REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : ………………
N° série : ………………

THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de :

DOCTORAT EN SCIENCES

Thème

Sur une classe de problèmes aux limites pour équations différentielles

Option

Equations Différentielles

Par :

Memou Ameur

Devant le jury :

Président :	**A.L.MARHOUNE**	**Prof**	**Univ. Constantine**
Rapporteurs :	**M. DENCHE**	**Prof**	**Univ. Constantine**
Examinateurs :	**A. AIBECHE**	**Prof**	**Univ. Setif**
	M. YAROU	**M.C**	**Univ. Jijel**
	T. ZERZAÏHI	**M.C**	**Univ. Jijel**

Soutenue le :…21/02/2007………………

Table des matières

INTRODUCTION

1 Introduction

Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique [5, 6, 18, 19], en thermo-élasticité et en physique des plasmas [28], peuvent être ramenés à des problèmes aux limites avec conditions intégrales. De tels problèmes ont été étudiés dans [2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 18, 19, 20, 30, 37], pour les équations paraboliques, dans [25, 35] pour les équations hyperboliques et dans [11, 12] pour les équations de type mixte.

La méthode utilisée dans [3, 4, 10, 11, 12, 13, 20, 37] est celle des inégalités énergétiques. Le but de ce travail est l'extension de cette méthode aux équations d'ordre trois en temps. différents problèmes aux limites pour équations d'ordre impair ont été étudiés par différentes méthodes dans [4, 26, 27, 31].

La méthode des inégalités énergétiques est appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle. Elle trouve son origine dans les travaux de I.G.Petrovsky [24], utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations de type hyperbolique. Par la suite les développements importants de la méthode sont dus à J.Leray [23] et Garding. [17]. La méthode a été également utilisée et développée dans les travaux de O.A. Ladyzenskaja [21], K. Friedricks [16] et N. Yurchuk [36, 37, 38].

Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A.A. Dezin [15] et qui peut être résumé comme suit :

Tout d'abord on écrit le problème posé (P) sous forme d'une équation opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F}, \qquad u \in D(L),$$

où l'opérateur L est considéré d'un espace de Banach E dans un Hilbert F convenablement choisis.

Après on établit les estimations a priori pour l'opérateur L et on montre la densité de l'ensemble des valeurs de cet opérateur dans l'espace F.

Si on convient d'appeler solution forte du problème (P) toute fonction vérifiant

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \qquad u \in D(L),$$

alors pour avoir l'existence de la solution forte il est nécessaire et suffisant qu'on établisse la densité de l'image $R(L)$ dans F. L'unicité est déduite de l'inégalité de l'énergie. Le présent travail est considéré comme le prolongement des résultats obtenus dans [2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 18, 19, 20, 30, 36] pour les équations paraboliques et dans [11, 12] pour les équations du type mixte.

La méthode des inégalités énergétiques est une méthode éfficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathémathique, elle est fondée sur un support solide et est développée dans un cadre abstrait. Mais dans l'application de cette méthode, on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

1. Le choix de l'espace des solutions.
2. Le choix du multiplicateur.
3. Le choix de l'opérateur de régularisation.

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale est encore prématurée. Chaque problème nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

Ce travail est constitué de trois chapitres :

• Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un problème mixte pour une équation aux dérivées partielles d'ordre trois selon la variable temporelle combinant une condition finale avec deux autres intégrales à poids. On montre l'existence et l'unicité de la solution forte.

• Le dexieme chapitre est consacré à l'étude d'un problème mixte pour une équation aux dérivées partielles d'ordre trois combinant une condition finale, une de Dirichlet avec une autre du type integrale.On présente une extension de la méthode des inégalités energetique à ce type de problèmes.

• Dans le troisième chapitre on reprend l'étude faite dans le chapitre précédent pour la même équation combinant une condition finale avec deux autres integrales à poids. On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est baseé sur l'inégalité de l'énergie et la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème en question.

NOTIONS PRELIMINAIRES

Nous commonçons par un bref rappel sur les opérateurs de régularisation, et certaines de leurs propriétés

Opérateurs Abstaits de Régularisation

Soit H un espace de Hilbert, et T un opérateur a domaine dense défini de $D(T) \subset H \longrightarrow H$ avec $\overline{D(T)} = H$.

Définition 1 *On dit que l'opérateur T est un opérateur dissipatif si*

$$\mathrm{Re}\langle Tu, u\rangle \leq 0 \qquad \forall u \in D(T).$$

Définition 2 *On dit que l'opérateur T est accrétif si $-T$ est dissipatif. i.e*

$$\mathrm{Re}\langle Tu, u\rangle \geq 0 \qquad \forall u \in D(T).$$

Définition 3 *Un opérateur dissipatif T est dit maximal si son extention est T lui mème.*

Proposition 1 *Soit T un opérateur défini de $D(T) \subset H \xrightarrow{T} H$ avec $\overline{D(T)} = H$. alors on a les équivalences suivantes*

(i) T est un opérateur dissipatif.

(ii) $\|Tu - \lambda u\| \geq \mathrm{Re}\,\lambda\, \|u\|$ $\forall u \in D(T)$ et pour tout λ telle que $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$.

(iii) $\|Tu - \lambda u\| \geq \lambda \|u\|$ $\forall u \in D(T)$ et pour tout $\lambda > 0$.

Démonstration. Supposons que (i) soit vérifieé. Soit $u \in D(T)$ et $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. alors $\mathrm{Re}\langle Tu - \lambda u, u\rangle = \mathrm{Re}\langle Tu, u\rangle - \mathrm{Re}\,\lambda\,\|u\|^2 \leq -\mathrm{Re}\,\lambda\,\|u\|^2$.

donc $\|Tu - \lambda u\|\,\|u\| \geq -\mathrm{Re}\langle Tu - \lambda u, u\rangle \geq \mathrm{Re}\,\lambda\,\|u\|^2$. ceci implique (ii). Il est clair que (ii) implique (i).

Supposons que (iii) sot vraie. Pour tout $u \in D(T)$ et $\lambda > 0$, on obtient

$\|Tu\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle = \|Tu - \lambda u\|^2 - \lambda^2 \|u\|^2 \geq 0$. et donc, $2\lambda \operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle \leq \|Tu\|^2$. Comme $\lambda > 0$ est arbitraire, il résulte que $\operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle \leq 0$. ■

Théorème 1 *Tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermé, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.*

Théorème 2 *tout opérateur dissipatif admet un maximal dissipatif.*

Proposition 2 *T est un opérateur dissipatif, alors, les propriétés suivantes sont équivalentes*

- T est un opérateur dissipatif maximal.
- $\operatorname{Im}(T - \lambda I) = H$ pour tout λ telle que $\operatorname{Re}\lambda > 0$.
- $\operatorname{Im}(T - \lambda I) = H$ pour certaine λ telle que$\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Théorème 3 *Soit T un opérateur dissipatif défini de $D(T) \subset H \xrightarrow{T} H$ avec $\overline{D(T)} = H$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

- T est un opérateur dissipatif maximal.
- T est fermé et $\{\lambda /\ \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(T)$, et on a de plus $\|R(T,\lambda)\| \leq \dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$.

Théorème 4 *Soit T un opérateur maximal dissipatif défini de $D(T) \subset H \xrightarrow{T} H$ avec $\overline{D(T)} = H$. Alors*

- $J_\varepsilon^{-1} \in L(H)$.
- $\|J_\varepsilon^{-1}\| < 1$.
- $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} J_\varepsilon^{-1} u = u$ pour tout $u \in H$.

où $J_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon T)^{-1}, \quad \varepsilon > 0$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$, alors $\{\varepsilon : \operatorname{Re}\epsilon > 0\} \subset \rho(T)$ donc $(I - \varepsilon T)$ est continûment inversible. D'où $(I - \varepsilon T)^{-1} \in L(H)$. Puisque $\dfrac{1}{\varepsilon} > 0$, alors $\left(I - \dfrac{1}{\varepsilon} T\right)^{-1} \in L(H)$ i.e.$\varepsilon J_\varepsilon^{-1} \in L(H)$.donc

$J_\varepsilon^{-1} \in L(H)$. Alors on déduit que $\left\| \left(I - \frac{1}{\varepsilon} T \right)^{-1} \right\| \leq \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ arbitraire, alors $\|J_\varepsilon^{-1}\| < 1$.

Soit $u \in D(T)$, alors on a

$$\left\| J_\varepsilon^{-1} u - u \right\| = \left\| (I - \varepsilon T)^{-1} u - u \right\| = \epsilon \left\| (I - \varepsilon T)^{-1} T u \right\| \leq \epsilon \left\| T u \right\|.$$

Ainsi par passage à la limite lorsque ϵ tend vers 0, on déduit $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} J_\varepsilon^{-1} u = u$ pour tout $u \in D(T)$, par densité on aura $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0} J_\varepsilon^{-1} u = u$ pour tout $u \in H$. ■

Exemple 1 *On prend* $T = \dfrac{\partial^3}{\partial t^3}$, *de domaine de définition*

$D(T) = \left\{ u \in H = L^2[0,a] \;/\; \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in L^2[0,a],\ u(0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0) = 0, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(a) = 0 \right\}$

alors T *est un opérateur dissipatif.*

Démonstration. En effet on a

$\mathrm{Re}\langle Tu, u\rangle = \mathrm{Re} \int_0^a \dfrac{\partial^3 u}{\partial t^3} \overline{u} dt = \mathrm{Re} \left. \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \overline{u} \right|_0^a - \mathrm{Re} \int_0^a \dfrac{\partial u}{\partial t} \overline{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}} dt = -\dfrac{1}{2} \left. \left| \dfrac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right|_{t=a} \leq 0.$ ■

On pose $J_\varepsilon^{-1} = (I - \varepsilon T)^{-1} = (I - \varepsilon \dfrac{\partial^3}{\partial t^3})^{-1}$, pour $\varepsilon > 0$.

les opérateurs J_ε^{-1} ne sont que ceux qui donnent la solution du problème

$$g_\epsilon - \epsilon \frac{\partial^3 g_\epsilon}{\partial t^3} = g, \quad g_\epsilon(0) = 0, \quad \frac{\partial g_\epsilon}{\partial t}(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_\epsilon}{\partial t^2}(a) = 0.$$

Dont le problème adjoint est

$$g_\epsilon^* + \epsilon \frac{\partial^3 g_\epsilon^*}{\partial t^3} = g, \quad g_\epsilon^*(0) = 0, \quad \frac{\partial g_\epsilon^*}{\partial t}(a) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_\epsilon^*}{\partial t^2}(a) = 0.$$

Proposition 3 *Soit* $v \in L^2(0,a)$, *alors*

$\underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{Lim} \|J_\varepsilon^{-1} u - u\|_{L^2(0,a)} = 0.$

$\underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{Lim} \left\| (J_\varepsilon^{-1})^* u - u \right\|_{L^2(0,a)} = 0.$

On note par $\Omega = [0,1] \times [0,T]$.

Pour $u \in L^2(\Omega)$, on note par $u_\varepsilon = J_\varepsilon^{-1} u, \qquad v_\varepsilon^* = (J_\varepsilon^{-1})^* v.$

Propriétés

– $\dfrac{\partial^k u_\epsilon}{\partial t^k} \in L^2(\Omega),\ k = \overline{0,3}.$

D'autre part

– $u_\epsilon(x,0) = 0, = 0, \dfrac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2}(x,T) = 0\ \forall x \in [0,1]\,.$

– $\dfrac{\partial^k v^*_\epsilon}{\partial t^k} \in L^2(\Omega),\ k = \overline{0,3}.$

De plus on a

– $v^*_\epsilon(x,0) = 0, \dfrac{\partial v^*_\epsilon}{\partial t}(x,T) = 0, \dfrac{\partial^2 v^*_\epsilon}{\partial t^2}(x,T) = 0\ \forall x \in [0,1]\,.$

– $\|J_\varepsilon^{-1} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\ \forall \varepsilon > 0.$

– $\left\|(J_\varepsilon^{-1})^* v\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega)}\ \forall \varepsilon > 0.$

– $\langle J_\varepsilon^{-1} u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, (J_\varepsilon^{-1})^* v\rangle_{L^2(\Omega)}.$

– Si $u \in L^2(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega)$, alors

1) $\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \in L^2(\Omega)$, de plus on a $\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_\varepsilon$ et $u_\epsilon(x,T) = J_\varepsilon^{-1}(u(0,T))\,.$

2) $\dfrac{\partial u^*_\epsilon}{\partial x} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^*_\varepsilon$ et $u^*_\epsilon(x,T) = (J_\varepsilon^{-1})^*(u(0,T))\,.$

3) Si $u \in L^2(\Omega)$ alors

a- $\underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{Lim} \|J_\varepsilon^{-1} u - u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$

b- $\underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{Lim} \left\|(J_\varepsilon^{-1})^* u - u\right\|_{L^2(\Omega)} = 0.$

Exemple 2 *On prend* $T = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$, *de domaine de définition*

$$D(T) = \left\{ u \in H = L^2[0,a]\ /\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2[0,a]\,,\ u(0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(a) = 0 \right\},$$

alors T *est dissipatif.*

Démonstration. $\mathrm{Re}\langle Tu, u\rangle = \mathrm{Re} \int_0^a \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\overline{u}dt = \mathrm{Re}\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\overline{u}\right|_0^a - \int_0^a \left|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dt \leq 0.$ ■

L'opérateur $u_\varepsilon = (J_\varepsilon^{-1})\, u = \left(u - \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$, dont l'adjoint est $u^*_\varepsilon = (J_\varepsilon^{-1})^*\, u = \left(u - \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ a les même propriétés que l'opérateur $T = \dfrac{\partial^3}{\partial t^3}$.

