REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : . . . . .
N° série : . . . . . .

MEMOIRE

Présentée pour l'obtention du diplôme de
Magister en Mathématiques

Thème
Sur une Classe de Problèmes aux Limites Singuliers

Option
Analyse Mathématique Appliquée

Par :
Mansouri Djamel

<u>Devant le jury :</u>

Président:	**Marhoune A. L.**	**Prof. Univ. Mentouri Constantine**
Rapporteur:	**Latrous C.**	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**
Examinateurs:	**Hebbeche A.**	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**
	Saidouni C.	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**
	Karrad M.	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**

Soutenu le . . . .

ملخص

صنف من المسائل ذات نـهاية شاذة

هذا العمل يتطرق إلى دراسة مسائل مختلطة شاذة مركزية من الدرجة n.تحت شروط حدية من نوع دريكلي و أخرى تكاملية ذات نـهاية حدية متغيرة .
نبرهن وجود ووحدانية الحل ، وللبرهان على ذالك فإننا نعتمد على تقديرات قبلية وعلى كثافة صورة المؤثر المولد للمسالة المطروحة.

Abstract

On a class singular boundary value problems

In the present work we study the singular mixed problem with n^{th} order singularity at origin, in which combine a dirichlet boundary condition with an integral conditon for one variable integration.

We establish existence and uniqueness of the solution.

The proofs are based on a priori estimates and the range density of operator generayed by the considered problem.

Résumé

Sur une Classe de Problèmes aux Limites Singuliers

Le présent travail est consacre à l'étude d'un problème mixte singulier avec singularité à l'origine d'ordre n, Combinant une condition aux limites Dirichlet avec une autre intégrale à borne variable.

On montre l'existence et l'unicité de la solution.

Les démonstrations sont basées sur des estimations à priori et sur la densité de l'ensemble image de l'opérateur engendré par le problème en question.

Table des matières

0.1 Introduction

Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique [4, 5, 16, 17], en thermoélasticité et en physique des plasmas peuvent être ramenés à des problèmes aux limites avec conditions integrales, de tels problèmes ont été étudiés dans [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9,16,17,18] pour les équations paraboliques, dans [21] pour les équations hyperboliques et dans [10,11] pour les équations du type mixte, la méthode utilisée dans [2, 3, 9, 10, 11, 18] est celle des inégalités énergetiques.

Le but de ce travail est l'extension de cette méthode aux problèmes singuliers. Différents problèmes aux limites pour équations aux dérivées partielles ont été étudiés par differentes methodes dans [3, 8, 11, 19, 20, 21, 22], la méthode des inégalités de l'énergie appeleé aussi méthode d'analyse fonctionnelle trouve son origine dans les travaux de I.G. petrovsky [20] utilisée dans la résoulution du problème de cauchy lié aux équations du type hyperbolique, par la suite des dévloppements impotants de la méthode sont dus à J. Leray [19] et L. Garding [14], la méthode a été également utilisée et developée dans les travaux de O.A. Ladyzenskaja [18], A.A. Dezin [12] K. Friedrichs [13] et N.Yurchuk [27], on peut egalement citer les travaux de F.Rebbani et V.I. Chesalyn [22, 23], le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A.A. Dezin [12] et qui peut être résumé comme suit:

Tout d'abord on écrit le problème posé (P) sous forme d'une équation opérationnelle

$$Lu = f, \qquad\qquad u \in D(L)$$

où l'opérateur L est considéré de l'espace de Banach E dans l'espace de Hilbert F convenablement choisis.

Après on établit les estimations a priori pour l'opérateur L et on montre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans F.

Si on convient d'appeler solution généralisée du problème (P) toute fonction vérifiant:

$$Lu = f.$$

Alors pour avoir l'existence de la solution généralisée il est nécessaire et suffisant qu'on établisse la densité de $R(L)$ dans F. L'unicité est assurée par l'inégalité de l'énergie.

Le présent travail est considéré comme le prolongement des résultats obtenus dans [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 16, 17] pour les équations paraboliques dans [10, 11] pour les équations du type mixte.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup des problémes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et développée dans un cadre abstrait élégant, mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons:

1. Le choix de l'espace des solutions.
2. Le choix de multiplicateur.
3. Le choix de l'opérateur de régularisation.

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée, chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

On commence dans ce chapitre par rappeler en bref certaines notions utiles par la suite.

1.1 Opérateurs abstraits de régularisation

Siot H un espase de Hilbert et A un opérateur defini de

$$D(A) \subset H \longrightarrow H$$

avec

$$\overline{D(A)} = H$$

Définition 1.1.1 *On dit que A est un opérateur dissipatif si*

$$\forall u \in D(A), \quad \mathrm{Re}\langle A(u), u\rangle_H \leq 0.$$

Définition 1.1.2 *On dit que A est un opérateur accretif si*

$$\forall u \in D(A), \quad \mathrm{Re}\langle A(u), u\rangle_H \geq 0.$$

Proposition 1.1.1 *Soit A un opérateur tel que*

$$D(A) \subset H \to H$$

avec

$$\overline{D(A)} = H.$$

Alors les proprietés suivantes sont equivlantes:

i) A est un opérateur dissipatif.

ii) $\|(A - \lambda I)u\| \geq \ \mathrm{Re}\,\lambda \,\|u\| \,.\forall u \in D(A), \forall \lambda \in C$ *tel que* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0.$

iii) $\|(A - \lambda I)\|\, u \geq \lambda \,\|u\| \,\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0.$

Théorème 1.1.1 *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.*

Corollaire 1.1.1 *Un opérateur dissipatif maximal est toujours fermé.*

Théorème 1.1.2 *Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ avec $\overline{D(A)} = H$ un opérateur disspatif, alors les proprietés suivantes sont équivalentes*

i) A est maximal dissipatif.

