

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mentouri -Constantine-

Faculté des sciences
Département de mathématiques

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de

MAGISTER

En

Mathématiques

Thème

**Sur les formes canoniques de matrices associées
aux
systèmes linéaires commandés**

Option : Analyse mathématique appliquée

Par

MEDDOUR Halima

Devant le jury

M.N. Benkafadar	Professeur- Université de Constantine	Président
M. Denche	Professeur- Université de Constantine	Rapporteur
S. Djeddar	Chargé de Cours- Université de Constantine	Co rapporteur
N. Kechkar	Professeur- Université de Constantine	Examineur
S.E. Rebiai	Maître de Conférence- Université de Batna	Examineur

Soutenue Le : 21-04-2001

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicaces

A ma très chère mère,
A mon très cher père,
A mes frères : Omar, Khalil, Kheir El-Dine,
A mes sœurs : Soraya, Nora, Naima, Amina,
Sarah, Ahlem,
A toute ma famille,
A tous mes collègues et toutes mes amies
et surtout : Linda et Salima,

Remerciements

Je tiens à remercier Mr. *Djezzar S.* d'être mon encadreur, de m'avoir proposé ce thème de recherche, et pour tous ses conseils qui m'ont aidé à achever ce mémoire.

Je suis très honorée par l'encadrement administratif et le soutien moral de Mr. *Denche M.*

Je tiens aussi à exprimer mon remerciement à :

Mr. *Benkafadar M.N.*

qui m'a honoré d'être président de jury. Ainsi à :

Mr. *Kechkar N.*

Mr. *Rebiai S.E.*

de bien vouloir d'en faire partie de jury.

Finalement, je remercie sincèrement toute personne qui m'a encouragée moralement et matériellement.

Sommaires

0.1 Introduction	1
Chapitre 1: SYSTEMES LINEAIRES AVEC CONTROLE	3
1.1 Introduction	4
1.2 Rappel	4
1.2.1 La controlabilité	4
1.2.2 L'observabilité	5
1.3 Les formes canoniques	6
1.3.1 La forme de Jordan	6
1.3.2 La forme compagne	9
1.3.3 La forme de Frobenius	16
Chapitre 2: LES FORMES CANONIQUES DANS L'ANNEAU DES POLYNOMES	19
2.1 Introduction	20
2.2 Formes canoniques : cas unidimensionnel	20
2.2.1 Forme compagne dans l'anneau $R[s]$	20
2.2.2 Forme de Smith dans l'anneau $R[s]$	28
2.3 Les formes canoniques: cas bidimensionnel	32
2.3.1 Introduction	32
2.3.2 La forme de Smith dans $R[s,z]$	33
2.3.3 La forme compagne dans $R[s,z]$	37
Chapitre 3: PROBLEME DE DECOUPLAGE DANS UN CORPS	43
3.1 Introduction	44
3.2 Rappel	45
3.2.1 Sous espace de controlabilité et le feedback	45
3.3 Formulation du problème	50
3.3.1 Problème de découplage restreint: PDR	50
Chapitre 4: PROBLEME DE DECOUPLAGE DANS $R[s,z]$	60
4.1 Introduction	61
4.2 La notion de précontrolabilité	62
4.3 Le problème de découplage	68
4.3.1 Formulation du problème	68
Conclusion	81
Bibliographie	82

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude et la recherche de certaines formes canoniques de matrices associées aux systèmes différentiels linéaires commandés et son application à l'étude de la contrôlabilité et l'observabilité. En particulier, la forme de Jordan, la forme compagne et la forme de Frobenius associées à certains systèmes différentiels linéaires commandés (A,B) ont été présentés. En exploitant ces formes, des critères de contrôlabilité ont été obtenus. Ensuite, la forme de Smith et la forme compagne sur l'anneau des polynômes $R[s]$ ont été considérées où une transformation d'équivalence a été établie. Une extension des résultats précédents sur l'anneau des polynômes à deux variables $R[s,z]$ a été donnée. Finalement, on a étudié le problème de découplage des systèmes définis dans des espaces vectoriels sur un corps et une généralisation au cas des systèmes définis dans des modules sur l'anneau $R[s,z]$ a été présentée.

0.1 Introduction

En théorie de contrôle, le but est de contrôler un système et de le conduire à des objectifs visés. En particulier, pour un système linéaire commandé l'objectif est de manipuler ses entrées pour arriver à des sorties désirées.

Les formes canoniques des matrices associées aux systèmes linéaires commandés sont très importantes dans des branches diverses de la théorie de la commande, vu le lien entre ces formes et les notions importantes telles que la contrôlabilité, l'observabilité, la stabilité et le feedback etc. . L'une des formes très connue est la forme de Jordan qu'on utilise souvent en algèbre [11]. On s'intéresse également à étudier les formes canoniques suivantes: forme Compagne [1], la forme de Frobenius [17] et de Smith [11] sur l'anneau $\mathbb{R}[s]$, puis une extension de cette étude sur l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{R}[s, z]$. Rappelons que la forme compagne pour le cas des systèmes sur l'anneau des polynômes à une seule variable a été étudié par plusieurs auteurs par exemple par [13], [16] et dans l'anneau des polynômes à deux variables par [9], [25]. On note que d'autres résultats liés à la forme de Smith dans les cas unidimensionnel et bidimensionnel ont été obtenus respectivement par [19] et [25]. Ensuite, certains des résultats obtenus sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$ sont exploités pour la généralisation de l'étude d'un problème de découplage des systèmes linéaires commandés. D'où l'actualité du thème abordé.

Le présent travail est composé de quatre chapitres.

Au premier chapitre on rappelle les notions suivantes:

1. La notion importante de la contrôlabilité et la notion duale l'observabilité.
2. Les formes canoniques associées à ces systèmes: la forme de Jordan, la forme compagne, et la forme de Frobenius.
3. La relation entre la contrôlabilité et ces formes canoniques.

En ce qui concerne le deuxième chapitre, on introduit la forme de Smith et on étend les résultats et les notions présentées précédemment pour les formes canoniques, plus particulièrement la forme compagne, sur l'anneau des polynômes à une seule variable $\mathbb{R}[s]$ puis sur l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{R}[s, z]$.

Dans le troisième chapitre, on considère l'étude d'un problème important dans la théorie de contrôle: le problème de découplage des systèmes linéaires commandés dans des espaces vectoriels sur un corps [27].

Dans le dernier chapitre, on étend l'étude du problème précédent au cas des systèmes linéaires définis dans des modules sur l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{R}[s, z]$. On note que ce problème a été étudié dans le cas d'un domaine à factorisation unique, dans un anneau principal, et dans un anneau noethérien respectivement par [15], [20], et ([3],[4]).

Enfin, on termine ce travail par une conclusion concernant les résultats obtenus et les perspectives.

Chapter 1

SYSTEMES LINEAIRES COMMANDES

1.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente les notions fondamentales de la théorie de contrôle telles que la contrôlabilité, l'observabilité et les formes canoniques pour les matrices associées aux systèmes linéaires commandés.

1.2 Rappel

Rappelons qu'un système linéaire commandé peut s'écrire sous forme:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$

et $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ sont des matrices d'ordre: $n \times n$, $n \times m$, $r \times n$, $r \times m$ respectivement.

1.2.1 La contrôlabilité

Définition 1 On dit que le système (1.1) est complètement contrôlable si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, et tout état initial $x(t_0) = x_0$ et tout état final x_f , il existe un temps fini $t_1 > t_0$ et un contrôle $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, avec $u(t)$ est une fonction continue par morceaux sur $[t_0, t_1]$ tel que:

$$x(t_1) = x_f$$

On dit dans ce cas que la paire (A, B) est complètement contrôlable et on note c.c.

Remarque 1 La définition 1 reste valable pour les systèmes linéaires commandés invariant en temps i.e les systèmes sous formes:

$$\begin{cases} x'(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où A est dite la matrice d'évolution, B la matrice d'application de la commande, C la matrice d'observation et D la matrice de transmission directe.

Théorème 1 *Le système (1.2) est c.c si et seulement si:*

$$\text{rang}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n \quad (1.3)$$

$U = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$ est dite la matrice de controlabilité [1].

Définition 2 *On dit que (1.2) est algébriquement équivalent au système:*

$$\begin{cases} z'(t) = A_1 z(t) + B_1 u_1(t) \\ y_1(t) = C_1 z(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

s'il existe une matrice T non singulière carrée $n \times n$: tel que (1.4) est obtenu de (1.2) à partir de la transformation:

$$z(t) = Tx(t)$$

D'où, on a le théorème suivant qui relie l'équivalence des systèmes à la controlabilité.

Théorème 2 *Supposons que les systèmes (1.2) et (1.4) sont algébriquement équivalents. Alors, si (1.2) est c.c alors (1.4) l'est aussi [1].*

Remarque 2 *D'après ce théorème, on peut dire que la controlabilité du système (1.2) est invariante en utilisant une transformation d'équivalence non singulière de la forme: $z(t) = Tx(t)$.*

Maintenant, on va parler d'une notion duale de la controlabilité dite: l'observabilité.

1.2.2 L'observabilité

Définition 3 *On dit que le système (1.2) est complètement observable si pour un t_0 quelconque et un état initial $x(t_0) = x_0$, il existe un temps fini $t_1 > t_0$ tel que: la connaissance du contrôle $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ et de la sortie $y(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ est suffisante pour la détermination de l'état x_0 .*

On dit dans ce cas que la paire (A, C) est complètement observable, et on note c.o.

Théorème 3 *Le système (1.2) est c.o si et seulement si:*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

la matrice: $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ est dite la matrice d'observabilité [24].

Théorème 4 *Le système 1.2 est c.c si et seulement si le système dual:*

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = -A^t x(t) + C^t u(t) \\ y(t) = B^t x(t) + D^t u(t) \end{cases}$$

est c.o [1].

Dans le paragraphe suivant, on va chercher certaines formes canoniques pour des matrices associées aux systèmes lineaires invariants en temps, telles que la forme de Jordan, la forme compagne et celle de Frobenius, et leurs relations avec la contrôlabilité.

1.3 Les formes canoniques et la contrôlabilité

1.3.1 La forme de Jordan

Détermination de la forme de Jordan:

La forme de Jordan associée au système (1.2) est donnée par:

$$J = \text{diag} [J_1, J_2, \dots, J_k], G = [G_1, G_2, \dots, G_k]^t$$

où:

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{i2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & J_{ir(i)} \end{bmatrix}, G_i = [G_{i1}, G_{i2}, \dots, G_{ir(i)}]^t$$

et

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} s_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & s_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & s_i \end{bmatrix}, G_{ij} = [g_{ij1}, g_{ij2}, \dots, g_{ijn(j)}]^t$$

avec $s_1, s_2, \dots, s_k$ sont les valeurs propres distinctes de A , de nombre de multiplicité n_i . J_i le bloc de Jordan associé à la valeur propre s_i , $J_{ij} \in M_{n_{ij}}(\mathbb{R})$, $r(i)$ le nombre de blocs, $G_i \in M_{n_i \times m}(\mathbb{R})$, $G_{ij} \in M_{n_{ij} \times m}(\mathbb{R})$ et $g_{ijn(j)}$ sont les lignes de G_{ij} qui correspond aux lignes de J_{ij} . et on a:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{r(i)} n_{ij}$$

La relation entre la forme de Jordan et la controlabilité

Soit le système (1.2). On va utiliser la forme de Jordan pour étudier sa controlabilité.

Lemme 1 *Les lignes de la matrice $(sI - J)^{-1}G$ sont linéairement indépendantes si et seulement si pour tout $i \in \underline{k}$, les lignes de $(sI - J_i)^{-1}G_i$ sont aussi linéairement indépendantes.*

Démonstration 1 Voir [17].

Théorème 5 *Le système (1.2) est complètement controlable si et seulement si: pour tout $i \in \underline{k}$, les lignes de la matrice G qui correspond aux derniers lignes des blocs de Jordan: $g_{i1n_{i1}}, g_{i2n_{i2}}, \dots, g_{ir(i)n_{ir(i)}}$ sont linéairement indépendantes.*

Démonstration 2 *Supposons que le système (1.2) est complètement controlable. Alors: le système:*

$$z' = Jz + Gu \tag{1.5}$$

l'est aussi. En utilisant la transformation de Laplace on aura:

$$s\bar{z} = J\bar{z} + G\bar{u}$$

d'où:

$$\bar{z} = (sI - J)^{-1} G\bar{u}$$

et d'après le lemme précédent, on a $r(i)$ lignes ont la forme:

$$(s - s_i)^{-1} g_{i1n_{i1}}, (s - s_i)^{-1} g_{i2n_{i2}}, \dots, (s - s_i)^{-1} g_{ir(i)n_{ir(i)}}$$

donc, si on suppose que ces lignes ne sont pas linéairement indépendantes, alors, on aura que les lignes de $(sI - J_i)^{-1} G_i$ ne sont pas linéairement indépendantes. D'où, d'après le lemme précédent, les lignes de $(sI - J)^{-1} G$ sont linéairement dépendantes. D'où on aura que le système (1.5) est non c.c, d'où le système (1.2) est non c.c. Ce qui contredit l'hypothèse.

Inversement, supposons que les lignes:

$$(s - s_i)^{-1} g_{i1n_{i1}}, (s - s_i)^{-1} g_{i2n_{i2}}, \dots, (s - s_i)^{-1} g_{ir(i)n_{ir(i)}}$$

sont linéairement indépendantes. On remarque qu'une ligne quelconque l de $(sI - J_{ij})^{-1} G_{ij}$ a la forme suivante:

$$(s - s_i)^{-n_{ij}+l-1} g_{ijn_{ij}}$$

donc, les lignes de $(sI - J_{ij})^{-1} G_{ij}$ sont linéairement indépendantes. D'où les lignes de $(sI - J_i)^{-1} G_i$ sont aussi linéairement indépendantes. Et par suite on aura le même résultat sur les lignes de $(sI - J)^{-1} G$. Et cela signifie que le système (1.5) est c.c, d'où (1.2) l'est aussi.

Exemple 1 Soit le système: $x' = Ax + Bu$, où:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a le polynôme caractéristique de A est:

$$P(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s-2 \end{bmatrix} = (s-1)(s-2)$$

d'où les racines caractéristiques sont:

$$s_1 = 1, s_2 = 2$$

la transformation est:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où la forme de Jordan associée à (A, B) est:

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, G = TB = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{111} \\ g_{211} \end{bmatrix}$$

il est clair que les lignes g_{111} et g_{211} sont linéairement indépendantes. On remarque aussi que la paire (A, B) est c.c car:

$$\text{rang}[B, AB] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

1.3.2 La forme compagne

Etude algébrique

Soit la forme classique d'une équation différentielle d'ordre n :

$$z^{(n)}(t) + k_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + k_n z(t) = u(t) \quad (1.6)$$

Posons:

$$\begin{cases} w_1 = z \\ w_2 = z^{(1)} \\ \vdots \\ w_n = z^{(n-1)} \end{cases}$$

on aura:

$$\begin{cases} w'_1 = z^{(1)} = w_2 \\ w'_2 = z^{(2)} = w_3 \\ \vdots \\ w'_{n-1} = z^{(n-1)} = w_n \\ w'_n = z^{(n)} = -k_1 z^{(n-1)} - k_2 z^{(n-2)} - \dots - k_n z + u \\ \quad \quad \quad = -k_1 w_n - k_2 w_{n-1} - \dots - k_n w_1 + u \end{cases}$$

Soit

$$w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^t$$

d'où:

$$w' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \dots & 1 \\ -k_n & -k_{n-1} & -k_{n-2} & \dots & -k_1 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

i.e

$$w' = Cw + du \tag{1.7}$$

C est une matrice d'ordre $n \times n$ dite forme Compagne.

