République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
INSTITUT DE MATHEMATIQUE

THESE DE DOCTORAT

Présenté par : SAID MESLOUB

THEME :

PROBLEMES MIXTES AVEC CONDITIONS NON LOCALES POUR CERTAINES CLASSES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Membres du Jury :

N.E. BENOUAR	Prof,	USTHB	Président
A.BOUZIANI	M.C,	C.U. Oum El-Bouaghi	Rapporteur
N. KECHKAR	Prof,	Université de Constantine	Examinateur
F. REBBANI	Prof,	Université de Annaba	Examinateur

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissance au Dr. N. E. BENOUAR, professeur à l'USTHB, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de soutenance de mon travail.

Les professeurs Dr. N. KECHKAR de l'Université de Constantine et Dr. F. REBBANI de l'Université d'Annaba ont bien accepté de faire partie de ce jury et de rapporter ce travail : qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens aussi à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur Dr. A. BOUZIANI, maître de conférence au Centre Universitaire d'Oum El Bouaghi, pour avoir dirigé mon travail, pour ces précieux conseils et son soutien moral et scientifique.

Je ne saurais oublier tous ceux qui mon prêté main forte pour l'élaboration de ce travail.

ملخـــــص

هدف هذه الرسالة هو دراســـة وجود ووحدانية الحل لبعض المسائل المختلطة بشروط تكامليــة لبعض المعادلات المتكافئة و القطعية شاذة وغير شاذة ذات بعد أو بعدين. تم الجمع بين شروط كلاسيكية، تكاملية و تكاملية بحتة للمسائل المختلفة المدروسة. تعتمد البراهين على تقدير قبلي و على كثافة صـور المؤثرات المولدة من المســائل المدروسة.

Abstract

The goal of this thesis is to investigate the existence and uniqueness of the solution of some mixed problems with integral conditions for certain singular and non singular parabolic and hyperbolic equations in one-and two-dimensional structures. Some classical, integral and purely integral conditions are combined for the different studied problems. The proofs are based on some a priori estimates and on the density the operators range generated by the considered problems.

Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution de quelques problèmes mixtes avec conditions intégrales pour certaines équations paraboliques et hyperboliques, singulières et non singulières dans des structures uni- et bi-dimensionnelles. Des conditions classiques, integrales et purement intégrales sont combinées pour les différent problèmes étudiés. Les démonstrations sont basées sur des estimations à priori et sur la densité des images des opérateurs engendrées par les problèmes considerés.

INTRODUCTION

Un assez important nombre de problèmes de physique peuvent être représenté par un ensemble d'équations qui, jointes à des conditions initiales et à des conditions aux limites classiques s'exprimant sur la frontière du domaine spatial où le problème est étudié, permet de définir l'état du système. Pour certains problèmes, d'autres types de conditions apparaissent, telle que la condition intégrale

$$\int_0^b \zeta(x)u(x,t)dx = \chi(t) \qquad *$$

où $\zeta(x)$ et $\chi(t)$ sont des fonctions données. Une condition de ce type peut représenter physiquement une moyenne, une énergie totale ou une masse totale. D'où l'importance de l'étude de ces problèmes.

L'objet de cette thèse est d'étudier quelques problèmes mixtes avec des contraintes linéaires de la forme $*$. Plus précisément, on démontre l'existence et l'unicité de leurs solutions à l'aide de l'une des méthodes les plus efficaces inspirée de l'analyse fonctionnelle, appelée méthode des estimations a priori, ou méthode des inégalités de l'énergie, qui a été initiée par K.O.Friedrichs-H.Lewy [30] et P.Lax [60].

Ces problèmes peuvent être rencontrés en théorie de transmission de chaleur, élasticité, thermoelasticité, en physique de plasma, P.Shi-M.Shillor [78], M.E.Gurtin-R.C.M.Camy [36], G.F.Webb [84], K.Rektory [73], W.A.Day [27], A.Bouziani [7], J.R.Cannon [24], N.Keyfitz [41], J.D.Murray [70], A.Samarskii [76], A.Hillion [37],...

Les étapes de base dans l'étude des problèmes considérés sont :

a) Le choix du cadre fonctionnel, où l'on résout les problèmes posés.

b) L'obtention des estimations a priori.

c) La densité des images des opérateurs engendrés par les problèmes considérés.

Pour l'obtention des estimations a priori, dans tous les cas considérés, on multiplie les équations données par des expressions linéaires en fonction des inconnues, et on fait des intégrations par parties convenables. On note qu'il n'y a pas pour l'instant aucune méthode générale pour la construction de telles expressions.

