

# THÈSES

PRÉSENTÉES A

L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Olivier MAISONNEUVE

---

*1<sup>ère</sup> THÈSE*

SUR LE PRINCIPE DE SAINT-VENANT

*2<sup>ème</sup> THÈSE*

Propositions données par la Faculté

---

*Soutenues le 15 Mars 1971, devant la Commission d'Examen*

Jury	{	P. BROUSSE	}	<i>Président</i>
		A. BERROIR		<i>Examineurs</i>
		P. BÉZIER		
		C. MATHURIN		
		B. NAYROLES		
		G. GEYMONAT		<i>Invité</i>

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

---

DOYENS HONORAIRES ET ANCIENS DOYENS

---

MM. A. GRUMBACH	Professeur de Physique
E. PATTE	Professeur de Paléontologie
P. BROUSSE	Professeur de Mécanique
N. MANSON	Professeur de Physique

PROFESSEURS HONORAIRES

---

MM. FRECHET	Professeur Honoraire à la Sorbonne, Membre de l'Institut
GARNIER	Professeur Honoraire à la Sorbonne, Membre de l'Institut
BOULIGAND	Professeur Honoraire à la Sorbonne, Correspondant à l'Académie des Sciences
GRUMBACH	Professeur de Physique
SOLEILLET	Professeur à la Sorbonne
ABELOOS	Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille
PONCIN	Professeur à la Sorbonne Directeur Honoraire de l'E.N.S.M.A.
AMIEL	Professeur à la Sorbonne
COTTE	Professeur à la Sorbonne
Mme DUBREIL-JACOTIN	Professeur à la Sorbonne
MM. MAZET	Professeur à la Sorbonne
LESIEUR	Professeur à la Sorbonne
CORABOEUF	Professeur à la Sorbonne
ZOUCKERMANN	Professeur de Physique
BROUSSE	Professeur à la Sorbonne
PATTE	Professeur de Paléontologie

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

---

DOYENS HONORAIRES ET ANCIENS DOYENS

---

MM. A. GRUMBACH	Professeur de Physique
E. PATTE	Professeur de Paléontologie
P. BROUSSE	Professeur de Mécanique
N. MANSON	Professeur de Physique

PROFESSEURS HONORAIRES

---

MM. FRECHET	Professeur Honoraire à la Sorbonne, Membre de l'Institut
GARNIER	Professeur Honoraire à la Sorbonne, Membre de l'Institut
BOULIGAND	Professeur Honoraire à la Sorbonne, Correspondant à l'Académie des Sciences
GRUMBACH	Professeur de Physique
SOLEILLET	Professeur à la Sorbonne
ABELOOS	Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille
PONCIN	Professeur à la Sorbonne Directeur Honoraire de l'E.N.S.M.A.
AMIEL	Professeur à la Sorbonne
COTTE	Professeur à la Sorbonne
Mme DUBREIL-JACOTIN	Professeur à la Sorbonne
MM. MAZET	Professeur à la Sorbonne
LESIEUR	Professeur à la Sorbonne
CORABOEUF	Professeur à la Sorbonne
ZOUCKERMANN	Professeur de Physique
BROUSSE	Professeur à la Sorbonne
PATTE	Professeur de Paléontologie

DOYEN

---

M. FORT                      Président du Conseil Transitoire de Gestion,  
Chargé des fonctions de Doyen  
Professeur de Mathématiques

PROFESSEURS ET MAITRES DE CONFERENCES

---

MM. VALENSI	Professeur de Chimie
CHARTIER	Professeur de Physique
GAVAUDAN	Professeur de Botanique
de LARAMBERGUE	Professeur de Zoologie
TABOURY	Professeur de Chimie
LEGRAND	Professeur de Biologie Animale
MATHIEU	Professeur de Géologie et Minéralogie
GRAY	Professeur de Physique
RIVault	Professeur de Physique
ROSENBERG	Professeur de Chimie Biologie
LAURENT	Professeur de Mécanique
DOLBEAULT	Professeur de Mathématiques
MANSON	Professeur de Physique
THOMASSIN	Professeur de Chimie
VAUTHIER	Professeur de Physique
GARGOUIL	Professeur de Physiologie Animale
CORDIER	Professeur de Mécanique
MATHURIN	Professeur de Mécanique
EZRA	Professeur de Mathématiques
DASTE	Professeur de Microbiologie
GUTH	Professeur de Paléontologie
GUICHARDET	Professeur de Mathématiques
BOSCHER	Professeur de Mécanique
GOETHALS	Professeur de Mécanique
MAUREL	Professeur de Chimie
LAGARDE	Professeur de Mécanique
BERNARD	Professeur de Chimie
de FOUQUET	Professeur de Physique
BATAILLER	Professeur de Physique
BLANCHARD	Professeur de Chimie
Mme AMICE	Professeur de Mathématiques
MM. FORT	Professeur de Mathématiques
CAISSO	Professeur de Physique
BOUROT	Professeur de Mécanique
DUPUIS	Professeur de Pédologie
LUNC	Professeur Associé de Mécanique
Mle POUSSEL	Professeur sans chaire - Physiologie Cellulaire
M. PIMIENTA	Professeur sans chaire - Géologie



Mme DOLBEAULT	Professeur sans chaire - Mathématiques
MM. MICHON	Professeur sans chaire - Biologie Animale
DEVRIES	Professeur sans chaire - Physiologie Animale
PEUBE	Professeur sans chaire - Mécanique
JACQUESSON	Professeur sans chaire - Physique
BERNAT	Professeur sans chaire - Mathématiques
HARDY	Professeur sans chaire - Chimie
Mme MIGINIAC	Professeur sans chaire - Chimie
M. PAYEN DE LA GARANDERIE	Professeur sans chaire - Physique
GALAND	Professeur sans chaire - Physiologie Animale
MORIN	Professeur sans chaire - Physique
RENAULT	Professeur sans chaire - Mathématiques
MARTINET	Maître de Conférences - Mécanique
MIGINIAC	Maître de Conférences - Chimie
CAUBET	Maître de Conférences - Mathématiques
NAYROLES	Maître de Conférences - Mécanique
GRILHE	Maître de Conférences - Physique
LUBOCHINSKY	Maître de Conférences - Chimie Biologie
GOMEL	Maître de Conférences - Chimie
MLe CORCUFF	Maître de Conférences - Physique
MM. BERROIR	Maître de Conférences - Mathématiques
GASC	Maître de Conférences - Mécanique
JACQUESY	Maître de Conférences - Chimie
COINTOT	Maître de Conférences - Chimie
MOINE	Maître de Conférences - Physique
SCHREVEL	Maître de Conférences - Zoologie
LE ROY	Maître de Conférences - Physique
Mme BARTHELEMY	Chargé d'Enseignement - Mathématiques
MM. SOUCHET	Chargé d'Enseignement - Mathématiques
RACHMAN	Maître de Conférences associé - Physique
A'CAMPO	Maître de Conférences associé - Mathématiques

*A ma Famille*

Je suis heureux de remercier ici tous ceux grâce à qui j'ai accompli cette étude, et en premier lieu tous ceux qui constituent notre Laboratoire de Mécanique. A ma sortie de l'E.N.S.M.A., Monsieur BROUSSE et Monsieur LAURENT m'en ont ouvert les portes, tous m'y ont reçu avec amitié.

Monsieur BROUSSE, puis Monsieur MATHURIN ont dirigé mon travail avec beaucoup de compréhension, de libéralisme et de bienveillance. J'ai également eu la chance, inappréciable pour un apprenti mécanicien, d'être accueilli un an par le professeur STAMPACCHIA à l'I.A.C.. Son aide, celle du professeur GEYMONAT ont été déterminantes et formatrices.

Les pages qui suivent, sont aussi le fruit de mes rencontres avec Bernard NAYROLES, le professeur SOLOMON, Roger VALID et son équipe de l'O.N.E.R.A. J'ai à coeur de rendre hommage à leur amitié et à leur exemple.

J'ai non moins à coeur de dire ma reconnaissance à Madame BABIN, Mademoiselle CHARPENTIER, Monsieur VIGNERON qui ont respectivement dactylographié, relu et polycopié ce mémoire. Leur conscience professionnelle, leur goût du travail bien fait m'obligent.

Monsieur BERROIR et Monsieur BEZIER ont toujours suivi mon travail avec sympathie. Monsieur BEZIER m'a proposé un très intéressant deuxième sujet. Que tous deux trouvent ici l'expression de ma gratitude.

En terminant je tiens à dire à la famille de SAINT-VENANT combien j'ai été sensible à la confiance qu'elle m'a témoignée, en laissant à ma disposition les archives de son illustre ancêtre.

## INTRODUCTION

---

Le Principe de SAINT-VENANT est né de l'étude de la déformation des corps cylindriques allongés, ou Problème de SAINT-VENANT. A la suite de l'approche théorique proposée par BOUSSINESQ et contestée depuis, son champ d'application s'est élargi aux plaques et aux corps de forme quelconque. Il joue un rôle essentiel en Résistance des Matériaux et l'on peut trouver son équivalent pour de nombreux phénomènes physiques. Son "sens physique" et sa fécondité méthodologique sont remarquables : dans de nombreux cas, importants dans la pratique, sa vérification est excellente et la latitude qu'il laisse vis à vis des conditions aux limites, libère la théorie de l'Elasticité de son caractère souvent trop affiné.

Toutefois, il est bien connu des ingénieurs de l'aéronautique que le Principe de SAINT-VENANT peut être mis en défaut de façon fondamentale dans le cas de structures minces ou en treillis, et de façon locale par des phénomènes de concentration de contraintes. S'il est donc devenu courant de s'y référer indépendamment du Problème de SAINT-VENANT, il convient de le faire avec prudence. Sa bonne compréhension devient, nous le verrons, difficile, si l'on perd de vue son origine.

Sur le fond, notre étude voudrait contribuer à l'élaboration d'un cadre mathématique, dans lequel le concept "physique" de Principe de SAINT-VENANT soit bien posé. La formulation proposée est assez globale puisqu'elle se fonde sur la notion d'énergie et accorde une large place à la considération suivante : les schématisations mathématiques des phénomènes physiques, pour lesquels se transpose aisément le Principe de SAINT-VENANT, mettent en jeu des opérateurs elliptiques. Quelques résultats sont établis, suffisamment significatifs, nous semble-t-il, pour justifier l'intérêt du schéma proposé.

SUR LE PRINCIPE DE

SAINTE-VESENT

—

## INTRODUCTION

---

Le Principe de SAINT-VENANT est né de l'étude de la déformation des corps cylindriques allongés, ou Problème de SAINT-VENANT. A la suite de l'approche théorique proposée par BOUSSINESQ et contestée depuis, son champ d'application s'est élargi aux plaques et aux corps de forme quelconque. Il joue un rôle essentiel en Résistance des Matériaux et l'on peut trouver son équivalent pour de nombreux phénomènes physiques. Son "sens physique" et sa fécondité méthodologique sont remarquables : dans de nombreux cas, importants dans la pratique, sa vérification est excellente et la latitude qu'il laisse vis à vis des conditions aux limites, libère la théorie de l'Elasticité de son caractère souvent trop affiné.

Toutefois, il est bien connu des ingénieurs de l'aéronautique que le Principe de SAINT-VENANT peut être mis en défaut de façon fondamentale dans le cas de structures minces ou en treillis, et de façon locale par des phénomènes de concentration de contraintes. S'il est donc devenu courant de s'y référer indépendamment du Problème de SAINT-VENANT, il convient de le faire avec prudence. Sa bonne compréhension devient, nous le verrons, difficile, si l'on perd de vue son origine.

Sur le fond, notre étude voudrait contribuer à l'élaboration d'un cadre mathématique, dans lequel le concept "physique" de Principe de SAINT-VENANT soit bien posé. La formulation proposée est assez globale puisqu'elle se fonde sur la notion d'énergie et accorde une large place à la considération suivante : les schématisations mathématiques des phénomènes physiques, pour lesquels se transpose aisément le Principe de SAINT-VENANT, mettent en jeu des opérateurs elliptiques. Quelques résultats sont établis, suffisamment significatifs, nous semble-t-il, pour justifier l'intérêt du schéma proposé.

On considère a priori un "Problème de SAINT-VENANT généralisé". Un corps élastique est soumis, suivant deux "petites régions"  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  de son contour, à des systèmes de charges définissant des torseurs donnés et opposés sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ . A chaque répartition différente de charges surfaciques correspond dans le corps une certaine répartition de contraintes qu'on ne sait pas en général expliciter. Le Principe de SAINT-VENANT assure que la répartition des contraintes, dès qu'on s'éloigne des parties chargées, ne dépend pas de la répartition exacte des charges, mais seulement des éléments de réduction du torseur. Il suffirait donc de trouver un élément de la famille des diverses solutions pour avoir, sauf au voisinage des régions chargées, une très bonne approximation de toutes les autres solutions.

La partie I est consacrée à l'étude de l'existence, de l'unicité et de la caractérisation d'une solution d'énergie minimum au "Problème de SAINT-VENANT généralisé", et à son transposé au cas du Laplacien. Pour la démonstration de l'existence d'une telle solution, on recourt à une formulation variationnelle Hilbertienne du problème. Les résultats sont interprétés physiquement et jouent un rôle important dans la suite.

La partie II débute par un assez long chapitre historique. Indépendamment de la nécessité de situer notre travail, il nous a semblé utile et éclairant d'exposer les principaux cheminements d'idées, justifications, contre-exemples relatifs au Principe de SAINT-VENANT. Quelques réflexions concluent ce chapitre. Le schéma d'étude du concept de "Principe de SAINT-VENANT" est alors proposé. Il est commun au cas du Laplacien et de l'Elasticité, et trouve son origine dans un résultat de TOUPIN (4). Les domaines considérés sont cylindriques. La linéarité des équations autorise la décomposition de toute solution d'un "Problème de SAINT-VENANT généralisé" en la solution d'énergie minimum et un terme complémentaire. La "proximité" des diverses solutions est étudiée globalement en comparant les normes énergétiques des termes de la décomposi-

tion, puis plus localement en considérant la norme énergétique du terme complémentaire dans une famille de sous domaines. Dans le cas du Laplacien on montre, à l'aide d'exemples, comment discuter de la plus ou moins bonne vérification du Principe transposé suivant la forme de la section et la longueur du domaine. Pour l'Elasticité la fin de la discussion reste en suspens. Nous n'avons pu nous affranchir du caractère tridimensionnel de l'opérateur de l'Elasticité. Nous restons ainsi tributaires du résultat de TOUPIN. Dans celui-ci le paramètre géométrique traduisant l'influence de la forme de la section est partiellement arbitraire, ce qui est peu satisfaisant.

Une ANNEXE, enfin, propose un exemple formel de mise en défaut du Principe de SAINT-VENANT, transposé à l'Elasticité Plane, par un phénomène de concentration de contraintes.

IV

Table des matières

PARTIE I

SOLUTION D'ENERGIE MINIMUM POUR LE PROBLEME  
DE SAINT-VENANT

CHAPITRE I - RECHERCHE DE LA SOLUTION D'ENERGIE MINIMUM POUR LES PROBLEMES DU TYPE PROBLEME DE SAINT- VENANT DANS LE CADRE VARIATIONNEL CLASSIQUE .....	2
§ 1 - Introduction .....	2
1.1 Rappels sur le problème de SAINT-VENANT .....	2
1.2 Caractérisation unitaire des solutions de SAINT-VENANT .....	4
1.3 Solutions d'énergie minimum .....	5
§ 2 - Problème de SAINT-VENANT pour un corps de forme quelconque .....	7
2.1 Cas de l'Elasticité .....	7
2.2 Transposition au cas du Laplacien .....	9
§ 3 - La solution d'énergie minimum	
3.1 L'énergie de déformation élastique .....	10
3.2 Le problème A pour l'Elasticité .....	12
3.3 Le cadre variationnel classique en Elasticité .	12
3.4 Equation d'EULER du problème A et interprétation	16
§ 4 - Conclusion .....	19
4.1 Résultats .....	19
4.2 Commentaires .....	20

CHAPITRE II - EXISTENCE UNICITE ET CARACTERISATION D'UNE SOLUTION FAIBLE D'ENERGIE MINIMUM POUR LE PROBLEME DE SAINT-VENANT TRANSPOSE AU CAS DU LAPLACIEN ....	22
§ 1 - Introduction .....	22
1.1 Enoncé du problème A pour le Laplacien .....	22
1.2 Orientation .....	23
§ 2 - Vers la formulation faible du problème A .....	23
2.1 La fonctionnelle énergie et l'espace $H^1(\Omega)$ ..	23
2.2 Formulations variationnelles du problème de NEUMANN dans la variété $V$ de $H^1(\Omega)$ .....	24
2.3 Le problème A vis à vis de ces formulations .	26
§ 3 - La formulation faible du problème A .....	29
3.1 Formulation faible du problème de NEUMANN ...	29
3.2 Les conditions aux limites faibles du problème de SAINT-VENANT .....	30
3.3 Formulation faible du problème A .....	31
3.4 Existence et unicité de la solution du pro- blème A .....	32
3.5 Condition d'EULER du problème A - Propriétés de la solution .....	36
 CHAPITRE III - EXISTENCE, UNICITE ET CARACTERISATION D'UNE SOLUTION FAIBLE D'ENERGIE MINIMUM POUR LE PROBLEME DE SAINT-VENANT EN ELASTICITE .....	 49
§ 1 - Introduction .....	49
1.1 La fonctionnelle énergie - L'espace $E(\Omega)^3$ ...	50
1.2 Espace des traces $F(\partial\Omega)^3$ .....	52
1.3 L'Espace $F'(\partial\Omega)^3$ dual de $F(\partial\Omega)^3$ .....	52

§ 2 - Formulation faible du problème A .....	53
2.1 Formulation variationnelle du IIe problème de l'Elasticité .....	53
2.2 Les conditions aux limites faibles du problème de SAINT-VENANT .....	54
2.3 Formulation faible du problème A .....	56
2.4 Existence et unicité de la solution .....	56
2.5 Condition d'EULER du problème A - Propriétés de la solution .....	60
§ 3 - Conclusion .....	64
3.1 Résultats .....	64
3.2 Commentaires .....	66

## PARTIE II

## ETUDE DU PRINCIPE DE SAINT-VENANT

CHAPITRE I - HISTORIQUE DU PRINCIPE DE SAINT-VENANT .....	71
§ 1 - Introduction .....	71
§ 2 - Le principe de SAINT-VENANT et l'étude de l'influence des perturbations locales d'un système de charges .....	72
2.1 L'orientation de BOUSSINESQ .....	73
2.2 L'Etude critique de VON MISES .....	75
2.3 L'Etude de la conjecture de VON MISES par E. STERNBERG .....	78
2.4 Etudes complémentaires .....	80
§ 3 - Principe de SAINT-VENANT et Energie de déformation .....	81
3.1 Les premiers travaux .....	81
3.2 L'étude de TOUPIN .....	83
3.3 Etudes d'inspirations voisines .....	88

VII

§ 4 - Autres travaux .....	90
4.1 Le mémoire de A.T. DOU .....	90
4.2 Notes sur des orientations moins classiques ..	92
§ 5 - Quelques commentaires	
5.1 Principe de SAINT-VENANT et perturbations locales .....	92
5.2 Principe de SAINT-VENANT et Energie .....	95
 CHAPITRE II - UN SCHEMA D'ETUDE DU CONCEPT DE PRINCIPE DE SAINT-VENANT POUR LES DOMAINES CYLINDRIQUES .....	 97
§ 1 - Introduction .....	97
1.1 Orientations .....	97
1.2 Hypothèses sur le domaine .....	98
1.3 Quelques propriétés préliminaires .....	99
1.4 Schéma d'étude du Principe de SAINT-VENANT ..	101
§ 2 - Le cas du Laplacien .....	104
2.1 Solution d'énergie minimum - Calcul de l'énergie associée .....	104
2.2 Forme de la solution $u_0^1$ .....	105
2.3 Estimation de la norme énergétique de $u_0^1$ ...	108
2.4 Etude de $\ u_0^1\ _{V_s} \subset H^1(\Omega_s)$ en fonction de s	109
2.5 Conséquences des hypothèses (50) et (51) et des résultats précédents .....	111
2.6 Etude sur deux exemples de la plus ou moins bonne vérification a priori du Principe de SAINT-VENANT transposé .....	112
2.7 Un point de départ pour l'étude du cas général .....	113

§ 3 - Quelques considérations sur le cas de l'Elasticité	114
3.1 Estimation de la norme énergétique de $\vec{u}_m$ ....	114
3.2 Les difficultés propres à l'Elasticité .....	115
§ 4 - Conclusion .....	118
ANNEXE - UN EXEMPLE DE MISE EN DEFAUT FORMELLE DU PRINCIPE DE SAINT-VENANT, TRANSPOSE A L'ELASTICITE PLANE, PAR UN PHENOMENE DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES .....	A-I
1 - Rappels .....	A-I
2 - Orientations .....	A-III
3 - Un exemple .....	A-IV
3.1 Le domaine .....	A-IV
3.2 Système de charges - Equation fonctionnelle .	A-V
3.3 Mise en défaut formelle du Principe de SAINT- VENANT .....	A-VI
BIBLIOGRAPHIE .....	A-VIII

Principales notations1- Notations géométriques

$\vec{x}$  vecteur position de tout point de l'espace

$x_i$  composante d'ordre  $i$  de  $\vec{x}$

$\Omega$  ouvert borné de  $R^3$  simplement connexe

$\bar{\Omega}$  domaine d'intérieur  $\Omega$

$\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  frontière de  $\Omega$

$\partial_0\Omega$  ouvert de  $\partial\Omega$

$\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  fermés, simplement connexes, disjoints de  $\partial\Omega$

$\vec{n}$  normale extérieure au domaine  $\bar{\Omega}$ , partout où elle existe

2 - Notations relatives à la théorie de l'Elasticité

$\vec{u}$  champ de déplacements en tout point de  $\Omega$

$u_i$  composante d'ordre  $i$  de  $\vec{u}$

$\overline{D(\vec{u})}$  champ tensoriel de déformations associé à  $\vec{u}$

$\epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  composantes de  $\overline{D(\vec{u})}$

$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

$\overline{\overline{C}}$  tenseur des coefficients élastiques de rigidité

$C_{ijkl}$  composante de  $\overline{\overline{C}}$

$\overline{\overline{C'}}$  tenseur des coefficients élastiques de déformabilité

$C'_{ijkl}$  composantes de  $\overline{\overline{C'}}$

$\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{C}} \cdot \overline{D(\vec{u})}$  champ tensoriel de contraintes associé à  $\vec{u}$

$\tau_{ij}$  composantes de  $\overline{\overline{T}}$

$\tau_{ij,k} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k}$

$\overrightarrow{\sigma_n}(\vec{u}) = \overline{\overline{C}} \cdot \overline{D(\vec{u})} \cdot \vec{n}$  champ de vecteurs contrainte en tout point de  $\partial\Omega$ , associée à  $\vec{u}$

$A(\vec{u}) = \text{div}(\overline{\overline{C}} \cdot \overline{D(\vec{u})})$  opérateur de l'Elasticité linéaire

$$\phi(\vec{u}, \vec{u}) \equiv \phi(\vec{T}, \vec{T}) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{kl}(\vec{u}) d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C'_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} d\omega$$

énergie de déformation élastique

$\vec{R}$  résultante générale des charges appliquées sur  $\partial_1 \Omega$

$\vec{M}$  moment résultant des charges appliquées sur  $\partial_1 \Omega$

s.e.z statiquement équivalent à zéro

### 3 - Notations d'analyse fonctionnelle

$$H^1(\Omega) = \{u ; u \in L^2(\Omega) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$\gamma_0 u$  trace de  $u$  sur  $\partial \Omega$

$$H^{1/2}(\partial \Omega) = \{ \gamma_0 u ; u \in H^1(\Omega) \}$$

$$\| \gamma_0 u \|_{H^{1/2}(\partial \Omega)} = \inf_{v \in H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{lorsque } \gamma_0 v = \gamma_0 u$$

$H^{-1/2}(\partial \Omega)$  dual fort de  $H^{1/2}(\partial \Omega)$

$$E(\Omega)^3 = \{ \vec{u} ; u_i \in L^2(\Omega) \quad \epsilon_{ij}(\vec{u}) \in L^2(\Omega) \}$$

$$\| \vec{u} \|_{E(\Omega)^3} = \| \vec{u} \|_{(L^2(\Omega))^3} + \sum_{i,j=1}^3 \| \epsilon_{ij}(\vec{u}) \|_{L^2(\Omega)}$$

$\gamma_0 \vec{u}$  trace de  $\vec{u}$  sur  $\partial \Omega$

$$F(\partial \Omega)^3 = \{ \gamma_0 \vec{u} ; \vec{u} \in E(\Omega)^3 \}$$

$$\| \gamma_0 \vec{u} \|_{F(\partial \Omega)^3} = \inf_{\vec{v} \in E(\Omega)^3} \| \vec{v} \|_{E(\Omega)^3} \quad \text{lorsque } \gamma_0 \vec{v} = \gamma_0 \vec{u}$$

$F'(\partial \Omega)^3$  dual fort de  $F(\partial \Omega)^3$

Rectificatif

Pour écrire correctement les conditions aux limites faibles d'un "Problème de SAINT-VENANT" (p. 30 et 54) et les conditions de compatibilité (p. 36 et 60), il convient de bien préciser que  $\partial_0 \Omega$  par exemple est ouvert et  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  sont fermés. Il en résulte les modifications suivantes

<u>Page</u>	<u>Ligne</u>	<u>Modifications</u>
36	23	$H_{\partial_1 \Omega}^{-1/2}(\partial \Omega)$ (Resp. $H_{\partial_2 \Omega}^{-1/2}(\partial \Omega)$ ) avec $H_{\partial_i \Omega}^{-1/2} = \{\eta \in H^{-1/2}(\partial \Omega); \text{supp. } \eta \subset \partial_i \Omega\}$
37	6 et 7	$\eta_1 \in H_{\partial_1 \Omega}^{-1/2}(\partial \Omega)$ $\eta_2 \in H_{\partial_2 \Omega}^{-1/2}(\partial \Omega)$
	10	dans $H_{\partial_1 \Omega}^{-1/2}(\partial \Omega)$ (Resp. $H_{\partial_2 \Omega}^{-1/2}(\partial \Omega)$ )
61	11 et 12	... $F'_{\partial_1 \Omega}(\partial \Omega)^3$ (Resp. $F'_{\partial_2 \Omega}(\partial \Omega)^3$ ) avec $F'_{\partial_i \Omega}(\partial \Omega)^3 = \{\vec{\eta} \in F'_{\partial_i \Omega}; \text{supp. } \vec{\eta} \in \partial_i \Omega\}$
62	1 et 2	$\vec{\eta}_1 \in F'_{\partial_1 \Omega}(\partial \Omega)^3$ $\vec{\eta}_2 \in F'_{\partial_2 \Omega}(\partial \Omega)^3$
	9	$F'_{\partial_1 \Omega}(\partial \Omega)^3$ (Resp. $F'_{\partial_2 \Omega}(\partial \Omega)^3$ )

Errata

---

<u>Page</u>	<u>Ligne</u>	<u>Correction</u>
6	22	... un peu plus simple, du Laplacien
7	12	$\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$
7	16	... simplement connexes fermés avec ...
7	19	- nuls sur $\partial_0\Omega$
11	3	$\bar{D} = \bar{C}^i \cdot \bar{T}$
19	6	$\psi(\bar{T}^i) = \phi(\bar{T}^i, \bar{T}^i) - \vec{A} \cdot \vec{R} - \vec{B} \cdot \vec{M}$
19	8	... $\phi(\bar{T}, \bar{T})$ est définie positive
23	8	faible du problème A
27	11	... dans $\partial_0\Omega$
30	6	... dans $\partial_0\Omega$
31	2	... sur $\partial_0\Omega$
36	22	(Resp. $H^{1/2}(\partial_2\Omega)$ )
37	13	... sur $\partial_0\Omega$
39	10	$\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$
39	11	... simplement connexes fermés
40	6	... dans $\partial_0\Omega$
54	20	... dans $\partial_0\Omega$
58	9	$\leq \alpha^2 \mu_2 \sqrt{F(\bar{\phi})}$
62	15	... sur $\partial_0\Omega$
64	5	$\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$
64	6	... simplement connexes fermés
74	24	... de résultante $P \vec{z}$
88	14	voisines dans leur démarche

PARTIE I

SOLUTION D'ENERGIE MINIMUM

POUR LE

PROBLEME DE SAINT-VENANT

## CHAPITRE I

### RECHERCHE DE LA SOLUTION D'ENERGIE MINIMUM POUR LES PROBLEMES DU TYPE PROBLEME DE SAINT-VENANT DANS LE CADRE VARIATIONNEL CLASSIQUE

#### §1 - INTRODUCTION

Dans cette I<sup>e</sup> partie nous nous intéressons à la recherche de : l'existence, de l'unicité et d'une caractérisation d'une "solution d'énergie minimum" à des problèmes du type "problème de SAINT-VENANT". Nous ne donnons toutefois que des rappels bibliographiques très sommaires sur le problème de SAINT-VENANT lui-même. L'étude du Principe de SAINT-VENANT, en effet, oriente notre travail et c'est vis à vis de cette question que, dans la II<sup>e</sup> partie, nous situons essentiellement les résultats obtenus.

Cette I<sup>e</sup> partie est à notre connaissance très éloignée dans ses méthodes des travaux classiques sur le problème de SAINT-VENANT. La recherche d'une "solution d'énergie minimum" est à rapprocher, cependant, des préoccupations de MM. STERNBERG et KNOWLES dans (9). Nous le précisons dans l'alinéa 3 de ce paragraphe.

#### 1.1 - Rappels sur le problème de Saint-Venant

Le problème de SAINT-VENANT (1)(2) consiste initialement en la recherche des solutions du problème d'élasticité linéaire homogène et isotrope suivant :

"Déterminer le champ des contraintes et le champ des déplacements en tous points d'un corps prismatique soumis sur ses faces terminales à des systèmes de charges et de liaisons donnés. Le corps étant en équilibre statique et libre de toute charge sur sa surface latérale".

Ce problème présente dans sa généralité une très grande complexité mais les remarques suivantes permirent à SAINT-VENANT d'en donner une solution dont l'intérêt pratique et méthodologique fut considérable :

- la répartition des efforts sur une pièce ou une structure mécanique n'est jamais connue avec précision.

- la géométrie particulière des corps considérés (poutres longues) permet de supposer que, d'une certaine façon, la "déformation globale" de ces corps ne dépend pas beaucoup de la répartition exacte des charges sur les faces terminales. Seules importent réellement certaines caractéristiques globales des systèmes de charges. SAINT-VENANT, guidé par des considérations expérimentales et non pas, comme on pourrait le penser, par le schéma de la mécanique rationnelle, émit l'hypothèse que les caractéristiques importantes des systèmes de charges appliqués à chacune des extrémités étaient les éléments de réduction du torseur.

- la nullité des charges sur la surface latérale associée à la forme des corps considérés, permet de négliger certaines composantes du tenseur des contraintes.

- la linéarité du problème permet une décomposition "canonique" en quatre cas simples : la traction, la torsion pure, la flexion pure, le fléchissement en console. Le cas général est obtenu par superposition.

De la deuxième remarque est né le Principe de SAINT-VENANT, très bien vérifié dans de très nombreux cas. Il fut généralisé aux corps de forme quelconque par BOUSSINESQ (3). Il n'est pas douteux cependant qu'il possède des limites, y compris dans le cas des corps de forme cylindrique allongée, ainsi que le matérialise un très bel exemple donné

par R.A. TOUPIN (4). Nous aborderons cette question dans la deuxième partie.

### 1.2 - Caractérisation unitaire des solutions de SAINT-VENANT

SAINT-VENANT obtint une solution dans chaque cas canonique en ajoutant aux remarques précédentes des hypothèses particulières à chacun. La forme très remarquable de ces solutions a rapidement suscité des recherches dans le but de les retrouver à partir d'un critère unique pour les quatre cas. Ainsi CLEBSCH (6) obtint directement ces solutions à partir de la seule hypothèse que le vecteur contrainte en tous points, relativement à toutes normales situées dans le plan d'une section droite, est parallèle aux génératrices du cylindre ( $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$ ). VOIGT (7) obtint les solutions de SAINT-VENANT pour la traction, la torsion et la flexion de la seule hypothèse que le champ des contraintes est indépendant de la coordonnée axiale. Il retrouva la solution de la flexion en console en supposant que le champ des contraintes dépend au plus linéairement de la coordonnée axiale. Citons enfin l'exposé de synthèse très inductif et très complet de L. SOLOMON (5) sur le problème de SAINT-VENANT englobant pratiquement tous les travaux classiques sur ce sujet.

Par ailleurs, E. STERNBERG et J.K. KNOWLES (9) en 1966, reprenant une idée déjà rencontrée dans TRUESDELL (8), tentèrent d'obtenir une caractérisation énergétique de ces solutions. Dans les cas de la traction, de la flexion et de la torsion, ils démontrèrent que les solutions de SAINT-VENANT minimisent l'énergie de déformation lorsqu'on considère :

- pour la traction et la flexion, tous les champs de contraintes statiquement admissibles <sup>(1)</sup> (et en particulier toutes les solutions) satisfaisant les conditions de résultante générale et de moment résultant imposés et tels que les contraintes de cisaillement sur les faces terminales soient nulles.

(1) La définition des champs de contraintes statiquement admissibles est rappelée au chapitre I §3 alinéa 2.

- pour la torsion, tous les champs de contraintes (et en particulier toutes les solutions) satisfaisant les conditions de moment de torsion imposé et tels que les contraintes normales soient nulles sur les faces terminales.

Dans le cas de la flexion en console une telle caractérisation ne leur a pas été possible (sauf si le coefficient de POISSON du matériau est nul). La solution de SAINT-VENANT est obtenue dans ce cas par un procédé du type superposition à partir de deux des solutions précédentes et peut-être doit-on y chercher la raison de la perte de la propriété de minimum ?

### 1.3 - Solutions d'énergie minimum

A la suite des résultats de STERNBERG et KNOWLES la question suivante vient assez naturellement à l'esprit :

Les restrictions imposées sur les faces terminales aux champs de contraintes (relativement aux contraintes de cisaillement, dans le cas de la traction et de la torsion, et aux contraintes normales, dans le cas de la flexion) sont-elles indispensables ? C'est à dire, les solutions données par SAINT-VENANT, pour la traction, la torsion et la flexion tout au moins, minimisent-elles encore l'énergie de déformation si l'on considère tous les champs de contraintes statiquement admissibles, satisfaisant aux seules conditions de résultante générale et de moment résultant imposés sur les sections terminales et de nullité sur la surface latérale ?

Sans entrer dans les détails disons que, dès la première analyse, les démonstrations de STERNBERG et KNOWLES ne semblent pas devoir s'étendre aux cas de champs de contraintes plus généraux. Les solutions de SAINT-VENANT ne sont donc vraisemblablement pas les solutions d'énergie minimum et la recherche de celles-ci est l'objet de ce que nous appellerons le

problème direct :

"Considérant "tous les systèmes de charges possibles" pour un problème du type problème de SAINT-VENANT, existe-t-il parmi eux un système pour lequel l'énergie de déformation est minimum ? Est-il unique ? Peut-on caractériser ce système ou la solution correspondante ?"

Dans ce chapitre et le chapitre 3 nous donnons successivement de ce problème mécanique, deux formulations mathématiques précises représentant, à nos yeux, une schématisation convenable. La première formulation, classique, ne nous permet pas de démontrer aisément l'existence d'une solution d'énergie minimum. La deuxième au contraire permet de conclure très facilement à l'existence et l'unicité de cette solution par application d'un théorème classique d'analyse fonctionnelle.

Pour ces deux formulations, nous ne nous limitons pas au seul cas des poutres. Pour cela nous définissons préalablement ce qu'on peut entendre par problème de SAINT-VENANT pour un corps de forme quelconque. Les démonstrations qui suivent n'en sont pas plus complexes et les résultats obtenus peuvent être pris en considération dans une étude du Principe de SAINT-VENANT pour les corps de forme quelconque.

La méthode de démonstration employée au chapitre 3, est forgée au chapitre 2 sur une transposition du problème précédent au cas, techniquement un peu plus simple du Laplacien. Il est d'ailleurs aisé d'attacher à ce problème transposé une signification physique. Rappelons à ce sujet que, dès l'origine, l'existence de problèmes analogues au sien dans d'autres branches des Sciences que l'Elasticité, avait été signalée par SAINT-VENANT. Pour chacun de ces problèmes il est possible d'énoncer une hypothèse simplificatrice analogue au Principe de SAINT-VENANT. Cette idée a de temps à autre été reprise, par exemple par M. BOLEY (10).