ii) $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = H$ *pour certains $\lambda \in C$ avec* $\mathrm{Re}\,\lambda > 0.$

iii) $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = H$ *pour tout λ telle que $\lambda > 0$.*

Proposition 1.1.2 *Soit* $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *avec* $\overline{D(A)} = H$ *un opérateur dissipatif, alors les proprietés suivantes sont équivalentes:*

i) A *est maximal dissipatif.*

ii) A *est fermé* $\{\lambda / \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ *et de plus on a:*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Théorème 1.1.3 *Soit* $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ *avec* $\overline{D(A)} = H$ *un opérateur dissipatif maximal alors:*

i) $A_\varepsilon^{-1} \in L(H)$.

ii) $\|A_\varepsilon^{-1}\| \leq 1$.

iii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon^{-1} = u$ *pour* $u \in H$. *ou:*$A_\varepsilon^{-1}u = (I - \varepsilon A)^{-1}u$, $\varepsilon > 0$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ alors$\{\varepsilon : \varepsilon > 0\} \subset \rho(A)$ donc $(A - \lambda I)$ est continûment inversible, d'où $(A - \lambda I)^{-1}$ existe, borné et définit sur H tout entier, puisque $\frac{1}{\varepsilon} \in \{\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ on déduit que

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} \in L(H)$$

mais

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I) = -\frac{1}{\varepsilon}(I - \varepsilon A)$$

d'où

$$(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1} = -\frac{1}{\varepsilon}(I - \varepsilon A)^{-1},$$

on pose $A_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon A)^{-1}$, on déduit que

$$A_\varepsilon^{-1} \in L(H)$$

et en utilisant le **théorème 1.1 2** on trouve que

$$\left\|(A - \frac{1}{\varepsilon}I)^{-1}\right\| \leq (\frac{1}{\varepsilon})^{-1} = \varepsilon$$

donc

$$\left\|A_\varepsilon^{-1}\right\| \leq 1$$

supposons tout d'abord $u \in D(A)$,d'où

$$\left\|A_\varepsilon^{-1}u - u\right\| = \left\|(I - \varepsilon A)^{-1}u - u\right\| = \left\|\varepsilon(I - \varepsilon A)^{-1}Au\right\| \leq \varepsilon \left\|Au\right\|,$$

d'où par passage à la limite, on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon^{-1} u = u$, pour $u \in D(L)$ et comme on a $\overline{D(A)} = H$, alors $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon^{-1} u = u$, pour tout $u \in H$. ■

Exemple 1.1.1 *Soit $A = \frac{\partial}{\partial t}$ où $D(A) = \{u \in L_2(\Omega)/u(0,t) = 0\}$ et $\Omega = (0,1) \times (0,T)$. Alors A est un opérateur accrétif.*

Preuve. $\langle Au, u \rangle = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \overline{u} dx dt = \int_0^1 u \overline{u}|_0^T dx - \int_\Omega u \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx dt$, donc $\langle Au, u \rangle + \overline{\langle Au, u \rangle} = \int_0^1 |u(x,T)|^2 dx - \int_0^1 |u(x,0)|^2 dx$, on a $u(x,0) = 0$, alors $2 \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle = \int_0^1 |u(x,T)|^2 dx$, d'où $\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq 0$. ■

$\varepsilon-$**inégalité** On applique dans tout de ce travail l'$\varepsilon-$inégalité suivante:

$$\operatorname{Re}(a,b) \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Lemme 1.1.1 (inégalité de Gronwall) *si $\alpha + y(t) \leq A + C \int_0^T y(s) ds$ et telle que $A \geq 0$, $\alpha \geq 0$*

alors

$$\alpha + y(t) \leq C_1 A \quad \text{où } C \text{ et } C_1 \text{ deux constantes.}$$

Chapitre 2

Etude de Quelques Problèmes Modéles

Ce chapitre est consacré à l'etude de deux problèmes modèles par la méthode des inégalités énergetiques, l'un parabolique avec des conditions locales du type Drichlet et l'autre hyperbolique abstrait.

2.1 Problème parabolique avec conditions aux limites locales

Dans le rectangle $\Omega = (0, T) \times (0, 1)$, on considère l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f. \tag{2.1}$$

A l'èquation (2.1) on associe la condition initiale,

$$lu = u(0, x) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1),$$

la condition de Dirichlet,

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \qquad t \in (0, T),$$

où la fonction φ satisfait les conditions de compatibilité suivantes:

$$\varphi(1) = \varphi(0) = 0.$$

Pour l'étude du problème posé nous avons besoin des espaces fonctionnels suivants:

Soit E l'éspace de Banach des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ verifiant les conditions (initiales et Dirichlet) muni de la norme

$$\|u\| = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt + \max_{t\in(0,T)} \int_0^1 |u(x,\tau)|^2 d\tau$$

et F est l'espace de Hilbert des fonctions vectorielles $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ obtenu comme complété de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0, 1)$ par rapport à la norme

$$\|\mathcal{F}\| = \int_\Omega |\mathcal{L}u|^2 dxdt + \int_0^1 |\varphi(x)|^2 dx$$

on pose

$$Mu = 2u.$$

En multipliant l'équation (2.1) par Mu on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^\tau \mathcal{L}u2udxdt = \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} udxdt - \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} udxdt. \tag{2.2}$$

En intégrant le premier terme du membre droit par rapport à t on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt = \int_0^1 u^2\big|_0^\tau - \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt,$$

d'où

$$2\int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt = \int_0^1 \left|u^2(x,\tau)\right| dx - \int_0^1 \left|u^2(x,0)\right| dx. \tag{2.3}$$

En intégrant le deuxième terme du membre droit de (2.2) par rapport à x on obtient :

$$\int_0^1 \int_0^\tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx dt = 2\int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial x} u \bigg|_0^1 - 2\int_0^1 \int_0^\tau \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx dt. \tag{2.4}$$