Lemme 1 ≪*de Gronwall*≫ *Si* f_1, f_2 *et* $f_{3,}$ *sont des fonctions non négatives sur* $[0, T]$, $f_1(t)$, $f_2(t)$ *sont intégrables et* $f_3(t)$ *est non décroissante, alors de l'inégalité*

$$\int_0^\eta f_1(t)dt + f_2(\eta) \leq f_3(\eta) + c \int_0^\eta f_2(t)dt$$

il découle

$$\int_0^\eta f_1(t)dt + f_2(\eta) \leq e^{c\eta} f_3(\eta).$$

CHAPITRE I

Problème Non local Pour Une Equation Aux Dériveés Partielles Du troisième Ordre.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un probléme mixte pour une équation aux dérivées partielles d'ordre trois selon la variable temporelle combinant une condition finale avec deux autres intégrales à poids. On montre l'existence et l'unicité de la solution forte. La méthode utilisée est celle des inégalités énérgétiques.

2 Position du Problème

Dans le rectangle $\Omega = [0,1] \times [0,T]$, on considère l'équation aux dérivées partielles :

$$\pounds u = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t). \tag{1}$$

A l'équation (1), on associe les conditions initiales

$$l_1 u = u(x,0) = \varphi(x), l_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{2}$$

la condition finale

$$l_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T) = \chi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{3}$$

et les conditions non-locales

$$\int_0^1 K_i(x)\, u(x,t)\, dx = 0, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

les fonctions $a(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $f(x,t)$, et $K_i(x)$ sont données, où les fonctions $K_i(x)$ satisfont aux conditions de compatibilité

$$\int_0^1 K_i(x)\,\varphi(x)\, dx = 0, \int_0^1 K_i(x)\,\psi(x)\, dx = 0, \int_0^1 K_i(x)\,\chi(x)\, dx = 0.$$

De plus, on suppose que les fonctions $K_i(x)$, $a(x,t)$ sont positives et vérifiant les conditions :

$$\begin{gathered} 0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_1, \text{pour tout } (x,t) \in \Omega. \\ \left|\frac{\partial a}{\partial x}(x,t)\right| \leq b, \text{pour tout } (x,t) \in \Omega. \end{gathered} \tag{5}$$

$$
\begin{cases}
0 < k_0 \leq K_1(x) + K_2(x) \leq k_1, \\
\left| \dfrac{dK_1}{dx} + \dfrac{dK_2}{dx} \right| \leq k_1', \\
\sum_{i=1}^{i=2} \left| \dfrac{d^2 K_i}{dx^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{K_i(x)}{a} \dfrac{\partial a}{\partial x} \right) \right| \leq m, \\
\dfrac{k_1^2}{a_0} b < m_0 \leq H(x) = K_2(x) \dfrac{dK_1(x)}{dx} - K_1(x) \dfrac{dK_2(x)}{dx} \leq m_1.
\end{cases} \tag{6}
$$

Dans ce chapitre, on montre l'éxistence et l'unicité de la solution forte du problème (1)-(4). La démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème (1)-(4). Ce problème peut être écrit sous forme opératorielle

$$
Lu = \mathcal{F},
$$

où l'opérateur $L = (\pounds,\ l_1,\ l_2,\ l_3)$ est considéré de E dans F, de domaine de définition $D(L)$ constitue des fonctions $u \in W_2^{2,3}(\Omega)$, et vérifiant les conditions (4).

2.1 Espaces fonctionnels

Pour l'étude du problème posé, nous avons besoin de quelques espaces fonctionnels. L'espace de Banach E constitué des fonctions $u \in W_2^{2,3}(\Omega)$, vérifiant les conditions (4), muni de la norme suivante

$$
\begin{aligned}
\|u\|_E^2 = \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt \\
+ \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a(\zeta, t) \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \right|^2 dxdt + \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt \\
+ \sup_t \sum_{i=1}^{i=2} \int_0^1 \left(\left| \int_0^x K_i(\zeta) u(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 + \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 \right) dx,
\end{aligned} \tag{7}
$$

finie,et F l'espace de Hilbert des fonctions vectorielles F$= (f, \varphi, \psi, \chi) \in \left(L^2(\Omega)\right)^4$, dont la norme est donnée par

$$
\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_\Omega t\, |f|^2\, dxdt + \int_0^1 \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2 \right) dx. \tag{8}
$$

Lemme 2 *Pour $u \in D(L)$, on a*

$$\sum_{i=1}^{i=2} \int_0^1 \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, s)\, d\zeta \right|^2 dx \leq 2e^T k_1^2 \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, T)\, d\zeta \right|^2 dx$$

$$+4e^T \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt.$$

Démonstration. On intègre par parties le terme

$$-\operatorname{Rc} \sum_{i=1}^{i=2} \int_s^T \int_0^1 e^t \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \int_0^x K_i(\zeta) \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}(\zeta, t)\, d\zeta dx$$

par rapport á t, on obtient

$$-\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} \int_s^T \int_0^1 e^t \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \int_0^x K_i(\zeta) \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}(\zeta, t)\, d\zeta dx =$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 e^t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 \Bigg|_{t=T} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 \Bigg|_{t=s}$$

$$+\frac{1}{2} \int_s^T \int_0^1 e^t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2$$

en utilisant l'$\epsilon-$inégalité, on obtient l'inégalité cherchée. ■

Lemme 3 *Pour $u \in D(L)$, on a*

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \int_0^1 \left| \int_0^x K_i(\zeta)\, u(\zeta, s)\, d\zeta \right|^2 dx \leq$$

$$\frac{e^T}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt + \frac{e^T k_1^2}{2} \int_0^1 |u(\zeta, T)|^2\, dx,$$

Démonstration. On intègre par parties le terme

$$-\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} \int_s^T \int_0^1 e^t \int_0^x K_i(\zeta)\, u(\zeta, t)\, d\zeta \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta d\zeta dxdt$$

par rapport á t, on aura

$$-\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} \int_s^T \int_0^1 e^t \int_0^x K_i(\zeta)\, u(\zeta, t)\, d\zeta \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta d\zeta dxdt =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \int_0^1 e^s \left| \int_0^x K_i(\zeta)\, u(\zeta, s)\, d\zeta \right|^2 dx + \frac{e^T}{2} \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial u}{\partial t}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt$$

$$+\frac{e^T}{2}\int_0^1\left|\int_0^x K_i\left(\zeta\right)u\left(\zeta,T\right)d\zeta\right|^2 dx.$$

En utilisant l'$\epsilon-$inégalités, on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\int_0^1\left|\int_0^x K_i\left(\zeta\right)u\left(\zeta,s\right)d\zeta\right|^2 dx\leq$$

$$\frac{e^T}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_i\left(\zeta\right)\frac{\partial u}{\partial t}\left(\zeta,t\right)d\zeta\right|^2 dxdt+\frac{e^T k_1^2}{2}\int_0^1\left|u\left(\zeta,T\right)\right|^2 dx,$$

d'où le lemme. $\blacksquare$

2.2 Inégalité de l'énergie et ses conséquences

Théorème 5 *Pour toute fonction* $u \in D(L)$, *il existe une constante positive* c, *telle que*

$$\|u\|_E \leq c\,\|Lu\|_F \tag{9}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$ de l'équation (1) et l'opérateur intégrodifférentiel

$$Mu = \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \frac{K_i(x)}{a} t \exp(-\lambda t) \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta, \tag{10}$$

puis on prend la partie réelle, on obtient la forme quadratique suivante

$$\Phi(u,u) = \operatorname{Re} \int_\Omega \pounds u \overline{Mu} dxdt, \tag{11}$$

avec la constante λ positive.

En remplaçant dans (11), $\pounds u$ et Mu par leurs expréssions, on trouve

$$\Phi(u,u) = \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \int_\Omega t \frac{K_i(x)}{a} \exp(-\lambda t) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)} d\zeta dxdt$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \int_\Omega \frac{K_i(x)}{a} t \exp(-\lambda t) \frac{\partial}{\partial x}\left(a \frac{\partial u}{\partial x}\right) \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)} d\zeta dxdt. \tag{12}$$

En integrant chaque terme par parties dans (12) par rapport á x, et en utilisant les conditions (4), on aura

$$\Phi(u,u) = -\operatorname{Re} \int_\Omega tH(x) \exp(-\lambda t)\, u \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega \frac{t \exp(-\lambda t)}{aK_i^2(x)} \left[H(x) - (-1)^i \frac{K_1 K_2}{a} \frac{\partial a}{\partial x}\right] \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \int_\Omega t \exp(-\lambda t) \left[\frac{d^2 K_i}{dx^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_i(x)}{a} \frac{\partial a}{\partial x}\right)\right] u \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)} d\zeta dxdt. \tag{13}$$

En intégrant le premier terme du membre droit de (13), par rapport à t , et en prenant en consédération (2),(3), on obtient

$$-\operatorname{Re} \int_\Omega tH(x) \exp(-\lambda t)\, u \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt = \frac{-3}{2} \int_\Omega (1 - \lambda t) H(x) \exp(-\lambda t) \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(3\lambda^{2}-\lambda^{3}t\right)H\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|u\right|^{2}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}tH\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Big|_{t=T}
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(-2\lambda+\lambda^{2}t\right)H\left(x\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|u\right|^{2}dx\Big|_{t=0}^{t=T}
$$

$$
+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)\left(1-\lambda t\right)\exp\left(-\lambda t\right)u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx\Big|_{t=0}^{t=T}-\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)t\exp\left(-\lambda t\right)u\overline{\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}}dx\Big|_{t=T}. \tag{14}
$$

En combinant (13) et (14), on obtient

$$
\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\frac{t\exp\left(-\lambda t\right)}{aK_{i}^{2}\left(x\right)}\left[H\left(x\right)-\left(-1\right)^{i}\frac{K_{1}K_{2}}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right]\exp\left(-\lambda t\right)\left|\int_{0}^{x}K_{i}\left(\zeta\right)\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}\left(\zeta,t\right)d\zeta\right|^{2}dxdt
$$

$$
+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}H\left(x\right)t\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Big|_{t=T}+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}H\left(x\right)\left(2\lambda-\lambda^{2}t\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|u\right|^{2}dx\Big|_{t=T}
$$

$$
+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)\left(1-\lambda t\right)\exp\left(-\lambda t\right)u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx\Big|_{t=T}+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)t\exp\left(-\lambda t\right)u\overline{\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}}dx\Big|_{t=T}=
$$

$$
\operatorname{Re}\int_{\Omega}t\exp\left(-\lambda t\right)\pounds u\overline{Mu}dxdt+\int_{0}^{1}\lambda H\left(x\right)\left|\varphi\right|^{2}dx+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)\varphi\overline{\psi}dx
$$

$$
+\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\left(-1\right)^{i}\int_{\Omega}t\left[\frac{d^{2}K_{i}}{dx^{2}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_{i}\left(x\right)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\right]\exp\left(-\lambda t\right)u\int_{0}^{x}K_{3-i}\left(\zeta\right)\overline{\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}\left(\zeta,t\right)}d\zeta dxdt
$$

$$
+\frac{3}{2}\int_{\Omega}H\left(x\right)\left(1-\lambda t\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt+\frac{1}{2}\int_{\Omega}H\left(x\right)\left(\lambda^{3}t-3\lambda^{2}\right)\exp\left(-\lambda t\right)\left|u\right|^{2}dxdt. \tag{15}
$$

Il est facile de voir que

$$
-\int_{0}^{1}\lambda\,\frac{\left|1-\lambda T\right|}{2}H\left(x\right)\exp\left(-\lambda T\right)\left|u\right|^{2}dx\Big|_{t=T}-\int_{0}^{1}\frac{\left|1-\lambda T\right|}{2\lambda}H\left(x\right)\exp\left(-\lambda T\right)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Big|_{t=T}
$$

$$
\leq\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)\left(1-\lambda t\right)\exp\left(-\lambda t\right)u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx\Big|_{t=T}
$$

et

$$
-\int_{0}^{1}\frac{\lambda}{2}H\left(x\right)\exp\left(-\lambda T\right)\left|u\right|^{2}dx\Big|_{t=T}-\int_{0}^{1}\frac{T^{2}}{\lambda}H\left(x\right)\exp\left(-\lambda T\right)\left|\chi\right|^{2}dx
$$

$$
\leq\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H\left(x\right)t\exp\left(-\lambda t\right)u\overline{\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}}dx\Big|_{t=T}.
$$

Si on choisit λ telle que $\frac{1}{2} < \lambda_0 \leq \lambda T \leq 1$, alors, de (5), (6), (15) et les inégalités précédentes, on déduit

$$\frac{1}{2}\frac{\exp(-\lambda T)}{a_1 k_1^2}\left(m_0 - \frac{k_1^2 b}{a_0}\right)\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt$$

$$\frac{\lambda m_0}{2}\exp(-\lambda T)\int_0^1 |u|^2\,dx\Big|_{t=T} + \frac{(2\lambda T-1)\,m_0}{\lambda}\exp(-\lambda T)\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} \leq$$

$$\int_\Omega t\,|\pounds u|\,|Mu|\,dxdt + \frac{3m_1}{2}\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2\right)dx + \frac{T^2 m_1}{\lambda}\int_0^1\left(|\chi|^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega H(x)\left(\lambda^3 t - 3\lambda^2\right)\exp(-\lambda t)\,|u|^2\,dxdt + \frac{3}{2}\int_\Omega H(x)\,(1-\lambda t)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$+m\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\,|u|\left|\int_0^x K_{3-i}(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|dxdt. \tag{16}$$

Si on pose

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{2a_1k_1^2}\left(m_0 - \frac{k_1^2 b}{a_0}\right),\ \frac{(2\lambda_0-1)\,m_0}{\lambda},\ \frac{\lambda m_0}{2}\right)e,$$

alors, l'inégalité précédente devient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_0^1 |u|^2\,dx\Big|_{t=T} + \int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} \leq$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega t\,|\pounds u|\,|Mu|\,dxdt + \frac{3m_1}{2\alpha}\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2\right)dx + \frac{T^2 m_1}{\lambda\alpha}\int_0^1\left(|\chi|^2\right)$$

$$+\frac{3m_1}{2\alpha}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \frac{m}{\alpha}\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\,|u|\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|dxdt.$$