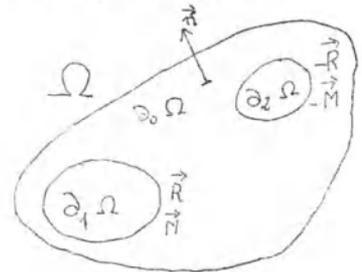
Enfin il est clair que le problème énoncé ci-dessus est, pour l'essentiel, un problème d'existence et d'unicité. Il s'agit d'un pro-

blème "inverse" par rapport à celui envisagé par MM. STERNBERG et KNOWLES dans (9). C'est pourquoi les développements qui suivent sont en tout point différents de ceux de (9) à l'exception du procédé de la démonstration du résultat 2, énoncé au chapitre I § 4 alinéa 1, directement issu de ce travail.

§2 - PROBLEME DE SAINT-VENANT POUR UN CORPS  
DE FORME QUELCONQUE

2.1 - Cas de l'Elasticité

Dans  $R^3$ , rapporté à un trièdre de référence, un corps élastique occupe un certain domaine constitué d'un ouvert  $\Omega$  borné simplement connexe et de sa frontière  $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ , supposée dans ce chapitre suffisamment régulière, par exemple  $C^\infty$ .



$\partial_0\Omega$ ,  $\partial_1\Omega$ ,  $\partial_2\Omega$  sont disjoints,  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  simplement connexes avec  $\text{dist}(\partial_1\Omega, \partial_2\Omega) > 0$ . En pratique  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  sont "petits" et "éloignés" l'un de l'autre.

Sur la surface de ce corps sont appliqués divers systèmes de charges :

- nuls sur  $\overline{\partial_0\Omega}$
- et qui déterminent respectivement sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  des torseurs dont les éléments de réduction sont opposés et donnés.

A tout système de charges on fait correspondre le champ de vecteur  $\vec{g}(P)$  représentant la densité de charges en tout point  $P$  de  $\partial\Omega$ . Tous ces champs de vecteurs, notés simplement  $\vec{g}$  dans la suite, sont alors tels que :

$$\vec{g} = 0 \quad \text{sur } \partial_0 \Omega$$

$$\int_{\partial_1 \Omega} \vec{g} \, da = - \int_{\partial_2 \Omega} \vec{g} \, da = \vec{R}$$

$$\int_{\partial_1 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{g} \, da = - \int_{\partial_2 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{g} \, da = \vec{M}$$

$\vec{x}$  est le vecteur position

$\vec{R}$  et  $\vec{M}$  sont des vecteurs donnés.

Vis à vis du deuxième problème fondamental de la théorie de l'Elasticité on définit ainsi une famille  $\mathcal{L}$  de "conditions aux limites", à laquelle correspond une famille  $\mathcal{L}'$  de "solutions". On cherche au moins une "solution" parmi "toutes" les solutions constituant cette famille  $\mathcal{L}'$ .

Le système des équations à satisfaire est le suivant :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{ll} A \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \quad (1) \\ \overrightarrow{\sigma_n}(\vec{u}) = \vec{g} & \text{sur } \partial \Omega \quad (1') \\ \vec{g} \text{ étant l'un des champs de vecteurs} \\ & \text{définis sur } \partial \Omega \text{ tels que :} \\ \vec{g} = 0 & \text{sur } \partial_0 \Omega \quad (2) \\ \int_{\partial_1 \Omega} \vec{g} \, da = - \int_{\partial_2 \Omega} \vec{g} \, da = \vec{R} & (3) \\ \int_{\partial_1 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{g} \, da = - \int_{\partial_2 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{g} \, da = \vec{M} & (4) \end{array} \right.$$

A est l'opérateur de l'Elasticité linéaire homogène, isotrope ou non

$\vec{u}$  le vecteur déplacement en tout point du domaine

$\vec{n}$  la normale extérieure en tout point de  $\partial \Omega$

$\overrightarrow{\sigma_n}(\vec{u})$  le vecteur contrainte en tout point du contour. C'est la dérivée conormale associée à l'opérateur A (cf. tableau des notations).

Enfin si, pour un système donné de conditions aux limites, l'unicité de la solution en déplacement est désirée, il est nécessaire d'introduire des conditions supplémentaires. Ce peut être les deux conditions vectorielles suivantes éliminant les déplacements de solide :

$$\int_{\Omega} \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} \vec{x} \wedge \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (6)$$

Nous les adjoignons au système (I).

#### Remarque

Les démonstrations de ce chapitre et des suivants s'adaptent très simplement :

1 - au cas de l'Elasticité linéaire non homogène.

2 - au cas de  $n$  régions chargées  $\partial_1 \Omega$  au lieu de deux.

#### Principe de SAINT-VENANT

Une étude systématique de ce principe consiste à comparer entre elles "toutes" les "solutions" du système (I) en fonction de la géométrie de  $\Omega$ ,  $\partial_0 \Omega$ ,  $\partial_1 \Omega$ ,  $\partial_2 \Omega$ , de la répartition des charges sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ , des propriétés physiques du matériau.

Dans la deuxième partie nous donnons quelques résultats sur cette question.

#### 2.2 - Transposition au cas du Laplacien

De la même façon que pour l'opérateur  $A$  de l'élasticité, nous pouvons définir pour le Laplacien un "problème de SAINT-VENANT".

Le domaine est le même que précédemment. Sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  est imposée l'intégrale de la dérivée normale de la fonction scalaire  $u$ . De

la même façon on cherche au moins un élément de la famille des solutions correspondant à la famille de problèmes de NEUMANN définis par :

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (7) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (7') \\ g \text{ étant l'une des fonctions définies sur } \partial\Omega \text{ telles} \\ \text{que :} \\ g = 0 \quad \text{sur } \partial_0\Omega \quad (8) \\ \int_{\partial_1\Omega} g \, da = - \int_{\partial_2\Omega} g \, da = R \quad (9) \\ \int_{\Omega} u \, d\omega = 0 \quad (10) \end{array}$$

On peut aussi envisager un principe de SAINT-VENANT pour ce cas.

### §3 - LA SOLUTION D'ENERGIE MINIMUM

#### 3.1 - L'énergie de déformation élastique

Rappelons que classiquement :

- Etant donné un champ de déplacement  $\vec{u}$  dans  $\Omega$ , on définit en tout point le tenseur des déformations  $\overline{\overline{D}}$ , symétrique, dont les composantes  $\epsilon_{ij}$  sont données par :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

- On définit par ailleurs en tout point le tenseur des contraintes  $\overline{\overline{T}}$ , symétrique, relié au tenseur  $\overline{\overline{D}}$  par une loi linéaire caractéristique du matériau :

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{\bar{D}}$$

ou

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{C}}' \cdot \bar{\bar{D}}$$

Les composantes de  $\bar{\bar{T}}$  sont notées  $\tau_{ij}$   
 $\bar{\bar{C}}$  est le tenseur des coefficients élastiques de rigidité de composantes  $C_{ijkl}$ .  
 $\bar{\bar{C}}'$  est le tenseur des coefficients élastiques de déformabilité de composantes  $C'_{ijkl}$ .

Les composantes de ces tenseurs vérifient des relations de symétrie du type suivant :

$$C'_{ijkl} = C'_{jikl} = C'_{ijlk} = C'_{jilk}$$

Ces relations permettent éventuellement de représenter  $\bar{\bar{C}}$  et  $\bar{\bar{C}}'$  sous la forme de matrices  $6 \times 6$  notées alors  $C$  et  $C'$ , et appelées respectivement matrice des coefficients élastiques de rigidité et matrice des coefficients élastiques de déformabilité.

De plus en milieu homogène ces coefficients sont indépendants du point considéré. En milieu isotrope ils s'expriment à partir de deux constantes seulement.

- On appelle énergie de déformation élastique, notée indifféremment  $\phi(\vec{u}, \vec{u})$  ou  $\phi(\bar{\bar{T}}, \bar{\bar{T}})$ , l'intégrale :

$$\phi(\vec{u}, \vec{u}) \equiv \phi(\bar{\bar{T}}, \bar{\bar{T}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\bar{T}} \cdot \bar{\bar{D}} \, d\omega$$

qui peut s'écrire également

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \, d\omega$$

ou

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} C'_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} \, d\omega$$

### 3.2 - Le problème A pour l'Elasticité

Nous pouvons maintenant donner du "problème direct" de l'introduction la formulation plus précise suivante :

"Parmi "toutes" les répartitions de conditions aux limites satisfaisant à (2) (3) (4) et pour lesquelles il existe une "solution" à (1) et (1'), peut-on trouver une répartition telle que, pour la "solution" correspondante, l'énergie de déformation élastique soit minimum ? Est-elle unique ? Quelles sont ses propriétés et celles de la "solution" correspondante ?"

Pour que ce problème A soit bien posé il convient de préciser ce que signifie "solution" à (1) et (1') et de caractériser directement ou indirectement la famille  $\mathcal{C}$  de "toutes" les conditions au contour envisagées.

D'un autre côté, pour un problème de minimum, il est intéressant de choisir des classes de fonctions assez vastes afin de :

- 1 - pouvoir représenter commodément un grand nombre de systèmes de charges
- 2 - conclure aisément qu'il existe un minimum

Pour commencer nous étudions le problème A à l'aide des méthodes variationnelles classiques en Elasticité. Les classes de fonctions envisagées sont assez vastes pour satisfaire le point 1. Elles englobent les classes de fonctions vis à vis desquelles on démontre habituellement les théorèmes d'existence en Elasticité.

### 3.3 - Le cadre variationnel classique en Elasticité

#### Condition sur le domaine

Du point de vue variationnel il suffit que le domaine permette l'application du théorème de la divergence. C'est en particulier le cas si  $\partial\Omega$  est une surface fermée, à plan tangent variant continûment,

sauf éventuellement le long d'un nombre fini d'arêtes (cf. GERMAIN (19) p. 13).

Pour que (1') ait un sens en tout point, par contre, il faut imposer des conditions plus restrictives, largement satisfaites dans le cas d'un domaine de frontière  $C^\infty$ .

Remarquons ici que, du point de vue physique, l'interprétation classique de (1') a surtout l'inconvénient d'exclure en toute rigueur les domaines dont la frontière présente des lignes singulières.

Les équations

avec les notations précédemment définies (cf. tableau des notations)

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{ij,j} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji} \end{array} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_{ij} = C'_{ijkl} \tau_{kl} \end{array} \right\} \quad (13)$$

$$\text{avec } C'_{ijkl} = C'_{jikl} = C'_{ijlk} = C'_{jilk}$$

$$\left. \begin{array}{l} C'_{ijkl} v_{ij} v_{kl} > 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

Pour tout tenseur  $\bar{V}$   
non nul, symétrique,  
d'ordre 2, de com-  
posantes  $v_{ij}$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{ij} n_j = t_i \end{array} \right\} \quad (15)$$

Tout indice répété étant sommé <sup>(1)</sup>.

Champ de contraintes statiquement admissibles  $S(\Omega)$

$$\bar{T} \in S(\Omega) \quad \text{si}$$

(1) Rappelons que - les  $n_j$  sont les composantes de la normale extérieure  $\vec{n}$   
- les  $t_i$  sont les composantes du vecteur  $\bar{T} \cdot \vec{n} = \sigma_n(\vec{u})$

1 -  $\bar{T} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$  (1)

2 -  $\bar{T}$  vérifie (11) dans  $\Omega$

Etat élastique E (C',  $\Omega$ )

$(\vec{u}, \bar{T}) \in E(C', \Omega)$  si

1 -  $\vec{u}, \bar{T} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$

2 -  $\bar{C}'$ , de composantes  $C'_{ijkl}$ , vérifie (14) dans  $\Omega$

3 - les équations (11) et (13) sont vérifiées

Forme bilinéaire  $\phi(\bar{T}, \bar{T}')$

Elle est définie pour tout  $\bar{T}, \bar{T}' \in C^0(\bar{\Omega})$

$$\phi(\bar{T}, \bar{T}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C'_{ijkl} \tau_{ij} \tau'_{kl} d\omega$$

Energie de déformation

$$\phi(\bar{T}, \bar{T}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C'_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} d\omega$$

Propriétés

$$\phi(\bar{T}, \bar{T}') = \phi(\bar{T}', \bar{T})$$

$$\phi(\bar{T} + \bar{T}', \bar{T} + \bar{T}') = \phi(\bar{T}, \bar{T}) + \phi(\bar{T}', \bar{T}') + 2 \phi(\bar{T}, \bar{T}')$$

$\bar{C}'$  étant définie positive, si  $\bar{T}$  est symétrique avec  $\bar{T} \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ , alors :

$$\phi(\bar{T}, \bar{T}) \geq 0$$

et

$$\phi(\bar{T}, \bar{T}) = 0 \iff \bar{T} = 0$$

(1) notation abrégée signifiant que les composantes de  $\bar{T}$  sont des fonctions appartenant à  $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ .

Théorème variationnel fondamental (1)

Si  $(\vec{u}, \vec{T}) \in E(C', \Omega)$

avec  $\vec{u} = \vec{u}_0$  sur la partie  $\Gamma_1$  du contour

$\vec{t} = \vec{t}_0$  sur la partie  $\Gamma_2$  du contour

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$$

Alors la fonctionnelle  $\psi$  définie pour tout  $\vec{T}' \in C^0(\bar{\Omega})$  par

$$\psi(\vec{T}') = \phi(\vec{T}', \vec{T}') - \int_{\Gamma_1} \vec{t}' \cdot \vec{u}_0 \, da$$

atteint son minimum si et seulement si  $\vec{T}' = \vec{T}$ , lorsque  $\vec{T}'$  décrit l'ensemble  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} = \{ \vec{T}' \mid \vec{T}' \in S(\Omega), \vec{t}' = \vec{t}_0 \text{ sur } \Gamma_2 \}$$

Démonstration

Soit en effet  $\vec{T}^* = \vec{T}' - \vec{T}$ . Alors

$$\vec{t}^* = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

$$\psi(\vec{T}') - \psi(\vec{T}) = \phi(\vec{T}^*, \vec{T}^*) + 2 \phi(\vec{T}^*, \vec{T}) - \int_{\Gamma_1} \vec{t}^* \cdot \vec{u}_0 \, da$$

Mais  $\vec{T}^* \in S(\Omega)$  et  $(\vec{u}, \vec{T}) \in E(C', \Omega)$ , nous avons donc en vertu du théorème de la divergence dont toutes les conditions d'application (2) sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{T}^*, \vec{T}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} C'_{ijkl} \tau_{ij}^* \tau_{kl} \, d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{ij,j}^* u_i \, d\omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_{ij}^* \epsilon_{ij} \, d\omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \tau_{ij}^* u_i n_j \, da = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \vec{t}^* \cdot \vec{u} \, da = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \vec{t}^* \cdot \vec{u}_0 \, da \end{aligned}$$

(1) Ou théorème de l'énergie complémentaire

(2) En dehors des conditions sur le domaine rappelées précédemment, les hypothèses habituelles de l'énoncé de ce théorème sont que les champs tensoriels intervenant sont définis et continus dans  $\bar{\Omega}$  et les dérivées premières des composantes sont intégrables dans  $\Omega$ .

et par suite

$$\psi(\bar{T}') - \psi(\bar{T}) = \phi(\bar{T}', \bar{T}')$$

ce qui entraîne immédiatement

$$\psi(\bar{T}') \geq \psi(\bar{T})$$

$$\text{et } \psi(\bar{T}') = \psi(\bar{T}) \iff \bar{T}' = \bar{T}$$

### 3.4 - Equation d'EULER du problème A et interprétation

Afin d'obtenir des renseignements sur la solution du problème A, si elle existe, écrivons la condition d'EULER nécessairement vérifiée par cette solution.

Soit  $\vec{g} \in \mathcal{C}$ , c'est à dire une répartition donnée de conditions au contour, vérifiant les hypothèses du problème de SAINT-VENANT sur  $\partial_0 \Omega$ ,  $\partial_1 \Omega$ ,  $\partial_2 \Omega$ , pour laquelle il existe une solution appartenant à  $E(C', \Omega)$ , au IIe problème de l'Elasticité associé :

$$\left| \begin{array}{ll} \vec{A}u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{\sigma}_n(\vec{u}) = \vec{g} & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Soit  $A_N^{-1} \vec{g}$  cette solution. Elle vérifie la formule de GREEN :

$$\phi(A_N^{-1} \vec{g}, A_N^{-1} \vec{g}) = \int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \gamma_0 A_N^{-1} \vec{g} \, da \quad (16)$$

$\gamma_0 A_N^{-1} \vec{g}$  désignant la trace de la solution sur  $\partial\Omega$

$\phi(A_N^{-1} \vec{g}, A_N^{-1} \vec{g})$  étant l'énergie de déformation.

Trouver la répartition  $\vec{g}_0$  engendrant l'énergie de déformation minimum, c'est, en vertu de (16), trouver  $\vec{g}_0$  de façon que la fonctionnelle

$$\int_{\partial\Omega} \vec{g} \cdot \gamma_0 A_N^{-1} \vec{g} \, da \quad \text{soit minimum. Soit } F(\vec{g}) \text{ cette dernière fonctionnelle.}$$

Considérons les répartitions de la forme  $\vec{g}_0 + \varepsilon \vec{\eta}$ , où  $\varepsilon$  est un "petit" paramètre. Si  $\vec{g}_0$  existe, elle est telle que :

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\vec{g}_0 + \varepsilon \vec{\eta}) \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (17)$$

Pour tout  $\vec{\eta}$  vérifiant les conditions de compatibilité associées au problème A, c'est à dire :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\eta} = \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 \quad \text{supp } \vec{\eta}_1 \subset \partial_1 \Omega \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{supp } \vec{\eta}_2 \subset \partial_2 \Omega \\ \int_{\partial_1 \Omega} \vec{\eta}_1 \, da = \int_{\partial_2 \Omega} \vec{\eta}_2 \, da = 0 \\ \int_{\partial_1 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{\eta}_1 \, da = \int_{\partial_2 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{\eta}_2 \, da = 0 \\ \text{Plus des conditions de régularité qui sont celles imposées à } \vec{g}. \end{array} \right.$$

Alors pour tout  $\vec{\eta}$  satisfaisant à (18),  $\vec{g}_0$  doit vérifier (17) qui s'écrit :

$$\int_{\partial \Omega} \vec{\eta} \cdot \gamma_0 A_N^{-1} \vec{g}_0 \, da = 0 \quad (19)$$

### Interprétation

Interprété mécaniquement, (19) exprime que le travail de tout système de charges représentable par un  $\vec{\eta} = \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2$  compatible, est nul dans le déplacement  $\gamma_0 A_N^{-1} \vec{g}_0$ .

Les conditions (18) expriment que la famille des  $\vec{\eta}_1$  et la famille des  $\vec{\eta}_2$  sont constituées de tous les systèmes de conditions au contour vérifiant certaines conditions de régularité et représentant des systèmes de charges statiquement équivalents à zéro respectivement sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .

(19) sera donc à coup sûr vérifié si  $\gamma_0 A_N^{-1} \vec{g}_0$  engendre des déplacements de solide séparément pour  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .

Réciproquement

Montrons que, s'il existe dans  $\mathcal{C}'$ , famille des solutions à (1) et (1') correspondant à la famille  $\mathcal{C}$  de conditions au contour, une solution  $(\vec{u}_0, \vec{T}_0)$  pour laquelle  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  ne subissent aucune déformation, alors elle minimise l'énergie de déformation et est unique.

Démonstration (1)

Supposons donc qu'il existe une solution  $(\vec{u}_0, \vec{T}_0) \in \mathcal{C}'$  au problème de SAINT-VENANT respectant la rigidité de  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .

Nous pouvons écrire que :

$$\vec{u}_0 = \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x} \quad \text{pour tout point de } \partial_1 \Omega.$$

$\vec{A}$  et  $\vec{B}$  étant des vecteurs constants

$$\vec{u}_0 = 0 \quad \text{pour tout point de } \partial_2 \Omega$$

$(\vec{u}_0, \vec{T}_0)$  est donc la solution du problème mêlé correspondant aux conditions au contour :

$$\vec{\sigma}_n(\vec{u}) = \vec{t} = 0 \quad \text{sur } \partial_0 \Omega$$

$$\vec{u} = \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x} \quad \text{sur } \partial_1 \Omega$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{sur } \partial_2 \Omega$$

$(\vec{u}_0, \vec{T}_0)$  appartient à  $E(C', \Omega)$ . Alors en vertu du théorème variationnel fondamental, le champ de contraintes solution,  $\vec{T}_0$ , minimise la fonctionnelle :

$$\psi(\vec{T}') = \phi(\vec{T}', \vec{T}') - \vec{A} \cdot \int_{\partial_1 \Omega} \vec{t}' \, da - \vec{B} \cdot \int_{\partial_1 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{t}' \, da$$

(1) Le procédé de démonstration utilisé ici est directement issu des démonstrations données dans (9).

Lorsque  $\bar{T}'$  décrit l'ensemble des champs statiquement admissibles tels que  $\vec{t}' = 0$  sur  $\partial_0 \Omega$  et plus particulièrement l'ensemble des champs statiquement admissibles dont les conditions au contour associées appartiennent à la famille  $\mathcal{L}$ .

Alors

$$\psi(\bar{T}') = \phi(\bar{T}') - A \cdot \vec{R} - \vec{B} \cdot \vec{M}$$

L'unicité de la solution d'énergie minimum résulte alors immédiatement de ce que l'énergie  $\phi(\bar{T}')$  est définie positive.

#### §4 - CONCLUSION

##### 4.1 - Résultats

Soit un problème de SAINT-VENANT tel qu'il a été défini au §2 et la famille des diverses répartitions de charges au contour représentables par la famille  $\mathcal{L}$  des champs de vecteurs  $\vec{g}$ , définis en tout point de la frontière  $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  du domaine occupé par le corps, tels que

- a) tout  $\vec{g}$  vérifie les conditions (2) (3) (4) du problème de SAINT-VENANT.
- b) un champ  $\vec{g}$  étant donné, il existe une solution  $(\vec{u}, \bar{T})$  appartenant à  $E(C', \Omega)$  au IIe problème de l'Elasticité correspondant. On désigne par  $\mathcal{L}'$  la famille des solutions associée à la famille  $\mathcal{L}$  des conditions au contour.

alors

1 - S'il existe lorsque  $\vec{g}$  décrit  $\mathcal{L}$ , un élément  $\vec{g}_0$  pour lequel

la solution correspondante  $(A_N^{-1} \vec{g}_0, \bar{T}_0)$  rend minimum l'énergie de déformation  $\Phi(\bar{T}, \bar{T})$ , alors nécessairement cette solution est telle que :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \gamma_0 A_N^{-1} \vec{g}_0 da = 0 \quad (19)$$

Pour tout  $\vec{n}$  vérifiant (18).

(19) est certainement vérifié si  $\gamma_0 A_N^{-1} \vec{g}_0$  engendre des déplacements de solide séparément pour  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ .

2 - S'il existe dans  $\mathcal{L}'$  une solution  $(\vec{u}_0, \bar{T}_0)$  pour laquelle  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  ne subissent aucune déformation, alors elle minimise l'énergie de déformation sur  $\mathcal{L}'$  et elle est unique.

#### 4.2 - Commentaires

1 - Les résultats précédents nous donnent, sous réserve d'en démontrer l'existence, une certaine caractérisation de la solution d'énergie minimum et nous en garantissent l'unicité dans  $E(C', \Omega)$ .

2 - Il est maintenant possible d'affirmer que les solutions données par SAINT-VENANT pour les quatre cas canoniques ne peuvent pas être les solutions d'énergie minimum, puisqu'elles ne respectent pas la rigidité des sections terminales.

3 - Pour démontrer l'existence d'un minimum pour l'énergie, on peut envisager de restreindre les hypothèses précédentes en adoptant celles d'un théorème classique d'existence pour le II<sup>e</sup> problème de l'Elasticité. Dans ce cas, la classe à laquelle appartiennent les conditions au contour, serait bien précisée. Les conditions de régularité des  $\vec{n}$  compatibles seraient donc connues explicitement. Par contre l'existence du minimum risquerait d'être difficile à démontrer.

4 - Une voie plus sûre consiste à donner du IIe problème de l'Elasticité et du problème A une formulation faible. C'est l'objet du chapitre III. Auparavant nous examinons, en ce sens, le problème A transposé au cas du Laplacien.

## CHAPITRE II

### EXISTENCE UNICITE ET CARACTERISATION D'UNE SOLUTION FAIBLE D'ENERGIE MINIMUM POUR LE PROBLEME DE SAINT-VENANT TRANSPOSE AU CAS DU LAPLACIEN

#### §1 - INTRODUCTION

##### 1.1 - Enoncé du problème A pour le Laplacien

Le domaine de  $R^3$  considéré est défini comme au chapitre précédent. Toutefois dans la formulation faible adoptée par la suite, la frontière  $\partial\Omega$  peut être prise  $C^\infty$  par morceaux, voire Lipschitzienne <sup>(1)</sup>.

Nous avons dit au chapitre I §2 alinéa 2 ce que nous entendions par "problème de SAINT-VENANT" associé au problème de NEUMANN pour le Laplacien. Les conditions du problème sont données par le système II.

Pour le Laplacien le problème A correspondant s'énonce alors :

"Parmi "toutes" les répartitions de conditions aux limites satisfaisant à (8) et (9) et pour lesquelles il existe une "solution" à (7) et (7'), peut-on trouver une répartition telle que, pour la "solution" correspondante, l'intégrale de l'énergie

$$\Phi(u,u) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial u_i} d\omega \quad (20)$$

(l'indice i étant sommé)

(1) Pour la définition de telles frontières cf. par exemple (18) p. 15

soit minimum ? Est-elle unique ? Quelles sont ses propriétés et celles de la "solution" correspondante ?"

## 1.2 - Orientation

Il serait possible d'étudier ce problème de la même façon qu'il a été fait pour l'Elasticité. Les résultats obtenus seraient analogues et la question de l'existence de la solution d'énergie minimum resterait de même en suspens. Aussi recherchons-nous directement une formulation faible au problème A.

Pour cela nous remarquons successivement que

1 - Ayant choisi un certain espace auquel appartiennent les conditions au contour, les relations (8) et (9) du système II entraînent que la famille  $\mathcal{C}$  des conditions au contour du problème de SAINT-VENANT est convexe. On suppose bien sûr que les relations (8) et (9) ont un sens vis à vis de l'espace considéré.

De même la famille  $\mathcal{C}'$  des solutions aux problèmes de NEUMANN associés est convexe dans l'espace où sont recherchées ces solutions.

2 - Le problème A consiste à minimiser l'intégrale de l'énergie  $\Phi(u,u)$  sur le convexe  $\mathcal{C}'$ . L'existence et l'unicité d'un minimum pour  $\Phi(u,u)$  sur  $\mathcal{C}'$  seront donc assurées, si ce problème peut se formuler comme la recherche de l'élément de norme minimale d'un convexe fermé dans un espace de HILBERT.

Les pages qui suivent, montrent comment arriver à une telle formulation.

## §2 - VERS LA FORMULATION FAIBLE DU PROBLEME A

### 2.1 - La fonctionnelle énergie et l'espace $H^1(\Omega)$

En analyse fonctionnelle il est classique d'associer à l'inté-

grale de l'énergie  $\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\omega$  la variété fermée  $V$  des  $u \in H^1(\Omega)$  tels que

$$\int_{\Omega} u d\omega = 0 \quad (10)$$

$H^1(\Omega)$  est l'espace des fonctions de carré sommable dans  $\Omega$ , dont les dérivées premières au sens des distributions sont aussi de carré sommable dans  $\Omega$ . Il s'agit donc de l'espace de toutes les fonctions de carré sommable dans  $\Omega$  pour lesquelles l'intégrale de l'énergie est finie (Espace d'énergie finie), l'intégrale étant prise au sens de LEBESGUE et la dérivation au sens des distributions.

$H^1(\Omega)$  est un espace de HILBERT pour le produit scalaire défini à partir de la somme des produits scalaires dans  $L^2(\Omega)$  des fonctions et de leurs dérivées premières. La norme dans  $H^1(\Omega)$  s'écrit alors :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$$

La fonctionnelle énergie  $\phi(u,u) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\omega$  est de toute évidence continue sur  $H^1(\Omega)$  pour la topologie introduite.

Mais si au lieu de  $H^1(\Omega)$  tout entier on considère la variété linéaire fermée  $V$  des  $u \in H^1(\Omega)$  vérifiant (10), alors on montre classiquement (inégalité de POINCARÉ) que  $\phi(u,u)$  permet de définir dans  $V$  une norme équivalente à la norme de  $H^1(\Omega)$ .

Ayant ainsi associé à la fonctionnelle  $\phi(u,u)$  une variété Hilbertienne  $V \subset H^1(\Omega)$ , il reste à trouver dans  $V$  une formulation du problème de NEUMANN pour laquelle le convexe  $\mathcal{L}$  des "solutions" du problème de SAINT-VENANT soit fermé.

## 2.2 - Formulations variationnelles du problème de NEUMANN dans la variété $V$ de $H^1(\Omega)$

Les méthodes variationnelles hilbertiennes permettent de donner dans  $V \subset H^1(\Omega)$  diverses formulations faibles du problème de NEUMANN non homogène, suivant l'espace  $H^S(\partial\Omega)$  considéré pour les conditions au contour. Ces formulations englobent la formulation classique (7) (7') du problème de NEUMANN. (cf par exemple (13), (17), (18))

Voyons en deux exemples :

### Formulation 1

L'ouvert  $\Omega$  et sa frontière satisfont les conditions définies précédemment.  $\partial\Omega$  en particulier peut être supposée Lipschitzienne. Soit  $V \subset H^1(\Omega)$  la variété définie à l'alinéa 2.1,  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  l'espace des traces des fonctions de  $H^1(\Omega)$  sur  $\partial\Omega$  et  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  son dual<sup>(1)</sup> fort.

On peut alors donner du problème de NEUMANN la formulation variationnelle suivante :

Trouver  $u \in V$  tel que pour tout  $v \in V$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega = \langle g, \gamma_0 v \rangle \quad (21)$$

$g$  étant donné dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  vérifiant :

$$\langle g, 1 \rangle = 0 \quad (22)$$

$\langle \cdot \rangle$  désigne la dualité entre  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .  $\gamma_0 v$  est la trace de  $v$  sur  $\partial\Omega$  et appartient donc à  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

L'existence et l'unicité de la solution  $u$ , pour tout  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  vérifiant (22), résultent immédiatement de l'application du théorème de F. RIESZ sur la représentation des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace de HILBERT (cf par exemple (13) p. 294 et suivantes ou (18) p. 38 et suivantes).

(1) Après identification de  $L^2(\partial\Omega)$  avec son dual.

Formulation 2

On considère des espaces du type  $H^s(\partial\Omega)$  avec  $s \geq 0$ , par exemple  $L^2(\partial\Omega)$ . On peut alors donner du problème de NEUMANN la formulation variationnelle :

Trouver  $u \in V \subset H^1(\Omega)$  tel que pour tout  $v \in V$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega = \int_{\partial\Omega} g \cdot \gamma_0 v d\omega \quad (23)$$

$g$  étant donné dans  $L^2(\partial\Omega)$  vérifiant :

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot da = 0 \quad (24)$$

Comme précédemment il y a existence et unicité de la solution  $u$  pour tout  $g \in L^2(\partial\Omega)$  vérifiant (24).

Pour ces formulations variationnelles du problème de NEUMANN non homogène, où l'existence et l'unicité d'une solution dans  $V \subset H^1(\Omega)$  sont assurées par application du théorème de RIESZ, l'espace  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  est l'espace le moins régulier dans lequel peuvent être choisies les conditions au contour; c'est à dire que la formulation 1 est la plus générale.

2.3 - Le problème A vis à vis de ces formulations

a) Le sens des relations (8) et (9)

Il convient tout d'abord de savoir si les relations (8) et (9) ont encore un sens pour les espaces de fonctions ou de distributions introduits. Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire de les généraliser<sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Pour le cas de l'Elasticité envisagé dans le chapitre suivant, nous devons aussi généraliser certaines relations. Ces généralisations seront alors faites de façon que les "conditions physiques", convenablement représentées dans la formulation classique, soient encore traduites en un sens satisfaisant dans la nouvelle formulation.

Examen de la relation (8)

Elle exprime que la fonction  $g$ , donnée, est nulle dans le sens classique sur la portion  $\partial_0 \Omega$  du contour. Dès que nous choisissons une formulation variationnelle du problème de NEUMANN nous devons généraliser (8). Pour cela il suffit d'exprimer, au sens de l'espace considéré pour les conditions au contour, la nullité de  $g$  sur  $\partial_0 \Omega$ .

Si  $g \in L^2(\partial\Omega)$ , (8) s'exprime :

$$\int_{\partial_0 \Omega} |g|^2 da = 0$$

Si  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , (8) s'exprime :

$$\langle g, \theta \rangle = 0$$

$\forall \theta \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ , de support contenu dans  $\overline{\partial_0 \Omega}$

Examen de la relation (9)

Cette relation garde un sens tant que les conditions au contour sont prises dans un espace  $H^s(\partial\Omega)$  avec  $s \geq 0$ . L'intégrale de LEBESGUE est, en effet, une fonctionnelle linéaire et continue pour tout espace de ce type. Par contre pour tout espace  $H^s(\partial\Omega)$  avec  $-\frac{1}{2} \leq s < 0$  la relation (9) doit être généralisée.

A priori on peut souhaiter se placer dans les espaces  $H_s(\partial\Omega)$  avec  $s \geq 0$  ne nécessitant pas la généralisation de (9). Ces espaces sont du type  $L^2$  et ont depuis de nombreuses années droit de cité en Physique. Mais l'examen du point suivant va déterminer notre choix.

b) Obtention d'un convexe  $\mathcal{C}$  fermé

Supposons choisi l'espace  $H^s(\partial\Omega)$  pour les conditions au contour. Pour tout  $g \in H^s(\partial\Omega)$ , vérifiant une certaine condition de compatibilité, il existe dans  $V \subset H^1(\Omega)$  une solution unique au problème de NEUMANN variationnel et l'application "solution", qui à  $g$  fait correspondre

$u$ , est continue.

L'ensemble des données au contour  $g$ , vérifiant les relations (8) (9), éventuellement généralisées, et la condition de compatibilité, forment un convexe  $\mathcal{L} \subset H^s(\partial\Omega)$ . Il lui correspond par l'application "solution" un convexe  $\mathcal{L}' \subset V \subset H^1(\Omega)$ .

Notre problème, rappelons-le, consiste à s'assurer qu'il existe un élément  $u_0$  de  $\mathcal{L}'$  minimisant la fonctionnelle énergie  $\phi(u,u)$ . Or  $\phi(u,u)$  est le carré de la norme de  $u$  dans  $V$ . L'existence et l'unicité de  $u_0$  seront assurées si  $\mathcal{L}'$  est fermé dans  $V \subset H^1(\Omega)$ .

Il est facile de voir que la relation (8) généralisée, la relation (9) non généralisée et la relation de compatibilité entraînent que le convexe  $\mathcal{L}$  est fermé dans  $H^s(\partial\Omega)$  lorsque  $s \geq 0$ . Cela ne suffit pas pour que le convexe  $\mathcal{L}'$  soit fermé dans  $V$ . Par contre  $\mathcal{L}'$  le sera, comme image réciproque d'un fermé, si le relèvement de l'application "solution"

$$u \text{ "solution"} \in V \longrightarrow g \in H^s(\partial\Omega)$$

est continu.

Existe-t-il un espace  $H^s(\partial\Omega)$ , avec  $s \geq 0$  ou à défaut  $s \geq -\frac{1}{2}$ , pour lequel ce relèvement soit continu ? En pratique il se révèle que seul l'espace  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  convient. Tout autre espace  $H^s(\partial\Omega)$  avec  $s > -\frac{1}{2}$  est muni d'une topologie trop fine. Nous n'en donnerons pas une démonstration directe, mais cela est une conséquence immédiate des résultats de l'alinéa 3 du § suivant.

C'est donc dans l'espace  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , associé à la formulation 1 du problème de NEUMANN, que nous envisageons le convexe  $\mathcal{L}$ . La relation (8) et la relation (9) doivent alors être généralisées en terme de dualité entre  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , en s'assurant toutefois que le convexe  $\mathcal{L}$  ainsi obtenu est bien fermé.

Dans l'exposé qui suit, on vérifie la continuité du relèvement de l'application "solution", par l'intermédiaire de l'étude de la coercivité d'une certaine fonctionnelle  $F(g)$ , définie sur  $\mathcal{L}$ , directement liée à  $\phi(u,u)$ .

