathcal{F} = (g, h_1, h_2) \in H$.

corollaire 3.2 :

L'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$,de l'opérateur $\overline{L}$est égale à la fermuture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.

Preuve :

La démonstration de ce corollaire est analogue à celle du corollaire 2.2 .

3.4 Existence de la solution :

Pour montrer l'existence de la solution forte, il suffit de montrer que : $\overline{R(L)} = H$, cela est équivalent à montrer que $R(L)^{\perp} \equiv \{0\}$.

Dans ce but on démontre d'abord la proposition suivante :

Proposition 3.2 :

Si pour toute fonction $w \in L^2\,(Q)$,on a :

$$(\mathcal{L}u, w)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \qquad \forall u \in D_0(L), \tag{3.22}$$

alors w s'annule p.p sur Q.

Preuve :

Soit u la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_2} \left(u - \Im_x^2\,(\rho u)\right)(x, t_1, \xi_2)\, d\xi_2 \\ & + \int_0^{t_1} \left(u - \Im_x^2\,(\rho u)\right)(x, \xi_1, t_2)\, d\xi_1 \\ = \;& g(x, t_1, t_2), \end{aligned} \tag{3.23}$$

où

$$g\,(x, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{T_1} \int_{t_2}^{T_2} w\,(x, \xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2. \tag{3.24}$$

L'équation (3.22) est équivalante à l'equation :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t_1 \partial t_2}(x, t_1, t_2) = (u_{t_1} + u_{t_2}) - \Im_x^2 (\rho (u_{t_1} + u_{t_2})) \tag{3.25}$$

Des équations (3.24) et (3.25), on a

$$w = (u_{t_1} + u_{t_2}) - \Im_x^2 (\rho (u_{t_1} + u_{t_2})) . \tag{3.26}$$

Soit u la fonction définie par :

$$u(x, t_1, t_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t_i \leq s_i \\ \int\limits_{s_1}^{t_1} \int\limits_{s_2}^{t_2} u_{\tau_1 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 & s_i \leq t_i \leq T_i \end{cases} \tag{3.27}$$

Lemme :
La fonction w définie par la relation (3.26) est dans $L^2(Q)$.
Preuve :
Il est évident d'aprés la définition de $D(L)$ que $w \in L^2(Q)$.
*Revenons maintenant à la preuve de la proposition précédante.
En remplaçant w par sa représentation (3.26) dans la relation (3.22), on trouve :

$$\begin{aligned} & \left(u_{t_1 t_2}, u_{t_1}\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} - \left(u_{t_1 t_2}, \Im_x^2 (\rho u_{t_1})\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} \\ & - \left(u_x, u_{t_1}\right)_{L^2.(Q)} + \left(u_x, \Im_x^2 (\rho u_{t_1})\right)_{L^2.(Q)} \\ & - \left(u_{xx}, u_{t_1}\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} + \left(u_{xx}, \Im_x^2 (\rho u_{t_1})\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} \\ & + \left(u_{t_1 t_2}, u_{t_2}\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} - \left(u_{t_1 t_2}, \Im_x^2 (\rho u_{t_2})\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} \\ & - \left(u_x, u_{t_2}\right)_{L^2.(Q)} + \left(u_x, \Im_x^2 (\rho u_{t_2})\right)_{L^2.(Q)} \\ & - \left(u_{xx}, u_{t_2}\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} + \left(u_{xx}, \Im_x^2 (\rho u_{t_2})\right)_{L^2_{\rho}.(Q)} \\ = \ & 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

En intégant par parties chaque terme de l'égalité (3.28), en tenant compte des conditions (3.6)-(3.10) et de la forme particulière de la solution u définie par les relations (3.24) et (3.27), on ramène l'égalité (3.28) à une autre plus simlpe.

$$
\begin{aligned}
(1) &= \left(u_{t_1t_2}, u_{t_1}+u_{t_2}\right)_{L^2_{\rho}\cdot(Q)} \\
&= \int_Q x u_{t_1t_2}\left(u_{t_1}+u_{t_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{t_i}(T_j)\|^2_{L^2_{\rho}\cdot(Qs_i)} \qquad (i,j=1.2, i\neq j),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= -\left(u_{t_1t_2}, \Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right)\right)_{L^2_{\rho}\cdot(Q)} \\
&= \int_Q x u_{t_1t_2}\Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|\Im_x\left(\rho u_{t_i}(T_j)\right\|^2_{L^2(Q_{s_i})}, \qquad (i,j=1,2.\ \ i\neq j),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= -\left(u_x, u_{t_1}+u_{t_2}\right)_{L^2\cdot(Q)} - \left(u_{xx}, u_{t_1}+u_{t_2}\right)_{L^2_{\rho}\cdot(Q)} \\
&= -\int_Q u_x(u_{t_1}+u_{t_2}) - \int_Q x u_{xx}(u_{t_1}+u_{t_2}) \\
&= -\int_{s_2}^{T_2}\int_{s_1}^{T_1} x u_x(u_{t_1}+u_{t_2})\Big|_{x=0}^{x=d} + \int_{Q_s} u_x(u_{t_1}+u_{t_2}) \\
&\quad -\int_{Q_s} u_x(u_{t_1}+u_{t_2}) + \int_{Q_s} x u_x(u_{xt_1}+u_{xt_2}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_x(T_j\|^2_{L^2_{\rho}(Q_{s_i})}, \qquad (i,j=1,2.\ \ i\neq j),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(4) &= \left(u_x, \Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right)\right)_{L^2(Q)} + \left(u_{xx}, \Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right)\right)_{L^2_{\rho}(Q)} \\
&= \int_{Q_s} u_x\Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right) + \int_{Q_s} x u_{xx}\Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right) \\
&= \int_{s_2}^{T_2}\int_{s_1}^{T_1} x u_x\Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right)\Big|_{x=0}^{x=d} - \int_{Q_s} u_x\Im_x^2\left(\rho u_{t_1}+\rho u_{t_2}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\int_{Q_s} u_x \Im_x^2 (\rho u_{t_1} + \rho u_{t_2}) + \int_{Q_s} x u_x \Im_x (\rho u_{t_1} + \rho u_{t_2})$$

$$= \int_{Q_s} x u_x \Im_x (\rho u_{t_1} + \rho u_{t_2}).$$

En substituons (1)-(4) dans (3.28), on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \|u_{t_i}(T_j)\|^2_{L^2_\rho(Qs_i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \|\Im_x (\rho u_{t_i}(T_j)\|^2_{L^2(Q_{s_i})}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \|u_x(T_j\|^2_{L^2_\rho(Q_{s_i})}$$

$$= -\int_{Q_s} x u_x \Im_x (\rho u_{t_1} + \rho u_{t_2}), \qquad (i,j = 1,2.\ i \neq j). \quad (3.29)$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Cauchy avec ε pour estimer le membre droit de (3.29).

$$-\int_{Q_s} x u_x \Im_x (\rho u_{t_1} + \rho u_{t_2}) \leq \int_{Q_s} x u_x^2 + \frac{d}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_s} (\Im_x (\rho u_{t_i}))^2$$

Et par conséquent (3.29) devient :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \|u_{t_i}(T_j)\|^2_{L^2_\rho(Qs_i)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \|\Im_x (\rho u_{t_i}(T_j)\|^2_{L^2(Q_{s_i})}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \|u_x(T_j\|^2_{L^2_\rho(Q_{s_i})}$$

$$\leq C\left\{\|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \sum_{i=1}^{2}\int_{Q_s} (\Im_x (\rho u_{t_i}))^2\right\}, \qquad ((3.30))$$

où

$$C = \max(2, d).$$

En appliquant ensuite le lemme de Gronwall form 2, à l'inégalité (3.30), on obtient

$$\sum_{i=1}^{2} \|u_{t_i}(T_j)\|^2_{L^2_\rho(Qs_i)} + \sum_{i=1}^{2} \|\Im_x (\rho u_{t_i}(T_j)\|^2_{L^2(Q_{s_i})}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=1}^{2}\|u_x(T_j\|^2_{L^2_\rho(Q_{s_i})} \\
\leq\ & 0. \qquad (i,j=1,2.\ i\neq j).
\end{aligned}
$$

D'où, il s'ensuit que $w\equiv 0$ p.p dans Q_s. Puisque s est indépendant du choix de l'origine, on peut alors procéder de la même façon un nombre fini de fois pour démontrer que $w\equiv 0$ p.p dans Q.