Inverssement , soit le système suivant:

$$x' = Ax + bu \tag{1.8}$$

où A est d'ordre $n \times n$ et b est un n -vecteur colonne. On veut trouver la forme compagne associée au système (1.8). La réponse est donnée dans le théorème suivant:

Théorème 6 *Un système de la forme (1.8) peut être transformé par une transformation*

non singulière $w = Tx$, à la forme compagne (1.7) si l'on a:

$$U = [b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$$

est de rang égal à n .

Inversément, si une telle transformation non singulière T existe, alors:

$$\text{rang} U = n$$

Démonstration 3 Pour une démonstration voir [1].

Remarque 3 On peut avoir le même résultat obtenu dans ce théorème dans le cas du système (1.2) dans lequel B est une matrice $n \times m$ [1].

Théorème 7 Le système (1.8) est transformable à la forme compagne si et seulement s'il est complètement contrôlable.

Démonstration 4 On obtient une démonstration, en utilisant les théorèmes 1 et 6.

Maintenant, on donne un théorème important caractérisant la forme compagne d'une matrice [21].

Théorème 8 Soit A une matrice carrée $n \times n$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1. A est similaire à la forme compagne.
2. $\text{rang}(\lambda I - A) = n - 1$, pour toute valeur propre λ de A .
3. Le nombre géométrique (i.e le nombre des vecteurs propres associés à la valeur propre λ qui sont linéairement indépendants) de chacune des valeurs propres de A est égal à 1 i.e $\gamma(\lambda) = 1, \forall \lambda \in \sigma(A)$.
4. Le polynôme caractéristique $k(\lambda)$ de A est identique à son polynôme minimal $m(\lambda)$.
5. Il existe un n -vecteur b tels que les vecteurs: $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ soient linéairement indépendants.

Exemple 2 Soit la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est: $k(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. D'où les valeurs propres de A sont: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

1. La forme compagne associée à A est:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Montrons que $\text{rang}(\lambda I - A) = n - 1, \forall \lambda \in \sigma(A)$, où $n = 3$:

$$\text{Pour } \lambda = 1: \det(I - A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{d'où } \text{rang}(I - A) < 3. \text{ Soient } \alpha, \beta \text{ de } R \text{ tel que: } \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0, \text{ alors}$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \text{rang}(I - A) = 2$$

Pour $\lambda = 2$, on aura: $\text{rang}(2I - A) = 2$ de la même manière.

3. Montrons que $\gamma(\lambda) = 1, \forall \lambda \in \sigma(A)$. Pour $\lambda = 1$. Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a:

$$(I - A)x = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

d'où $x_1 = 0$ et $x_2 = -x_3$. Donc, le sous espace propre associé à la valeur propre 1

est engendré par un seul vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. D'où $\dim[\ker(I - A)] = 1$, i.e $\gamma(\lambda) = 1$.

Pour $\lambda = 2$, on aura $\gamma(2) = 1$ directement puisque 2 est une valeur propre simple.

4. Montrons que: $k(\lambda) = m(\lambda)$. On va calculer le polynôme minimal de A par la méthode des facteurs invariants de A . On a d'abord les diviseurs déterminantales de A sont:

$$d_0 = 1$$

$$d_1 = \gcd[(\lambda - 1), -1, 1, 0, (\lambda - 2)] = 1$$

$$d_2 = \gcd[(\lambda - 1)^2 + 2, -(\lambda - 1), 1 - (\lambda - 1), (\lambda - 1)(\lambda - 2), -1, -(\lambda - 2)] = 1$$

$$d_3 = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = k(\lambda)$$

d'où, les facteurs invariants de A sont:

$$i_1 = \frac{d_1}{d_0} = 1$$

$$i_2 = \frac{d_2}{d_1} = 1$$

$$i_3 = \frac{d_3}{d_2} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = m(\lambda) = k(\lambda)$$

5. Montrons l'existence d'un vecteur b tel que: b, Ab, A^2b soient linéairement indépen-

dants. Si on prend:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ alors: } Ab = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ et } A^2b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que: $\alpha b + \beta Ab + \gamma A^2b = 0$. Alors:

$$\begin{cases} -\beta - 3\gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Etude géométrique

Soit X un espace vectoriel de dimension n sur un corps F , et soit $A : X \rightarrow X$ un endomorphisme arbitraire, $k(\lambda)$ son polynôme caractéristique et $m(\lambda)$ son polynôme minimal.

Définition 4 Si $k(\lambda) = m(\lambda)$, on dit que A est cyclique (ou non dérogatoire).

Remarque 4 D'après le théorème 8, Si A est un endomorphisme cyclique, alors il existe un $y \in X$ tel que $y, Ay, A^2y, \dots, A^{n-1}y$ sont linéairement indépendants.

Définition 5 Un tel y est dit générateur cyclique de X relativement à A .

La structure compagne

On va utiliser maintenant une autre alternative (étude géométrique) pour obtenir une forme compagne analogue à celle obtenue algébriquement dans la section précédente.

Soit A un endomorphisme cyclique de générateur y et soit:

$$m(\lambda) = \lambda^n - (a_1 + a_2\lambda + \dots + a_n\lambda^{n-1})$$

son polynôme minimal.

Définissons les polynômes auxiliaires suivants:

$$\begin{aligned}
m^{(0)}(\lambda) &= m(\lambda) \\
m^{(1)}(\lambda) &= \lambda^{n-1} - (a_2 + a_3\lambda + \dots + a_n\lambda^{n-2}) \\
&\vdots \\
m^{(n-1)}(\lambda) &= \lambda - a_n \\
m^{(n)}(\lambda) &= 1
\end{aligned}$$

On a la relation de récurrence suivante:

$$\lambda m^{(i)}(\lambda) = m^{(i-1)}(\lambda) + a_i m^{(n)}(\lambda), i \in \{1, \dots, n\} \quad (1.9)$$

Soient maintenant les vecteurs:

$$\begin{aligned}
e_i &= m^{(i)}(A)y, i \in \underline{n} \\
e_0 &= 0
\end{aligned}$$

$\{e_i\}_{i \in \underline{n}}$ forment une base dans X .

En remplaçant dans (1.9) λ par A et en multipliant par y , on aura:

$$A m^{(i)}(A)y = m^{(i-1)}(A)y + a_i m^{(n)}(A)y, i \in \underline{n}$$

i.e

$$Ae_i = e_{i-1} + a_i e_n, i \in \underline{n} \quad (1.10)$$

i.e

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
Ae_1 & = & e_0 + a_1 e_n \\
& = & 0e_1 + \dots + 0e_{n-1} + a_1 e_n \\
Ae_2 & = & e_1 + a_2 e_n \\
& = & 1e_1 + 0e_2 + \dots + a_2 e_n \\
& \vdots & \\
Ae_{n-1} & = & 0e_1 + \dots + 1e_{n-2} + 0e_{n-1} + a_{n-1} e_n \\
Ae_n & = & 0e_1 + \dots + 0e_{n-2} + 1e_{n-1} + a_n e_n
\end{array} \right.$$

D'où la matrice associée à l'endomorphisme A dans la base $\{e_i\}_{i \in \underline{n}}$ est:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

C est dite la matrice compagne associée à A .

Remarque 5 *On voit que la forme compagne obtenue géométriquement est équivalente à celle obtenue algébriquement.*

1.3.3 La forme canonique de Frobenius

Détèrmination de la forme de Frobenius

Dans ce paragraphe, on va donner la forme analogue à la forme compagne, dite la forme de Frobenius associée à une matrice non nécessairement cyclique.

Définition 6 *On définit la matrice de Frobenius comme étant la matrice d'ordre $r \times r$ notée F_r qui a la forme:*

$$F_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & . & 0 & f_r \\ 1 & 0 & . & . & f_{r-1} \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & . \\ 0 & 0 & . & 1 & f_1 \end{bmatrix}$$

où f_i sont définies dans ce qui suit.

Proposition 1 *Toute matrice carrée d'ordre $n \times n$ peut être réduite par une transformation non singulière à la somme directe de s matrices de Frobenius: $F_{r_1}, F_{r_2}, \dots, F_{r_s}$, où le polynôme caractéristique de F_{r_i} divise tous les polynômes caractéristiques des matrices précédentes [26].*

Dans le cas où A est cyclique, on a: $s = 1, r_1 = n$.

La relation entre la forme de Frobenius et la contrôlabilité

Soit le système dynamique invariant en temps:

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1.11)$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $B = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ avec $b_i, i \in \underline{m}$, des vecteurs colonnes, $C \in M_{r,n}(\mathbb{R})$, $D \in M_{r,m}(\mathbb{R})$.

Si le système (1.11) est complètement contrôlable alors:

$$\text{rang} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

i.e la matrice $U = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ admet n vecteurs linéairement indépendants. Une méthode du choix de ces vecteurs est de commencer par le vecteur b_1 et d'étudier l'indépendance linéaire des vecteurs $b_1, Ab_1, \dots, A^{d_1-1}b_1$, jusqu'à l'étude de l'indépendance des vecteurs $b_m, Ab_m, \dots, A^{d_m-1}b_m$. On aura à la fin de cette étude une matrice d'ordre $n \times n$ non singulière qui a la forme suivante:

$$T = \begin{bmatrix} b_1, Ab_1, \dots, A^{d_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{d_2-1}b_2, \dots, b_j, \\ Ab_j, \dots, A^{d_j-1}b_j, \dots, b_m, Ab_m, \dots, A^{d_m-1}b_m \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

où $d_j, j \in \underline{m}$, les degrés de $b_j, Ab_j, \dots, A^{d_j-1}b_j$ sont appelés: les indices de contrôlabilité, et on a:

$$\sum_{j=1}^m d_j = n$$

d'où on a le théorème suivant [17].

Théorème 9 *Si le système (1.11) est complètement contrôlable et $\text{rang} B = n$, alors, la paire (A, B) peut être transformée par la transformation non singulière (1.12) à la forme*

canonique de Frobenius suivante:

$$F = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & . & . & F_{1m} \\ F_{21} & F_{22} & . & . & F_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ F_{m1} & F_{m2} & . & . & F_{mm} \end{bmatrix}, E = T^{-1}B = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1m}] \quad (1.13)$$

où $F_{ii} \in M_{d_i}(\mathbb{R})$, $F_{ij} \in M_{d_i \times d_j}(\mathbb{R})$ et e_{1j} sont données comme suit:

$$F_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & .. & 0 & f_{ii_1} \\ 1 & .. & . & . \\ . & .. & . & . \\ 0 & .. & 1 & f_{ii_{d_i}} \end{bmatrix}, F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & .. & 0 & f_{ij_1} \\ 0 & .. & . & . \\ . & .. & . & . \\ 0 & .. & 0 & f_{ij_{d_i}} \end{bmatrix}, e_{1j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_1 + d_2 + \dots + d_{j-1} + 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Remarque 6 La définition de la contrôlabilité reste valable pour des systèmes linéaires commandés discrets i.e sous forme:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

où $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r,n}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{r,m}(\mathbb{R})$. D'où, la détermination des formes canoniques présentées auparavant pour le cas des systèmes linéaires discrets peut être obtenue d'une façon analogue.

Chapter 2

FORMES CANONIQUES SUR L'ANNEAU DES POLYNOMES

2.1 Introduction

Dans le premier chapitre, l'étude était sur les formes canoniques des matrices constantes i.e avec des entrées dans $\mathbb{R}$, ici on généralise l'étude à des matrices avec des entrées polynomiales i.e dans l'anneau des polynômes à une seule variable, puis à deux variables et à coefficients dans $\mathbb{R}$, et on donne la forme compagne et celle de Smith.

2.2 Formes canoniques: cas unidimensionnel

2.2.1 Forme compagne sur l'anneau $\mathbb{R}[s]$

Dans cette section, on va faire une extension du travail fait dans le cas des matrices constantes, pour les matrices polynomiales, en utilisant la notion de module qui est justifiée du faite que $\mathbb{R}[s]$ n'est pas un corps. On va voir que sur cet anneau, la forme compagne peut être définie d'une façon analogue au cas des corps.

Définition 7 *On appelle matrice polynomiale $P(s)$, toute matrice rectangulaire dont ses éléments sont des polynômes en s .*

On désigne par $(\mathbb{R}[s])^n$ l'ensemble des vecteurs de n composantes de $\mathbb{R}[s]$.

Proposition 2 *$(\mathbb{R}[s])^n$ est un module libre de type fini sur l'anneau $\mathbb{R}[s]$.*

Démonstration 5 *La démonstration de cette proposition se base sur le faite que si A est un anneau alors le A module A^n est libre de type fini et de longueur (ou dimension) égale à n [12].*

La struture compagne

Théorème 10 *Soit $A(s) : X \rightarrow X$ un endomorphisme sur le $\mathbb{R}[s]$ module $X = (\mathbb{R}[s])^n$. Comme l'anneau $\mathbb{R}[s]$ est commutatif, alors, on peut appliquer d'après [12] le théorème de Caley-Hamilton i.e: si pour $\lambda(s) \in \mathbb{R}[s]$, on définit le polynôme caractéristique de $A(s)$ par:*

$$k(\lambda(s)) = \det(\lambda(s)I - A(s))$$

Alors, le théorème de Caley-Hamilton affirme que:

$$k(A(s)) = 0$$

Définition 8 On définit le polynôme minimal de l'endomorphisme $A(s)$ et on le note par $m(\lambda(s))$, comme étant le polynôme de plus petit degré tel que:

$$m(A(s)) = 0$$

Définition 9 On dit que l'endomorphisme $A(s)$ est cyclique si son polynôme minimal coïncide avec son polynôme caractéristique.

Dans ce cas, d'après le théorème 8 du chapitre 1, il existe un vecteur de X , $g(s)$ (générateur cyclique de X relativement à $A(s)$), tels que:

$$g(s), A(s)g(s), \dots, A(s)^{n-1}g(s)$$

soient linéairement indépendants.