Remarque 1 -

Il est clair que c'est essentiellement de la topologie de  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  dont nous avons besoin. Le convexe  $\mathcal{C}$  peut donc être envisagé dans n'importe quel sous espace fermé de  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Toutefois une telle limitation ne présente pas a priori d'intérêt : tout en restreignant le domaine des conditions au contour, elle ne conduit pas à une formulation plus classique du problème A.

Remarque 2 -

Une façon de conserver (9) sous sa forme initiale, tout en rendant continu le relèvement  $u \rightarrow g$ , serait de considérer le problème de NEUMANN, non dans  $H^1(\Omega)$ , mais dans un espace plus régulier,  $H^{3/2}(\partial\Omega)$  par exemple. Mais nous ne pourrions pas pour autant résoudre le problème A : la fonctionnelle  $\phi(u,u)$  ne serait plus coercive sur l'espace des solutions.

§3 - LA FORMULATION FAIBLE DU PROBLEME A

3.1 - Formulation faible du problème de NEUMANN

V étant la variété linéaire fermée des fonctions  $u \in H^1(\Omega)$  telles que

$$\int_{\Omega} u \, d\omega = 0 \quad (10)$$

Nous dirons que  $u \in V$  est solution du problème de NEUMANN associé à  $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  si u vérifie

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\omega = \langle g, \gamma_0 v \rangle \quad (21)$$

pour tout  $v \in V$

g étant donné dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  tel que

$$\langle g, 1 \rangle = 0 \quad (22)$$

### 3.2 - Les conditions aux limites faibles du problème de SAINT-VENANT

Les conditions (8) et (9) nous conduisent à définir la famille  $\mathcal{L}$  des  $\phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  tels que :

$$\langle \phi, 1 \rangle = 0 \quad (22)$$

$$\langle \phi, \theta \rangle = 0 \quad (8')$$

$\forall \theta \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  de support contenu dans  $\overline{\partial_0\Omega}$

$$\langle \phi, \theta' \rangle = 0 \quad (9')$$

$\forall \theta' \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  tel que  $\theta' = 1$  sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$

$$\langle \phi, \theta'' \rangle = 2R \quad (9'')$$

$\forall \theta'' \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  tel que  $\theta'' = 1$  sur  $\partial_1\Omega$   
 $\theta'' = -1$  sur  $\partial_2\Omega$

On vérifie aisément que ces conditions généralisent les conditions (8) (9) du "problème de SAINT-VENANT pour le Laplacien".

#### Remarque

Il existe bien des fonctions du type  $\theta''$  appartenant à  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . L'hypothèse  $\text{dist}(\partial_1\Omega, \partial_2\Omega) > 0$  permet de "raccorder" les fonctions 1 et -1 par des fonctions suffisamment régulières (par exemple  $C^2(\overline{\partial_0\Omega})$ ) de façon que la fonction obtenue soit suffisamment régulière (par exemple  $C^2(\partial\Omega)$ ) pour appartenir à  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

#### Propriétés de $\mathcal{L}$

-  $\mathcal{L}$  est non vide

Par exemple, la fonctionnelle  $\phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  définie sur tout élément  $\theta \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  par la relation

$$\langle \phi, \theta \rangle = \int_{\partial\Omega} g \cdot \theta \, da$$

où  $g$  est la fonction continue par morceau valant

$$\left| \begin{array}{l} 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\partial_0 \Omega} \\ \\ \frac{R}{\text{mes } \partial_1 \Omega} \quad \text{sur } \partial_1 \Omega \\ \\ \frac{-R}{\text{mes } \partial_2 \Omega} \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \end{array} \right.$$

vérifie bien toutes les relations de définition de  $\mathcal{L}$

- $\mathcal{L}$  ne contient pas l'origine si  $R \neq 0$
- $\mathcal{L}$  est convexe

La vérification est immédiate à partir des relations de définition

- $\mathcal{L}$  est fermé dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$

En effet :

- . la relation (22) définit une variété linéaire fermée dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$
- . à tous  $\theta, \theta'$  les relations (8') et (9') font correspondre respectivement une variété linéaire fermée de  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$
- . à tout  $\theta''$ , (9'') fait correspondre un hyperplan fermé.

$\mathcal{L}$  est donc fermé comme intersection d'une infinité de fermés.

### 3.3 - Formulation faible du problème A

A tout élément  $\phi \in \mathcal{L} \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$  correspond un problème de NEUMANN qui admet une solution unique  $\Delta_N^{-1} \phi \in V \subset H^{1/2}(\partial\Omega)$ . L'ensemble de ces solutions constitue un ensemble convexe  $\mathcal{L}' \subset V$ .

Le problème A s'énonce alors :

"Existe-t-il un élément  $\phi_0$  de  $\mathcal{L}$  pour lequel, lorsque  $\phi$  décrit  $\mathcal{L}$ , la fonctionnelle  $\phi(\Delta_N^{-1} \phi, \Delta_N^{-1} \phi)$  définie sur les éléments de  $\mathcal{L}'$

associés, soit minimum ?

$$\phi(\Delta_N^{-1} \phi, \Delta_N^{-1} \phi) = \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} d\omega \quad (l'indice i \text{ \u00e9tant somm\u00e9})$$

$\phi_0$  est-il unique ? Quelles sont les propri\u00e9t\u00e9s de la solution correspondante ?

### 3.4 - Existence et unicit\u00e9 de la solution du probl\u00e8me A

$\Delta_N^{-1} \phi$ , solution du probl\u00e8me de NEUMANN associ\u00e9 \u00e0  $\phi$ , v\u00e9rifie en vertu de (21) :

$$\phi(\Delta_N^{-1} \phi, \Delta_N^{-1} \phi) = \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} d\omega = \langle \phi, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi \rangle \quad (25)$$

A  $\langle \phi, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi \rangle$  on peut associer une fonctionnelle  $F$ , d\u00e9finie pour tout  $\phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  v\u00e9rifiant (22), par :

$$F(\phi) = \langle \phi, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi \rangle$$

L'\u00e9l\u00e9ment  $\phi_0$  cherch\u00e9 est en vertu de (25) celui qui minimise  $F(\phi)$  sur  $\mathcal{L}$ .  $\mathcal{L}$  \u00e9tant convexe ferm\u00e9 dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ , l'existence et l'unicit\u00e9 de  $\phi_0$  sont assur\u00e9es si la fonctionnelle  $F$  est coercive sur  $\mathcal{L}$ , c'est \u00e0 dire si pour tout  $\phi \in \mathcal{L}$  :

$$F(\phi) \geq \gamma^2 \|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2$$

#### D\u00e9monstration de la coercivit\u00e9 de $F(\phi)$

La d\u00e9finition de la norme dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  (dual fort de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ), la surjectivit\u00e9 de l'application "trace" de  $H^1(\Omega)$  sur  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  et la relation (21), v\u00e9rifi\u00e9e non seulement pour tout  $v \in V$  mais aussi pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , nous permettent d'\u00e9crire :

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \sup_{\gamma_0 v \in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{|\langle \phi, \gamma_0 v \rangle|}{\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} = \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega \right|}{\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}$$

pour tout  $\phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  vérifiant (22), c'est à dire pour lequel il existe une solution au problème de NEUMANN.

Nous montrerons plus loin que la norme de  $\phi$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  peut s'obtenir en ne considérant que les éléments  $\tilde{v}$  de  $H^1(\Omega)$  atteint par un relèvement continu de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ . Un tel relèvement existe (cf. par exemple (15) ou (14) p. 47) et fait correspondre à tout élément  $\gamma_0 v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  un élément  $\tilde{v} \in H^1(\Omega)$  de trace  $\gamma_0 v$  tel que :

$$\|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq \alpha^2 \|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad (26)$$

$\alpha^2$  constante positive indépendante de  $\gamma_0 v$

Nous pouvons alors écrire successivement :

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} &= \sup_{\tilde{v} \in H^1(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} d\omega \right|}{\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} \\ &\leq \sup_{\tilde{v} \in H^1(\Omega)} \frac{\sqrt{\int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} d\omega} \sqrt{\int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} d\omega}}{\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} \\ &\leq \sup_{\tilde{v} \in H^1(\Omega)} \frac{\|\Delta_N^{-1} \phi\|_{V \subset H^1(\Omega)} \|\tilde{v}\|_{H^1(\Omega)}}{\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} \\ &\leq \alpha^2 \sqrt{F(\phi)} \end{aligned}$$

ou encore :

$$F(\phi) \geq \frac{1}{\alpha^4} \|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2 \quad (27)$$

ce qui nous assure l'existence et l'unicité de  $\phi_0$ .

Remarque

Nous avons bien sûr une inégalité dans l'autre sens (continuité de l'application "solution") :

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \sup_{\gamma_0 v \in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{|\langle \phi, \gamma_0 v \rangle|}{\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} \geq \frac{\langle \phi, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi \rangle}{\|\gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}$$

mais  $\langle \phi, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi \rangle = \|\Delta_N^{-1} \phi\|_{V \subset H^1(\Omega)}^2$

et l'application trace, continue de  $H^1(\Omega)$  sur  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , l'est aussi de  $V$  dans  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , par suite :

$$\|\Delta_N^{-1} \phi\|_{V \subset H^1(\Omega)} \geq \beta^2 \|\gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

$\beta^2$  constante indépendante de  $\Delta_N^{-1} \phi$

Finalement

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \geq \beta^2 \|\Delta_N^{-1} \phi\|_{V \subset H^1(\Omega)} \quad (27')$$

ou encore

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2 \geq \beta^4 F(\phi)$$

ou encore :

$$F(\phi) \geq \frac{1}{\alpha^4} \|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2 \quad (27)$$

ce qui nous assure l'existence et l'unicité de  $\phi_0$ .

Remarque

Nous avons bien sûr une inégalité dans l'autre sens (continuité de l'application "solution") :

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \sup_{\gamma_0 v \in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{|\langle \phi, \gamma_0 v \rangle|}{\|\gamma_0 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}} \geq \frac{\langle \phi, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi \rangle}{\|\gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}$$

mais  $\langle \phi, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi \rangle = \|\Delta_N^{-1} \phi\|_{V \subset H^1(\Omega)}^2$

et l'application trace, continue de  $H^1(\Omega)$  sur  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , l'est aussi de  $V$  dans  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , par suite :

$$\|\Delta_N^{-1} \phi\|_{V \subset H^1(\Omega)} \geq \beta^2 \|\gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

$\beta^2$  constante indépendante de  $\Delta_N^{-1} \phi$

Finalement

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \geq \beta^2 \|\Delta_N^{-1} \phi\|_{V \subset H^1(\Omega)} \quad (27')$$

ou encore

$$\|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2 \geq \beta^4 F(\phi)$$

(27') exprime la continuité de l'application "solution".

(27) exprime la continuité du relèvement de cette application. La topologie de  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  est "la seule", parmi les topologies habituellement liées aux espaces  $H^s(\partial\Omega)$ , pour laquelle nous ayons ces 2 propriétés à la fois : si  $s > -\frac{1}{2}$ , la norme des espaces est trop grande et on ne peut obtenir une inégalité telle que (27). On ne peut donc conclure, comme précédemment, à l'existence et l'unicité de  $\phi_0$ .

si  $s < -\frac{1}{2}$ , c'est la formulation du problème de NEUMANN qui est remise en cause.

La conjonction de (27') et (27) pour la topologie de  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  est directement liée au fait que  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  est le dual de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

Relèvement  $\tilde{v}$  et norme de  $\phi$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$

Il nous reste à montrer que la norme de  $\phi$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  peut être obtenue en ne considérant que les  $\tilde{v}$  correspondant à un relèvement continu.

Soit  $H_0^1(\Omega)$  l'espace des fonctions  $w \in H^1(\Omega)$  de trace nulle sur  $\partial\Omega$ . C'est l'adhérence dans  $H^1(\Omega)$  de l'espace  $\mathcal{D}(\Omega)$  des fonctions à support compact dans  $\Omega$ , indéfiniment différentiables.

Si  $\Delta_N^{-1} \phi$  est solution d'un problème de NEUMANN, il résulte immédiatement de (21) que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\omega = 0 \quad (28)$$

Considérons alors les éléments de  $H^1(\Omega)$  qui ont même trace sur  $\partial\Omega$  qu'un élément  $v$  donné dans  $H^1(\Omega)$ . Ce sont tous les éléments de la forme  $v + w$ ,  $w$  quelconque dans  $H_0^1(\Omega)$ . Alors en vertu de (21) et (28) :

$$\frac{\langle \phi, \gamma_0(v+w) \rangle}{\|\gamma_0(v+w)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}} = \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial(v+w)}{\partial x_i} d\omega}{\|\gamma_0(v+w)\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}} = \frac{\int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\omega}{\|\gamma_0 v\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}}$$

La norme de  $\phi$  peut donc être obtenue en ne considérant qu'un seul représentant dans chacune des classes des éléments de même trace sur  $\partial\Omega$ . En particulier on peut prendre l'élément  $\tilde{v}$  correspondant à un relèvement continu  $\gamma_0 v \rightarrow \tilde{v}$  de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ .

### 3.5 - Condition d'EULER du problème A - Propriétés de la solution

Etant assurés de l'existence et de l'unicité de  $\phi_0$ , nous pouvons légitimement en chercher les propriétés. Pour cela, écrivons la condition d'EULER associée au problème variationnel A, nécessairement vérifiée par  $\phi_0$ .

Considérons les fonctionnelles  $\phi_0 + \varepsilon\eta$  qui appartiennent à  $\mathcal{C}$  pour toute valeur finie du paramètre  $\varepsilon$ . Ces fonctionnelles  $\eta$  doivent vérifier les conditions de compatibilité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ \langle \eta, 1 \rangle = \langle \eta, \theta \rangle = \langle \eta, \theta' \rangle = \langle \eta, \theta'' \rangle = 0 \quad (29) \\ \text{Pour tous } \theta, \theta', \theta'' \text{ de la définition de } \mathcal{C}. \end{array} \right.$$

Interprétons ces conditions :

d'après la deuxième condition  $\langle \eta, \theta \rangle = 0$ , les fonctionnelles  $\eta$  ont leur support contenu dans  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  et par suite peuvent s'écrire :

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \text{supp } \eta_1 \subset \partial_1\Omega \\ \text{supp } \eta_2 \subset \partial_2\Omega \end{array}$$

Les autres conditions de compatibilités s'écrivent alors,  $\langle \cdot \rangle_{\partial_1\Omega}$  (Resp  $\langle \cdot \rangle_{\partial_2\Omega}$ ) désignant la dualité entre  $H^{1/2}(\partial_1\Omega)$  (Resp  $H^{1/2}(\partial_1\Omega)$ ) et  $H^{-1/2}(\partial_1\Omega)$  (Resp  $H^{-1/2}(\partial_2\Omega)$ ) :

$$\langle \eta, 1 \rangle = 0 \iff \langle \eta_1, 1 \rangle_{\partial_1\Omega} + \langle \eta_2, 1 \rangle_{\partial_2\Omega} = 0$$

$$\langle \eta, \theta' \rangle = 0 \iff \langle \eta_1, \theta' \rangle_{\partial_1\Omega} + \langle \eta_2, \theta' \rangle_{\partial_2\Omega} = 0$$

$$\langle \eta, \theta'' \rangle = 0 \iff \langle \eta_1, 1 \rangle_{\partial_1 \Omega} - \langle \eta_2, 1 \rangle_{\partial_2 \Omega} = 0$$

Compte tenu de la définition des  $\theta'$  et  $\theta''$ .

Les conditions de compatibilité (29) sont finalement équivalentes aux suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \eta_1 + \eta_2 \quad \text{avec} \\ \text{supp } \eta_1 \subset \partial_1 \Omega \quad \eta_1 \in H^{-1/2}(\partial_1 \Omega) \\ \text{supp } \eta_2 \subset \partial_2 \Omega \quad \eta_2 \in H^{-1/2}(\partial_2 \Omega) \\ \langle \eta_1, 1 \rangle_{\partial_1 \Omega} = \langle \eta_2, 1 \rangle_{\partial_2 \Omega} = 0 \end{array} \right. \quad (29')$$

Les fonctionnelles  $\eta_1$  (Resp  $\eta_2$ ) constituent donc une variété linéaire fermée  $V_1$  (Resp  $V_2$ ) de codimension 1 dans  $H^{-1/2}(\partial_1 \Omega)$  (Resp  $H^{-1/2}(\partial_2 \Omega)$ ).

Exemple de fonctionnelles  $\eta$  compatibles

Considérons les fonctions  $g$  définies par

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 0 \quad \text{sur } \overline{\partial_0 \Omega} \\ g = g_1 \quad \text{sur } \partial_1 \Omega \text{ avec } g_1 \in C^\infty(\partial_1 \Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\partial_1 \Omega} g_1 \, da = 0 \\ g = g_2 \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \text{ avec } g_2 \in C^\infty(\partial_2 \Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\partial_2 \Omega} g_2 \, da = 0 \end{array} \right.$$

alors les fonctionnelles  $\eta \in H^{-1/2}(\partial \Omega)$  définies sur tout  $\gamma_0 v \in H^{1/2}(\partial \Omega)$  par :

$$\langle \eta, \gamma_0 v \rangle = \int_{\partial \Omega} g \cdot \gamma_0 v \, da$$

satisfont les conditions de compatibilités.

Condition d'EULER du problème A

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(\phi_0 + \varepsilon \eta) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

pour tout  $\eta$  vérifiant les conditions (29'), s'écrit :

$$\langle \eta, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0 \rangle + \langle \phi_0, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \eta \rangle = 0$$

Mais les deux termes du premier membre sont égaux en vertu de la formule de GREEN généralisée et la condition d'EULER du problème s'écrit :

$$\langle \eta, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0 \rangle = 0 \quad (30)$$

Pour tout  $\eta$  vérifiant (29').

Conséquences de l'équation d'EULER

La condition précédente s'exprime, en raison de la forme des fonctionnelles  $\eta$  compatibles :

$$\langle \eta_1, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0 \rangle_{\partial_1 \Omega} + \langle \eta_2, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0 \rangle_{\partial_2 \Omega} = 0$$

$$\forall \eta_1 \in V_1 \quad \text{et} \quad \forall \eta_2 \in V_2$$

ce qui est équivalent à :

$$\langle \eta_1, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0 \rangle_{\partial_1 \Omega} = 0 \quad \forall \eta_1 \in V_1$$

$$\langle \eta_2, \gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0 \rangle_{\partial_2 \Omega} = 0 \quad \forall \eta_2 \in V_2$$

$V_1$  et  $V_2$  étant de codimension 1, il en résulte que  $\gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0$  est de la forme :

$$\lambda_1 \psi_1 \quad (\text{Resp } \lambda_2 \psi_2) \quad \text{sur } \partial_1 \Omega \quad (\text{Resp } \partial_2 \Omega)$$

$\psi_1$  (Resp  $\psi_2$ ) étant une des fonctions de  $H^{1/2}(\partial_1 \Omega)$  (Resp  $H^{1/2}(\partial_2 \Omega)$ ) orthogonale à  $V_1$  (Resp  $V_2$ ) au sens de la dualité,  $\lambda_1$  (Resp  $\lambda_2$ ) étant un scalaire.

Les fonctions  $\psi_1 = \text{cte}$  sur  $\partial_1 \Omega$ ,  $\psi_2 = \text{cte}$  sur  $\partial_2 \Omega$  appartiennent

respectivement à  $H^{1/2}(\partial_1\Omega)$  et  $H^{1/2}(\partial_2\Omega)$  et sont orthogonales la première à  $V_1$ , la deuxième à  $V_2$ , en vertu des conditions de compatibilités (29').

$\gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0$  est donc constante sur chacune des portions  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  du contour. De plus ne contenant pas l'origine si  $P \neq 0$ ,  $\gamma_0 \Delta_N^{-1} \phi_0$  peut prendre les mêmes valeurs sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  dans ce cas.

#### §4 - CONCLUSIONS

##### 4.1 - Résultats

Soit :

a) un ouvert borné  $\Omega$  de  $R^3$ , simplement connexe, de frontière  $\partial\Omega = \overline{\partial_0\Omega} \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ ,  $C^\infty$  par morceaux ou même Lipschitzienne -  $\partial_0\Omega$ ,  $\partial_1\Omega$ ,  $\partial_2\Omega$  étant disjoints,  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  simplement connexes avec  $\text{dist}(\partial_1\Omega, \partial_2\Omega) > 0$ .

b)  $H^1(\Omega)$  l'espace des fonctions de carré sommable dans  $\Omega$  dont les dérivées au sens des distributions sont de carré sommable dans  $\Omega$ , muni de sa norme habituelle (Espace d'énergie finie).

$H^{1/2}(\partial\Omega)$  l'espace des traces d'ordre zéro sur  $\partial\Omega$  des fonctions de  $H^1(\Omega)$ .

$H^{-1/2}(\partial\Omega)$  son dual fort (en identifiant  $H^0(\partial\Omega)$  avec son dual). La dualité étant notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

c) la formulation variationnelle du problème de NEUMANN :

Soit  $V$  la variété linéaire fermée des fonctions  $u \in H^1(\Omega)$  telles que

$$\int_{\Omega} u \, d\omega = 0 \quad (10)$$

trouver  $u \in V \subset H^1(\Omega)$  vérifiant pour tout  $v \in V$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\omega = \langle g, \gamma_0 v \rangle \quad (21)$$

$g$  donné dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  tel que

$$\langle g, 1 \rangle = 0 \quad (22)$$

Pour laquelle il existe une et une seule solution

d) la famille  $\mathcal{L}$  des  $\phi \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  satisfaisant aux conditions :

$$\langle \phi, 1 \rangle = 0 \quad (22)$$

$$\langle \phi, \theta \rangle = 0 \quad (8')$$

$\forall \theta \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  de support contenu dans  $\overline{\partial_0\Omega}$

$$\langle \phi, \theta' \rangle = 0 \quad (9')$$

$\forall \theta' \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  tel que  $\theta' = 1$  sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$

$$\langle \phi, \theta'' \rangle = 2R \quad (9'')$$

$\forall \theta'' \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  tel que  $\theta'' = 1$  sur  $\partial_1\Omega$   
 $\theta'' = -1$  sur  $\partial_2\Omega$

e) la famille  $\mathcal{L}'$  des solutions  $\Delta_N^{-1} \phi \in V \subset H^1(\Omega)$  aux problèmes de NEUMANN variationnels associés aux éléments  $\phi \in \mathcal{L} \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .

Les données d'une formulation faible du "problème de SAINT-VE-NANT transposé au cas du Laplacien", contenant la formulation classique du chapitre I §2 alinéa 2.

Alors

- 1 - La famille  $\mathcal{L}$  est convexe et fermée dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .
- 2 - La famille  $\mathcal{L}'$  est convexe et fermée dans  $V \subset H^1(\Omega)$
- 3 - Lorsque  $\phi$  décrit  $\mathcal{L}$ , la solution  $\Delta_N^{-1} \phi$  correspondante décrivant alors  $\mathcal{L}'$ , il existe un et un seul élément  $\phi_c \in \mathcal{L}$  pour lequel la solution associée  $\Delta_N^{-1} \phi_c$  rend minimum sur  $\mathcal{L}'$  l'intégrale de l'énergie :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta_N^{-1} \phi}{\partial x_i} d\omega$$

- 4 - La "solution d'énergie minimum"  $\Delta_N^{-1} \phi_0$  est telle que sa trace  
| d'ordre zéro est constante respectivement sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .

#### 4.2 - Interprétations physiques

Le problème mathématique abordé dans ce chapitre et les résultats obtenus peuvent s'interpréter physiquement de diverses manières.

##### Electrostatique

- Le domaine  $\bar{\Omega}$  est occupé par un milieu diélectrique parfait, homogène, isotrope, non chargé en volume. Le potentiel électrostatique  $U$  est alors tel que

$$\Delta U = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

- La portion  $\partial_0 \Omega$  du contour est libre de toute charge. Donc, si  $\sigma$  désigne la densité de charge en tout point du contour

$$\sigma = \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial_0 \Omega$$

Cette condition peut être difficile à réaliser physiquement.

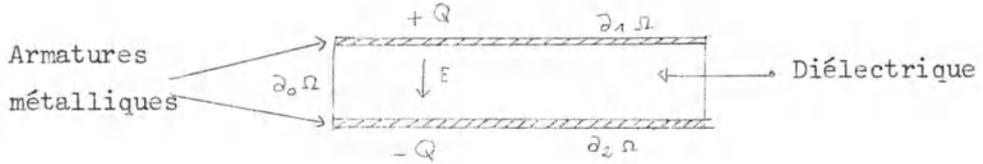
- La portion  $\partial_1 \Omega$  du contour porte une charge  $Q$  et la portion  $\partial_2 \Omega$  du contour une charge  $-Q$ . C'est à dire que :

$$\int_{\partial_1 \Omega} \sigma \, da = - \int_{\partial_2 \Omega} \sigma \, da = Q$$

- Les résultats obtenus "expriment" que l'énergie électrostatique située dans le diélectrique, dont l'expression classique est proportionnelle à  $\int_{\Omega} (\text{grad } U)^2 \, d\omega$ , est minimum si la répartition des charges  $Q$  et  $-Q$  sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  se fait à potentiel constant respectivement sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ . Pour qu'il en soit ainsi, il suffit de métalliser les portions  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  du contour.

- Un exemple de réalisation concrète de toutes ces conditions, avec

une bonne approximation, est fourni par les condensateurs plans.



Le champ électrostatique  $\vec{E}$  étant perpendiculaire (avec une bonne approximation) aux armatures, la densité de charge sur la surface latérale  $\sigma_0 \Omega$  du diélectrique est nulle en tout point.

- On pourrait aussi interpréter les résultats précédents dans le cas d'un conducteur. L'énergie minimisée étant alors l'énergie dissipée par effet joule.

Écoulement stationnaire d'un fluide incompressible dans un milieu poreux

-  $\bar{\Omega}$  est occupé par un milieu poreux statistiquement homogène et isotrope, à travers lequel s'écoule un fluide. On néglige l'accélération et on assimile le milieu à un milieu continu.

On définit pour le fluide, une vitesse moyenne locale  $\vec{V}$  et une pression moyenne locale  $p$ , reliées (hypothèse de DARCY cf (22) p. 223) par la relation :

$$\text{grad } p = - \frac{\mu}{K} \vec{V}$$

$\mu$  caractérisant la viscosité du fluide

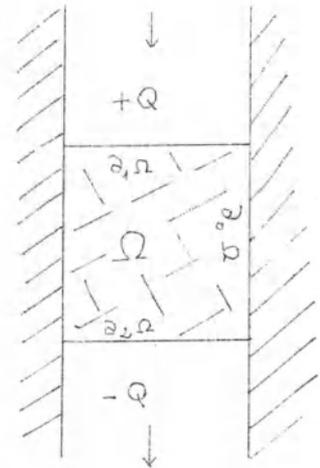
$K$  caractérisant la perméabilité du milieu

Par ailleurs, le fluide étant supposé incompressible, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

Par suite la pression doit vérifier

$$\Delta p = 0 \quad \text{dans } \Omega$$



- Sur la portion  $\partial_0 \Omega$  du contour il n'y a aucune fuite :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = - \frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial_0 \Omega$$

- Par la portion  $\partial_1 \Omega$  du contour pénètre sous un débit imposé  $Q$  un fluide qui ressort avec le même débit par la portion  $\partial_2 \Omega$  :

$$\int_{\partial_1 \Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} \, da = - \frac{K}{\mu} \int_{\partial_1 \Omega} \text{grad } p \cdot \vec{n} \, da = + \frac{K}{\mu} \int_{\partial_2 \Omega} \text{grad } p \cdot \vec{n} \, da = Q$$

- L'énergie dissipée dans le milieu poreux est minimum si l'écoulement s'effectue à pression constante à travers respectivement  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .

- Exemples concrets illustrant ces conditions : les percolateurs ...

#### Écoulement de chaleur stationnaire

- $\bar{\Omega}$  est occupé par un milieu conducteur homogène et isotrope. Dans le cas d'un écoulement de chaleur stationnaire la température  $T$  vérifie

$$\Delta T = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

- Sur  $\partial_0 \Omega$  il n'y a aucune fuite thermique

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$$

- Par  $\partial_1 \Omega$  pénètre une certaine quantité de chaleur  $Q$  qui est évacuée par  $\partial_2 \Omega$ , ce qui s'écrit à un coefficient près :

$$\int_{\partial_1 \Omega} \frac{\partial T}{\partial n} \, da = - \int_{\partial_2 \Omega} \frac{\partial T}{\partial n} \, da = Q$$

- L'énergie dissipée dans  $\Omega$  est minimum si l'apport de chaleur par  $\partial_1 \Omega$  et la perte de chaleur en  $\partial_2 \Omega$  se font respectivement à température constante. Pratiquement il suffit de recouvrir  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  d'un milieu très conducteur.

Remarque

Il est possible de donner d'autres interprétations physiques du problème et des résultats précédents, relevant pour la plupart, tels les deux derniers exemples <sup>(1)</sup>, de phénomènes dissipatifs stationnaires. Il pourrait être intéressant de situer le résultat obtenu vis à vis de Principes comme le "Principe de la moindre énergie dissipée" d'ONSAGER ou le "Principe du minimum de production d'entropie" de PRIGOGINE (cf (23) p. 110 et suivantes).

4.3 - Commentaires

1 - La démonstration de l'existence et de l'unicité d'une "solution d'énergie minimum" au problème de SAINT-VENANT transposé au cas du Laplacien, a été possible grâce à une formulation généralisée du problème dans laquelle sont étroitement liés algébriquement et topologiquement

- l'espace sur lequel est définie la fonctionnelle énergie
- l'espace où sont recherchées les solutions
- l'espace dans lequel sont choisies les conditions au contour

Nous avons vu que la notion de dualité joue un rôle essentiel dans cette harmonisation des espaces. Elle suggère de traiter de façon analogue le "problème dual" :

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (7)$$

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (7'')$$

g étant donné tel que (7) (7'') ait une "solution", et satisfaisant aux conditions :

$$g = 0 \quad \text{sur } \partial_0\Omega$$

$$\int_{\partial_1\Omega} g \, da = - \int_{\partial_2\Omega} g \, da = R$$

(1) Le premier exemple peut être considéré comme un cas limite

Trouver  $g$  pour lequel la solution correspondante rend minimum l'intégrale de l'énergie ?

On montrerait aisément que la "solution d'énergie minimum" existe, est unique et possède une dérivée normale constante respectivement sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ .

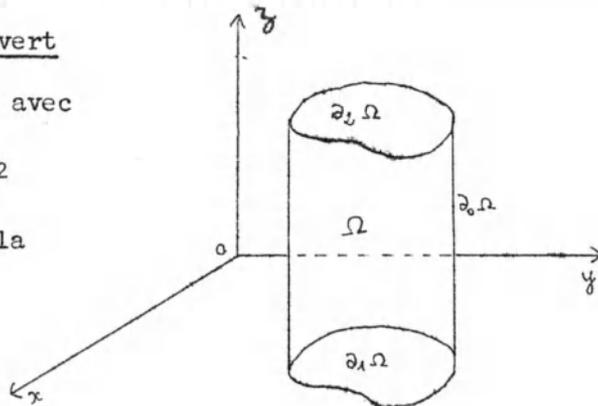
Par ailleurs l'étude précédente est transposable à toute recherche de minimum pour l'intégrale de l'énergie, relativement à une famille donnée de conditions au contour, si à cette dernière peut être associé un convexe fermé de  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  ou de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Elle peut aussi être transposée au cas d'un autre opérateur elliptique, voire à un système elliptique comme celui de l'Elasticité.

2 - Régularité de la solution d'énergie minimum - D'après un résultat connu d'analyse sur les opérateurs elliptiques nous savons que la solution  $\Delta_N^{-1} \phi_0$  est analytique dans  $\Omega$ . Par ailleurs les conditions aux limites du problème et les résultats obtenus nous disent, respectivement, que sa dérivée normale est nulle sur  $\partial_0\Omega$  et que sa trace est constante sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ . Il reste à étudier la régularité de la trace de  $\Delta_N^{-1} \phi_0$  à la traversée des frontières de  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ . En particulier il est intéressant de s'assurer de sa continuité. A ce sujet le Professeur G. GEYMONAT nous a signalé un résultat de P. GRISVARD ((24) § 10-4-b) qui permet de conclure pour des domaines de type cylindrique.

a) Soit l'ouvert

$$\Omega = \partial_1\Omega \times ]0, \ell[ \quad \text{avec}$$

- $\partial_1\Omega$  ouvert régulier de  $\mathbb{R}^2$
- $\partial_0\Omega$  surface latérale de la portion de cylindre
- $\partial_2\Omega$  section du cylindre de cote  $\ell$



Du résultat de P. GRISVARD il résulte immédiatement que le problème mêlé

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \\ u = g \quad \text{sur } \partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{sur } \partial_0 \Omega \end{array} \right.$$

a une solution dans  $H^{2\sigma+2}(\Omega)$  si et seulement si

$$\begin{aligned} f &\in H^{2\sigma}(\Omega) \\ g &\in H^{2\sigma+3/2}(\partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega) \\ h &\in H^{2\sigma+1/2}(\partial_0 \Omega) \end{aligned}$$

et vérifient sur le contour de  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  les conditions de raccord :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_z^\ell h - \frac{\partial}{\partial n} (-\Delta_{xy})^\ell g = \sum_{\alpha=0}^{\ell-1} \frac{\partial}{\partial n} \Delta_z^\alpha (-\Delta_{xy})^{\ell-\alpha-1} f \\ \ell \text{ entier, } \ell < \sigma + 1 \\ \sigma \geq 0, \quad \text{non entier} \end{array} \right.$$

où  $\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  et  $\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

b) D'après les théorèmes d'immersion de SOBOLEV (cf (18) p. 72) l'immersion de  $H^{2\sigma+2}(\Omega)$  dans  $C(\bar{\Omega})$  est continue si  $\sigma > -1/4$ , l'ouvert  $\Omega$  étant borné à frontière Lipschitzienne.

La solution d'un problème mêlé du type précédent, lorsqu'elle existe, est donc continue sur la frontière  $\partial \Omega$  puisque  $\sigma \geq 0$ .

c) Dans notre cas la solution d'énergie minimum est solution d'un problème mêlé avec

$$\begin{aligned} f &= 0 && \text{dans } \Omega \\ g &= C_1 && \text{sur } \partial_1 \Omega \\ g &= C_2 && \text{sur } \partial_2 \Omega \\ h &= 0 && \text{sur } \partial_0 \Omega \end{aligned}$$

$C_1$  et  $C_2$  étant des constantes.

Les données  $f, g, h$  de notre problème sont très régulières et l'on vérifie facilement que pour  $\sigma = 1/4$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \geq 0 \quad \text{et non entier} \\ f = 0 \quad \text{dans } \Omega \Rightarrow f \in H^{1/2}(\Omega) \\ \left. \begin{array}{l} g = C_1 \quad \text{sur } \partial_1 \Omega \\ g = C_2 \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow g \in H^2(\partial_1 \Omega \cup \partial_2 \Omega) \\ h = 0 \quad \text{sur } \partial_0 \Omega \Rightarrow h \in H^1(\partial_0 \Omega) \end{array} \right. \\ \text{Les conditions de raccord sont satisfaites.}$$

Par suite la "solution d'énergie minimum" appartient à  $H^{5/2}(\Omega)$ , donc est continue sur  $\partial\Omega$ .

En fait,  $\sigma$  peut être choisi aussi grand que nous voulons, vérifiant les conditions du résultat de GRISVARD, et les théorèmes d'immersion permettent d'affirmer que la solution d'énergie minimum, pour ce type de domaine, est Lipschitzienne dans  $\bar{\Omega}$ .

Remarque - Il reste à démontrer ce résultat dans le cas d'ouverts plus réguliers, pour lesquels à notre connaissance on ne dispose pas de résultats analogues à ceux obtenus par GRISVARD pour les ouverts de la forme  $\Omega \times G$ .

E. SHAMIR (25) a obtenu des résultats sur la régularité des solutions des problèmes mêlés, mais relativement à l'opérateur  $\Delta + \lambda$  avec  $\lambda > 0$ . D'une façon plus générale rappelons que dans (14) LIONS et MAGENES, ayant défini les "problèmes aux limites réguliers" elliptiques, signalent pour ceux-ci des résultats du type "si  $f \in H^r(\Omega)$  alors la solution appartient à  $H^{2m+r}(\Omega)$ " où  $2m$  est l'ordre de l'opérateur. Mais ils notent également (p. 224 et 228) que les problèmes mêlés, justifiables par ailleurs d'une formulation variationnelle, ne rentrent pas dans le cadre des "problèmes aux limites réguliers" et que l'on ne dispose pas a priori des mêmes résultats de régularité (cf MAGENES - STAMPACCHIA (13)).

