



*SOYEZ LES
BIENVENUS*

SOUTENANCE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION DU
DIPLÔME DE MAGISTER EN MATHÉMATIQUE

Option : Équations Différentielles et ces applications

*SUR UN PROBLEME DE
TRANSMISSION SINGULIER*

Présenté par

Lotfi MEDDOUR

Dirigé par

Prof : Aissa AIBECHE ₂

Plan de travail

1- Introduction

2- Motivation

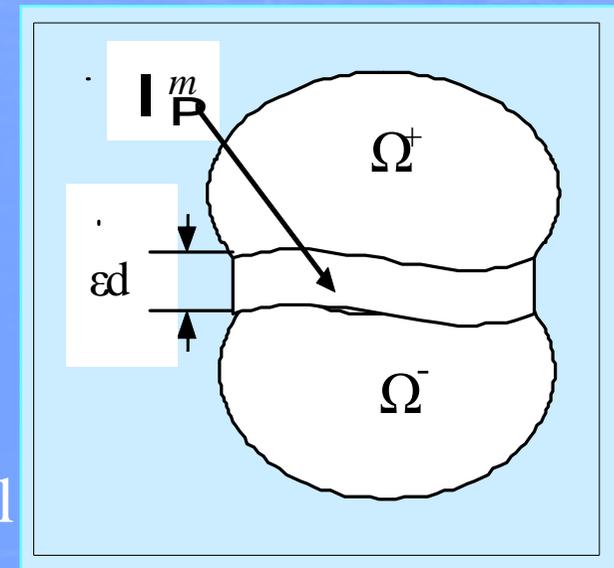
3- Etude d'un cas modèle

4- Etude qualitative de notre problème.

5- Conclusion

Introduction

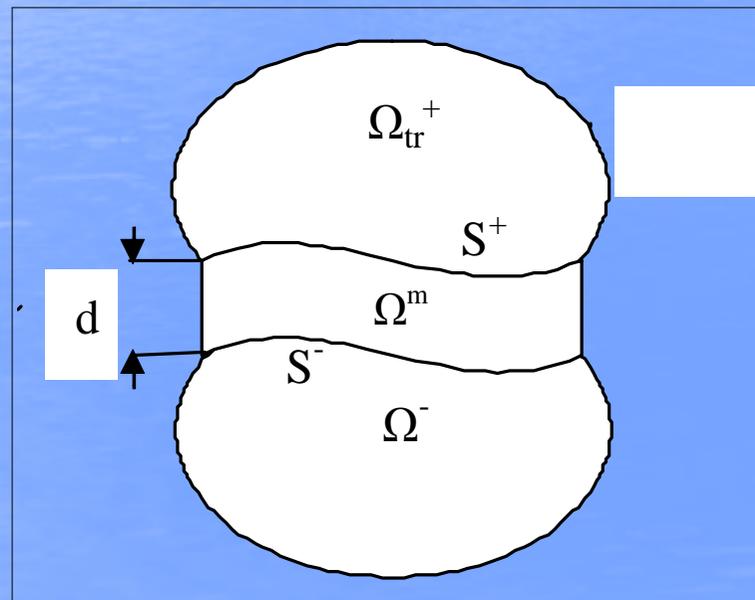
- Ce travail est un cas particulier d'un problème limite issue d'un modèle simplifié de collage de deux solides linéairement élastiques, la colle est schématisée par une couche d'épaisseur εd et de coefficient d'élasticité d'ordre ε par rapport à celui des deux adhérents. D'un point de vue mécanique, le problème est une transmission de contraintes entre les trois solides élastiques. Ce problème est développé dans les travaux de G. Geymonat, F. Krasucki et S. Lenci ils ont décrit le collage de deux solides linéairement élastiques occupant Ω^+ et Ω^- deux ouverts bornés connexes de \mathbb{R}^3 , le long de la surface $S = \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-$ à l'aide d'une couche mince d'une colle linéairement élastique. Le déplacement $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$ des points de l'assemblage satisfait le problème variationnel P_ε suivant:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_P \text{ et } V_P = \{v \in H^1(\tilde{\Gamma}_P); v = 0 \text{ sur } @_P\}; \\ a^+ \tilde{Y}_{R,v}^P + \mathbf{R}_P^m \tilde{Y}_{R,v}^P + a^- \tilde{Y}_{R,v}^P = L_P \tilde{Y}_v^P, \quad -v \in V_P \end{array} \right.$$

1

Pour la résolution de ce problème ils ont transformé P_ε dans un problème posé sur un domaine fixe, et ça qu'on dilate Ω_ε^m d'un facteur $(1/\varepsilon)$ dans la direction e_3 , on obtient une autre forme de la forme bilinéaire qu'on va la présenter dans la partie qui ce suit.