Les problèmes mixtes avec conditions intégrales liés aux équations paraboliques et hyperboliques unidimensionnelles du second ordre sont étudiés en utilisant différentes méthodes, en particulier la méthode du potentiel, de Fourier, du principe du maximum, la méthode variationnelle, et la méthode des inégalités de l'énergie. N.I.Ionkin [38] a démontré à l'aide de la méthode de Fourier, l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte combinant une condition de Dirichlet avec une condition intégrale, pour une équation parabolique. Lors de l'étude de conduction thermique dans une barre mince chauffée, J.R. Cannon [24] a prouvé sur la base de la méthode du potentiel, l'existence et l'unicité de la solution classique d'un problème mixte avec une condition classique (Dirichlet) et une condition intégrale pour l'équation de la chaleur, Y.Lin [62] a étudié dans sa thèse des problèmes mixtes avec conditions non locales pour certaines équations paraboliques, en se basant sur la méthode du potentiel , L.A.Mouravey et V.Philinovski [69], en utilisant le principe du maximum ont démontré l'existence et l'unicité de la solution d'un problème mixte en combinant une condition de Neumann et une condition intégrale pour une équation parabolique.Une méthode variationnelle est utilisée dans P.Shi [77], où l'auteur a démontré l'existence et l'unicité de la solution faible, sur la base d'une inégalité d'interpolation. Le résultat obtenu est un prolongement de celui dans N.I.Yurchuk [85].

Concernant l'étude des problèmes mixtes avec des conditions intégrales pour des équations paraboliques unidimensionnelles, en utilisant comme outil la méthode des estimations a priori, on cite les articles N.I.Yurchuk [85], A.V.Kartynik [40], N.E.Benouar-N.I.Yurchuk [5]. Par la suite, plusieurs travaux relatifs à ces problèmes ont été publiés récemment, parmi lesquels on cite les travaux de A.Bouziani [8], [9], [10] et A.Bouziani-N.E.Benouar [18], [20].

Pour les problèmes mixtes avec conditions intégrales liés à des équations hyperboliques unidimensionnelles, on dispose des résultats récents dans A.Bouziani [6], [13], [15] et A.Bouziani-N.E.Benouar [21]. En ce qui concerne les problèmes mixtes avec conditions intégrales pour les équations pluriparaboliques, on cite celui de A.Bouziani [14].

On note que cette méthode d'analyse fonctionnelle a été utilisée pour des problèmes avec conditions aux limites classiques (Dirichlet, Neumann,...) liés à des équations elliptiques : O.A.Ladyzhenskaya [52], [55], J.L.Lions [63], hyperboliques : O.A.Ladyzhenskaya [55], [56], S.K.Godounov [34], [33], B.Carbonaro-R.Russo [25], R.Sakomoto [74], [75], J.Leray [61], N.I.Yurchuk-F.E.Lomovtsev [98], F.E.Lomovtsev [64], V.I.Korzyuk [44], J.Fritz [31], paraboliques : N.I.Yurchuk [89], [90] J.Fritz [31], , O.A.Ladyzhenskaya [56], [55], pseudoparaboliques : A.Bouziani [16], opérationnelles : A.Guezane-F.Rebbani-N.I.Yurchuk [35], N.I.Brish-N.I.Yurchuk [22], [23], J.A.Dubinskii [29], O.A.Ladyzhenskaya [51], [53], N.I.Yurchuk [88], [91]-[97], F.E.Lomovtsev [64], F.E.Lomovtsev-N.I.Yurchuk [65], F.Rebbani-V.I.Chassalin [72], [71], N.V.Tsyvis-N.I.Yurchuk [80], M.I.Visik-O.A.Ladyzhenskaya [81], N.I.Yurchuk [87], [86], composites : N.E.Benouar [3], N.E.Benouar-L.Bougueffa [4], de type mixtes : V.P.Diedenko [28], S.A.Aldashev [1], P.Lax [60], N.N.Lanin [58], N.V.Kislov [43], [42], V.N.Vragov [82], [83], G.D.Dachev [26], de transmission : A.Bouziani [17], V.I.Korzyuk-N.I.Yurchuk [49], O.A.Ladyzhenskaya-L.I.Stupialis [57], V.I.Korzyuk [46], [45], [47], et équations non classiques : N.E.Benouar [2], A.Bouziani [11], [12], A.Bouziani-N.E.Benouar [19], V.I.Korzyuk–V.V.Dainyak [48], I.V.Suveika [79], N.I.Kamynin [39].