On définit les polynômes auxiliaires comme suit:

$$\begin{aligned} m^{(0)}(\lambda(s)) &= m(\lambda(s)) \\ &= \lambda^n(s) - [a_1(s) + a_2(s)\lambda(s) + \dots + a_n(s)\lambda^{n-1}(s)] \\ m^{(1)}(\lambda(s)) &= \lambda^{n-1}(s) - [a_2(s) + a_3(s)\lambda(s) + \dots + a_n(s)\lambda^{n-1}(s)] \\ &\vdots \\ m^{(n-1)}(\lambda(s)) &= \lambda(s) - a_n(s) \\ m^{(n)}(\lambda(s)) &= 1 \end{aligned}$$

Soient maintenant les vecteurs:

$$e_i(s) = m^{(i)}(A(s))g(s), i \in \underline{n}, e_0(s) = 0$$

On va montrer que $(e_i(s))_{i \in \underline{n}}$ forment une base dans le module X :

Soient $p_1(s), p_2(s), \dots, p_n(s) \in \mathbb{R}[s]$:

$$p_1(s)e_1(s) + p_2(s)e_2(s) + \dots + p_n(s)e_n(s) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 0 = & p_1(s)[A^{n-1}(s) - a_2(s) - a_3(s)A(s)]g(s) + p_2(s)[A^{n-2}(s) - a_3(s) - a_4(s)A(s) - \dots \\ & - a_n(s)A^{n-3}(s)]g(s) + p_3(s)[A^{n-3}(s) - a_4(s) - a_5(s)A(s) - \dots - a_n(s)A^{n-4}(s)] \times \\ & g(s) + p_{n-1}(s)[A(s) - a_n(s)]g(s) + p_n(s)g(s) \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} 0 = & p_1(s)A^{n-1}(s)g(s) + [-p_1(s)a_n(s) + p_2(s)]A^{n-2}(s)g(s) + [-p_2(s)a_n(s) + p_3(s)] \times \\ & A^{n-3}(s)g(s) + \dots + [-p_1(s)a_3(s) - p_2(s)a_4(s) - \dots - p_{n-1}(s)]A(s)g(s) + \\ & [-p_1(s)a_2(s) - p_2(s)a_3(s) - \dots - p_{n-1}(s)a_n(s) + p_n(s)]g(s) \end{aligned}$$

comme $g(s), A(s)g(s), \dots, A(s)^{n-1}g(s)$ sont linéairement indépendants, alors:

$$\begin{aligned} p_1(s) &= 0 \\ -p_1(s)a_n(s) + p_2(s) &= 0 \Rightarrow p_2(s) = 0 \\ -p_2(s)a_n(s) + p_3(s) &= 0 \Rightarrow p_3(s) = 0 \\ &\vdots \\ -p_1(s)a_3(s) - p_2(s)a_4(s) - \dots - p_{n-1}(s) &= 0 \Rightarrow p_{n-1}(s) = 0 \\ -p_1(s)a_2(s) - \dots - p_{n-1}(s)a_n(s) + p_n(s) &= 0 \Rightarrow p_n(s) = 0 \end{aligned}$$

d'où, $(e_i(s))_{i \in \underline{n}}$ sont linéairement indépendants. Donc,

$$A(s)e_i(s) = e_{i-1}(s) + a_i(s)e_n(s), \forall i \in \underline{n}$$

d'où, la forme compagne associée à l'endomorphisme $A(s)$ est:

$$C(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 1 \\ a_1(s) & a_2(s) & \dots & a_{n-1}(s) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

et la transformation est:

$$T(s) = [e_1(s), e_2(s), \dots, e_n(s)]$$

Exemple 3 Soit l'endomorphisme:

$$f : (\mathbb{R}[s])^4 \rightarrow (\mathbb{R}[s])^4$$

tel que:

$$f \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \\ x_4(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s^2 + 1)x_1(s) \\ (2s - 3)x_2(s) + x_1(s) \\ sx_3(s) + x_2(s) \\ (s + 2)x_4(s) \end{bmatrix}, \quad x_i(s) \in \mathbb{R}[s]$$

la matrice associée à $f(s)$ par rapport à la base canonique de $(\mathbb{R}[s])^4$:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0)^t, \quad e_2 = (0, 1, 0, 0)^t, \quad e_3 = (0, 0, 1, 0)^t, \quad e_4 = (0, 0, 0, 1)^t$$

est $A(s)$. Elle est calculée comme suit:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= [(s^2 + 1), 1, 0, 0]^t = (s^2 + 1)e_1 + 1e_2 \\ f(e_2) &= [0, (2s - 3), 1, 0]^t = (2s - 3)e_2 + 1e_3 \\ f(e_3) &= [0, 0, s, 0]^t = se_3 \\ f(e_4) &= [0, 0, 0, s + 2]^t = (s + 2)e_4 \end{aligned}$$

donc:

$$A(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2s - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s + 2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de $A(s)$ est:

$$\begin{aligned}
 k(\lambda) &= \det(\lambda I - A(s)) \\
 &= \det \begin{bmatrix} \lambda - (s^2 + 1) & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - (2s - 3) & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - (s + 2) \end{bmatrix} \\
 &= [\lambda - (s^2 + 1)] [\lambda - (2s - 3)] [\lambda - s] [\lambda - (s + 2)]
 \end{aligned}$$

On va montrer que $A(s)$ est cyclique. On a:

$$d_0(\lambda) = 1$$

$$d_1(\lambda) = 1$$

$$d_2(\lambda) = 1$$

$$d_3(\lambda) = 1$$

$$d_4(\lambda) = k(\lambda)$$

d'où:

$$i_1(\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{d_0(\lambda)} = 1$$

$$i_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = 1$$

$$i_3(\lambda) = \frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = 1$$

$$i_4(\lambda) = \frac{d_4(\lambda)}{d_3(\lambda)} = 1 = m(\lambda)$$

donc, $A(s)$ est cyclique. Alors, il existe un vecteur de $(\mathbb{R}[s])^4$ noté $g(s)$ tels que:

$$g(s), A(s)g(s), A^2(s)g(s), A^3(s)g(s)$$

soient linéairement indépendants. Posons:

$$g(s) = [1, 1, 1, 1]^t$$

Alors:

$$A(s)g(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 1 \\ -2 + 2s \\ 1 + s \\ s + 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2(s)g(s) = \begin{bmatrix} (s^2 + 1)^2 \\ 5s^2 + 7 - 10s \\ -2 + s^2 + 3s \\ (s + 2)^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3(s)g(s) = \begin{bmatrix} (s^2 + 1)^3 \\ s^4 - 33s^2 - 20 + 10s^3 + 44s \\ 7 + 8s^2 - 12s + s^3 \\ (s + 2)^3 \end{bmatrix}$$

On va montrer que ces vecteurs sont linéairement indépendants i.e:

$$\det [g(s), A(s)g(s), A^2(s)g(s), A^3(s)g(s)] \neq 0$$

on a:

$$[g(s), A(s)g(s), A^2(s)g(s), A^3(s)g(s)] =$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & s^2 + 1 & (s^2 + 1)^2 & (s^2 + 1)^3 \\ 1 & 2s - 2 & 5s^2 - 10s + 7 & s^4 - 33s^2 - 20 + 10s^3 + 44s \\ 1 & s + 1 & s^2 + 3s - 2 & 7 + 8s^2 - 12s + s^3 \\ 1 & s + 2 & (s + 2)^2 & (s + 2)^3 \end{bmatrix} \\ &= A_0 + A_1s + A_2s^2 + A_3s^3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & -20 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} + A_1s + A_2s^2 + A_3s^3 \end{aligned}$$

où A_0, A_1, A_2, A_3 sont des matrices constantes à coefficients dans $\mathbb{R}$. On sait que le déterminant d'une matrice polynomiale est non nul si $\det A_0 \neq 0$ ou $\det A_3 \neq 0$ voir [14].

On a:

$$\det A_0 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 7 & -20 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} = 90 \neq 0$$

alors $g(s), A(s)g(s), A^2(s)g(s), A^3(s)g(s)$ sont linéairement indépendants. On va donc définir les polynômes auxiliaires comme suit:

$$\begin{aligned} m^{(0)}(\lambda) &= m(\lambda) = \lambda^4 - \begin{bmatrix} a_1(s) + a_2(s)\lambda + \\ a_3(s)\lambda^2 + a_4(s)\lambda^3 \end{bmatrix} \\ m^{(1)}(\lambda) &= \lambda^3 - [a_2(s) + a_3(s)\lambda + a_4(s)\lambda^2] \\ m^{(2)}(\lambda) &= \lambda^2 - [a_3(s) + a_4(s)\lambda] \\ m^{(3)}(\lambda) &= \lambda - a_4(s) \\ m^{(4)}(\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned} a_1(s) &= -s(s+2)(2s-3)(s^2+1) \\ a_2(s) &= s(2s^2+s-6) \\ a_3(s) &= -4(s^3+s^2+s-2) \\ a_4(s) &= s(s+4) \end{aligned}$$

puis, on aura:

$$e_i(s) = m^{(i)}(A(s))g(s), i = \overline{1,4}, e_0(s) = 0$$

i.e

$$e_1(s) = A^3(s)g(s) - a_4(s)A^2(s)g(s) - a_3(s)A(s)g(s) - a_2(s)Ig(s)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (s^2+1)^3 - 2s(s+2)(2s-3) + 4(s^3+s^2+s-2)(s^2+1) \\ \left(s^4 - 33s^2 - 20 + 10s^3 + 44s - 2s(s+2)(2s-3) + \right. \\ \left. 8(s^3+s^2+s-2)(-1+s) \right) \\ 7 + 8s^2 - 12s + s^3 - 2s(s+2)(2s-3) + 4(s^3+s^2+s-2)(1+s) \\ (s+2)^3 - 2s(s+2)(2s-3) + 4(s^3+s^2+s-2)(s+2) \end{bmatrix} \\
e_2(s) &= \begin{bmatrix} (s^2+1)^2 - s(s+4)(s^2+1) + 4s^3 + 4s^2 + 4s - 8 \\ 9s^2 - 1 - 6s - s(s+4)(-2+2s) + 4s^3 \\ -10 + 5s^2 + 7s - s(s+4)(1+s) + 4s^3 \\ (s+2)^2 - s(s+4)(s+2) + 4s^3 + 4s^2 + 4s - 8 \end{bmatrix} \\
e_3(s) &= \begin{bmatrix} s^2 + 1 - s(s+4) \\ -2 + 2s - s(s+4) \\ 1 + s - s(s+4) \\ s + 2 - s(s+4) \end{bmatrix} \\
e_4(s) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

comme $g(s), A(s)g(s), A^2(s)g(s), A^3(s)g(s)$ sont linéairement indépendants, alors $(e_i(s))_{i \in \mathbb{N}}$ sont aussi linéairement indépendants. Donc:

$$A(s)e_i(s) = e_{i-1}(s) + a_i(s)e_4(s), \quad i = \overline{1, 4}$$

d'où, la matrice associée à f dans cette base est:

$$C(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -s(s+2)(2s-3)(s^2+1) & s(2s^2+s-6) & -4(s^3+s^2+s-2) & s(s+4) \end{bmatrix}$$

et la transformation est:

$$T(s) = [e_1(s), e_2(s), e_3(s), e_4(s)]$$

2.2.2 Forme de Smith sur l'anneau $\mathbb{R}[s]$

Opérations élémentaires sur les matrices polynomiales

Soit $A(s)$ une matrice polynomiale d'ordre $n \times m$ et de rang r .

Introduisons les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes de la matrice $A(s)$ suivantes:

1. Interchanger deux lignes ou colonnes de $A(s)$ par exemple la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ ligne ou colonne.
2. L'addition à une ligne ou colonne de $A(s)$ par exemple la $i^{\text{ème}}$, la $j^{\text{ème}}$ multipliée par un polynôme arbitraire $p(s)$ de $\mathbb{R}[s]$.
3. Multiplication d'une ligne ou colonne de $A(s)$ par exemple la $i^{\text{ème}}$ par une constante arbitraire c de $\mathbb{R}$.

Si on applique successivement ces opérations à gauche puis à droite sur la matrice identité d'ordre $n \times m$ on aura les matrices élémentaires suivantes:

$$M_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & p(s) & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \vdots \end{bmatrix}$$

$$M_3(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$M'_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & p(s) & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M'_3(s) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Définition 10 On dit que deux matrices polynomiales $A_1(s)$ et $A_2(s)$ de même ordre sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre par une suite d'opérations élémentaires, et cela est équivalent à dire que:

$$A_1(s) = P(s)A_2(s)Q(s)$$

où $P(s)$ et $Q(s)$ sont des produits de matrices élémentaires, elles ont donc, le déterminant non nul et constant (i.e $P(s)$, $Q(s)$ sont unimodulaires).

Théorème 11 Deux matrices sur un anneau principal sont équivalentes si et seulement s'il existe une suite d'opérations élémentaires transformant l'une à l'autre [22].

Rappelons que $\mathbb{R}[s]$ est un anneau principal [12], d'où le théorème suivant:

Théorème 12 Toute matrice polynomiale $A(s)$ d'ordre $n \times m$ et de rang r est équivalente à la forme suivante dite la forme de Smith:

$$S(s) = \begin{bmatrix} i_1(s) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & i_r(s) & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

où $i_1(s)$, ..., $i_r(s)$ sont les polynômes invariants de $A(s)$ qui vérifient les propriétés suivantes:

1. $i_k(s)$ divise $i_{k-1}(s)$, $\forall k = \overline{2, r}$
2. $i_k(s) = \frac{d_k(s)}{d_{k-1}(s)}$, $d_0(s) = 1$

Démonstration 6 Une démonstration de ce théorème se base sur l'utilisation des opérations élémentaires sur la matrice $A(s)$ afin de la réduire à la forme $S(s)$. Pour plus de détail voir [11].

Exemple 4 Soit la matrice polynomiale carrée:

$$A(s) = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

Trouvons les diviseurs déterminantales de $A(s)$:

$$\begin{aligned}d_0(s) &= 1 \\d_1(s) &= \gcd(s+2, s+1, -1, -2) = 1 \\d_2(s) &= \det A(s) = s(s+3)\end{aligned}$$

d'où, les polynômes invariants de $A(s)$ sont:

$$\begin{aligned}i_1(s) &= \frac{d_1(s)}{d_0(s)} = 1 \\i_2(s) &= \frac{d_2(s)}{d_1(s)} = s(s+3)\end{aligned}$$

d'où, la forme de Smith associée à $A(s)$ est:

$$S(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s(s+3) \end{bmatrix}$$

Montrons l'équivalence entre $A(s)$ et $S(s)$. Dans $A(s)$, ajoutons à la 2^{ème} colonne, la 1^{ère} colonne multipliée par $(s+1)$ i.e:

$$M'_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on aura:

$$A(s)M'_1(s) = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+2 & s(s+3) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ajoutons à la 1^{ère} ligne la 2^{ème} ligne multipliée par $(s+2)$, i.e:

$$M_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1(s)A(s)M'_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & s(s+3) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

permutons les deux lignes, i.e:

$$M_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2(s)M_1(s)A(s)M_1'(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s(s+3) \end{bmatrix}$$

multiplions la 1^{ère} ligne par la constante -1 , i.e:

$$M_3(s) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_3(s)M_2(s)M_1(s)A(s)M_1'(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s(s+3) \end{bmatrix}$$

donc, il existe deux matrices unimodulaires:

$$P(s) = M_3(s)M_2(s)M_1(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}$$

et:

$$Q(s) = M_1'(s) = \begin{bmatrix} 1 & s+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec:

$$\det P(s) = 1 \neq 0$$

$$\det Q(s) = 1 \neq 0$$

tel que:

$$S(s) = P(s)A(s)Q(s)$$

2.3 Formes canoniques: cas bidimensionnel

2.3.1 Introduction

On va présenter dans cette section une généralisation des formes: de Smith et compagne pour les systèmes linéaires définies sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$.