En remplaçant (2.3) et (2.4) dans (2.2) on obtient:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^1 \int_0^\tau (\mathcal{L}u)(2u) dx dt + \int_0^1 u^2(x,0) dx \\ &\qquad = \textstyle\int_0^1 \left|u^2(x,\tau)\right| dx + +2\int_0^1 \int_0^\tau \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

En utilisant l'inégalité de ε pour le terme $\int_0^1 \int_0^\tau (\mathcal{L}u\ )(2u\ ) dx dt$ on obtient:

$$2\int_0^1 \int_0^\tau (\mathcal{L}u) u dx dt \leq \int_0^1 \int_0^\tau |\mathcal{L}u|^2 ds dt + \int_0^1 \int_0^\tau |u|^2 dx dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^1 \left|u^2(x,\tau)\right| dx + 2\int_0^1 \int_0^\tau \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx dt \leq \int_0^1 \int_0^\tau |\mathcal{L}u|^2 ds dt + \\ &\qquad\qquad + \textstyle\int_0^1 \int_0^\tau |u|^2 dx dt + \int_0^1 \left|u^2(x,0)\right| dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

En utilisant le lemme de Gromwall on trouve que

$$\int_0^1 \left|u^2(x,\tau)\right| dx + \int_0^1 \int_0^\tau \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx dt \leq C_1 \left[\int_0^1 \int_0^\tau |\mathcal{L}u|^2 dx dt + \int_0^1 \left|u^2(x,0)\right| dx\right].$$

Ainsi

$$\|u\| \leq C\,\|\mathcal{F}\|.$$

2.2 Problème hyperbolique d'evolution abstrait

Soit H un espace de Hilbert séparable, et V un autre espace de Hilbert continu et dense toutalement dans H.

Soit $A \in (C^1[0,T], \mathcal{L}(V.V^*))$ et considérant la forme quadratique

$$a(t,u,v) = -(A(t)u,v),$$

telle que a vérifie

1) a est symétrique

$$a(t,u,v) = a(t,v,u),$$

2) a est coercive

$$a(t,u,v) \geq a\|u\|_V^2 - b\|u\|_H^2,$$

a et b deux constantes positives.

Considérant le problème

$$\ddot{u}(t) = A(t)u + f(t), \ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1. \tag{2.7}$$

2.2.1 Existence de Solution

En multipliant (2.7) par $\dot{u}$ scalairement on obtient:

$$(\ddot{u},\dot{u}) = (A(t)u,\dot{u}) + (f(t),\dot{u}).$$

Alors

$$(\ddot{u},\dot{u}) + a(t,u,\dot{u}) = (f(t),\dot{u}). \tag{2.8}$$

En intégrant (2.8) de 0 à t on obtient:

$$\int_0^t (\ddot{u},\dot{u})\,ds + \int_0^t a(t,u,\dot{u})\,ds = \int_0^t (f(t),\dot{u})\,ds. \tag{2.9}$$

En intégrant chaque terme du membre gauche on obtient :

$$\int_0^t (\ddot{u},\dot{u})\,ds = (\dot{u},\dot{u})|_0^t - \int_0^t (\dot{u},\ddot{u})\,ds,$$

d'où

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^t (\ddot{u}, \dot{u})\, ds &= \tfrac{1}{2} \left\| \dot{u}\,(t) \right\|_H^2 - \tfrac{1}{2} \left\| \dot{u}\,(0) \right\|_H^2 \\ &= \tfrac{1}{2} \left\| \dot{u}\,(t) \right\|_H^2 - \tfrac{1}{2} \left\| \dot{u}_1 \right\|_H^2 ,\end{aligned} \tag{2.10}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^t a\,(t, u, \dot{u})\, ds &= -\int_0^t (A\,(t)\, u, \dot{u})\, ds = -\left. (A\,(t)\, u, \dot{u})\right|_0^t \\ &\quad + \int_0^t (A\,(t)\, \dot{u}, u)\, ds + \int_0^t \left(\dot{A}\,(t)\, u, u \right) ds.\end{aligned}$$

On a

$$-\,(A\,(t)\, \dot{u}, u)\, ds = \frac{\partial}{\partial t} a\,(t, u, u) = \grave{a}\,(t, u, u)\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^t a\,(t, u, \dot{u})\, ds &= \frac{1}{2} a\,(t, u\,(t)\,, u\,(t)) - \frac{1}{2} a\,(t, u\,(0)\,, u\,(0)) \\ &\quad -\frac{1}{2} \int_0^t \grave{a}\,(t, u, u)\, ds.\end{aligned} \tag{2.11}$$

En remplaçant (2.10) et (2.11) dans (2.9) on obtient:

$$a\,(t, u\,(t)\,, u\,(t)) + \left\| \dot{u}\,(t) \right\|_H^2 = \left\| \dot{u}_1 \right\|_H^2 + a\,(t, u\,(0)\,, u\,(0)) +$$

|

$$+ \int_0^t \left(\grave{a}\,(t, u, u) + 2\,(f\,(t)\,, \dot{u}) \right) ds.$$

Ainsi on obtient l'estimation

$$\left\| u\,(t) \right\|_V + \left\| \dot{u}\,(t) \right\|_H \leq C \left(\left\| u_0 \right\|_V + \left\| u_1 \right\|_H + \left\| f \right\|_{L^1((0.T).H)} \right)$$

2.2.2 Unicité de Solution

Soit u une solution de (2.7) si $f = 0$, $u_0 = u_1 = 0$, et $s \in (0.T)$

en posant

$$v(t) = \begin{cases} -\int_t^s u(r)dr & si\ t < s \\ 0 & si\ t \geq s. \end{cases}$$

Alors on a

$$\ddot{u} = A(t)\, u. \tag{2.12}$$

En multipliant (2.12) par v scalairement et en intégrant par parties par rapport à t on obtient:

$$\int_0^t (\ddot{u}, v)\, ds = -\int_0^t a(t, u, v)\, ds = \int_0^t (A(t)\, u, v)\, ds. \tag{2.13}$$