1. Motivation

On s'intéresse dans les travaux de G. Geymonat, F. Krasucki et S. Lenci au problème suivant

$$u \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}^3: \bar{\Gamma}_{tr} = \overline{\Gamma_{tr}^+ W I^m W I^? \text{ í } \S^3}$$

Trouver $u \in V, -v \in V,$

$$a^+ \tilde{u} \tilde{v} + a^- \tilde{u} \tilde{v} + a_{33}^m \tilde{u} \tilde{v} + P a_{3J}^m \tilde{u} \tilde{v} +$$

$$P a_{JK}^m \tilde{u} \tilde{v} = L \tilde{v} + P L^m \tilde{v}$$

1.2

Les formes bilinéaires $a^+, a^-, a_{\alpha\beta}^m$ sont définies par

$$a^{\pm} \tilde{Y}_{u, v} \mathbf{P} = \mathbf{X}_{\mathbf{1}}^{\pm} a^{\pm}_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV \quad 1.1$$

$$a^m_{33} \tilde{Y}_{u, v} \mathbf{P} = \mathbf{X}_{\mathbf{1}}^m a^m_{ij} n_i n_j \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_3} dV \quad 1.2$$

$$a^m_{3J} \tilde{Y}_{u, v} \mathbf{P} = \mathbf{X}_{\mathbf{1}}^m a^m_{Ji} n_i \left[\frac{\partial u}{\partial \vec{t}_J} \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial \vec{t}_J} \right] dV \quad 1.3$$

$$a^m_{JK} \tilde{Y}_{u, v} \mathbf{P} = \mathbf{X}_{\mathbf{1}}^m a^m_{JK} \frac{\partial u}{\partial \vec{t}_J} \frac{\partial v}{\partial \vec{t}_K} dV \quad 1.4$$

$$L \tilde{Y}_v \mathbf{P} = \mathbf{X}_{\Gamma} f v dV \quad 1.5$$

$$L^m \tilde{Y}_v \mathbf{P} = \mathbf{X}_{\mathbf{1}}^m f_i v_i d\mathbf{I} . \quad 1.6$$

2. Étude d'un cas modèle

2.1. Position du problème

Notre but essentiel étant d'étudier un cas modèle du problème (2) et

pour cela on prend le domaine Ω de \mathbb{R}^2 défini par

On considère dans ce domaine

la forme bilinéaire suivante:

$$a \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx .$$

Alors après l'utilisation de la formule de Green les formules du problème (2) s'écrivent comme suit:

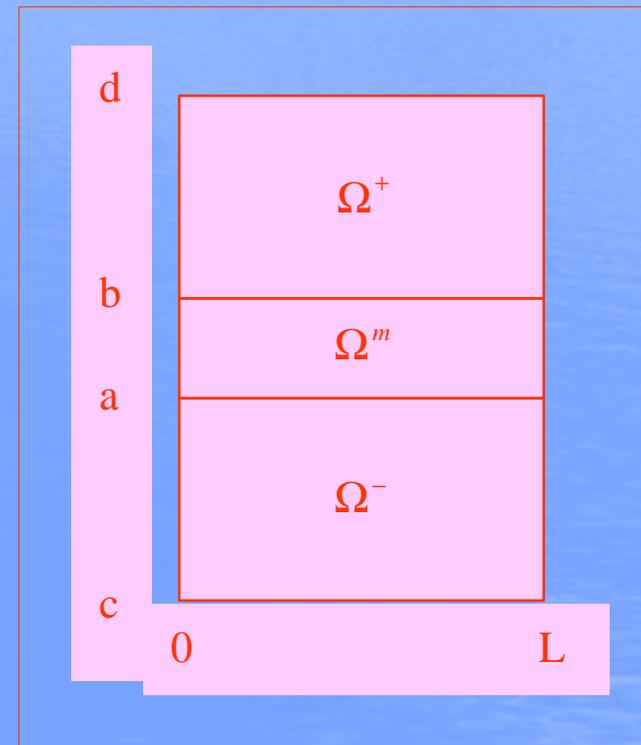


Fig.1.1

$$a^{+} \tilde{Y}_{u,v} \mathbf{P} = \int_1^b \int_0^L a_{+} \mathbf{A} u_1 v dx_1 dx_3 + \int_0^L a_{+} \frac{u_1 \tilde{Y}_{1,b} \mathbf{P}}{x_3} v \tilde{Y}_{1,b} \mathbf{P} dx_1$$

2.1

$$a^{-} \tilde{Y}_{u,v} \mathbf{P} = \int_1^b \int_0^L a_{-} \mathbf{A} u_2 v dx_1 dx_3 + \int_0^L a_{-} \frac{u_2 \tilde{Y}_{1,a} \mathbf{P}}{x_3} v \tilde{Y}_{1,a} \mathbf{P} dx_1$$