Utilisons l'$\varepsilon-$inégalité dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_0^1\left(|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)dx\Bigg|_{t=T} \leq$$

$$4\left(\frac{h}{\alpha a_0}\right)^2\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt + \frac{3m_1}{\alpha}\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2\right)dx + \frac{2T^2 m_1}{\lambda\alpha}\int_0^1\left(|\chi|^2\right)$$

$$+\max\left(\frac{3m_1}{\alpha},\ 4\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2\right)\int_\Omega\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |u|^2\right)dxdt.$$

De nouveau, utilisons le lemme (1) dans l'inégalité précédente, on aura

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_0^1\left(|u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)dx\Bigg|_{t=T} \leq$$

$$\beta\left(\int_{\Omega} t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right). \tag{17}$$

avec

$$\beta=\max\left(4\left(\frac{h}{\alpha a_0}\right)^2,\ \frac{3m_1}{\alpha},\ \frac{2m_1}{\lambda\alpha}\right)\max\left(1,T^2\right)e^{\max\left(\frac{3m_1}{\alpha},\,4\left(\frac{m}{\alpha}\right)^2\right)T}.$$

Maintenant, intégrons de nouveau par parties le terme

$$-\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega} t\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\,\overline{\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta}\,dxdt,$$

par rapport à t, en utilisant la condition (3), on obtient

$$-\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega} t\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\,\overline{\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta}\,dxdt=$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt-\frac{T}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\int_0^1\left|\int_0^x K_i\chi\,d\zeta\right|^2 dx,$$

de (17) et en utilisant des $\epsilon-$inégalité, l'égalité précédente devient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt\leq$$

$$\left(4\beta+4Tk_1^2\right)\left(\int_{\Omega} t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right) \tag{18}$$

De (18) et le lemme (2), on déduit

$$\frac{1}{2e^T k_1^2}\sum_{i=1}^{i=2}\int_0^1\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,s)\,d\zeta\right|^2 dx\leq\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,T)\,d\zeta\right|^2 dx$$

$$+\frac{2}{k_1^2}\left(4\beta+4Tk_1^2\right)\left(\int_{\Omega} t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right), \tag{19}$$

de plus, on peut facilement voir que

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt\leq$$

$$2T^2\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt+4Tk_1^2\int_0^1|\psi|^2\,dx.$$

De l'inégalité précédente, (17), (18) et le lemme (3), on déduit

$$\frac{1}{e^T k_1^2}\sum_{i=1}^{i=2}\int_0^1\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,u(\zeta,s)\,d\zeta\right|^2 dx\leq\int_0^1|u(\zeta,T)|^2\,dx$$

$$+\frac{8\beta T^2+8T^3k_1^2+8Tk_1^2}{k_1^2}\left(\int_\Omega |f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right) \tag{20}$$

On combinant (18),(19) et (20) avec (17), on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt+\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{i=2}\int_0^1\left(\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,u(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2+\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2\right)dx\Big|_{t=s}\right)\leq$$
$$\delta\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right), \tag{21}$$

avec

$$\delta=\frac{2\frac{\left(4\beta T^2+4T^3k_1^2+4Tk_1^2\right)}{k_1^2}+\left(\frac{2}{k_1^2}+1\right)\left(4\beta+4Tk_1^2\right)+\beta}{\min\left(1,\frac{1}{e^T k_1^2}\right)}.$$

comme le membre droit de (21) est indépendant de s, alors

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt+\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt$$
$$+\sup_t\sum_{i=1}^{i=2}\int_0^1\left(\left|\int_0^x K_i(\zeta)\,u(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2+\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2\right)dx\leq$$
$$\delta\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right). \tag{22}$$

En vertu l'équation (1) et de l'inégalité précédente, on deduit

$$\sum_{i*1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(a\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)d\zeta\right|^2 dxdt\leq\left(2\delta+4k_1^2\right)\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right). \tag{23}$$

En combinant (22) avec (23), on obtient l'estimation (9) avec $c^2=3\delta+4k_1^2$. ■

Lemme 4 *L'operateur L de E dans F est fermable.*

Soit $\overline{L}$ la fermeture de L, et $D(\overline{L})$ le domaine de définition de $\overline{L}$.

Définition 4 *la solution de l'équation $\overline{L}u=\mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (1, 4).*

Comme les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ sont limites des suites des points du graphe de l'opérateur L, on peut prolonger l'inégalité (9), en passant à la limite

$$\|u\|_E \leq c \left\|\overline{L}u\right\|_F \qquad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{24}$$

Corollaire 1 *La solution forte du problème (1, 4) si elle existe, est unique et dépend continûment du* $\mathcal{F}$.

Corollaire 2 *L'ensemble des valeurs* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égal à la fermeture* $\overline{R\left(L\right)}$ *de* $R\left(L\right)$.

2.3 Résolubilité du Problème (1)-(4)

De l'inégalité (24) résulte que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse borné $\overline{L}^{-1}$, du corollaire (2) on déduit que $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé.

D'où pour montrer l'existence de la solution forte il suffit de montrer la densité de l'ensemble $R\left(L\right)$ dans l'espace F. La démonstration est basée sur le lemme suivant

Lemme 5 *Supposons que la fonction $a(x,t)$ et ses dérivées $\dfrac{\partial^4 a}{\partial t^3 \partial x}, \dfrac{\partial^2 a}{\partial t \partial x}, \dfrac{\partial^k a}{\partial t^k}$ $k=\overline{1,3}$ sont bornées, et*

$$\left\{ \begin{array}{c} K_2\left(1\right)\dfrac{dK_1}{dx}\left(1\right)-K_1\left(1\right)\dfrac{dK_2}{dx}\left(1\right)\neq 0, \\ \Delta=\sum_{i=1}^{i=2}\left(-1\right)^i\int_0^1 K_i\left(x\right)dx\int_0^1 K_{3-i}\left(\gamma\right)\int_0^{\gamma}\dfrac{d\gamma}{\left(1-\zeta\right)a\left(\zeta,t\right)}\neq 0. \end{array} \right. \tag{25}$$

Soit $D_0(L)=\left\{u\in D(L),\ u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T)=0\right\}$. Si, pour $u\in D_0(L)$ et pour certaines fonctions $w\in L^2\left(\Omega\right)$ on a

$$\int_{\Omega}\left(1-x\right)^2 \pounds u\overline{w}dxdt=0, \tag{26}$$

alors $w=0$.

Démonstration. L'égalité (26) peut s'écrire sous la forme

$$\int_{\Omega}\left(1-x\right)^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{w}dxdt=-\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x\right)a\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\left(1-x\right)\overline{w}-\int_0^x\overline{w}d\zeta\right)dxdt, \tag{27}$$

pour $w\left(x,t\right)$ donnée, on introduit la fonction $v\left(x,t\right)$ tel que

$$\left(1-x\right)^2 w=K_2\int_0^x K_1 v-K_1\int_0^x K_2 v. \tag{28}$$

De cette dernière égalité en utilisant (25), on obtient

$$\int_0^1 K_i v dx=0,\ i=1,2, \tag{29}$$

alors

$$\left(1-x\right)w-\int_0^x wd\zeta=$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\left(\frac{dK_2}{d\zeta}\int_0^\zeta K_1 v(\gamma,t)\,d\gamma - \frac{dK_1}{d\zeta}\int_0^\zeta K_2 v(\gamma,t)\,d\gamma\right)d\zeta = v_1$$

de ceci, l'égalité (27) peut être écrite sous la forme

$$\int_\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{Nv}dxdt = \int_\Omega A(t)u\overline{v_1}dxdt \tag{30}$$

avec

$$A(t)u = -\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\,a\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

et

$$Nv = K_2\int_0^x K_1 v - K_1\int_0^x K_2 v = (1-x)^2\,w.$$

On substituant la fonction u dans (30) par sa fonction régularisée $u_{\epsilon,}$ et en utilisant la relation

$$A(t)\,u_\epsilon = J_\epsilon^{-1}Au - \epsilon J_\epsilon^{-1}\beta_\varepsilon(t)\,u_\epsilon$$

avec

$$\beta_\varepsilon(t)\,u_\epsilon = 3\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + 3\frac{\partial A(t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 A(t)}{\partial t^3}u_\epsilon,$$

on obtient

$$-\int_\Omega uN\overline{\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^3}}dxdt = \int_\Omega\left(A(t)\,u\overline{(v_1)_\varepsilon^*} - \varepsilon\beta_\varepsilon(t)\,u_\epsilon\overline{(v_1)_\varepsilon^*}\right)dxdt. \tag{31}$$

Il est facile de voir que l'opérateur $A(t)$ admet un inverse continu dans $L^2(0,1)$ défini par

$$\begin{aligned} A^{-1}(t)\,g = &-\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{1}{a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta \\ &+C_1(t)\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} + C_2(t) \end{aligned} \tag{32}$$

avcc

$$C_1(t) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i\int_0^1 K_i dx\int_0^1 K_{3-i}dx\int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta,$$

et

$$C_2(t) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^{i-1}\int_0^1 K_i dx\int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)}\times\int_0^1 K_{3-i}dx\int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta.$$

Alors, on aura

$$\int_0^1 K_i\left(x\right) A^{-1}\left(t\right) g dx = 0, i = 1, 2.$$

Donc la fonction $u_\epsilon = J_\epsilon^{-1} u$ peut être représentée sous la forme $u_\epsilon = J_\epsilon^{-1} A^{-1} A\left(t\right) u$, donc la fonction $\beta_\varepsilon\left(t\right)$ s'écrit

$$\beta_\varepsilon\left(t\right) g = \frac{\partial^4 a}{\partial t^3 \partial x} J_\varepsilon^{-1} \frac{1}{a}\left(\int_0^x g\left(\eta, t\right) - C_1(t)\right)$$
$$+ \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{g}{a} - \frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^x g\left(\eta, t\right) d\eta - C_1(t)\right)\right)$$
$$+3\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial x}\frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon^{-1}\frac{1}{a}\left(\int_0^x g\left(\eta, t\right) - C_1(t)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{g}{a} - \frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^x g\left(\eta, t\right) d\eta - C_1(t)\right)\right)\right]. \tag{33}$$

dont l'adjoint est donné par

$$\beta_\varepsilon^*\left(t\right) h = \frac{1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} h + \frac{3}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$
$$+ \left(G_\varepsilon h\right)\left(x\right) + C\left(t\right)\left(G_\varepsilon h\right)\left(1\right), \tag{34}$$

avec

$$\left(G_\varepsilon h\right)\left(x\right) = \int_0^x \left[\frac{-3}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t \partial \zeta}\frac{\partial h}{\partial t}\right)\right.$$
$$+3\frac{\partial a}{\partial \zeta}\frac{1}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$
$$\left. -\frac{1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial^4 a}{\partial t^3 \partial \zeta} h + \frac{\partial a}{\partial \zeta}\frac{1}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^* \frac{\partial^3 a}{\partial t^3} h\right] d\zeta, \tag{35}$$

et

$$C\left(t\right) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{i=2}\left(-1\right)^i \int_0^1 K_i\left(x\right) dx \int_0^1 K_{3-i}\left(x\right)\int_x^1 \frac{d\zeta}{\left(1-\zeta\right) a} - \int_x^1 \frac{d\zeta}{\left(1-\zeta\right) a}\int_0^\zeta K_{3-i}\left(\eta\right) d\eta.$$

Par conséquent, l'égalité (31) sera

$$-\int_\Omega u N \overline{\frac{\partial^3 v_\epsilon^*}{\partial t^3}} dx dt = \int_\Omega A\left(t\right) u \overline{h_\varepsilon} dx dt, \tag{36}$$

avec $h_\varepsilon = (\overline{v_1})^*_\varepsilon - \varepsilon\beta^*_\varepsilon(t)\,\overline{(v_1)^*_\varepsilon}$.

Le membre gauche de (36) est une forme linéaire continue de u. Donc la fonction h_ε a des dérivées $(1-x)\dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\dfrac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L^2(\Omega)$ et on a les conditions suivantes :

$$h_\varepsilon|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ (1-x)\left.\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=1} = 0.$$

De l'égalité

$$\begin{aligned}(1-x)\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x} &= \left[I - \varepsilon\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial^3 a}{\partial t^3}\right](1-x)\frac{\partial (v_1)^*_\varepsilon}{\partial x}\\ &-3\frac{\varepsilon}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(1-x)\frac{\partial (v_1)^*_\varepsilon}{\partial x}\right),\end{aligned}\tag{37}$$

et comme l'opérateur $\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*$ est borné dans $L^2(\Omega)$, alors pour ε assez petit, on a $\left\|\varepsilon\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\dfrac{\partial^3 a}{\partial t^3}\right\| < 1$. Donc l'opérateur $I - \varepsilon\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\dfrac{\partial^3 a}{\partial t^3}$ admet un inverse borné dans $L^2(\Omega)$. On conclut que $(1-x)\dfrac{\partial v^*_\varepsilon}{\partial x} \in L^2(\Omega)$.
De la mème façon, on montre que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\dfrac{\partial v^*_\varepsilon}{\partial x}\right) \in L^2(\Omega)$, et que les conditions suivantes sont satisfaites

$$v^*_\varepsilon|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial (v_1)^*_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ (1-x)\left.\frac{\partial (v_1)^*_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=1} = 0.\tag{38}$$

En substituant $u = \int_0^t\int_0^\eta\int_\zeta^T \exp(\lambda\tau)\, v^*_\varepsilon d\tau d\zeta d\eta \in D_0(L)$ dans la relation (30), avec la constante $\lambda > 0$, on obtient

$$\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, v^*_\varepsilon\overline{Nv}dxdt = -\int_\Omega A(t)\, u\overline{v_1}dxdt.\tag{39}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de régularisation, l'égalité (39) devient

$$\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, v^*_\varepsilon\overline{Nv}dxdt = -\int_\Omega A(t)\, u\overline{(v_1)^*_\varepsilon}dxdt - \epsilon\int_\Omega A(t)\, u\frac{\partial^3\overline{(v_1)^*_\varepsilon}}{\partial t^3}dxdt.\tag{40}$$