2.3.2 La forme de Smith sur $\mathbb{R}[s, z]$

Avant d'étudier cette forme, donnons d'abord quelques définitions et résultats concernant l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$ qui sont utiles dans cette section.

Définition 11 On appelle *matrice polynomiale sur $\mathbb{R}^{n \times m}[s, z]$* toute matrice $P(s, z)$ dont ces entrées sont des polynômes à deux variables s et z i.e:

$$P(s, z) = [p_{ij}(s, z)]_{i \in \underline{n}, j \in \underline{m}}, p_{ij}(s, z) \in \mathbb{R}[s, z]$$

Définition 12 On dit que deux matrices polynomiales $P_1(s, z)$ et $P_2(s, z)$ sont *équivalentes* s'il existe deux matrices polynomiales unimodulaires $M(s, z)$ et $N(s, z)$ telles que:

$$P_1(s, z) = M(s, z)P_2(s, z)N(s, z)$$

Définition 13 Deux matrices polynomiales $P_1(s, z)$ et $P_2(s, z)$ du même ordre $n \times n$ sont dites *similaires* s'il existe une matrice polynomiale unimodulaire $M(s, z)$ tel que:

$$P_1(s, z) = M(s, z)P_2(s, z)M^{-1}(s, z)$$

Proposition 3 L'anneau $\mathbb{R}[s, z]$ n'est pas principal [2].

Définition 14 Soit $P(s, z)$ une matrice polynomiale d'ordre $n \times m$ et de rang r . On définit la *forme de Smith* de $P(s, z)$ comme étant une matrice polynomiale notée par $S(s, z)$ qui a la forme suivante:

$$S(s, z) = \text{diag}[i_1(s, z), i_2(s, z), \dots, i_r(s, z), 0, \dots] \quad (2.3)$$

où $i_k(s, z)$ sont les *facteurs invariants* sur $\mathbb{R}[s, z]$ associées à $P(s, z)$. Ils vérifient les relations suivantes:

$$i_k(s, z) = \frac{d_k(s, z)}{d_{k-1}(s, z)}, k \in \underline{r}, d_0(s, z) = 1.$$

Théorème 13 Soit R un anneau qui a la propriété suivante: chaque deux éléments de R possèdent un plus grand diviseur commun. Alors, une condition nécessaire pour qu'une

matrice $M \in M_{n,m}(R)$ soit équivalente à sa forme de Smith est que R est un domaine principal [19].

On va donner maintenant un cas particulier dans lequel l'équivalence entre une matrice sur $\mathbb{R}[s, z]$ et sa forme de Smith est satisfaite.

Théorème 14 Soit la matrice d'ordre $n \times n$ sur $\mathbb{R}[s, z]$ qui a la forme suivante:

$$P(s, z) = sI_n - A(z) \quad (2.4)$$

Alors, $P(s, z)$ est équivalente à la forme de Smith:

$$S(s, z) = \begin{bmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i_{n-2}(s, z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_{n-1}(s, z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i_n(s, z) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

si et seulement si : la matrice polynomiale $A(z)$ sur $\mathbb{R}[z]$ est similaire sur $\mathbb{R}[s, z]$ à la forme compagne $C(z)$ qui a la forme:

$$C(z) = \begin{bmatrix} C_1(z) & 0 & 0 \\ 0 & C_2(z) & 0 \\ 0 & 0 & C_3(z) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

où $C_i(z)$ sont des matrices polynomiales d'ordre $n_i \times n_i$ d'une forme compagne, qui ont les polynômes caractéristiques suivants:

$$\begin{aligned} \det[sI_{n_1} - C_1(z)] &= i_{n-2}(s, z) \\ \det[sI_{n_2} - C_2(z)] &= i_{n-1}(s, z) \\ \det[sI_{n_3} - C_3(z)] &= i_n(s, z) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Démonstration 7 Voir [7] et [8].

Exemple 5 Soit la matrice polynomiale sur $\mathbb{R}^2[s, z]$ définie par:

$$P(s, z) = \begin{bmatrix} s+z & 2z+1 \\ 1 & s+z^2+2 \end{bmatrix} \\ = sI_2 - A(z)$$

où:

$$A(z) = \begin{bmatrix} -z & -(2z+1) \\ -1 & -(z^2+2) \end{bmatrix}$$

Cherchons les diviseurs déterminantaux de $P(s, z)$:

$$d_0(s, z) = 1$$

$$d_1(s, z) = \gcd[s+z, 1, 2z+1, s+z^2+2] = 1$$

$$d_2(s, z) = \det P(s, z) = s^2 + sz^2 + 2s + zs + z^3 - 1$$

d'où, les facteurs invariants de $P(s, z)$ sont:

$$i_1(s, z) = 1$$

$$i_2(s, z) = s^2 + sz^2 + 2s + zs + z^3 - 1$$

d'où, la forme de Smith associée à $P(s, z)$ est:

$$S(s, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + sz^2 + 2s + zs + z^3 - 1 \end{bmatrix}$$

Cherchons maintenant la forme compagne associée à $A(z)$. On a, le polynôme caractéristique de $A(z)$ est:

$$k(s) = \det(sI - A(z)) = s^2 + sz^2 + 2s + zs + z^3 - 1$$

et d'après les facteurs invariants de $sI - A(z)$ on a le polynôme minimal de $A(z)$ est identique au polynôme caractéristique, d'où $A(z)$ est cyclique. Donc, il existe un élément

$y(z) \in \mathbb{R}^2[z]$ tel que $y(z)$, $A(z)y(z)$ sont linéairement indépendants. Si on pose: $y(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ où 0 est le polynôme nul et 1 est un polynôme constant. Alors:

$$[y(z), A(z)y(z)] = \begin{bmatrix} 0 & -(2z+1) \\ 1 & -(z^2+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2z \\ 0 & -z^2 \end{bmatrix}$$

et comme:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

alors, $y(z), A(z)y(z)$ sont linéairements indépendants. Définissons les polynômes auxiliaires:

$$\begin{aligned} m^{(0)}(s) &= m(s) = k(s) \\ &= s^2 - ((-z^3 + 1) - s(z^2 + z + 2)) \\ m^{(1)}(s) &= s - (-z^2 - z - 2) \\ m^{(2)}(s) &= 1 \end{aligned}$$

d'où, on définit les vecteurs:

$$\begin{aligned} e_0 &= 0 \\ e_1 &= \begin{bmatrix} -(2z+1) \\ z \end{bmatrix} \\ e_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On peut montrer facilement que: (e_1, e_2) forment une base dans $\mathbb{R}^2[s, z]$. Donc $A(z)$ dans la base (e_1, e_2) est:

$$\begin{aligned} A(z)e_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -z^3 + 1 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} -(2z+1) \\ z \end{bmatrix} + (-z^3 + 1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= 0e_1 + (-z^3 + 1)e_2$$

$$\begin{aligned} A(z)e_2 &= \begin{bmatrix} -(2z+1) \\ -(z^2+2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -(2z+1) \\ z \end{bmatrix} - (z^2+z+2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 1e_1 - (z^2+z+2)e_2 \end{aligned}$$

d'où la forme compagne associée à $A(z)$ est:

$$C(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -z^3+1 & -(z^2+z+2) \end{bmatrix}$$

et la transformation est:

$$T(z) = \begin{bmatrix} -(2z+1) & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z$$

on a: $\det T(z) \neq 0$ car $\det \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2$. Donc $T(z)$ est non singulière et par suite, $A(z)$ est similaire à $C(z)$. Alors, $P(s, z)$ est équivalente à $S(s, z)$.

2.3.3 La forme compagne sur $\mathbb{R}[s, z]$

On va donner un exemple dans le but de mieux comprendre la construction de la forme compagne dans $\mathbb{R}[s, z]$. En se basant sur les travaux de [18], [9] et [25].

Exemple 6 Soit le système discret de Roesser utilisé dans [13] dans le cas bidimensionnel:

$$x' = Ax + Bu \tag{2.8}$$

où:

$$x = \begin{bmatrix} x^h(i, j) \\ x^v(i, j) \end{bmatrix}, x' = \begin{bmatrix} x^h(i+1, j) \\ x^v(i, j+1) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

avec $x^h \in \mathbb{R}^{t_1}$, $x^v \in \mathbb{R}^{t_2}$ sont les états, $u \in \mathbb{R}^p$ sont les entrées, $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $n = t_1 + t_2$. On va donner la définition suivante:

Définition 15 Soit P une matrice carrée d'ordre $n \times n$. On définit la matrice caractéristique bidimensionnel de P , et le polynôme caractéristique de P comme suit:

$$\begin{aligned} A(s, z) &= I_n \Lambda - P \\ a(s, z) &= \det(I_n \Lambda - P) \end{aligned} \quad (2.10)$$

où:

$$\Lambda = sI_{t_1} \oplus zI_{t_2}$$

avec $\oplus$ est la somme directe.

Définition 16 La matrice P est dite la matrice compagne du polynôme $a(s, z)$.

Remarque 7 La matrice P peut s'écrire sous forme:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

où $P_{ij} \in M_{t_i \times t_j}(\mathbb{R})$, $i, j = \overline{1, 2}$. On peut dire donc que la forme compagne ici est caractérisée par le fait que: $\text{rang} P_{21}$ ou $\text{rang} P_{12}$ est égal à 1. Et comme l'utilisation d'une transformation non singulière ne change pas le rang de P_{12} ou P_{21} , alors P peut être une matrice arbitraire. D'où, dans le cas bidimensionnel, la construction de la forme compagne par les méthodes directes i.e utilisées auparavant, n'est pas facile quand

$$\min(\text{rang} P_{12}, \text{rang} P_{21}) > 1$$

Donc, pour construire la forme compagne d'un polynôme arbitraire $a(s, z)$ et par suite une matrice $A(s, z)$, on va utiliser les opérations élémentaires bidimensionnel sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$ qui seront définis dans ce qui suit:

Définition 17 On définit et on note les opérations élémentaires sur $\mathbb{R}[s, z]$ par:

1. $L(i \times c)$: la multiplication de la $i^{\text{ème}}$ ligne par $c \in \mathbb{R}$.
2. $R(i \times c)$: la multiplication de la $i^{\text{ème}}$ colonne par $c \in \mathbb{R}$.
3. $L(i + j \times p(s, z))$: l'addition à la $i^{\text{ème}}$ ligne, la $j^{\text{ème}}$ ligne multipliée par le polynôme $p(s, z)$.
4. $R(i + j \times p(s, z))$: l'addition à la $i^{\text{ème}}$ colonne, la $j^{\text{ème}}$ colonne multipliée par le polynôme $p(s, z)$.
5. $L(i, j)$: l'interchange des lignes i et j .
6. $R(i, j)$: l'interchange des colonnes i et j .

Définition 18 On définit l'opérateur d'augmentation par:

$$f : M_n(\mathbb{R}[s, z]) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{R}[s, z])$$

tel que:

$$f(T(s, z)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T(s, z) \end{bmatrix}, T(s, z) \in M_n(\mathbb{R}[s, z]) \quad (2.11)$$

Donc, tout polynôme $a(s, z)$ peut s'écrire sous forme:

$$a(s, z) = \det T(s, z) = \det \begin{bmatrix} a_{11}(s, z) & a_{12}(s, z) \\ a_{21}(s, z) & a_{22}(s, z) \end{bmatrix}, a_{ij}(s, z) \in \mathbb{R}[s, z] \quad (2.12)$$

Notre but est d'appliquer une chaîne d'opérations élémentaires sur $T(s, z)$ tel que la matrice caractéristique $\Lambda I_n - P$ est obtenu de la matrice:

$$E(s, z) = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & T(s, z) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Donc, pour arriver à cette forme on va utiliser l'opérateur d'ogmentation sur la matrice $T(s, z)$ plusieurs fois, jusqu'à l'obtention de la forme $E(s, z)$.

Posons:

$$B_1(s, z) = T(s, z)$$

avec $T(s, z)$ est définie dans (2.13). l'utilisation de l'opérateur d'augmentation donne:

$$B'_1(s, z) = f(B_1(s, z))$$

Appliquons par suite sur $B'_1(s, z)$ les opérations élémentaires suivantes:

1. $L(2 + 1 \times x_{21}(s, z)), L(3 + 1 \times x_{31}(s, z))$
2. $R(2 + 1 \times x_{12}(s, z)), R(3 + 1 \times x_{13}(s, z))$

où $x_{ij}(s, z) \in \mathbb{R}[s, z]$.

Rappelons que chaque opération est appliquée sur la matrice obtenue de l'application de l'opération précédente. Donc, on aura la matrice:

$$B_2(s, z) = \begin{bmatrix} 1 & x_{12}(s, z) & x_{13}(s, z) \\ x_{21}(s, z) & & \\ & D(s, z) & \\ x_{31}(s, z) & & \end{bmatrix}$$

$$B_2(s, z) = \begin{bmatrix} 1 & x_{12}(s, z) & x_{13}(s, z) \\ x_{21}(s, z) & & \\ x_{31}(s, z) & & D(s, z) \end{bmatrix}$$

avec:

$$\begin{aligned} D(s, z) &= T(s, z) + X(s, z) \\ X(s, z) &= \begin{bmatrix} x_{21}(s, z) \\ x_{31}(s, z) \end{bmatrix} [x_{12}(s, z) \quad x_{13}(s, z)] \end{aligned}$$

Le but maintenant est de choisir $x_{ij}(s, z)$ de tel sorte que certaines entrées de $D(s, z)$ aient les propriétés suivantes:

1. *Le degré maximal de $D(s, z)$ est plus petit que le degré de $X(s, z)$.*

2. Les variables de $D(s, z)$ sont séparées.

Avant de traiter ce problème, rappelons qu'un polynôme $x(s, z)$ de degrés partiels v_1 en s et v_2 en z , peut être écrit sous forme:

$$\begin{aligned} x(s, z) &= \sum_{i_1=0}^{v_1} \sum_{i_2=0}^{v_2} x_{i_1 i_2} s^{v_1-i_1} z^{v_2-i_2} \\ &= b(s)c(z) + d(s, z) \end{aligned}$$

où:

$$\begin{aligned} b(s) &= \sum_{i_1=0}^{v_1} b_{i_1} s^{v_1-i_1}, & c(z) &= \sum_{i_2=0}^{v_2} c_{i_2} z^{v_2-i_2} \\ d(s, z) &= \sum_{i_1=0}^{v_1} \sum_{i_2=0}^{v_2} d_{i_1 i_2} s^{v_1-i_1} z^{v_2-i_2}, & d_{i_1 i_2} &= x_{i_1 i_2} - b_{i_1} c_{i_2} \end{aligned}$$

Remarquons que le degré de $d(s, z)$ sera nul si:

$$c_0 = 1, b_{i_1} = x_{i_1 0}, i_1 \in \underline{v_1}, c_{i_2} = \frac{x_{0 i_2}}{x_{00}}, i_2 \in \underline{v_2}$$

donc, si on continue cette procédure jusqu'à l'étape k , $k > 2$, on aura une matrice polynomiale d'ordre k :

$$B_k(s, z) = [b_{ij}^k(s, z)]_{i,j \in \underline{k+1}}$$

et en appliquant sur $B_k(s, z)$ les opérations élémentaires suivantes:

1. $R((i+1) + 1 \times x_{1,i+1}(s, z)), L(2 + 1 \times x_{21}(s, z))$
2. $L(3 + 1 \times x_{31}(s, z)), \dots, L((k+2) + 1 \times x_{k+2,1}(s, z))$

on aura la matrice:

$$B_{k+1}(s, z) = [b_{ij}^{k+1}(s, z)]_{i,j \in \underline{k+2}}$$

cet algorithme sera terminé quand on aura:

$$B_\mu(s, z) = I_n \Lambda - P$$

Remarque 8 Pour les matrices polynomiales sous forme:

$$P(s, z) = sI_n - A(z)$$

on peut facilement trouvé la forme compagne associée à cette matrice, qui a la même forme que celle obtenue dans le cas unidimensionnel.