2.2

$$a_{33}^m \tilde{Y}_{u,v} \mathbf{P} = \int_a^b \int_0^L \frac{1}{x_3} \tilde{Y}_{a_m} \frac{u_m}{x_3} \mathbf{P} v dx_1 dx_3 + \int_0^L a_m \frac{u_m \tilde{Y}_{1,b} \mathbf{P}}{x_3} v \tilde{Y}_{1,b} \mathbf{P} dx_1 + \int_0^L a_m \frac{u_m \tilde{Y}_{1,a} \mathbf{P}}{x_3} v \tilde{Y}_{1,a} \mathbf{P} dx_1,$$

2.3

$$a_{3J}^m \tilde{Y}_{u,v} \mathbf{P} = 0, \quad \tilde{Y}_{13}^m = 0, \quad \frac{u_m}{x_2} = 0 \mathbf{P},$$

2.4

$$a_{JK}^m \tilde{Y}_{u,v} \mathbf{P} = \int_a^b \int_0^L a_m \frac{u_m}{x_1} \frac{v}{x_1} dx_1 dx_3.$$

2.5

2.2. Problème aux limites

Le problème (1.2) sur le domaine (fig1.1) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Lambda\}, \\ a^{+ij} \tilde{u}_{,v} + a^{?ij} \tilde{u}_{,v} + a_{33}^m \tilde{u}_{,v} + \tilde{P} a_{JK}^m \tilde{u}_{,v} = L \tilde{P} \end{array} \right.$$

On substitue les formules (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) dans ce problème et par l'identité de deux membres, on obtient le problème aux limites suivant:

$$\frac{1}{k_1} \left(\mathbf{P} a_m \frac{u_m}{k_1} \right) + \frac{1}{k_3} \left(a_m \frac{u_m}{k_3} \right) = f_m$$

$$a_+ \mathbf{A} u_1 = f_1$$

$$a_? \mathbf{A} u_2 = f_2$$

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 0$$

$$u_1 \tilde{\mathbf{Y}}_{1,b} \mathbf{P} = u_m \tilde{\mathbf{Y}}_{1,b} \mathbf{P}$$

$$u_2 \tilde{\mathbf{Y}}_{1,a} \mathbf{P} = u_m \tilde{\mathbf{Y}}_{1,a} \mathbf{P}$$

$$a_+ \frac{u_1 \tilde{\mathbf{Y}}_{1,b} \mathbf{P}}{k_3} = a_m \frac{u_m \tilde{\mathbf{Y}}_{1,b} \mathbf{P}}{k_3}$$

$$a_? \frac{u_2 \tilde{\mathbf{Y}}_{1,a} \mathbf{P}}{k_3} = a_m \frac{u_m \tilde{\mathbf{Y}}_{1,a} \mathbf{P}}{k_3}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}, L \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{Y}}, d \mathbf{P}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}, L \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{Y}}, a \mathbf{P}$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}, L \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{Y}}, c \mathbf{P}$$

$$0 < x_1 < L, x_3 = d,$$

$$0 < x_1 < L, x_3 = c,$$

$$0 < x_1 < L,$$

$$0 < x_1 < L,$$

$$0 < x_1 < L,$$

$$0 < x_1 < L.$$

2.2

2.3. L'existence de la solution variationnelle

La démonstration de l'existence de la solution faible du problème aux limites (2.2) nous amène à démontrer l'existence de la solution du problème variationnel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V = \{v \in H^1(\tilde{\Omega}) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \\ a(\tilde{Y}u, v) = \tilde{Y}f, v \end{array} \right.$$

2.3

Tel que $a(\dots)$ est une forme bilinéaire définie par

$$a(\tilde{Y}u, v) = a^+(\tilde{Y}u, v) + a^-(\tilde{Y}u, v) + a_{33}^m \tilde{Y}u, v + \sum_{JK} a_{JK}^m \tilde{Y}u, v$$

- **Définition:** On définit sur l'espace V la norme suivante:

$$\|u\|_V^2 = \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}^2 +$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega}^m)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega}^m)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega}^?) }^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega}^?) }^2$$

Remarque : La norme précédente est équivalente à la norme suivante:

$$|u|_V = \left\| \frac{u_1}{x_1} \right\|_{L^2 \tilde{Y}^+ \mathbf{P}} + \left\| \frac{u_1}{x_3} \right\|_{L^2 \tilde{Y}^+ \mathbf{P}} + \left\| \frac{u_m}{x_3} \right\|_{L^2 \tilde{Y}^m \mathbf{P}} + \left\| \frac{u_m}{x_1} \right\|_{L^2 \tilde{Y}^m \mathbf{P}}$$

$$\left\| \frac{u_2}{x_1} \right\|_{L^2 \tilde{Y}^? \mathbf{P}} + \left\| \frac{u_2}{x_3} \right\|_{L^2 \tilde{Y}^? \mathbf{P}}$$

Théorème: Le problème (2.3) admet une unique solution u de $H^1(\Omega)$, pour toute f de V' (dual topologique de V).