En intégrant le premier terme dans (40) par rapport à x, et en utilisant les conditions (38), on obtient

$$\begin{aligned}-\operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\, u\overline{(v_1)^*_\varepsilon}dxdt &= \operatorname{Re}\int_\Omega aH(x)\exp(-\lambda t)\, u\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt\\ +\operatorname{Re}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_2}{dx}\right)u\int_0^x K_1\overline{v^*_\varepsilon}d\zeta dxdt &- \operatorname{Re}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_1}{dx}\right)u\int_0^x K_2\overline{v^*_\varepsilon}d\zeta dxdt.\end{aligned}$$

En intégrant le premier terme du membre droit de l'égalité précédente par rapport à t, on obtient

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega} aH(x)\exp(-\lambda t)\, u\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$

$$-\int_0^1 \frac{H(x)}{2}a\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Big|_{t=T} + \frac{3}{2}\int_{\Omega} H(x)\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\lambda a\right)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$-\int_{\Omega}\frac{H(x)}{2}\left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^3}-3\lambda\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}+3\lambda\frac{\partial a}{\partial t}-\lambda^3 a\right)\exp(-\lambda t)|u|^2 dxdt$$

$$+\int_0^1 \frac{H(x)}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}-2\lambda\frac{\partial a}{\partial t}+\lambda^2 a\right)\exp(-\lambda t)|u|^2 dx\Big|_{t=T} - \operatorname{Re}\int_0^1 H(x)\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\lambda a\right)u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}dx\Big|_{t=T}.$$

Supposons que $c_i' \leq \dfrac{\partial^i a}{\partial t^i} \leq c_i, \quad i=\overline{1,3},\ c_1'>0$, on choisit λ telle que

$$\begin{cases}
\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_2}{dx}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_1}{dx}\right)\right|^2 \leq \mu^2 \\
0<\lambda a_1 \leq c_1', \\
\dfrac{m_0(-2\lambda a_0+c_1)}{2\lambda} \leq -\alpha_0 < 0, \\
0< m_1\left(-c_3+3\lambda c_2' - 3\lambda^2 c_1+\lambda^3 a_0\right)+\dfrac{2\mu^2}{m_0} \leq \delta\ , \\
0<\dfrac{m_1(c_2-\lambda c_1')}{2} \leq \beta\ , \\
0<\dfrac{3m_1(c_1-\lambda a_0)}{2} \leq \gamma.
\end{cases}$$

alors

$$-\operatorname{Re}\int_{\Omega} A(t)\, u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt + \alpha_0 e^{-\lambda T}\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Big|_{t=T} \leq$$

$$\gamma\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \delta\int_{\Omega}|u|^2 dxdt + \beta\int_0^1 |u|^2 dx\big|_{t=T}$$

$$\frac{m_0}{4}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_2 v_\varepsilon^* d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{m_0}{4}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_1 v_\varepsilon^* d\zeta\right|^2 dxdt. \tag{41}$$

Il est clair que

$$\frac{\lambda}{4}\int_{\Omega}|u|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 |u|^2 dx\big|_{t=T} \leq \frac{\exp(\lambda T)}{2\lambda}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt.$$

En combinant l'inégalité précédente avec (41), on conclut

$$-\operatorname{Re}\int_{\Omega} A(t)\, u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt + \alpha_0 e^{-\lambda T}\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Big|_{t=T} \leq$$

$$\left(\gamma+\frac{\beta\exp(\lambda T)}{\lambda}+\frac{2\delta\exp(\lambda T)}{\lambda^2}\right)\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt$$

$$+\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_2v_\varepsilon^*d\zeta\right|^2dxdt+\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_1v_\varepsilon^*d\zeta\right|^2dxdt. \tag{42}$$

En intégrant le second terme dans le membre droit de (40) par rapport à x, on aura

$$-\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\,u\frac{\partial^3\overline{(v_1)_\varepsilon^*}}{\partial t^3}dxdt=-\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega H(x)\,au\frac{\partial^3\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t^3}dxdt$$

$$-\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_2}{dx}\right)u\int_0^x K_1\,\overline{\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^3}}d\zeta dxdt-\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_1}{dx}\right)u\int_0^x K_2\overline{\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^3}}d\zeta dxdt,$$

en utilisant les $\epsilon-$inégalités dans l'égalité précédente, on obtient

$$-\epsilon\int_\Omega A(t)\,u\frac{\partial^3\overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t^3}dxdt\leq\epsilon\left(\frac{m_1}{2}+\frac{\eta^2}{2}\right)\int_\Omega a^2|u|^2dxdt+\epsilon\frac{k_1^2}{2}\int_\Omega\left|\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^3}\right|^2dxdt. \tag{43}$$

De (42), (43) et les propriétés des opérateurs de régularisation, l'égalité (40) devient

$$\operatorname{Re}\int_\Omega\exp(\lambda\tau)\,v\overline{Nv}dxdt-\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_1vd\zeta\right|^2dxdt$$

$$-\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_2vd\zeta\right|^2dxdt+\alpha_0e^{-\lambda T}\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx\bigg|_{t=T}\leq$$

$$\left(\gamma+\frac{\beta\exp(\lambda T)+\epsilon M}{\lambda}+\frac{2\delta\exp(\lambda T)}{\lambda^2}\right)\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt$$

$$+\epsilon\left(\frac{m_1}{2}+\frac{\eta^2}{2}\right)a_1^2\int_\Omega|u|^2dxdt+\epsilon\frac{k_1^2}{2}\int_\Omega\left|\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^3}\right|^2dxdt$$

$$+\frac{m_0k_1}{2}\int_\Omega|v_\varepsilon^*-v|^2dxdt+\int_\Omega\exp(\lambda\tau)\,|v_\varepsilon^*-v|\,|Nv|\,dxdt. \tag{44}$$

En remplaçant l'expression de Nv dans $\operatorname{Re}\int_\Omega\exp(\lambda\tau)\,v\overline{Nv}dxdt$, on obtient

$$\operatorname{Re}\int_\Omega\exp(\lambda t)\,v\overline{Nv}dxdt=\operatorname{Re}\int_\Omega\exp(\lambda t)\,K_2v\int_0^x K_1vd\zeta dxdt-\operatorname{Re}\int_\Omega\exp(\lambda t)\,K_1v\int_0^x K_2vd\zeta dxdt,$$

en intégrant en x, et en utilisant (29), on aura

$$\operatorname{Re}\int_\Omega\exp(\lambda t)\,v\overline{Nv}dxdt=$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega H(x)\exp(\lambda t)\left|\int_0^x K_2vd\zeta\right|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega H(x)\exp(\lambda t)\left|\int_0^x K_1vd\zeta\right|^2dxdt.$$

En combinant l'égalité précédente avec (44), et en utilisant le lemme (1), on obtient

$$\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt+\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_2 v d\zeta\right|^2 dxdt\le 0 \text{ as } \varepsilon\to 0. \tag{45}$$

alors, de (45), on conclut que

$$\int_\Omega\left|\int_0^x K_i v d\zeta\right|^2 dxdt\le 0, i=1,2.$$

alors $\int_0^x K_i v d\zeta=0$, $\forall\,(x,t)\in[0,1]\times(0,T)$ ce qui nous donne $K_i v=0$.d'où.$v=0$. ■

Lemme 6 *L'image* $R\left(\overline{L}\right)$ *de* $\overline{L}$ *coïncide avec* F.

Démonstration. Comme F est un espace de Hilbert, alors $R\left(\overline{L}\right)=F$ si et seulement si de la relation

$$\int_\Omega t f\overline{g}dxdt+$$
$$\int_0^1\varphi\overline{\varphi_1}dx+\int_0^1\psi\overline{\psi_1}dx+\int_0^1\chi\overline{\chi_1}dx=0, \tag{46}$$

pour un arbitraire $u\in D(L)$ et $\mathcal{F}=\left(g,\ \varphi_{1,}\ \psi_1,\ \chi_1\right)\in F$ implique $\mathcal{F}=0_F$. On prend $u\in D_0(L)$ dans (46), on conclut que $\int_\Omega t f\overline{g}_1 dxdt=0$, en utilisant le lemme (5), on déduit que $(1-x)^2 w=tg=0$, alors $g=0$.

Par conséquent, pour $u\in D(L)$ on a

$$\int_0^1\varphi\varphi_1 dx+\int_0^1\psi\overline{\psi_1}dx+\int_0^1\chi\overline{\chi_1}dx=0,$$

comme l'image de l'opérateur trace est dense dans l'espace de Hilbert munit de la norme

$$\int_0^1|\varphi|^2 dx+\int_0^1|\psi|^2 dx+\int_0^1|\chi|^2 dx,$$

alors $\varphi_1=\psi_1=\chi_1=0$. ■

CHAPITRE II

Problème Mixte Pour Une Equation Aux Dériveés Partielles D'Ordre Trois Combinant une Condition Finale Une de Dirichlet Avec Une Autre Condition du Type Intégrale.

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème mixte pour une équation aux dérivées partielles d'ordre trois combinant une condition finale, une de Dirichlet avec une autre du type integrale. On présente une extension de la méthode des inégalités énergetique à ce type de problèmes.

3 Position du Problème

Dans le rectangle $\Omega = (0,1) \times (0,T)$, on considère l'équation

$$\pounds u = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right) = f\left(x,t\right), \tag{47}$$

où la fonction $a(x,t)$ est telle que

$$\begin{cases} 0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_1, \\ c'_k \leq \dfrac{\partial^k a}{\partial t^k}\left(x,t\right) \leq c_k, \ \forall x \in \left(0,1\right), \ \forall t \in \left(0,T\right), \ k = \overline{1,2}, \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial x}\left(x,t\right)\right| \leq b. \end{cases}$$

A l'équation (47), on associe les conditions initiales suivantes

$$l_1 u = u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), l_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}\left(x,0\right) = \psi\left(x\right), \ \forall x \in \left(0,1\right), \tag{48}$$

la condition finale

$$l_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(x,T\right) = \chi\left(x\right), \quad \forall x \in \left(0,1\right), \tag{49}$$

la condition au bord de Dirichlet

$$u\left(0,t\right) = 0, \quad \forall t \in \left(0,T\right), \tag{50}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u\left(x,t\right) dx = 0, \quad \forall t \in \left(0,T\right), \tag{51}$$

où les fonctions f; $\varphi\left(x\right)$, $\psi\left(x\right)$, $\chi\left(x\right)$ sont données, et satisfaisant aux conditions de compatibilité

$$\int_0^1 \varphi\left(x\right) dx = \int_0^1 \psi\left(x\right) dx = \int_0^1 \chi\left(x\right) dx = 0.$$

Dans ce chapitre, on montre l'éxistence et l'unicité de la solution forte du problème (47)-(51). La démonstration est basée sur une estimation à priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par ce problème.

Le problème (47)-(51) peut être écrit sous la forme opératorielle

$$Lu = \mathcal{F} \tag{52}$$

où l'opérateur $L = (\pounds,\ l_1,\ l_2,\ l_3)$, est considéré de E dans F, de domaine de définition $D(L)$ constitue des fonctions $u \in L^2(\Omega)$, telle que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}, \frac{\partial^{k+1} u}{\partial t^k \partial x} \in L^2(\Omega)$, $k = \overline{0,3}$, et satisfont aux conditions (50), (51).

3.1 Espaces Fonctionnels Associes

Pour l'étude du problème (47)-(51), on introduit les espaces fonctionnels suivants :

Soit E l'espace de Banach constitué des fonctions u, $u \in L^2(\Omega)$, vérifiant (50)-(51), munit de la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_0^T \int_0^1 t\frac{(1-x)^2}{2}\left[\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 + \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}\right|^2\right] dxdt + \int_0^T \int_0^1 t\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right) dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right) dxdt + \sup_t \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right) dx. \tag{53}$$

et F l'espace de Hilbert des fonctions $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi, \chi)$, avec $\varphi,\ \psi,\ \chi \in H^1(0,1)$ et $f \in L^2(\Omega)$, dont la norme est donnée par

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}\|_F^2 &= \int_0^T \int_0^1 t\frac{(1-x)^2}{2}|f|^2 dxdt + \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|^2 + |\varphi|^2\right) dx \\ &\quad + \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|^2 + |\psi|^2\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial \chi}{\partial x}\right|^2 + |\chi|^2\right) dx.\end{aligned} \tag{54}$$

Lemme 7 *Pour $u \in D(L)$ tel que $u(x,0) = \varphi(x)$, on a*

$$\sup_t \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + |u|^2\right] dx \leq$$

$$2e^{T}\left(\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+|\varphi|^2\right]dx+\int_0^T\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right)dxdt\right).$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer

$$\operatorname{Re}\int_0^s\int_0^1\exp(-t)\left(u\overline{\frac{\partial u}{\partial t}}+\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\overline{\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}}\right)dtdx,$$

et en utilisant des $\varepsilon-$inégalités, on obtient l'inégalité demandée. ■

3.2 Inégalité de l'énergie et ses Conséquences

Théorème 6 *Il existe une constante positive k indépendante de u, telle que pour tout $u \in D(L)$, on a*

$$\|u\|_E \leq k \|Lu\|_F . \tag{55}$$

Démonstration. Multiplions scalairment dans l'espace $L^2(\Omega)$ l'équation (47) et l'opérateur

$$Mu = \frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + (1-x) J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \qquad \text{where} \quad J_x u = \int_0^x u(\zeta, t)\, d\zeta.$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$\Phi(u,u) = \operatorname{Re}\int_\Omega t\exp(-ct)\pounds u\overline{Mu}dxdt, \tag{56}$$

avec la constante c satisfaisant

$$\begin{cases} c > 0, \\ c_2 - 2cc_1' + c^2 a_1 + b^2 > 0, \\ 2ca_0 - 2c_1 - (c_2 - 2cc_1' + c^2 a_1 + b^2)\, T > 0, \\ c_1 - ca_0 < 0, \\ \frac{a_0}{2} + T(c_1' - ca_1) > 0. \end{cases} \tag{57}$$