Nous commençons par étudier dans **le premier chapitre** de cette thèse, un problème mixte pour une classe d'équations hyperboliques du second ordre, dans une structure multidimensionnelle avec conditions intégrales uniquement. Ce travail peut être considéré comme prolongement des travaux A.Bouziani [15], [13], A.Bouziani-N.E.Benouar [21] dans la mesure où, d'une part, les conditions envisagées sont uniquement de type intégral et, d'autre part, l'équation étudiée est de type hyperbolique. On note que c'est pour la première fois, est étudié un problème mixte hyperbolique avec conditions intégrales dans une structure multidimensionnelle.

Dans **le deuxième chapitre**, on traite un problème mixte pour une équation hyperbolique du second ordre avec l'opérateur de Béssel, où il est marié une condition intégrale à poids non homogène avec une condition classique de type Neumann. Dans le cas où au lieu de l'opérateur de Bessel, on considère l'opérateur $\left(a(r,t)\frac{\partial}{\partial r}\right)_r$, on consulte A.Bouziani [6], [13], [15].

Le chapitre trois est centré sur l'étude d'une équation parabolique avec l'opérateur de Bessel du second ordre lié avec une condition intégrale à poids non homogène et une condition classique de type Neumann. Dans le cas où au lieu de l'opérateur de Bessel, on a l'opérateur $\left(a(r,t)\frac{\partial}{\partial r}\right)_r$, on peut consulter A.Bouziani [10], P.Shi [77]. Un problème analogue avec des conditions Dirichlet-intégrale homogènes, est étudié dans N.E.Benouar-N.I.Yurchuk [5].

Dans **le chapitre quatre**, on étudie un problème mixte pour une équation parabolique bidimensionnelle ayant deux singularités d'ordres différents. On combine une condition de Dirichlet par rapport à x, une condition de Neumann par rapport à y et deux conditions intégrales.

Dans **le chapitre cinq**, on s'intéresse à l'étude d'un problème mixte avec conditions intégrales uniquement pour une équation parabolique bidimensionnelle. Ce travail, peut être considéré comme prolongement des travaux A.Bouziani [8], [7], A.Bouziani-N.E.Benouar [20], dans la mesure où, d'une part les conditions envisagées sont uniquement de type intégral, et d'autre part l'équation étudiée est de type parabolique. On note que c'est pour la première fois, est étudié un problème mixte parabolique avec conditions intégrales dans une structure multidimensionnelle.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude d'un problème mixte pour une équation parabolique singulière bidimensionnelle. On combine une condition intégrale à poids avec des conditions classiques (Dirichlet, Neumann).

CHAPITRE I

PROBLEME MIXTE AVEC CONDITIONS INTEGRALES POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS HYPERBOLIQUES MULTI-DIMENSIONNELLES

PROBLÈME MIXTE AVEC CONDITIONS INTÉGRALES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES DANS UNE STRUCTURE MULTIDIMENSIONNELLE

1. Introduction

On considère le problème de chercher la fonction $u = u(x,t)$, solution du problème :

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - a(t)\Delta u = f(x,t), \qquad x = (x_1,\cdots,x_n) \in \Omega = \prod_{i=1}^{n}(0,b_i) \subset IR^n,\ t \in (0,T) \tag{1.1}$$

où b_i, T sont des constantes connues et $a(t)$ est une fonction donnée satisfaisant aux conditions :

C1. $\qquad c_0 \le a(t) \le c_1, \quad a'(t) \le c_2$, pour tout $t \in [0,T]$,

C2. $\qquad a''(t) \le c_3$, pour tout $t \in [0,T]$.

A l'équation (1.1), on associe les conditions initiales,

$$\begin{aligned} \ell_1 u &= u(x,0) = \varphi(x), && x \in \Omega, \\ \ell_2 u &= u_t(x,0) = \psi(x), && x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.2}$$

et les conditions intégrales,

$$\int_0^{b_i} x_i^k\, u(x,t)dx_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 0, 1. \tag{1.3}$$

où f, φ et ψ sont des fonctions données et telles que :

$$\int_0^{b_i} x_i^k \varphi(x)dx_i = \int_0^{b_i} x_i^k \psi(x)dx_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n;\ k = 0, 1.$$

L'étude de ce problème, peut être considérée comme prolongement du travail [6] dans la mesure où, d'une part, les conditions envisagées sont uniquement de type intégral et, d'autre part, l'équation étudiée est de type hyperbolique à plusieurs dimensions.

Dans ce chapitre, sur la base de la méthode des inégalités de l'énergie, on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème posé (1.1)-(1.3). On établit une estimation à priori, et on démontre que l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème considéré est dense.