Démonstration: Pour affirmer l'existence de la solution du problème (2.3), il suffit de démontrer la continuité et la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$.

i) La continuité

$$|a(u, v)| \leq M |u|_V |v|_V$$

$$|a(\tilde{u}, v)| \leq M |u|_V |v|_V.$$

ii) La coercivité

$$-u \in V$$

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

Alors grâce au théorème de Lax-Milgram, pour toute f de V' le problème (2.3) admet une unique solution.

3. Étude qualitative du problème de transmission

L'idée ici est de réécrire le problème (2.2) sous la forme d'un problème d'équation différentielle abstraite d'ordre deux. Puis on essaiera d'obtenir des propriétés qualitatives à l'aide des outils d'analyse fonctionnelle appropriés

3.1. Position du problème

Pour une étude qualitative du problème (2.2) on suppose le système homogène suivant:

$$a_+ \frac{\tilde{Y}^2 u_1}{x_1^2} + \frac{\tilde{r} u_1}{x_3} \mathbf{P} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}, L \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{Y}}, d \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} a_m \frac{\tilde{Y}^2 u_m}{x_1^2} + \frac{1}{\mathbf{P}} \frac{\tilde{r} u_m}{x_3^2} \mathbf{P} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}, L \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{Y}}, a \mathbf{P}$$

$$a_? \frac{\tilde{Y}^2 u_2}{x_1^2} + \frac{\tilde{r} u_2}{x_3} \mathbf{P} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}, L \mathbf{P} \times \tilde{\mathbf{Y}}, c \mathbf{P}$$

$$u_1 = 0$$

$$0 < x_1 < L, x_3 = d,$$

$$u_2 = 0$$

$$0 < x_1 < L, x_3 = c,$$

$$u_1 \tilde{\mathbf{Y}}_1, b \mathbf{P} = u_m \tilde{\mathbf{Y}}_1, b \mathbf{P}$$

$$0 < x_1 < L,$$

$$u_2 \tilde{\mathbf{Y}}_1, a \mathbf{P} = u_m \tilde{\mathbf{Y}}_1, a \mathbf{P}$$

$$0 < x_1 < L,$$

$$a_+ \frac{\mu_1 \tilde{\mathbf{Y}}_1, b \mathbf{P}}{x_3} = a_m \frac{\mu_m \tilde{\mathbf{Y}}_1, b \mathbf{P}}{x_3}$$

$$0 < x_1 < L,$$

$$a_? \frac{\mu_2 \tilde{\mathbf{Y}}_1, a \mathbf{P}}{x_3} = a_m \frac{\mu_m \tilde{\mathbf{Y}}_1, a \mathbf{P}}{x_3}$$

$$0 < x_1 < L.$$

a_+ , $a_?$ et a_m sont des constantes.

On pose

$$B = ? \frac{l^2}{l x \frac{2}{3}}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_m \\ u_2 \end{pmatrix}$$

alors on obtient le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} u^w ? A u = 0 & \text{dans } \tilde{Y}_0, L P, \\ u \tilde{Y}_0 P = u \tilde{Y} L P = 0. \end{cases}$$

3.2

Tel que l'opérateur A est défini par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{P}^2} B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix},$$

et son domaine est

$$D\tilde{Y} \mathbf{P} = \left\{ u \in H^2 \tilde{Y}, d\mathbf{P}, u_1 \tilde{Y} \mathbf{P} = u_2 \tilde{Y} \mathbf{P} = 0, u_1 = u_m \text{ sur } S^+, \right.$$

$$\left. u_1 = u_m \text{ sur } S^+, u_2 = u_m \text{ sur } S^? \right\}$$

$$\left. , a + \frac{u_1}{x_3} \tilde{Y} \mathbf{P} = a_m \frac{u_m}{x_3} \tilde{Y} \mathbf{P}, a - \frac{u_1}{x_3} \tilde{Y} \mathbf{P} = a_m \frac{u_m}{x_3} \tilde{Y} \mathbf{P} \right\}$$

3.2 Propriétés de l'opérateur A

Définition: On définit sur l'espace $L^2(c,d)$ le produit scalaire suivant:

$$-u, v \text{ sur } L^2(c, d)$$

$$(u, v)_{L^2(c,d)} = a + \int_b^d u_1 v_1 dx_3 + \int_a^b a_m u_m v_m dx_3 + \int_c^d u_2 v_2 dx_3$$

Proposition: L'opérateur A du problème (3.2) est un opérateur auto-adjoint.

Démonstration: Il faut avoir que A est un opérateur symétrique et maximal monotone.