3 - Le calcul numérique effectif de la "solution d'énergie minimum" pour des domaines particuliers n'est pas abordé dans ce travail, mais est envisageable.

## CHAPITRE III

### EXISTENCE, UNICITE ET CARACTERISATION D'UNE SOLUTION FAIBLE D'ENERGIE MINIMUM POUR LE PROBLEME DE SAINT-VENANT EN ELASTICITE

---

#### §1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous donnons du problème A en Elasticité, défini au chapitre I §3, une formulation généralisée pour laquelle l'existence et l'unicité d'une solution minimisant l'énergie de déformation sont aisément démontrées. La méthode est fondamentalement la même qu'au chapitre précédent.

- 1 - A la fonctionnelle à minimiser, l'énergie de déformation, on associe une variété fermée  $V$  de l'espace d'énergie finie  $E(\Omega)^3$ . Cet espace de HILBERT a été étudié notamment par S. CAMPANATO (16).
- 2 - Dans  $V$ , suivant l'espace choisi pour les conditions au contour, on peut donner diverses formulations variationnelles du IIe problème de l'Elasticité, avec existence et unicité d'une solution au sens faible (cf (16)).
- 3 - Les conditions au contour (2) (3) (4) du problème de SAINT VENANT se généralisent diversement suivant l'espace considéré pour les conditions au contour. Elles définissent dans cet espace un convexe  $\mathcal{C}$  fermé, auquel correspond le convexe

$\mathcal{L}' \subset V \subset E(\Omega)^3$  des solutions correspondantes au IIe problème de l'Elasticité.

- 4 - Afin de démontrer l'existence et l'unicité d'un élément de  $\mathcal{L}'$  minimisant l'énergie de déformation, on souhaite que  $\mathcal{L}'$  soit fermé dans  $V$ . Pour cela il suffit que le relèvement de  $\mathcal{L}'$  sur  $\mathcal{L}$  de l'application "solution" soit continu.

Cela n'est vrai que pour une seule des formulations variationnelles envisagées. Dans celle-ci les données au contour du type de NEUMANN, représentant les charges, sont envisagées comme fonctionnelles linéaires et continues définies sur les éléments de l'espace des traces des éléments de  $E(\Omega)^3$  sur le contour, représentant les déplacements au contour.

Afin de ne pas alourdir les démonstrations, nous nous limitons au cas de l'Elasticité linéaire homogène. Les coefficients élastiques sont donc supposés constants. Par contre l'hypothèse d'isotropie n'est pas faite, car elle n'apporte ici aucune simplification.

### 1.1 - La fonctionnelle énergie - L'espace $E(\Omega)^3$

Le domaine considéré est le même que précédemment (cf chap. II §4). Soit  $L(\vec{u}, \vec{u})$  la fonctionnelle <sup>(1)</sup> à minimiser :

$$L(\vec{u}, \vec{u}) = \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{kl}(\vec{u}) d\omega \quad \begin{array}{l} \text{(les 4 indices étant som-} \\ \text{tés et prenant les valeurs} \\ \text{1, 2, 3)} \end{array}$$

$\vec{u}$  représente le déplacement en tout point de  $\Omega$ .

Les  $C_{ijkl}$  sont les coefficients élastiques, de déformabilité. Ils vérifient les relations :

(1)  $L(\vec{u}, \vec{u})$  est le double de l'énergie de déformation  $\phi(\vec{u}, \vec{u})$  considérée au chapitre I.

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

$$C_{ijkl} v_{ij} v_{kl} > 0 \quad \text{Pour tout tenseur } \bar{V} \text{ non nul, symétrique, d'ordre 2, de composantes } v_{ij}.$$

Les  $\epsilon_{ij}(\vec{u})$  sont les composantes du tenseur des déformations  $\bar{D}$ :

$$\epsilon_{ij}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

La forme de la fonctionnelle  $L$ , nous conduit à considérer l'espace  $E(\Omega)^3$  des champs de déplacements  $\vec{u} \in L^2(\Omega)^3$ , pour lesquels les composantes du tenseur déformation  $\epsilon_{ij}(\vec{u})$  sont de carré sommable dans  $\Omega$ . Dans l'expression des  $\epsilon_{ij}(\vec{u})$  la dérivation est prise au sens des distributions. Cet espace étudié par S. CAMPANATO (16) (voir aussi (17) p. 29) est un espace de HILBERT pour le produit scalaire :

$$((\vec{u}, \vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v})_{L^2(\Omega)^3} + \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(\vec{u}), \epsilon_{ij}(\vec{v}))_{L^2(\Omega)}$$

avec

$$(\vec{u}, \vec{v})_{L^2(\Omega)^3} = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)}$$

A ce produit scalaire est bien sûr associée la norme :

$$||\vec{u}||_{E(\Omega)^3} = ((\vec{u}, \vec{u}))$$

Pour des ouverts suffisamment réguliers, ayant la propriété du cône par exemple, et en particulier pour l'ouvert considéré dans notre problème,  $E(\Omega)^3$  s'identifie à l'espace  $H^1(\Omega)^3$  (cf (16)).

A  $L(\vec{u}, \vec{u})$  on associe plus précisément la variété linéaire fermée  $V$  des  $\vec{u} \in E(\Omega)^3$  tels que

$$\int_{\Omega} \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} \vec{x} \wedge \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (32)$$

avec

$$\|\vec{u}\|_{V \subset E(\Omega)^3}^2 = \sum_{i=1}^3 (\epsilon_{ij}(\vec{u}), \epsilon_{ij}(\vec{u}))_{L^2(\Omega)}$$

La norme ainsi définie est équivalente dans  $V$  à la norme de  $E(\Omega)^3$ .

### 1.2 - Espace des traces $F(\partial\Omega)^3$

Pour des ouverts suffisamment réguliers, il est possible de définir (cf [16] p. 246 et 247 et aussi [15]) la trace des éléments de  $E(\Omega)^3$  sur  $\partial\Omega$ .

Soit  $F(\partial\Omega)^3$  l'espace de ces traces  $\gamma_0 \vec{u}$  sur  $\partial\Omega$ . Soit  $E_0(\Omega)^3$  le sous espace de  $E(\Omega)^3$  des éléments de trace nulle sur  $\partial\Omega$ .  $F(\partial\Omega)^3$ , muni de la topologie induite par l'espace quotient  $E(\Omega)^3/E_0(\Omega)^3$ , est isomorphe algébriquement et topologiquement à cet espace et l'application  $u \rightarrow \gamma_0 u$  de  $E(\Omega)^3$  dans  $F(\partial\Omega)^3$  est continue (cf [13] p.295).

D'autre part nous sommes assurés, (cf une remarque de [14] p. 45) de l'existence d'un relèvement continu  $\gamma_0 u \rightarrow \tilde{u}$  de  $F(\partial\Omega)^3$  dans  $E(\Omega)^3$ . En effet  $E(\Omega)^3/E_0(\Omega)^3$  isomorphe à  $F(\partial\Omega)^3$ , étant un espace de HILBERT, s'identifie à un sous espace de  $E(\Omega)^3$ . Soit  $\tilde{E}(\Omega)^3$  ce sous espace. Il suffit donc de relever l'application trace par l'inverse de l'isomorphisme défini par l'application trace de  $\tilde{E}(\Omega)^3$  sur  $F(\partial\Omega)^3$ , pour obtenir un relèvement continu.

Dans notre cas nous avons dit que  $E(\Omega)^3$  s'identifie à  $H^1(\Omega)^3$  et, la frontière  $\partial\Omega$  étant Lipschitzienne,  $F(\partial\Omega)^3$  s'identifie à  $H^{1/2}(\partial\Omega)^3$ .

### 1.3 - L'espace $F'(\partial\Omega)^3$ dual de $F(\partial\Omega)^3$

Nous désignerons par  $F'(\partial\Omega)$  le dual fort de l'espace  $F(\partial\Omega)^3$ . La norme dans  $F'(\partial\Omega)^3$  est définie par :

$$\| \vec{g} \|_{F'(\partial\Omega)^3} = \gamma_0 \sup_{\vec{u} \in F(\partial\Omega)^3} \frac{| \langle \vec{g}, \gamma_0 \vec{u} \rangle |}{\| \gamma_0 \vec{u} \|_{F(\partial\Omega)^3}}$$

$\langle \rangle$  représentant dans ce chapitre la dualité entre  $F(\partial\Omega)^3$  et  $F'(\partial\Omega)^3$ .

Ici  $F'(\partial\Omega)^3$  s'identifie à  $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ .

Remarque

Pour les démonstrations qui suivent nous pourrions directement associer à  $L(\vec{u}, \vec{u})$  l'espace  $H^1(\Omega)^3$  au lieu de  $E(\Omega)^3$ . On supposerait alors a priori que non seulement les composantes du tenseur des déformations sont de carré sommable, mais également les dérivées premières des composantes du champ de déplacements. Toutefois l'espace  $E(\Omega)^3$  est plus naturellement lié à  $L(\vec{u}, \vec{u})$  et formellement un peu plus général. Il présente de ce fait certains avantages dans les démonstrations des théorèmes d'existence (cf (16) ainsi que (20) et (21)).

§2 - FORMULATION FAIBLE DU PROBLEME A

2.1 - Formulation variationnelle du IIe problème de l'Elasticité

$V$  étant la variété linéaire fermée des champs de déplacements  $\vec{u} \in E(\Omega)^3$  vérifiant

$$\int_{\Omega} \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} \vec{x} \wedge \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (32)$$

Nous dirons que  $\vec{u} \in V$  est solution du IIe problème de l'Elasticité associé à  $\vec{g} \in F'(\partial\Omega)^3$ , si  $\vec{u}$  vérifie :

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{kl}(\vec{v}) \, d\omega = \langle \vec{g}, \gamma_0 \vec{v} \rangle \quad (33)$$

Pour tout  $\vec{v} \in V$

$\vec{g}$  étant donné dans  $F'(\partial\Omega)^3$  tel que :

$$\langle \vec{g}, \vec{a} \rangle = 0 \quad (34)$$

Pour tout champ de vecteurs  $\vec{a}$  constants sur  $\partial\Omega$

$$\langle \vec{g}, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle = 0 \quad (35)$$

Pour tout vecteur  $\vec{b}$

Ainsi posé, le II<sup>e</sup> problème de l'Elasticité admet une solution et une seule dans  $V$ , pour tout  $\vec{g} \in F'(\partial\Omega)^3$  vérifiant (34) et (35). Cela résulte immédiatement de la coercivité de la fonctionnelle énergie sur  $V$  et de l'application du lemme de LAX-MILGRAM (cf (18) p. 182 et suivantes et (16) p. 247).

## 2.2 - Les conditions aux limites faibles du problème de SAINT-VENANT

Les conditions (2) (3) et (4) nous conduisent à définir la famille  $\mathcal{L}$  des  $\vec{\phi} \in F'(\partial\Omega)^3$  tels que

$$\langle \vec{\phi}, \vec{a} \rangle = 0 \quad (34)$$

$\forall$  champ de vecteurs  $\vec{a}$  constants sur  $\partial\Omega$

$$\langle \vec{\phi}, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle = 0 \quad (35)$$

$\forall$  vecteur  $\vec{b}$

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\theta} \rangle = 0 \quad (2')$$

$\forall \vec{\theta} \in F(\partial\Omega)^3$  de support contenu dans  $\overline{\partial_0\Omega}$

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\theta}' \rangle = 0 \quad (3' - 4')$$

$\forall \vec{\theta}' \in F(\partial\Omega)^3$  tel que  $\vec{\theta}' = \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x}$  sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$ ,

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\theta}'' \rangle = 2(\vec{A} \cdot \vec{R} + \vec{B} \cdot \vec{M}) \quad (3'' - 4'')$$

$\forall \vec{\theta}'' \in F(\partial\Omega)^3$  tel que

$\vec{\theta}'' = \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x}$	sur $\partial_1\Omega$
$\vec{\theta}'' = -\vec{A} - \vec{B} \wedge \vec{x}$	sur $\partial_2\Omega$

$\vec{A}$  et  $\vec{B}$  étant des vecteurs quelconques  
 $\vec{R}$  et  $\vec{M}$  étant la résultante générale et le moment résultant imposés dans le problème.

Remarque

1 - (2) exprime la nullité des charges sur  $\partial_0 \Omega$ . Cela se traduit naturellement par (2') en terme de dualité.

(3) et (4) expriment que la résultante générale et le moment résultant des systèmes de charges sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  sont donnés et opposés. Du point de vue mécanique cela est équivalent au fait que le travail des charges appliquées à  $\partial_1 \Omega$  (Resp.  $\partial_2 \Omega$ ) dans tout déplacement de solide  $\vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x}$  de  $\partial_1 \Omega$  (Resp.  $\partial_2 \Omega$ ) est égal à  $\vec{A} \cdot \vec{R} + \vec{M} \cdot \vec{B}$  (Resp.  $-\vec{A} \cdot \vec{R} - \vec{M} \cdot \vec{B}$ ). (3' - 4') (3'' - 4'') traduisent très exactement cette propriété en terme de dualité.

2 - Il existe bien des champs de vecteurs du type  $\vec{\theta}''$  appartenant à  $F(\partial \Omega)^3$ . L'hypothèse  $\text{dist}(\partial_1 \Omega, \partial_2 \Omega) > 0$  permet de "raccorder" les valeurs de  $\vec{\theta}''$  sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  par des champs vectoriels rendant  $\vec{\theta}''$  aussi régulier qu'on le désire.

Propriétés de  $\mathcal{L}$

On vérifie, comme pour le cas du Laplacien, que :

- $\mathcal{L}$  est non vide - on le vérifie à l'aide de champs vectoriels continus par morceaux
- $\mathcal{L}$  ne contient pas l'origine si R ou M sont différents de zéro
- $\mathcal{L}$  est convexe - vérification immédiate à partir des relations de définition
- $\mathcal{L}$  est fermé - comme intersection d'une infinité de fermés

### 2.3 - Formulation faible du problème A

A tout élément  $\vec{\phi} \in \mathcal{C} \subset F'(\partial\Omega)^3$  correspond un IIe problème de l'Elasticité qui admet une solution unique  $A_N^{-1} \vec{\phi} \in V \subset E(\Omega)^3$ . L'ensemble de ces solutions constitue un ensemble convexe  $\mathcal{C}' \subset V$ .

Le problème A s'énonce alors :

"Existe-t-il un élément  $\vec{\phi}_0$  de  $\mathcal{C}$  pour lequel, lorsque  $\vec{\phi}$  décrit  $\mathcal{C}$ , la fonctionnelle  $L(A_N^{-1} \vec{\phi}, A_N^{-1} \vec{\phi})$  définie sur les éléments de  $\mathcal{C}'$  associés, soit minimum ?

$$L(A_N^{-1} \vec{\phi}, A_N^{-1} \vec{\phi}) = \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} (A_N^{-1} \vec{\phi}) \epsilon_{kl} (A_N^{-1} \vec{\phi}) d\omega$$

$\vec{\phi}_0$  est-il unique ? Quelles sont les propriétés de  $A_N^{-1} \vec{\phi}_0$ , la solution correspondante ?"

### 2.4 - Existence et unicité de la solution

$A_N^{-1} \vec{\phi}$  solution du IIe problème de l'Elasticité associé à  $\vec{\phi}$  entraîne, en vertu de (33) :

$$L(A_N^{-1} \vec{\phi}, A_N^{-1} \vec{\phi}) = \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} (A_N^{-1} \vec{\phi}) \epsilon_{kl} (A_N^{-1} \vec{\phi}) d\omega = \langle \vec{\phi}, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi} \rangle \quad (36)$$

A  $\langle \vec{\phi}, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi} \rangle$  on peut associer une fonctionnelle  $F$ , définie pour tout  $\vec{\phi} \in F'(\partial\Omega)^3$  vérifiant (34) et (35) par :

$$F(\vec{\phi}) = \langle \vec{\phi}, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi} \rangle$$

L'élément  $\vec{\phi}_0$  cherché est alors, en vertu de (36), celui qui minimise  $F(\vec{\phi})$  sur  $\mathcal{C}$ .  $\mathcal{C}$  étant convexe fermé, l'existence et l'unicité du minimum sont assurées si la fonctionnelle  $F(\vec{\phi})$  est coercive sur  $\mathcal{C}$ .

Démonstration de la coercivité de  $F(\vec{\phi})$

1 - Rappelons que les coefficients  $C_{ijkl}$  sont constants et tels que :

$$C_{ijkl} > 0 \quad \forall i, j, k, l = 1, 2, 3$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

$$\mu_1^2 \epsilon_{mn}(\vec{v}) \epsilon_{mn}(\vec{v}) \leq C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{v}) \epsilon_{kl}(\vec{v}) \leq \mu_2^2 \epsilon_{mn}(\vec{v}) \epsilon_{mn}(\vec{v})$$

(indices sommés)

$$\mu_1^2 \int_{\Omega} \epsilon_{mn}(\vec{v}) \epsilon_{mn}(\vec{v}) d\omega \leq \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{v}) \epsilon_{kl}(\vec{v}) d\omega \leq \mu_2^2 \int_{\Omega} \epsilon_{mn}(\vec{v}) \epsilon_{mn}(\vec{v}) d\omega$$

c'est à dire si  $\vec{v} \in V$  :

$$\mu_1^2 \left\| \vec{v} \right\|_{V \subset E(\Omega)}^2 \leq L(\vec{v}, \vec{v}) \leq \mu_2^2 \left\| \vec{v} \right\|_{V \subset E(\Omega)}^2$$

$\mu_1^2$  et  $\mu_2^2$  étant respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice (9 x 9) des coefficients élastiques de déformabilité.

2 - Pour tout  $\vec{\phi}$  vérifiant (34) et (35), nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \vec{\phi} \right\|_{F'(\partial\Omega)}^3 &= \sup_{\gamma_0 \vec{v} \in F(\partial\Omega)} \frac{|\langle \vec{\phi}, \gamma_0 \vec{v} \rangle|}{\left\| \gamma_0 \vec{v} \right\|_{F(\partial\Omega)}^3} = \\ &= \sup_{\vec{v} \in E(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(A_N^{-1} \vec{\phi}) \epsilon_{kl}(\vec{v}) d\omega \right|}{\left\| \gamma_0 \vec{v} \right\|_{F(\partial\Omega)}^3} \end{aligned}$$

3 - Nous verrons plus loin que la norme de  $\vec{\phi}$  dans  $F'(\partial\Omega)^3$  peut s'obtenir en ne considérant que les éléments  $\vec{v}$  atteints par un relèvement

continu

$$\gamma_0 \vec{v} \rightarrow \vec{z}$$

de  $F(\partial\Omega)^3$  dans  $E(\Omega)^3$ . Nous avons vu dans l'introduction que nous étions assurés de l'existence d'un tel relèvement, pour lequel :

$$\|\vec{z}\|_{E(\Omega)^3} \leq \alpha^2 \|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}$$

4 - Des points 1, 2 et 3 il vient successivement :

$$\begin{aligned} \|\vec{\phi}\|_{F'(\partial\Omega)^3} &= \sup_{\vec{v} \in E(\Omega)^3} \frac{\left| \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^{(A_N^{-1} \vec{\phi})} \epsilon_{kl}^{(\vec{v})} d\omega \right|}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} \\ &\leq \sup_{\vec{v} \in E(\Omega)^3} \frac{\sqrt{\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^{(\vec{v})} \epsilon_{kl}^{(\vec{v})} d\omega} \sqrt{\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^{(A_N^{-1} \vec{\phi})} \epsilon_{kl}^{(A_N^{-1} \vec{\phi})} d\omega}}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} \\ &\leq \sup_{\vec{v} \in E(\Omega)^3} \frac{\mu_2 \|\vec{v}\|_{V \subset E(\Omega)^3} \sqrt{F(\vec{\phi})}}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} < \alpha^2 \mu_2 \sqrt{F(\vec{\phi})} \end{aligned}$$

ou encore :

$$F(\vec{\phi}) \geq \frac{1}{\alpha^4 \mu_2^2} \|\vec{\phi}\|_{F'(\partial\Omega)^3}^2 \quad (37)$$

ce qui nous assure l'existence et l'unicité de  $\phi_0$ .

Remarque

Nous avons bien sûr une inégalité dans l'autre sens correspondant à la continuité de l'application "solution".

continu

$$\gamma_0 \vec{v} \rightarrow \vec{z}$$

de  $F(\partial\Omega)^3$  dans  $E(\Omega)^3$ . Nous avons vu dans l'introduction que nous étions assurés de l'existence d'un tel relèvement, pour lequel :

$$\|\vec{z}\|_{E(\Omega)^3} \leq \alpha^2 \|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}$$

4 - Des points 1, 2 et 3 il vient successivement :

$$\begin{aligned} \|\vec{\phi}\|_{F'(\partial\Omega)^3} &= \sup_{\vec{z} \in E(\Omega)^3} \frac{\left| \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^{(A_N^{-1} \vec{\phi})} \epsilon_{kl}^{(\vec{z})} d\omega \right|}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} \\ &\leq \sup_{\vec{z} \in E(\Omega)^3} \frac{\sqrt{\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^{(\vec{z})} \epsilon_{kl}^{(\vec{z})} d\omega} \sqrt{\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^{(A_N^{-1} \vec{\phi})} \epsilon_{kl}^{(A_N^{-1} \vec{\phi})} d\omega}}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} \\ &\leq \sup_{\vec{z} \in E(\Omega)^3} \frac{\mu_2 \|\vec{z}\|_{V \subset E(\Omega)^3} \sqrt{F(\vec{\phi})}}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} < \alpha^2 \mu_2 \sqrt{F(\vec{\phi})} \end{aligned}$$

ou encore :

$$F(\vec{\phi}) \geq \frac{1}{\alpha^4 \mu_2^2} \|\vec{\phi}\|_{F'(\partial\Omega)^3}^2 \quad (37)$$

ce qui nous assure l'existence et l'unicité de  $\phi_0$ .

Remarque

Nous avons bien sûr une inégalité dans l'autre sens correspondant à la continuité de l'application "solution".

$$\|\vec{\phi}\|_{F'(\partial\Omega)^3} = \sup_{\vec{v} \in F(\partial\Omega)^3} \frac{|\langle \vec{\phi}, \gamma_0 \vec{v} \rangle|}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} \geq \frac{\langle \vec{\phi}, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi} \rangle}{\|\gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}\|_{F(\partial\Omega)^3}}$$

mais

$$\langle \vec{\phi}, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi} \rangle = L(A_N^{-1} \vec{\phi}, A_N^{-1} \vec{\phi}) \geq \mu_1^2 \|A_N^{-1} \vec{\phi}\|_{V \subset E(\Omega)^3}^2$$

et l'application trace continue de  $E(\Omega)^3$  sur  $F(\partial\Omega)^3$  continue, l'est aussi de  $V$  dans  $F(\partial\Omega)^3$ , donc :

$$\|A_N^{-1} \vec{\phi}\|_{V \subset E(\Omega)^3} \geq \beta^2 \|\gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}\|_{F(\partial\Omega)^3}$$

il en résulte que :

$$\|\vec{\phi}\|_{F'(\partial\Omega)^3} \geq \beta^2 \mu_1^2 \|A_N^{-1} \vec{\phi}\|_{V \subset E(\Omega)^3} \geq \beta^2 \frac{\mu_1^2}{\mu_2} \sqrt{L(A_N^{-1} \vec{\phi}, A_N^{-1} \vec{\phi})}$$

c'est à dire

$$\|\vec{\phi}\|_{F'(\partial\Omega)^3}^2 \geq \beta^4 \frac{\mu_1^4}{\mu_2^2} F(\vec{\phi})$$

Comme pour le cas du Laplacien, la conjonction de cette dernière inégalité et de (37), pour la topologie de  $F'(\partial\Omega)^3$ , est directement liée au fait que  $F'(\partial\Omega)^3$  est le dual fort de  $F(\partial\Omega)^3$ .

Relèvement  $\vec{v}$  et norme de  $\vec{\phi}$  dans  $F'(\partial\Omega)^3$

La norme de  $\vec{\phi}$  peut être obtenue en ne considérant que les  $\vec{v}$  correspondant à un relèvement continu :

$E_0(\Omega)^3$  étant l'espace des fonctions  $\vec{w} \in E(\Omega)^3$  de trace nulle sur  $\partial\Omega$ , si  $A_N^{-1} \vec{\phi}$  est solution d'un IIe problème de l'Elasticité, il en

résulte immédiatement que :

$$\forall \vec{w} \in E_0(\Omega)^3 \quad \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} (A_N^{-1} \phi) \epsilon_{kl} (\vec{w}) d\omega = 0 \quad (38)$$

Considérons alors les éléments de  $E(\Omega)^3$  qui ont même trace sur  $\partial\Omega$  qu'un élément  $\vec{v}$  quelconque de  $E(\Omega)^3$ . Ce sont tous les éléments de la forme  $\vec{v} + \vec{w}$ ,  $\vec{w}$  quelconque dans  $E_0(\Omega)^3$ . En vertu de (33) et (38) nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{\langle \vec{\phi}, \gamma_0(\vec{v} + \vec{w}) \rangle}{\|\gamma_0(\vec{v} + \vec{w})\|_{F(\partial\Omega)^3}} &= \frac{\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} (A_N^{-1} \vec{\phi}) \epsilon_{kl} (\vec{v} + \vec{w}) d\omega}{\|\gamma_0(\vec{v} + \vec{w})\|_{F(\partial\Omega)^3}} \\ &= \frac{\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} (A_N^{-1} \vec{\phi}) \epsilon_{kl} (\vec{v}) d\omega}{\|\gamma_0 \vec{v}\|_{F(\partial\Omega)^3}} \end{aligned}$$

La norme de  $\vec{\phi}$  peut donc être obtenue en ne prenant qu'un seul élément dans chacune des classes des éléments de même trace sur  $\partial\Omega$ . En particulier on peut prendre l'élément  $\vec{v}$  correspondant à un relèvement continu.

## 2.5 - Conditions d'EULER du problème A - Propriétés de la solution

Considérons les fonctionnelles  $\vec{\phi}_0 + \epsilon \vec{\eta}$  qui appartiennent à  $\mathcal{C}$  pour toute valeur finie du paramètre  $\epsilon$ . Les fonctionnelles  $\vec{\eta}$  vérifient donc les conditions de compatibilité suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\eta} \in F'(\partial\Omega)^3 & \\ \langle \vec{\eta}, \vec{a} \rangle = 0 & \forall \text{ champ de vecteurs } \vec{a} \text{ constants} \\ \langle \vec{\eta}, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle = 0 & \forall \text{ vecteur } \vec{b} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases}
 \langle \vec{\eta}, \vec{\theta} \rangle = 0 \\
 \langle \vec{\eta}, \vec{\theta}' \rangle = 0 \\
 \langle \vec{\eta}, \vec{\theta}'' \rangle = 0 \\
 \forall \vec{\theta}, \vec{\theta}', \vec{\theta}'' \text{ définis précédemment (cf. définition de } \mathcal{L} \text{)}
 \end{cases} \quad (39)$$

Interprétons ces conditions :

D'après la 3ème relation de compatibilité, les  $\vec{\eta}$  ont leur support contenu dans  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  et par suite nous pouvons écrire :

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \text{supp } \vec{\eta}_1 &\subset \partial_1\Omega \\ \text{supp } \vec{\eta}_2 &\subset \partial_2\Omega \end{aligned}$$

Alors en tenant compte des définitions des  $\vec{\theta}'$  et  $\vec{\theta}''$  et en notant  $\langle \cdot \rangle_{\partial_1\Omega}$  (Resp  $\langle \cdot \rangle_{\partial_2\Omega}$ ) la dualité entre  $F(\partial_1\Omega)^3$  (Resp  $F(\partial_2\Omega)^3$ ) et  $F'(\partial_1\Omega)^3$  (Resp  $F'(\partial_2\Omega)^3$ ), les autres conditions de compatibilité s'écrivent :

$$\langle \vec{\eta}, \vec{a} \rangle = 0 \quad \forall \vec{a} \iff \langle \vec{\eta}_1, \vec{a} \rangle_{\partial_1\Omega} + \langle \vec{\eta}_2, \vec{a} \rangle_{\partial_2\Omega} = 0$$

$$\langle \vec{\eta}, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle = 0 \quad \forall \vec{b} \iff \langle \vec{\eta}_1, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_1\Omega} + \langle \vec{\eta}_2, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_2\Omega} = 0$$

$$\langle \vec{\eta}, \vec{\theta}' \rangle = 0 \quad \forall \vec{\theta}' \iff \langle \vec{\eta}_1, \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_1\Omega} + \langle \vec{\eta}_2, \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_2\Omega} = 0$$

$\forall$  vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$

$$\langle \vec{\eta}, \vec{\theta}'' \rangle = 0 \quad \forall \vec{\theta}'' \iff \langle \vec{\eta}_1, \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_1\Omega} - \langle \vec{\eta}_2, \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_2\Omega} = 0$$

$\forall$  vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$

Finalement les conditions de compatibilité (39) sont équivalentes aux conditions suivantes :

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{supp } \vec{\eta}_1 \subset \partial_1 \Omega \quad \vec{\eta}_1 \in F'(\partial_1 \Omega)^3 \\
 \text{supp } \vec{\eta}_2 \subset \partial_2 \Omega \quad \vec{\eta}_2 \in F'(\partial_2 \Omega)^3 \\
 \langle \vec{\eta}_1, \vec{a} \rangle_{\partial_1 \Omega} = \langle \vec{\eta}_2, \vec{a} \rangle = 0 \\
 \forall \text{ champ de vecteurs } \vec{a} \text{ constants} \\
 \langle \vec{\eta}_1, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_1 \Omega} = \langle \vec{\eta}_2, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle_{\partial_2 \Omega} = 0 \\
 \forall \text{ vecteur } \vec{b}
 \end{array} \right\} (39')$$

Finalement les fonctionnelles  $\vec{\eta}_1$  (Resp  $\vec{\eta}_2$ ) compatibles sont les fonctionnelles appartenant à la variété linéaire  $V_1^\perp$  (Resp  $V_2^\perp$ ) de  $F'(\partial_1 \Omega)^3$  (Resp  $F'(\partial_2 \Omega)^3$ ) orthogonale au sens de la dualité à la variété linéaire fermée  $V_1$  (Resp  $V_2$ ) de  $F(\partial_1 \Omega)$  (Resp  $F(\partial_2 \Omega)$ ) des champs de vecteurs de la forme  $\vec{a} + \vec{b} \wedge \vec{x}$ . Remarquons aussi que  $V_1^{\perp\perp} = V_1$  (Resp  $V_2^{\perp\perp} = V_2$ ).

Exemple de fonctionnelles  $\vec{\eta}$  compatibles

On considère les champs de vecteurs  $\vec{g}$  définis par :

$$\left. \begin{array}{l}
 \vec{g} = 0 \quad \text{sur } \overline{\partial_0 \Omega} \\
 \vec{g} = \vec{g}_1 \quad \text{sur } \partial_1 \Omega \quad \vec{g}_1 \in C^\infty(\partial_1 \Omega)^3 \\
 \vec{g} = \vec{g}_2 \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \quad \vec{g}_2 \in C^\infty(\partial_2 \Omega)^3
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \int_{\partial_1 \Omega} \vec{g}_1 \, da = 0 \\
 \int_{\partial_1 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{g}_1 \, da = 0 \\
 \int_{\partial_2 \Omega} \vec{g}_2 \, da = 0 \\
 \int_{\partial_2 \Omega} \vec{x} \wedge \vec{g}_2 \, da = 0
 \end{array}$$

Alors les fonctionnelles  $\vec{\eta} \in F'(\partial \Omega)^3$  définies sur tout  $\gamma_0 \vec{v} \in F(\partial \Omega)^3$  par :

$$\langle \vec{\eta}, \gamma_0 \vec{v} \rangle = \int_{\partial \Omega} \vec{g} \cdot \gamma_0 \vec{v} \, da$$

satisfont les conditions de compatibilités.

Condition d'EULER du problème A

$$\frac{d}{d\varepsilon} F(\vec{\phi}_0 + \varepsilon \vec{\eta}) \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

Pour tout  $\vec{\eta}$  vérifiant les conditions (39').

Ou encore, en tenant compte de la formule de GREEN généralisée :

$$\langle \vec{\eta}, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}_0 \rangle = 0 \quad (40)$$

$$\forall \vec{\eta} \text{ compatible}$$

Conséquences de l'équation d'EULER

(40) s'écrit aussi :

$$\langle \vec{\eta}_1, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}_0 \rangle_{\partial_1 \Omega} + \langle \vec{\eta}_2, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}_0 \rangle_{\partial_2 \Omega} = 0$$

$$\forall \vec{\eta}_1 \in V_1^\perp$$

$$\forall \vec{\eta}_2 \in V_2^\perp$$

ce qui équivaut à :

$$\left| \begin{array}{l} \langle \vec{\eta}_1, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}_0 \rangle_{\partial_1 \Omega} = 0 \quad \forall \vec{\eta}_1 \in V_1^\perp \\ \langle \vec{\eta}_2, \gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}_0 \rangle_{\partial_2 \Omega} = 0 \quad \forall \vec{\eta}_2 \in V_2^\perp \end{array} \right. \quad (41)$$

Alors, d'après la définition de  $V_1^\perp$  (Resp  $V_2^\perp$ ),  $\gamma_0 A_N^{-1} \vec{\phi}_0$  coïncide sur  $\partial_1 \Omega$  (Resp  $\partial_2 \Omega$ ) avec un élément de  $V_1^{\perp \perp} = V_1$  (Resp  $V_2^{\perp \perp} = V_2$ ).  
Il est donc nécessairement de la forme :

$$\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \wedge \vec{x} \quad \text{sur } \partial_1 \Omega$$

$$\vec{a}_2 + \vec{b}_2 \wedge \vec{x} \quad \text{sur } \partial_2 \Omega$$

Le convexe  $\mathcal{C}$  ne contenant pas l'origine,  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1, \vec{b}_2$  ne peuvent être ni tous nuls, ni tels que simultanément  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$  et  $\vec{b}_1 = \vec{b}_2$ , si  $R$  ou  $M \neq 0$ .

§3 - CONCLUSION

3.1 - Résultats

Soit :

a) Un ouvert borné  $\Omega$  de  $R^3$ , simplement connexe, de frontière  $\partial\Omega = \overline{\partial_0\Omega} \cup \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ ,  $C^\infty$  par morceaux ou même Lipschitzienne.  $\partial_0\Omega$ ,  $\partial_1\Omega$ ,  $\partial_2\Omega$  étant disjoints,  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  simplement connexes avec  $\text{dist}(\partial_1\Omega, \partial_2\Omega) > 0$ .

b)  $E(\Omega)^3$  l'espace des champs de vecteurs dont les composantes sont de carré sommable dans  $\Omega$  et pour lesquels les composantes du tenseur des déformations  $\epsilon_{ij}(\vec{u})$  sont de carré sommable, muni de sa norme naturelle (Espace d'énergie finie)

$F(\partial\Omega)^3$  l'espace des traces d'ordre zéro sur  $\partial\Omega$  des champs de vecteur de  $E(\Omega)^3$ .

$F'(\partial\Omega)^3$  son dual fort, après identification de  $H^0(\Omega)^3$  avec son dual. La dualité étant notée  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

c) La formulation variationnelle du IIe problème de l'Elasticité linéaire homogène :

soit  $V$  la variété linéaire fermée des champs de déplacements  $\vec{u} \in E(\Omega)^3$  tels que :

$$\int_{\Omega} \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (31)$$

$$\int_{\Omega} \vec{x} \wedge \vec{u} \, d\omega = 0 \quad (32)$$

trouver  $\vec{u} \in V \subset E(\Omega)^3$  vérifiant pour tout  $\vec{v} \in V$

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{u}) \epsilon_{kl}(\vec{v}) \, d\omega = \langle \vec{g}, \gamma_0 \vec{v} \rangle \quad (33)$$

$\vec{g}$  donné dans  $F'(\partial\Omega)^3$  tel que :

$$\langle \vec{g}, \vec{a} \rangle = 0 \quad (34)$$

Pour tout champ de vecteurs  $\vec{a}$  constants donné sur  $\partial\Omega$

$$\langle \vec{g}, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle = 0 \quad (35)$$

Pour tout vecteur  $\vec{b}$ .