Chapter 3

PROBLEME DE DECOUPLAGE SUR UN CORPS

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier un problème très important dans la théorie de contrôle qui est le problème de découplage des systèmes linéaires commandés. Cela veut dire qu'on a un système dans lequel il y'a des blocs d'entrées qui effectes sur plusieurs blocs de la sortie, et on veut les transformer tels que chaque bloc d'entrées effectes sur un seul bloc de la sortie et qu'il n'a pas d'influence sur le reste des sorties. On va résoudre ce problème: PDR (problème de découplage restreint) en se basant sur le travail de [27].

Soit le système dynamique suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z_i(t) = D_i x(t), i \in \underline{k}, k \geq 2 \end{cases} \quad (3.1)$$

où $A : X \rightarrow X$, $B : U \rightarrow X$ et $D_i : X \rightarrow Z_i$ sont des applications linéaires sur les espaces vectoriels X , U et Z_i sur le corps $\mathbb{R}$ de dimensions n , m , r_i respectivement. X est dit l'espace d'état, U l'espace d'entrées et $Z = Z_1 \oplus Z_2 \oplus \dots \oplus Z_k$ l'espace de sorties avec $\dim Z = \sum_{i=1}^k r_i = k$.

Considérons les transformations linéaires suivantes: $F : X \rightarrow U$ et $G_i : U \rightarrow U$, $i \in \underline{k}$ qui paraissent dans la formule suivante du contrôle $u(\cdot)$:

$$u(t) = Fx(t) + \sum_{i=1}^k G_i v_i(t) \quad (3.2)$$

F est dit le feedback d'état, G_i les transformations gains et $v_i(\cdot)$ les nouveaux contrôles.

Donc, en utilisant la forme (3.2) du contrôle $u(\cdot)$ on aura le système suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = (A + BF)x(t) + \sum_{i=1}^k BG_i v_i(t) \\ z_i(t) = D_i x(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Avant de situer le problème, donnons quelques définitions et résultats concernant le système (3.1) qui sont utiles dans ce chapitre.

3.2 Rappel

3.2.1 Sous espaces de contrôlabilité et le feedback

Définition 19 *Le sous espace controlable du système (3.1) est défini et noté comme suit:*

$$\langle A / \text{Im } B \rangle = \text{Im } B + A \text{Im } B + \dots + A^{n-1} \text{Im } B \quad (3.4)$$

Définition 20 *Soient R_i , $i \in \underline{n}$ des sous espaces de X . On dit que R_i sont des sous espaces de contrôlabilité du système (3.1), s'il existe des applications linéaires $F : X \rightarrow U$ et $G_i : U \rightarrow U$ tels que:*

$$\begin{aligned} R_i &= \langle A + BF / \text{Im}(BG_i) \rangle \\ &= \text{Im}(BG_i) + (A + BF) \text{Im}(BG_i) + \dots + (A + BF)^{n-1} \text{Im}(BG_i), i \in \underline{k} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Remarque 9 *Le sous espace de contrôlabilité de (3.1) est le sous espace controlable de (3.3).*

On note par: $\underline{C}(A, B, X)$ l'ensemble des sous espaces de contrôlabilité de la paire (A, B) dans X , par $\underline{F}(R)$ l'ensemble des applications linéaires $F : X \rightarrow U$ tel que: $(A + BF)R \subset R$, avec $R \in \underline{C}(A, B, X)$ et par $\underline{I}(A, B, X)$ l'ensemble des sous espaces V de X qui sont (A, B) invariant, i.e $AV \subset V + \text{Im } B$.

Proposition 4 *Soit $R \subset X$. Alors $R \in \underline{I}(A, B, X)$ si et seulement s'il existe une transformation linéaire $F : X \rightarrow U$ tel que:*

$$(A + BF)R \subset R$$

Démonstration 8 *Supposons qu'il existe un F tel que: $(A + BF)R \subset R$. Alors:*

$$\forall r \in R, \exists s \in R: (A + BF)r = s \Rightarrow Ar = s - BFr \in R + \text{Im } B$$

Inversement, supposons que:

$$AR \subset R + \text{Im } B \quad (3.6)$$

Soit $(r_1, r_2, \dots, r_h)$ une base de R dans X avec $h \leq n$. D'après (3.6), il existe $s_1, s_2, \dots, s_h \in R$ et $u_1, u_2, \dots, u_h \in U$ tel que:

$$Ar_i = s_i + Bu_i, \quad \forall i \in \underline{h}$$

et d'après le théorème d'existence des applications linéaires, il existe une application linéaire F définie de R dans U comme suit:

$$Fr_i = -u_i, \quad \forall i \in \underline{h}$$

Soit maintenant $\tilde{F}$ l'extension de F sur X . On a:

$$\begin{aligned} (A + B\tilde{F})r_i &= Ar_i + B\tilde{F}r_i \\ &= Ar_i + BFr_i \\ &= Ar_i - Bu_i \\ &= s_i, \quad \forall i \in \underline{h} \end{aligned}$$

$$\text{i.e } (A + B\tilde{F})R \subset R$$

Proposition 5 Si $\text{Im } \hat{B} \subset \text{Im } B$ et $\langle A / \text{Im } \hat{B} \rangle = R$ avec $\hat{B} : U \rightarrow X$. Alors:

$$\langle A / \text{Im } B \cap R \rangle = R$$

Inversement, si $\langle A / \text{Im } B \cap R \rangle = R$, alors, il existe un $G : U \rightarrow U$ tel que:

$$\langle A / \text{Im}(BG) \rangle = R$$

Démonstration 9 Voir [27].

Proposition 6 $R \in \underline{\mathcal{C}}(A, B, X)$ si et seulement s'il existe une application linéaire $F : X \rightarrow U$ tel que:

$$R = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R \rangle \quad [27]$$

Proposition 7 Si $R \in \underline{C}(A, B, X)$, alors:

$$R = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R \rangle$$

pour tout $F \in \underline{F}(R)$.

La preuve est dû essentiellement à [27].

Démonstration 10 D'après la proposition précédente, il existe une application linéaire $F_0 : X \rightarrow U$ tel que:

$$R = \langle A + BF_0 / \text{Im } B \cap R \rangle$$

donc $F_0 \in \underline{F}(R)$. Soit maintenant $F_1 \in \underline{F}(R)$, et posons:

$$R_1 = \langle A + BF_1 / \text{Im } B \cap R \rangle \quad (3.7)$$

on a alors:

$$R_1 \subset R$$

Montrons maintenant l'inclusion inverse. Supposons que:

$$(A + BF_0)^{i-1} (\text{Im } B \cap R) \subset R_1, \quad i \in \underline{k}, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.8)$$

d'après (3.7), on a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{k+1} (A + BF_0)^{i-1} (\text{Im } B \cap R) \\ &= (\text{Im } B \cap R) + (A + BF_0) \sum_{i=1}^k (A + BF_0)^{i-1} (\text{Im } B \cap R) \\ & \subset (\text{Im } B \cap R) + (A + BF_0) R_1 \\ &= (\text{Im } B \cap R) [A + BF_1 + B(F_0 - F_1)] R_1 \\ & \subset (\text{Im } B \cap R) + (A + BF_1) R_1 + B(F_0 - F_1) R_1 \end{aligned}$$

On a:

$$B(F_0 - F_1) R_1 \subset R_1$$

car pour tout $x \in R_1$, on a:

$$B(F_0 - F_1)x = (A + BF_0)x - (A + BF_1)x \in R_1$$

d'où:

$$\sum_{i=1}^{k+1} (A + BF_0)^{i-1} (\text{Im } B \cap R) \subset \text{Im } B \cap R + (A + BF_1)R_1 + R_1 \subset R_1$$

remarquons que si on pose $k = 1$ dans (3.8), alors $\text{Im } B \cap R \subset R_1$. Donc:

$$\sum_{i=1}^k (A + BF_0)^i (\text{Im } B \cap R) \subset R_1$$

i.e:

$$R \subset R_1$$

Soit maintenant R un sous espace de X et définissons la famille:

$$\underline{S} = \{S \subset X : S = R \cap (AS + \text{Im } B)\}$$

Lemme 2 La famille $\underline{S}$ admet un élément minimal unique [27].

Lemme 3 L'élément minimal de $\underline{S}$ est donné par:

$$S_*(R) = \lim S^\mu = S^n$$

Démonstration 11 Immédiatement du lemme précédent.

Lemme 4 Soit $R \in \underline{I}(A, B, X)$. Si $F \in \underline{F}(R)$ et $\hat{R} \subset R$, alors:

$$\text{Im } B \cap R + (A + BF)\hat{R} = R \cap (A\hat{R} + \text{Im } B) \quad [27]$$

Lemme 5 Soient $R \in \underline{I}(A, B, X)$ et $F \in \underline{F}(R)$. Alors, la suite S^μ définit au dessus peut

être donnée sous forme:

$$S^\mu = \sum_{j=1}^{\mu} (A + BF)^{j-1} (\text{Im } B \cap R)$$

La preuve est dû essentiellement à [27].

Démonstration 12 Par réccurence sur μ . Pour $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} S^1 &= R \cap (AS^0 + \text{Im } B) = R \cap \text{Im } B \\ &= (A + BF)^0 (\text{Im } B \cap R) \end{aligned}$$

Supposons que la relation est satisfaite pour μ et montrons la pour $\mu + 1$. On a:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu+1} (A + BF)^{j-1} (\text{Im } B \cap R) &= (A + BF)^0 (\text{Im } B \cap R) + \sum_{j=2}^{\mu+1} (A + BF)^{j-1} (\text{Im } B \cap R) \\ &= (\text{Im } B \cap R) + \sum_{i=1}^{\mu} (A + BF)^i (\text{Im } B \cap R) \\ &= (\text{Im } B \cap R) + (A + BF) \sum_{i=1}^{\mu} (A + BF)^{i-1} (\text{Im } B \cap R) \\ &= (\text{Im } B \cap R) + (A + BF) S^\mu \\ &= R \cap (AS^\mu + \text{Im } B) \quad \text{par le lemme precedent} \\ &= S^{\mu+1} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Proposition 8 Soit $R \subset X$ et définissons la famille $\underline{S}$. Alors, $R \in \underline{C}(A, B, X)$ si et seulement si:

$$R \in \underline{I}(A, B, X) \tag{3.9}$$

et

$$R = S_*(R) \tag{3.10}$$

où $S_*(R)$ est le minimum de la famille $\underline{S}$.

Démonstration 13 Supposons que (3.9) est satisfaite, alors il existe un $F \in \underline{F}(R)$ tel que:

$$(A + BF) R \subset R$$

d'après la relation (3.10) et les lemmes 9 et 11 on aura:

$$R = S_*(R) = S^n = \sum_{j=1}^n (A + BF)^{j-1} (\text{Im } B \cap R) = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R \rangle$$

i.e R est un sous espace de contrôlabilité. Inversement, supposons que $R \in \underline{C}(A, B, X)$. Alors $R \in \underline{I}(A, B, X)$ i.e (3.9) est satisfaite. Et comme $R \in \underline{I}(A, B, X)$ alors $\underline{F}(R) \neq \emptyset$, d'où, d'après le lemme 11 on aura:

$$R = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R \rangle = S^n = S_*(R)$$

i.e (3.10) est satisfaite.

3.3 Formulation du problème

Le but de découpler le système (3.1) est de le rendre d'une façon tel que:

1. La nouvelle commande $v_i(\cdot)$ contrôle la sortie $z_i(\cdot)$ complètement pour tout $i \in \underline{k}$, c'est à dire que:

$$D_i R_i = \text{Im } D_i, \forall i \in \underline{k} \quad (3.11)$$

2. La nouvelle commande $v_i(\cdot)$ n'effecte plus sur la sortie $z_j(\cdot)$ pour tout $j \neq i$, i.e

$$D_j R_i = 0, \forall i, j \in \underline{k}, j \neq i \quad (3.12)$$

Donc, le problème de découplage est:

Etant donné A, B et D_i . Déterminer, s'il est possible, F et G_i tels que (3.11) et (3.12) soient vérifiées pour R_i défini par (??).

3.3.1 Problème de découplage restreint: PDR

En utilisant la proposition 8, (??) sera équivalente à:

$$R_i = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R_i \rangle, \forall i \in \underline{k}, \quad (3.13)$$

et si on note par:

$$K_i = \ker D_i, \forall i \in \underline{k}$$

alors (3.11) sera équivalente à:

$$R_i \subset \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k K_j, \forall i \in \underline{k} \quad (3.14)$$

car:

$$\begin{aligned} D_j R_i = 0, \forall i, j \in \underline{k} / j \neq i &\Leftrightarrow R_i \in \ker D_j, \forall i, j \in \underline{k}, j \neq i \\ &\Leftrightarrow R_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \ker D_j \end{aligned}$$

(3.12) est équivalente à

$$R_i + K_i = X, \forall i \in \underline{k} \quad (3.15)$$

car si on suppose que: $X = K_i + R_i, \forall i \in \underline{k}$, alors pour tout $x \in X$, il existe $k_i \in K_i$ et $r_i \in R_i$ tel que:

$$x = k_i + r_i, \forall i \in \underline{k}$$

d'où:

$$D_i(x) = D_i(k_i + r_i) = D_i(k_i) + D_i(r_i) = D_i(r_i), \forall i \in \underline{k}, \text{ car: } D_i(k_i) = 0$$

donc:

$$\text{Im } D_i = D_i R_i, \forall i \in \underline{k}$$

Inversement, on a:

$$X \supset K_i + R_i, \forall i \in \underline{k}$$

Pour montrer que:

$$X \subset K_i + R_i, \forall i \in \underline{k}$$

Soit $x \in X$. Alors:

$$x = x - r_i + r_i, r_i \in R_i, \forall i \in \underline{k}$$

donc:

$$D_i(x) = D_i(x - r_i + r_i) = D_i(x - r_i) + D_i(r_i)$$

on a $(x - r_i) \in K_i, \forall i \in \underline{k}$ car:

$$D_i(x - r_i) = D_i(x) - D_i(r_i) = 0$$

puisque: $D_i R_i = \text{Im } D_i$. Donc, il existe un $k_i \in K_i$ tel que:

$$k_i = x - r_i$$

d'où:

$$x = k_i + r_i, \forall i \in \underline{k}$$

i.e:

$$X \subset K_i + R_i, \forall i \in \underline{k}$$

Donc, le problème de découplage de (3.1) sera:

Etant donné A, B et des sous espaces $K_i, i \in \underline{k}$. Déterminer, s'il est possible, une transformation $F : X \rightarrow U$ et des sous espaces de contrôlabilité $R_i, i \in \underline{k}$ tels que: (3.13), (3.14) et (3.15) sont vérifiées.