A est symétrique

- $u, v \in D(A) \subset \mathcal{P}$:

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla u, \nabla v \, d\mu = \int_{\mathcal{P}} \nabla u, \nabla (Av) \, d\mu$$

A est monotone

- $u \in D(A) \subset \mathcal{P}$:

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla u, \nabla u \, d\mu \geq 0.$$

A est maximal monotone

Pour cela il faut avoir que

$$-f \in L^2(\tilde{Y}, d\mathbf{P}) \quad \mathcal{Q} \in D(\tilde{A}) \text{ tel que } u + Au = f.$$

3.3

On définit le problème variationnel de ce problème comme suit

$$\text{Trouver } u \in V = \{v \in H^1(\tilde{Y}, d\mathbf{P}) \mid v = 0 \text{ sur } \Lambda\} \text{ tel que}$$

$$a + \tilde{Y}u_1, v_1 \mathbf{P}_{L^2(\tilde{Y}, d\mathbf{P})} + \mathbf{P} a_m \tilde{Y}u_m, v_m \mathbf{P}_{L^2(\tilde{Y}, d\mathbf{P})} + a \tilde{Y}u_2, v_2 \mathbf{P}_{L^2(\tilde{Y}, d\mathbf{P})} -$$

$$a + \tilde{Y}u_1, \frac{\nu_1}{\kappa_3} \mathbf{P}_{L^2(\tilde{Y}, d\mathbf{P})} + a_m \tilde{Y}u_m, \frac{\nu_m}{\kappa_3} \mathbf{P}_{L^2(\tilde{Y}, d\mathbf{P})} + a \tilde{Y}u_2, \frac{\nu_2}{\kappa_3} \mathbf{P}_{L^2(\tilde{Y}, d\mathbf{P})} = \tilde{Y}, v \mathbf{P}.$$

On pose

$$b(\tilde{u}, v) = a + \tilde{u}_1, v_1 \int_{L^2 \tilde{Y}, dP} + a_m \tilde{u}_m, v_m \int_{L^2 \tilde{Y}, dP} + a_2 \tilde{u}_2, v_2 \int_{L^2 \tilde{Y}, dP}$$

$$a + \frac{\tilde{u}_1}{x_3}, \frac{v_1}{x_3} \int_{L^2 \tilde{Y}, dP} + a_m \frac{\tilde{u}_m}{x_3}, \frac{v_m}{x_3} \int_{L^2 \tilde{Y}, dP} + a_2 \frac{\tilde{u}_2}{x_3}, \frac{v_2}{x_3} \int_{L^2 \tilde{Y}, dP}$$

Cette forme bilinéaire est continue et coercive.

La continuité de la forme bilinéaire $b(\cdot, \cdot)$.

$$\forall u, v \in V$$

$$|b(\tilde{u}, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

La coercivité de la forme bilinéaire $b(.,.)$.

$$- u \in V$$

$$b(\tilde{u}, u) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

La forme bilinéaire $b(.,.)$ est continue et coercive, alors grâce au théorème de Lax-Milgram le problème (3.3) admet une unique solution, donc A est maximal monotone.

L'opérateur A est symétrique et maximal monotone, alors A est un opérateur auto-adjoint.

A est un opérateur auto-adjoint, alors il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de A . L'objectif maintenant est de déterminer les éléments de cette base, pour cela on considère l'équation aux valeurs propres $Aw = \lambda w$.

Alors on a le système suivant:

3.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}w_1 + w_1 \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{V}w_m + \frac{1}{\rho} w_m \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{V}w_2 + w_2 \mathbf{w} = 0 \\ w_1 \tilde{\mathbf{Y}}_b \mathbf{P} = w_2 \tilde{\mathbf{Y}}_c \mathbf{P} = 0 \\ w_1 \tilde{\mathbf{Y}}_b \mathbf{P} = w_m \tilde{\mathbf{Y}}_b \mathbf{P}, \\ w_2 \tilde{\mathbf{Y}}_a \mathbf{P} = w_m \tilde{\mathbf{Y}}_a \mathbf{P}, \\ a + w_1 \mathbf{v} \tilde{\mathbf{Y}}_b \mathbf{P} = a_m w_m \mathbf{v} \tilde{\mathbf{Y}}_b \mathbf{P}, \\ a ? w_2 \mathbf{v} \tilde{\mathbf{Y}}_a \mathbf{P} = a_m w_m \mathbf{v} \tilde{\mathbf{Y}}_a \mathbf{P}. \end{array} \right.$$

On pose $w = e^{rx_3}$

Après calcul, on obtient les solutions suivantes:

$$w_1 \tilde{\mathbf{Y}}_3 \mathbf{P} = C_1 \cos \sqrt{\mathbf{V}}x_3 + C_2 \sin \sqrt{\mathbf{V}}x_3$$

$$w_m \tilde{\mathbf{Y}}_3 \mathbf{P} = C_3 \cos \rho \sqrt{\mathbf{V}}x_3 + C_4 \sin \rho \sqrt{\mathbf{V}}x_3$$

$$w_2 \tilde{\mathbf{Y}}_3 \mathbf{P} = C_5 \cos \sqrt{\mathbf{V}}x_3 + C_6 \sin \sqrt{\mathbf{V}}x_3$$