En substituant l'expression de Mu dans (56), on obtient

$$\Phi(u,u) = \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t\exp(-ct) \left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_0^1 \frac{t}{2}\exp(-ct)\left|J_x\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt + \operatorname{Re}\int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt$$

$$+ \operatorname{Re}\int_0^T \int_0^1 (1-x)\, t\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial t\partial x}\right) J_x \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt. \tag{58}$$

En intégrant par parties les deux derniers termes dans le membre droit de (58), par rapport à x, et en utilisant les conditions (50), (51), on trouve

$$\operatorname{Re}\int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t\exp(-ct)\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} ta\exp(-ct)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}}dxdt$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,ta\exp(-ct)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt. \tag{59}$$

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,t\exp(-ct)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)J_x\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,ta\exp(-ct)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt$$

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 ta\exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 ta_x\exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{J_x\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt. \tag{60}$$

En intégrant de nouveau le premier terme dans le membre droit de (59) par parties, par rapport à t, en prenant en compte les conditions (48), (49), alors l'égalité (59) sera

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t\exp(-ct)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$

$$-\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,\frac{2a_t-2ca+t\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} ta\exp(-ct)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt+\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\left\{\frac{a+t\left(a_t-ca\right)}{2}\right\}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=0}^{t=T}dx$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,ta\exp(-ct)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt-\operatorname{Re}\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} a(x,T)\,T\exp(-cT)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial \chi}{\partial x}}\Bigg|_{t=T}dx. \tag{61}$$

intégrons par parties le second terme dans le membre droit de (60) par rapport à t, en utilisant les conditions (48) et (49), la relation (60) devient

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,t\exp(-ct)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x\partial t}\right)J_x\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt =$$

$$-\int_0^T\int_0^1 \frac{2a_t-2ca+t\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 ta\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\,t\exp(-ct)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt+\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 ta_x\exp(-ct)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{J_x\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt$$

$$+\int_0^1 \frac{a+t\left(a_t-ca\right)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\Bigg|_0^T dx-\operatorname{Re}\int_0^1 a(x,T)\,T\exp(-cT)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\chi(x)}\Bigg|_{t=T}dx. \tag{62}$$

De (61) et (62), l'égalité (58) s'écrit

$$\Phi(u,u) = \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 \frac{t}{2} \exp(-ct) \left| J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dxdt$$

$$+ \int_0^T \int_0^1 ta \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 \right] dxdt$$

$$- \int_0^T \int_0^1 \frac{2a_t - 2ca + t(a_{tt} - 2ca_t + c^2 a)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] dxdt$$

$$+ \int_0^1 \frac{a + t(a_t - ca)}{2} \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] \Bigg|_{t=0}^{t=T} dx$$

$$+ \operatorname{Re} \int_0^1 ta(x,t) \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}} + \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \right] \Bigg|_{t=T} dx$$

$$- \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 ta_x \exp(-ct) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{J_x \frac{\partial^2 u}{\partial t^3}} dxdt. \tag{63}$$

En utilisant les inégalités de Young, on montre que

$$- \operatorname{Re} \int_0^T \int_0^1 ta_x \exp(-ct) \frac{\partial u}{\partial t} \overline{J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}} dxdt \leq$$

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{ta_x^2}{2} \exp(-ct) \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dxdt + \int_0^T \int_0^1 \frac{t}{2} \exp(-ct) \left| J_x \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dxdt,$$

et

$$\operatorname{Re} \int_0^1 ta(x,t) \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x}} + \frac{\partial u}{\partial t} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \right] \Bigg|_{t=T} dx \leq$$

$$\int_0^1 \frac{a}{4} \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] \Bigg|_{t=T} dx$$

$$+ \int_0^1 t^2 a \exp(-ct) \left[\frac{(1-x)^2}{2} \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 \right] \Bigg|_{t=T} dx,$$

et

$$\Phi(u,u) = \operatorname{Re} \int_\Omega t \exp(-ct) \pounds u \overline{Mu} dxdt \leq$$

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} \frac{t}{2} \exp(-ct) \left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right|^2 dxdt + 33 \int_0^T \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} t \exp(-ct) |f|^2 dxdt.$$

En prenant en considération les inégalités précédentes, l'égalité (63), devient

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\frac{t}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 ta\exp(-ct)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$
$$-\int_0^T\int_0^1 \frac{2a_t-2ca+t\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)+ta_x^2}{2}\exp(-ct)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt$$
$$+\int_0^1 \frac{\frac{a}{2}+t\left(a_t-ca\right)}{2}\exp(-ct)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]\Bigg|_{t=T}dx\leq$$

$$33\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}t\exp(-ct)\left|f(x,t)\right|^2 dxdt+\int_0^1\frac{a(x,0)}{2}\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+|\psi|^2\right]dx$$
$$+\int_0^1\frac{T^2a(x,T)}{2}\exp(-cT)\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+|\chi|^2\right]dx. \tag{64}$$

En utilisant les conditions (57), et comme la quantité $\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]\Big|_{t=T}dx$ est positive, alors, de l'égalité (64), on déduit que

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 t\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$
$$+\int_0^T\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt$$
$$\leq\frac{\beta}{\alpha}\left(\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2 dxdt+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+|\psi|^2\right]dx\right.$$
$$\left.+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+|\chi|^2\right]dx\right), \tag{65}$$

avec

$$\begin{aligned}\alpha &= \min\left(\frac{1}{2},a_0,ca_0-c_1\right),\\ \beta &= \max\left(1,\frac{a_1}{2},\frac{T^2a_1}{2}\right).\end{aligned}$$

Combinons le lemme (7) avec l'inégalité (65), on trouve

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right|^2 dxdt+\int_0^T\int_0^1 t\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$
$$\int_0^T\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt+\sup_t\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+|u|^2\right]dx$$

$$\leq e^T\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1\right)\left(\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2dxdt+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right]dx\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+\left|\psi\right|^2\right]dx+\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+\left|\chi\right|^2\right]dx\right) \tag{66}$$

En vertu de l'équation (47), on conclut que

$$a_0^2\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}\right|^2dxdt\leq 2\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right|^2dxdt$$

$$+b^2T\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}\right|^2dxdt+4\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2dxdt.$$

combinons maintenant l'inégalité précédente avec (66), on aboutit à

$$\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t^3}\right|^2dxdt+\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|\frac{\partial^3u}{\partial t\partial x^2}\right|^2dxdt$$

$$+\int_0^T\int_0^1 t\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^3u}{\partial t^2\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right|^2\right]dxdt$$

$$\int_0^1\int_0^T\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt+\sup_t\int_0^1\left[\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2+\left|u\right|^2\right]dx\leq$$

$$k^2\left[\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\left|f(x,t)\right|^2dxdt+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\varphi(x)\right|^2\right)dx\right.$$

$$\left.+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+\left|\psi(x)\right|^2\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+\left|\chi(x)\right|^2\right)dx\right],$$

où

$$k^2=\frac{e^T\left(\frac{2\beta}{\alpha}+1\right)\left(b^2T+2\right)+4}{\min\left(1,a_0^2\right)}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 4 *L'opérateur L de E dans F est fermable.*

Définition 5 *La solution de l'équation $\overline{L}u=\mathcal{F}$ est appelée solution forte du problème (47)-(51).*

D'aprés la définition de $\overline{L}$, on déduit de (55) l'inégalité suivante

$$\left\|u\right\|\leq k\left\|\overline{L}u\right\|,\forall u\in D\left(\overline{L}\right). \tag{67}$$

De l'inégalité précédente, on conclut que :

Corollaire 3 *La solution forte si elle existe est unique et dépend continûment de* $\mathcal{F}$.

Corollaire 4 *L'image* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est fermée dans* F *et on a* $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)}$.

3.3 Résolubilité du Problème (47)-(51)

De l'inégalité (67), on déduit que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse borné $\overline{L}^{-1}$, du corollaire précédent résulte que l'image $R\left(\overline{L}\right)$ est fermée.

D'où, pour montrer l'existence de la solution forte, il suffit de montrer la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F.

Lemme 8 *On suppose que la fonction $a(x,t)$ et ses dérivées $\dfrac{\partial^3 a}{\partial t^2 \partial x}$, $\dfrac{\partial a}{\partial t \partial x}$ soient bornées. Soit $u \in D_0(L) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ u(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T) = 0 \right\}$. Si pour certaines fonctions w tel que $w \in L^2(\Omega)$, on a*

$$\int_0^T \int_0^1 (1-x)^2 f(x,t)\overline{w(x,t)}dxdt = 0, \tag{68}$$

alors

$$w(x,t) = 0.$$

Démonstration. L'égalité (68), peut être écrit sous la forme suivante

$$\int_0^T \int_0^1 (1-x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{w}dxdt =$$
$$-\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\left\{(1-x)\overline{w} - \int_0^x \overline{w}d\zeta\right\}dxdt. \tag{69}$$

Pour la fonction $w(x,t)$, on construit la fonction $v(x,t)$ telle que

$$v(x,t) = w(x,t) - \int_0^x w(\zeta,t)\,d\zeta. \tag{70}$$

De l'égalité (70), on montre que $\int_0^1 v(x,t)\,dx = 0$, et que l'égalité (69) devient

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{Nv}dxdt = \int_0^T \int_0^1 A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v}dxdt, \tag{71}$$

avec $A(t)u = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ et $Nv = (1-x)v + Jv$.

L'opérateur $A(t)$ admet un inverse continu dans $L^2(0,1)$ donné par

$$A^{-1}(t)g = -\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{1}{a}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta + C(t)\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{d\zeta}{a}, \tag{72}$$

où

$$C(t)=\frac{\int_0^1 \frac{d\zeta}{a}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta}{\int_0^1 \frac{d\zeta}{a}}. \tag{73}$$

Donc de (72), on déduit que $\int_0^1 A^{-1}(t)\,g dx=0$, alors $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\varepsilon$ peut être mise sous la forme

$$J_\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial t}=J_\varepsilon^{-1}A^{-1}(t)\,A(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Remplaçons la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans (71) par la fonction régularisée $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\varepsilon$, en utilisant la relation

$$A(t)\,J_\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial t}=J_\varepsilon^{-1}A(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon J_\varepsilon^{-1}B(t)\,J_\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{74}$$

où

$$B(t)\,g=a_{xtt}J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta-C(t)}{a}\right)+a_{tt}J_\varepsilon^{-1}\left(-\frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta-C(t)\right)+\frac{g}{a}\right)$$
$$+2a_{xt}\frac{\partial}{\partial t}J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta-C(t)}{a}\right)+2a_t\frac{\partial}{\partial t}J_\varepsilon^{-1}\left(-\frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta-C(t)\right)+\frac{g}{a}\right). \tag{75}$$

L'opérateur $B(t)$ admet un adjoint donné par

$$B^*(t)\,h=\frac{1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*a_{tt}h-\frac{2}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}(a_th)+G_\varepsilon(h)(x)+\frac{\int_0^x\frac{d\eta}{a}}{\int_0^1\frac{d\eta}{a}}G_\varepsilon(h)(1), \tag{76}$$

avec

$$G_\varepsilon(h)(x)=\int_0^x\left(\frac{a_\zeta}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*(a_{tt}h)-\frac{1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}(a_{xtt}h)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}(a_{xt}h)+\frac{2a_\zeta}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}(a_th)\right)d\zeta. \tag{77}$$

Par conséquent, l'égalité (71), s'écrit sous la forme

$$\int_0^T\int_0^1\frac{\partial u}{\partial t}N\overline{\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}}=\int_0^T\int_0^1 A(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{h}_\varepsilon, \tag{78}$$

avec $h_\varepsilon=v_\varepsilon^*-\epsilon B^*(t)\,v_\varepsilon^*$.

le membre droit de (78) est une forme linéaire continue de $\frac{\partial u}{\partial t}$. Alors la fonction h_ε admet des dérivées $(1-x)\dfrac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\dfrac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x}\right) \in L^2(\Omega)$ et les conditions suivantes sont satisfaites

$$h_{\varepsilon}|_{x=0}=0,\;\; h_{\varepsilon}|_{x=1}=0,\;\; (1-x)\left.\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x}\right|_{x=1}=0. \tag{79}$$

De l'égalité

$$\begin{aligned}(1-x)\frac{\partial h_{\varepsilon}}{\partial x} &= \left[I-\frac{\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}a_{tt}\right](1-x)\frac{\partial}{\partial x}v_{\varepsilon}^{*}\\ &+\frac{2\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_t(1-x)\frac{\partial}{\partial x}v_{\varepsilon}^{*}\right),\end{aligned} \tag{80}$$

et comme l'opérateur $\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}$ est borné dans $L^2(\Omega)$, alors pour ε assez petit, on déduit$\left\|\dfrac{\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}a_{tt}\right\|<1$.Alors l'opérateur $\left[I-\dfrac{\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}a_{tt}\right]$ a un inverse borné dans l'espace $L^2(\Omega)$. on conclut que $(1-x)\dfrac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x} \in L^2(\Omega)$. De la mème manière, on aura $\dfrac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\dfrac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right) \in L^2(\Omega)$, et les conditions suivantes sont vérifiées

$$v_{\varepsilon}^{*}|_{x=0}=0,\, v_{\varepsilon}^{*}|_{x=1}=0,\, (1-x)\left.\frac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|_{x=1}=0.$$