On a

$$\int_0^t (\ddot{u}, v)\, ds = (\dot{u}, \dot{v})]_0^t - \int_0^t (\dot{u}, \dot{v})\, ds,$$

d'où

$$\int_0^t (\ddot{u}, v)\, ds = -\int_0^t (\dot{u}, \dot{v})\, ds. \tag{2.14}$$

En remplaçant (2.14) dans (2.13) on trouve:

$$\int_0^t a(t, u, v)\, ds = \int_0^t (\dot{u}, \dot{v})\, ds. \tag{2.15}$$

On a $\dot{v}(t) = u(t)$ et $v(T) = \dot{u}(0)$. par définition alors (2.15) devient:

$$\int_0^t a(t, v, \dot{v})\, ds = \int_0^t (\dot{u}, u)\, ds. \tag{2.16}$$

En intégrant (2.16) par rapport à t on obtient:

1)

$$\begin{aligned} \int_0^s (\dot{u}, u)\, dt &= \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(0)\|_H^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

2)

$$\int_0^s a(t, v, \dot{v})\, ds = \frac{1}{2}a(0, v(0), v(0)) + \frac{1}{2}\int_0^s \grave{a}(t, v, v)\, ds. \tag{2.18}$$

En remplaçant (2.17) et (2.18) dans (2.16) on obtient:

$$a(0, v(0), v(0)) + \|u(s)\|_H^2 = -\int_0^s \grave{a}(t, v, v)\, ds,$$

donc on a l'estimation

$$\|v(0)\|_V^2 + \|u(s)\|_H^2 \leq C\left(\int_0^s \|u(t)\|_V^2 \, dt + \|v(0)\|_H^2\right). \tag{2.19}$$

On pose

$$w(t) = \int_0^t u(r)dr = v(t) - v(0)$$

on a $w(s) = v(s) - v(0)$ et $v(s) = 0$ alors $w(s) = -v(0)$. donc

$$v(t) = w(t) - w(s).$$

En remplaçant $v(t)$ dans (2.19) on obtient:

$$\|w(s)\|_V^2 + \|u(s)\|_H^2 \leq C\left(\int_0^s \|w(t) - w(s)\|_V^2 \, dt + \|v(0)\|_H^2\right).$$

On a

$$\|w(t) - w(s)\|_V^2 \leq 2\left[\|w(t)\|_V^2 + \|w(s)\|_V^2\right]$$

et

$$\|w(s)\|_H^2 \leq s \int_0^s \|u(t)\|_H^2 \, dt.$$

En utilisant les deux estimations, on obtient:

$$\|w(s)\|_V^2 + \|u(s)\|_H^2 - 2C\int_0^s \|w(t)\|_V^2 \, dt \leq K\left(\int_0^s \|w(t)\|_V^2 + \|u(t)\|_H^2 \, dt\right).$$

D'où

$$(1 - 2Cs)\|w(s)\|_V^2 + \|u(s)\|_H^2 \leq K\left(\int_0^s \|w(t)\|_V^2 + \|u(t)\|_H^2 \, dt\right).$$

En choisissant s tel que $s < \frac{1}{2C}$, et en utilisant l'inégalité de Gronwall on trouve

$$w = u = 0.$$

Chapitre 3

Problème aux Limites Singulier non Local

Le but de ce chapitre est l'étude d'un problème mixte singulier avec une singularité à l'origine d'ordre n, combinant une condition aux limites du type Dirichlet avec une autre intégrale à borne variable.

On commence tout d'abord par décrire le cadre fonctionnel d'étude du problème posé. On commence par établir une estimation à priori bilatérale. La méthode utilisée est celle des inégalités énérgetiques. Pour montrer l'existence de la solution on montre la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème en question et cela en se basant sur les opérateurs de régularisation.

3.1 Position du Problème

Dans le rectangle $\Omega = (0,T) \times (0,\ell)$,on considère l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial u}{\partial x}) = f. \tag{3.1}$$

A l'èquation (3.1) on associe la condition initiale

$$lu = u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in (0,\ell), \tag{3.2}$$

la condition de Dirichlet

$$u(t,\ell) = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3.3}$$

et la condition intégrale

$$\int_{\ell_1}^{\ell} u(t,\xi)d\xi = 0, \qquad 0 \leq \ell_1 \leq \ell, t \in (0,T). \tag{3.4}$$

Où la fonction φ satisfait les conditions de compatibilité suivantes:

$$\varphi(\ell) = 0, \qquad \int_{\ell_1}^{\ell} \varphi(x)dx = 0.$$

Pour l'étude du problème posé nous nous besoin des espaces fonctonnels suivants:

Soit E l'éspace de Banach des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ vérifiant les conditions (3.3) et (3.4) et muni de la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_\Omega \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_\Omega \frac{\theta(x)}{x^n}\left|\frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial u}{\partial x})\right| dxdt + \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx; \tag{3.5}$$

et F est l'espace de Hilbert des fonctions vectorielles $\mathcal{F} = (f,\varphi)$ obtenu comme complété de l'espace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0,\ell)$ par rapport à la norme

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_\Omega \theta(x)\left|f(t,x)\right|^2 dxdt + \int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| dx, \tag{3.6}$$

où

$$\theta(x) = \begin{cases} \ell_1 x^n, & 0 < x \leq \ell_1. \\ x^{n+1}, & \ell_1 \leq x < \ell. \end{cases} \tag{3.7}$$

Au problème(3.1)-(3.4) on associe l'opérateur $L = (\mathcal{L},\ell)$ définit de E dans F.

Définition 3.1.1 *On appelle solution du problème (3.1)-(3.4),toute solution de l'équation opératorielle*

$$Lu = \mathcal{F}.$$

3.2 Estimation à priori bilatérale

Théorème 3.2.1 *Pour chaque fonction $u \in E$, on a l'estimation à priori suivante:*

$$\|Lu\|_F \leq C \|u\|_E \tag{3.8}$$

où C est constante indépendante de u.