Revenons maintenant à la démonstration de $R(L)^{\perp}\equiv\{0\}$. Soit $W=(w,w_1,w_2)\in R(L)^{\perp}$, vérifiant

$$
(\mathcal{L}u,w)_{L^2_\rho(Q)}+\sum_{i=1}^{2}(\ell_i u,w)_{H_i}=0,\qquad \forall u\in D(L). \tag{3.31}
$$

En particulier, pour $u\in D_0(L)$, (3.31) devient

$$
(\mathcal{L}u,w)_{L^2_\rho(Q)}=0,\qquad \forall u\in D_0(L) \tag{3.32}
$$

D'où à partir de la proposition 3.2 et de (3.32), on déduit que $w=0$. p.p qans Q. Et parconséquent

$$
\sum_{i=1}^{2}(\ell_i u,w)_{H_i}=0,\qquad \forall u\in D(L).
$$

puisque les $\ell_i u$, $i=1,2.$ s'annulent indépendement et les ensembles $R(\ell_i)$, $i=1,2.$ sont partout denses dans les espaces de Hilbert H_i, $i=1,2$; alors $w_1\equiv 0$, $w_2\equiv 0$, et parconséquent $W\equiv 0$, p.p dans Q. On a donc démotré le théorème

Théorème 3.2 :

Pour toute fonction $g\in L^2_\rho(Q)$, $h_1\in V^{1,1}_\rho(Q_1)$, $h_2\in V^{1,1}_\rho(Q_2)$, il existe une solution forte unique $u=\overline{L}^{-1}\mathcal{F}=\overline{L^{-1}}\mathcal{F}$ du problème (1.1)'-(1.5)', où $\mathcal{F}=(g,h_1,h_2)$ et telle que

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0\leq\tau_2\leq T_2}\left\{\|u(.,t_1,\tau_2)\|^2_{V^{1,1}_\rho(Q_1)}+\|\Im(\xi u_{t_1}(.,t_1,\tau_2))\|^2_{L^2(Q_1)}\right\} \\
&+\sup_{0\leq\tau_1\leq T_1}\left\{\|u(.,\tau_1,t_2)\|^2_{V^{1,1}_\rho(Q_2)}+\|\Im(\xi u_{t_2}(.,\tau_1,t_2))\|^2_{L^2(Q_2)}\right\} \\
\leq\ & c^2\left\{\|\mathcal{L}u\|_{L^2_\rho(Q)}+\|h_1\|_{V^{1,1}_\rho(Q_1)}+\|h_2\|_{V^{1,1}_\rho(Q_2)}\right\},
\end{aligned}
$$

où c est une constante positive indépendante de u.

CHAPITRE IV

Poblème Mixte Pour Une Equation Pluri-Parablique Singulière du Second Ordre Avec Conditions Intégrales

Chapitre 4

Problème Mixte Pour Une Equation Pluri-parabolique Singulière Avec Conditions Intégrales

4.1 Position du problème :

Dans le domaine $Q = (0, d_1) \times (0, d_2) \times (0, T_1) \times (0, T_2)$ où $0 < d_i < +\infty$, $0 < T_i < +\infty$, $(i = 1, 2)$, on considere l'équation pluri-parabolique suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= u_{t_1} + u_{t_2} - \frac{1}{x}(\alpha(t_1, t_2)xu_x)_x - \frac{\alpha(t_1, t_2)}{x^2}u_{yy} \\ &= f(x, y, t_1, t_2), \quad (x, y, t_1, t_2) \in Q, \end{aligned} \tag{4.1}$$

A cette équation, on associe les conditions initiales :

$$l_1u = u(x, y, t_1, 0) = \varphi_1(x, y, t_1), \tag{4.2}$$

$$l_2u = u(x, y, 0, t_2) = \varphi_2(x, y, t_2), \tag{4.3}$$

la condition de Dirichlet en x :

$$u(d_1, y, t_1, t_2) = 0, \tag{4.4}$$

la condition de Newmann en y :

$$u_y(x,d_2,t_1,t_2)=0, \tag{4.5}$$

et les conditions intégrales :

$$\int\limits_0^{d_1} xu(x,y,t_1,t_2)dx=0, \tag{4.6}$$

$$\int\limits_0^{d_2} u(x,y,t_1,t_2)dy=0. \tag{4.7}$$

De plus on suppose que la fonction donnée $\alpha : (t_1,t_2) \longmapsto \alpha(t_1,t_2)$ vérifie les conditions suivantes :

$$0<a_0\leq \alpha(t_1,t_2)\leq b_0, \tag{4.8}$$

$$0<a_i\leq \alpha_{t_i}\leq b_i \ \ (\ i=1.2). \tag{4.9}$$

Et $f, \varphi_i, \left(i=\overline{1.2}\right)$ sont des fonctions données, telles que les φ_i $(i = 1.2)$ satisfaisants les conditions de compatibilité :

$$\varphi_1(d_1,y,t_1)=0, \qquad \frac{\partial\varphi_1(x,d_2,t_1)}{\partial y}=0,$$

$$\int\limits_0^{d_1} x\,\varphi_1(x,y,t_1)dx=0, \qquad \int\limits_0^{d_2}\varphi_1(x,y,t_1)dy=0$$

$$\varphi_2(d_1,y,t_2)=0, \qquad \frac{\partial\varphi_2(x,d_2,t_2)}{\partial y}=0,$$

$$\int\limits_0^{d_1} x\varphi_2(x,y,t_2)dx=0, \qquad \int\limits_0^{d_2}\varphi_2(x,y,t_2)dy=0,$$

et

$$\varphi_1(x,y,0)=\varphi_2(x,y,0).$$

Le problème (4.1)-(4.7) peut être mis sous la forme opérationnelle :

$$Lu = F,$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell_1, \ell_2)$ et $F = (f, \varphi_1, \varphi_2)$.

Le domaine de définition de l'opérateur L est l'ensemble défini par :

$$D(L) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^2(Q) : u_{t_i}, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xt_i} \in L^2(Q), \\ (i = 1, 2) \end{array} \right\},$$

sachant que les conditions (4.4)-(4.7) sont satisfaite

*** Notations :**

Dans les §-paragraphes suivants, on utilise les notations :

$$Q_\tau = (0, d) \times (0, \tau_1) \times (0, \tau_2), \quad Q_{\tau_i} = (0, d) \times (0, \tau_i),$$

$$Q_i = (0, d) \times (0, T_i) : \quad (0 \leq \tau_i \leq T_i et\ i = 1, 2),$$

$$Q_s = (0, d) \times (s_1, T_1) \times (s_2, T_2.),$$

$$Q_{s_i} = (0, d) \times (s_i, T_i) \ : \quad (0 \leq s_i \leq T_i \ et\ i = 1, 2).$$

Et on désigne par :

$$\int_Q f,$$

au lieu de

$$\int_Q f(x) dx,$$

par :

$$\int_{\Omega_1} \cdots \int_{\Omega i-1} \cdot \int_{\Omega_{i+1}} \cdots \int_{\Omega_n} f(x_i) \Big|_{x_i = x_i^0}^{x_i^1},$$

au lieu de :

$$\int_{\Omega_1}..\int_{\Omega i-1}.\int_{\Omega_{i+1}}..\int_{\Omega_n} f(x_1,..,x_{i-1},x_i\,,x_{i+1},..,x_n\,)dx..dx_{i-1}dx_{i+1}..dx_n\Big|_{x_i=x_i^0}^{x_i^1}$$

et par :

$$u_{x^i}$$

au lieu de :

$$\partial^i u/\partial x^i$$

4.2 Espaces fonctionnels associés.

L : est l'opérateur considéré de l'espace E dans H tels que :

E :est l'espace de Banach des fonctions (classes) $u \in L^2(Q)$ vérifiant (4.4)-(4.7)

dont la norme est donnée par :

$$\|u\|_E^2 = \sup_{0\leq\tau_i\leq T_i}\left\{\sum_{i=1}^{2}\Big(\int_{Q_j}(x+x^3)u^2(\tau_i)+\int_{Qj}x^3(\Im_y u)^2(\tau_i) + \int_{Q_j}x^3(\Im_y u_x)^2(\tau_i)\Big)\right\}+\int_Q x^3 u_x^2.$$

H : est l'espace de Hilbert ayant la norme finie :

$$\begin{aligned} \|F\|_H^2 &= \|f\|^2_{L^2(Q)} + \sum_{j=1}^{2} \left\| \sqrt{x+x^3}\varphi_j \right\|^2_{L^2(Q_j)} + \sum_{j=1}^{2} \left\| x^{3/2}\Im_y(\varphi_j) \right\|^2_{L^2(Q_j)} + \\ &+ \sum_{j=1}^{2} \left\| x(\Im_y(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}) \right\|^2_{L^2(Q_j)} . \end{aligned}$$

On pose : $H = H_0 \times H_1 \times H_2$.

Dans ce chapitre, en se basant sur une estimation a priori, et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème considéré, on démontre l'existence, l'unicité de la solution forte

du problème (4.1)-(4.7), ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème posé.