Pour laquelle il existe une et une seule solution

d) La famille  $\mathcal{L}$  des  $\vec{\phi} \in F'(\partial\Omega)^3$  satisfaisant aux conditions :

$$\langle \vec{\phi}, \vec{a} \rangle = 0 \quad (34)$$

$\forall$  champ de vecteurs  $\vec{a}$  constants sur  $\partial\Omega$

$$\langle \vec{\phi}, \vec{b} \wedge \vec{x} \rangle = 0 \quad (35)$$

$\forall$  vecteur  $\vec{b}$

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\theta} \rangle = 0 \quad (2')$$

$\forall \vec{\theta} \in F(\partial\Omega)^3$  de support contenu dans  $\partial_0\Omega$

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\theta}' \rangle = 0 \quad (3' - 4')$$

$\forall \vec{\theta}' \in F(\partial\Omega)^3$  tel que  $\vec{\theta}' = \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x}$  sur  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$

$$\langle \vec{\phi}, \vec{\theta}'' \rangle = 2(\vec{A} \cdot \vec{R} + \vec{B} \cdot \vec{M})$$

$\forall \vec{\theta}'' \in F(\partial\Omega)^3$  tel que

$$\begin{cases} \vec{\theta}'' = \vec{A} + \vec{B} \wedge \vec{x} & \text{sur } \partial_1\Omega \\ \vec{\theta}'' = -\vec{A} - \vec{B} \wedge \vec{x} & \text{sur } \partial_2\Omega \end{cases}$$

$\vec{A}$  et  $\vec{B}$  étant des vecteurs donnés quelconques.

e) La famille  $\mathcal{L}'$  des solutions  $A_N^{-1} \vec{\phi} \in V \subset E(\Omega)^3$  aux IIe problèmes de l'Elasticité variationnels, associés aux éléments  $\vec{\phi} \in \mathcal{L} \subset F'(\Omega)^3$ .

Les données d'une formulation faible du "problème de SAINT-VENANT", contenant la formulation classique du chapitre I §2.

Alors

- 1 - La famille  $\mathcal{C}$  est convexe et fermée dans  $F'(\partial\Omega)^3$
- 2 - La famille  $\mathcal{C}'$  est convexe et fermée dans  $V \subset E(\Omega)^3$
- 3 - Lorsque  $\vec{\phi}$  décrit  $\mathcal{C}$ , la solution  $A_N^{-1} \vec{\phi}$  correspondante décrivant alors  $\mathcal{C}'$ , il existe un et un seul élément  $\vec{\phi}_0 \in \mathcal{C}$  pour lequel la solution associée  $A_N^{-1} \vec{\phi}_0$  rend minimum sur  $\mathcal{C}'$  l'énergie de déformation définie par l'intégrale :

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(A_N^{-1} \vec{\phi}) \varepsilon_{ij}(A_N^{-1} \vec{\phi}) d\omega$$

- 4 - La "solution d'énergie minimum"  $A_N^{-1} \vec{\phi}_0$  est telle que sa trace d'ordre zéro respecte la rigidité des portions  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  du contour.

### 3.2 - Commentaires

#### 1 - Interprétation mécanique des résultats

Des résultats précédents, dans les limites de la schématisation proposée, nous pouvons conclure qu'étant donné un corps élastique :

- soumis sur une portion limitée de sa surface à une certaine "charge globale" définie par les éléments de réduction du torseur des charges
- soumis sur une autre portion limitée de sa surface à une "charge globale" opposée ou à des liaisons, de façon que le corps soit en équilibre.

Les données d'une formulation faible du "problème de SAINT-VENANT", contenant la formulation classique du chapitre I §2.

Alors

1 - La famille  $\mathcal{C}$  est convexe et fermée dans  $F'(\partial\Omega)^3$

2 - La famille  $\mathcal{C}'$  est convexe et fermée dans  $V \subset E(\Omega)^3$

3 - Lorsque  $\vec{\phi}$  décrit  $\mathcal{C}$ , la solution  $A_N^{-1} \vec{\phi}$  correspondante décrivant alors  $\mathcal{C}'$ , il existe un et un seul élément  $\vec{\phi}_0 \in \mathcal{C}$  pour lequel la solution associée  $A_N^{-1} \phi_0$  rend minimum sur  $\mathcal{C}'$  l'énergie de déformation définie par l'intégrale :

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{ij}(A_N^{-1} \vec{\phi}) \varepsilon_{ij}(A_N^{-1} \vec{\phi}) d\omega$$

4 - La "solution d'énergie minimum"  $A_N^{-1} \vec{\phi}_0$  est telle que sa trace d'ordre zéro respecte la rigidité des portions  $\partial_1\Omega$  et  $\partial_2\Omega$  du contour.

### 3.2 - Commentaires

#### 1 - Interprétation mécanique des résultats

Des résultats précédents, dans les limites de la schématisation proposée, nous pouvons conclure qu'étant donné un corps élastique :

- soumis sur une portion limitée de sa surface à une certaine "charge globale" définie par les éléments de réduction du torseur des charges
- soumis sur une autre portion limitée de sa surface à une "charge globale" opposée ou à des liaisons, de façon que le corps soit en équilibre.

Alors :

- L'énergie de déformation est minimum lorsque la répartition des charges et des liaisons est telle que les portions de surface concernées restent rigides dans la déformation.

En appliquant les charges et les liaisons par l'intermédiaire de "corps très rigides" collés sur les portions données de surface, on réalise une bonne approximation de ces conditions.

## 2 - Principe de SAINT-VENANT

Dans la IIe partie, la "solution d'énergie minimum" et sa caractérisation jouent un rôle essentiel dans l'approche proposée de cette question.

## 3 - L'espace $F'(\partial\Omega)^3$ et la schématisation des charges

Nous avons dit que  $F'(\partial\Omega)^3$  s'identifiait à l'espace  $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ , espace de vecteurs distribution. Les possibilités de schématisation dans cet espace sont un peu plus grande que dans  $L^2(\partial\Omega)^3$ . Il est intéressant en particulier de situer  $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$  vis à vis de la représentation des charges concentrées. On sait qu'une schématisation directe de celles-ci est possible à l'aide de vecteurs distribution de support ponctuel (cf. BEZIER (11) chapitre III et IV). Leur expression fait alors intervenir la mesure de Dirac  $\delta$  et ses dérivées.  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  ne contenant pas  $\delta$  et ses dérivées,  $H^{-1/2}(\partial\Omega)^3$  ne se prête pas à une telle schématisation.

Il est aisé de vérifier que  $\delta$  n'appartient pas à  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . D'après le mode de définition des espaces  $H^s(\partial\Omega)$  (cf (14) p. 38), il suffit de montrer que  $\delta$  n'appartient pas à  $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$ .  $H^{-1/2}(\mathbb{R}^2)$  est, par définition, l'espace des distributions  $g$  dont la transformée de FOURIER  $\tilde{g}$  est telle que :

$$\tilde{g}(1 + |\xi|^2)^{-1/4} \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

$\delta$  a pour transformée de FOURIER la fonction constante 1. On vérifie immédiatement que  $\tilde{\delta}(1 + |\xi|^2)^{-1/4}$  n'est pas de carré sommable dans  $\mathbb{R}^2$ , et que  $\delta \in H^{-1-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

#### 4 - Régularité de la "solution d'énergie minimum"

Comme au chapitre précédent nous sommes assurés de l'analyticité de la "solution d'énergie minimum" dans  $\Omega$ . Par ailleurs sa dérivée conormale est nulle sur  $\partial_0 \Omega$  et sa trace se réduit à un déplacement de solide respectivement sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ . Il reste à étudier la régularité de la solution à la traversée des contours de  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .

#### 5 - Dualité - Energie

L'existence et l'unicité de la solution d'énergie minimum a été obtenue grâce à une formulation variationnelle du IIe problème de l'Elasticité, dans laquelle les espaces choisis pour les charges et les déplacements au contour sont en dualité.

Ces espaces  $F'(\partial\Omega)^3$  et  $F(\partial\Omega)^3$  sont directement liés à l'espace  $E(\Omega)^3$ , associé à l'expression mathématique choisie pour l'énergie de déformation. La dualité entre  $F'(\partial\Omega)^3$  et  $F(\partial\Omega)^3$  exprime le travail des charges dans un champ de déplacement au contour donné.

Plus généralement la dualité semble un outil remarquable, presque fondamental, en mécanique. J.J. MOREAU par exemple dans (26)(27), puis B. NAYROLES (28) (29), grâce aux notions de dualité et de convexité, ont abouti à des présentations élégantes de problèmes fondamentaux de l'Elasticité, de la Plasticité et de la Mécanique en général. L'aspect calcul numérique n'y est pas négligé. Il ne fait aucun doute que ces méthodes ne sont pas exclusives de la Mécanique.

#### 6 - Calcul numérique

La formulation donnée dans ce chapitre se prête au calcul numérique approché de la solution d'énergie minimum, dans chaque cas particulier.

Pour des corps de forme quelconque, soumis selon certaines portions de leur contour à des "charges globales", cette solution, calculée à l'aide des techniques modernes de calcul, pourrait jouer un rôle de solution de référence, analogue à celui des solutions de SAINT-VENANT dans le cas des poutres. Ceci dans l'hypothèse où le principe de SAINT-VENANT est bien vérifié.

7 - Comme pour le Laplacien, la formulation adoptée dans ce chapitre suggère de traiter de façon analogue le problème A correspondant au "problème de SAINT-VENANT dual"

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \vec{u} = \vec{g} \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \\ \text{avec} \\ \vec{g} = 0 \quad \text{sur } \partial_0\Omega \\ \\ \int_{\partial_1\Omega} \vec{g} \, da = - \int_{\partial_2\Omega} \vec{g} \, da = R \\ \\ \int_{\partial_1\Omega} \vec{x} \wedge \vec{g} \, da = - \int_{\partial_2\Omega} \vec{x} \wedge \vec{g} \, da = M \end{array} \right.$$

ou à tout autre problème auquel on peut associer un convexe fermé dans  $F'(\partial\Omega)^3$  ou  $F(\partial\Omega)^3$ .

PARTIE II

ETUDE DU PRINCIPE DE  
SAINT-VENANT

## CHAPITRE I

### HISTORIQUE DU PRINCIPE DE SAINT-VENANT

#### §1 - INTRODUCTION

Des mémoires originaux (cf (1) préface et p. 65, (2) p. 99) et des notes ajoutées par SAINT-VENANT à l'ouvrage de CLEBSCH ( (30) p. 174), les prémices du Principe peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

#### Enoncé E<sub>1</sub>

"Si les forces agissant à l'extrémité d'un corps prismatique allongé, sont remplacées par un autre système de forces statiquement équivalent, la nouvelle distribution des efforts ne produit des modifications notables sur les contraintes et les déformations qu'au voisinage de cette extrémité".

Cette hypothèse justifie la portée pratique des solutions données par SAINT-VENANT. Elle a suscité d'assez nombreuses recherches et généralisations. Initialement elle apparut comme "des plus naturelles" : certains mécaniciens envisageaient de la mettre au rang des fondements de la théorie de l'Elasticité, d'autres de la déduire de principes fondamentaux de la Mécanique ou de la Physique, d'autres enfin de l'obtenir comme une conséquence des équations de l'Elasticité. Mais le concept de Principe de SAINT-VENANT s'avéra à la longue difficile à cerner. D'autant plus difficile que, dès l'origine, BOUSSINESQ (3) engagea le débat sur un terrain plein d'embûches. Quatre vingt dix ans après la naissance du Princi-

pe démonstrations et contre-exemples, expérimentaux et théoriques, alternaient encore, sans que personne ne soit pleinement satisfait. Nous leur devons d'avoir une notion plus claire de ses limites, et de savoir qu'une justification sans discernement est hors d'atteinte. Nous leur devons aussi de nous méfier d'un énoncé "mathématisé" pour les besoins d'une démonstration. Cela conduit aisément à un Principe de SAINT-VE-NANT très affaibli.

Aujourd'hui l'étude théorique du Principe, celle de son lien éventuel avec la forme des solutions de SAINT-VENANT sont toujours considérées comme ouvertes. Elles ont été la plupart du temps dissociées. Avec les travaux récents notamment de TOUPIN (4), KNOWLES (45), KNOWLES et STERNBERG (46), l'étude du principe a reçu une nouvelle impulsion. Ceux-ci reprennent l'idée déjà ancienne d'une approche énergétique. Jusqu'alors les résultats n'étaient que qualitatifs. Quant au lien entre Principe et solutions de SAINT-VENANT, il faut mentionner tout particulièrement un résultat de DOU dans (48).

§2 - LE PRINCIPE DE SAINT-VENANT ET L'ETUDE DE  
L'INFLUENCE DES PERTURBATIONS LOCALES D'UN  
SYSTEME DE CHARGES

SAINTE-VENANT fondait son hypothèse sur des considérations expérimentales ou analogiques :

- un cylindre de caoutchouc pincé à l'une de ses extrémités entre les mâchoires d'une tenaille ne subit une déformation sensible qu'au voisinage immédiat de cette extrémité.

- la convergence des diverses solutions vers une solution unique, dès qu'on s'éloigne des parties chargées, est comparable à ce qu'on observe au bout d'un certain temps pour l'écoulement d'un liquide sous charge constante.

L'aspect théorique fut abordée par les successeurs de SAINT-VENANT et en premier lieu, semble-t-il, par BOUSSINESQ.

### 2.1 - L'orientation de BOUSSINESQ

Dans son livre "Application des potentiels" (3) BOUSSINESQ consacre plusieurs pages à l'étude de cette question, en des termes qui reçurent l'agrément de SAINT-VENANT lui-même. Son travail est à l'origine d'une série d'études ultérieures et mérite une attention particulière.

Au sujet du "problème de SAINT-VENANT" BOUSSINESQ est frappé par l'uniformité des solutions données par celui-ci et il leur attribue une valeur de référence. Envisageant donc le cas des poutres mais aussi des plaques il écrit p. 298 :

"Les forces extérieures les plus considérables s'exercent sur des parties restreintes des corps, généralement près de leurs extrémités ou près de leur contour et cependant leurs effets les plus importants pour le géomètre, le physicien ou l'ingénieur sont ceux qu'elles produisent à des distances notables de ces parties, c'est à dire sur l'ensemble des corps qu'elles déforment (...). L'expérience prouve que les phénomènes se simplifient, se régularisent à quelque distance de l'extrémité considérée; et qu'ils cessent d'y varier avec le mode de distribution ou d'application, à cette extrémité, des forces extérieures qui les causent, pour ne dépendre que de la résultante et du moment du couple auxquels elles équivalent au point de vue des quantités totales de mouvement et des moments. Les déformations exceptionnelles (...) qui se produisent dans une petite étendue comprenant la région d'application, peuvent être appelées très justement perturbations locales. (...) Les physiciens et les ingénieurs (...) admettent implicitement ou explicitement qu'il est permis de remplacer chaque groupe de forces ex-

térieures dans sa propre région d'application, par un autre, ayant même résultante et même moment total, choisi de manière à annuler les perturbations, c'est à dire de manière à faire que le mode simple de déformation qui est produit à quelque distance s'étende jusqu'à la région même d'application ...".

La légitimité d'un tel procédé suppose pour BOUSSINESQ l'exactitude du Principe suivant, qui lui semble incontestable.

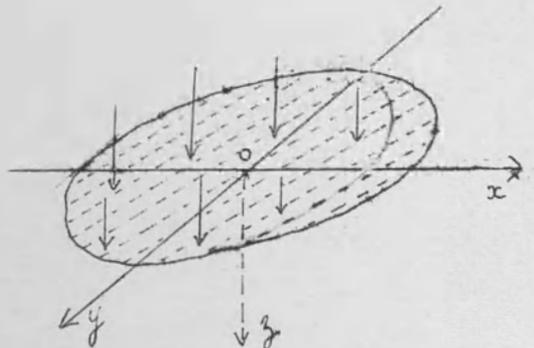
Enoncé E<sub>2</sub>

"Des forces extérieures qui se font équilibre sur un solide élastique et dont les points d'applications se trouvent tous à l'intérieur d'une sphère donnée, ne produisent pas de déformations sensibles à des distances de cette sphère qui sont d'une certaine grandeur par rapport à son rayon".

Toutefois il lui paraît souhaitable de "soumettre au calcul les perturbations locales et reconnaître avec quelle rapidité elles décroissent (...)". La théorie du potentiel lui permet d'obtenir quelques résultats en ce sens.

- Ainsi p. 109, pour le demi espace élastique  $z \geq 0$  soumis suivant la portion du contour définie par :

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 < d^2 \\ z = 0 \end{array} \right.$$



à un système de charges normales de résultante  $\vec{P}_z$ .

La composante  $w$  sur l'axe  $Oz$ , du champ de déplacements en un point de la surface  $z = 0$ , situé à la distance  $r$  de l'origine, est de la forme :

$$w = C \frac{P}{r} \left( 1 + \frac{k^2}{r^2} \right)$$

où  $C$  est une constante et  $\frac{k^2}{r^2}$  le terme de perturbation.  $k^2$  dépend de la répartition exacte des charges, mais reste toujours inférieur ou égal à  $d^2$ .

- p. 300, dans un milieu élastique indéfini 2 forces égales et opposées d'intensité  $F$ , dont les points d'applications sont distants de  $d$ , engendrent des déformations qui décroissent en raison inverse du cube de la distance, lorsque celle-ci est grande par rapport à  $d$ . Il en est de même pour un couple de moment  $Fd$ .

Par ailleurs BOUSSINESQ suggère que la décroissance des perturbations doit être plus rapide encore dans le cas de solides allongés ou aplatis, probablement exponentielle.

L'influence de son point de vue (Enoncé  $E_2$ ) sur la formulation de l'hypothèse initiale (Enoncé  $E_1$ ) est notoire dans l'ouvrage classique de LOVE (31) p. 132 :

#### Enoncé $E_3$

"Les déformations et les contraintes produites dans un corps par l'application, sur une petite partie de sa surface, d'un système de charges de résultante générale et de moment résultant nuls, sont d'un ordre négligeable à des distances qui sont grandes par rapport aux dimensions linéaires de la partie chargée".

#### 2.2 - L'étude critique de VON MISES

En 1945 VON MISES publie une étude critique (32) très remarquée. Il souligne tout d'abord l'imprécision de l'énoncé  $E_3$  et propose une formulation susceptible d'une approche mathématique.

#### Enoncé $E_4$

"Si les forces agissant sur un corps, ne le font qu'en plusieurs petites parties de la surface de ce corps, chacune étant comprise dans une sphère de rayon  $d$ , alors les contraintes et les déformations produites dans l'intérieur de ce corps à une distance finie

de toutes ces parties, sont d'un ordre de grandeur plus petit, lorsque la résultante générale et le moment résultant des forces pour chacune des parties sont nuls, que lorsqu'ils ne le sont pas".

Sur deux exemples, il montre ensuite que cet énoncé est partiellement infirmé.

Ainsi reprenant le cas du demi-espace élastique  $z \geq 0$  chargé sur la portion du contour définie par

$$\left| \begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq d^2 \end{array} \right.$$

il suppose les charges quelconques.

- Si  $\vec{F}$ , de composantes  $(X, Y, Z)$ , représente une force dont le point d'application P a pour coordonnées  $(\xi, \eta, 0)$ , la contrainte moyenne  $\sigma_m$  en un point M du milieu, de coordonnées  $(x, y, z)$ , est donnée par :

$$\sigma_m = K \frac{(x - \xi)X + (y - \eta)Y + z Z}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2)^{3/2}}$$

- Alors dans le cas de  $n$  forces  $\vec{F}_i$  appliquées en  $n$  points  $P_i$  tels que :

$$\xi_i^2 + \eta_i^2 \leq d^2$$

la contrainte moyenne  $\sigma_m$  en M peut s'écrire comme la somme d'un développement en fonction des puissances de

$$\frac{\xi}{r} \text{ et } \frac{\eta}{r} \text{ avec } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ;$$

$$\sigma_m = \frac{K}{r^2} \left\{ \left[ \frac{x}{r} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{y}{r} \sum_{i=1}^n Y_i + \frac{z}{r} \sum_{i=1}^n Z_i \right] + \left[ \frac{3x^2 - r^2}{r^2} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{r} X_i + \frac{3xy}{r^2} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{r} Y_i + \frac{3xz}{r^2} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{r} Z_i + \frac{3xy}{r^2} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{r} X_i + \frac{3y^2 - r^2}{r^2} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{r} Y_i + \frac{3yz}{r^2} \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{r} Z_i \right] + \dots \right\}$$

Il est alors clair que

- 1)  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$  entraîne l'annulation des termes du 1<sup>o</sup> ordre
- 2)  $\sum_{i=1}^n \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i = 0$  n'entraîne pas en général l'annulation des termes du 2<sup>o</sup> ordre.

Et VON MISES propose en substance l'énoncé modifié suivant :

Enoncé E 5

a) Si un système de forces est appliqué sur la surface d'un corps, fixé de façon adéquate, à l'intérieur d'une sphère de rayon  $d$  et si la résultante est nulle, il produit en un point  $M$  intérieur au corps, situé à une distance  $r$  de la partie, chargée grande par rapport à  $d$ , des contraintes d'ordre  $\frac{d}{r}$ .

b) Si de plus ce système de forces est tel que le moment résultant soit nul, les contraintes sont encore d'ordre  $\frac{d}{r}$ .

c) Par contre si le système de forces satisfait les conditions d'un équilibre "astatique" c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^n \xi_i X_i = \sum_{i=1}^n \xi_i Y_i = \sum_{i=1}^n \xi_i Z_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \eta_i X_i = \sum_{i=1}^n \eta_i Y_i = \sum_{i=1}^n \eta_i Z_i = 0$$

alors les contraintes au point P sont au plus d'ordre  $(\frac{d}{r})^2$ .

Remarque

1 - Dans l'énoncé original de VON MISES l'infiniment petit n'est pas  $\frac{d}{r}$  mais d. Il est préférable d'introduire un infiniment petit sans dimension.

2 - VON MISES attribue à BOUSSINESQ le résultat suivant qui aurait servi de caution théorique au principe de SAINT-VENANT :

"Les contraintes en un point de coordonnées (x, y, z) du demi espace élastique  $z \geq 0$  soumis à des charges normales en des points de coordonnées  $\xi, \eta, 0$  tels que  $\xi^2 + \eta^2 \leq d^2$ , sont d'ordre  $\frac{d}{r}$  si la résultante générale est nulle et d'ordre  $(\frac{d}{r})^2$  si le moment résultant est nul.

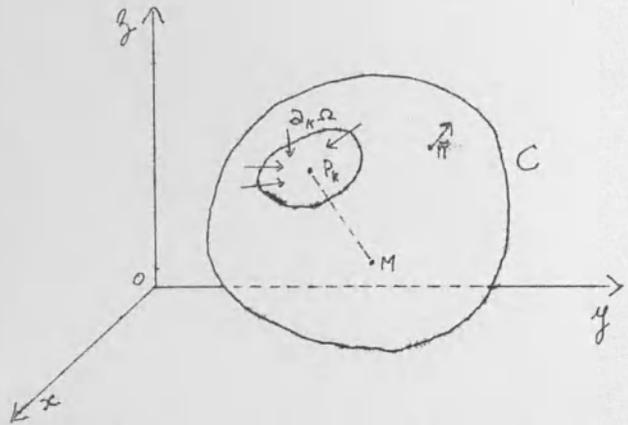
Nous n'avons pu retrouver ce résultat chez BOUSSINESQ. Mais en ce qui concerne la contrainte moyenne  $\sigma_m$ , on retrouve aisément ce résultat à partir du développement établi par VON MISES.

2.3 - L'étude de la conjecture de VON MISES par E. STERNBERG

E. STERNBERG (33) en 1954 publie une justification théorique de l'énoncé  $E_5$  pour la dilatation cubique ou, ce qui revient au même, la contrainte moyenne  $\sigma_m$ .

Soit un corps élastique C occupant un certain domaine  $\bar{\Omega}$  de  $R^3$ , de frontière  $\partial\Omega$  régulière. C est soumis selon m régions  $\bar{\partial}_K\Omega$ , simplement connexes bornées de son contour, à des systèmes de charges  $\overline{T}_K(\vec{P})$ . Ces régions  $\bar{\partial}_K\Omega$  dépendent d'un paramètre  $\epsilon$  et sont telles que leur diamètre soit d'ordre  $\epsilon$ , lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro.

Pour chaque  $\overline{\partial_K \Omega}$ , on désigne par  $P_K$  le point appartenant à  $\overline{\partial_K \Omega}$  quel que soit  $\varepsilon$ . Les systèmes de charges  $\overline{T_K(\vec{P})}$  dépendent aussi du paramètre  $\varepsilon$ , restent bornés lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro, et sont tels que le corps soit en équilibre.



La dilatation cubique  $\Delta(M)$  (ou à un coefficient près la contrainte moyenne) en tout point  $M$  intérieur à  $\overline{\Omega}$  est donnée par la formule de BETTI :

$$\Delta(M) = \sum_{K=1}^m \Delta_K(M) = \frac{1}{c} \sum_{K=1}^m \int_{\partial_K \Omega} \overline{g(P, M)} \cdot \overline{T_K(\vec{P})} da$$

où  $c$  est une constante dépendant du matériau et  $\overline{g(P, M)}$  un champ de déplacement, en tout point  $M$ , tel que :

a) il satisfait les équations de l'équilibre dans  $\Omega$ , sauf au point  $P$  où il présente une singularité caractéristique d'un "centre de dilatation" (singularité du type  $\text{grad } \frac{1}{|PM|}$ )

b) les charges superficielles qui lui correspondent sont nulles sur  $\partial\Omega$

$\Delta_K(M)$  représente la contribution dans la dilatation du système de charges  $\overline{T_K(\vec{P})}$ .

Soit  $\overline{OP} = \overline{r(\alpha, \beta)}$  une représentation paramétrique régulière de  $\partial_K \Omega$  sur un ouvert borné, simplement connexe  $O_K$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que  $\overline{r(0, 0)} = \overline{OP_K}$ . Alors en effectuant un développement en série de TAYLOR de  $\overline{g(P, M)}$  en fonction de  $(\alpha, \beta)$ , E. STERNBERG montre que :

$$\begin{aligned}
 c \Delta_K(M) &= \overrightarrow{g}((0,0),M) \cdot \int_{O_K} \overrightarrow{T}_K(\alpha,\beta) |\vec{r}_\alpha \wedge \vec{r}_\beta| d\alpha d\beta \\
 &+ \overrightarrow{g}_\alpha((0,0),M) \cdot \int_{O_K} \overrightarrow{T}_K(\alpha,\beta) \alpha |\vec{r}_\alpha \wedge \vec{r}_\beta| d\alpha d\beta \\
 &+ \overrightarrow{g}_\beta((0,0),M) \cdot \int_{O_K} \overrightarrow{T}_K(\alpha,\beta) \beta |\vec{r}_\alpha \wedge \vec{r}_\beta| d\alpha d\beta \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

D'où il conclut que :

a) Si la résultante des charges sur  $\partial_K \Omega$ , c'est à dire le coefficient de  $\overrightarrow{g}((0,0),M)$ , n'est pas nulle, la contribution du système  $\overrightarrow{T}_K(\vec{P})$  à la dilatation en M, est d'ordre  $\epsilon^2$  lorsque  $\epsilon$  tend vers zéro.

b) Si la résultante est nulle, cette contribution est au plus d'ordre  $\epsilon^3$ .

c) Si  $\overrightarrow{T}_K(\vec{P})$  est tel que les coefficients de  $\overrightarrow{g}_\alpha((0,0),M)$  et  $\overrightarrow{g}_\beta((0,0),M)$  soient nuls, alors elle est au plus d'ordre  $\epsilon^4$ . Dans ce cas le moment résultant du système  $\overrightarrow{T}_K(\vec{P})$  est nul. Mais la réciproque n'est pas vraie : la nullité du moment résultant n'entraîne pas la nullité des coefficients de  $\vec{g}_\alpha$  et  $\vec{g}_\beta$ .

#### 2.4 - Etudes complémentaires

Dans la conclusion de son article (32), VON MISES n'exclue pas l'existence d'un énoncé plus fort que  $E_5$  pour les poutres, les plaques ou les coques. Toutefois, en transposant la méthode de VON MISES au cas d'une plaque occupant le domaine  $y \geq 0$ , ERIM (34) obtient des résultats du même type : l'énoncé  $E_4$  n'est pas vérifié, l'énoncé  $E_5$  l'est. NAGHDI (36) étend quant à lui, le résultat de STERNBERG dans le cadre de la théorie des coques et des plaques.

Par ailleurs STERNBERG et AL KHOZAIE (37) traitent dans le même esprit le cas de la Viscoélasticité. Les travaux de H. KELLER (35) et B. BOLEY (10) sont de la même lignée. B. BOLEY notamment montre que le résultat de STERNBERG et sa démonstration sont transposables à tout phénomène physique auquel est associé un opérateur elliptique.

H. KELLER, cependant, suggère que l'énoncé  $E_4$ , mis en défaut, n'est peut-être pas une transcription fidèle du principe de SAINT-VENANT.

### §3 - PRINCIPE DE SAINT-VENANT ET ENERGIE DE DEFORMATION

#### 3.1 - Les premiers travaux

L'éventualité d'un lien entre le Principe de SAINT-VENANT et certains principes fondamentaux de la Physique, a conduit tout naturellement à envisager celui-ci sous l'angle énergétique.

Le premier, à notre connaissance, SOUTHWELL (38) publie en 1923 une étude qualitative assez discutable, dans laquelle il invoque le "principe de l'énergie minimum". Dans les corps prismatiques considérés dans le problème de SAINT-VENANT, il distingue deux types de parties : les parties A, constituées des voisinages des parties chargées, et la partie B, le corps de la poutre proprement dit. La répartition des contraintes minimise l'énergie de déformation dans A + B et résulte, dit SOUTHWELL, d'un compromis entre les exigences des parties A et B, imposé par la continuité de la poutre. L'énergie de déformation dans A est minimum pour une certaine distribution des réactions entre A et B, fonction de la répartition exacte des charges imposées. B, par contre, transmet une "action résultante" et il existe une distribution standard optimum. Pour SOUTHWELL, cette distribution est donnée par la solution de SAINT-VENANT dans chaque cas "canonique".

Le Principe de SAINT-VENANT exprime la tendance de toute solution à se rapprocher de la solution standard.

GOODIER (39) (40) (41) suggère que le principe est une conséquence de postulats ou hypothèses de la théorie de l'Elasticité, voire de la Mécanique, mais à l'exclusion de certains. Par exemple, la loi de HOOKE lui semble ne jouer aucun rôle.

Ensuite il arrive à la conclusion que la plus grande partie de l'énergie de déformation, engendrée par un système de charges statiquement équivalent à zéro (s.e.z.)<sup>(1)</sup>, est localisée dans la portion de solide voisine de la partie chargée.

Son raisonnement très succinct est fondé sur les ordres de grandeur relatifs de la partie chargée et des champs de contraintes, de déformations et de déplacements au voisinage de celle-ci.

ZANABONI (42) (43) considère une famille fictive de corps  $C_p$ , croissant avec l'indice  $p$ , ayant en commun une portion de contour. L'énergie de déformation étant définie positive, il montre à l'aide du théorème de CASTIGLIANO-MENABREA<sup>(2)</sup> que :

1 - Un même système de charges s.e.z., appliqué sur la portion commune du contour, engendre une énergie de déformation  $\phi_p$  décroissante avec  $p$ .

2 - Pour tout  $\epsilon$  il existe  $P$  tel que  $p > P, q > P$  entraîne

$$|\phi_p - \phi_q| < \epsilon$$

Puis par des raisonnements qu'il conviendrait de préciser, il conclut :

3 - qu'il existe pour un corps "allongé" une longueur  $l$  au-delà de laquelle l'énergie de déformation contenue est négligeable et donc aussi les contraintes.

(1) Dans toute la suite nous écrivons s.e.z. pour "statiquement équivalent à zéro".

(2) Théorème selon lequel "parmi tous les champs des déplacements cinématiquement admissibles et satisfaisant aux conditions au contour, celui qui vérifie les équations d'équilibre, minimise l'énergie potentielle".

- 4 - que la rapidité de la convergence de  $\phi_p$  vers sa limite  $\phi$ , ne dépend pas du système de charges, mais seulement de la forme des corps  $C_p$ .
- 5 - que le Principe de SAINT-VENANT est mieux vérifié sur des corps "amincis" ou moins connexes.

### 3.2 - L'étude de TOUPIN

L'interprétation du Principe de SAINT-VENANT résultant des travaux de BOUSSINESQ, VON MISES, STERNBERG n'est pas satisfaisante. TRUESDELL (8) note à ce sujet :

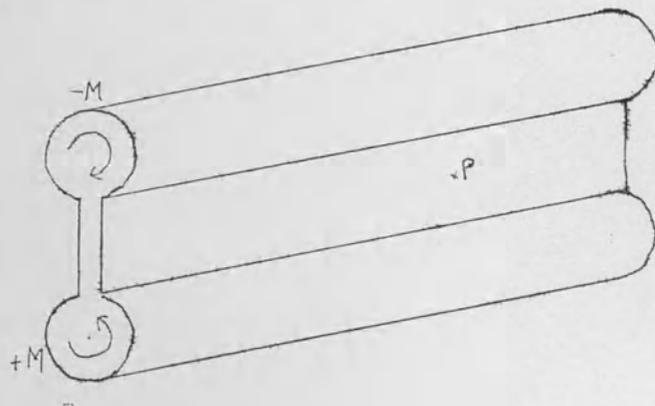
"Ce concept du Principe de SAINT-VENANT se réfère à une famille de solutions correspondant à une famille de charges, appliquées sur une famille de petites aires tendant vers zéro, et les résultats sont exprimés en termes d'ordre de grandeur du rayon de la région. Aussi élégant que soit ce travail, je suggère que cette formulation du problème est en un certain sens trop générale et en un autre trop particulière. Par exemple pour la torsion, ce n'est pas la distribution exacte des contraintes et des déformations dans la poutre qui est intéressante, mais plutôt certaines propriétés simples telles que le module de torsion et la contrainte maximale. Requérir que toutes les propriétés ne soient pas modifiées pour une autre distribution de charges statiquement équivalente, est trop; comparer seulement les charges appliquées sur des portions de surface tendant vers zéro, est trop peu. Dans l'application du principe de SAINT-VENANT on se donne un corps et l'on compare entre eux des cas où les charges sont appliquées sur une région finie donnée".

Dans le cas de la torsion, le module de torsion, défini comme le quotient du couple par la valeur moyenne de la torsion unitaire, est une fonctionnelle des charges appliquées aux extrémités. Une forme du Principe de SAINT-VENANT consisterait pour TRUESDELL à affirmer que cette fonctionnelle est pratiquement constante pour des charges statiquement équivalentes.

En 1966, TOUPIN publie un article remarqué (4). Comme TRUESDELL, il pense que l'interprétation de BOUSSINESQ-VON MISES-STERNBERG trahit le Principe de SAINT-VENANT. Il rappelle par ailleurs que :

- 1 - En Elasticité linéaire, l'étude de la validité du Principe de SAINT-VENANT se ramène à l'étude de l'influence des divers systèmes de charges s.e.z. appliqués sur une portion limitée du contour.
- 2 - Les équations du problème étant linéaires, si un système de charge s.e.z.  $\vec{F}$  engendre un champ de contrainte  $\overline{T}$ , le système  $\lambda\vec{F}$ , lui-même s.e.z., engendre le champ de contraintes  $\lambda\overline{T}$ . Il est donc possible, en théorie, de choisir  $\lambda$  pour que  $\lambda\overline{T}$  soit aussi grand que l'on désire.
- 3 - Un système de charge s.e.z. peut engendrer des contraintes très élevées au voisinage d'une entaille "éloignée" des points d'application des charges.
- 4 - Un système s.e.z. peut engendrer des contraintes élevées loin de la région chargée dans le cas de structures manquant de rigidité (cf. HOFF (12)).