Dans le but d'éviter des complications purement techniques, on se propose d'étudier le problème (1.1)-(1.3) dans le cas particulier où $n = 2$ c'est-à-dire, le problème de chercher la fonction $u = u(x,t)$, solution du problème :

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - a(t)\Delta u = f(x,t), \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega = (0,b_1)\times(0,b_2),\ t \in (0,T), \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} \ell_1 u &= u(x,0) = \varphi(x), && x \in \Omega, \\ \ell_2 u &= u_t(x,0) = \psi(x), && x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\int_0^{b_i} x_i^k u(x,t)\,dx_i = 0, \qquad i = 1,\ 2;\ k = 0, 1. \tag{1.6}$$

2. Inégalité de l'énergie.

Le problème (1.1)-(1.3) peut être considéré comme la résolution de l'équation opérationnelle

$$Lu = (f, \varphi, \psi),$$

où L est un opérateur défini de E dans F, où E est un espace de Banach constitué des fonctions $\Im_{x_1x_2} u \in L_2(Q)$, dont la norme :

$$\|u\|_E = \left(\sup_{0\le\tau\le T} \int_\Omega \left((\Im_{x_1} u(.,.,\tau))^2 + (\Im_{x_2} u(.,.,\tau))^2 + (\Im_{x_1x_2} u_t(.,.,\tau))^2\right)dx\right)^{1/2},$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\left((\mathcal{L}u, \ell_1 u, \ell_2 u), (f, \varphi, \psi)\right)_F = \int_Q \Im_{x_1x_2} \mathcal{L}u \cdot \Im_{x_1x_2} f\, dxdt$$

$$+\int_{\Omega}(\Im_{x_1}\ell_1 u\cdot\Im_{x_1}\varphi+\Im_{x_2}\ell_1 u\cdot\Im_{x_2}\varphi+\Im_{x_1x_2}\ell_2 u\cdot\Im_{x_1x_2}\psi)dx,$$

et de la norme associée :

$$\|Lu\|_F=\left(\int_Q(\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u)^2\,dxdt+\int_{\Omega}\left((\Im_{x_1}\ell_1 u)^2+(\Im_{x_2}\ell_1 u)^2+(\Im_{x_1x_2}\ell_2 u)^2\right)dx\right)^{1/2}.$$

Le domaine de définition $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions $\Im_{x_1x_2}u\in L^2(Q)$ telles que $\Im_{x_1x_2}u_t, \Im_{x_1x_2}u_{tt}, \Im_{x_1x_2}u_{x_1x_1}, \Im_{x_1x_2}u_{x_2x_2}\in L^2(Q)$, qui satisfont aux conditions (1.6).

Théorème 1. *Si $a(t)$ satisfait aux conditions* **C1**, *alors il existe une constante positive c indépendante de la solution u, telle que :*

$$\|u\|_E\le c\|Lu\|_F,\qquad \textit{pour tout } u\in D(L). \tag{2.1}$$

Démonstration. On multiplie scalairement l'équation (1.1) par l'expression $Mu=\Im^2_{x_1x_2}u_t$, où

$$\Im^2_{x_1x_2}g=\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2}g(\eta_1,\eta_2,t)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\eta_2\,d\eta_2,$$