On utilise les conditions du système (3.4), on obtient

$$C_1 \cos \sqrt{V}d + C_2 \sin \sqrt{V}d = 0,$$

$$C_5 \cos \sqrt{V}c + C_6 \sin \sqrt{V}c = 0,$$

$$C_1 \cos \sqrt{V}b + C_2 \sin \sqrt{V}b = C_3 \cos \sqrt{V}b + C_4 \sin \sqrt{V}b,$$

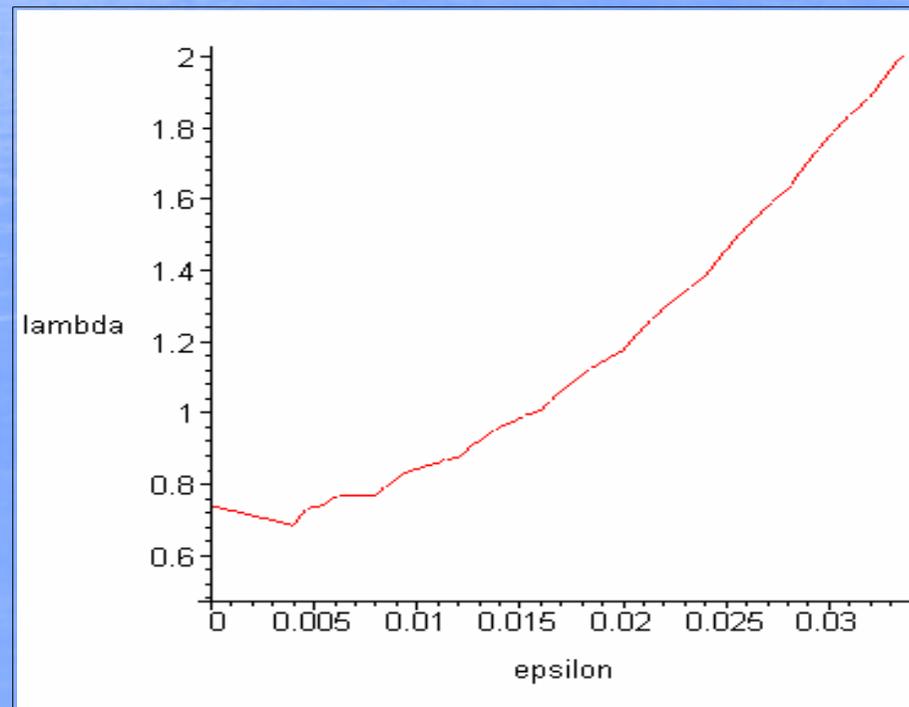
$$C_5 \cos \sqrt{V}a + C_6 \sin \sqrt{V}a = C_3 \cos \sqrt{V}a + C_4 \sin \sqrt{V}a,$$

$$a_1 C_1 \sqrt{V} \sin \sqrt{V}d + a_1 C_2 \sqrt{V} \cos \sqrt{V}d = a_m C_3 \sqrt{V} \sin \sqrt{V}b + a_m C_4 \sqrt{V} \cos \sqrt{V}b,$$

$$a_2 C_5 \sqrt{V} \sin \sqrt{V}a + a_2 C_6 \sqrt{V} \cos \sqrt{V}a = a_m C_3 \sqrt{V} \sin \sqrt{V}a + a_m C_4 \sqrt{V} \cos \sqrt{V}a.$$

Maintenant on cherche les vecteurs propres non nuls, c'est à dire $C_i \neq 0$, $i=0, \dots, 6$. Pour cela on prend $\det[M]$ comme une fonction de λ et ε et on cherche les valeurs propres λ qui vérifient $\det[M]=0$. Les calculs directs sont difficiles, donc on essayera d'obtenir le graphe de λ en fonction de ε à l'aide du logiciel Maple. On obtient le graphe suivant:

pour ε de $[0, 0.1]$ et λ dans $[0.5, 2]$



Remarque: D'après ce graphe on remarque l'existence des valeurs propres $\lambda \neq 0$. En particulier on peut aussi voir l'existence des valeurs propres λ dans $[0,2]$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et cela montre l'existence de la partie singulière de la solution du problème (2.2). L'existence des valeurs propres non nulles, nous permet de déterminer l'expression de la solution.