Posons $u=\int_0^t\int_0^{\zeta}\int_{\eta}^{T}\exp(c\tau)\,v_{\varepsilon}^{*}d\tau d\eta d\zeta$ dans la relation (71), on obtient

$$-\int_0^T\int_0^1\exp(ct)\,v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt=\int_0^T\int_0^1 A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v}dxdt, \tag{81}$$

avec la constante c satisfaisant

$$\begin{cases} c<0,\\ c_1'-ca_0>0,\\ c_2'-2cc_1'+c^2a_0\geq 0.\end{cases} \tag{82}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de régularisation, le membre droit de l'égalité (81) aprés intégration par rapport à x, devient

$$\int_0^T\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\left[\overline{v_{\varepsilon}^{*}-\varepsilon\frac{\partial^2 v_{\varepsilon}^{*}}{\partial t^2}}\right]dxdt=$$

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1(1-x)a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial v_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}}dxdt+\varepsilon\int_0^T\int_0^1(1-x)a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial^3 v_{\varepsilon}^{*}}{\partial t^2\partial x}}dxdt,$$

en intégrant par rapport à t, chaque terme du membre droit de l'égalité précédente, utilisant le fait que $u \in D_0(L)$ on obtient

$$-\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\, a\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}}dxdt =$$

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\, a\exp(-ct)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\overline{\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}}dxdt = -\int_0^T\int_0^1 (1-x)\, a\exp(-ct)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt$$
$$+\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\left(a_{tt}-2ca_t+c^2a\right)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$
$$-\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\left(a_t-ca\right)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=T} dx. \tag{83}$$

$$\varepsilon\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 a(1-x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial^3 v_\varepsilon^*}{\partial t^2\partial x}}dxdt = -\varepsilon\int_0^T\int_0^1 (1-x)\, a\left|\frac{\partial^4 u}{\partial t^3\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\varepsilon\int_0^1 (1-x)\, a_t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=0} + \varepsilon\int_0^T\int_0^1 (1-x)\left(a_{tt}-ca_t\right)\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt$$
$$-\varepsilon\operatorname{Re}\int_0^1 (1-x)\, a_t\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}}dx\Bigg|_{t=T} + \varepsilon\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 (1-x)\, a_{tt}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\overline{\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}}dxdt. \tag{84}$$

De (83), (84), en utilisant des ε-inégalités et les conditions (82), on aboutit à

$$\operatorname{Re}\int_0^T\int_0^1 \exp(ct)\, v_\varepsilon^*\overline{Nv}dxdt + \left(c_1'-ca_0\right)\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=T} dx \leq$$

$$\left(c_2-2cc_1+c^2a_1\right)\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$
$$+\epsilon\left(\int_0^T\int_0^1 (1-x)\left|a_{tt}-ca_t\right|\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt + \int_0^T\int_0^1 (1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt\right.$$
$$+\int_0^1 (1-x)\, a_t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=0} + \int_0^1 (1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T}$$
$$\left.+\int_0^1 (1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T} + \int_0^T\int_0^1 (1-x)\left|a_{tt}\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dxdt\right). \tag{85}$$

En substituant Nv par son expression dans (85), on obtient

$$\int_0^T\int_0^1 (1-x)\exp(ct)\left|v\right|^2 dxdt + \left(c_1'-ca_0-\epsilon\right)\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2\Bigg|_{t=T} dx \leq$$

$$\left(c_2-2cc_1+c^2a_1+\epsilon\right)\int_0^T\int_0^1 \frac{(1-x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right|^2 dxdt$$

$$+\epsilon\left(\int_0^T\int_0^1(1-x)\left|a_{tt}-ca_t\right|\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dxdt+\int_0^1(1-x)\,a_t\left|\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right|^2 dx\right|_{t=0}$$

$$+\int_0^1(1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T}++\int_0^1(1-x)\left|a_t\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dx\Bigg|_{t=T}$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^1(1-x)\left|a_{tt}\right|\left|\frac{\partial v_\varepsilon^*}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)+\int_0^T\int_0^1\exp(ct)\left|v-v_\varepsilon^*\right|\left|Nv\right|dxdt.$$

On choisi ϵ assez petit de telle sorte que $c_1'-ca_0-\epsilon>0$. En utilisant le lemme (1) dans l'inégalité précédente, en passant à la limite quand $\epsilon\mapsto 0$, on obtient

$$\int_0^T\int_0^1(1-x)\exp(ct)\left|v\right|^2 dxdt\leq 0,$$

D'où $v=0$, par conséquent $w=0$. ■

Théorème 7 *L'image $R(\overline{L})$ de $\overline{L}$ coincide avec F.*

Démonstration. Comme F est un Hilbert, alors $R(\overline{L})=F$ ssi de la relation

$$\int_0^T\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}t\pounds u\overline{\mathcal{F}}_1dxdt+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}}+\varphi\overline{\varphi_1}\right)dx$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}}+\psi\overline{\psi_1}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\chi_1}{\partial x}}+\chi\overline{\chi_1}\right)dx=0,\qquad(86)$$

pour u arbitraire dans $D(L)$ et $\mathcal{F}=(g,\ \varphi,\ \psi,\ \chi)\in F$, implique $\mathcal{F}=0$. En prenant $u\in D_0(L)$ dans (86), on obtient $\int_0^T\int_0^1(1-x)^2\,t\pounds ugdxdt=0$. En utilisant le lemme (8), on aura $w=tg=0$, d'où $g=0$.

Par conséquent $\forall u\in D(L)$, on a

$$\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}}+\varphi\overline{\varphi_1}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\psi_1}{\partial x}}+\psi\overline{\psi_1}\right)dx$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x}\overline{\frac{\partial\chi_1}{\partial x}}+\chi\overline{\chi_1}\right)dx=0,$$

comme l'image de l'opérateur trace est dense dans l'espace de Hilbert munit de la norme

$$\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\varphi\right|^2\right)dx+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)dx$$

$$+\int_0^1\left(\frac{(1-x)^2}{2}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x}\right|^2+\left|\chi\right|^2\right)dx,$$

alors $\varphi=\psi=\chi=0$. ■

CHAPITRE III

Problème Mixte Pour Une Equation Aux Dérivées Partielles d'Ordre Trois Combinant Une Condition Finale Avec Deux Autres Intégrales à Poids.

Dans ce chpaitre, on reprend l'étude faite dans le chapitre précédent pour la même équation combinant une condition finale avec deux autres integrales à poids. On montre l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est baseé sur l'inégalité de l'énergie et la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème en question.

4 Position du Problème

Dans le rectangle $\Omega = [0,1] \times [0,T]$, on considère l'équation

$$\pounds u = \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) = f(x,t), \tag{87}$$

avec la fonction $a(x,t)$, satisfaisant

$$\begin{cases} 0 < a_0 \leq a(x,t) \leq a_1, \\ \left|\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,t)\right| \leq b, \ x \in [0,1], \ t \in [0,T]. \end{cases}$$

Pour l'équation (87), on lui associe les conditions initiales

$$l_1 u = u(x,0) = \varphi(x), l_2 u = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{88}$$

la condition finale

$$l_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T) = \chi(x), \qquad x \in [0,1], \tag{89}$$

et les conditions intégrales

$$\int_0^1 K_i(x) u(x,t)\, dx = 0, \quad i = \overline{1,2}. \quad t \in [0,T] \tag{90}$$

Les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$, $f(x,t)$ et $K_i(x)$ sont données, on suppose de plus les conditions de compatibilité

$$\int_0^1 K_i(x)\varphi(x)\, dx = 0, \int_0^1 K_i(x)\psi(x)\, dx = 0, \int_0^1 K_i(x)\chi(x)\, dx = 0, \qquad i = \overline{1,2}.$$

et que les fonctions $K_i(x)$ et ses derivées, satisfont aux

$$\begin{cases} 0 \leq k_0 \leq K_i(x) \leq k_1, \\ \left|\dfrac{dK_i}{dx} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{K_i(x)}{a}\dfrac{\partial a}{\partial x}\right)\right| \leq \dfrac{m}{2}, \quad i = \overline{1,2}, \\ \frac{k_1^2}{a_0} b \leq m_0 \leq H(x) = K_2(x)\dfrac{dK_1(x)}{dx} - K_1(x)\dfrac{dK_2(x)}{dx} \leq m_1. \end{cases} \tag{91}$$

Dans ce chapitre, notre objectif est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (87)- (90). La démonstation est basée sur les inégalités énergitiques et la densité de l'image de l'opérateur engendré par ce problème. Le problème (87)- (90), peut être écrit sous la forme opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F}$$

où $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi, \chi)$. L'opérateur $L = (l_1, l_2, l_3)$ est considéré d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F. Le domaine de définition de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions u appartenant á $W_2^{2,3}(\Omega)$ et qui satisfont aux conditions (90).

4.1 Espaces Fonctionnels

Pou étudier le problème (87)-(90), on introduit les espaces fonctionnels E et F donnés par :

E est l'espace de Banach constitué des fonctions $u \in W_2^{2,3}(\Omega)$ vérifiant (90), muni de la norme suivante

$$\|u\|_E^2 = \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta \right|^2 dxdt$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=2} \int_\Omega t \left| \int_0^x K_i(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(a(\zeta, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial t} \right) \right|^2 dxdt + \int_\Omega t \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dxdt$$
$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dxdt + \sup_t \int_0^1 |u(x,t)|^2\, dx, \tag{92}$$

et F est l'espace de Hilbert des fonctions $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi, \chi) \in (L^2(\Omega))^4$, muni de la norme

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_\Omega t\, |f|^2\, dxdt + \int_0^1 \left(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2 \right) dx. \tag{93}$$

Lemme 9 *Pour $u \in E$, tel que $u(x,0) = \varphi(x)$, on a*

$$\sup_t \int_0^1 |u(x,t)\, d\zeta|^2\, dx \leq e^T \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2 dxdt + e^T \int_0^1 |\varphi|^2\, dx,$$

Démonstration. Par intégration par partie le terme

$$\int_0^s \int_0^1 \exp(-t)\, u(x,t)\, \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\, dx$$

par rapport à t, et en utilisant des $\epsilon-$inégalités, on obtient le résultat. ■

Proposition 5 *L'opérateur L est fermable dont sa fermeture est notée par $\overline{L}$.*

Définition 6 *La solution de l'équation $\overline{L}u = \mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (87)-(90).*

4.2 Estimation à Priori et Ses Conséquences

Théorème 8 *Il exist une constante positive $c > 0$, telle que pour toute fonctions $u \in D(L)$, on a*

$$\|u\|_E \leq c\|Lu\|_F. \tag{94}$$

Démonstration. On prend le produit scalaire dans l'espace $L^2(\Omega)$, de l'équation (87) et l'opérateur intégrodifferentiel

$$Mu = \sum_{i=1}^{i=2} (-1)^i \frac{K_i(x)}{a} t \exp(-\lambda t) \int_0^x K_{3-i}(\zeta) \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta, t)\, d\zeta, \tag{95}$$

avec $\lambda > 0$, puis prenant la partie réelle, on obtient la forme quadratique

$$\Phi(u,u) = \operatorname{Re} \int_\Omega \pounds u \overline{Mu} dxdt. \tag{96}$$

En substituant l'expression de Mu dans (96), on trouve

$$\begin{aligned}\Phi(u,u) &= \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i \int_\Omega t\frac{K_i(x)}{a}\exp(-\lambda t)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\int_0^x K_{3-i}(\zeta)\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)d\zeta dxdt} \\ &+ \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i \int_\Omega \frac{K_i(x)}{a} t\exp(-\lambda t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\int_0^x K_{3-i}(\zeta)\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)d\zeta dxdt}. \end{aligned} \tag{97}$$

En intégrant chaque terme par parties du membre droit de (97), par rapport à x, et en utilisant les conditions (90), on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(u,u) &= -\operatorname{Re}\int_\Omega tH(x)\exp(-\lambda t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega \frac{t\exp(-\lambda t)}{aK_i^2(x)}\left[H(x) + (-1)^i \frac{K_1K_2}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right]\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\, d\zeta\right|^2 dxdt \\ &+ \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i\int_\Omega t\exp(-\lambda t)\left[\frac{d^2K_{3-i}}{dx^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_{3-i}(x)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x K_{3-i}(\zeta)\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)d\zeta dxdt}.\end{aligned} \tag{98}$$

Intégrons le premier terme dans le membre de droite de (98) par rapport à t, et en tenant en compte des conditions (88),(89), on obtient

$$-\operatorname{Re}\int_\Omega tH(x)\exp(-\lambda t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt = \int_\Omega tH(x)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(2\lambda-\lambda^{2}t\right)H(x)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-\lambda t)H(x)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H(x)\,t\exp(-\lambda t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}}dx\Big|_{t=0}^{t=T}. \tag{99}$$

De (99), l'égalité (98) sera

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}\frac{t\exp(-\lambda t)}{aK_{i}^{2}(x)}\left[H(x)+(-1)^{i}\frac{K_{1}K_{2}}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right]\exp(-\lambda t)\left|\int_{0}^{x}K_{i}(\zeta)\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^{2}dxdt$$

$$+\int_{\Omega}tH(x)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\right|^{2}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}H(x)\left(2\lambda-\lambda^{2}t\right)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-\lambda t)H(x)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Big|_{t=T}+\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H(x)\,t\exp(-\lambda t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\chi}dx\Big|_{t=T}=$$

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}t\exp(-\lambda t)\,\pounds u\overline{Mu}dxdt+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}H(x)\,|\psi|^{2}\,dx+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^{i}\int_{\Omega}t\left[\frac{d^{2}K_{3-i}}{dx^{2}}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{K_{3-i}(x)}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\right]\exp(-\lambda t)\frac{\partial u}{\partial t}\int_{0}^{x}K_{3-i}(\zeta)\overline{\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}(\zeta,t)}d\zeta dxdt. \tag{100}$$

il est facile devoir que

$$-\int_{0}^{1}\frac{|\lambda|\,T}{2}H(x)\exp(-\lambda T)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Big|_{t=T}-\int_{0}^{1}\frac{T}{|\lambda|}H(x)\exp(-\lambda T)\,|\chi|^{2}\,dx$$

$$\leq\operatorname{Re}\int_{0}^{1}H(x)\,t\exp(-\lambda t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}}dx\Big|_{t=T}.$$