puis on intègre sur le sous-domaine $Q^\tau=\Omega\times(0,\tau)$, où $\tau\in[0,T]$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{Q^\tau}u_{tt}\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\,dxdt-\int_{Q^\tau}a(t)u_{x_1x_1}\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\,dxdt-\int_{Q^\tau}a(t)u_{x_2x_2}\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\,dxdt\\&=\int_{Q^\tau}f\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\,dxdt.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Considérons chaque intégrale de l'égalité (2.2), et intégrons par parties en tenant compte des conditions (1.5)-(1.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_{Q^\tau} u_{tt}\cdot \Im^2_{x_1x_2}u_t\,dxdt &= \int_0^\tau\int_0^{b_2} \Im_{x_1}u_{tt}\cdot \Im^2_{x_1x_2}u_t\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1}dx_2dt \\
&- \int_{Q^\tau}\Im_{x_1}u_{tt}\cdot\Im_{x_1x_2x_2}u_t dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^{b_1}\Im_{x_1x_2}u_{tt}\cdot\Im_{x_1x_2x_2}u_t\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2}dx_1dt+\int_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2}u_{tt}\cdot\Im_{x_1x_2}u_t dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\Im_{x_1x_2}u_t(\xi_1,\xi_2,\tau)\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\Im_{x_1x_2}\psi\right)^2dx,
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{Q^\tau}a(t)u_{x_1x_1}\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\,dxdt &= -\int_0^\tau\int_0^{b_2}a(t)u_{x_1}\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1}dx_2dt \\
&\quad+\int_{Q^\tau}a(t)u_{x_1}\cdot\Im_{x_1x_2x_2}u_tdxdt \\
&= \int_0^\tau\int_0^{x_2}au\cdot\Im_{x_1x_2x_2}u_t\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1}dx_2dt-\int_Q au\cdot\Im^2_{x_2}u_tdxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^{b_1}a\Im_{x_2}u\cdot\Im^2_{x_2}u_t\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2}dx_1dt+\int_{Q^\tau}a\Im_{x_2}u\cdot\Im_{x_2}u_tdxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega a(\tau)\cdot\left(\Im_{x_2}u(x_1,\xi_2,\tau)\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega a(0)\cdot\left(\Im_{x_2}\varphi\right)^2dx \\
&-\frac{1}{2}\int_{Q^\tau}a'(t)\left(\Im_{x_2}u\right)^2dxdt,
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_{Q^\tau}a(t)u_{x_2x_2}\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\,dxdt &= -\int_0^\tau\int_0^{b_1}a(t)u_{x_2}\cdot\Im^2_{x_1x_2}u_t\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2}dx_1dt \\
&\quad+\int_{Q^\tau}a(t)u_{x_2}\cdot\Im_{x_1x_1x_2}u_tdxdt \\
&= \int_0^\tau\int_0^{b_1}au\cdot\Im_{x_1x_1x_2}u_t\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2}dx_1dt-\int_Q au\cdot\Im^2_{x_1}u_tdxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega a(\tau)\cdot\left(\Im_{x_1}u(\xi_1,x_2,t)\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega a(0)\cdot\left(\Im_{x_1}\varphi\right)^2dx \\
&-\frac{1}{2}\int_{Q^\tau}a'(t)\left(\Im_{x_1}u\right)^2dxdt,
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{Q^\tau} f\cdot \Im^2_{x_1x_2} u_t\, dxdt &= \int_0^{b_2}\int_0^{\tau} \Im_{x_1} f\cdot \Im^2_{x_1x_2} u_t\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} d\tau dx_2 \\
&- \int_{Q^\tau} \Im_{x_1} f\cdot \Im_{x_1x_2x_2} u_t\, dxdt \qquad (2.6)\\
&= \int_0^{b_1}\int_0^{\tau} \Im_{x_1x_2} f\cdot \Im_{x_1x_2x_2} u_t\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} d\tau dx_1 - \int_{Q^\tau} \Im_{x_1x_2} f\cdot \Im_{x_1x_2} u_t dxdt.
\end{aligned}
$$

Substituons les égalités (2.3)-(2.6) dans l'égalité (2.2), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega a(\tau)\left(\left(\Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau)\right)^2 + \left(\Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau)\right)^2\right)dx \\
&\qquad + \int_\Omega \left(\Im_{x_1x_2}(u_t(\xi_1, \xi_2, \tau)\right)^2 dx \\
&= 2\int_{Q^\tau} \Im_{x_1x_2} f\cdot \Im_{x_1x_2} u_t\, dxdt + \int_\Omega a(0)\cdot\left(\left(\Im_{x_1}\varphi\right)^2 + \left(\Im_{x_2}\varphi\right)^2\right)dx \qquad (2.7)\\
&+ \int_\Omega \left(\Im_{x_1x_2}\psi\right)^2 dx + \int_{Q^\tau} a'(t)\cdot\left(\left(\Im_{x_1} u\right)^2 + \left(\Im_{x_2} u\right)^2\right)dxdt
\end{aligned}
$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy pour majorer le premier terme du membre droit de l'égalité (2.7), et tenons compte des conditions **C1**, il vient

$$
\begin{aligned}
&\left\|\Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1x_2} u_t(\xi_1, \xi_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\le c_4\left(\left\|\Im_{x_1x_2} f\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left\|\Im_{x_1}\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1x_2}\psi\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \qquad (2.8)\\
&+ c_4\int_0^\tau\left(\left\|\Im_{x_1} u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1x_2} u_t\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)dt,
\end{aligned}
$$

où

$$
c_4 = \frac{\max(1, c_1, c_2)}{\min(1, c_0)}.
$$

Pour éliminer les trois derniers termes du membre gauche de l'inégalité (2.8), on utilise le lemme suivant :

Lemme 1. Si les fonctions $h_i(t)$, $i = 1,2,3.$, sont des fonctions non négatives sur l'intervalle $[0, T]$, $h_1(t), h_2(t)$ sont intégrables et $h_3(t)$ est non décroissante, alors de l'inégalité

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \le h_3(t) + c\int_0^\tau h_2(t)dt,$$

il s'ensuit que

$$\int_0^\tau h_1(t) + h_2(t) \le e^{c\tau} h_3(t).$$

Pour la démonstration de ce lemme on peut consulter [32] (voir lemme 7.1).