4.3 Estimation à priori

Théorème 4.1 :

Si on suppose que les conditions (4.8) et (4.9) sont satisfaites, alors pour toute fonction $u \in D(L)$

on a l'inégalité de l'energie :

$$\|u\|_E \leq c \|Lu\|_H , \tag{(4.10)}$$

où c est une constante positive indépendante de la solution u.

Preuve : Considérons le produit scalaire dans $L^2(Q_T)$ de l'équation (4.1) et l'opérateur intégro-différentiel :

$$\begin{aligned} Mu &= -x^3\Im_y^2 u + a_0 x^3 \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) \\ &\quad -x^3\Im_y^2(u_{t_1} + u_{t_2}) + \\ &\quad +(1+\frac{b_0^2}{2})x^3\Im_y u_y + 2\alpha x^2 \Im_y^2 u_x . \end{aligned} \tag{(4.11)}$$

On a :

$$
\begin{aligned}
(1) &= -\int\limits_{Q_\tau} x^3 \Im_y^2 u.(u_{t_1} + u_{t_2}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{Q_{\tau_j}} x^3 (\Im_y u)^2 \Big|_{t_i=0}^{\tau_i}, \qquad\qquad (j \neq i = 1, 2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= \int\limits_{Q_\tau} x^2 (\alpha x u_x)_x . \Im_y^2 u \\
&= -\int\limits_{Q_\tau} 2\alpha x^2 u_x \Im_y^2 u - \int\limits_{Q_\tau} \alpha x^3 u_x \Im_y^2 u_x \\
&= \int\limits_{Q_\tau} 2\alpha x^2 \Im_y u_x \Im_y u + \int\limits_{Q_\tau} \alpha x^3 (\Im_y u_x)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= \int\limits_{Q_\tau} x u_{yy} \Im_y^2 u \\
&= -\int x \alpha u_y \Im_y u \\
&= \int\limits_{Q_\tau} x \alpha u^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (\mathcal{M}_2 u, \mathcal{L} u)_{Q_\tau} \\
= & \int\limits_{Q_\tau} (a_0 x^3 \Im_{xyy} (\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}))(u_{t_1} + u_{t_2}) \\
& + \int\limits_{Q_\tau} (a_0 x^3 \Im_{xyy} (\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}))(-\frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x - \frac{\alpha}{x^2} u_{yy})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) &= \int\limits_{Q_\tau} a_0 x^3 \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).(u_{t_1} + u_{t_2}) \\
&= -2a_0 \int\limits_{Q_\tau} x\Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\Im_x(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) \\
&\quad -a_0 \int\limits_{Q_\tau} x^2 \Im_y^2(x u_{t_1} + x u_{t_2})\Im_x(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) \\
&= 2a_0 \int\limits_{Q_\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}))^2 \\
&\quad + \frac{a_0}{2} \int\limits_0^{d_2}\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\tau_2} x^2(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})^2 \Big|_{x=0}^{d_1} \\
&\quad -a_0 \int\limits_{Q_\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}))^2 \\
&= a_0 \int\limits_{Q_\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\ )^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= -\int\limits_{Q_\tau} a_0 x^2 \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).(\alpha x u_x)_x \\
&= 2a_0 \int\limits_{Q_\tau} \alpha x^2 \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) u_x \\
&\quad + a_0 \int\limits_{Q_\tau} \alpha x^4 \Im_y^2(u_{t_1} + u_{t_2}) u_x \\
&= -2a_0 \int\limits_{Q_\tau} \alpha x^2 \Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\Im_y u_x \\
&\quad - a_0 \int\limits_{Q_\tau} \alpha x^4 \Im_y u_x \Im_y(u_{t_1} + u_{t_2}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= -\int\limits_{Q_\tau} a_0 x \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).(\alpha u_{yy}) \\
&= \int\limits_{Q_\tau} a_0 \alpha x \Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).u_y.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{M}_3 u, \mathcal{L}u)_{Q_\tau} \\
= &\int\limits_{Q_\tau} -x^3 \Im_y^2(u_{t_1} + u_{t_2}).(u_{t_1} + u_{t_2} - \frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x - \frac{\alpha}{x^2} u_{yy}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) &= \int\limits_{Q_\tau} -x^3 \Im_y^2(u_{t_1} + u_{t_2}).(u_{t_1} + u_{t_2}) \\
&= \int\limits_{Q_\tau} x^3 \left(\Im_y(u_{t_1} + u_{t_2})\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= \int\limits_{Q_\tau} x^2 \Im_y^2(u_{t_1} + u_{t_2}).(x\alpha u_x)_x \\
&= \int\limits_{Q_\tau} -2\,\alpha x^2 \Im_y^2(u_{t_1} + u_{t_2}).u_x \\
&- \int\limits_{Q_\tau} \alpha x^3 \Im_y^2(u_{xt_1} + u_{xt_2}).u_x \\
&= \int\limits_{Q_\tau} 2\,\alpha x^2 \Im_y(u_{t_1} + u_{t_2}).\Im_y\,(u_x) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \int\limits_{Q\tau_j} \alpha x^3 \left(\Im_y(u_x)\right)^2 \Big|_{t_i=0}^{\tau_i}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_\tau}\alpha_{t_i}x^3\left(\Im_y(u_x)\right)^2, \quad (i,j=1.2 \quad \text{et} \quad i\neq j),$$

$$\begin{aligned}
(3) &= \int\limits_{Q_\tau} x\Im_y^2(u_{t_1}+u_{t_2}).\alpha u_{yy} \\
&= \int\limits_{Q_\tau} \alpha x(u_{t_1}+u_{t_2}).u \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_{\tau_j}} \alpha x u^2\Big|_{t_i=0}^{\tau_i} -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_\tau}\alpha_{t_i}xu^2, \quad (i,j \quad = \quad 1.2, \text{et } i\neq j),$$

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{M}_4u,\mathcal{L}u)_{Q_\tau} \\
= &\int\limits_{Q_\tau}(1+\frac{b_0^2}{2})x^3\Im_y(u_y).(u_{t_1}+u_{t_2}-\frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x-\frac{\alpha}{x^2}u_{yy}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) &= \int\limits_{Q_\tau}(1+\frac{b_0^2}{2})x^3\Im_y(u_y).(u_{t_1}+u_{t_2}) \\
&= (1+\frac{b_0^2}{2})\int\limits_{Q_\tau}x^3u.(u_{t_1}+u_{t_2}) \\
&= \frac{1}{2}(1+\frac{b_0^2}{2})\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_{\tau_j}}x^3u^2\Big|_{t_i=0}^{\tau_i}, \quad (i,j=1.2 \text{ et } i\neq j),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &= \int_{Q_\tau} -(1+\frac{b_0^2}{2})x^2\Im_y(u_y).(\alpha x u_x)_x \\
&= \int_{Q_\tau} 2\,(1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x^2\Im_y(u_y).u_x \\
&\quad + \int_{Q_\tau} (1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x^3\Im_y(u_{yx}).u_x \\
&= -\int_{Q_\tau} 2\,(1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x^2 u_y.\Im_y u_x \\
&\quad - \int_{Q_\tau} (1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x^3 u_{yx}.\Im_y u_x \\
&= \int_{Q_\tau} (1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x^3 u_x^2 - 2\int_{Q_\tau} (1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x u^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) &= \int_{Q_\tau} -\,(1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x\Im_y(u_y).u_{yy} \\
&= \int_{Q_\tau} (1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x u_y^2.
\end{aligned}$$

$$(\mathcal{M}_5 u, \mathcal{L}u)_{Q_\tau}$$

$$= \int_{Q_\tau} 2\alpha x^2\Im_y^2(u_x).(u_{t_1}+u_{t_2}-\frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x - \frac{\alpha}{x^2}u_{yy}).$$

$$\begin{aligned}
(1) &= \int_{Q_\tau} 2\alpha x^2\Im_y^2(u_x).(u_{t_1}+u_{t_2}) \\
&= -\int_{Q_\tau} 2\alpha x^2\Im_y(u_x).\Im_y(u_{t_1}+u_{t_2}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= \int_{Q_\tau} -2\alpha x \Im_y^2(u_x).(\alpha x u_x)_x \\
&= \int_{Q_\tau} -2.\alpha x \Im_y(u_x).(\alpha x \Im_y u_x)_x \\
&= \int_0^{d_2}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} (\alpha x \Im_y u_x)^2 \mid_{x=d_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= \int_{Q_\tau} -2\alpha^2 \Im_y^2(u_x).(u_{yy}) \\
&= \int_{Q_\tau} 2\alpha^2 \Im_y(u_x).(u_y) \\
&= \int_0^{d_2}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} (\alpha u)^2 \mid_{x=0} .
\end{aligned}
$$