Preuve. De l'équation (3.1) on a

$$|\mathcal{L}u|^2 \leq 2\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{1}{x^{2n}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right].$$

Alors

$$\theta(x)\,|\mathcal{L}u|^2 \leq 2\left[\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{\theta(x)}{x^{2n}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right],$$

donc

$$\int_\Omega \theta(x)\,|\mathcal{L}u|^2\,dxdt \leq 2\int_\Omega \left[\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \frac{\theta(x)}{x^{2n}}\left|\frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right] dxdt. \tag{3.9}$$

D'autre part on a

$$\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2 dx = \int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}\right|^2 dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx. \tag{3.10}$$

En sommant (3.9) et (3.10), on a:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \theta(x)\,|f(t,x)|^2\,dxdt + \int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2 dx \quad &\leq \quad 2\int_\Omega \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\
&\quad + \int_\Omega \frac{\theta(x)}{x^n}\left|\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\right|^2 dxdt \\
&\quad + \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|Lu\|_F \leq C\|u\|_E\,.$$

■

Ainsi le théorème est démontré.

Théorème 3.2.2 *Pour toute fonction $u \in E$, on a l'estimation*

$$\|u\|_E \leq C\|Lu\|_F\,, \tag{3.11}$$

où la constante C est indépendante de u.

Preuve. On note par

$$D(L) = \left\{u \in E : x^n \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \in L_2(\Omega)\right\},$$

$$Ju = \int_x^{\ell} u(t,\xi)d\xi,$$

et

$$Mu = \begin{cases} \ell_1 x^n \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x \leq \ell_1 \\ x^{n+1}\frac{\partial u}{\partial t} + x^n J\frac{\partial u}{\partial t} & \ell_1 \leq x < \ell \end{cases}.$$

En multipliant l'équation (3.1) par Mu, et en intégrant sur $\Omega^\tau = (0,\tau)\times(0,\ell)$, où $0 \leq \tau \leq T$ et en prenant par la suite la partie réelle on trouve que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \mathcal{L}uM\overline{u}\,dxdt &= \int_0^\tau\int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t}M\overline{u}\,dxdt \\ &- \int_0^\tau\int_0^\ell \frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})M\overline{u}\,dxdt. \end{aligned} \tag{3.12}$$

En intégrant par parties chaque terme du membre droit de (3.12) et en utilisant les conditions(3.1)-(3.4) on obtient :

•

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t}M\overline{u}\,dxdt &= \int_0^\tau\int_0^{\ell_1} \ell_1 x^n\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\ &+ \int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^{n+1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^n\frac{\partial u}{\partial t}J\frac{\partial u}{\partial t}dxdt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \frac{\partial u}{\partial t}M\overline{u}\,dxdt &= \int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\ &+ \int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^n\frac{\partial u}{\partial t}J\frac{\partial u}{\partial t}dxdt. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En intégrant le deuxième terme du membre droit de (3.13) on obtient:

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell} x^n\frac{\partial u}{\partial t}J\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\frac{n}{2}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell} x^{n-1}\left|J\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt.$$

d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell\frac{\partial u}{\partial t}M\overline{u}\,dxdt &= \int_0^\tau\int_0^\ell\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\ &+\frac{n}{2}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell} x^{n-1}\left|J\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt.\end{aligned}\tag{3.14}$$

On a:

•

$$\begin{aligned}-\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})M\overline{u}\,dxdt &= -\int_0^\tau\int_0^{\ell_1}\frac{\ell_{1x^n}}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t}dxdt \\ &-\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}\frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t}dxdt \\ &-\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}\frac{x^n}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})J\frac{\partial u}{\partial t}dxdt.\end{aligned}\tag{3.15}$$

En intégrant par parties chaque terme du membre droite on trouve que:

$$-\int_0^\tau\int_0^{\ell_1}\frac{\ell_{1x^n}}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=\int_0^\tau\int_0^{\ell_1}\ell_1x^n\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt\tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}-\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}\frac{x^{n+1}}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t}dxdt &= \int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n+1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt+ \\ &+\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^n\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$-\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}\frac{x^n}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})J\frac{\partial u}{\partial t}dxdt=-\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^n\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}dxdt.\tag{3.18}$$

En sommant (3.16), (3.17) et (3.18) on obtient :

$$-\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})M\overline{u}\,dxdt=\int_0^\tau\int_0^\ell\theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt.\tag{3.19}$$

En sommant de nouveau (3.16) et (3.19) on obtient :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \mathcal{L}uM\overline{u}\,dxdt &= \int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\ &+\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt \\ &+\frac{n}{2}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^{n-1}\left|J\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt.\end{aligned} \tag{3.20}$$

En intégrant par parties le terme

$$\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt,$$

on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt &= \int_0^\ell \theta(x)\left.\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right]_0^\tau dx - \\ &-\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt &= \frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left.\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right]_0^\tau dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x}\right|^2 dx \quad -\frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2 dx.\end{aligned}$$

D'où

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \mathcal{L}uM\overline{u}\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2 dx =$$

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \frac{n}{2}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^{n-1}\left|J\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \\ +\frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x}\right|^2 dx.\end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de Mu dans le terme $\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \mathcal{L}uM\overline{u}\,dxdt$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^\ell \mathcal{L}uM\overline{u}\,dxdt &= \int_0^\tau\int_0^{\ell_1} \ell_1 x^n\frac{\partial u}{\partial t}\mathcal{L}udxdt + \\ &+\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^{n+1}\frac{\partial u}{\partial t}\mathcal{L}udxdt + \int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^n\mathcal{L}uJ\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\end{aligned}$$

et en utilisant l'$\varepsilon-$inégalité à chaque terme on obtient

1- Pour le premier terme, en prenant $\varepsilon=2$, on obtient

$$\int_0^\tau\int_0^{\ell_1}\ell_1 x^n\frac{\partial u}{\partial t}\mathcal{L}udxdt\leq\int_0^\tau\int_0^{\ell_1}\ell_1 x^n\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^{\ell_1}\ell_1 x^n\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt \tag{3.21}$$