On choisit λ de telle sorte que $1-2\lambda T\geq\lambda_{0}>0$, alors, de (91), et l'inégalités précédente, (100) devient

$$\frac{1}{2}\frac{\exp(-\lambda T)}{a_{1}k_{1}^{2}}\left(m_{0}-\frac{k_{1}^{2}b}{a_{0}}\right)\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}t\left|\int_{0}^{x}K_{i}(\zeta)\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^{2}dxdt+m_{0}\exp(-\lambda T)\int_{\Omega}t\left|\frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}\right|^{2}dxdt$$

$$+\frac{\left(2\lambda-\lambda^{2}T\right)m_{0}}{2}\exp(-\lambda T)\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dxdt+\frac{(1-2\lambda T)\,m_{0}}{2}\exp(-\lambda T)\int_{0}^{1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{2}dx\Big|_{t=T}\leq$$

$$\int_{\Omega}t\,|\pounds u|\,|Mu|\,dxdt+\frac{m_{1}}{2}\int_{0}^{1}|\psi|^{2}\,dx+\frac{Tm_{1}}{2\lambda}\int_{0}^{1}|\chi|^{2}$$

$$+m\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}t\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\int_{0}^{x}K_{3-i}(\zeta)\frac{\partial^{3}u}{\partial t^{3}}(\zeta,t)\,d\zeta\right|dxdt. \tag{101}$$

On pose

$$\alpha = \min\left(\frac{1}{2a_1k_1^2}\left(m_0 - \frac{k_1^2 b}{a_0}\right),\ \frac{3}{2}m_0,\ \frac{\lambda_0 m_0}{2},\ m_0\right)\exp\left(\frac{1-\lambda_0}{2}\right),$$

alors, l'inégalité (101) devient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Big|_{t=T} \leq$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega t\,|\pounds u|\,|Mu|\,dxdt + \frac{m_1}{2\alpha}\int_0^1|\psi|^2\,dx + \frac{Tm_1}{2\lambda\alpha}\int_0^1|\chi|^2$$

$$+\frac{m}{\alpha}\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\int_0^x K_{3-i}(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right| dxdt.$$

En utilisant l'inégalité de Young dans le membre droit de l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Big|_{t=T} \leq$$

$$4\left(\frac{h}{\alpha a_0}\right)^2\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt + \frac{m_1}{\alpha}\int_0^1|\psi|^2\,dx + \frac{Tm_1}{\lambda\alpha}\int_0^1\left(|\chi|^2\right) + 4\frac{m^2}{\alpha^2}\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt. \quad (102)$$

De (102) et du lemme (1), on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt + \int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2 dxdt + \int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq$$

$$\beta\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt + \int_0^1\left(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2\right)dx\right). \quad (103)$$

avec

$$\beta = \max\left(4\left(\frac{h}{\alpha a_0}\right)^2,\ \frac{m_1}{\alpha},\ \frac{m_1}{\lambda\alpha}\right)\max(1,T)\,e^{\frac{4m^2}{\alpha}T}.$$

de (103) et du lemme (9), on déduit

$$\sup_t\int_0^1|u(x,t)\,d\zeta|^2\,dx \leq$$

$$e^T(\beta+1)\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right). \tag{104}$$

Combinons l'inégalité (103) avec (104), on obtient

$$\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i(\zeta)\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt+\int_\Omega t\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt$$

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}(\zeta,t)\,d\zeta\right|^2 dxdt+\sup_t\int_0^1|u(x,t)|^2\,dx\leq$$

$$\left(e^T(\beta+1)+\beta\right)\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right), \tag{105}$$

En vertu de l'équation (87) et l'inégalité (105), on déduit

$$\sum_{i*1}^{i=2}\int_\Omega t\left|\int_0^x K_i\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta\partial t}\right)d\zeta\right|^2 dxdt\leq$$

$$\left(2\left(e^T(\beta+1)+\beta\right)+4k_1^2\right)\left(\int_\Omega t\,|f|^2\,dxdt+\int_0^1\left(|\varphi|^2+|\psi|^2+|\chi|^2\right)dx\right). \tag{106}$$

Et en combinant (105) avec (106) pour déduire (94) avec $c^2=2\left(e^T(\beta+1)+\beta\right)+4k_1^2$. ■

Lemme 10 *L'operateur L de E dans F est fermable, sa fermeture notée par $\overline{L}$.*

Soit $\overline{L}$ la fermeture de L, et $D(\overline{L})$ le domaine de définition de $\overline{L}$.

Définition 7 *la solution de l'équation $\overline{L}u=\mathcal{F}$ est dite solution forte du problème (87, 90).*

Comme les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ sont limites des suites des points du graphe de l'opérateur L, on peut prolonger l'inégalité (94), en passant à la limite

$$\|u\|_E\leq c\left\|\overline{L}u\right\|_F \qquad \forall u\in D(\overline{L}). \tag{107}$$

Corollaire 5 *La solution forte du problème (87, 90) si elle existe, elle est unique et dépend continûment du $\mathcal{F}$.*

Corollaire 6 *L'ensemble des valeurs $R\left(\overline{L}\right)$ de l'opérateur $\overline{L}$ est égale à la fermeture $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.*

4.3 Résolubilité du Problème

De l'inégalité (107) résulte que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse borné $\overline{L}^{-1}$, du corollaire (6) on déduit que $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé. Pour montrer l'existence de la solution forte du problème (87)-(90), il suffit de montrer la densité de l'image de l'opérateur. La démonstration est basée sur le :

Lemme 11 *Supposons que la fonction $a(x,t)$ et ses dérivées $\dfrac{\partial^3 a}{\partial t^2 \partial x}$, $\dfrac{\partial a}{\partial t \partial x}$ sont bornées, et les fonctions $K_i\left(x\right)$ satisfont aux conditions*

$$\begin{cases} K_2\left(1\right)\dfrac{dK_1\left(1\right)}{dx} - K_1\left(1\right)\dfrac{dK_2\left(1\right)}{dx} \neq 0, \\ \Delta = \sum_{i=1}^{i=2}\left(-1\right)^i \int_0^1 K_i\left(x\right)dx \int_0^x K_{3-i}\left(\gamma\right)\int_0^\gamma \dfrac{d\gamma}{\left(1-\zeta\right)a\left(\zeta,t\right)} \neq 0. \end{cases} \tag{108}$$

Soit $D_0(L) = \left\{u \in D(L),\ u(x,0)=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,T)=0\right\}$. Si, pour $u \in D_0(L)$ et pour certaines fonctions $w \in L^2\left(\Omega\right)$ on a

$$\int_\Omega \left(1-x\right)^2 \pounds u\overline{w}dxdt = 0, \tag{109}$$

alors $w=0$.

Démonstration. Substituant $\pounds u$ dans l'égalité (109) par son expréssion, on obtient

$$\int_\Omega \left(1-x\right)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{w}dxdt = -\sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-x\right)a\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}\right)\left(\left(1-x\right)\overline{w} - \int_0^x \overline{w}d\zeta\right)dxdt, \tag{110}$$

pour la fonction $w\left(x,t\right)$ donnée, on construit la fonction $v\left(x,t\right)$ tel que

$$\left(1-x\right)w - \int_0^x wd\zeta = \int_0^x \frac{d\zeta}{1-\zeta}\left(\frac{dK_2}{d\zeta}\int_0^\zeta K_1 v d\tau - \frac{dK_2}{d\zeta}\int_0^\zeta K_1 v d\tau\right) = v_1.$$

De l'égalité précédente, on déduit

$$\int_0^1 K_i v dx = 0 \qquad i=1,2, \tag{111}$$

ceci nous permet d'écrire (110), sous la forme

$$\int_\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\overline{Nv}dxdt = \sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v_1}dxdt, \tag{112}$$

avec

$$A(t)u = -\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\,a\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$Nv = K_2 \int_0^x K_1 v d\zeta - K_1 \int_0^x K_2 v = (1-x)^2 w.$$

L'opérateur $A(t)$ est inversible dans l'espace $L^2(0,1)$, son inverse est borné et est donné par

$$A^{-1}(t)\,g = -\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{1}{a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta$$
$$+C_1(t)\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} + C_2(t),$$

avec

$$A^{-1}(t)\,g = \int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{1}{a(\zeta,t)}\int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta$$
$$+C_1(t)\int_0^x \frac{1}{1-\zeta}\frac{d\zeta}{a(\zeta,t)} + C_2(t),$$

où les constantes $C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont donées par

$$C_1(t) = \frac{\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i \int_0^1 K_i dx \int_0^1 K_{3-i} dx \int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)} \int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta}{\Delta},$$

ct

$$C_2(t) = \frac{\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^{i-1} \int_0^1 K_i dx \int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)} \times \int_0^1 K_{3-i} dx \int_0^x \frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a(\zeta,t)} \int_0^\zeta g(\eta,t)\,d\eta}{\Delta}.$$

Alors, on déduit que $\int_0^1 K_i(x)\,A^{-1}(t)\,g dx = 0$, de plus la fonction $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon = J_\epsilon^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ a une représentation de la forme $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon = J_\epsilon^{-1}A^{-1}A(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Remplaçons la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$ dans (112) par sa fonction régularisée $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon$, en prenant en compte la relation

$$A(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon = J_\epsilon^{-1}A\frac{\partial u}{\partial t} + \epsilon\beta(t)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_\epsilon,$$

$$\beta(t)\,u_\epsilon = 3\frac{\partial^2 A(t)}{\partial t^2}\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + 3\frac{\partial A(t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial^3 A(t)}{\partial t^3}u_\epsilon,$$

on obtient

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} N \overline{\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}} dxdt = \sum_{i=1}^{i=2}\int_\Omega \left(A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{(v_1)_\varepsilon^*} + \varepsilon\beta_\varepsilon(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{(v_1)_\varepsilon^*}\right)dxdt. \tag{113}$$

avec

$$\beta(t)\,g=\frac{\partial^3 a}{\partial t^2\partial x}J_\varepsilon^{-1}\frac{1}{a}\left(\int_0^x g(\eta,t)-C_1(t)\right)$$

$$+\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{g}{a}-\frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^x g(\eta,t)\,d\eta-C_1(t)\right)\right)$$

$$+2\frac{\partial^2 a}{\partial t\partial x}\frac{\partial}{\partial t}J_\varepsilon^{-1}\frac{1}{a}\left(\int_0^x g(\eta,t)-C_1(t)\right)$$

$$+2\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\,J_\varepsilon^{-1}\left(\frac{g}{a}-\frac{a_x}{a^2}\left(\int_0^x g(\eta,t)\,d\eta-C_1(t)\right)\right)\Bigg].$$

dont l'adjoint est donné par

$$\beta_\varepsilon^*(t)\,h=\frac{1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}h-\frac{2}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}h\right)$$

$$+\left(G_\varepsilon h\right)(x)+K(t)\left(G_\varepsilon h\right)(1),$$

où

$$\left(G_\varepsilon h\right)(x)=\int_0^x\left[\frac{-1}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\left(\frac{\partial^3 a}{\partial t^2\partial\zeta}h\right)+\frac{\partial a}{\partial\zeta}\frac{1}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}h\right)\right.$$

$$\left.+\frac{2}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t\partial\zeta}h\right)+\frac{2\partial a}{\partial\zeta}\frac{1}{a^2}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}h\right)\right]d\zeta,$$

et

$$K(t)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{i=2}(-1)^i\int_0^1 K_i(x)\,dx\int_0^1 K_{3-i}(x)\int_x^1\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a}-\int_x^1\frac{d\zeta}{(1-\zeta)\,a}\int_0^\zeta K_{3-i}(\eta)\,d\eta.$$

Par conséquent, l'égalité (112) devient

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\overline{N\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}dxdt=-\int_\Omega A(t)\,\frac{\partial u}{\partial t}\overline{h_\varepsilon}dxdt, \tag{114}$$

avec $h_\varepsilon=\overline{(v_1)_\varepsilon^*}-\varepsilon\beta_\varepsilon^*(t)\,\overline{(v_1)_\varepsilon^*}$.

Le terme $\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\overline{N\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}dxdt$ est une forme linéaire continue en $\frac{\partial u}{\partial t}$. Donc la fonction h_ε admet des dérivées $(1-x)\,\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\,\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right)\in L^2(\Omega)$, de plus on a les conditions suivantes :

$$h_\varepsilon|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ (1-x)\left.\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}\right|_{x=1}=0.$$

De l'égalité

$$(1-x)\,\frac{\partial h_\varepsilon}{\partial x}=\sum_{i=1}^{i=2}\left[I-\frac{\varepsilon}{a}\left(J_\varepsilon^{-1}\right)^*\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right](1-x)\,\frac{\partial\,(v_1)_\varepsilon^*}{\partial x}$$

$$+\sum_{i=1}^{i=2}\frac{2\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial a}{\partial t}(1-x)\frac{\partial (v_1)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right),$$

et comme l'opérateur $\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}$ est borné dans $L^2(\Omega)$, donc pour ε suffisamment petit, on déduit que $\left\|\frac{\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}\frac{\partial^3 a}{\partial t^3}\right\|<1$. Alors l'opérateur $I-\frac{\varepsilon}{a}\left(J_{\varepsilon}^{-1}\right)^{*}\frac{\partial^3 a}{\partial t^3}$ admet un inverse borné dans $L^2(\Omega)$. Donc en déduit que $(1-x)\frac{\partial (v_1)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\in L^2(\Omega)$.