Maintenant si on pose :

$$h_1(\tau) = 0,$$

$$h_2(\tau) = \left\|\Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1x_2} u_t(\xi_1, \xi_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et

$$h_3(\tau) = \left\|\Im_{x_1x_2} f\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \left\|\Im_{x_1}\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1x_2}\psi\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

il vient, en utilisant le lemme 1, que

$$\begin{aligned} &\left\|\Im_{x_1} u(\xi_1, x_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2} u(x_1, \xi_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1x_2} u_t(\xi_1, \xi_2, \tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le c_4 \exp(c_4 T)\cdot\left(\left\|\Im_{x_1x_2} f\right\|^2_{L^2(Q)} + \left\|\Im_{x_1}\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}\varphi\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1x_2}\psi\right\|^2_{L^2(Q)}\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Comme le membre droit de l'inégalité (2.9) ne dépend pas de τ, on passe dans la partie gauche au supremum par rapport à τ de 0 à T, on obtient l'inégalité (2.1), avec $c = c_4^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{c_4 T}{2}\right)$. Ce qui achève la preuve du théorème 1.

Proposition 1. *L'opérateur L défini de E dans F possède une fermeture $\overline{L}$.*

Démonstration. On doit vérifier l'assertion suivante : si $u_n \in D(L)$ $(n = 1,2,\ldots)$ telle que :

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{dans } E, \tag{2.10}$$

et si

(2.11) $$Lu_n = (\mathcal{L}u_n, \ell_1 u_n, \ell_2 u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \qquad \text{dans } F,$$

alors $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$.

La relation (2.10) entraîne que

(2.12) $$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(Q),$$

où $\mathcal{D}'(Q)$ est l'espace des distributions sur Q.

D'après la continuité de la dérivation de $\mathcal{D}'(Q)$ dans $\mathcal{D}'(Q)$, (2.12) implique que

(2.13) $$\mathcal{L}u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(Q).$$

En vertu de (2.11), on a

(2.14) $$\mathcal{L}u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(Q).$$

D'après l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(Q)$, on conclut que $f \equiv 0$.

Par ailleurs, il vient de (2.11), que

(2.15) $$\ell_1 u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \qquad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Comme l'injection canonique de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est continue [50], on déduit de (2.15) que

(2.16) $$\ell_1 u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

D'autre part de l'estimation (2.1), il vient

$$\|\ell_1 u_n\|_{L^2(\Omega)} \le \|u_n\|_E, \qquad \forall n,$$

ce qui entraîne, compte tenu de (2.10)

$$\ell_1 u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{dans } L^2(\Omega),$$

par suite

(2.17) $$\ell_1 u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, on conclut de (2.16) et (2.17) que

$$\varphi \equiv 0.$$

De la même manière, on démontre que $\psi \equiv 0$.

Soit $\overline{L}$ la fermeture de l'opérateur L, et $D(\overline{L})$ son domaine de définition.

Définition. La solution de l'équation

$$\overline{L}u = \mathcal{F}$$

est appelée *solution forte* du problème (1.4)-(1.6).

Par passage à la limite, on prolonge l'inégalité (2.1) aux solutions fortes, on a alors :

(2.18) $$\|u\|_E \leq c\|\overline{L}u\|_F \quad , \quad \forall u \in D(\overline{L}).$$

D'où les deux corollaires suivants:

Corollaire 1. *La solution forte du problème (1.4)-(1.6) si elle existe, elle est unique et dépend continûment de* $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in F$.

Corollaire 2. *L'ensemble des valeurs* $R(\overline{L})$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égal à la fermeture* $\overline{R(L)}$ *de* $R(L)$.

3. Existence et unicité de la solution.

Théorème 2. Si *on suppose que les conditions du théorème 1 ont lieu et si de plus, la condition* **C2** *a lieu. Alors pour tout* $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi) \in F$, *il existe une solution forte unique*

$u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$ *du problème (1.4)-(1.6), vérifiant l'estimation*

$$\|u\|_E^2 \leq c\|Lu\|_F^2$$

où c est une constante positive indépendante de la solution u.

Démonstration. Pour démontrer que le problème (1.4)-(1.6) admet une solution forte unique pour tout $\mathcal{F} \in F$, il suffit de démontrer que $R(L)$ est dense dans F, car il s'ensuit de l'estimation (2.18) que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse continu $\overline{L}^{-1}$, et du corollaire 2 on déduit que l'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ est fermé dans l'espace F. Pour cette fin, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 2. *Si les conditions du théorème 2 sont satisfaites et si pour $\Im_{x_1x_2}\Psi \in L^2(Q)$, on a*

(3.1) $$\int_Q \Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u \cdot \Im_{x_1x_2}\Psi\, dxdt = 0,$$

pour toute fonction $u \in D_0(L) = \{u / u \in D(L), \ell_1 u = \ell_2 u = 0\}$, alors $\Im_{x_1x_2}\Psi$ s'annule presque partout dans Q.