3.3 L'expression de la solution

Sous forme d' une série

On considère maintenant que u dans le problème (3.2) est une fonction d'un seul variable x_1 , qui prend ces valeurs dans un espace des fonctions de variable x_3 dans $[a,b]$ on peut écrire le problème (3.2) comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u \tilde{\mathbf{Y}}_1 \mathbf{P}}{dx_1^2} + A u \tilde{\mathbf{Y}}_1 \mathbf{P} = 0, \\ u \tilde{\mathbf{Y}}_0 \mathbf{P} = u \tilde{\mathbf{Y}}_L \mathbf{P} = 0. \end{array} \right.$$

3.5

On a vu que L'opérateur A est un auto-adjoint, alors il existe une base orthonormale (e_n) formée de vecteurs propres de A définis par

$$A e_n \tilde{Y}_3 P = \lambda_n e_n \tilde{Y}_3 P, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tel que λ_n sont les valeurs propres de A.

On peut écrire la fonction $u(x_1, x_3)$ dans la base (e_n) sous la forme,

$$u \tilde{Y}_1, x_3 P = \sum_{n=0}^K u_n \tilde{Y}_1 P e_n \tilde{Y}_3 P$$

$$A u \tilde{Y}_1, x_3 P = \sum_{n=0}^K \lambda_n u_n \tilde{Y}_1 P e_n \tilde{Y}_3 P$$

On substitue ces formules dans le problème (3.2) on obtient

$$\sum_{n=0}^K u_n \tilde{Y}_1 P e_n \tilde{Y}_3 P - \sum_{n=0}^K \lambda_n u_n \tilde{Y}_1 P e_n \tilde{Y}_3 P = 0,$$

Alors

$$\sum_{n=0}^K [u_n \tilde{Y}_1 P - \lambda_n u_n \tilde{Y}_1 P] e_n \tilde{Y}_3 P = 0.$$

On a donc les problèmes suivants :

$$\begin{cases} u_n'' - \lambda_n u_n = 0, & n = 0, 1, 2, \dots \\ u_n(0) = u_n(1) = 0. \end{cases}$$

La solution de ces problèmes, s'écrit sous la forme

$$u_n(x) = b_n \exp(\sqrt{\lambda_n} x) + c_n \exp(-\sqrt{\lambda_n} x)$$

Pour $x=0$ on a $c_n = b_n$

La forme générale de la solution du problème (3.5) s'écrit comme suit:

$$u(x) = \sum_{n=0}^K b_n \left(\exp(\sqrt{\lambda_n} x) + \exp(-\sqrt{\lambda_n} x) \right) e_n(x)$$

On cherche maintenant la condition pour que $u(x_1, x_3)$ de $H^1(\Omega)$, tout d'abord on a la définition suivante

Définition: On définit sur l'espace $L^2(\Omega)$ le produit scalaire suivant:

$$-u, v \in L^2(\Omega)$$

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = a_+ \int_0^L \int_b^d u_1 v_1 dx_3 dx_1 + a_m \int_0^L \int_a^b u_m v_m dx_3 dx_1 + a_- \int_0^L \int_c^d u_2 v_2 dx_3 dx_1$$

La norme associée est

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = a_+ \int_0^L \int_b^d |u_1|^2 dx_3 dx_1 + a_m \int_0^L \int_a^b |u_m|^2 dx_3 dx_1 + a_- \int_0^L \int_c^d |u_2|^2 dx_3 dx_1$$

Pour que $u(x_1, x_3)$ de $H^1(\Omega)$, il faut que $\int_0^L \int_a^b |u|^2 dx_3 dx_1 < +\infty$, ceci implique que

$$\int_0^L \int_a^b |u|^2 dx_3 dx_1 < +\infty$$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = a_+ \int_0^L \int_b^d \left| \frac{u_1}{x_1} \right|^2 + \left| \frac{u_1}{x_3} \right|^2 dx_3 dx_1 + a_m \int_0^L \int_a^b \left| \frac{u_m}{x_1} \right|^2 + \left| \frac{u_m}{x_3} \right|^2 dx_3 dx_1 +$$

$$a_- \int_0^L \int_c^d \left| \frac{u_2}{x_1} \right|^2 + \left| \frac{u_2}{x_3} \right|^2 dx_3 dx_1$$

$\int_0^L |u|^2 < K \Rightarrow I < K$ tel que

$$I = a \int_0^L \int_b^d \left| \frac{u_1}{x_3} \right|^2 dx_3 dx_1 + a_m \int_0^L \int_a^b \left| \frac{u_m}{x_3} \right|^2 dx_3 dx_1 + a_c \int_0^L \int_c^d \left| \frac{u_2}{x_3} \right|^2 dx_3 dx_1$$

$$= \int_0^L \left(a \int_b^d \left| \frac{u_1}{x_3} \right|^2 dx_3 + a_m \int_a^b \left| \frac{u_m}{x_3} \right|^2 dx_3 + a_c \int_c^d \left| \frac{u_2}{x_3} \right|^2 dx_3 \right) dx_1.$$