De la même manière on obtient que $\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x)\frac{\partial (v_1)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right)\in L^2(\Omega)$, et les conditions suivantes sont vérifieés

$$(v_1)_{\varepsilon}^{*}|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial (v_1)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ (1-x)\left.\frac{\partial (v_1)_{\varepsilon}^{*}}{\partial x}\right|_{x=1}=0. \tag{115}$$

posons $u=\int_0^t\int_0^{\eta}\int_{\zeta}^{T}\exp(\lambda\tau)\,v_{\varepsilon}^{*}d\tau d\zeta d\eta$ dans l'égalité (112), avec la constante $\lambda>0$, on obtient

$$\int_{\Omega}\exp(\lambda\tau)\,v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt=-\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{v_1}dxdt. \tag{116}$$

En utilisant les proprietés des opérateurs de régularisation, on obtient

$$\int_{\Omega}\exp(\lambda\tau)\,v_{\varepsilon}^{*}\overline{Nv}dxdt=-\int_{\Omega}A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{(v_1)_{\varepsilon}^{*}}dxdt+\epsilon\sum_{i=1}^{i=2}\int_{\Omega}A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\overline{\partial^2 (v_1)_{\varepsilon}^{*}}}{\partial t^2}dxdt. \tag{117}$$

Intégrons le premier terme du membre droit de (117) par rapport à x, et en utilisant les conditions (115), on obtient

$$-\operatorname{Re}\int_{\Omega}A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{(v_1)_{\varepsilon}^{*}}dxdt=\operatorname{Re}\int_{\Omega}aH(x)\exp(-\lambda t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt$$
$$+\operatorname{Re}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{d^2K_2}{dx^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x K_1\,\overline{v_{\varepsilon}^{*}}d\zeta dxdt-\operatorname{Re}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{d^2K_1}{dx^2}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x K_2\,\overline{v_{\varepsilon}^{*}}d\zeta dxdt.$$

De nouveau, intégrons le premier terme dans le membre droit de l'égalité précédente par rapport à t, on obtient

$$\operatorname{Re}\int_{\Omega}aH(x)\exp(-\lambda t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}}dxdt=-\int_{\Omega}H(x)\,a\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|^2dxdt$$
$$+\int_{\Omega}\frac{H(x)}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}-2\lambda\frac{\partial a}{\partial t}+\lambda^2 a\right)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt$$
$$-\left.\int_0^1\frac{H(x)}{2}\left(\frac{\partial a}{\partial t}-\lambda a\right)\exp(-\lambda t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx\right|_{t=T}.$$

Supposons que

$$\begin{cases} c_i' \leq \dfrac{\partial^i a}{\partial t^i} \leq c_i, \quad i = \overline{1,2}, c_1' \geq 0, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_2}{dx}\right)\right|^2 + \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_1}{dx}\right)\right|^2 \leq \mu^2. \end{cases}$$

Et si on choisit λ tel que

$$\begin{cases} 0 < \alpha_0 \leq c_1' - \lambda a_1, \\ c_2' - 2\lambda c_1 + \lambda^2 a_0 > 0, \\ \dfrac{m\left(c_2 - 2\lambda c_1' + \lambda^2 a_1\right)}{2} + \dfrac{\mu^2}{m_0} \leq \delta \text{ avec } \delta > 0, \end{cases}$$

alors

$$-\operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\, u\overline{v_\varepsilon^*}dxdt + \alpha_0 e^{-\lambda T}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Big|_{t=T} \leq \delta\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$\frac{m_0}{4}\int_\Omega \left|\int_0^x K_2 v_\varepsilon^* d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{m_0}{4}\int_\Omega \left|\int_0^x K_1 v_\varepsilon^* d\zeta\right|^2 dxdt. \tag{118}$$

En intégrant le second terme dans le membre droit de (117) par rapport à x, on trouve

$$\epsilon \operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 \overline{(v_1)_\varepsilon^*}}{\partial t^2}dxdt = \epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega H(x)\frac{\partial u}{\partial t}a\frac{\partial^2 \overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t^2}dxdt$$

$$+\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_2}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x K_1\frac{\overline{\partial^2 v_\varepsilon^*}}{\partial t^2}d\zeta dxdt + \epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{dK_1}{dx}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\int_0^x K_2\frac{\overline{\partial^2 v_\varepsilon^*}}{\partial t^2}d\zeta dxdt,$$

et en utilisant des $\epsilon-$inequalities dans l'égalité précédente, on obtient

$$-\epsilon\operatorname{Re}\int_\Omega A(t)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^3 \overline{v_\varepsilon^*}}{\partial t^3}dxdt \leq \epsilon\left(\frac{m^2}{2}a_1^2 + \frac{\eta^2}{2}\right)\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \epsilon\left(k_1^2 + \frac{1}{2}\right)\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}\right|^2 dxdt. \tag{119}$$

De (118), (119) et les propriétés des opérateurs de régularisation, l'égalité (117) devient

$$\operatorname{Re}\int_\Omega \exp(\lambda\tau)\, v\overline{Nv}dxdt - \frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt$$

$$-\frac{m_0}{4}\int_\Omega\left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt + \alpha_0 e^{-\lambda T}\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\Big|_{t=T} \leq$$

$$\left(m + \epsilon\left(\frac{m^2}{2}a_1^2 + \frac{\eta^2}{2}\right)\right)\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt + \epsilon\left(k_1^2 + \frac{1}{2}\right)\int_\Omega\left|\frac{\partial^2 v_\varepsilon^*}{\partial t^2}\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{m_0 k_1^2}{4}\int_\Omega |v_\varepsilon^* - v|^2 dxdt + \int_\Omega \exp(\lambda\tau)|v_\varepsilon^* - v||Nv|dxdt. \tag{120}$$

Substituons l'expression de Nv dansRe $\int_{\Omega} \exp(\lambda\tau) v\overline{Nv}dxdt$, on obtient

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega} \exp(\lambda\tau) v\overline{Nv}dxdt =$$

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega} \exp(\lambda\tau) K_2 v \int_0^x K_1 v d\zeta dxdt - \mathrm{Re}\int_{\Omega} \exp(\lambda\tau) K_1 v \int_0^x K_2 v d\zeta dxdt,$$

par intégration par rapport à x, et en tennant en compte les conditions (115), on aura

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega} \exp(\lambda\tau) v\overline{Nv}dxdt =$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} H(x) \exp(\lambda\tau) \left|\int_0^x K_2 v d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} H(x) \exp(\lambda\tau) \left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt.$$

En combinant l'égalité précédente avec (120) et on utilise le lemme (1), on déduit

$$\frac{m_0}{4}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_1 v d\zeta\right|^2 dxdt + \frac{m_0}{4}\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_2 v d\zeta\right|^2 dxdt \leq 0 \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{121}$$

alors, de (121), on conclut

$$\int_{\Omega}\left|\int_0^x K_i v d\zeta\right|^2 dxdt \leq 0, i = 1, 2.$$

donc $\int_0^x K_i v d\zeta = 0$, $\forall (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \Longrightarrow v = 0$ i-e. $w = 0$ a.e. ■

Théorème 9 *L'image $R(\overline{L})$ de $\overline{L}$ coïncide avec F.*

Démonstration. On a $R(\overline{L}) = F \iff R(\overline{L})^T = 0_F$. Comme F est un espace de Hilbert, alors $R(\overline{L}) = F$ si et seulement si

$$\int_{\Omega} tf\overline{g}dxdt +$$

$$\int_0^1 \varphi\overline{\varphi_1}dx + \int_0^1 \psi\overline{\psi_1}dx + \int_0^1 \chi\overline{\chi_1}dx = 0, \tag{122}$$

pour un $u \in D(L)$ quelconque et $\mathcal{F} = (g, \varphi_1, \psi_1, \chi_1) \in F$ implique $\mathcal{F} = 0_F$. prenons $u \in D_0(L)$ dans (122), on obtient $\int_{\Omega} tf\overline{g}dxdt = 0$, utilisons maintenant le lemme (11), on aboutir à $(1-x)^2 w = tg = 0$, alors $g = 0$.

Par conséquent pour $u \in D(L)$ on a

$$\int_0^1 \varphi\varphi_1 dx + \int_0^1 \psi\overline{\psi_1}dx + \int_0^1 \chi\overline{\chi_1}dx = 0,$$

comme l'image de l'opérateur trace est dense dans l'espace de Hilbert munit de la norme

$$\int_0^1 |\varphi|^2 \, dx + \int_0^1 |\psi|^2 \, dx + \int_0^1 |\chi|^2 \, dx,$$

alors $\varphi_1 = \psi_1 = \chi_1 = 0$. ■

Références

[1] Barenblat, G. I. Yu. P., Kochina, I. V., Basic concepts in the theory of seepage of homogeneons liquids in fissured rocks [strata], PMM J.App.Math. Mech., 24, 5 (1960), pp.852-864.

[2] Batten G. W. Jr., *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations*, Math. Comp., **17** (1963), 405-413.

[3] Benouar N. E., Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Differ. Equ., **27** (1991), 12, 1482-1487.

[4] Bouziani A., Benouar N. E., *Mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation*, Kobe J. Math., **15** (1998), 47-58.

[5] Cahlon B., Kulkarni D. M. and Shi P., *Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint*, SIAM J. Numer. Anal., **32** (1995), 2, 571-593.

[6] Cannon J. R., *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., **21** (1963), 155-160.

[7] Cannon J. R., *The One-dimensional heat equation*, Encyclopedia of Mathematics ant its Applications, vol. 23, Addison-Wesley Publishing, Massachusets, (1984).

[8] Cannon J. R., Lin, Classical and weak solution for one-dimensional Pseudo-Parabolic Equations with Typical boundary Data. Ann. Math. Puraed app., 152, pp. 375-385, 1998.

[9] Chudnovski,A. F., Soil Thermophysics, Nauka, Mosocow(1976).

[10] Denche M., Marhoune A. L., A Three- point Boundary Value Problem with an Integral condition for Parabolic Equation with the Bessel operator, Applied Matimatics Letters, Vol. 13(2000), 16, pp.85-89.

[11] Denche M., Marhoune A. L., *High order mixed-type differential equations with weighted integral boundary conditions*, Electron. J. Differential. Equations **2000** (2000), no. 60, 1-10.

[12] Denche M., Marhoune A. L., *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for a third order partial differential equation of mixed type*, Int. J. Math. Math. Sci., **26** (2001), no. 7, 417-426.

[13] Denche M., Memou A., Boundary value problem with integral conditions for a linear third order equation. J. Applied Math. 2003, 11(2003), pp.553-567.

[14] Dezin, A. A., General questions in theory of boundary value problems, Mosocow-Nauka, 1980, English trans, Springer Verlag.

[15] Dezin, A. A., Theoremes d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les espaces fonctionelles. Usp. Math. Naouk, T.14, 3(87), pp. 22-73.

[16] Friedricks, K., Symmetric hyperbolic linear differential equations. comm. Pure. Appl. Math. Vol. 7. 2, pp. 345-392, (1954).

[17] Garding, L.,Cauchys problem for hyperbolic equations of chicago, Lecture notes, 1957.

[18] Ionkin, N. I.,.Solution of a boundary value problem in heat conduction with a non classical boundary condition, diffrentialnye Uravneniya, 13(1977), 294-304.

[19] Kamynin, N. I., A Boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition, U S S R. Comut. Math. and Math. Phys., 4(1966), 33-59.

[20] Kartynnik, A. V., Three-point boundary value problem with an integral space variable condition for a second order parabolic equation, Diffential Equation, 26(1990), 1160,1166.

[21] Ladyzenskaja, O. A., Mixed Problem for hyperbolic equation. Edition Mir Nauka, 1974.

[22] Latrous, C., Memou, A., A Three- point Boundary Value Problem with an Integral condition for a third order partial differential equation, Abstract and Applied Analysis, 2005, 1, 33-43.

[23] Leray, J., Lecture on hyperbolic differential equations with variable coefficients. Princeton, Just for Adv. Study, 1952.

[24] Petovsky, I. G., Uber das cauchyshe problem fur system von linearm partiallen diferentialgeichungen in Gebit der nichtanalystischen funktionen, Bull. Univ. detat, Moscow, 7, 1-74, 1938.

[25] Pulkina L. S., *A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations*, Electron. J. Differential Equations, **1999** (1999), no. 45, 1-6.

[26] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., Problemes aux limites pour des équations différentielles d'ordre impaire dans le rectangle. Izvestia Akad. Nawk BSSR, Série Phys. Math. Nawk 3, 1985.

[27] Rebbani, F., Chesalyn, V. I., Problemes aux limites pour certaines équations différentielles opérationelles dans le rectangle. Dokday Acad. Nawk. BSSR. T. 30, 12, pp. 1061-1063.

[28] Samarski A. A., *Some problems in the modern theory of differential equations*, Differ. Uravn., **16** (1980), 1221-1228 (Russian).

[29] Shi P., Design of Contact Patterns in one dimentional Thermoelasticity, in Theoritical Aspect of Industrial Design, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.

[30] Shi P., *Weak solution to evolution problem with a nonlocal constraint*, SIAM J. Math. Anal., **24** (1993), 1, 46-58.

[31] Shkhanukov, M.KH., Boundary value Problem for thierd order equation occurring in the modeling of mater filtration in Porous midia, Diff. Eqs., 18, 4(1982), pp. 689-699.

[32] Showalter, R. E., Ting, T W., Pseudo Parabolic partial differential equations, SIAM J. Math. Anal., 1(1970), pp. 1-26.

[33] Sobolev, S L., Certaines applications de l'analyse fonctionelle à la physique Mathématique, LENINGRAD, 1950.

[34] Vodakhova, V. A., A boundary value problem with A. M. Nakhushevs nonlocal condition for a pseudoparabolic moisture transfer equation, Diff. Eqs., 18,2(1982). pp. 285-285.

[35] Volkodavov V. F., Zhukov V. E., *Two problems for the string vibration equation with integral conditions and special matching conditions on the characteristic*, Differ. Equ., **34** (1998), 4, 501-505.

[36] Yurchuk, N. I., Boundary value problem for equations whose principal part contains operators of the form. Diff. Equa. Vol. 10. 4, pp. 589-592., 1974.

[37] Yurchuk N. I., *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differ. Equ., **22** (1986), 1457-1463.

[38] Yurchuk, N. I., Boundary value problem for equations involving operators of the forme. Diff. Equa. Vol. 10, 5, pp. 735-737,1974.