(3.13), (3.14) et (3.15) sont dites respectivement: la condition de compatibilité, la condition de non interaction et la condition de contrôlabilité de la sortie.

Remarque 9 Si $V_i \subset X$ sont des sous espaces de contrôlabilité tels que:

$$\underline{F}(V_i) \neq \emptyset, \forall i \in \underline{k}$$

cela n'implique pas que:

$$\bigcap_{i=1}^k \underline{F}(V_i) \neq \emptyset$$

Donc, si cette dernière condition est vérifiée, alors, on dit que V_i sont compatibles. On montre que V_i sont compatibles si $\underline{F}(V_i) \neq \emptyset$ et V_i sont indépendants.

Retournant maintenant au PDR et posant:

$$\hat{K}_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k K_j \quad (3.16)$$

et notant par $\underline{C}(\hat{K}_i)$ l'ensemble des sous espaces de contrôlabilité de la paire (A, B) contenus dans le sous espace $\hat{K}_i$ de X . On a les résultats suivants:

Proposition 9 $\underline{C}(\hat{K}_i)$ est fermé sous l'addition pour tout $i \in \underline{k}$ [27].

Proposition 10 $\underline{C}(\hat{K}_i)$ admet un élément supérieur noté R_i^* , pour tout $i \in \underline{k}$, i.e:

$$R_i^* = \sup \underline{C}(\hat{K}_i), \forall i \in \underline{k} \quad (3.17)$$

[27].

Remarque 11 Il est clair que R_i^* vérifient (3.14). S'il existe un $i \in \underline{k}$ tel que R_i^* ne vérifie pas (3.15), alors le problème de découplage n'est pas soluble. Et si R_i^* vérifient (3.15) pour tout $i \in \underline{k}$ alors, la résolution du PDR est ramenée à étudier la compatibilité des R_i^* . Dans le cas général, on peut pas trouver une condition nécessaire et suffisante pour la solvabilité du PDR. Mais avec des conditions précises on le peut.

Théorème 15 Soit l'hypothèse additionnelle suivante:

$$\bigcap_{i=1}^k K_i = \{0\} \quad (3.18)$$

Alors, relativement à cette hypothèse, PDR est soluble si et seulement si l'égalité suivante est satisfaite:

$$R_i^* + K_i = X, \forall i \in \underline{k} \quad (3.19)$$

La démonstration est dû essentiellement à [27].

Démonstration 14 Supposons que: (3.19) est vérifiée et montrons la solvabilité du PDR. De (3.19) on a (3.15) est vérifiée. Comme:

$$R_i^* = \sup \underline{C}(\hat{K}_i)$$

alors:

$$R_i^* \subset \hat{K}_i = \bigcap_{j \neq i} K_j$$

i.e (3.14) est vraie. Il r  ste    montrer que R_i^* sont compatibles i.e:

$$\bigcap_{i=1}^k \underline{F}(R_i^*) \neq \emptyset$$

comme $R_i^* \in \underline{C}(\hat{K}_i)$ alors,

$$R_i^* = \langle A + BF_i / \text{Im } B \cap R_i^* \rangle, F_i \in \underline{F}(R_i^*), \forall i \in \underline{k}$$

i.e:

$$\underline{F}(R_i^*) \neq \emptyset, \forall i \in \underline{k}$$

montrons maintenant que R_i^* sont indépendants i.e:

$$R_i^* \cap \left(\sum_{j \neq i} R_j^* \right) = \{0\}$$

On a:

$$\begin{aligned} \hat{K}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} \hat{K}_j \right) &= \left(\bigcap_{r \neq i} K_r \right) \cap \left(\sum_{j \neq i} \bigcap_{l \neq j} K_l \right) \\ &= \left(\bigcap_{r \neq i} K_r \right) \cap \left(\bigcap_{l \neq 1} K_l + \bigcap_{l \neq 2} K_l + \dots + \bigcap_{l \neq i-1} K_l + \bigcap_{l \neq i+1} K_l + \dots + \bigcap_{l \neq k} K_l \right) \\ &= \left(\bigcap_{r \neq i} K_r \right) \cap \left[\begin{aligned} &(K_2 \cap \dots \cap K_i \cap \dots \cap K_k) + \\ &+ (K_1 \cap K_3 \cap \dots \cap K_i \cap \dots \cap K_k) + \dots + \\ &+ (K_1 \cap \dots \cap K_i \cap \dots \cap K_{k-1}) \end{aligned} \right] \\ &\subset \left(\bigcap_{r \neq i} K_r \right) \cap K_i = \bigcap_{r=1}^k K_r = \{0\} \end{aligned}$$

d'où:

$$R_i^* \cap \left(\sum_{j \neq i} R_j^* \right) = \{0\}$$

puisque $R_i^* \subset \hat{K}_i, \forall i \in \underline{k}$. Inversement: supposons que PDR est soluble, alors il existe des

sous espaces de contrôlabilité R_i telles que (3.13), (3.14) et (3.15) sont vérifiées. Comme:

$$R_i^* = \sup \underline{C} \left(\bigcap_{j \neq i} K_j \right)$$

alors R_i^* vérifie (3.13) aussi, i.e:

$$R_i^* + K_i = X, \forall i \in \underline{k}$$

Remarque 12 On peut résoudre le problème de découplage du système (3.1) sans l'utilisation de la relation (3.18) en se basant sur une compensation dynamique de l'espace d'état et celui d'entrée du système (3.1): PDP (problème de découplage prolongé) [27].

Exemple 7 Soit le système linéaire commandé suivant:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u_1(t) + u_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + u_1(t) - u_2(t) \\ z_1(t) = x_1(t) \\ z_2(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (3.20)$$

où:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

on peut écrire (3.20) sous forme:

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z_i(t) = D_i x(t), i = \overline{1,2} \end{cases}$$

où:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on a:

$$K_1 = \ker D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, K_2 = \ker D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'où:

$$\hat{K}_1 = K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{K}_2 = K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et par suite:

$$R_1^* = \sup \mathcal{C}(\hat{K}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad R_2^* = \sup \mathcal{C}(\hat{K}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

on a:

$$\hat{K}_1 \cap \hat{K}_2 = 0$$

d'où, d'après le théorème 9, PDR est soluble si et seulement si:

$$R_i^* + K_i = \mathbb{R}^2, \quad i = \overline{1, 2}$$

cette condition est satisfaite, car on a:

$$\begin{aligned} R_1^* + K_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2 \\ R_2^* + K_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Cherchons donc F , G_1 et G_2 tel que:

$$u(t) = (A + BF)x(t) + BG_1v_1(t) + BG_2v_2(t)$$

on a:

$$\begin{aligned} AR_1^* &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta + 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donc:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha - \beta + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

i.e.:

$$AR_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

donc:

$$AR_1^* \subset R_1^* + \text{Im } B$$

ce qui est équivalent à dire qu'il existe un F_1 tel que:

$$(A + BF_1)R_1^* \subset R_1^*$$

on pose:

$$F_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \frac{-1}{2} \\ \beta & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de la même manière on aura:

$$AR_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

i.e.:

$$AR_2^* \subset R_2^* + \text{Im } B$$

donc, il existe F_2 tel que:

$$(A + BF_2)R_2^* \subset R_2^*$$

on pose:

$$F_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \gamma \\ \frac{1}{2} & \delta \end{bmatrix}, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

donc, si on prend:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

on aura:

$$\begin{aligned} (A + BF)R_1^* &= \left(A + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \right) R_1^* \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \subset R_1^* \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} (A + BF_2)R_2^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \subset R_2^* \end{aligned}$$

Cherchons maintenant G_1 et G_2 tel que:

$$\text{Im } B \cap R_i^* = \text{Im}(BG_i), i = \overline{1, 2}$$

on a:

$$\text{Im } B \cap R_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc, si on pose: $G_1 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, alors:

$$BG_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} g_1 + g_2 \\ g_1 - g_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{cases} g_1 = \frac{1}{2} \\ g_2 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

i.e:

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

De la même façon on aura:

$$G_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d'où, le système découplé est:

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_2(t)$$

i.e:

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_1(t) + v_2(t) \\ x'_2(t) = x_2(t) + v_1(t) \\ z_1(t) = x_1(t) \\ z_2(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (3.21)$$

Remarque 13 L'étude et la solvabilité du problème de découplage pour des systèmes linéaires discrets peut être obtenue d'une façon analogue au cas étudié dans ce chapitre..

Chapter 4

PROBLEME DE DECOUPLAGE SUR L'ANNEAU $\mathbb{R}[s, z]$

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va faire une extension de l'étude du problème de découplage des systèmes à coefficients dans un corps au cas des systèmes définis sur des modules sur l'anneau des polynômes à deux variables $\mathbb{R}[s, z]$, en utilisant une approche géométrique. Les systèmes à coefficients dans un anneau (non nécessairement $\mathbb{R}[s, z]$) sont souvent utilisés dans des cas divers de la théorie de contrôle, par exemple, dans la solvabilité des problèmes concernant les systèmes différentiels avec retards voir [3]. Rappelons que le problème de découplage sur un anneau a été étudié en utilisant l'approche dite la fonction de transfert d'un système à coefficients dans un domaine à factorisation unique voir ([6]), et dans [20] avec une approche géométrique mais seulement dans le cas d'un domaine principal, ce qui n'est pas notre cas, car $\mathbb{R}[s, z]$ n'est pas un anneau principal. Et de plus, le problème de découplage peut être résolu en utilisant la notion de sous module de précontrôlabilité qui n'était pas introduite dans le cas des corps.

Soit le système linéaire discret à coefficients dans l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$ défini par:

$$\begin{cases} x(t+1) &= A(s, z)x(t) + B(s, z)u(t) \\ z_i(t) &= D_i(s, z)x(t), i \in \underline{k} \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(\cdot)$, $u(\cdot)$ et $z_i(\cdot)$ appartiennent successivement aux modules libres de types finis $X = (\mathbb{R}[s, z])^n$ le module d'état, $U = (\mathbb{R}[s, z])^m$ le module d'entrées et $Z = (\mathbb{R}[s, z])^r$ le module de sorties avec Z est une somme directe des $Z_i = (\mathbb{R}[s, z])^{r_i}$ pour tout $i \in \underline{k}$. $A(s, z)$, $B(s, z)$ et $D_i(s, z)$ sont des matrices polynomiales à coefficients dans $\mathbb{R}[s, z]$, et dans tout le travail on va les noter par A , B et D_i .

Donnons maintenant quelques définitions et résultats qu'on aura besoin par la suite.

Définition 21 Soit le système (4.1). Un sous module V du module d'état X est dit:

1. (A, B) invariant si et seulement si:

$$AV \subset V + \text{Im } B \quad (4.2)$$

2. (A, B) invariant de type feedback si et seulement s'il existe une transformation

linéaire $F : X \rightarrow U$ tel que:

$$(A + BF)V \subset V \quad (4.3)$$

Un tel F est dit ami de V .

Remarque 14 Contrairement au cas des systèmes linéaires sur un corps, dans le cas des systèmes sur un anneau, on a pas l'équivalence entre les deux définitions 1 et 2. On a seulement si V est (A, B) invariant de type feedback, alors il est (A, B) invariant. L'implication inverse est satisfaite sous la condition:

Proposition 11 Soit V un supplémentaire du module d'état X tel que V est (A, B) invariant. Alors, V est (A, B) invariant de type feedback.

Démonstration 15 Comme V est un supplémentaire de X qui est libre, alors V est libre [2]. La suite de la démonstration sera faite de la même manière que dans le cas des corps.

Définition 22 Un sous module R du module d'état X est dit sous module de contrôlabilité s'il existe deux transformations linéaires $F : X \rightarrow U$ et $G : U \rightarrow U$ telles que:

$$R = \langle A + BF / \text{Im}(BG) \rangle \quad (4.4)$$

Remarque 15 En se basant sur la proposition 7 du chapitre précédent et du fait que l'anneau est $\mathbb{R}[s, z]$, un sous module R de X est de contrôlabilité si et seulement s'il existe un $F : X \rightarrow U$ tel que:

$$R = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R \rangle$$

Remarque 16 Un sous module de contrôlabilité est (A, B) invariant de type feedback.

4.2 La notion de précontrôlabilité

Dans ce paragraphe, avant de donner la définition de précontrôlabilité, on va d'abord définir et étudier une suite de sous modules de X .

Soit le système (4.1) et soit K un sous module de X . Considérons la famille de sous modules S_K de X définie par:

$$S_K = \{S \subset X : S = K \cap (AS + \text{Im } B)\} \quad (4.5)$$

Proposition 12 *La famille S_K est fermée sous l'intersection des sous modules de X .*

Démonstration 16 *Soient S_1 et S_2 deux éléments de S_K et montrons que $S_1 \cap S_2 \in S_K$.*

On a:

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 &= [K \cap (AS_1 + \text{Im } B)] \cap [K \cap (AS_2 + \text{Im } B)] \\ &= K \cap [(AS_1 + \text{Im } B) \cap (AS_2 + \text{Im } B)] \\ &= K \cap [(AS_1 \cap AS_2) + (AS_1 \cap \text{Im } B) + (AS_2 \cap \text{Im } B) + \text{Im } B] \\ &\subset K \cap [(AS_1 \cap AS_2) + \text{Im } B] \end{aligned}$$

on a encore:

$$A(S_1 \cap S_2) \subset AS_1 \cap AS_2$$

et l'intersection inverse est satisfaite si l'on a l'égalité suivante:

$$(S_1 \cap \ker A) + (S_2 \cap \ker A) = (S_1 + S_2) \cap \ker A$$

On a:

$$\begin{aligned} (S_1 + S_2) \cap \ker A &= [(K \cap (AS_1 + \text{Im } B)) + (K \cap (AS_2 + \text{Im } B))] \cap \ker A \\ &= K \cap [AS_1 + \text{Im } B + \text{Im } B + AS_2] \cap \ker A \\ &= K \cap \ker A \cap [A(S_1 + S_2) + \text{Im } B] \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} (S_1 \cap \ker A) + (S_2 \cap \ker A) &= [K \cap (AS_1 + \text{Im } B) \cap \ker A] + \\ &\quad [K \cap (AS_2 + \text{Im } B) \cap \ker A] \\ &= (K \cap \ker A) \cap [AS_1 + AS_2 + \text{Im } B + \text{Im } B] \\ &= K \cap \ker A \cap [A(S_1 + S_2) + \text{Im } B] \end{aligned}$$

donc:

$$S_1 \cap S_2 = K \cap [A(S_1 \cap S_2) + \text{Im } B]$$

Proposition 13 *La famille S_K admet un élément minimal noté $S_*(K)$.*

Démonstration 17 *Une démonstration de cette proposition est faite de la même manière que dans le cas des corps.*

Maintenant, on peut introduire la notion de sous module de précontrôlabilité.