Démonstration de la proposition 2. Puisque la relation (3.1) est donnée pour tout $u \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous la forme particulière suivante :

(3.2) $$u = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq s \\ \int_s^t (t-\tau)u_{\tau\tau}\, d\tau & s \leq t \leq T \end{cases}$$

et telle que u est solution de l'équation

(3.3) $$a(t)\Im_{x_1x_2}u_{tt} = \Im_t^*\Im_{x_1x_2}\Psi = \int_t^T \Im_{x_1x_2}\Psi \cdot d\tau .$$

Des relations (3.2)-(3.3), on conclut que $u \in D_s(L) \subseteq D_0(L)$, et que

(3.4) $$\Im_{x_1x_2}\Psi = \Im_t^{*^{-1}} g = -\left(a(t)\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)_t .$$

Pour continuer la démonstration de la proposition, on a besoin de :

Lemme 2. *La fonction $\Im_{x_1x_2}\Psi$ définie par la relation (3.4) appartient à $L^2(Q)$.*

Démonstration . on a $-a_t\Im_{x_1x_2}u_{tt}\in L^2(Q)$, car

$$\int_{\Omega}\left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)^2dx_1dx_2\leq\frac{b_1^2b_2^2}{4}\int_{\Omega}u_{tt}^2dx_1dx_2, \tag{3.5}$$

En effet

$$\begin{aligned}\left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)^2&=\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}u_{tt}d\xi_2d\xi_1\right)^2\leq\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}d\xi_2d\xi_1\right)\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}u_{tt}^2d\xi_2d\xi_1\right)\\&\leq\left(\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}d\xi_2d\xi_1\right)\left(\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}u_{tt}^2d\xi_2d\xi_1\right)\\&=x_1x_2\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}u_{tt}^2d\xi_2d\xi_1\end{aligned}$$

D'où, on a

$$\int_{\Omega}\left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)^2dx_1dx_2\leq\left(\int_{\Omega}x_1x_2dx_1dx_2\right)\left(\int_{\Omega}u_{tt}^2dx_1dx_2\right)=\frac{b_1^2b_2^2}{4}\int_{\Omega}u_{tt}^2dx_1dx_2.$$

Pour démontrer que $-a(t)\Im_{x_1x_2}u_{ttt}\in L^2(Q)$, on doit utiliser les opérateurs de régularisation introduits dans [32] (Lemme 9.1).

Si on applique les opérateurs ρ_ε et $\partial/\partial t$ à l'équation (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}&a_t\rho_\varepsilon\Im_{x_1x_2}u_{tt}-\frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\rho_\varepsilon\Im_{x_1x_2}u_{tt}-\rho_\varepsilon a(t)\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\int_t^T\Im_{x_1x_2}\Psi d\tau-a(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\Im_{x_1x_2}u_{tt}.\end{aligned}$$

De cette dernière égalité on a

$$\begin{aligned}\left\|-a(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right\|^2_{L^2(Q)}&\leq3c_2^2\left\|\rho_\varepsilon\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right\|^2_{L^2(Q)}+3\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\int_t^T\Im_{x_1x_2}\Psi d\tau\right\|^2_{L^2(Q)}\\&+3\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\rho_\varepsilon\Im_{x_1x_2}u_{tt}-\rho_\varepsilon a(t)\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)\right\|^2_{L^2(Q)}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

En tenant compte des propriétés des opérateurs de régularisation utilisés et de l'inégalité (3.6), on obtient

$$\left\| -a(t)\partial/\partial t\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} u_{tt} \right\|^2_{L^2(Q)} \le k\left(\|u_{tt}\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \Im_{x_1x_2}\Psi \right\|^2_{L^2(Q)} \right),$$

où $\qquad k = 3\max\left\{ c_2^2 \dfrac{b_1^2 b_2^2}{4}, 1 \right\}$.. Ce qui prouve le lemme.