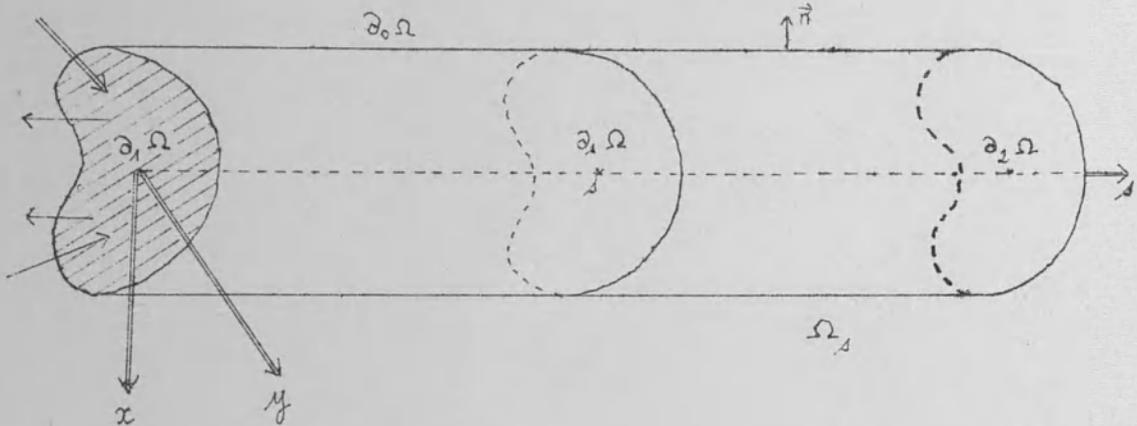
Ainsi dans l'exemple schématisé ci-contre (1), il est clair que les contraintes en un point éloigné tel que P ne seront pas négligeables (cet exemple est à opposer à celui de SAINT-VENANT du cylindre de caoutchouc pincé à l'une de ses extrémités).



TOUPIN propose alors deux résultats dont la réunion constitue à ses yeux une certaine justification du principe dans le cas des pou-

(1) le symbolisme utilisé étant celui de la Résistances des Matériaux

tres, cette justification tenant compte des points 1, 2, 3 et 4.



Soit une poutre de section constante et de longueur  $l$ , occupant un certain domaine  $\bar{\Omega}$  de  $\mathbb{R}^3$ , soumise suivant l'une de ses extrémités  $\partial_1 \Omega$  à divers systèmes de charges s.e.z., alors :

a) L'énergie de déformation  $\phi(s)$  contenue dans la portion de poutre  $\bar{\Omega}_s$ , située au-delà de la section d'abscisse  $s$ , est telle que :

$$\phi(s) \leq \phi(0) e^{-\sqrt{\frac{\rho \omega_0^2(\ell_0)}{\mu_M}} (s - \ell_0)} \quad (42)$$

où  $\phi(0)$  est l'énergie de déformation contenue dans toute la poutre

$\mu_M$  est la plus grande valeur propre de la matrice des coefficients élastiques de rigidité

$\rho$  la masse spécifique du matériau

$\omega_0(\ell_0)$  la plus petite pulsation propre non nulle des vibrations libres d'une portion de poutre de longueur  $\ell_0$  arbitraire.

b) La norme quadratique du tenseur des déformations  $\bar{D}$  au centre d'une sphère de volume  $V$ , pour laquelle l'énergie de déformation

est  $\Phi$ , est telle que :

$$||\bar{D}||^2 \leq K \frac{\Phi}{V} \quad (43)$$

K est une constante dépendant du matériau.

Cette dernière inégalité résulte d'une formule de valeur moyenne donnée par DIAZ et PAYNE (44) dans le cas de l'opérateur de l'Elasticité.

Schéma de la démonstration de (42)

En vertu de la nullité des charges sur  $\partial_0 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$  :

$$\Phi(s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} d\omega = \frac{1}{2} \int_{\partial \Omega_s} \vec{t} \cdot \vec{u} da$$

avec les notations adoptées dans la première partie.

Alors pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\Phi(s) \leq \frac{1}{4} \left\{ \alpha \int_{\partial_s \Omega} |\vec{t}|^2 da + \frac{1}{\alpha} \int_{\partial_s \Omega} |\vec{u}|^2 da \right\} \quad (44)$$

On vérifie aisément que

$$|\vec{t}|^2 = |\bar{T} \cdot \vec{n}|^2 \leq |\bar{T}|^2 \leq \mu_M C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}$$

où  $\mu_M$  est la plus grande valeur propre de la matrice (9 x 9) des coefficients  $C_{ijkl}$ .

Par suite :

$$\int_{\partial_s \Omega} |\vec{t}|^2 da \leq \mu_M \int_{\partial_s \Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} da \quad (45)$$

Une majoration analogue de l'intégrale  $\int_{\partial_s \Omega} |\vec{u}|^2 da$  s'obtient en ap-

pliant le Principe de RAYLEIGH. En vertu de ce Principe les valeurs stationnaires du quotient :

$$\frac{\int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} d\omega}{\int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\omega}$$

sont de la forme  $\rho \omega_n^2$  où les  $\omega_n$  sont les pulsations propres des vibrations libres du corps occupant le domaine  $\bar{\Omega}$  et  $\rho$  la masse spécifique du matériau.

Alors pour tout champ de déplacements  $\vec{u}$ , orthogonal (dans  $L^2(\Omega)^3$ ) aux déplacements de solide et vérifiant ou non des conditions au contour homogènes :

$$\int_{\Omega} |\vec{u}|^2 d\omega \leq \frac{1}{\rho \omega_0^2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} d\omega$$

$\omega_0$  étant la plus petite pulsation propre non nulle.

Afin d'appliquer ce résultat, on intègre l'inégalité obtenue à partir de (44) en tenant compte de la majoration (45), sur une longueur  $l_0$  arbitraire :

$$\int_s^{s+l_0} \phi(t) dt \leq \frac{1}{4} \left[ \alpha \mu_M \int_{\partial \Omega \times (s, s+l_0)} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} da dt + \frac{1}{\alpha} \int_{\partial \Omega \times (s, s+l_0)} |\vec{u}|^2 da dt \right]$$

$$\leq \frac{1}{4} \left[ \alpha \mu_M + \frac{1}{\alpha \rho \omega_0^2(l_0)} \right] \int_{\partial \Omega \times (s, s+l_0)} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} da dt$$

avec  $\omega_0(l_0)$  plus petite pulsation propre non nulle d'une portion libre de longueur  $l_0$ .

D'où, en appelant  $Q(s, l_0)$  la valeur moyenne de  $\phi(t)$  entre  $s$  et  $s + l_0$  :

$$Q(s, \ell_0) + \frac{1}{2} \left( \alpha \mu_M + \frac{1}{\alpha \rho \omega_0^2(\ell_0)} \right) \frac{dQ(s, \ell_0)}{ds} \leq 0 \quad (46)$$

$\alpha$  est alors choisi de façon que le coefficient de  $\frac{dQ(s, \ell_0)}{ds}$  soit minimum, et de l'inégalité différentielle (46) on déduit :

$$\frac{Q(s - \ell_0, \ell_0)}{Q(0, \ell_0)} \leq e^{-\sqrt{\frac{\rho \omega_0^2(\ell_0)}{\mu_M}} (s - \ell_0)} \quad (47)$$

Mais  $Q(s - \ell_0, \ell_0)$  est la valeur moyenne de  $\phi(t)$  entre  $s - \ell_0$  et  $s$ , et  $\phi(t)$  est une fonction non croissante de  $t$ , donc

$$\phi(s) \leq Q(s - \ell_0, \ell_0)$$

$$\phi(0) \geq Q(0, \ell_0)$$

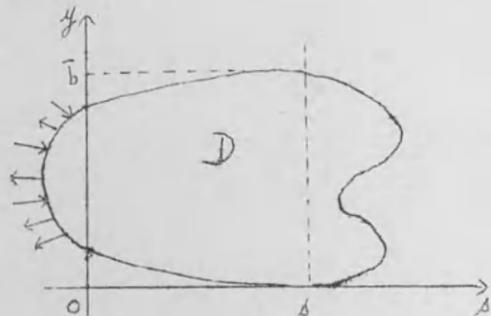
ce qui joint à (47) permet d'écrire :

$$\phi(s) \leq \phi(0) e^{-\sqrt{\frac{\rho \omega_0^2(\ell_0)}{\mu_M}} (s - \ell_0)} \quad (42)$$

### 3.3 - Etudes d'inspirations voisines

Le travail de TOUPIN est le premier d'une série d'études nouvelles sur le Principe de SAINT-VENANT voisine dans leur démarche.

Dans (45) KNOWLES traite du principe de SAINT-VENANT en Elasticité plane. Il considère un domaine  $D$  simplement connexe de "forme quelconque", soumis sur une portion limitée de son con-



tour à un système de charges s.e.z. et établit :

a) une inégalité vérifiée par l'énergie de déformation contenue au-delà de l'abscisse  $s$ , en utilisant, comme TOUPIN, le minimum d'un quotient de RAYLEIGH.

$$\phi(s) \leq 2 \phi(0) e^{-2 \frac{K}{b} s}$$

avec  $b$  "largeur" du domaine  $D$   
 $K$  constante universelle

b) une inégalité pour les contraintes, grâce à une formule de valeur moyenne valable pour les fonctions biharmoniques <sup>(1)</sup> et l'inégalité précédente :

$$|\tau_{\alpha\beta}(s,y)| \leq 5 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\phi(0)}}{\delta} e^{-\frac{K}{b} s}$$

où  $\delta$  est la distance du point  $(s,y)$  à la frontière de la portion du domaine  $D$  située du côté des  $s \geq 0$ .

Dans cette étude de KNOWLES il convient de remarquer que :

- le coefficient dans l'exponentielle ne dépend pas de la plus petite pulsation propre d'une "tranche" arbitraire du domaine. Sa valeur est ici donnée explicitement en fonction d'une caractéristique géométrique du domaine.
- il est donné, pour une classe particulière de domaines, une majoration de  $\phi(0)$ , l'énergie totale, par une quantité dépendant de la forme de ces domaines et des données au contour.
- il est fait une étude limite des résultats précédents lorsque les domaines du type précédent tendent à devenir "minces".

KNOWLES et STERNBERG (46) traitent dans le même esprit l'étude du Principe de SAINT-VENANT dans le cas de la torsion axi-

(1) On sait que les problèmes d'élasticité plane se ramènent à la résolution de problèmes biharmoniques.

ale des solides de révolution, limités par des sections planes (théorie due à MICHELL (47)) : inégalité sur la répartition de l'énergie, obtenue en considérant un quotient de RAYLEIGH, passage à une inégalité sur les contraintes par un théorème de valeur moyenne, majoration de l'énergie totale en fonction de l'intensité des charges données et de certaines caractéristiques géométriques du domaine.

#### §4 - AUTRES TRAVAUX

##### 4.1 - Le mémoire de A.T. DOU

Parmi les études ayant contribué à éclairer le concept du Principe de SAINT-VENANT, il convient de citer celle de A.T. DOU (48). Un corps étant soumis sur une petite partie de son contour à un système de charges; le Principe de SAINT-VENANT exprime, selon A.T. DOU, une condition suffisante pour que le champ des contraintes  $\tau_{ij}(P)$  soit petit dès qu'on s'éloigne de la partie chargée : il suffit que la densité de charge  $\bar{t}(\bar{Q})$  soit bornée et définisse un système s.e.z. D'où l'énoncé mathématique proposé :

##### Enoncé E<sub>6</sub>

Soit un domaine  $\bar{\Omega}$  borné, soumis suivant une portion limitée  $\partial_1\Omega$  de son contour à un système de charge s.e.z. de densité  $\bar{t}(\bar{Q})$ ,  $0 < \eta < 1$ , alors il existe un nombre  $p(\eta)$  tel que, si  $P \in \Omega$  avec  $\text{dist}(P, \partial_1\Omega) > p \cdot \text{diam}(\partial_1\Omega)$ , alors le champ des contraintes  $\bar{T}(P)$  est tel que

$$\|\bar{T}(P)\|_{\infty} < \eta \cdot \|\bar{t}\|_{\infty, \partial_1\Omega}$$

avec

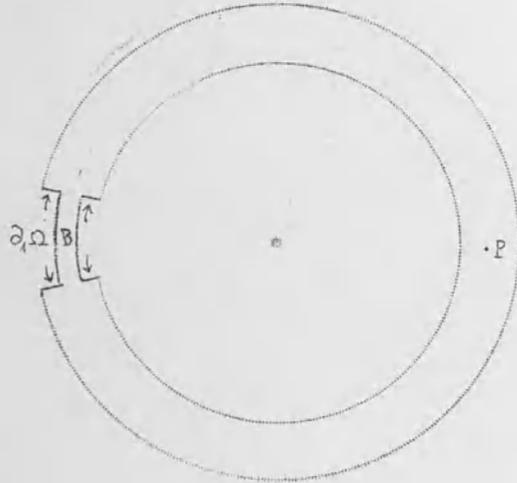
$$\|\bar{t}\|_{\infty, \partial_1\Omega} = \sup_{i=1,2,3} \sup_{Q \in \partial_1\Omega} |t_i(Q)|$$

$$\|\bar{T}(P)\|_{\infty} = \sup_{i=1,2,3} |\tau_{ij}(P)|$$

Dans la pratique  $0,1 \leq \eta \leq 0,3$   
 $1 \leq p \leq 5$

Il est ensuite montré sur des exemples d'Elasticité plane que cet énoncé peut être mis en défaut.

Ainsi pour le domaine et le système de charges représentés ci-contre, la norme des contraintes en un point "éloigné" tel que P, peut être du même ordre que la norme de la densité de charges sur  $\partial_1 \Omega$ , pourvu que la portion B soit suffisamment "mince".



On conjecture

alors que la plus ou moins

bonne vérification du Principe est intimement lié au degré de connexion du domaine et à sa convexité. On définit ce qu'on entend par ouverts à section convexe relativement à la partie chargée et relativement à la partie chargée à l'extérieur de cette partie. Les domaines considérés dans les contre-exemples sont situés vis à vis de ces définitions.

La suite du mémoire est consacrée à l'obtention des deux résultats suivants :

1 - Etant donné le cylindre élastique  $\bar{\Omega}_\ell$  de section carrée C et de longueur  $2\ell$  :

$$\bar{\Omega}_\ell = \{(x,y,z) ; |x| \leq \pi, |y| \leq \pi, -\ell \leq s \leq \ell\}$$

soumis aux systèmes de charges s.e.z. :

$$\vec{t}^+ (x,y) \quad \text{sur la face terminale } s = \ell$$

$$\vec{t}^- (x,y) \quad \text{sur la face terminale } s = -\ell$$

avec

$$\|\vec{t}_{1,1}^+\|_{L^2(C)} \leq 1 \qquad \|\vec{t}_{2,2}^+\|_{L^2(C)} \leq 1$$

Il existe une constante  $K$ , indépendante de  $\ell$ , telle que,  $\Phi$  étant l'énergie de déformation :

$$\Phi < K(1 + th \ell)$$

2 - Les seuls champs de contraintes  $\bar{T}$  uniformément borné dans un cylindre infini de section carrée tels que  $\tau_{13,1}(x,y,z)$  et  $\tau_{23,2}(x,y,z)$  soient aussi uniformément bornés, sont ceux obtenus par SAINT-VENANT dans chaque cas canonique et leurs combinaisons linéaires.

#### 4.2 - Notes sur des orientations moins classiques

Il conviendrait de citer encore de nombreux travaux, si nous voulions faire un compte rendu bibliographique à peu près complet des recherches suscitées par le Principe de SAINT-VENANT. Nous nous sommes limités ici au seul point de vue classique. Mais le principe de SAINT-VENANT peut s'envisager dans le cas de matériaux obéissant à des lois de comportement plus générales que celle de l'Elasticité linéaire homogène et isotrope, ou encore d'un point de vue dynamique. Nous indiquons dans une liste bibliographique complémentaire les références que nous connaissons. Figurent avec un astérisque les publications dont nous ignorons le contenu, tel l'article de G.DJANELIDZE (55) écrit à l'occasion du centenaire du Principe de SAINT-VENANT et que nous regrettons de ne pas connaître.

### §5 - QUELQUES COMMENTAIRES

#### 5.1 - Principe de SAINT-VENANT et perturbations locales

A l'origine du schéma proposé par BOUSSINESQ il y a deux préoccupations mêlées :

- montrer que le torseur, défini par un système de charge, joue un rôle privilégié
- étudier l'influence des perturbations locales d'un système de charge

Les résultats de VON MISES (32) et STERNBERG (33) montrent que dans ce schéma la résultante générale apparaît comme un paramètre dominant mais non le moment résultant. Ces conclusions sont surprenantes. Nous avons vu que pour TRUESDELL (8) la formulation proposée est

- 1 - trop exigeante en requérant qu'en tout point suffisamment éloigné le champ des contraintes soit peu affecté par une modification du système de charges conservant le torseur.
- 2 - Pas assez exigeante en ne considérant que des parties chargées dont le diamètre tend vers zéro, ou des points s'éloignant à l'infini.

Vis à vis de l'objection 1, il est clair que des phénomènes de concentration de contraintes, notamment, peuvent de façon locale (et annexe) mettre en défaut le Principe. Il convient de contourner cette difficulté. Par exemple en adoptant un point de vue global : étude de la fonctionnelle moment de torsion comme le propose TRUESDELL. Ce pourrait être, simplement, en ne considérant que des domaines pour lesquels de telles **concentrations** ne sont pas à redouter. Par ailleurs, du point de vue des applications, il n'est pas criticable de dire que seul l'étude de propriétés simples, module de torsion, contrainte maximale, sont intéressantes. Pour l'étude théorique du Principe, par contre, on peut souhaiter une optique plus fine.

Vis à vis de l'objection 2, il nous paraît tout à fait exact que, dans les applications du Principe, on considère toujours des portions limitées mais non évanescences du contour; la convergence des diverses solutions vers une solution standard se constatant, en général, à faible distance des régions chargées. Par contre, étant donnée une telle région  $\partial_1\Omega$  du contour, parmi les diverses perturbations possibles du système de charges appliquées sur  $\partial_1\Omega$ , il y a toutes les perturbations n'intervenant que sur de petites parties ou qu'en des points de  $\partial_1\Omega$ . Les effets de ces perturbations locales méritent d'être étudiés. Les résultats de BOUSSINESQ, VON MISES, STERNBERG, nous semblent pouvoir être inter-

prêter dans ce sens. Il reste alors à expliquer leur caractère paradoxal vis à vis du Principe de SAINT-VENANT. Nous allons donner ici quelques indications sur ce point.

Nous pouvons constater très simplement que :

- Les conclusions de BOUSSINESQ, VON MISES, STERNBERG, n'ont de sens qu'à la limite : c'est à dire lorsque le diamètre  $d$  des parties chargées tend vers zéro, ou lorsque le point, en lequel sont considérées les contraintes, s'éloigne indéfiniment.

- Les  $n$  forces considérées sont supposées rester bornées lorsque le diamètre  $d$  de la partie chargée tend vers zéro : les termes de moment, calculés par rapport à un point toujours intérieur à la région chargée, ne peuvent être qu'évanescents.

- Par contre on pourrait envisager le cas où les forces ne restant pas bornées, les termes de moment ne tendraient pas vers zéro avec  $d$ .

Nous voyons que l'étude du schéma proposé par BOUSSINESQ est lié à celle des charges concentrées. Pour cette dernière question nous renvoyons à la thèse de P. BEZIER (11) chapitre III et IV. D'après (11) nous savons que :

- Une schématisation correcte des charges concentrées, notamment sur le contour, peut se faire à l'aide des vecteurs distributions à support ponctuel. L'expression de ceux-ci fait intervenir la mesure de DIRAC  $\delta$  et ses dérivées au sens des distributions. La schématisation d'une force concentrée fait intervenir uniquement  $\delta$ , celle d'un couple concentré d'ordre 1 uniquement  $\delta'$ . Mais on peut envisager des charges concentrées d'ordre supérieur, dont la schématisation fait alors intervenir des dérivées de  $\delta$  d'ordre plus élevé.

- On étend à ces charges les notions de résultante et de moment, et l'on montre que les charges d'ordre supérieur ou égal à deux ont une ré-

sultante et un moment nuls. On montre également qu'un couple concentré (charge concentrée d'ordre 1) ne peut être caractérisée par son seul torseur. En effet la représentation d'un couple concentré fait intervenir un champ tensoriel constant d'ordre 2. Son moment ne fait intervenir que le champ antisymétrique associé.

- A partir de l'opérateur classique de l'Elasticité linéaire, il est possible de donner un sens au IIe problème fondamental avec des charges concentrées dans l'ouvert et sur le contour.

Qu'un couple concentré ne soit pas caractérisé par son seul moment, est à rapprocher de ce que le deuxième terme des développements limités donnés par VON MISES et STERNBERG contient plus que le moment statique.

Par ailleurs, vis à vis du Principe de SAINT-VENANT, il serait intéressant d'étudier l'influence des perturbations locales consistant en l'addition de charges concentrées d'ordre supérieur ou égal à 2, c'est à dire de charges concentrées de torseur nul. Toutefois on atteint ici les limites de définition de l'opérateur de l'Elasticité classique. La question mérite d'être reprise dans son ensemble, en liaison notamment avec les théories de l'Elasticité avec couples de contrainte. Dans la suite de ce travail nous n'envisagerons jamais le cas des charges concentrées.

## 5.2 - Principe de SAINT-VENANT et énergie

Pour SOUTHWELL (38) le principe de SAINT-VENANT est la conséquence d'un principe d'énergie minimum. Il traduirait la tendance de toute solution à "converger" vers une solution d'énergie minimum; dans chaque cas canonique ce serait la solution de SAINT-VENANT. Les résultats de (9) et de la partie I de ce travail contribuent à situer les limites de ce point de vue, tout au moins lorsque le domaine considéré est borné. Pour les domaines infinis, on dispose du résultat intéressant de DOU (48) pour les poutres de section carrée.

L'orientation choisie par TOUPIN (4), KNOWLES (45), KNOWLES-STERNBERG (46) nous semble intéressante. Elle est à l'origine de notre travail. Les résultats de TOUPIN traduisent, pour les poutres, l'idée émise par GOODIER (39) d'une localisation de l'énergie de déformation au voisinage d'une région soumise à un système de charges s.e.z. Cette localisation étant plus ou moins grande selon le matériau et la forme de la section. Ces résultats vont bien dans le sens du Principe de SAINT-VENANT, mais ne constituent cependant pas une "justification" complète. Pour approcher d'une telle "justification", forcément nuancée d'ailleurs, il faut s'affranchir en particulier du terme de normalisation  $\phi_0$ , représentant l'énergie de déformation totale induite dans la poutre.

Par ailleurs l'intégration sur une longueur  $l_0$  arbitraire, intervenant dans la démonstration, entraîne la neutralisation de la portion de poutre au voisinage de la région chargée. Elle semble interdire l'obtention d'un résultat où n'interviendrait, du point de vue géométrique, que la longueur de la poutre et des paramètres caractéristiques de la section. Savoir ce que devient le résultat de TOUPIN lorsque  $l_0$  tend vers zéro, nous semble être une question difficile. Dans une certaine mesure pour des sollicitations particulières ou pour l'Elasticité plane, les études de KNOWLES (45) et STERNBERG-KNOWLES (46) répondent à ces critiques. Disons aussi qu'il nous paraît fallacieux d'obtenir une inégalité sur les contraintes à l'intérieur du domaine, à partir d'une inégalité sur l'énergie, par application d'une formule de valeur moyenne.

Au sujet du Principe de SAINT-VENANT en Elasticité plane, considéré par divers auteurs tels que DOU (48) et KNOWLES (45), avec L. SOLOMON (5) p. 368 nous pouvons dire que "les importantes simplifications auxquelles conduit le principe de SAINT-VENANT n'ont pas d'équivalent dans le problème plan. En effet modifier la charge - même sur une petite portion du contour - cela signifie en réalité la modifier le long de tout le cylindre dont le contour est la courbe génératrice. L'idée même du principe se trouve donc généralement en défaut". Par contre il est

légitime d'envisager, indépendamment du lien avec l'Elasticité tridimensionnelle, de transposer le concept de principe de SAINT-VENANT aux cas d'autres opérateurs elliptiques : opérateur de l'Elasticité plane, Laplacien etc... Le cas du Laplacien est ainsi envisagé au chapitre suivant.

## CHAPITRE II

### UN SCHEMA D'ETUDE DU CONCEPT DE PRINCIPE DE SAINT-VENANT POUR LES DOMAINES CYLINDRIQUES

---

#### §1 - INTRODUCTION

##### 1.1 - Orientations

Dans la partie I nous avons défini ce que nous entendions par "Problème de SAINT-VENANT" pour un corps de forme quelconque" et son transposé au cas du Laplacien. Nous avons également signalé p. 9 quel pourrait être l'objet d'une étude systématique du Principe de SAINT-VENANT. Dans les pages qui suivent nous nous limitons au cas originel et significatif des domaines cylindriques.

Le problème posé est celui de la comparaison des solutions d'un "Problème de SAINT-VENANT" en particulier lorsqu'on s'éloigne des régions chargées. L'énoncé classique du Principe implique a priori une comparaison très fine portant sur les contraintes ou les déformations en tout point. Les difficultés mathématiques sont alors grandes. Par ailleurs il semble indispensable d'introduire des hypothèses diminuant inutilement la portée pratique des résultats que l'on pourrait obtenir. Ainsi pour se prémunir contre le phénomène de concentration de contraintes (cf. ANNEXE), il convient de faire des hypothèses sur la courbure de la frontière. Ces hypothèses ne sont en général pas vérifiées dans le cas des poutres "profilées" utilisées dans la construction métallique. Pourtant le Principe de SAINT-VENANT est globalement très bien vérifié dans ce cas.

On peut ici légitimement se demander si le langage local de la théorie de l'Elasticité est celui qui exprime toute la richesse de

l'hypothèse de SAINT-VENANT. Plus globalement, et c'est bien ainsi qu'en use implicitement ou explicitement les ingénieurs, le Principe de SAINT-VENANT rend compte de constatations pratiques très simples : une poutre, encastrée à l'une de ses extrémités, étant soumise à l'autre extrémité à un système de charges, le déplacement de tout point de cette extrémité est essentiellement fonction du torseur défini par le système de charges et non de la répartition exacte de celles-ci.

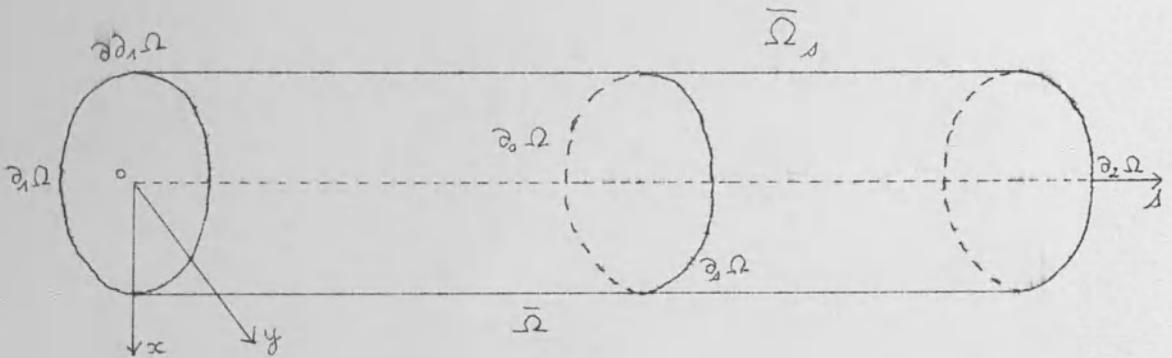
Pour toutes ces raisons nous adoptons dans les pages qui suivent un mode de comparaison des diverses solutions assez grossier. Du point de vue mathématique cela se traduit par la considération de normes du type  $L^2$  directement liées à la notion d'énergie. En ce sens, on étudie en premier lieu la "proximité globale" des solutions d'un problème de SAINT-VENANT dans l'ensemble du domaine, puis leur "proximité croissante" lorsqu'on s'éloigne des régions chargées. Le schéma proposé est commun aux cas de l'Elasticité et du Laplacien et pourrait être utilisé pour d'autres transpositions du problème et du Principe de SAINT-VENANT associées à des opérateurs ou à des systèmes elliptiques.

Dans le cas du Laplacien les difficultés techniques sont assez aisément surmontées. On discute sur des exemples de la plus ou moins bonne vérification a priori du Principe transposé. Pour l'Elasticité la discussion reste en suspens. En particulier l'étude de la "proximité croissante" des solutions n'a pu être envisagée que par l'intermédiaire de l'inégalité (42) due à R. TOUPIN. Celle-ci n'est pas pleinement satisfaisante dans la mesure où le paramètre géométrique traduisant l'influence de la forme de la section est partiellement arbitraire et non directement lié à la section. Les difficultés rencontrées dans le cas de l'Elasticité montrent que le schéma proposé est avant tout une ébauche. Un approfondissement théorique ultérieur devrait permettre d'aboutir à des résultats vraiment significatifs.

## 1.2 - Hypothèses sur les domaines

Les domaines considérés  $\bar{\Omega}$  sont des portions de cylindre de longueur  $l$ . Les sections terminales, frontières comprises, sont notées

$\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .  $\partial_0 \Omega$  désigne la surface latérale frontière exclue.



$\bar{\Omega}$  est rapporté à un trièdre trirectangle direct  $(O, x, y, s)$ .  $O$  centre d'inertie de la section  $\partial_1 \Omega$ ,  $Ox$  et  $Oy$  axes d'inertie.  $Os$  ligne des centres d'inertie des diverses sections.

$\partial_s \Omega$  désigne la section d'abscisse  $s$ ,  $\bar{\Omega}_s$  la portion du domaine située au-delà de cette section.

Dans toute la suite nous supposerons que la courbe génératrice du cylindre  $\partial \partial_1 \Omega$  est suffisamment régulière, par exemple  $C^1$ . On pourrait en modifiant certaine démonstration la supposer seulement Lipschitzienne.

### 1.3 - Quelques propriétés préliminaires

Considérons la formulation faible d'un "Problème de SAINT-VE-NANT" proposée dans la partie I. Les données au contour  $\phi$  (Resp.  $\vec{\phi}$ ) d'un tel problème engendre un convexe  $\mathcal{L}$  dans  $H^{-1/2}(\Omega)$  (Resp.  $F^1(\Omega)^3$ ) auquel correspond le convexe  $\mathcal{L}' \subset V \subset H^1(\Omega)$  (Resp.  $\subset E(\Omega)^3$ ) des solutions aux problèmes de NEUMANN (Resp. IIe problèmes de l'Elasticité) associés.

#### Décomposition des solutions $u \in \mathcal{L}'$

Des relations de définitions de  $\mathcal{L}$  p. 30 (Resp. p. 54),  $\mathcal{L}'$  p. 31 (Resp. p. 56) et des variétés  $V_1$  et  $V_2$  (Resp.  $V_1^\perp$  et  $V_2^\perp$ ) p. 37 (Resp. p. 62) il résulte immédiatement que :

Tout élément  $u \in \mathcal{E}'$  se décompose de manière unique sous la forme :

$$u = u_m + u_o^1 + u_o^2$$

où  $u_m$  est la solution d'énergie minimum

$$u_o^1 \in \mathcal{E}'_o^1 \quad u_o^2 \in \mathcal{E}'_o^2$$

avec  $\mathcal{E}'_o^1$  et  $\mathcal{E}'_o^2$  ensembles des solutions aux problèmes de NEUMANN (Resp. IIe problèmes de l'Elasticité) associées aux conditions au contour appartenant respectivement aux variétés  $V_1$  et  $V_2$  (Resp.  $V_1^\perp$  et  $V_2^\perp$ ).

### Interprétation

Un système de conditions au contour nulles sur  $\partial_o \Omega$ , de moyenne donnée et opposée (Resp. définissant des torseurs donnés et opposés) sur  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ , se décompose de façon unique suivant le système de conditions au contour correspondant à la solution d'énergie minimum, un système de conditions au contour nulles sur  $\partial_o \Omega \cup \partial_2 \Omega$  et de moyenne nulle (Resp. torseur nul) sur  $\partial_1 \Omega$ , et un système de conditions au contour nulles sur  $\partial_o \Omega \cup \partial_1 \Omega$  et de moyenne nulle (Resp. torseur nul) sur  $\partial_2 \Omega$ .

### Propriété d'orthogonalité de $u_m$ dans $V$

Dans  $V \subset H^1(\Omega)$  (Resp.  $\subset E(\Omega)^3$ ) définie p. 29 (Resp. p. 53),  $u_m$  est orthogonal au sens du produit scalaire de  $V$  à tout élément de  $\mathcal{E}'_o^1$  et  $\mathcal{E}'_o^2$ .

A un élément  $u_o^1$  de  $\mathcal{E}'_o^1$ , par exemple, correspond un système de conditions au contour  $\eta_1 \in V_1$  (Resp.  $\in V_1^\perp$ ). Alors, d'après les relations de compatibilité (29') (Resp. (39')) et la formule de GREEN, il vient :

$$\langle \eta_1, \gamma_0 u_m \rangle_{\partial_1 \Omega} = 0 = \int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_o^1}{\partial x_i} d\omega = (u_m, u_o^1)_{V \subset H^1(\Omega)}$$

(Resp.

$$\langle \vec{\eta}_1, \gamma_0 \vec{u}_m \rangle_{\partial_1 \Omega} = 0 = \int_{\Omega} C_{ijkl} \epsilon_{ij}(\vec{u}_m) \epsilon_{kl}(\vec{u}_o^1) d\omega = (\vec{u}_m, \vec{u}_o^1)_{V \subset E(\Omega)^3}$$

### Conséquence

Soit  $\vec{u}' \in V \subset E(\Omega)^3$  telle que :

$$\vec{u}' = \vec{u}_m + \vec{u}_o^1 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_o^1 \in \mathcal{C}'_o^1$$

alors

$$\|\vec{u}'\|_{V \subset E(\Omega)^3}^2 = \|\vec{u}_m\|_{V \subset E(\Omega)^3}^2 + \|\vec{u}_o^1\|_{V \subset E(\Omega)^3}^2 \quad (48)$$

et la propriété équivalente pour le cas du Laplacien.

### Interprétation mécanique

Une poutre, dont l'une des extrémités  $\partial_2 \Omega$  est fixée rigidement, est soumise suivant l'autre extrémité  $\partial_1 \Omega$  à un système de charges de torseur donné. Ce système de charges est décomposable suivant le système de charge engendrant l'énergie de déformation minimum et un système de torseur nul. Le résultat précédent signifie que l'énergie de déformation dans la poutre est la somme de l'énergie de déformation minimum et de l'énergie de déformation engendrée par le système de torseur nul.

#### 1.4 - Schéma d'étude du Principe de SAINT-VENANT

Il s'agit conformément à 1-1 de comparer les diverses solutions de  $\mathcal{C}'$  décomposable de façon unique sous la forme :

$$u_m + u_o^1 + u_o^2 \quad u_o^1 \in \mathcal{C}'_o^1 \quad u_o^2 \in \mathcal{C}'_o^2$$

en particulier lorsqu'on s'éloigne de  $\partial_1 \Omega$  et  $\partial_2 \Omega$ .

Pour les domaines considérés  $\mathcal{C}'_o^1$  et  $\mathcal{C}'_o^2$  jouent des rôles symétriques et il suffit de comparer entre elles les solutions de  $\mathcal{C}'$  de la forme :

$$u_m + u_o^1$$

Comparaison globale des solutions

1 - Elle se fait en étudiant le rapport

$$\frac{||u - u_m||^2}{||u_m||^2} = \frac{||u_o^1||^2}{||u_m||^2} \quad (49)$$

2 - Si nous ne faisons aucune hypothèse supplémentaire, ce rapport n'a aucune raison d'être borné supérieurement. La norme énergétique d'un élément  $u_o^1 \in \mathcal{C}'_o^1$  peut être très grande. D'autre part celle de  $u_m$  dépend de la valeur moyenne R (Resp. des éléments de réduction  $\vec{R}$  et  $\vec{M}$ ) donnée. Elle est nulle si R (Resp.  $\vec{R}$  et  $\vec{M}$ ) est nulle.

3 - Il convient d'introduire ici des hypothèses supplémentaires suggérées par l'aspect physique du problème. En effet :

a) la schématisation de l'Elasticité linéaire n'est correcte que dans certaines limites. Si les charges deviennent trop grandes on observe la plastification puis la rupture du matériau en des points qui ne sont pas toujours les points d'applications des charges. Des limitations analogues existent pour les phénomènes physiques dont la schématisation fait intervenir le Laplacien.

b) Les conditions d'entrée dans le domaine de non linéarité sont habituellement locales et très grossièrement nous pouvons envisager de supposer :

dans le cas du Laplacien  $|\frac{\partial u}{\partial n}| < M$  en tout point de  $\partial\Omega$

dans le cas de l'Elasticité  $|\vec{\sigma}_n(\vec{u})| < M$  en tout point de  $\partial\Omega$

ou encore

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} < M^2 \text{ mes } (\partial\Omega)$$

$$\left\| \overrightarrow{\sigma_n(\vec{u})} \right\|_{(L^2(\partial\Omega))^3} < M^2 \text{ mes } (\partial\Omega)$$

Par contre une condition analogue écrite dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  (Resp.  $F'(\partial\Omega)^3$ ) n'est pas satisfaisante. En effet  $\phi \in \mathcal{C} \subset H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et  $u \in V \subset H^1(\Omega)$  étant la solution correspondante, nous avons vu au chapitre II de I que :

$$\alpha^2 \|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2 \leq \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\omega \leq \beta^2 \|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}^2$$

En conséquence introduire une limitation de la norme de  $\phi$  revient à supposer a priori l'intégrale de l'énergie bornée.

c) (49) n'est intéressant à étudier vis à vis du Principe de SAINT-VENANT, que si la moyenne  $R$  (Resp. les éléments de réduction  $\vec{R}$  et  $\vec{M}$ ) n'est pas trop voisine de zéro.