Définition 23 *Un sous module R du module X est un sous module de précontrôlabilité si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

1. R est (A, B) invariant.
2. $R = S_*(R)$, où $S_*(R)$ est le minimum de la famille:

$$S_R = \{S \subset X : S = R \cap (AS + \text{Im } B)\}$$

En utilisant cette nouvelle notion, on peut donner une caractérisation des sous modules de contrôlabilité.

Proposition 14 *Un sous module R du module X est un sous module de contrôlabilité si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

1. R est un sous module de précontrôlabilité.
2. R est (A, B) invariant de type feedback.

Pour démontrer cette proposition, on a besoin du lemme suivant:

Lemme 6 *Soient R un sous module (A, B) invariant et $F \in \underline{F}(R)$. Et soit la suite S^μ définie par (4.5) en remplaçant K par R . Alors:*

$$S^\mu = \sum_{j=1}^{\mu} (A + BF)^{j-1} (\text{Im } B \cap R), \mu \in \underline{n} \quad (4.6)$$

Démonstration 18 Voir le cas des corps.

Démonstration 19 Supposons que R est un sous module de controlabilité i.e il existe deux transformations $F : X \rightarrow U$ et $G : U \rightarrow U$ tel que:

$$R = \langle A + BF / \text{Im}(BG) \rangle$$

ce qui est équivalent à:

$$R = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R \rangle, \text{ pour tout } F \in \underline{F}(R)$$

i.e

$$(A + BF)R \subset R$$

d'où R est (A, B) invariant de type feedback. Donc, il est (A, B) invariant. Et d'après le lemme 3 du chapitre précédent, on obtient:

$$\begin{aligned} S_*(R) &= S^n \\ &= \sum_{j=1}^n (A + BF)^{j-1} (\text{Im } B \cap R) \\ &= \langle A + BF / \text{Im } B \cap R \rangle \quad (\text{par définition}) \\ &= R \end{aligned}$$

Donc R est un sous module de précontrolabilité.

Inversement, si R est un sous module de controlabilité, alors il est (A, B) invariant de type feedback et il est de précontrolabilité.

Remarque 15 La famille de tous les sous modules de précontrolabilité contenus dans un sous module K est fermée sous l'addition, d'où elle contient un élément maximal noté $R^*(K)$ comme on l'avait vu dans le cas des corps. Et si on note par $V^*(K)$ le maximum de la famille des sous modules (A, B) invariant de X , alors, on peut donner une caractérisation de $R^*(K)$ comme étant le minimum de la famille:

$$R_{V^*} = \{R \subset X : R = V^* \cap (AR + \text{Im } B)\} \quad (4.7)$$

Proposition 15 Soit $(R_k)_{k \geq 0}$ une suite de sous modules de X définie par:

$$\begin{cases} R_0 = \{0\} \\ R_k = V^* \cap (AR_{k-1} + \text{Im } B), k \geq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

comme $\mathbb{R}[s, z]$ est noethérien, alors, $(R_k)_k$ est convergente vers $R^*(K)$ dans un nombre fini d'étapes.

Démonstration 20 On a:

$$R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_k \subset \dots$$

donc $(R_k)_k$ est une suite croissante de sous modules sur l'anneau noethérien $\mathbb{R}[s, z]$, d'où elle converge en un nombre fini de pas vers un élément qu'on le note par $R_{\bar{k}}$ avec:

$$R_{\bar{k}} = V^* \cap (AR_{\bar{k}} + \text{Im } B)$$

d'où:

$$R_{\bar{k}} \subset V^*$$

et comme:

$$AR_{\bar{k}} \subset AV^* \subset V^* + \text{Im } B$$

et:

$$AR_{\bar{k}} \subset AR_{\bar{k}} + \text{Im } B$$

alors:

$$\begin{aligned} AR_{\bar{k}} &\subset (AR_{\bar{k}} + \text{Im } B) \cap (V^* + \text{Im } B) \\ &= [V^* \cap (AR_{\bar{k}} + \text{Im } B)] + [\text{Im } B \cap AR_{\bar{k}}] + \text{Im } B \\ &\subset [V^* \cap (AR_{\bar{k}} + \text{Im } B)] + \text{Im } B \\ &= R_{\bar{k}} + \text{Im } B \end{aligned}$$

i.e $R_{\bar{k}}$ est (A, B) invariant et $R_{\bar{k}} \subset K$. Et comme:

$$R_k \subset R_{\bar{k}} \subset V^*, \forall k \geq 1$$

alors:

$$R_k = R_{\bar{k}} \cap (AR_{k-1} + \text{Im } B), \forall k \geq 1$$

donc, $R_{\bar{k}}$ satisfait la 2^{ème} condition de la définition 12 i.e $R_{\bar{k}}$ est un sous module de précontrolabilité contenu dans K . Et comme $R^*(K)$ est le maximum des sous modules de précontrolabilité dans K alors:

$$R_{\bar{k}} \subset R^*(K)$$

$R^*(K)$ est la limite de la suite:

$$\begin{cases} S_0 = \{0\} \\ S_\mu = R^*(K) \cap (AS_{\mu-1} + \text{Im } B), \mu \in \underline{n} \end{cases}$$

on va montrer que:

$$\forall \mu \in \underline{n} : S_\mu \subset R_{\bar{k}}$$

on a:

$$\begin{aligned} S_\mu &= R^*(K) \cap (AS_{\mu-1} + \text{Im } B) \\ &= V^* \cap (AS_{\mu-1} + \text{Im } B) \end{aligned}$$

et:

$$R_{\bar{k}} = V^* \cap (AR_{\bar{k}} + \text{Im } B)$$

on va montrer l'inclusion par réccurence sur μ . Pour $\mu = 0$, on a:

$$S_0 = 0 \subset R_{\bar{k}}$$

supposons maintenant que $S_{\mu-1} \subset R_{\bar{k}}$ et montrons que $S_\mu \subset R_{\bar{k}}$. On a:

$$\begin{aligned} S_{\mu-1} \subset R_{\bar{k}} &\Rightarrow AS_{\mu-1} \subset AR_{\bar{k}} \\ &\Rightarrow AS_{\mu-1} + \text{Im } B \subset AR_{\bar{k}} + \text{Im } B \\ &\Rightarrow V^* \cap (AS_{\mu-1} + \text{Im } B) \subset V^* \cap (AR_{\bar{k}} + \text{Im } B) \end{aligned}$$

i.e:

$$S_\mu \subset R_{\bar{k}}$$

et comme $R^*(K)$ est la limite de $(S_\mu)_\mu$, alors:

$$R^*(K) \subset R_{\bar{k}}$$

Remarque 18 Dans la démonstration de la proposition précédente, on a donné un algorithme pour calculer $R^*(K)$. On va voir dans ce qui suit, qu'on n'a pas besoin de donner une forme explicite du sous module de précontrôlabilité ou du sous module (A, B) invariant de type feedback pour résoudre le problème de découplage.

4.3 Le problème de découplage

4.3.1 Formulation du problème

Soit le système (4.1) défini auparavant, et considérons la formule suivante:

$$u(t) = Fx(t) + \sum_{i=1}^k G_i v_i(t) \quad (4.9)$$

où $v_i(\cdot)$, $i \in \underline{k}$ sont les nouveaux contrôles (ou entrées) et G_i , $i \in \underline{k}$ sont des matrices à coefficients dans l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$ dites matrices gains.

Si on remplace la formule de $u(\cdot)$ donnée par (4.9) dans (4.1) on aura:

$$x(t+1) = Ax(t) + BFx(t) + B \sum_{i=1}^k G_i v_i(t)$$

i.e

$$\begin{cases} x(t+1) &= (A + BF)x(t) + \sum_{i=1}^k BG_i v_i(t) \\ z_i(t) &= D_i x(t), i \in \underline{k} \end{cases} \quad (4.10)$$

Donc le problème de découplage du système (4.1) consiste à:

Déterminer (s'il est possible) une formulation (4.9) du contrôle $u(\cdot)$ tel que dans le

système (4.10) chaque bloc d'entrées $v_i(\cdot)$ contrôle complètement le bloc de sorties $z_i(\cdot)$ (la condition de controlabilité de la sortie) et qu'il n'a pas d'influence sur le reste des blocs $z_j(\cdot)$ pour tout $j \neq i$ (la condition de non interaction).

Donnons les notations suivantes:

$$K_i = \ker D_i, i \in \underline{k} \quad (4.11)$$

$$\hat{K}_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k K_j, i \in \underline{k} \quad (4.12)$$

Remarquons que la condition de controlabilité de la sortie est satisfaite si on a:

$$R_i^* + K_i = X, i \in \underline{k} \quad (4.13)$$

où R_i^* est le maximum des sous modules de précontrolabilité contenu dans $\hat{K}_i$.

Dans le cas des systèmes sur un corps, la solvabilité du problème de découplage est satisfaite sous la condition:

$$\bigcap_{i=1}^k K_i = \{0\} \quad (4.14)$$

avec la propriété que les sous modules de controlabilité sont les mêmes de précontrolabilité. Cette condition (4.14) assure l'existence d'un feedback compatible F i.e

$$(A + BF)R_i^* \subset R_i^*, i \in \underline{k}$$

Remarque 17 Dans le cas des systèmes sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$, l'étude sera différente, car les sous modules de précontrolabilité ne sont pas toujours des sous modules de controlabilité, d'où l'existence d'un feedback d'état compatible n'est pas toujours possible. Dans [15] la solvabilité du problème est basée sur la condition suivante: pour tout $i \in \underline{k}$, le sous module (A, B) invariant qui est le maximum dans $\hat{K}_i$, noté par V_i^* est un supplémentaire de X . On va voir dans ce qui suit qu'on a pas besoin de cette hypothèse comme le montre la proposition suivante:

Proposition 16 Supposons que dans le système (4.1) défini sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$, la condition (4.14) est satisfaite. Alors, le problème de découplage est soluble si et seulement

si:

$$R_i^* + K_i = X, \quad i \in \underline{k}$$

où R_i^* est le maximum des sous modules de précontrôlabilité contenu dans $\hat{K}_i$.

Démonstration 21 Supposons que le problème de découplage est soluble. Donc, pour tout $i \in \underline{k}$, il existe F et G_i tels que:

$$N_i = \langle A + BF / \text{Im}(BG_i) \rangle, \quad i \in \underline{k}$$

sont les sous modules de contrôlabilité du système (4.10) i.e N_i la solution du problème de découplage. Pour tout $i \in \underline{k}$, d'après la condition de contrôlabilité de la sortie, on a:

$$N_i + K_i = X, \quad i \in \underline{k}$$

et d'après la condition de non interaction:

$$N_i \subset \hat{K}_i, \quad i \in \underline{k}$$

et comme:

$$R_i^* = \sup \underline{C}(\hat{K}_i)$$

alors:

$$N_i \subset R_i^*, \quad i \in \underline{k}$$

d'où:

$$R_i^* + K_i = X, \quad i \in \underline{k}$$

Inversement, supposons que la condition (4.13) est satisfaite. On va montrer tout d'abord que X est une somme directe des R_i^* . Par la condition (4.13), pour tout $x \in X$, il existe $r_1 \in R_1^*$ et $d_1 \in K_1$ tel que:

$$x = r_1 + d_1$$

et comme $d_1 \in K_1 = \ker D_1 \subset X$, alors, il existe $r_2 \in R_2^*$ et $d_2 \in K_2$ tel que:

$$d_1 = r_2 + d_2$$

d'où:

$$x = r_1 + r_2 + d_2, d_2 \in K_1 \cap K_2$$

si on termine cette procédure jusqu'à l'étape k on aura:

$$x = r_1 + r_2 + \dots + r_k + d_k$$

où $r_i \in R_i^*$, $i \in \underline{k}$ et $d_k \in \bigcap_{i=1}^k K_i = \{0\} \Rightarrow d_k = 0$. D'où:

$$X = R_1^* + R_2^* + \dots + R_k^*$$

Supposons maintenant que x peut s'écrire sous une autre forme:

$$x = r'_1 + r'_2 + \dots + r'_k, r'_i \in R_i^*, i \in \underline{k}$$

d'où:

$$(r_1 - r'_1) + (r_2 - r'_2) + \dots + (r_k - r'_k) = 0$$

donc:

$$r_i - r'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (r'_j - r_j)$$

d'où: $(r_i - r'_i)$ appartient à $R_i^* \subset \hat{K}_i$ et aussi à K_i . Donc:

$$r_i - r'_i \in K_i \cap \hat{K}_i = \bigcap_{i=1}^k K_i = \{0\}$$

d'où:

$$r_i = r'_i, \forall i \in \underline{k}$$

et par suite:

$$X = R_1^* \oplus R_2^* \oplus \dots \oplus R_k^* \quad (4.15)$$

Donc R_i^* est un sous module supplémentaire de précontrolabilité du module d'état X , alors, d'après la proposition 3, R_i^* est (A, B) invariant de type feedback. D'où, d'après la proposition 9, R_i^* est un sous module de controlabilité, i.e:

$$R_i^* = \langle A + BF_i / \text{Im } B \cap R_i^* \rangle, F_i \in \underline{F}(R_i^*), \forall i \in \underline{k}$$

Soit $x \in X$, alors x peut s'écrire d'une façon unique sous forme:

$$x = r_1 + r_2 + \dots + r_k, r_i \in R_i^*, \forall i \in \underline{k}$$

On définit le feedback d'état F comme suit:

$$Fx = F_1 r_1 + F_2 r_2 + \dots + F_k r_k$$

F est défini tel que:

$$R_i^* = \langle A + BF / \text{Im } B \cap R_i^* \rangle, \forall i \in \underline{k}$$

On va montrer maintenant que:

$$\text{Im } B \cap R_i^* = \text{Im}(BG_i), \forall i \in \underline{k}$$

Comme R_i^* est supplémentaire du module libre X , alors il est libre. Et $B^{-1}(R_i^*)$ est un sous module du module libre U sur l'anneau noethérien $\mathbb{R}[s, z]$, alors, $B^{-1}(R_i^*)$ est de type fini [12]. Soit alors une famille:

$$\{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ir_i}\}$$

de générateurs de $B^{-1}(R_i^*)$. On va définir la matrice (ou la transformation linéaire) G_i

par:

$$G_i : (\mathbb{R}[s, z])^{l_i} \rightarrow U$$

$$e_j \mapsto G_i(e_j) \quad , \quad G_i(e_j) = u_{ij}$$

où $(e_j)_{j=\overline{1, r_i}}$ est une base du sous module libre de type fini $(\mathbb{R}[s, z])^{l_i} \subset U$. On a:

$$G_i(e_j) = u_{ij}, \quad \forall j \in \underline{l_i}$$

comme $u_{ij} \in B^{-1}(R_i^*)$, $\forall i \in \underline{k}$ alors:

$$G_i(e_j) \in B^{-1}(R_i^*), \quad \forall i \in \underline{k} \Rightarrow BG_i(e_j) \in R_i^*, \quad \forall i \in \underline{k}$$

et $BG_i(e_j) \in \text{Im } B$, donc:

$$BG_i(e_j) \in R_i^* \cap \text{Im } B, \quad \forall i \in \underline{k}$$

On a encore:

$$u_{ij} = G_i(e_j), \quad \forall j \in \underline{l_i} \Rightarrow B(u_{ij}) = BG_i(e_j) \in \text{Im}(BG_i), \quad \forall j \in \underline{l_i}, \quad \forall i \in \underline{k}$$

d'où:

$$\text{Im } B \cap R_i^* = \text{Im}(BG_i), \quad \forall i \in \underline{k}$$

Remarque 20 De la proposition précédente, on remarque que la solvabilité du problème de découplage sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$ sous la condition (4.14) implique la contrôlabilité du système (4.1).