En sommant: $\sum_{i=1}^{5} (\mathcal{M}_i u, \mathcal{L}u)_{Q^\tau}$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y u)^2 \Big|_{t_i=0}^{\tau_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} \alpha x^3 \left(\Im_y(u_x)\right)^2 \Big|_{t_i=0}^{\tau_i} + \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} \alpha x u^2 \Big|_{t_i=0}^{\tau_i} + \frac{1}{2}(1+\frac{b_0^2}{2})\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3 u^2 \Big|_{t_i=0}^{\tau_i}) + \\
&+\int_{Q_\tau} \alpha x^3 (\Im_y u_x)^2 + \int_{Q^\tau} x\alpha u^2 + \ a_0 \int_{Q_\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\ )^2 \\
&+\int_{Q_\tau} x^3 \left(\Im_y(u_{t_1}+u_{t_2})\right)^2 + \int_{Q_\tau} (1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x^3 u_x^2
\end{aligned}
$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}(1+\frac{b_0^2}{2})\alpha x {u_y}^2$$

$$+\int_0^{d_2}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\alpha x\Im_y u_x)^2\mid_{x=d_1}+\int_0^{d_2}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2}(\alpha u)^2\mid_{x=0}+$$

$$=\ -\int\limits_{Q_\tau}2\alpha x^2\Im_y u_x\Im_y u+a_0\int\limits_{Q_\tau}\alpha x^4\Im_y u_x\Im_y(u_{t_1}+u_{t_2})+$$

$$+2a_0\int\limits_{Q_\tau}\alpha x^2\Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2})\Im_y u_x$$

$$-\int\limits_{Q_\tau}a_0\alpha x\Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2}).u_y$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\mathcal{L}u.Mu\ +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\alpha_{t_i}x^3\left(\Im_y(u_x)\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{Q_T}\alpha_{t_i}xu^2$$

$$+2\int\limits_{Q_\tau}(1+\frac{b_0^2}{2})\alpha xu^2. \qquad ((4.2))$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy pour estimer les cinq premiers termes du membre droit de (4.11) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\int_{Q_\tau}-x^3\Im_y^2u.\mathcal{L}u\ &\leq\ \frac{d_2^2}{4}\int_{Q_\tau}x^3\left(\Im_y u\right)^2\\ &+\frac{d_1^3}{2}\int_{Q_T}\left(\mathcal{L}u\right)^2,\end{aligned} \qquad (4.12)$$

$$\begin{aligned}&\int_{Q_\tau}a_0x^3\Im_{xyy}\left(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2}\right).\mathcal{L}u\\ \leq\ &\frac{a_0}{4}\int_{Q_\tau}x\left(\Im_{xy}\left(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2}\right)\right)^2\\ &+\frac{a_0d_1^5d_2^2}{2}\int_{Q_T}\left(\mathcal{L}u\right)^2,\end{aligned} \qquad (4.13)$$

$$\int_{Q_\tau} -x^3 \Im_y^2 \left(u_{t_1} + u_{t_2}\right).\mathcal{L}u$$
$$\leq \frac{1}{4}\int_{Q_\tau} x^3 \left(\Im_y \left(u_{t_1} + u_{t_2}\right)\right)^2 + d_1^3 d_2 \int_{Q\tau} \left(\mathcal{L}u\right)^2, \tag{4.14}$$

$$\int_{Q_\tau} (1 + \frac{b_0^2}{2}) x^3 \Im_y \left(u_y\right).\mathcal{L}u$$
$$\leq a_0 \int_{Q_\tau} x u_y^2 + \frac{1}{8a_0}(1 + \frac{b_0^2}{2})^2 d_1^5 d_2^2. \int_{Q_\tau} \left(\mathcal{L}u\right)^2, \tag{4.15}$$

$$\int_{Q_\tau} 2\alpha x^2 \Im_y^2 u_x.\mathcal{L}u \leq \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \alpha x^3 (\Im_y u_x)^2$$
$$+ d_1 d_2^2 \int_{Q_\tau} \left(\mathcal{L}u\right)^2, \tag{4.16}$$

$$- \int_{Q_\tau} 2\alpha x^2 \Im_y u_x \Im_y u$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_{Q_\tau} \alpha x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2$$
$$+ b_0 d_2^2 \int_{Q_\tau} x u^2. \tag{4.17}$$

$$\int_{Q_\tau} a_0.\alpha x^4 \Im_y (u_{t_1} + u_{t_2}) \Im_y u_x$$
$$\leq \frac{3}{4}\int_{Q_\tau} x^3 \left(\Im_y (u_{t_1} + u_{t_2})\right)^2$$
$$+ \frac{a_0^2}{3} d_1^2 \int_{Q_\tau} \alpha^2 x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2, \tag{4.18}$$

$$\int_{Q_\tau} 2a_0.\alpha x^2 \Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2})\Im_y u_x$$
$$\leq \frac{a_0}{4}\int_{Q_\tau} x\left(\Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2})\right)^2$$
$$+4a_0\int_{Q_\tau} \alpha^2 x^3\left(\Im_y u_x\right)^2 \tag{4.19}$$

$$-\int_{Q_\tau} a_0\alpha x\Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2}).u_y$$
$$\leq \frac{a_0}{2}\int_{Q_\tau} x\left(\Im_{xy}\left(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2}\right)\right)^2$$
$$+\frac{a_0}{2}\int_{Q_\tau} \alpha^2 x u^2. \tag{4.20}$$

En tenant compte des conditions (4.8), (4.9) et en utilisant les inégalités (4.12)-(4.20), l'égalité (4.11) devient :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y u)^2(\tau_i)+\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3\left(\Im_y(u_x)\right)^2(\tau_i)$$
$$+\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} xu^2\,(\tau_i)+\frac{1}{2}(1+\frac{b_0^2}{2})\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3u^2\,(\tau_i)$$
$$+a_0\int_{Q_\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2})\,)^2+$$
$$+\int_{Q_\tau} x^3\left(\Im_y(u_{t_1}+u_{t_2})\right)^2+(1+\frac{b_0^2}{2})a_0\int_{Q_\tau} x^3u_x^2$$
$$+(1+\frac{b_0^2}{2})a_0\int_{Q_\tau} xu_y{}^2+$$

$$
\begin{aligned}
&+ a_0^2 \int_0^{d_2}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} (x\Im_y u_x)^2 \mid_{x=d^1} + a_0^2 \int_0^{d_2}\int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} u^2 \mid_{x=0} + a_0 \int_{Q_\tau} xu^2 \\
\leq\ & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_T} b_i x^3 \left(\Im_y(u_x)\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_T} b_i x u^2 \\
&+ b_0 d_2^2 \int_{Q_\tau} xu^2 + \frac{d_2^2}{4}\int_{Q_\tau} x^3 (\Im_y u)^2 \\
&+ \left(\frac{d_1^3}{2} + d_1 d_2^2 b_0 + \frac{(1+\frac{b_0^2}{2})^2}{4a_0}\frac{d_1^5 d_2^2}{8a_0} + \frac{d_1^5 d_2^2 a_0}{2}\right)\int_{Q_\tau} (\mathcal{L}u)^2 \\
&+ \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + 4a_0 + \frac{a_0^2 d_1^2}{3}\right) b_0^2 \int_{Q_\tau} x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2 \\
&+ \left(b_0 d_2^2 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right)\int_{Q_\tau} xu^2 + a_0\left(1 + \frac{b_0^2}{2}\right)\int_{Q_\tau} x u_y^2 \\
&+ a_0 \int_{Q_\tau} x \left(\Im_{xy}\left(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}\right)\right)^2 + \int_{Q_\tau} x^3 \left(\Im_y \left(u_{t_1} + u_{t_2}\right)\right)^2 \\
&+ \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1}{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3 (\Im_y \varphi_j)^2 + \frac{b_0}{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3 \left(\Im_y \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}\right)^2 + \right. \\
&\left. + \frac{b_0}{2}\int_{Q_{\tau_j}} x(\varphi_j)^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b_0^2}{2}\right)\int_{Q_{\tau_j}} x^3 (\varphi_j)^2 \right). \qquad (4.21)
\end{aligned}
$$

Posons :

$$
\begin{aligned}
M \;=\; \max\Bigg\{ & \frac{d_1^3}{2} + d_1 d_2^2 b_0 + \frac{(1+\frac{b_0^2}{2})^2}{4a_0}\frac{d_1^5 d_2^2}{8a_0} + \frac{d_1^5 d_2^2 a_0}{2}, \\
& \left(\frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + 4a_0 + \frac{a_0^2 d_1^2}{3}\right) b_0^2,\ b_0 d_2^2 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}, \\
& \frac{1}{2}\left(\frac{1 + b_0^2}{2}\right),\ \frac{d_2^2}{4},\ \frac{b_0}{2} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

$$
m = \min\left\{\frac{a_0}{2}, \frac{1}{2}\right\},
$$

et

$$
k = \frac{M}{m}.
$$

Aprés avoir négliger ses trois derniers termes du membre gauche, l'inégalité (4.21) prend la forme :