4 - Nous ferons donc les hypothèses suivantes :

a) Seules les solutions  $u \in \mathcal{C}'$  de la forme  $u_m + u_o^1$  suffisamment régulières pour que les conditions de b) aient un sens, ne seront envisagées dans la suite

$$b) \left| \frac{\partial u_o^1}{\partial n} \right| < M \text{ en tout point de } \partial_1\Omega \quad (50)$$

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial n} \right| < M \text{ en tout point de } \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \quad (51)$$

$$\left( \text{Resp. } \left| \overrightarrow{\sigma_n(\vec{u}_o^1)} \right| < M \right)$$

$$\left( \text{Resp. } \left| \overrightarrow{\sigma_n(\vec{u}_m)} \right| < M \right)$$

Etude de la proximité des solutions lorsqu'on s'éloigne de  $\partial_1\Omega$

Elle se fait en étudiant la norme énergétique de  $u - u_m$  c'est à dire  $\|u_o^1\|_{V_s \subset H(\Omega_s)}$  dans la famille de sous domaine  $\{\Omega_s\}$ .

Plus ou moins bonne vérification du Principe

On dira que le Principe de SAINT-VENANT est d'autant mieux vérifié a priori que

1)  $\frac{\|u_o^1\|_V^2}{\|u_m\|_V^2}$  est petit devant 1

2)  $\|u_o^1\|_{V_s}$  décroît rapidement lorsque s varie de 0 à  $\ell$

La décroissance linéaire correspond au cas où l'énergie induite par  $u_o^1$  est uniformément répartie dans  $\Omega$ .

§2 - LE CAS DU LAPLACIEN

2.1 - Solution d'énergie minimum - Calcul de l'énergie associée

Du chapitre II de I il résulte que la solution d'énergie minimum  $u_m$  est solution pour le domaine cylindrique  $\Omega$  d'un problème mixte régulier de la forme :

$$\begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = C \quad \text{sur } \partial_1\Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial_2\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial_o\Omega \end{array}$$

où C est une constante à déterminer en fonction de la valeur moyenne R.

On vérifie immédiatement que  $u_m$  est de la forme :

$$u_m = C \left(1 - \frac{s}{\ell}\right)$$

mais

$$R = - \int_{\partial_1 \Omega} \frac{\partial u_m(x,y,0)}{\partial s} dx dy = \frac{C}{l} \text{mes}(\partial_1 \Omega)$$

D'où finalement

$$\left| \begin{aligned} u_m &= \frac{R}{\text{mes}(\partial_1 \Omega)} (l - s) \\ \|u_m\|_V^2 &= - \int_{\partial_1 \Omega} \frac{\partial u_m(x,y,0)}{\partial s} \cdot u_m(x,y,0) dx dy = \frac{R^2 l}{\text{mes}(\partial_1 \Omega)} \end{aligned} \right.$$

2.2 - Forme de la solution  $u_0^1$

On considère toutes les fonctions  $g$  définies sur  $\partial \Omega$  telles que :

$$g = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_0 \Omega \cup \partial_2 \Omega \quad (53)$$

$$g = \theta(x,y) \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega \quad (54)$$

avec

$$\int_{\partial_1 \Omega} \theta(x,y) dx dy = 0 \quad (55)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial \partial_1 \Omega \quad (56)$$

$$\theta(x,y) \in C^2(\overline{\partial_1 \Omega})$$

$\nu$  étant la normale extérieure en tout point de  $\partial \partial_1 \Omega$

Alors classiquement,  $g$  étant donné, le problème de NEUMANN

$$\left| \begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{sur} \quad \partial \Omega \\ \int_{\Omega} u d\omega &= 0 \quad \text{ou tout autre relation équivalente} \end{aligned} \right.$$

admet une solution unique régulière  $u_0^1$

Forme de  $u_0^1$

$$\left| \begin{aligned} \text{Toute solution } u_0^1 &\text{ peut s'écrire} \\ u_0^1(x,y,s) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \theta_i(x,y) \phi_i(s) \end{aligned} \right. \quad (57)$$

avec  $\theta_i(x,y)$  i<sup>e</sup> fonction propre du problème de NEUMANN homogène à deux dimensions dans  $\partial_1\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \theta_i(x,y) + \lambda_i \theta_i(x,y) = 0 \quad \text{dans } \partial_1\Omega \\ \frac{\partial \theta_i}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\partial_1\Omega \\ \int_{\partial_1\Omega} \theta_i(x,y) \, dx \, dy = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial_1\Omega} \theta_i^2(x,y) \, dx \, dy = 1 \end{array} \right.$$

et

$$\alpha_i = \int_{\partial_1\Omega} \theta(x,y) \theta_i(x,y) \, dx \, dy$$

$$\phi_i(s) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{\text{ch } \sqrt{\lambda_i}(\ell - s)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_i} \ell}$$

La série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \theta_i(x,y) \quad (58)$$

étant supposée dérivable terme à terme une fois dans  $\overline{\partial_1\Omega}$  et deux fois dans  $\partial_1\Omega$ .

$\theta(x,y) \in C^2(\overline{\partial_1\Omega})$  vérifiant (55) et (56) est développable dans  $\overline{\partial_1\Omega}$  en série absolument et uniformément convergente (cf (50) tome I p. 369) sous la forme (58).

Il s'agit donc de montrer que (57) est solution du problème

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial_0\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad \text{sur } \partial_2\Omega \\ - \frac{\partial u}{\partial s} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \theta_i(x,y) \quad \text{sur } \partial_1\Omega \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que (57) est formellement solution de (I). Reste à justifier la légitimité des dérivations terme à terme effectuées.

Convergence de (57) et dérivation en x et y dans  $\overline{\Omega}$

Il suffit de montrer qu'à partir d'un certain rang  $N(\ell, \partial_1\Omega, M)$ ,

on a lorsque  $0 \leq s \leq \ell$  :

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \frac{\text{ch } \sqrt{\lambda_j}(\ell - s)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_j} \ell} \leq M \quad (59)$$

$\lambda_j$  croissant indéfiniment avec  $j$ , il existe un rang  $N_1(\partial_1\Omega)$  tel que pour tout  $j > N_1(\partial_1\Omega)$ ,  $\lambda_j > 1$ . De plus pour  $0 \leq s \leq \ell$

$$0 \leq \frac{\text{ch } \sqrt{\lambda_j}(\ell - s)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_j} \ell} \leq \text{coth } \sqrt{\lambda_j} \ell$$

or  $\text{coth } \sqrt{\lambda_j} \ell$  est une fonction décroissante de  $\lambda_j$  tendant vers 1 lorsque  $\lambda_j$  croît indéfiniment, donc il existe  $N_2(\ell)$  tel que  $j > N_2(\ell)$  entraîne  $\text{coth } \sqrt{\lambda_j} \ell < 2$ .

Alors pour  $j > \sup \{ N_1(\partial_1\Omega), N_2(\partial_2\Omega) \}$  et  $0 \leq s \leq \ell$  on a bien (59) avec  $M = 2$ .

#### Dérivation par rapport à $s$ dans $\bar{\Omega}$

La série dérivée est bien absolument et uniformément convergente, car pour tout  $i$  et pour  $0 \leq s \leq \ell$  :

$$0 \leq \frac{\text{sh } \sqrt{\lambda_i}(\ell - s)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_i} \ell} \leq 1$$

#### Dérivations 2 fois en $x$ ou $y$ dans $\Omega$

Elles sont légitimes puisqu'elles le sont pour la série (58) et que l'on a (59) pour  $0 \leq s \leq \ell$  et  $j > N(\ell, \partial_1\Omega, M)$ .

#### Dérivations 2 fois en $s$ dans $\Omega$

Il s'agit d'étudier la convergence de la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \theta_i(x, y) \frac{\sqrt{\lambda_i} \text{ch } \sqrt{\lambda_i}(\ell - s)}{\text{sh } \sqrt{\lambda_i} \ell}$$

La valeur  $s = 0$  est singulière et l'on ne peut espérer démontrer la convergence uniforme et absolue de la série dans  $\bar{\Omega}$ .

Par contre dans  $\Omega$ , c'est à dire pour tout  $s$  et tout  $\epsilon$  tels que

$$0 < \epsilon \leq s \leq \ell$$

il suffit de vérifier que pour tout  $i$ ,  $\frac{\sqrt{\lambda_i} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_i} (\ell - s)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_i} \ell}$  est uniformément borné sur tout intervalle  $(\epsilon, \ell)$ .

Or pour  $s \in (\epsilon, \ell)$  nous avons pour tout  $i$  :

$$0 \leq \frac{\sqrt{\lambda_i} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_i} (\ell - s)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_i} \ell} \leq \frac{\sqrt{\lambda_i} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_i} (\ell - \epsilon)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_i} \ell}$$

mais

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\lambda_i} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_i} (\ell - \epsilon)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_i} \ell} &= \sqrt{\lambda_i} e^{-\sqrt{\lambda_i} \epsilon} \frac{1 + e^{-2\sqrt{\lambda_i} (\ell - \epsilon)}}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_i} \ell}} \\ &\leq \sqrt{\lambda_i} e^{-\sqrt{\lambda_i} \epsilon} \frac{2}{1 - e^{-2\sqrt{\lambda_i} \ell}} \leq \frac{2}{\epsilon e (1 - e^{-2\sqrt{\lambda_i} \ell})} \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant de ce que pour  $x \geq 0$  la fonction  $x e^{-\epsilon x}$  est positive et a pour maximum  $\frac{1}{\epsilon e}$ . D'où la légitimité de la double dérivation en  $s$  terme à terme dans  $\Omega$ .

### 2.3 - Estimation de la norme énergétique de $u_0^1$

Nous avons en vertu des résultats précédents :

$$\begin{aligned} \|u_0^1\|_{V \subset H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \frac{\partial u_0^1}{\partial x_i} \frac{\partial u_0^1}{\partial x_i} d\omega = \int_{\partial_1 \Omega} \theta(x, y) u_0^1(x, y, 0) dx dy \\ &= \int_{\partial_1 \Omega} \theta(x, y) \sum_{i=1}^n \alpha_i \theta_i(x, y) \frac{\operatorname{coth} \sqrt{\lambda_i} \ell}{\sqrt{\lambda_i}} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda_i}} \coth \sqrt{\lambda_i} \ell \int_{\partial_1 \Omega} \theta(x,y) \theta_i(x,y) dx dy \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i^2}{\sqrt{\lambda_i}} \coth \sqrt{\lambda_i} \ell \leq \frac{\coth \sqrt{\lambda_1} \ell}{\sqrt{\lambda_1}} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2
 \end{aligned}$$

l'intervention du signe  $\int$  et  $\Sigma$  étant légitime.

Les  $\theta_i$  constituent un système orthonormal complet dans  $L^2(\partial_1 \Omega)$ , par suite :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 = \|\theta(x,y)\|_{L^2(\partial_1 \Omega)}^2$$

et finalement

$$\|u_0^1\|_{V \subset H^1(\Omega)} \leq \frac{\coth \sqrt{\lambda_1} \ell}{\sqrt{\lambda_1}} \|\theta\|_{L^2(\partial_1 \Omega)}^2 \quad (60)$$

avec  $\lambda_1$  plus petite valeur propre non nulle du problème de NEUMANN homogène dans  $\partial_1 \Omega$ .

$\|\theta\|_{L^2(\partial_1 \Omega)}^2$  est égal au carré de la norme dans  $L^2(\partial \Omega)$  des données au contour associées à  $u_0^1$ .

2.4 - Etude de  $\|u_0^1\|_{V_s \subset H^1(\Omega_s)}^2$  en fonction de  $s$   
 1 - Une inégalité vérifiée par  $\frac{d\|u_0^1\|_{V_s}^2}{ds}$

$$\begin{aligned}
 \|u_0^1\|_{V_s}^2 &= \int_s^\ell dt \int_{\partial_t \Omega} |\overrightarrow{\text{grad}} u_0^1(x,y,t)|^2 dx dy \\
 \frac{d\|u_0^1\|_{V_s}^2}{ds} &= - \int_{\partial_s \Omega} |\overrightarrow{\text{grad}} u_0^1(x,y,s)|^2 dx dy \quad (61)
 \end{aligned}$$

mais  $u_0^1(x,y,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \theta_i(x,y) \phi_i(s)$

avec 
$$\int_{\partial_1 \Omega} \theta_i(x,y) \theta_j(x,y) dx dy = \delta_{ij}$$

$$\int_{\partial_1 \Omega} \left( \frac{\partial \theta_i(x,y)}{\partial x} \frac{\partial \theta_j(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \theta_i(x,y)}{\partial y} \frac{\partial \theta_j(x,y)}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Par suite :

$$\frac{d \|u_0^1\|_{V_s}^2}{ds} = - \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \alpha_i^2 \phi_i^2(s) \int_{\partial_1 \Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \theta_i(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_i(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \alpha_i^2 \phi_i^2(s) \right]$$

l'intervertion du signe  $\int$  et  $\Sigma$  étant légitime.

Les  $\theta_i(x,y)$  étant les fonctions propres normées du problème de NEUMANN homogène dans  $\partial_1 \Omega$  :

$$\int_{\partial_1 \Omega} \left\{ \left( \frac{\partial \theta_i(x,y)}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_i(x,y)}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \lambda_i$$

et

$$-\frac{d \|u_0^1\|_{V_s}^2}{ds} \geq \lambda_1 \Sigma \alpha_i^2 \phi_i^2(s)$$

c'est à dire

$$\left| -\frac{d \|u_0^1\|_{V_s}^2}{ds} \geq \lambda_1 \|u_0^1(x,y,s)\|_{L^2(\partial_s \Omega)}^2 \right. \quad (62)$$

2 - Inégalité vérifiée par  $\|u_0^1\|_{V_s}^2$

$$\|u_0^1\|_{V_s}^2 = - \int_{\partial_s \Omega} \frac{\partial u_0^1(x,y,s)}{\partial s} u_0^1(x,y,s) dx dy$$

$$\leq \sqrt{\int_{\partial_s \Omega} \left| \frac{\partial u_0^1(x,y,s)}{\partial s} \right|^2 dx dy} \int_{\partial_s \Omega} |u_0^1(x,y,s)|^2 dx dy$$

$$\leq \| |u_0^1(x,y,s)| \|_{L^2(\partial_s \Omega)} \sqrt{\int_{\partial_1 \Omega} | \text{grad } u_0^1(x,y,s) |^2 dx dy}$$

D'où en tenant compte de (61) et (62) :

$$\| |u_0^1(x,y,s)| \|_{V_s}^2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \frac{d \| |u_0^1 | \|_{V_s}^2}{ds}$$

et par suite :

$$\left| \begin{array}{l} \| |u_0^1 | \|_{V_s}^2 \leq \| |u_0^1 | \|_V^2 e^{-\sqrt{\lambda_1} s} \end{array} \right. \quad (63)$$

Cette inégalité traduit une localisation, au voisinage de  $\partial_1 \Omega$ , de l'énergie correspondant à  $u_0^1(x,y,s)$ . Cette localisation est plus ou moins grande a priori suivant que  $\lambda_1$  est lui-même plus ou moins grand.

### 2.5 - Conséquences des hypothèses (50) et (51) et des résultats précédents

L'hypothèse (51) peut s'écrire ici :

$$-\frac{d u_m(x,y,0)}{ds} = \frac{R}{\text{mes}(\partial_1 \Omega)} = \alpha M$$

avec  $0 < \alpha \leq 1$

D'où

$$R = \alpha M \text{ mes}(\partial_1 \Omega) \quad (64)$$

Par ailleurs (50) entraîne que :

$$\| |\theta| \|_{L^2(\partial_1 \Omega)}^2 \leq M^2 \text{ mes}(\partial_1 \Omega) \quad (65)$$

Alors, étant donné la valeur de  $\| |u_m | \|_V^2$ , il vient de (60), (64), (65) :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\| |u_0^1 | \|_V^2}{\| |u_m | \|_V^2} \leq \frac{\text{mes}(\partial_1 \Omega) \cdot \coth \sqrt{\lambda_1} \ell}{R^2 \ell \sqrt{\lambda_1}} \| |\theta| \|_{L^2(\partial_1 \Omega)}^2 \leq \frac{\coth \sqrt{\lambda_1} \ell}{\alpha^2 \ell \sqrt{\lambda_1}} \\ 0 < \alpha \leq 1 \end{array} \right. \quad (66)$$

et de (63) on peut écrire :

$$\left| \begin{aligned} \|u_o^1\|_V^2 &\leq \frac{\coth \sqrt{\lambda_1} \ell}{\sqrt{\lambda_1}} \|\theta\|_{L^2(\partial_1 \Omega)}^2 e^{-\sqrt{\lambda_1} s} \\ &\leq \frac{M^2 \text{mes}(\partial_1 \Omega) \coth \sqrt{\lambda_1} \ell}{\sqrt{\lambda_1}} e^{-\sqrt{\lambda_1} s} \end{aligned} \right. \quad (67)$$

2.6 - Etude sur deux exemples de la plus ou moins bonne vérification a priori du Principe de SAINT-VENANT transposé

1 - Domaine cylindrique de section carrée

Données géométriques et conséquences

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x, y, s) ; -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}, 0 \leq s \leq 100 a \right\}$$

on a donc  $\ell = 100 a$

Par ailleurs cf (50) tome I p. 301 :

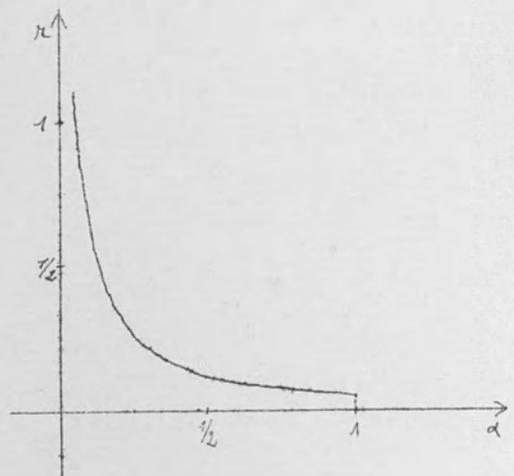
$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{a^2}$$

$$\coth \sqrt{\lambda_1} \ell \approx 1$$

Etude du rapport  $\frac{\|u_o^1\|_V}{\|u_m\|_V}$

$$r = \frac{\|u_o^1\|_V}{\|u_m\|_V} \leq \frac{1}{10 \alpha \sqrt{\pi}}$$

On voit que  $\|u_o^1\|_V$  est a priori assez nettement inférieur à  $\|u_m\|_V$  dès que R est suffisamment grand par rapport à sa valeur maximale ( $R \geq \frac{1}{4} R_M$ ).



Proximité des solutions lorsqu'on s'éloigne de  $\partial_1 \Omega$

$$\|u_o^1\|_{V_s}^2 < \|u_o^1\|_V^2 e^{-\frac{\pi s}{a}} \leq \frac{a^3 M^2}{\pi} e^{-\pi \frac{s}{a}}$$

s varie de 0 à 100 a. On voit que la "distance" des solutions décroît très vite lorsqu'on s'éloigne de  $\partial_1 \Omega$ . En effet  $\frac{\|u_o^1\|_{V_s}^2}{\|u_o^1\|_V^2}$  décroît beaucoup plus vite que linéairement.

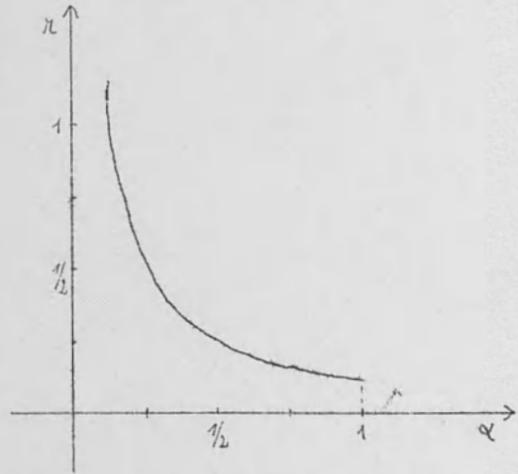
2 - Domaine cylindrique de section rectangulaire aplatie

$$\bar{\Omega} = \{ (x,y,s) ; -\frac{a}{8} \leq x \leq \frac{a}{8}, -2a \leq y \leq 2a, 0 \leq s \leq 100 a \}$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{16 a^2}$$

$$\coth \sqrt{\lambda_1} \ell \approx 1$$

$$r = \frac{\|u_o^1\|_V}{\|u_m\|_V} < \frac{1}{5 \alpha \sqrt{\pi}}$$



On voit que pour une section moins "compact" le terme de perturbation  $u_o^1$  est a priori plus important.

$$\|u_o^1\|_{V_s}^2 < \|u_o^1\|_V^2 e^{-\frac{\pi s}{4 a}} \leq \frac{4 M^2 a^3}{\pi} e^{-\frac{\pi s}{4 a}}$$

s variant toujours de 0 à 100 a. On voit que la "distance" des solutions décroît encore très vite lorsqu'on s'éloigne de  $\partial_1 \Omega$ . Toutefois cette décroissance est ici a priori moins rapide que dans le cas précédent.

2.7 - Un point de départ pour l'étude du cas général

Le domaine  $\bar{\Omega}$  est supposé maintenant de "forme quelconque" et répond aux hypothèses du chapitre I de la partie I. Sous certaines hypothèses à préciser, les solutions  $u(P)$  de la forme  $u_m(P) + u_o^1(P)$  pouvant s'écrire :

$$u(P) = u_m(P) + \int_{\partial_1 \Omega} N(P, Q) g_0^1(Q) da$$

$N(P, P')$  étant le noyau de NEUMANN et  $g_0^1(Q)$  les données sur  $\partial_1 \Omega$  relatives à  $u_0^1(P)$ .

Dans  $L^2(\bar{\Omega})$  :

$$N(P, P') = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i(P) u_i(P')}{\lambda_i}$$

Les  $\lambda_i$  étant les valeurs propres non nulles du problème de NEUMANN homogène dans  $\bar{\Omega}$  et les  $u_i(P)$  les fonctions propres associées.

Alors dans un sens à préciser :

$$u(P) = u_m(P) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_{\partial_1 \Omega} u_i(Q) g_0^1(Q) da}{\lambda_i} u_i(Q) \quad (68)$$

et

$$\begin{aligned} \|u\|_V^2 &= \|u_m\|_V^2 + \|u_0^1\|_V^2 = \|u_m\|_V^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left( \int_{\partial_1 \Omega} u_i(Q) g_0^1(Q) da \right)^2}{\lambda_i} \\ \|u\|_V^2 &\leq \|u_m\|_V^2 + \frac{\|g_0^1\|_{L^2(\partial_1 \Omega)}^2}{\lambda_1} \end{aligned} \quad (69)$$

Le développement (68) précise la nature des termes complémentaires, non directement associés comme  $u_m$  à la valeur moyenne des données  $g_0^1(Q)$  sur  $\partial_1 \Omega$ .

Le dernier terme de l'inégalité (69) est tout à fait comparable au deuxième membre de l'inégalité (60) obtenue pour les domaines cylindriques.

L'étude du cas général pourrait comporter ensuite une estimation de  $\|u_m\|_V^2$  et de  $\|u_0^1\|_V^2$  dans des domaines  $\bar{\Omega}_s$  à préciser.

### §3 - QUELQUES CONSIDERATIONS SUR LE CAS DE L'ELASTICITE

#### 3.1 - Estimation de la norme énergétique de $\vec{u}_m$

La complexité de l'opérateur de l'Elasticité rend a priori difficile la détermination explicite de la solution d'énergie minimum  $\vec{u}_m$ , même pour un domaine cylindrique. Pour le schéma proposé il nous suffirait de pouvoir déterminer  $\|u_m\|_V^2$  c'est à dire, au coefficient 1/2 près, l'énergie de déformation  $\phi(\vec{u}_m, \vec{u}_m)$  associée à  $\vec{u}_m$ . De prime abord l'estimation de  $\|u_m\|_V^2$  n'est pas évidente, et nous pouvons nous contenter dans un premier temps, d'une minoration.

Propriété

Dans le domaine  $\bar{\Omega}$  défini précédemment :

$$\phi(\vec{u}_m, \vec{u}_m) > \phi_0$$

avec  $\phi_0$  énergie de déformation dans  $\bar{\Omega}$  lorsque l'hypothèse des milieux continus (sections rigides) est supposée être vérifiée. C'est à dire cf. (19) p. 135 ou (49) chapitre II :

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{a_1} + \frac{R^2}{a_2} + \frac{R^2}{a_3} + \frac{M^2}{b_1} + \frac{M^2}{b_2} + \frac{M^2}{b_3} \right)$$

avec

$$a_1 = \frac{\mu \cdot \text{mes}(\partial_1 \Omega)}{\alpha_1} \quad a_2 = \frac{\mu \cdot \text{mes}(\partial_1 \Omega)}{\alpha_2} \quad a_3 = E \cdot \text{mes}(\partial_1 \Omega)$$

$$b_1 = E I_x \quad b_2 = E I_y \quad b_3 = \mu d$$

où

- E est le module d'Young du matériau
- $\mu$  2è coefficient de Lamé (ou module de cisaillement)
- $\left. \begin{matrix} I_x \\ I_y \end{matrix} \right\}$  moment d'inertie de la section par rapport à Ox et Oy
- $\left. \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{matrix} \right\}$  coefficients ne dépendant que de la forme de la section et déterminés à partir de l'étude de la flexion en console

$$d = 2 \int_{\partial_1 \Omega} \psi(x,y) \, dx \, dy \quad \text{avec } \psi(x,y) \text{ fonction de contrainte du problème de torsion}$$

### Justification

Considérons  $\vec{u}_m$  dans  $\Omega$  et les conditions aux limites associées. Soit  $\phi_{(0,s_0)}$ ,  $\phi_{(s_0,l)}$  les énergies de déformation associées à  $\vec{u}_m$  dans les portions  $\Omega_{(0,s_0)}$  et  $\Omega_{(s_0,l)}$  situées respectivement avant et après la section d'abscisse  $s_0$ .

$$\phi(\vec{u}_m, \vec{u}_m) = \phi_{(0,s_0)} + \phi_{(s_0,l)}$$

Supposons alors que la section d'abscisse  $s_0$  soit rigide, le domaine  $\bar{\Omega}$  étant soumis par ailleurs aux mêmes conditions aux limites que précédemment. Les énergies de déformation  $\phi'_{(0,s_0)}$  et  $\phi'_{(s_0,l)}$  sont respectivement minimum, au sens défini dans la partie I, dans  $\Omega_{(0,s_0)}$  et  $\Omega_{(s_0,l)}$  et par suite

$$\phi'_{(0,s_0)} < \phi_{(0,s_0)}$$

$$\phi'_{(s_0,l)} < \phi_{(s_0,l)}$$

et l'énergie totale  $\phi'$  est inférieure à  $\phi(\vec{u}_m, \vec{u}_m)$ . A fortiori lorsque toutes les sections sont supposées rigides, l'énergie  $\phi_0$  est inférieure à  $\phi(\vec{u}_m, \vec{u}_m)$ .

### 3.2 - Les difficultés propres à l'Elasticité

La mise en oeuvre de notre schéma d'étude du Principe de SAINT-VENANT devrait se poursuivre par l'estimation de  $\|\vec{u}_0^1\|_V$ , puis par l'obtention d'une inégalité du type (63) vérifiée par  $\|\vec{u}_0^1\|_V$ . Dans les deux cas nous nous sommes heurtés à une difficulté souvent rencontrée en Elasticité sous diverses formes et que nous appelons, à tort peut-être, le caractère tridimensionnel de l'opérateur de l'Elasticité. Cela

se traduit notamment par un certain échec des méthodes de séparation de variables ou par le passage délicat de l'Elasticité tridimensionnelle à l'Elasticité plane.

Un exemple nous est fourni par la démonstration de l'inégalité (42) proposée par R. TOUPIN. Une intégration sur une longueur  $\ell_0$  arbitraire est nécessaire pour introduire la troisième dimension et appliquer le Principe de RAYLEIGH (cf. p. 87). En d'autres termes, dans le cas du Laplacien tridimensionnel on peut déduire de l'inégalité de plongement de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , une inégalité dans  $\partial_s \Omega$  liée au Laplacien bidimensionnel. Dans le cas de l'Elasticité il n'est pas simple d'obtenir à partir de l'inégalité de plongement de  $E(\Omega)^3$  dans  $(L^2(\Omega))^3$ , une inégalité dans  $\partial_s \Omega$ .

Cette difficulté surmontée, nous pensons que les résultats devraient être de même nature que pour le Laplacien. Pour un domaine donné, il est même probable que la présence des coefficients élastiques devraient entraîner un renforcement de la "convergence" des solutions lorsqu'on s'éloigne des régions chargées.

Signalons pour finir que le point de vue suggéré au § 2-7 dans le cas du Laplacien, trouve son équivalent ici en introduisant l'opérateur de NEUMANN de l'Elasticité. La solution s'écrirait alors sous la forme d'un développement du type (68). Celui-ci constituerait, nous semble-t-il, une traduction conforme à l'esprit du Principe de SAINT-VENANT d'une des idées de J. BOUSSINESQ : écrire toute solution sous la forme d'un développement dont le premier terme met en évidence le torseur du système de charges.

§4 - CONCLUSION

Ce n'est pas diminuer les mérites de son inventeur que de reconnaître au Principe de SAINT-VENANT, non le rang de Principe, mais celui d'une hypothèse admirablement adaptée à certains cas et défailante dans d'autres. Cette hypothèse accorde une importance particulière aux torseurs des systèmes de charges appliquées localement, c'est à dire implicitement aux déplacements d'ensemble des régions chargées. En termes simples, on peut dire que le Principe de SAINT-VENANT est bien vérifié si, quelle que soit la répartition des charges, le déplacement relatif des régions chargées est essentiellement un déplacement de solide. Il nous paraît clair que ce ne peut être toujours le cas, et la mise en évidence d'un rôle privilégié joué par le torseur, ne doit pas être possible en général. Les travaux de J. BOUSSINESQ, R. VON MISES et E. STERNBERG en sont une illustration.

Un aspect fondamental de l'étude du Principe de SAINT-VENANT nous paraît plutôt résider dans la détermination de critères précisant dans quelle mesure le déplacement relatif des régions chargées est assimilable à un déplacement de solide, quelle que soit la répartition des charges. Sous cet angle il est très clair que l'étude du Principe de SAINT-VENANT ne relève pas de la seule théorie de l'Elasticité. Plus généralement encore, on rencontre le même concept lorsqu'il suffit de considérer une grandeur globale, par exemple la quantité de chaleur, plutôt que la grandeur locale associée, la densité de flux de chaleur. La "dualité" entre torseur et déplacement de solide se retrouve dans cet exemple sous la forme de la "dualité" entre quantité de chaleur et répartition uniforme de température.

Dans ce travail nous nous sommes placé initialement dans le cadre mécanique et mathématique du "Problème de SAINT-VENANT pour les corps de forme quelconque". C'est un cadre déjà vaste. Le torseur du système de charges intervient a priori dans la définition. Les déplacements d'ensemble des régions chargées apparaissent alors comme caractéristiques de la solution d'énergie de déformation minimum. L'énergie de défor-

mation associée à cette solution est une fonctionnelle linéaire du torseur des charges appliquées. Ces résultats suggèrent de prendre la solution d'énergie minimum comme solution de référence. Il s'agit ensuite de définir en quel sens et sous quelles conditions, elle représente le terme principal de toute autre solution. La linéarité du problème permet de dire que le terme de perturbation correspond aux systèmes de charges de torseur nul.

Malheureusement, même dans le cas typique des domaines cylindriques, la mise en oeuvre d'un schéma précis se heurte à de nombreuses difficultés techniques provenant de la complexité de l'opérateur de l'Elasticité. Le schéma que nous avons proposé évite pourtant l'écueil des singularités locales au contour et se fonde sur des critères très simples. Le premier est original : s'il est légitime de caractériser pour l'essentiel un système de charges par son torseur, alors l'énergie de déformation associée à tout système de torseur donné, doit être voisine de l'énergie de déformation minimum correspondante. Sans hypothèses supplémentaires, la dernière proposition ne peut être vraie. Celles que nous avons introduites veulent traduire les limitations imposées aux charges par l'apparition de la plastification, puis de la rupture du matériau. Le deuxième critère est issu des travaux de GOODIER et de TROUPIN : si la répartition des contraintes tend à se rapprocher d'une répartition type en "presque tout" point lorsqu'on s'éloigne des régions chargées, alors l'énergie de déformation associée à tout système de charges de torseur nul, est principalement localisée au voisinage des régions chargées.

La transposition mathématique du "Problème de SAINT-VENANT" et du schéma d'étude du Principe au cas du Laplacien, permet de disposer d'un modèle simplifié. Les résultats obtenus nous semblent de bon augure pour le cas de l'Elasticité. Ils vont dans le sens d'une justification nuancée d'un "Principe de SAINT-VENANT" en électrostatique, en chaleur stationnaire ou pour l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible en milieux poreux.

mation associée à cette solution est une fonctionnelle ~~linéaire~~ du torseur des charges appliquées. Ces résultats suggèrent de prendre la solution d'énergie minimum comme solution de référence. Il s'agit ensuite de définir en quel sens et sous quelles conditions, elle représente le terme principal de tout autre solution. La linéarité du problème permet de dire que le terme de perturbation correspond aux systèmes de charges de torseur nul.

Malheureusement, même dans le cas typique des domaines cylindriques, la mise en oeuvre d'un schéma précis se heurte à de nombreuses difficultés techniques provenant de la complexité de l'opérateur de l'Elasticité. Le schéma que nous avons proposé évite pourtant l'écueil des singularités locales au contour et se fonde sur des critères très simples. Le premier est original : s'il est légitime de caractériser pour l'essentiel un système de charges par son torseur, alors l'énergie de déformation associée à tout système de torseur donné, doit être voisine de l'énergie de déformation minimum correspondante. Sans hypothèses supplémentaires, la dernière proposition ne peut être vraie. Celles que nous avons introduites veulent traduire les limitations imposées aux charges par l'apparition de la plastification, puis de la rupture du matériau. Le deuxième critère est issu des travaux de GOODIER et de TOUPIN : si la répartition des contraintes tend à se rapprocher d'une répartition type en "presque tout" point lorsqu'on s'éloigne des régions chargées, alors l'énergie de déformation associée à tout système de charges de torseur nul, est principalement localisée au voisinage des régions chargées.

La transposition mathématique du "Problème de SAINT-VENANT" et du schéma d'étude du Principe au cas du Laplacien, permet de disposer d'un modèle simplifié. Les résultats obtenus nous semblent de bon augure pour le cas de l'Elasticité. Ils vont dans le sens d'une justification nuancée d'un "Principe de SAINT-VENANT" en électrostatique, en chaleur stationnaire ou pour l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible en milieux poreux.

## ANNEXE

UN EXEMPLE DE MISE EN DEFAUT FORMELLE DU  
PRINCIPE DE SAINT-VENANT, TRANSPOSE A L'ELASTICITE  
PLANE, PAR UN PHENOMENE DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES

L'existence de "concentration de contraintes" au voisinage d'entailles, fissures ou plus simplement de zones à forte courbure à la surface d'un corps, est bien connue et a suscité de nombreuses études expérimentales et théoriques. Vis à vis du Principe de SAINT-VENANT, divers auteurs ont signalé l'écueil représenté par ce phénomène. Toutefois il n'existe pas, à notre connaissance, de mise en évidence théorique d'une non vérification du Principe par apparition de concentration de contraintes. Nous n'abordons pas ici cette question sous un aspect général, ni même sur des cas particuliers d'Elasticité tridimensionnelle. Nous nous contentons de construire un exemple en Elasticité plane, pour lequel est formellement mis en défaut le Principe de SAINT-VENANT transposé (avec les réserves signalées au § 5.2 - chapitre I - partie II).