2- Pour le deuxiéme terme, en prenant $\varepsilon=2$, on obtient

$$\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n+1}\frac{\partial u}{\partial t}\mathcal{L}udxdt\leq\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n+1}\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n+1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt \tag{3.22}$$

3- Pour le dernier terme, en prenant $\varepsilon=\frac{1}{n}$, on obtient

$$\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^n\mathcal{L}uJ\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\leq\frac{1}{2n}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n+1}\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt++\frac{n}{2}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n-1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt. \tag{3.23}$$

De plus comme:

$$\frac{1}{2n}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n+1}\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt\leq\frac{1}{2n}\int_0^\tau\int_0^{\ell}\theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt.$$

En sommant (3.21), (3.22) et (3.23) on trouve que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^{\ell}\mathcal{L}uM\overline{u}\,dxdt &\leq \frac{2n+1}{2n}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}\theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2dxdt \\ &+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt \\ .. &+\frac{n}{2}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^{\ell}x^{n-1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt\end{aligned} \tag{3.24}$$

d'autre part on a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})=x^n\frac{\partial u}{\partial t}-x^n\mathcal{L}u$$

et en utilisant l'$\varepsilon-$inégalité, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\right|^2\leq 2\left(x^{2n}\left|\mathcal{L}u\right|^2+x^{2n}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right),$$

d'où

$$\frac{\theta(x)}{4x^{2n}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\right|^2\leq\frac{\theta(x)}{2}\left|\mathcal{L}u\right|^2+\frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2.$$

Ainsi on a

$$\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^{\ell}\frac{\theta(x)}{x^{2n}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\right|^2\leq\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^{\ell}\theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2+\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^{\ell}\theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \tag{3.25}$$

en combinant (3.16) et (3.24) on trouve que

$$\frac{3}{4}\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x}\right|^2 dx \;\leq\; \frac{2n+1}{2n}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell \theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2 dx. \quad (3.26)$$

En sommant (3.25) et (3.26) on obtient:

$$\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x}\right|^2 dx$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^\ell \frac{\theta(x)}{x^{2n}}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\right|^2 \leq \frac{3n+1}{2n}\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell \theta(x)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\ell \theta(x)\left|\frac{\partial lu}{\partial x}\right|^2 dx. \quad (3.27)$$

Comme le membre droit de (3.27) ne depend pas de τ, en passant au sup sur τ, on trouve que

$$\left\|u\right\|_E \leq C\left\|Lu\right\|_F.$$

Ce qui achève la démonstration.

■

3.3 Résolubilité du problème

D'après les estimations (3.8) et (3.11) , on voit que l'opérateur $L : E \longrightarrow F$ est continu et que son image est fermée dans F.

D'où l'opérateur inverse L^{-1} existe et continu de $R(L)$ dans E, ainsi L est un homéomorphisme de E dans $R(L)$.

Pour obtenir l'éxistence de la solution il suffit de montrer que $R(L) = F$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.3.1 *Soit*

$$D_0(L) = \{u \in D(L) \quad /lu = 0\}$$

si

$$\int_\Omega \theta(x)\mathcal{L}u\overline{w}dxdt = 0 \tag{3.28}$$

pour tout $u \in D_0(L)$ *et pour un certain* w *telle que* $x^n w \in L_2(\Omega)$, *alors* $w = 0$.

Preuve. En posant dans (3.28), $h = \frac{\partial u}{\partial t}$,où $h, x^n\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x}) \in L_2(\Omega)$ et h verifie les conditions aux limites (3.3) et (3.4) on obtient:

$$\int_\Omega \theta(x)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{w}dxdt = \int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})\overline{w}dxdt. \tag{3.29}$$

De nouveau en posant dans (3.29) $u = J_t^* h = \int_0^t h(\tau, x)d\tau$ on obtient :

$$\int_\Omega \theta(x)h\overline{w}dxdt = \int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial}{\partial x}(J_t^* h))\overline{w}dxdt. \tag{3.30}$$

En intégrant par parties le membre droit de (3.30) et en posant $J_t w = \int_t^T w(\tau, x)d\tau$ on trouve

$\frac{\partial}{\partial t}J_t w = -w(t, x)$ alors,

$$\int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial}{\partial x}(J_t^* h))\overline{w}dxdt = +\int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt$$

d'où

$$\int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial}{\partial x}(J_t^* h))\overline{w}dxdt = \int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt. \tag{3.31}$$

Par la suite en écrivant $\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial u}{\partial x})$ sous la forme

$$\frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial h}{\partial x}) = \frac{1}{x^{2n}}\theta(x)\left[\frac{\partial}{\partial x}x^n\frac{\partial}{\partial x}(x^n h) - \frac{2n}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x^n h) + \frac{n}{x^2}(x^n h)\right].$$

Alors (3.31) devient:

$$\int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial}{\partial x}(J_t^* h))\overline{w}dxdt = \int_\Omega \frac{1}{x^{2n}}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}x^n\frac{\partial}{\partial x}(x^n h)dxdt$$
$$-\int_\Omega \frac{2n}{x^{2n+1}}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n h) + \int_\Omega \frac{n}{x^{2n+2}}\theta(x)(x^n h). \tag{3.32}$$