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y u)^2(\tau_i)+\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3\left(\Im_y(u_x)\right)^2(\tau_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} xu^2(\tau_i)+\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3u^2(\tau_i))+\int_{Q_\tau} x^3u_x^2$$

$$\leq\ k\left\{\int_{Q_\tau} x^3\left(\Im_y(u)\right)^2+\int_{Q_\tau} xu^2+\int_{Q_\tau} x^3\left(\Im_y u_x\right)^2\right.$$

$$\left.+\int_{Q_\tau}(\mathcal{L}u)^2\right\}$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\int_{Q_{\tau_j}}(x+x^3)(\varphi_j)^2+\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y\varphi_j)^2\right.$$

$$\left.+\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y\frac{\partial\varphi_j}{\partial x})^2\right). \tag{4.22}$$

On applique ensuite le lemme de Gronwall forme2 à l'inégalité (4.22) pour avoir :

$$\sum_{i=1}^{2}(\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y u)^2(\tau_i)+\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3\left(\Im_y(u_x)\right)^2(\tau_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} xu^2(\tau_i)+\sum_{i=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3u^2(\tau_i)+\int_{Q_\tau} x^3\,u_x^2$$

$$\leq\ ke^{2k(T_1+T_2)}\left\{\int_{Q_\tau}(\mathcal{L}u)^2\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\left(\int_{Q_{\tau_j}}(x+x^3)(\varphi_j)^2+\sum_{j=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y\varphi_j)^2\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_{Q_{\tau_j}} x^3(\Im_y\frac{\partial\varphi_j}{\partial x})^2\Bigg\}. \tag{4.23}$$

Comme le membre de droite de l'estimation (4.23) est indépendant de τ_i, $(i = 1, 2)$, en

passant au supremum par rapport à τ_i pour $0 \leq \tau_i \leq T_i, (i = 1, 2)$, il s'ensuit alors que :

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_H\,.$$

Avec $c^2 = k\exp(2k(T_1 + T_2))$.

Remarque.

l'inégalité de l'énergie (4.1), peut être améliorée et mise sous la forme :

$$\begin{aligned}\|u\|_E &\leq K\left\{\|f\|^2_{L^2(Q)}+\sum_{j=1}^{2}\|\varphi_j\|^2_{L^2(Q_j)}+\sum_{j=1}^{2}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_j}\right\|^2_{L^2(Q_j)}\right\}\\ &= K\left\{\|f\|^2_{L^2(Q)}+\sum_{j=1}^{2}\|\varphi_j\|^2_{V^{1,0}(Q_j)}\right\}.\end{aligned}$$

Proposition 4.1 :

L'opérateur $L : E \longrightarrow H$ est fermable.

La démonsration de cette proposition est analogue à celle de la proposition 2.1.

On désigne par $\overline{L}$ la fermeture de L et par $D(\overline{L})$ son domaine de définition.

Définition 4.1 :

On appelle solution forte du problème (4.1)-(4.7) la solution de l'équation opérationnelle

$$\overline{L}u = F.$$

En passant à la limite, l'estimation (4.10) peut être prolongée à la solution forte, soit

$$\|u\|_E \leq c\left\|\overline{L}u\right\|_H,$$

pour tout $u \in D(\overline{L})$.

D'où on a les :

corollaire 4.1 :

La solution forte du problème (4.1)-(4.7), si elle existe, elle est unique, et dépend continûement des élément $F = (f, \varphi_1, \varphi_2) \in H$.

corollaire 4.2 :

L'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est égal à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.

La démonstration de ce corollaire est analogue à celle du corollaire 2.2.

4.4 Existence de la solution

Pour montrer l'existence de la solution forte il faut et il suffit de montrer que :

$$R(L)^{\perp} = \{0\}.$$

Pour cela démontrons d'abord la proposition :

Proposition 4.2 :

Si pour une fonction $w \in L^2(Q)$, on a :

$$(\mathcal{L}u, w)_{L^2(Q)} = 0, \tag{4.24}$$

pour tout $u \in D_0(L) = \{u \in D(L) : \ell_i u = 0 \quad i = 1, 2\}$, alors $w \equiv 0$ p.p dans Q.

Preuve :

Considérons l'équation :

$$-2x^3\Im_y^2\left(\int_0^{t_1} u\right) - 2x^3\Im_y^2\left(\int_0^{t_2} u\right) = g, \tag{4.25}$$

où la fonction g est donnée par :

$$\begin{aligned} g &= \int_{t_2}^{T_2}\int_{t_1}^{T_1}\left(w - 2a_0x^6\Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) - 2b_0a_0d_1^3x^3\Im_y u_y\right) \\ &\quad - \int_{t_2}^{T_2}\int_{t_1}^{T_1} 4\alpha x^2\Im_y^2 u_x. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Alors :

$$\begin{aligned} w &= 2b_0a_0d_1^3x^3\Im_y u_y + 2a_0x^6\Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) \\ &\quad +4\alpha x^2\Im_y^2 u_x - 2x^3\Im_y^2(u_{t_1} + u_{t_2}). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Soit u la fonction définie par :

$$u(x,y,t_1,t_2) = \begin{cases} 0, & 0 \le t_i \le s_i. \\ \int_{s_1}^{t_1}\int_{s_2}^{t_2} u_{\tau_2\tau_1}d\tau_1 d\tau_2, & s_i \le t_i \le T_i \end{cases} \tag{4.28}$$

Avant de continuer la démonstration de la proposition, il faut justifier que w défini par l'éxpression (4.27) est dans $L^2(Q)$.

lemme :

la fonction w définie par (4.27) appartient à $L^2(Q)$.

La démonstration de ce lemme est évidente grâce à la définition de $D(L)$.

*Revenons maintenant à la preuve de la proposition.

On pose :

$$I_i = (\mathcal{L}u, w_i)_{L^2(Q)},$$

où

$$w = \sum_{i=1}^{4} w_i.$$

Intègrons par partie chaque terme I_i, $(i = \overline{1.4})$, en tenant compte des conditions (4.4)-(4.7), il vient

$$\begin{aligned} I_1 &= 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} x^3\Im_y u_y.(u_{t_1} + u_{t_2} - \frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x \\ &\quad -\frac{\alpha}{x^2}u_{yy}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &= 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} x^3\Im_y u_y.(u_{t_1} + u_{t_2}) \\ &= 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} x^3 u_y.\Im_y(u_{t_1} + u_{t_2}) \\ &= 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} x^3 u.(u_{t_1} + u_{t_2}) \\ &= b_0a_0d_1^3\sum_{i=1}^{2}\int_{Qs_j} x^3u^2(T_i).(i,j = 1.2, \text{ et } i \ne j), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(2) \quad &= -2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} x^3\Im_y u_y.(\frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x) \\
&= 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^3\Im_y u_{yx}(u_x) + 4b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^2 u_x.\Im_y u_y \\
&= -2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^3 u_{yx}(\Im_y u_x) - 4b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^2\Im_y u_x.u_y \\
&= 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^3 u_x^2 \; - 4b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^2\Im_y u_x.u_y \;,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) \quad &= -2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x\Im_y u_y.(u_{yy}) \\
&= 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x {u_y}^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 \quad = \quad & \int_{Qs} 2a_0x^6\Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).(u_{t_1} + u_{t_2} - \frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x \\
& -\frac{\alpha}{x^2}u_{yy}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) \quad &= \int_{Qs} 2a_0x^6\Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).(u_{t_1} + u_{t_2}) \\
&= -10a_0\int_{Qs} x^4\Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).\Im_x(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) \\
&\quad -2\;a_0\int_{Qs} x^5\Im_y^2(xu_{t_1} + xu_{t_2}).\Im_x(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) \\
&= 10a_0\int_{Qs} x^4\left(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\right)^2 \\
&\quad +2\;a_0\int_{Qs} x^5\Im_y(xu_{t_1} + xu_{t_2}).\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}) \\
&= 5a_0\int_{Qs} x^4\left(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= -2a_0 \int_{Qs} x^5 \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).(\alpha x u_x)_x \\
&= 2a_0 \int_{Qs} \alpha.x^6 \Im_y^2 (x u_{t_1} + x u_{t_2}).u_x \\
&\quad +10a_0 \int_{Qs} \alpha.x^5 \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).u_x \\
&= -2a_0 \int_{Qs} \alpha.x^7 \Im_y (u_{t_1} + u_{t_2}).\Im_y u_x \\
&\quad -10a_0 \int_{Qs} \alpha.x^5 \Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).\Im_y u_x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= -2a_0 \int_{Qs} \alpha x^4 \Im_{xyy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).u_{yy} \\
&= +\, 2a_0 \int_{Qs} \alpha x^4 \Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).u_y \ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{Qs} 4\alpha x^2 \Im_y^2 u_x \ .(u_{t_1} + u_{t_2} - \frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x \\
&\quad -\frac{\alpha}{x^2} u_{yy}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) &= \int_{Qs} 4\alpha x^2 \Im_y^2 u_x \ .(u_{t_1} + u_{t_2}) \\
&= -4 \int_{Qs} \alpha x^2 \Im_y u_x \ .\Im_y (u_{t_1} + u_{t_2}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= -4 \int_{Qs} \alpha x \Im_y^2 u_x \ .((\alpha x u_x)_x \\
&= 4 \int_{Qs} (\alpha x \Im_y u_x) \ .((\alpha x \Im_y u_x)_x \\
&= 2 \int_0^{d_2} \int_{s_1}^{T_1} \int_{s_2}^{T^2} (\alpha d_1 \Im_y u_x)^2 \mid_{x=d_1} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3) &= -4\int_{Qs} \alpha\Im_y^2 u_x \;.(\alpha u_{yy}) \\
&= 4\int_{Qs} \alpha\Im_y u_x \;.(\alpha u_y) \\
&= -4\int_{Qs} \alpha u_x \;.(\alpha u) \\
&= 2\int_0^{d_2}\int_{s_1}^{T_1}\int_{s_2}^{T_2} \alpha^2 u^2 \;|_{x=0}\, .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_4 &= -2\int_{Qs} x^3\Im_y^2(u_{t_1}+u_{t_2}).(u_{t_1}+u_{t_2}-\frac{1}{x}(\alpha x u_x)_x \\
&\quad -\frac{\alpha}{x^2}u_{yy}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1) &= -2\int_{Qs} x^3\Im_y^2(u_{t_1}+u_{t_2}).(u_{t_1}+u_{t_2}) \\
&= 2\int_{Qs} x^3\left(\Im_y(u_{t_1}+u_{t_2})\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) &= 2\int_{Qs} x^2\Im_y^2(u_{t_1}+u_{t_2}).(\alpha x u_x)_x \\
&= -4\int_{Qs} \alpha x^2\Im_y^2(u_{t_1}+u_{t_2}).u_x \\
&\quad -2\int_{Qs} \alpha x^3\Im_y^2(u_{xt_1}+u_{xt_2}).u_x \\
&= 4\int_{Qs} \alpha x^2\Im_y(u_{t_1}+u_{t_2}).\Im_y u_x \\
&\quad +2\int_{Qs} \alpha x^3\Im_y(u_{xt_1}+u_{xt_2}).\Im_y u_x
\end{aligned}
$$