### 1 - Rappels

En Elasticité plane, l'équivalent du IIe problème fondamental consiste en la détermination de la fonction de contrainte biharmonique  $\phi(x,y)$ , définie dans un domaine  $\bar{\Omega}$  de  $R^2$  rapporté à des axes orthonormés, lorsque la charge sur la frontière  $\partial\Omega$  est donnée; c'est à dire lorsque le gradient de  $\phi(x,y)$ , de composantes  $\xi(s)$ ,  $\eta(s)$ , est donné sur  $\partial\Omega$  (cf J. HADAMARD (51)).  $s$  représente l'abscisse curviligne sur  $\partial\Omega$ .

Si  $f(s)$  et  $g(s)$  sont les composantes du système de charges au point d'abscisse curviligne  $s$ , alors :

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{d}{ds} \eta(s) = f(s)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{d}{ds} \xi(s) = -g(s)$$

Les conditions d'équilibre s'écrivent aisément, ainsi que tenseur des contraintes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

Le domaine  $\bar{\Omega}$  étant borné ou non, et la frontière  $\partial\Omega$  constituée d'un nombre fini de contours simples  $\partial_i \Omega$  orientés de façon convenable, le problème posé se ramène (cf G. KOLOSSOV (52) et N. MUSKHELISHVILI (53)) à la détermination de 2 fonctions  $u(z)$  et  $v(z)$  holomorphes dans  $\Omega$  telles que :

$$\phi(x,y) = \Re \{ u(z) \bar{z} + v(z) \}$$

$$u(0) = 0$$

$$v(0) = 0$$

et vérifiant sur la frontière  $\partial\Omega$  l'équation fonctionnelle :

$$\overline{u(z)} + \bar{z} \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dz} = \xi(s) - i \eta(s) = \zeta(s) \quad (1)$$

Les conditions d'équilibre sont alors équivalentes aux conditions

1 -  $\zeta(s)$  est une fonction uniforme du point courant de  $\partial\Omega$

$$2 - \Re \left\{ \int_{\partial\Omega} \zeta(z) dz \right\} = 0$$

En particulier si  $\partial\Omega$  est analytique (Resp. constitué de  $n$  contours analytiques simples  $\partial_i \Omega$ ), la condition 1 est vérifiée si  $\zeta(s)$  est la trace d'une fonction  $\zeta(z)$  uniforme et holomorphe dans un voisinage de  $\partial\Omega$  (Resp.  $\zeta(s)$  est la trace sur chaque  $\partial_i \Omega$  d'une fonction  $\zeta_i(z)$  uniforme et holomorphe dans un voisinage de  $\partial_i \Omega$ ).

Les conditions d'équilibre s'écrivent aisément, ainsi que tenseur des contraintes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \end{pmatrix}$$

Le domaine  $\bar{\Omega}$  étant borné ou non, et la frontière  $\partial\Omega$  constituée d'un nombre fini de contours simples  $\partial_i\Omega$  orientés de façon convenable, le problème posé se ramène (cf G. KOLOSSOV (52) et N. MUSKHELISHVILI (53)) à la détermination de 2 fonctions  $u(z)$  et  $v(z)$  holomorphes dans  $\Omega$  telles que :

$$\phi(x,y) = \Re (u(z) \bar{z} + v(z))$$

$$u(0) = 0$$

$$v(0) = 0$$

et vérifiant sur la frontière  $\partial\Omega$  l'équation fonctionnelle :

$$\overline{u(z)} + \bar{z} \frac{du}{dz} + \frac{dv}{dz} = \xi(s) - i \eta(s) = \zeta(s) \quad (1)$$

Les conditions d'équilibre sont alors équivalentes aux conditions

1 -  $\zeta(s)$  est une fonction uniforme du point courant de  $\partial\Omega$

$$2 - \Re \left[ \int_{\partial\Omega} \zeta(z) dz \right] = 0$$

En particulier si  $\partial\Omega$  est analytique (Resp. constitué de  $n$  contours analytiques simples  $\partial_i\Omega$ ), la condition 1 est vérifiée si  $\zeta(s)$  est la trace d'une fonction  $\zeta(z)$  uniforme et holomorphe dans un voisinage de  $\partial\Omega$  (Resp.  $\zeta(s)$  est la trace sur chaque  $\partial_i\Omega$  d'une fonction  $\zeta_i(z)$  uniforme et holomorphe dans un voisinage de  $\partial_i\Omega$ ).

Le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\left( \begin{array}{cc} \mathcal{R}(2u' - u''\bar{z} - v'') & \mathcal{I}(u''\bar{z} + v'') \\ \mathcal{I}(u''\bar{z} + v'') & \mathcal{R}(2u' + u''\bar{z} + v'') \end{array} \right)$$

Pour l'étude de ces questions nous renvoyons à (53) et, lorsque  $\partial\Omega$  est analytique, aux travaux de C. MATHURIN (54) (55) (56). Voir aussi l'exposé proposé dans L. SOLOMON (5) chapitre 6.

Si le domaine  $\bar{\Omega}$  est simplement connexe, la représentation de  $\bar{\Omega}$  sur le disque unité peut souvent être utilisée avec profit. Si  $\bar{\Omega}$  est doublement connexe il peut être avantageux de représenter conformément le domaine sur une couronne circulaire.

## 2 - Orientations

1 - Il s'agit, étant donné un système de charges statiquement équivalent à zéro, appliqué sur une "petite" portion  $\partial_0\Omega$  de  $\partial\Omega$ , d'étudier les contraintes en un point du contour "éloigné" de  $\partial_0\Omega$ , lorsque la courbure est "grande" en ce point.

2 - Supposons  $\bar{\Omega}$  simplement connexe.  $\partial\Omega$  étant prise analytique, l'équation fonctionnelle (1) et les conditions au contour sont plus aisément satisfaites si  $\zeta(s)$  est la trace sur  $\partial\Omega$  d'une fonction  $\zeta(z)$  holomorphe et uniforme au voisinage de  $\partial\Omega$ . Mais il n'est pas possible de construire une fonction holomorphe, nulle sur  $\partial\Omega$  sauf sur une portion  $\partial_0\Omega$ . Par contre si  $\bar{\Omega}$  est un domaine doublement connexe borné, dont le contour intérieur  $\partial_0\Omega$  est "petit" vis à vis du contour extérieur  $\partial_1\Omega$ ,  $\zeta(s)$  peut être prise nulle sur  $\partial_1\Omega$  et être la trace sur  $\partial_0\Omega$  d'une fonction holomorphe et uniforme au voisinage de  $\partial_0\Omega$ .

3 - La construction des diverses fonctions intervenant dans l'équation fonctionnelle (1) se simplifie, si  $\bar{\Omega}$  est représentable sur une couronne circulaire, par l'intermédiaire d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle.

3 - Un exemple3-1 - Le domaine

On considère dans le plan des  $z$  le domaine  $\bar{\Omega}$  compris entre les deux limaçons de Pascal  $L_0$  et  $L_1$  d'équations paramétriques :

$$L_0 \begin{cases} x = \frac{1}{n} \cos \theta + \frac{m}{n^2} \cos 2\theta \\ y = \frac{1}{n} \sin \theta + \frac{m}{n^2} \sin 2\theta \end{cases}$$

$$L_1 \begin{cases} x = \cos \theta + m \cos 2\theta \\ y = \sin \theta + m \sin 2\theta \end{cases}$$

$\bar{\Omega}$  peut être obtenu à partir de la couronne circulaire  $\bar{D}$ , délimitée

dans le plan des  $Z$  par les cercles  $C_0$  et  $C_1$ , centrés à l'origine, de rayon respectif  $R_0 = \frac{1}{n}$   $R_1 = 1$ , par la transformation conforme :

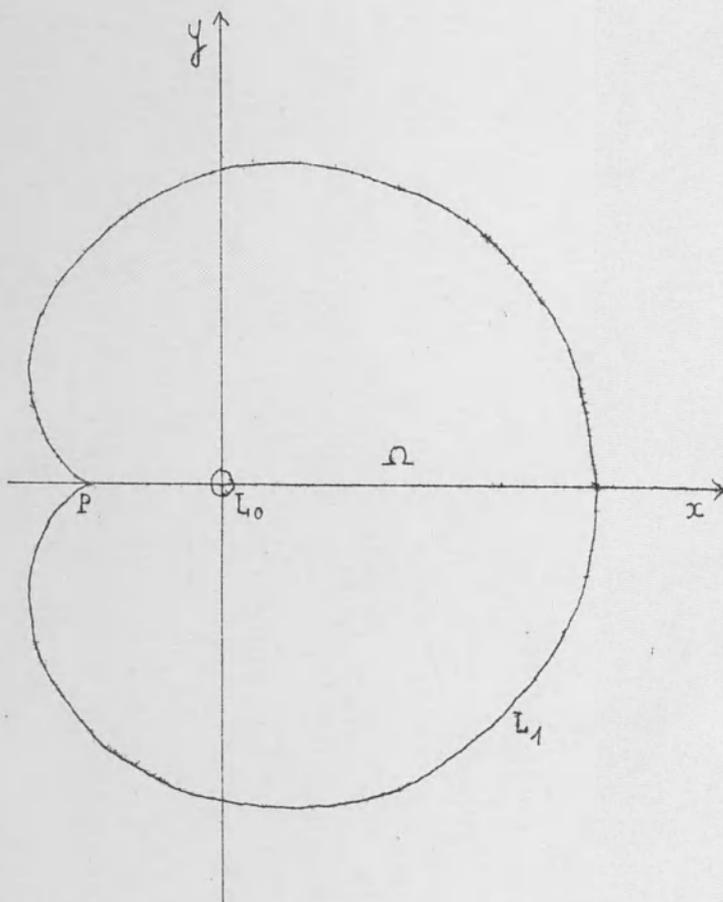
$$z = Z + m Z^2$$

$$\text{avec : } 0 < m < \frac{1}{2}$$

Lorsque  $m$  tend vers  $\frac{1}{2}$ , le limaçon  $L_1$  "tend" vers la cardioïde d'équations :

$$\begin{cases} x = \cos \theta + \frac{\cos 2\theta}{2} \\ y = \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \end{cases}$$

et dont le point de rebroussement a pour affixe  $z = -\frac{1}{2}$ .



Lorsque  $m$  est voisin de  $1/2$ , le limaçon  $L_1$  présente une forte courbure au point situé sur l'axe des  $x$  pour  $\theta = \pi$ .

Lorsque  $n$  croît,  $L_0$  décroît et sa forme devient quasi circulaire.

### 3-2 - Système de charges - Equation fonctionnelle

Le domaine  $\bar{\Omega}$  est représenté conformément sur  $\bar{D}$  par la transformation

$$Z = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4mz}}{2m}$$

La détermination du radical étant celle qui, dans le plan des  $z$  coupé le long de la demi droite  $]-\infty, -\frac{1}{4m}]$ , est réelle positive pour  $z$  réel supérieur à  $-\frac{1}{4m}$ .

La condition (1) se traduit alors, les charges étant supposées nulles sur  $L_1$  :

$$\bar{u}(\bar{Z}) + \frac{\bar{Z} + m\bar{Z}^2}{1 + 2m\bar{Z}} \frac{du}{d\bar{Z}}(Z) + \frac{dv}{dz}(Z) = 0 \quad \text{sur } C_1 \quad (1')$$

$$\bar{u}(\bar{Z}) + \frac{\bar{Z} + m\bar{Z}^2}{1 + 2m\bar{Z}} \frac{du}{d\bar{Z}}(Z) + \frac{dv}{dz}(Z) = \zeta_0(Z+mZ^2) \equiv \lambda_0(Z) \quad \text{sur } C_0$$

avec  $\lambda_0(Z)$  donné, holomorphe et uniforme dans un voisinage de  $C_0$  avec :

$$\Re \left[ \int_{C_0} \lambda_0(Z)(1 + 2mZ) dZ \right] = 0$$

On vérifie immédiatement que les fonctions

$$u(Z) = Z^2 - \frac{1}{Z^2}$$

$$\frac{dv}{dz}(Z) = Z^2 - \frac{1}{Z^2} - \frac{Z+m}{Z^2(1+2mZ)} \left( 2Z + \frac{2}{Z^3} \right)$$

sont holomorphes dans  $\bar{D}$ , satisfont (1') avec :

$$\lambda_0(Z) = Z^2 - \frac{1}{Z^2} - \frac{Z+m}{Z^2(1+2mZ)} \left(2Z + \frac{2}{Z}\right) + \frac{1}{n^4 Z^2} - n^4 Z^2 + \frac{n^2 Z + m}{n^4 Z^2(1+2mZ)} \left(2Z + \frac{2}{Z}\right)$$

car  $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$  sur  $C_1$  et  $\bar{Z} = \frac{1}{n^2 Z}$  sur  $C_0$ .

Remarquons que  $\lambda_0(Z)$  est holomorphe au voisinage de  $C_0$  avec  $\mathcal{R} \left[ \int_C \lambda_0(Z)(1+2mZ)dZ \right] = 0$ , les pôles de la fonction  $\lambda_0(Z)(1+2mZ)$  étant ou multiples ou de la forme  $\frac{A}{Z}$ , avec A réel.  $\lambda_0(Z)$  correspond bien à un système de charges statiquement équivalent à zéro, appliqué sur  $L_0$ .

### 3-3 - Mise en défaut formelle du Principe de SAINT-VENANT

Soit n suffisamment grand par exemple  $n = 20$ . Si m est proche de  $\frac{1}{2}$  la courbure au point P de  $L_1$ , correspondant à  $\theta = \pi$ , est grande. Si R est le rayon de courbure en P :

$$\frac{1}{R} = \frac{4m - 1}{(2m - 1)^2}$$

La partie  $L_0$  du contour, soumis à un système de charges statiquement équivalent à zéro, est "petite" vis à vis du domaine  $\bar{\Omega}$  et le point P est "éloigné" de  $L_0$ . En effet sa distance à  $L_0$  est supérieure à 10 fois le diamètre de  $L_0$ .

Pourtant  $\sigma_y$  en P peut être rendu aussi grand que l'on veut, en choisissant m suffisamment proche de 1/2.

En effet, en tout point de  $\bar{\Omega}$  :

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \mathcal{R} \left( \frac{du}{dz} \right)$$

Or en P,  $\sigma_x$  est nul, d'où :

$$\sigma_y(P) = 4 \mathcal{R} \left( \frac{du}{dz} (P) \right)$$

sont holomorphes dans  $\bar{D}$ , satisfont (1') avec :

$$\lambda_0(Z) = Z^2 - \frac{1}{Z^2} - \frac{Z+m}{Z^2(1+2mZ)} \left(2Z + \frac{2}{Z^3}\right) + \frac{1}{n^4 Z^2} - n^4 Z^2 + \frac{n^2 Z + m}{n^4 Z^2 (1 + 2mZ)} \left(2Z + \frac{2}{Z^3}\right)$$

car  $\bar{Z} = \frac{1}{Z}$  sur  $C_1$  et  $\bar{Z} = \frac{1}{n^2 Z}$  sur  $C_0$ .

Remarquons que  $\lambda_0(Z)$  est holomorphe au voisinage de  $C_0$  avec  $\Re \left( \int_{C_0} \lambda_0(Z)(1+2mZ)dZ \right) = 0$ , les pôles de la fonction  $\lambda_0(Z)(1+2mZ)$  étant ou multiples ou de la forme  $\frac{A}{Z}$ , avec A réel.  $\lambda_0(Z)$  correspond bien à un système de charges statiquement équivalent à zéro, appliqué sur  $L_0$ .

### 3-3 - Mise en défaut formelle du Principe de SAINT-VENANT

Soit n suffisamment grand par exemple  $n = 20$ . Si m est proche de  $\frac{1}{2}$  la courbure au point P de  $L_1$ , correspondant à  $\theta = \pi$ , est grande. Si R est le rayon de courbure en P :

$$\frac{1}{R} = \frac{4m - 1}{(2m - 1)^2}$$

La partie  $L_0$  du contour, soumis à un système de charges statiquement équivalent à zéro, est "petite" vis à vis du domaine  $\bar{\Omega}$  et le point P est "éloigné" de  $L_0$ . En effet sa distance à  $L_0$  est supérieure à 10 fois le diamètre de  $L_0$ .

Pourtant  $\sigma_y$  en P peut être rendu aussi grand que l'on veut, en choisissant m suffisamment proche de 1/2.

En effet, en tout point de  $\bar{\Omega}$  :

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \Re \left( \frac{du}{dz} \right)$$

Or en P,  $\sigma_x$  est nul, d'où :

$$\sigma_y(P) = 4 \Re \left( \frac{du}{dz} (P) \right)$$

mais :

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dZ} \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{1 + 2mZ} \left( 2Z + \frac{2}{Z^3} \right)$$

et en faisant  $Z = -1$  :

$$\sigma_y(P) = \frac{16}{1 - 2m}$$

Le module des charges sur  $L_0$  ne croît pas pour autant indéfiniment.

Vérifions-le, seulement, en considérant  $|\sigma_x + \sigma_y|$  sur  $L_0$  :

$$|\sigma_x + \sigma_y| = 4 \left| \Re \left( \frac{du}{dz} \right) \right| \leq 4 \left| \frac{du}{dz} \right|$$

mais :

$$\left| \frac{du}{dz} \right| = \frac{2 |Z^4 + 2|}{|Z^3| |1 + 2mZ|} \leq 2 \frac{\max(|Z|^4 + 1)}{|Z|^3 \min(|1 + 2mZ|)}$$

Sur  $L_0$ ,  $Z = \frac{e^{i\theta}}{n}$  et par suite :

$$\left| \frac{du}{dz} \right| \leq \frac{n^4 + 1}{n - 2m}$$

avec  $0 < m < 1/2$   $n > 2$

D'où  $|\sigma_x + \sigma_y| \leq \frac{n^4 + 1}{n - 2m}$

Le majorant étant d'ailleurs atteint pour  $\theta = \pi$ . Il est clair que  $|\sigma_x + \sigma_y|$  reste borné lorsque  $m$  tend vers  $1/2$  avec  $n$  quelconque, supérieur à 2.

mais :

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dZ} \frac{dZ}{dz} = \frac{1}{1 + 2mZ} \left( 2Z + \frac{2}{Z^3} \right)$$

et en faisant  $Z = -1$  :

$$\sigma_y(P) = \frac{16}{1 - 2m}$$

Le module des charges sur  $L_0$  ne croît pas pour autant indéfiniment.

Vérifions-le, seulement, en considérant  $|\sigma_x + \sigma_y|$  sur  $L_0$  :

$$|\sigma_x + \sigma_y| = 4 \left| \Re \left( \frac{du}{dz} \right) \right| \leq 4 \left| \frac{du}{dz} \right|$$

mais :

$$\left| \frac{du}{dz} \right| = \frac{2 |Z^4 + 2|}{|Z^3| |1 + 2mZ|} \leq 2 \frac{\max(|Z|^4 + 1)}{|Z|^3 \min(|1 + 2mZ|)}$$

Sur  $L_0$ ,  $Z = \frac{e^{i\theta}}{n}$  et par suite :

$$\left| \frac{du}{dz} \right| \leq \frac{n^4 + 1}{n - 2m}$$

avec  $0 < m < 1/2$   $n > 2$

D'où  $|\sigma_x + \sigma_y| \leq \frac{n^4 + 1}{n - 2m}$

Le majorant étant d'ailleurs atteint pour  $\theta = \pi$ . Il est clair que  $|\sigma_x + \sigma_y|$  reste borné lorsque  $m$  tend vers  $1/2$  avec  $n$  quelconque, supérieur à 2.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- (1) SAINT-VENANT, A.-J.-C.B.De, De la torsion des prismes - Mémoire des Savants étrangers 14, (1855)
- (2) SAINT-VENANT, A.-J.-C.B.De, Mémoire sur la flexion des prismes - Journal de Mathématiques pures et appliquées - tome I - Ser. 2 89 (1856)
- (3) BOUSSINESQ, J., Applications des potentiels - Paris : Gauthier-Villars (1865)
- (4) TOUPIN, R.A., Saint-Venant's principle - Archive for Rational Mechanics and Analysis 18, 2, 83 (1965)
- (5) SOLOMON, L., Elasticité linéaire, p. 140-301 - Masson - Paris (1968)
- (6) CLEBSCH, A., Theorie der Elasticität fester Körper - Leipzig : B.G. Teubner (1862)
- (7) VOIGT, W., Theoretische studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle - Göttinger Abhandlungen 34, 53 (1887)
- (8) TRUESDELL, C., The rational mechanics of materials - past, present, future - Applied Mechanics Reviews 12, 2, 75 (1959)
- (9) STERNBERG, E., KNOWLES, J.K., Minimum energy characterisations of Saint-Venant's solution to the relaxed Saint-Venant problem - Archive for Rational Mechanics and Analysis, 21, 2, (1966)
- (10) BOLEY, B.A., Some observations on Saint-Venant's principle - Proc. 3 rd U.S. Nation. Congr. Appl. Mechanics (1958) 259-263
- (11) BEZIER, P., Sur les charges concentrées et sur quelques problèmes de l'Elastostatique linéaire - Thèse - Poitiers novembre 1969
- (12) HOFF, N.J., The applicability of Saint-Venant's Principle to Airplane structures - Journal of the Aeronautical Sciences, 10, 1945, 455-460
- (13) MAGENES, E., STAMPACCHIA, G., I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico - Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 12 (1958) 247-357
- (14) LIONS, J.L., MAGENES, E., Problèmes aux limites non homogènes et applications - volume 1 - Dunod Paris - 1968

- (15) GAGLIARDO, E., Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili - Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova - Vol. 28, p. 284
- (16) CAMPANATO, S., Sui problemi al contorno per sistemi di equazioni differenziali del tipo de l'elasticità - I et II, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 12 (1959) 223-258 et 275-302
- (17) LIONS, J.L., Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites - Springer Verlag 1961 p. 29
- (18) NECAS, J., Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques - Masson 1967
- (19) GERMAIN, P., Mécanique des milieux continus - Masson 1962
- (20) FRIEDRICHS, K.O., On the boundary value problems of the theory of elasticity and korn's inequality - Ann. of Mathem. - Serie III - volume 48 - 1947 - p. 441-471
- (21) FICHERA, G., Sull' esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all' equilibrio di un corpo elastico - Ann. Norm. Sup. Pisa - Serie III - vol. IV - fasc. I - II (1950)
- (22) BATCHELOR, G.K., An introduction to fluid dynamics - Cambridge - 1967
- (23) GYARMATI, I., Non equilibrium thermodynamics, field theory and variational principles - Springer Verlag - 1970
- (24) GRISVARD, P., Cours Peccot, Collège de France, Paris (1968)
- (25) SMAMIR, E., Regularisation of mixed second order elliptic problems Israël Jour. of Mathem. - vol. 6, n° 2 - avril 1968
- (26) MOREAU, J.J., La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en Elastostatique - 12e Congrès de l'I.U.T.A.M.
- (27) MOREAU, J.J., Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, C.R. Acad. Sc. Paris - t. 271 28-9-70
- (28) NAYROLES, B., Essai de théorie fonctionnelle des structures rigides plastiques parfaites - A paraître au J. de Mécanique 1970
- (29) NAYROLES, B., Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la Mécanique des Solides - A paraître au J. de Mécanique
- (30) CLEBSCH (traduction de BARRE DE SAINT-VENANT et FLAMANT avec Notes de DE SAINT-VENANT), Théorie de l'Elasticité des corps solides, Paris, 1883

- (31) LOVE, A treatise on the mathematical theory of Elasticity, Dover Publications - New-York, 1944
- (32) VON MISES, R., On SAINT-VENANT Principle - Bull. Amer. Math. Soc. n° 51, 1945, p. 555-62
- (33) STERNBERG, E., On SAINT-VENANT'S Principle, J. of Applied Math. 1954 - vol. XI - n° 4 p. 393-402
- (34) ERIM, K., Sur le principe de SAINT-VENANT, Proc. Seventh. Int. Cong. for Appl. Mech., London, 1948
- (35) KELLER, H.B., SAINT-VENANT'S procedure and SAINT-VENANT'S principle - Quart. Appl. Math. Vol. XXII n° 4 pp. 293-304 - 1965
- (36) NAGHDI, P.M., On SAINT-VENANT'S Principle : elastic shells and plates - J. of appl. Mech. Serie E n° 3 - sept. 1960 p. 417-422
- (37) STERNBERG, E., AL KHOZAIE, S., On green's function and SAINT-VENANT'S Principle in the linear theory of viscoelasticity - Arch. Rat. Mech. Analys. - 15.2.1964
- (38) SOUTHWELL, R.V., On Castigliano's theorem of least work and the principle of SAINT-VENANT - Phil. Mag. S. 6 - vol. 45 - n° 265 Jan. 1923
- (39) GOODIER, J.N., A general proof of SAINT-VENANT'S principle - Phil. Mag. (7) 23 - 607 (1937)
- (40) GOODIER, J.N., Supplementary note on "A general proof of SAINT-VENANT'S principle" - Phil. Mag. (7) 24, 325 (1937)
- (41) GOODIER, J.N., An extension of SAINT-VENANT'S principle with applications - J. Appl. Phys. 13, 167 (1942)
- (42) ZANABONI, O., Dimostrazione generale del principio del de SAINT-VENANT - Atti. Acc. Naz. Lincei 25, 117-121 (1937)
- (43) ZANABONI, O., Valutazione dell'errore massimo cui da luogo l'applicazione del principio del de SAINT-VENANT - Atti. Acc. Naz. Lincei 25, 595-601 (1937)
- (44) DIAZ et PAYNE, Mean value theorems in the theory of Elasticity Proceedings of the third U.S. Nat. Congress of Applied Mech. U.S.A. (1958) p. 293-303
- (45) KNOWLES, J.K., On SAINT-VENANT'S principle in the two dimensional linear theory of elasticity - Arch. Rat. Mech. Anal. - vol. 21, n° 1, 1-22 (1966)

- (46) KNOWLES, J.K., et STERNBERG, E., On SAINT-VENANT'S Principle and the torsion of solids of revolution - Arch. Rat. Mech. Anal. vol.22, n° 2, 100-120, (1966)
- (47) MICHELL, J.H., The uniform torsion and flexure of incomplete tores, with application to helical springs  
Proceedings of the London Math. Soc. 31, 130 (1899)
- (48) DOU, A., On the Principle of SAINT-VENANT. M.R.C. Tech. Sum. Rep. U.S. Army - Math. Res. Cent. Un. of Wisconsin (1964)
- (49) LAGARDE, A., Statique et dynamique des milieux curvilignes - Cours 3e cycle - Université de Poitiers 1969-70
- (50) COURANT, R., HILBERT, D., Methods of mathematical Physics - Tomes I et II - Interscience Publishers, New-York - Londres, 1953-1955
- (51) HADAMARD, J., Mémoire sur le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées - Mem. Acad. Sc., Savants Etrangers, t. 33, 1908
- (52) KOLOSSOV, G., Sur les problèmes d'Elasticité à deux dimensions C.R. Acad. Sci. 146 (1908) et 148 (1909)
- (53) MUSKHELISHVILI, N.I., Some basic problems of the mathematical theory of Elasticity  
2e Edit. Anglaise trad. J.R. RADOK - NOORDHOFF - 1963
- (54) MATHURIN, C., Fonction caractéristique d'un contour algébrique simple - Application à l'équation  $\Delta(\Delta\phi) = 0$  de l'Elastostatique plane  
Publ. Sci. et Techn. Min. Air - n° 105 - 1962
- (55) MATHURIN, C., Application de l'algèbre et de l'analyse linéaires à la statique des plaques élastiques  
J. de Mécanique - vol. I, n° 3 - sept. 1962
- (56) MATHURIN, C., (1) Sur la résolution, en variable complexe, des deux problèmes fondamentaux de l'Elastostatique plane  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261 (15 nov. 1965) gr. 2  
(2) Sur la résolution, en Elastostatique plane, du problème des charges concentrées en un nombre fini de points du contour frontière  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261 (22 nov. 1965) gr. 2
- (57) MIRANDA, C., Equazioni alle derivate parziali di Tipo ellittico  
Springer-Verlag, 1965

- (46) KNOWLES, J.K., et STERNBERG, E., On SAINT-VENANT'S Principle and the torsion of solids of revolution - Arch. Rat. Mech. Anal. vol.22, n° 2, 100-120, (1966)
- (47) MICHELL, J.H., The uniform torsion and flexure of incomplete tores, with application to helical springs  
Proceedings of the London Math. Soc. 31, 130 (1899)
- (48) DOU, A., On the Principle of SAINT-VENANT. M.R.C. Tech. Sum. Rep. U.S. Army - Math. Res. Cent. Un. of Wisconsin (1964)
- (49) LAGARDE, A., Statique et dynamique des milieux curvilignes - Cours 3e cycle - Université de Poitiers 1969-70
- (50) COURANT, R., HILBERT, D., Methods of mathematical Physics - Tomes I et II - Interscience Publishers, New-York - Londre, 1953-1955
- (51) HADAMARD, J., Mémoire sur le problème d'Analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées - Mem. Acad. Sc., Savants Etrangers, t. 33, 1908
- (52) KOLOSSOV, G., Sur les problèmes d'Elasticité à deux dimensions C.R. Acad. Sci. 146 (1908) et 148 (1909)
- (53) MUSKHELISHVILI, N.I., Some basic problems of the mathematical theory of Elasticity  
2e Edit. Anglaise trad. J.R. RADOK - NOORDHOFF - 1963
- (54) MATHURIN, C., Fonction caractéristique d'un contour algébrique simple - Application à l'équation  $\Delta(\Delta\phi) = 0$  de l'Elastostatique plane  
Publ. Sci. et Techn. Min. Air - n° 105 - 1962
- (55) MATHURIN, C., Application de l'algèbre et de l'analyse linéaires à la statique des plaques élastiques  
J. de Mécanique - vol. I, n° 3 - sept. 1962
- (56) MATHURIN, C., (1) Sur la résolution, en variable complexe, des deux problèmes fondamentaux de l'Elastostatique plane  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261 (15 nov. 1965) gr. 2  
(2) Sur la résolution, en Elastostatique plane, du problème des charges concentrées en un nombre fini de points du contour frontière  
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 261 (22 nov. 1965) gr. 2
- (57) MIRANDA, C., Equazioni alle derivate parziali di Tipo ellittico  
Springer-Verlag, 1965

BIBLIOGRAPHIE COMPLEMENTAIRE (1)

Principe de SAINT-VENANT en Elasticité linéaire homogène et isotrope

- (58) ADLER, G., Majoration des tensions dans un corps élastique à l'aide des déplacements superficiels  
Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 16 - n° 5 - 1964 p. 354-372
- (59) BIEZENO, C.B., GRAMMEL, R., Engineering dynamics, vol. I, Blackie and Son, Ltd, London and Glasgow 1955, § 2-2 point 7.
- (60) BREINTENHUBER, L., Zum beweis des Saint-Venant'schen Prinzips in der Elastostatik - Phys. Verh. Dtsch. 1958 - 9 - n° 12-13 p. 258
- (61) COLOMBO, G., Maggiorazioni delle componenti di stress nel problema di de Saint-Venant  
Rend. Padova, 24, 1955
- \* (62) DEUTSCH, E., Sur le problème de BOUSSINESQ (en Roumain) Comunicà-rile Ac. R.R. 12, 10/1962
- \* (63) DJANELIDZE, G., Le principe de SAINT-VENANT (au centenaire) (en Russe)  
TROUDY Lening. Polit. In. ta. n° 192, 1958
- (64) DONNEL, L., About SAINT-VENANT principle - J. Appl. Mech. 29-4 (1962)
- (65) GOLDENWEISER, A.L., La théorie des voiles minces élastiques (en Russe) - Gostekhizdat - Moscou - 1953 § 6 - 11
- (66) HORVAY, G., (1) Biharmonic Eigenvalue problem of semi infinite strip - SAINT-VENANT'S principle - IX Intern. Cong. Appl. Mech. II Bruxelles - tome II p. 11  
(2) Some aspects of SAINT-VENANT principle - J. Mech. Phys. Solids, 5, 2/1957  
(3) SAINT-VENANT'S principle, a biharmonic eigenvalue problem  
J. Appl. Mech. 1957 - 24 n° 3, p. 381-386
- (67) KELVIN, LORD, TAIT, P.G., Traitrise on natural phylosophy-Cambridge 1903 - p. 728-729
- \* (68) KLEBOWSKI, Z., Sur le principe de SAINT-VENANT - Sa formulation correcte (En Polonais)  
Zeszyty Nauk. Politech. Warsz - 27 - 1957

(1) Figurent avec un astérisque les publications dont le contenu nous est inconnu.

- \* (69) LEVY, M., Mémoires sur la théorie des plaques élastiques planes  
J. Math. pures et appl. (3) - 3 - 1877
- (70) MATSCHINSKI, M., Beweis des SAINT-VENANT'S chen prinzipts  
Zeis. Ang. Math. Mech. 39 - sept. Nov. 1959 p. 418-419
- (71) ROSEMAN, J.J., (1) A result on SAINT-VENANT'S Principle  
Nat. Amer. Math. Soc. 1965 - 12 - n° 4 - p. 480  
(2) A pointwise estimate for the stress in a cylinder and its application to SAINT-VENANT'S principle  
Arch. Rat. Mech. Anal. 21-23 (1966) p. 23-48
- \* (72) SCHUMANN, W., Sur les différentes formes du Principe de SAINT-VENANT  
C.R. Acad. Sci. 238 - 1954
- (73) SUPINO, G., Sopra alcune limitazioni per le sollicitazione elastica e sopra la dimostrazione del principio del de SAINT-VENANT  
Annali di Matem. Serie IV - tome IX
- \* (74) VLASSOV, V.Z., La théorie générale des voiles minces (en Russe)  
Gostekhizdat, Moscou, 1949 - § 12-6
- (75) VOROBEV, H.T., GLAZOUNOVA, , A propos du Principe de SAINT-VENANT (en Russe)

Le Principe de SAINT-VENANT pour d'autres relations contraintes-déformations

- (76) EDELSTEIN, W.S., On SAINT-VENANT'S Principle in linear viscoelasticity  
Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 36 - p. 366-380 (1970)
- (77) LOCATELLI, P., Estensione del Principio di SAINT-VENANT a corpi non perfettamente elastici.  
Atti R. Ace. delle Sci. Torino 75, 502 (1940)
- \* (78) STERNBERG, E., On some recent developpement in the linear theory of elasticity (cas non isotrope)  
Structural Mechanics - Pergamon Press - 1960

Principe de SAINT-VENANT en dynamique

- (79) BOLEY, B., Application of SAINT-VENANT'S Principle to dynamic problem  
J. of Appl. Mech. 22 - 2 - p. 204-206 (1955)
- (80) FLYNN, P., FROCHT, M., (1) On SAINT-VENANT'S principle under dynamic conditions  
Exp. Mech. I-1 p. 16-20 (1961)  
(2) On SAINT-VENANT'S principle under dynamic conditions  
Exp. Mech. 7-9 - p. 119-120 (1961)

- \* (81) NOVOZILOV, V., SLEPIAN, L., Sur le principe de SAINT-VENANT dans la dynamique des barres (en Russe)  
Prikl. Math. Mekh. 29 - 2 - 1965

Applications de l'analyse fonctionnelle à l'Elasticité et à la Plasticité

- (82) DINKA, G., (1) Sur la monotonie d'après Minty-Browder de l'opérateur de la théorie de la Plasticité  
C.R. Acad. Sci. Paris, 269, Série A, 1969, p. 535  
(2) Réalisation numérique d'une méthode variationnelle pour la fonctionnelle de la théorie de la Plasticité  
C.R. Acad. Sci. Paris, 269, Série A, 1969, p. 1139
- (83) DUVAULT, G., Elasticité linéaire avec couples de contraintes - Théorèmes d'existence  
J. de Méca. vol. 9, n° 2, juin 1970
- (84) DUVAULT, G., LIONS, J.L., (1) Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posés par la Mécanique - Le cas stationnaire  
C.R. Acad. Sci. Paris, 269, Série A, 1969, p. 510  
(2) Le cas d'évolution  
C.R. Acad. Sci. Paris, 269, Série A, 1969, p. 570  
(3) Nouvelles inéquations rencontrées en Thermique et en Thermoélasticité  
C.R. Acad. Sci. Paris, 269, Série A, 1969, p. 1198
- (85) HLAVACEK, I., NECAS, J., On inequalities of korn's type  
Arch. Rat. Mech. An., vol. 36, 1970, p. 305-334
- (86) LANCHON, H., (1) Problème d'Elastoplasticité statique pour un matériau régi par la loi de Hencky  
C.R. Acad. Sci. Paris, 271, Série A, 1970, p. 888  
(2) Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section multiconnexe  
C.R. Acad. Sci. Paris, 271, Série A, 1970, p. 1137
- (87) LANCHON, H., DUVAULT, G., Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section quelconque  
C.R. Acad. Sci. Paris, 264, Série A, 1967, p. 520