Le membre gauche de (3.32) montre que l'application

$$x^n h \longrightarrow \int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt$$

est une fonction linéaire continue.Et du membre de droite de (3.32), on conclut que la fonction w vérifie les propriétés suivantes:

$$\frac{\theta(x)}{x^{2n+2}}J_t w, \frac{\theta(x)}{x^{2n+1}}\frac{\partial}{\partial x}(J_t w), J_t w, \frac{\theta(x)}{x^{2n}}\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial}{\partial x}(J_t w)) \in L_2(\Omega).$$

De l'équation (3.31) on a

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}(\theta(x)\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt = \int_0^\tau\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x}(\ell_1 x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt$$
$$+\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell \frac{\partial}{\partial x}(x^{n+1}\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt$$
$$= \int_0^\tau\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x}(\ell_1 x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt$$
$$+\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt + \int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell x^n\frac{\partial h}{\partial x}J_t\overline{w}dxdt,$$

d'où

$$\int_\Omega \frac{1}{x^n}\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}(x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt = \int_0^\tau\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x}(\ell_1 x^n\frac{\partial h}{\partial x})J_t\overline{w}dxdt$$
$$+\int_0^\tau\int_{\ell_1}^\ell \frac{\partial}{\partial x}(x^{n+1}\frac{\partial h}{\partial x})\left[J_t\overline{w} - \int_x^\ell \frac{J_t\overline{w}}{\zeta}d\zeta\right]dxdt.$$

En pose

$$v(t,x) = \begin{cases} J_t w, & 0 < x \le \ell_1. \\ J_t w - \int_x^\ell \frac{J_t w}{\zeta}d\zeta, & \ell_1 \le x < \ell. \end{cases}$$

alors on aura

$$\int_x^\ell v(t,\zeta)d\zeta = \int_x^\ell J_t w(t,\zeta)d\zeta - \int_x^\ell d\zeta \int_\zeta^\ell \frac{J_t w(t,\eta)}{\eta} d\eta =$$

$$= x\int_x^\ell \frac{J_t w(t,\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

on peut écrire $\theta(x)v(t,x)$ sous la forme

$$\theta(x)v(t,x) = \begin{cases} \ell_1 x^n J_t w, & 0 < x \leq \ell_1. \\ x^{n+1} J_t w - x^n (x \int_x^\ell \frac{J_t w}{\zeta} d\zeta), & \ell_1 \leq x < \ell. \end{cases}$$

D'où

$$Mv = \theta(x) J_t w = \begin{cases} \ell_1 x^n v(t,x), & 0 < x \leq \ell_1. \\ x^{n+1} v(t,x) + x^n \int_x^\ell v(t,\zeta)d\zeta, & \ell_1 \leq x < \ell. \end{cases}$$

Et

$$\int_{\ell_1}^\ell v(t,x)dx = 0 \tag{3.33}$$

car $x(v(t,x) - J_t w) = x\int_x^\ell \frac{J_t w(t,\zeta)}{\zeta} d\zeta$ pour $\ell_1 \leq x < \ell$ et pour $x = \ell_1$ on a $J_t w(t,\ell_1) = v(t,\ell_1)$. En posant $h = J_t^* v = \int_0^t v(\tau,x)d\tau$ dans (3.31), on a

$$\int_\Omega \theta(x) J_t^* v \overline{w} dxdt = \int_\Omega \frac{1}{x^n} \theta(x) \frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial}{\partial x}(J_t^* v)) J_t \overline{w} dxdt \tag{3.34}$$

mais comme $\theta(x)w = -\frac{\partial}{\partial t}(Mv)$, alors (3.34) devient:

$$\int_\Omega J_t^* v \frac{\partial}{\partial t}(M\overline{v})dxdt = -\int_\Omega \frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial}{\partial x}(J_t^* v)) M\overline{v} dxdt, \tag{3.35}$$

en faisant des calculs analogues à ceux faits dans **le Theorème 3.2.2** on obtient :

$$-\int_\Omega \frac{1}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}(x^n \frac{\partial}{\partial x}(J_t^* v)) M\overline{v} dxdt = \int_\Omega \theta(x) \frac{\partial}{\partial x}(J_t^* v) \frac{\partial^2}{dxdt}(J_t^* \overline{v})dxdt$$

$$= \int_\Omega \theta(x) \frac{\partial}{\partial x}(J_t^* v) \frac{\partial \overline{v}}{dx} dxdt. \tag{3.36}$$

En intégrant le premier terme de (3.35) on obtient :

$$\operatorname{Re} \int_\Omega J_t^* v \frac{\partial}{\partial t}(M\overline{v})dxdt = -\operatorname{Re} \int_\Omega v(M\overline{v})dxdt,$$

mais

$$\int_\Omega v(M\overline{v})dxdt = \int_\Omega \theta(x) |v|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\ell_1}^\ell v x^n J_x v dxdt,$$

de plus

$$\int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} v x^n J v dx dt = \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} x^{n-1} |J_x v|^2 \, dx dt,$$

donc

$$\operatorname{Re} \int_\Omega J_t^* v \frac{\partial}{\partial t}(M\overline{v}) dx dt = -\left[\int_\Omega \theta(x) |v|^2 \, dx dt + \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} x^{n-1} |J_x v|^2 \, dx dt \right].$$

En intégrant le dernier terme de (3.36) on obtient

$$\int_\Omega \theta(x) \frac{\partial}{\partial x}(J_t^* v) \frac{\partial \overline{v}}{dx} dx dt = \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| J_t^* \frac{\partial v}{\partial x}(T, x) \right|^2 dx,$$

ainsi (3.36) devient

$$-\left[\int_\Omega \theta(x) |v|^2 \, dx dt + \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} x^{n-1} |J_x v|^2 \, dx dt \right] = \frac{1}{2} \int_0^\ell \theta(x) \left| J_t^* \frac{\partial v}{\partial x}(T, x) \right|^2 dx,$$

c'est à dire

$$\int_\Omega \theta(x) |v|^2 \, dx dt + \frac{n}{2} \int_0^T \int_{\ell_1}^{\ell} x^{n-1} |J_x v|^2 \, dx dt \leq 0,$$

alors on obtient $v = 0$, d'où $w = 0$.Ce qui achève la démonstration. ∎

Théorème 3.3.1 *L'image $R(L)$ de l'opérateur L est égale à F.*

Preuve. Comme F est un espace de Hilbert, on a $R(L)$ si et seulement si de

$$\int_\Omega \theta(x) \mathcal{L} u \overline{f} dx dt + \int_0^\ell \theta(x) \frac{\partial l u}{\partial x} \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial x} dx = 0, \tag{3.37}$$

on a $\mathcal{F} = (f, \varphi) = 0$.