$$= \; 4\int_{Qs} \alpha x^2 \Im_y(u_{t_1}+u_{t_2}).\Im_y u_x$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{Qs_j} \alpha x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2 (T_i)$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\int_{Qs_j} \alpha_{t_i} x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2, \; (i,j=1.2, \text{ et } i\neq j)$$

$$(3) = 2\int_{Qs} \alpha x \Im_y^2(u_{t_1}+u_{t_2}).u_{yy}$$

$$= \; 2\int_{Qs} \alpha x(u_{t_1}+u_{t_2}).u$$

$$= \; \sum_{i=1}^{2}\int_{Qs_j} \alpha x u^2 (T_i) - \sum_{i=1}^{2}\int_{Qs} \alpha_{t_i} x u^2 \quad (i,j=1.2 \text{ et } i\neq j).$$

Sommons : $\sum_{i=1}^{4}(w_i,\mathcal{L}u)_{Qs}=0$, on trouve :

$$b_0a_0d_1^3\sum_{i=1}^{2}\int_{Qs_j} x^3u^2 (T_i) + \sum_{i=1}^{2}\int_{Qs_j} \alpha x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2 (T_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{Qs_j} \alpha x u^2 (T_i) + 2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^3 u_x^2$$

$$+2b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x {u_y}^2 + 5a_0\int_{Qs} x^4 \left(\Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2})\right)^2$$

$$2\int_{Qs} x^3\left(\Im_y(u_{t_1}+u_{t_2})\right)^2 + 2\int_0^{d_2}\int_{s_1}^{T_1}\int_{s_2}^{T^2} \left(\alpha d_1\Im_y u_x\right)^2|_{x=d_1}$$

$$+2\int_0^{d_2}\int_{s_1}^{T_1}\int_{s_2}^{T_2} \alpha^2u^2 \,|_{x=0}$$

$$= \; 4b_0a_0d_1^3\int_{Qs} \alpha x^2 \Im_y u_x.u_y$$

$$+10a_0\int_{Qs} \alpha.x^5 \Im_{xy}(\xi u_{t_1}+\xi u_{t_2}).\Im_y u_x +$$

$$+2a_0 \int_{Qs} \alpha . x^7 \Im_y(u_{t_1} + u_{t_2}).\Im_y u_x$$
$$-2a_0 \int_{Qs} \alpha x^4 \Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).u_y \; +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{Qs} \alpha_{t_i} x u^2 + \sum_{i=1}^{2} \int_{Qs} \alpha_{t_i} x^3 (\Im_y u_x)^2, \; (i,j = 1.2, \text{ et } i \neq j) \quad (4.29)$$

Estimons maintenant les quatres premiers termes du membre droit de (4.29) à l'aide de l'inégalité de Cauchy avec ε :

$$\begin{aligned} & 4b_0 a_0 d_1^3 \int_{Qs} \alpha x^2 \Im_y u_x . u_y \\ \leq \; & 4b_0 a_0 d_1^3 \int_{Qs} \alpha x^3 (\Im_y u_x)^2 + b_0 d_1^3 a_0 \int_{Qs} \alpha x . u_y^2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} & 10a_0 \int_{Qs} \alpha . x^5 \Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).\Im_y u_x \\ \leq \; & 4a_0 \int_{Qs} x^4 \left(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\right)^2 + \\ & + \frac{25}{4} b_0 a_0 d_1^3 \int_{Qs} \alpha x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & 2a_0 \int_{Qs} \alpha . x^7 \Im_y(u_{t_1} + u_{t_2}).\Im_y u_x \\ \leq \; & 2 \int_{Qs} x^3 \left(\Im_y(u_{t_1} + u_{t_2})\right)^2 \\ & + \frac{a_0^2}{2} b_0 d_1^8 \int_{Qs} \alpha x^3 \left(\Im_y u_x\right)^2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$-2a_0 \int_{Qs} \alpha x^4 \Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2}).u_y$$

$$\leq a_0 \int_{Qs} x^4 \left(\Im_{xy}(\xi u_{t_1} + \xi u_{t_2})\right)^2$$
$$+a_0 b_0 d_1^3 \int_{Qs} \alpha x. u_y^2. \tag{4.33}$$

En combinant les inégalités (5.6)-(5.10), on obtient

$$b_0 a_0 d_1^3 \sum_{i=1}^{2} \int_{Qs_j} x^3 u^2 (T_i) + \sum_{i=1}^{2} \int_{Qs_j} \alpha x^3 (\Im_y u_x)^2 (T_i)$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_{Qs_j} \alpha x u^2 (T_i) + 2 b_0 a_0 d_1^3 \int_{Qs} \alpha x^3 u_x^2$$
$$2 \int_0^{d_2} \int_{s_1}^{T_1} \int_{s_2}^{T^2} \alpha^2 u^2 \mid_{x=0} + 2 \int_0^{d_2} \int_{s_1}^{T_1} \int_{s_2}^{T^2} (\alpha d_1 \Im_y u_x)^2 \mid_{x=d_1}$$
$$\leq \left(\frac{41}{4} a_0 b_0 d_1^3 + \frac{1}{2} a_0^2 b_0 d_1^8\right) \int_{Qs} \alpha x^3 (\Im_y u_x)^2$$
$$\sum_{i=1}^{2} \int_{Qs} \alpha_{t_i} x^3 (\Im_y u_x)^2 + \sum_{i=1}^{2} \int_{Qs} \alpha_{t_i} x u^2, \ (i, j = 1.2, \text{ et } i \neq j) \tag{4.34}$$

En utilisant les conditions (4.8), (4.9) et en négligeant le premier les trois derniers termes du membre gauche de (4.34), il vient

$$\sum_{i=1}^{2} \int_{Qs_j} x^3 (\Im_y u_x)^2 (T_i) + \sum_{i=1}^{2} \int_{Qs_j} x u^2 (T_i)$$
$$\leq c \left\{ \int_{Qs} (x^3 \Im_y u_x)^2 + \int_{Qs} x u^2 \right\}, \ (i, j = 1.2, \text{ et } i \neq j). \tag{4.35}$$

où

$$c = \frac{1}{a_0} \left(\frac{41}{4} a_0 b_0^2 d_1^3 + a_0^2 b_0^2 d_1^8 + b_1 + b_2 \right).$$

En appliquant à (4.35) le lemme de Gronwall forme 2, on obtient

$$\sum_{i=1}^{2} \left\| \sqrt{x} u(T_i) \right\|_{L^2(Qs_j)}^2 + \sum_{i=1}^{2} \left\| x^{3/2} \Im_y u_x (T_i) \right\|_{L^2(Qs_j)}^2 \leq 0, \ (i, j = 1.2, \text{ et } i \neq j). \tag{4.36}$$

L'inégalité (4.36) implique que $w \equiv 0$, p.p dans Q_s.