Proposition 17 Supposons que les conditions (4.13) et (4.14) sont satisfaites pour le système (4.1) défini sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$. Alors:

$$R_i^* = \hat{K}_i, \quad \forall i \in \underline{k} \tag{4.16}$$

Démonstration 22 On a:

$$R_i^* = \sup \underline{C}(\hat{K}_i), \quad i \in \underline{k}$$

d'ou:

$$R_i^* \subset \hat{K}_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k K_j, \forall i \in \underline{k}$$

d'où:

$$R_i^* \cap K_i \subset \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k K_j \cap K_i = \bigcap_{i=1}^k K_i = \{0\}$$

donc:

$$R_i^* \cap K_i = \{0\}, \forall i \in \underline{k}$$

et d'après (4.15):

$$R_i^* + K_i = X, \forall i \in \underline{k}$$

d'où:

$$R_i^* \oplus K_i = X, \forall i \in \underline{k}$$

On a maintenant:

$$X = R_i^* \oplus K_i \subset \hat{K}_i \oplus K_i, \forall i \in \underline{k}$$

et:

$$R_i^* \subset \hat{K}_i, \forall i \in \underline{k}$$

d'où:

$$R_i^* = \hat{K}_i, \forall i \in \underline{k}$$

Proposition 18 *Supposons que la condition (4.14) est satisfaite pour le système (4.1) défini sur l'anneau $\mathbb{R}[s, z]$. Alors, le problème de découplage du système (4.1) est soluble si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:*

$$\hat{K}_i \text{ est un sous module de précontrolabilité, } \forall i \in \underline{k} \quad (4.17)$$

$$\hat{K}_i + K_i = X, \forall i \in \underline{k} \quad (4.18)$$

Démonstration 23 *Supposons que la condition (4.14) est satisfaite. Alors, d'après la proposition 13 et la proposition précédente, le problème de découplage est soluble, avec: $R_i^* = \hat{K}_i, \forall i \in \underline{k}$ qui sont des sous modules de précontrolabilité, et aussi par la même*

proposition on aura la condition (4.18). Supposons maintenant que (4.17) et (4.18) sont satisfaites. Alors, d'après la même proposition, le problème de découplage est soluble.

Exemple 8 Soit le système défini par:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t - h_1) + x_2(t - h_2) + u_1(t) + u_2(t - h_1) \\ x_2'(t) = x_1(t - h_1) + x_2(t - h_2) + u_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (4.19)$$

où h_1, h_2 sont des constantes réelles dites retards. On définit l'opérateur de retard d'une fonction f par:

$$\begin{aligned} sf(t) &= f(t - h_1) \\ zf(t) &= f(t - h_2) \end{aligned}$$

d'où, on peut associer au système (4.19) le système suivant défini par:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = sx_1(t) + zx_2(t) + u_1(t) + su_2(t) \\ x_2(t+1) = sx_1(t) + zx_2(t) + u_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases} \quad (4.20)$$

La solution du problème de découplage de (4.19) est la même de (4.20). On a:

$$(4.20) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y_i(t) = D_i x(t), i = \overline{1, 2} \end{cases}$$

où:

$$A = \begin{bmatrix} s & z \\ s & z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et:

$$X = U = Z = (\mathbb{R}[s, z])^2$$

On a:

$$\ker D_1 = K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ker D_2 = K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'où:

$$\hat{K}_1 = K_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{K}_2 = K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{K}_1 \cap \hat{K}_2 = \{0\}$$

d'où, d'après la dernière proposition:

$$R_1^* = \hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, R_2^* = \hat{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et on a:

$$R_i^* + K_i = X, i = \overline{1, 2}$$

d'où le problème de découplage est soluble. Déterminant F , G_1 et G_2 . On a:

$$\begin{aligned} AR_1^* &= \begin{bmatrix} s & z \\ s & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} + Bv, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in X \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 + sv_2 \\ z + v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donc:

$$z + v_2 = z \Rightarrow v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = z$$

i.e

$$AR_1^* = z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$$

i.e

$$AR_1^* \subset R_1^* + \text{Im } B$$

i.e R_1^* est (A, B) invariant. De la même manière on montre que:

$$AR_2^* = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} -s^2 \\ s \end{bmatrix}$$

i.e R_2^* est (A, B) invariant. Et comme:

$$R_1^* \oplus R_2^* = X$$

et R_i^* sont des sous modules de précontrolabilité alors, R_i^* sont des sous modules de controlabilité i.e il existe $F_1 \in \underline{F}(R_1^*)$ et $F_2 \in \underline{F}(R_2^*)$ tels que:

$$R_i^* = \langle A + BF_i / \text{Im } B \cap R_i^* \rangle, i = \overline{1, 2}$$

Soient a, b, c et d des éléments de $\mathbb{R}[s, z]$. On définit F_1 et F_2 par:

$$F_1 = \begin{bmatrix} a & -z \\ b & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} s^2 & c \\ -s & d \end{bmatrix}$$

alors:

$$\begin{aligned} (A + BF_1) R_1^* &= AR_1^* + BF_1 R_1^* \\ &= \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -z \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a + bs & -z \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \in R_1^* \end{aligned}$$

et de la même manière on montre que:

$$(A + BF_2) R_2^* = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \in R_2^*$$

donc, on définit F par:

$$Fx = (F_1x_1, F_2x_2), x = (x_1, x_2) \in X$$

i.e:

$$F = \begin{bmatrix} s^2 & -z \\ -s & 0 \end{bmatrix}$$

On montre maintenant que:

$$(A + BF) R_i^* \subset R_i^*, i = \overline{1, 2}$$

On a:

$$\begin{aligned} (A + BF) R_1^* &= AR_1^* + BFR_1^* \\ &= \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & -z \\ -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z \\ -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} z \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_1^* \end{aligned}$$

et de la même manière:

$$(A + BF) R_2^* = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = R_2^*$$

On va maintenant trouver G_1 et G_2 qui vérifient:

$$\text{Im } B \cap R_i^* = \text{Im } (BG_i), \quad i = \overline{1, 2}$$

On a:

$$\text{Im } B \cap R_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc on va chercher $G_1 = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, $g_1, g_2 \in \mathbb{R}[s, z]$ tel que:

$$\text{Im } BG_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On a:

$$BG_1 = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + sg_2 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donc:

$$\begin{cases} (g_1 + sg_2) = 0 \\ g_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_1 = -s \\ g_2 = 1 \end{cases}$$

i.e:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -s \\ 1 \end{bmatrix}$$

et on a:

$$\text{Im } B \cap R_2^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et d'une façon analogue, on obtient:

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc, le contrôle $u(.)$ est donné sous forme:

$$u(t) = Fx(t) + G_1v_1(t) + G_2v_2(t)$$

où $v_1(.)$ et $v_2(.)$ sont les nouveaux contrôles.

$$u(t) = \begin{bmatrix} s^2 & -z \\ -s & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -s \\ 1 \end{bmatrix} v_1(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_2(t)$$

d'où, le système correspondant est:

$$\begin{cases} x(t+1) &= \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2(t) \\ y(t) &= x(t) \end{cases}$$

i.e:

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= sx_1(t) + v_1(t) \\ x_2(t+1) &= zx_2(t) + v_2(t) \\ y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) \end{cases} \quad (4.21)$$

d'où:

$$\begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t - h_1) + v_1(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t - h_2) + v_2(t) \\ y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) \end{cases} \quad (4.22)$$

Le système (4.22) est découplé. Il est complètement contrôlable car:

$$\begin{aligned} \text{rang} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \\ \text{rang} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \right) &= 2 = \dim X \end{aligned}$$

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la recherche des formes canoniques pour les matrices associées aux systèmes linéaires commandés invariants en temps et leurs relations avec la contrôlabilité.

L'étude des formes canoniques des matrices présentées sur l'anneaux des polynômes $\mathbb{R}[s]$ et $\mathbb{R}[s, z]$, peut être généralisée au cas où l'anneau des polynômes est à n variables $\mathbb{R}[s_1, s_2, \dots, s_n]$. Pour une autre approche utilisant les matrices dites: matrices multi-chemins (multiway matrices) voir [10].

Le problème de découplage considéré dans ce travail a été étudié sur $\mathbb{R}[s, z]$ en utilisant un feedback d'état statique i e invariant en temps. Une généralisation de l'étude de ce problème pour le cas de l'anneau $\mathbb{R}[s_1, s_2, \dots, s_n]$ peut être obtenue, et une future étude du problème de découplage en utilisant un feedback d'état dynamique est à encourager.

Bibliography

- [1] S. Barnett and G. Cameron. Introduction to Mathematical Control Theory, 2^{ème} Edition. Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [2] N. Bourbaki. Elements de mathématiques. Edition Hermann, 1970.
- [3] G. Conte and M. Perdon. The Block Decoupling Problem For Systems over a Ring. IEEE Transactions On Automatic Control, vol. 43, no. 11, November 1998.
- [4] G. Conte and M. Perdon. The Disturbance Decoupling Problem over a Ring. SIAM J Contr. Optim, vol. 33, no. 3, pp. 750-764, 1995.
- [5] Daniel Claude. Automatique: Représentation d'état. Université de Paris Sud XI, 1990-1991.
- [6] K. B. Datta and M. L. J. Hautus. Decoupling of multivariable control systems over unique factorisation domains, SIAM J. Contr. Optim., vol. 22, no. 1, 1984.
- [7] S. Djeddar and N. Boudelloua. Matrices of multivariable polynomials. Algebra and Nember Theory. vol 1, no 1, pp. 39-46, 2000.
- [8] M. G. Frost and M. S. Boudelloua. Int. J. Control, vol. 43, pp. 1543, 1986.
- [9] K. Galkowski and M. S. Piekarski. The companion matrix for two variable polynomials. I. National Conference on Circuit Theory and Electronic Circuits. , vol. 2, 1977.
- [10] K. Galkowski. Matrix Description of Multivariable Polynomials. Linear Algebra and its applications, vol. 234, pp. 209-226, 1996.

- [11] M. S. Gantmacher. Théorie des matrices, Tome 1. Dunod, Paris, 1966.
- [12] R. Godement. Cours d'algèbre. Hermann 3^{ème} Edition, 1978.
- [13] J. Gregor. Singular systems of partial difference equations. Multidimensional Systems and Signal Processing, vol. 4, pp. 67-82, 1993.
- [14] H. Blomberg and R. Ylimen. Algebraic theory for multivariable linear systems. Academic Press, 1983.
- [15] H. Inaba, N. Ito and T. Munaka. Decoupling and pole assignment for linear systems defined over a principal ideal domain, in Linear Circuits, Systems and Signal Processing. Theory and Applications, Eds. Amsterdam, 1988.
- [16] T. Kaczorek. The singular general model of 2-D systems and its solution. IEEE Transactions in Automatic Control, vol.33, pp. 1060-1061, 1989.
- [17] J. Klamka. Controllability of dynamical systems. Klumer Academic Publishers Mathematics and its applications, 1991.
- [18] Krzyskof Galkowski. Elementary operations and equivalence of 2-D systems. INT. J. Control, vol. 63, no. 6, pp. 1129-1148, 1996.
- [19] Y.S. Kung and M. C. Smith. CUED \ F- CAMS \ TR 263, (Combridge University report), 1983.
- [20] O. Sename and J. F. Lafay. Decoupling of linear systems with delays, in Proc. IEEE Conf. Decision and Contr. Orlando, FL, 1994.
- [21] J. P. Lasalle. The stability and control of discrete processes. Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag.
- [22] S. Mac Lane and G. Birkhoff. Algèbre, Structure Fondamentales, tome 1. Ghauthier Villars Editeur, 1971.
- [23] M. Morf, B. C. Levey and S. Y. Kung. Proc.IEEE, vol. 65, no. 861, 1977.

- [24] J. O'Reilly. Observers for linear systems. Mathematics Sciences and Engineering. vol. 170.
- [25] S. Y. Kung et al. New results in 2-D systems theory, Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers, vol. 65, pp. 861-872, 1977.
- [26] J. H. Wilkinson. The algebraic eigenvalue problem. Clarendon Press. Oxford, 1965.
- [27] M. Wonham. Linear multivariable control systems: A Geometric Approach. Springer Verlag, New York, 1974.

ملخص

عمل البحث في هذه المذكرة مخصص لدراسة و إيجاد بعض الأشكال القانونية لمصفوفات مرفقة بنظم تفاضلية خطية محكمة ، وتطبيقاتها في دراسة تحكم و ملاحظة النظم . بشكل خاص قمنا بإدراج الأشكال القانونية المرفقة ببعض النظم التفاضلية الخطية المحكمة (A , B) ، كمصفوفة جوردين ، المصفوفة الملازمة و مصفوفة فروبينيوس . و باستعمال هذه الأشكال تحصلنا على معايير للتحكم . بعد ذلك ، قمنا بدراسة الشكل القانوني لسميث و الشكل القانوني الملازم على الحلقة $R[s]$ و أعطينا علاقة تكافؤ . كذلك عممنا النتائج المتحصل عليها إلى الحلقة $R[s,z]$.

أخيرا ، قمنا بدراسة مسألة الفصل لنظم معرفة في فضاءات شعاعية على حقل ، ثم قدمنا تعميما لها في حالة نظم معرفة في مقاييس على الحلقة $R[s,z]$.

Abstract

The present work is devoted to the study and research of certain canonical forms of matrices associated with differential linear control systems and its application to the study of controllability and observability. In particular, Jordan form, companion form and Frobenius form associated with certain differential linear control systems (A,B) are presented. Using these forms, some controllability criteria are obtained. Moreover, Smith form and companion form over the polynomial ring $R[s]$ are considered and an equivalence transformation is established. Then, an extension of the precedent results over the polynomial ring of two variables $R[s,z]$ is presented. Finally, the decoupling problem of systems defined in vector spaces over a field is studied and a generalization to the case of systems defined in modules over the ring $R[s,z]$ is presented.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude et la recherche de certaines formes canoniques de matrices associées aux systèmes différentiels linéaires commandés et son application à l'étude de la contrôlabilité et l'observabilité. En particulier, la forme de Jordan, la forme compagne et la forme de Frobenius associées à certains systèmes différentiels linéaires commandés (A,B) ont été présentés. En exploitant ces formes, des critères de contrôlabilité ont été obtenus. Ensuite, la forme de Smith et la forme compagne sur l'anneau des polynômes $R[s]$ ont été considérées où une transformation d'équivalence a été établie. Une extension des résultats précédents sur l'anneau des polynômes à deux variables $R[s,z]$ a été donnée. Finalement, on a étudié le problème de découplage des systèmes définis dans des espaces vectoriels sur un corps et une généralisation au cas des systèmes définis dans des modules sur l'anneau $R[s,z]$ a été présentée.