En prenant $u \in D_0(L)$ on a $lu = 0$, d'où

$$\int_\Omega \theta(x) \mathcal{L} u \overline{f} dx dt = 0.$$

Ainsi d'aprés le lemme 3.1 on a $f = 0$, d'où (3.10) devient :

$$\int_0^\ell \theta(x) \frac{\partial l u}{\partial x} \frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial x} dx = 0.$$

Comme l'image de l'opérateur trace l est dense dans l'espace de Hilbert muni de la norme

$$\left[\int_0^\ell \theta(x) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

alors $\varphi = 0$.d'où $\mathcal{F} = 0$. ∎

Bibliographie

[1] Battem G.W.Jr, *Second-order correct boundry conditions for the numerical solution of mixed boundry problem for parabolic equations,* Math. Comp.,17(1963), pp. 405-413.

[2] Benouar N.E, Yurchuk N.I, *Mixed Problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Differential Equation, 27, N°12 (1991), pp.1482-1487.

[3] Bouziani A., Benouar N.E, *Mixed Problem with an integral condition for A third order parabolic equation* , Kobc J. Math,15 (1998), pp.47-58.

[4] Cahlon B., Kulkarni D.M., Shi P., *Stepwise stability for the heat equation with non-local constraint*, Siam J. Numer. Anal., 32 (1995), pp. 571-593.

[5] Cannon J.R, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy,* Quart Appl. Math., vol.21, N°2 (1963), pp.155-160.

[6] Cannon J.R., *The one-dimensional heat equation*, In encyclopedia of mathematics and its applications 23. Addison-Wesley. Mento Park, CA (1984).

[7] Choi Y.S., Chan K.Y., *A parabolic equaion with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry*, Nonlinear Anal,18 (1992), pp 317-331.

[8] Chouiter F., *Problèmes mixtes avec conditions aux limites du type non classique.* Mémoire de magistère, Département de Mathématique, Faculté des Sciences , Université Mentouri Constantine, Mars (2001).

[9] Denche M., Marhoune A.L., *A three-point boundary value problem with an integral condition for parabolic equation with the Bessel operator* , Applied Mathematics Letters,13 (2000), pp.85-89.

[10] Denche M., Marhoune A.L., *High order mixed -type differential equations with weigthed integral boundary conditions*, Electronic Journal of differential equations, N° 60 (2000), pp 1-10.

[11] Denche M., Marhoune A.L., *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for third order partial differential equation of mixed type* , dans International Journal of mathematics and mathematical sciences, 26 (2001), N°7, pp. 417-426..

[12] Dezin A.A., *Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des equations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionnels*, Usp. Math Naouk (en Russe), T.14, N°3 (1987), pp. 22-73.

[13] Friedrichs K., *Symetric hyperbolic linear differential equations* , Comm. Pure Appl. Math.,7, N°2 (1954), pp.345-392.

[14] Garding L., *Cauchy's problem for hyperbolic equations,* University of Chicago, Lecture notes,1957.

[15] Ionkin N.I., *Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a non-classical boundary condition*, Differentialnye Uraveniya (en Russe), 13 (1977), pp. 294-304.

[16] Kamynin N.I., *A boundary valu problem in the theory of the heat condition with non classical boundary condition*, U.S.S.R. Comput. Math. Phys. ,4 (1964), pp. 33-59.

[17] Kartynnik A.V., *Three-point boundary-value problem with an integral space variable condition for a second-order parabolic equation,* Differential equations, 26 (1990), N°.9, pp. 1160-1166.

[18] Ladyzhenskaja O.A., Mixed problem for hyerbolic equations, Edition Nauka, 1974.

[19] Leray J, *Lecture on hyperbplic differential equations with variable coefficients*, Princeton, Just for adr.Study,1952.

[20] Petrovsky I.G., *Uber das eauchyshe problem fur system von linearen partiallen diferen tialgeichungen in gebit der niehtanalystischen funktionen*, Univ. d'Etat Moscow, N°7 (1938), pp. 1-74.

[21] Pulkina L.S., *A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electronic Journal of Differential Equations, 45 (1999), pp. 1-6.

[22] Rebbani F., Chesalyn V.I., *Problèmes aus limites pour equations différentièlles d'ordre impair dans le rectangle*, Doklady Acad. Nauk B.S.S.R (en Russe), Serie, phys. Math. Nauk, N°3 (1985).

[23] Rebani F., Chesalyn V.I., *Problèmes aux limites pour equations différentièlles d'ordre impair dans le rectangle*, Doklady Acad. Nauk B.S.S.R (en Russe), T.30 N°12, pp. 1061-1063.

[24] Samarski A.A. *Some problem in the modern theory of differential equations*, Differentsialnye Uravneniya (en Russe),16 (1980), N°11, pp. 1221-1228.

[25] Shi P., Shillor M., *Design of Contact Patterns in One Dimensional Thermoelasticity, in theoretical Aspects of industrial Design*, Society for industrial and applied Mathematics, Philadelphia, PA.1992.

[26] Memou A., *Une classe des problèmes aux limites pour équations différentièlles*; Mémoire de magistère, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mentouri Constantine, Mai (2003).

[27] Yurchuk, N.I., *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equation,* Differ. Equ., 22 (1982), 1457-1463.