Puisque s est indépendant du choix de l'origine, on peut alors procéder de la même façon un nombre fini de fois on démontrer que $w \equiv 0$ p.p dans Q.

Soit $W = (w, w_1, w_2) \in R(L)^{\perp}$ tel que :

$$(\mathcal{L}u, w)_{L^2(Q)} + \sum_{i=1}^{2} (\ell_i u, w_i)_{H_i} = 0, \forall u \in D(L), \tag{4.37}$$

Si l'en particulier, on considère $u \in D_0(L)$, alors (4.37) devient

$$(\mathcal{L}u, w)_{L^2(Q)} = 0. \forall u \in D_0(L).$$

D'où à partir de la proposition 4.2,on deduit que $w \equiv 0$, p.p dans Q.

L'inégalité (4.37) devient alors

$$\sum_{i=1}^{2} (\ell_i u, w_i)_{H_i} = 0.$$

Comme les images des opérateurs traces ℓ_1 et ℓ_2 sont indépendants et densent respectivement dans les espaces de Hilbert H_1et H_2, alors $w_1 \equiv 0$ et $w_2 \equiv 0$. Et parconséquent $W \equiv 0$. On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème :

Pour toute fonction $F = (f, \varphi_1, \varphi_2) \in H = H_0 \times H_1 \times H_2$, il existe une solution unique $u = L^{-1}F$ du problème (4.1)-(4.7), vérifiant l'estimation a priori

$$\|u\|_E \leq c \|Lu\|_H ,$$

où c est une constante indépendante de la solution u .□

Conclusion.

Cette thèse est destinée à l'étude de l'existence, l'unicité et la dépendence continue de la solution forte par

rapport aux données de quelques problèmes mixtes aux dérivées partielles, avec conditons intégrales.

Lors de l'étude de ces problèmes, il apparaît que les difficultés rencontrées sont principalement dû aux

singularités des ceofficients, d'où la difficulté du choix des multiplicateurs pour établir l'inégalité de l'énergie,

ainsi que la densité de l'ensemble des images des opérateurs engendrés par les problèmes considérés.

On remaquc qu'une fois quand on peut choisir le multiplicateur utilisé pour établir l'inégalité de l'énergie,

on peut toujours démontrer la densité de l'ensemble des images des oérateurs engendrés par les problèmes considérés.

Il reste quelques questions ouvertes :

Il serait très utile de pouvoir passer aux cas non homogène du problème analogue au problème du chapitre 4.

Il serait trés intéressant d'utiliser la même méthode pour obtenir des résultats pour le même type des conditions

utilisées dans cette thèse pour des équations semi-lineaires, quasi-lineaires et non lineaires.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

[1] N. E. BENOUAR, Problème aux limites pour une classe d'équation d'ordre impair, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 1-6, 51-58 (1994).

[2] N. E. BENOUAR, Problème aux limites pour une classe d'équation composites, Compte Rondus de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 319, Série I, 953-958, (1994).

[3] N. E. BENOUAR-L. BOUGUEFFA, Problème aux limites pour une classe d'équations composites de quatrième ordre, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 6, 207-214 (1995).

[4] N. E .BENOUAR-N.LYURCHUC, Mixed problem with an integral condition for a parabolic equation with the Bessel operator, differrential 'nye uravneniya,Vol. 27, N° 12, 2094-2098 (1991).

[5] A. BOUZIANI, Solution forte d'un problème mixte avec une condition non local pour une classe d'équation hyperbolique, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 8, 53-70 (1997).

[6] A. BOUZIANI, On the quasi-static flxure of thermoelastic rod problem, (Submitted to Communication and Applied Analysis).

[7] A. BOUZIANI, Mixed problem with boundary integral condition for a certain parabolic equation, J.Appl. Math and Stochastics. Anal, Vol. 9, N°3, 323-330 (1996)

[8] A. BOUZIANI, On a third order parabolic equation with a non local boundary condition, (to appear in J. Appl. Math and Stochastics Analysis).

[9] A. BOUZIANI, Solution forte d'un problème mixte avec une condition non local pour une classe d'équation parabolique, Maghreb Mathematical Review, Vol. 6, N°1, 1-17 (1997).

[10] A. BOUZIANI, Problème aux limites pour certaines équations de type non-classique du troisième ordre, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 7-12 (1995).

[11] A. BOUZIANI, Mixed problem for certain non classical equation with a small paramater, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 4, 389-400 (1994).

[12] A. BOUZIANI, Problème mixte avec conditions integrales pour quelques équations aux dérivées partielles, thèse de Doctorat d'Etat Université de Constantine (1996).

[13] A. BOUZIANI, Strong solution for a mixed problem with non local condition for certain pluriparabolic équation, Hiroshima Mathematical Journal, Vol. 27, N°. 3, 373-390 (1997).

[14] A. BOUZIANI, On a class of nonclassical hyperbolic equation with nonlocal condition, to appear in J. Appl. Math. and Stochastic analysis (1999).

[15] A. BOUZIANI, Strong solution to a mixed problem for certain pseudoparabolic equation of variable order, Annales de Mathématiques de l'université de Sidi Bel Abbes, Vol. 5 (1998).

[16] A. BOUZIANI, Solution forte d'un problème de transmission parabolique-hyperbolique pour une structure pluri-dimensionnelle, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale des Sciences de Belgique, Vol. 8, 53-70 (1997).

[17] A. BOUZIANI-N. E. BENOUAR, A mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation, Kobe Journal of Mathématics, Vol15, N° 01, 47-58 (1998).

[18] A. BOUZIANI-N. E. BENOUAR, Problème aux limites pour une classe d'équation de type non classique pour une structure pluridimensionnelle, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol.43, N° 04, 317-328 (1995).

[19] A. BOUZIANI-N. E. BENOUAR, Problème mixte avec condition intégrale pour une classe d'équation parabolique, Comptes rendues de l'Académie des Sciences, Paris, Vol 321, SérieI ,1177-1182 (1995).

[20] A. BOUZIANI-N. E. BENOUAR, Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équoitions hyperboliques, Bull of the Belgian Math. Soc. Vol. 3, 137-145 (1996).

[21] H. BREZIS, Anayse fonctionnelle theorie et applications, Masson Paris, New-york Barcelon Mixico Saopaulo1983.

[22] B. CAHLON, D. KULKARNI, P. SHI., Stepwisestability for the heat equation with nonlocal constraint, SIAM. J. Numer. Anal., 32, 571-593 (1995).

[23] J. R. CANNON, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math. Vol. 21, N° 2, 155-160 (1963).

[24] W. A. DAY, Existence of the property of solutions of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories, Quart. Appl. Math., Vol. 40, 319-330 (1982).

[25] A. A. DEZIN, Théorème d'existence et d'unicités de la solution pour les problèmes aux limites des equations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels. Uspekhin, Math. Naouk, N°14, 87 ,22-73 (1959).

[26] K. O. FRIEDRICH-H.LEWY, Über di eidentigkeit und das Alhängigkeitsgebiet beim anfangs problem linearer hyperbolicsher differeticialglecichungen. Math. Ann., 90, 192-204 (1928).

[27] J. FRITZ, Partial differential equations, BERLIN-HEIDELBERG-NEW-YORK, Spriger-Verlag (1978).

[28] L. GARDING, Cauchy's problem for hyperbolic equation, University of Chicago, Lecture Note (1957).

[29] S. K. GODOUNOV-A. M. BLOKHIN, Energy integrals in the theory of shock wave stability.nonlinear deformation waves, IUTAM. Symposium, Tallin,1982 ; Springer-Verlag,18-29 (1983).

[30] S. K. GODOUNOV, Intégral d'énergie des équations hyperbolique d'après Petrovski, Commentation Mathematicae Universitatis Carolinae, Praga 26, Vol.1, 41-74 (1985).

[31] M. E. GURTIN-R. C. M. CAMY, Diffusion models for age-structured population. Math. biosci. 54, 49-59 (1981).

[32] A. HILLON, Les solutions mathématiques des populations, Presses Universitaire de France (1986).

[33] N. I. IONKIN, Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with non local boundary condition, differentsial'nye uravnenia,Vol.13, N°2, 294-304 (1977).

[34] N. I. KAMYNIN, A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys, 4, 33-59 (1964).

[35] O. A. LADYZHENSKAYA, A simple proof of the solvability of the fundamental boundary value problems and problem of eigenvalues for linear elliptic equation, Vestinik leningrad. Univ.Vol.11, 23-29 (1956).