On intègre par partie par rapport à x_3 on obtient

$$I = \int_0^L \int_{\Omega} u, u \mathbb{P} dx_1$$

$$I = \int_0^L \sum_{n \neq 0}^K v_n |u_n \mathbb{Y}_1 \mathbb{P}|^2 dx_1$$

$$I = \sum_{n \neq 0}^K v_n b_n^2 \int_0^L \left| \left(\exp \mathbb{Y} \sqrt{v_n} x_1 \mathbb{P} \exp \mathbb{Y} \sqrt{v_n} x_1 \mathbb{P} \right) \right|^2 dx_1.$$

Après l'intégration on obtient

$$I = \sum_{n \neq 0}^K v_n b_n^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{v_n}} \left[\exp(2\sqrt{v_n} L) - \exp(-2\sqrt{v_n} L) \right] \right] 2L$$

3.5

La condition pour que $u(x_1, x_3)$ de $H^1(\Omega)$, est la convergence de la série (3.5)

À l'aide des semi-groupes

Le problème non homogène de (3.2) s'écrit

$$\begin{cases} u^{\Psi} ? Au = f & \text{dans } \check{Y}, LP \\ u^{\check{Y}P} = u^{\check{L}P} = 0 \end{cases}$$

On prend $u = u_1 + u_2$, tel que $u_2^{\Psi} - Au_2 = f$, alors le problème devient

$$\begin{cases} u_1^{\Psi} ? Au_1 = 0 & \text{dans } \check{Y}, LP \\ u_1^{\check{Y}P} = ? u_2^{\check{Y}P} \\ u_1^{\check{L}P} = ? u_2^{\check{L}P} \end{cases}$$

Donc on l'écrit

$$\begin{cases} u^{\Psi} ? Au = 0 & \text{dans } \check{Y}, LP \\ u^{\check{Y}P} = g_1 \\ u^{\check{L}P} = g_2 \end{cases}$$

3.6

On a vu que l'opérateur A est un auto-adjoint et $(-A)$ est dissipatif alors $-A$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction, donc la solution du problème (3.6) s'écrit sous la forme

$$u(x_1, x_3) = C_1 e^{-x_1 A^{\frac{1}{2}}} + C_2 e^{-L x_1 A^{\frac{1}{2}}}.$$

On utilise les conditions au limites pour déterminer les fonctions C_1, C_2 , alors on a

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^{-L A^{\frac{1}{2}}} = g_1 \\ C_1 e^{-L A^{\frac{1}{2}}} + C_2 = g_2 \end{cases}$$

Dont le déterminant de ce système se donne par

$$I = e^{-2 L A^{\frac{1}{2}}},$$

qui est inversible car le C_0 semi-groupe de contraction associe à l'opérateur $A^{1/2}$ est défini par

$$G \tilde{Y}_t P = e^{-tA^{1/2}}.$$

On a $\|G \tilde{Y}_t P\| \leq 1$,

$$\|e^{-2LA^{1/2}}\| < 1.$$

Les calculs directs nous donnent

$$C_1 = \left[\begin{array}{c} g_1 e^{-LA^{1/2}} + g_2 \\ I - e^{-2LA^{1/2}} \end{array} \right]^{-1}$$

$$C_2 = \left[\begin{array}{c} g_1 e^{-2LA^{1/2}} - g_2 e^{-LA^{1/2}} \\ I - e^{-2LA^{1/2}} \end{array} \right]^{-1}.$$

En fin la solution du problème (2.2) s'écrit

$$u \tilde{Y}_t P = \left[\left(g_1 e^{-LA^{1/2}} + g_2 \right) e^{-x_1 A^{1/2}} + \left(g_1 e^{-2LA^{1/2}} - g_2 e^{-LA^{1/2}} \right) e^{-x_1 A^{1/2}} \right] \left(I - e^{-2LA^{1/2}} \right)^{-1}$$

Conclusion

On a étudié dans ce travail un cas particulier d'un problème limite issue d'un modèle simplifié de collage de deux solides linéairement élastiques.

A partir de la formule variationnelle de ce problème on a déduit le problème aux limites, celui qu'on a démontré l'existence de sa solution faible.

On a réécrit ce problème aux limites sous la forme d'un problème d'équation différentielle abstraite. Dans ce problème on a obtenu un opérateur qu'on a étudié ses propriétés et aussi l'expression de la solution. Dans cette expression ε n'apparaît pas donc on ne peut pas passer à la solution du problème limite.

A tropical sunset scene with palm trees and a colorful sky. The sky transitions from a deep purple at the top to a bright orange and yellow near the horizon, with scattered white clouds. The water in the foreground reflects the vibrant colors of the sky. Silhouettes of palm trees are visible on the left side of the frame.

Merci pour votre attention