[36] O. A. LADYZHENSKAYA, Sur les equations operationnelles non stationnaires et leurs applications aux problèmes linéaires de la Physique Mathématique, Math. Sborn,Vol.45, N°2, 132-158 (1958).

[37] O. A. LADYZHENSKAYA, The mixed problem for the hyperbolic equation GOS.IZDAT. TEHN-TEOR. lit, Moscow, 279PP (1953).

[38] O. A. LADYZHENSKAYA, The boundary value problems of mathmatical phisics, springer-Verlag, New-york (1985).

[39] O. A. LADYZHENSKAYA, Sur les problemes aux limites fondamentaux liés aux équations paraboliques et hyperboliques, Dokl. Acad. Scien.URSS, Vol.97, N°3, 395-398 (1954).

[40] O. A. LADYZHESKAYA-L.I.STUPIALIS, Problème des conjugaisons des équations ondulatoires et de conductibilitée thermique, differentsial'nye Uravneniya,Vol.4, N019, 38-46, (1965).

[41] P. LAX, On Cauchy's problem for hyperbolicequation and the differentiability of solution of elliptic equation. Comm. Pure and Appl.Math, Vol.8, 615-633 (1955).

[42] J. LERAY, Lecture on hyperbolic differential equation with variable coefficienent, Priceton, Just for Adv.Study (1952).

[43] J. L. LIONS, Equation differentielle opérationnelle et probème aux limites, Springer-Verlag,(1961).

[44] N. Lekrine, S. Mesloub, Srong solution for mixed problem with nonlocal conditon for two-dimensional pluri-parabolic equation (submitted to J. Appl. Math).

[45] S. Mesloub, On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation, Acta. Sci. Math. (Szeded) Vol. 67, 203-219 (2001).

[46] S. MESLOUB-A. BOUZIANI, Problème mixte avec condition aux limites integrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, Vol.6, 59-69, (1998).

[47] S. MESLOUB, Problemes mixtes avec conditions intégrales pour certaines classes aux derivées partielles, thèse de Doctorat d'état, Université de Constantine (1999).

[48] S. MESLOUB-A. BOUZIANI, Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations, J. Appl. Math. 00 :00 1-10 (2001).

[49] S. MESLOUB-A. BOUZIANI et N.Kechkar, Strong solution to an evolution problem with integral conditions, Georgian. Math. J.Vol 8(N°2),1-11(2001).

[50] S .MESLOUB-A. BOUZIANI, On class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math.& Math. Sci. Vol. 22, N°. 3, 1-9 (1999).

[51] S. MESLOUB-A. BOUZIANI, Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator, J. APPL. Math. and Stochastic. Anal, (to appear).

[52] S. MESOUB and N. LEKRINE, On a singular hyperbolic problem with nonlocal condition (submitted to Acta.Sci. Math. Szeged).

[53] S. MESLOUB and N. LEKRINE, On nonlocal hyperbolic problem, (submitted to Mathematics Vesnik, Yugoslavia).

[54] L. A. MOURAVEY-PHILIPPVSKI, Sur un probléme avec une condition aux limites non local pour une équation parabolique, SBORN.MATH.182, N°10, 1479-1512, (1991).

[55] J. D. MURRAY, Mathematical biology. Berlin-HEIDELBERG-NEW YORK, Spring-Verlag, (1989).

[56] P. A. RAVIART et J. M. THOMAS, Introduction à l'analyse numérique des equations aux dérivées partielles, Masson, Paris (1983).

[57] P. A. RAVIART et V. GIRAULT, Finite element approximation of the Navier-Stokes equation, lectures notes in Mathematics, Vol749, E.D.A sold et Beckmann, Springer-Verlag, Balin (1979).

[58] F. REBBANI-V. I. CHESSALIN, Sur un problème aux limites pour une equation différentiell opérationnelle, Annalles de la IX ecole sur les opérateurs dans les espaces fonctionnels,TERNOPOL,(1983).

[59] F. REBBANI-V. I. CHESSALIN, Problème aux limites pour des équations différentielles opérationnelles D'ordre impair dans le rectangle, UZVESTIS AKAD. NAUK. BSSSR, série phys. mat. Nauk, N°3, (1984).

[60] K. REKTORYS,Variational methods in mathematics, sciences and engineering, library of Congress cataloging in publication data, (1977).

[61] R. SAKAMOTO, Mixed problems for hyperbolics equationsI, jour. Math.KYOTO Univ,10, 2, 349-373, (1970).

[62] R. SAKAMOTO, Mixed problems for hyperbolics equationsII, jour. Math.KYOTO Univ,10, 3, 403-417, (1970).

[63] SAMARSSKII, Some problems in differntial equations thery, differentsial'nye Uravneniya, vol16 ,N°11, 1221 – 1228, (1980).

[64] P. SHI-M. SHILLOR, Design of contact patterns in one dimensionel thermoelasticity, in theoritical aspects on industrial design, society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, (1992).

[65] G. F. WEBB, Theory of nonlinear age-dependent population dynamics, New York, DEKKER, (1985).

[66] N. I. YURCHUK, Mixed with an integral condition for certain parabolic equation, differentsia'nye Uravnenia,Vol.22, N°19, 2117-2126, (1986).

[67] N. I. YURCHUK, Problémes aux limites pluri-dimensonnels pour certaines équation différentielle opérationnelle :I.Estimation a priori, Differentsial'nye Uravneniya,Vol.21, N°3, 417-425, (1985).

[68] N. I. YURCHUK, Mixed problems for linearized Kortweg-De-Vries equation degenerating in time into parabolic equation. Soviet. Math. DOKL,Vol.33, N°2, 435-437, (1986).

[69] N. I. YURCHUK, Mixed problems for parabolic equations of variable order, Soviet. Math. Dokl., Vol. 26, N°1,39-41, (1982).

[70] N. I. YURCHUK, A partially characteristic boundary value problem for a particular type of partial differential equations II, Differentsial nye Uravneniya, Vol. 5, N°3, 531-542, (1969).

[71] N. I. YURCHUK, Boundary-value problems for equations whose principal part contains operators of the form $(d^{2m+1}/dt^{2m+1}) + A$, Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 10, N°4, 759-762, (1974).

[72] N. I. YURCHUK, Boundary-value problems for equations whose principal part contains operators of the form $(d^{2m}/dt^{2m}) + A$, Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 10, N°5, 950-952, (1974).

[73] N. I. YURCHUK, Problems aux limites pour les équations différentielles opérationnelles d'ordre impair, Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 13, N°3, 468-476, (1977).

[74] N. I. YURCHUK, Solvability of boundary-value problems for certain differential equations, Differential equations, Vol. 13, N°4, 423-429, (1977).

[75] N. I. YURCHUK, Estimations a priori des solutions des problèmes aux limites por certaines équations différentielles opérationnelles, Différntsial'nye Uravneniya, Vol. 13, N°4, 626-636, (1977).

[76] N. I. YURCHUK, Problèmes aux limites pluri-dimensionnels pour certaines équations différentielles opérationnelles : II. Résolution du problème et propriété de la silution, differntsial'nye Uravneniya, Vol. 21, N°5, 859-870, (1985).

[77] N. I. YURCHUK-F.E.LOMOVTSEV, Cauch's problem for second order hyperbolic differential operational equations, Differentialnye Uravneniya, Vol. 12, N°12, 2242-2250, (1976).

ملخص

هدف هذه الرسالة هو دراسة وجود ووحدانية الحل القوى لبعض المسائل المختلطة بشروط تكاملية.

معادلة شاذة ذات قطع زائد في بنية ذات بعد واحد.

معادلة شاذة متعددة القطوع اتزائدة في بنية ذات بعدين.

معادلة شاذة متعددة القطوع المكافئة في بنية ذات بعدين

الشروط كلاسيكية- تكاملية .

البراهين مبنية على تقدير قبلي وكثافة صور المؤثرات المولدة بالمسائل المعتبرة.

Abstract

The goal of this thesis is to investigate the existence and uniqueness of the solution of some mixed problems with integrals conditions for:

A singular hyperbolic equation , in one –dimensional structure

A singular plurihyperbolic equation , in one –dimensional structure

A pluriparabolic equation with different singularity in two –dimensional structure.

The conditions are classical-integrals.

The proofs are based on some priory estimate and on the density of the operators range generated by considered problems.

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution forte de quelques problèmes mixtes aux limites ,avec conditions intégrales pour :
Une équation hyperboliques , singulière dans une structure unidimensionnelle.
Une équation pluri-hyperbolique singulière dans une structure unidimensionnelle .
Une équation pluri-parabolique avec deux singularités différentes dans une structure bi-dimensionnelle .
Les conditions sont classiques –intégrales ;
Les démonstrations sont basées sur des estimations a priori et sur la densité des images des opérateurs engendrés par les problèmes considérés.