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition. Pour cela, remplaçons $\Im_{x_1x_2}\Psi$ dans la relation (3.1) par sa représentation (3.4), on a

$$\begin{aligned} & -\int_Q \Im_{x_1x_2} u_{tt} \cdot \left(a(t)\Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)_t dxdt \\ & + \int_Q a(t)\cdot \Im_{x_1x_2} u_{x_1x_1} \cdot \left(a(t)\cdot \Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)_t dxdt \\ & + \int_Q a(t)\cdot \Im_{x_1x_2} u_{x_2x_2} \cdot \left(a(t)\cdot \Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)_t dxdt = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Après une intégration par parties, en tenant compte de la forme particulière de u donnée par les relations (3.2)-(3.3) et des conditions (1.6), l'égalité (3.7) peut être écrite sous une forme plus simple. Pour cela, considérons chaque terme de cette dernière égalité

$$\begin{aligned} & -\int_Q \Im_{x_1x_2} u_{tt} \cdot \left(a(t)\cdot \Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)_t dxdt \\ & = \frac{1}{2}\int_\Omega a(s)\cdot \left(\Im_{x_1x_2} u_{tt}(x,s) \right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_{Q_s} a'(t)\cdot \left(\Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)^2 dxdt, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} & \int_Q a(t)\Im_{x_1x_2} u_{x_1x_1} \cdot \left(a(t)\cdot \Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)_t dxdt = \\ & \int_0^\tau \int_0^{b_2} a(t)\Im_{x_1x_2} u_{x_1x_1} \left(a(t)\Im_{x_1x_1x_2} u_{tt} \right)_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_2} u_{x_1x_1} \left(a(t)\Im_{x_1x_1x_2} u_{tt} \right)_t dxdt \\ & = -\int_0^\tau \int_0^{b_2} a(t)\Im_{x_2} u_{x_1} \left(a(t)\Im_{x_1x_1x_2} u_{tt} \right)_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt + \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_2} u_{x_1} \left(a(t)\Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)_t dxdt \\ & = \int_0^\tau \int_0^{b_2} a(t)\Im_{x_2} u \left(a(t)\Im_{x_1x_2} u_{tt} \right)_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_2} u \left(a(t)\Im_{x_2} u_{tt} \right)_t dxdt \end{aligned} \tag{3.9}$$

En tenant compte des propriétés des opérateurs de régularisation utilisés et de l'inégalité (3.6), on obtient

$$\left\| -a(t)\partial/\partial t\,\rho_{\varepsilon}\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right\|^2_{L^2(Q)} \leq k\left(\left\|u_{tt}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\Im_{x_1x_2}\Psi\right\|^2_{L^2(Q)}\right),$$

où $\quad k=3\max\left\{ c_2^2\dfrac{b_1^2b_2^2}{4},1\right\}$.. Ce qui prouve le lemme.

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition. Pour cela, remplaçons

$$= -\int_{\Omega} a^2(t)\Im_{x_2} u \cdot \Im_{x_2} u_{tt} \Big|_{t=s}^{t=T} dx + \int_{Q_s} a^2(t)\Im_{x_2} u_t \cdot \Im_{x_2} u_{tt} dxdt$$

$$+ \int_{Q_s} a(t)a'(t)\Im_{x_2} u \cdot \Im_{x_2} u_{tt} dxdt$$

$$= \int_{Q_s} a(t)a'(t) \cdot \Im_{x_2} u \cdot \Im_{x_2} u_{tt} dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a^2(T)\left(\Im_{x_2} u_t(.,.,T)\right)^2 dx$$

$$- \int_{Q_s} a(t)a'(t)\left(\Im_{x_2} u_t\right)^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega} a^2(T)\left(\Im_{x_2} u_t(.,.,T)\right)^2 dx - 2\int_{Q_s} a(t)a'(t)\left(\Im_{x_2} u_t\right)^2 dxdt$$

$$- \int_{Q_s} \left(a(t)a''(t) + a'^2\right)\Im_{x_2} u \cdot \Im_{x_2} u_t dxdt$$

$$+ \int_{\Omega} a(T)a'(T)\Im_{x_2} u(.,.,T) \cdot \Im_{x_2} u_t(.,.,T) dx,$$

$$\int_{Q} a(t)\Im_{x_1x_2} u_{x_2x_2} \cdot \left(a(t) \cdot \Im_{x_1x_2} u_{tt}\right)_t dxdt =$$

$$\int_0^{\tau}\int_0^{b_1} a(t)\Im_{x_1x_2} u_{x_2x_2}\left(a(t)\Im_{x_1x_2x_2} u_{tt}\right)_t \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt - \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_1} u_{x_2x_2}\left(a(t)\Im_{x_1x_2x_2} u_{tt}\right)_t dxdt$$

$$= -\int_0^{\tau}\int_0^{b_1} a(t)\Im_{x_1} u_{x_2}\left(a(t)\Im_{x_1x_2x_2} u_{tt}\right)_t \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt + \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_1} u_{x_2}\left(a(t)\Im_{x_1x_2} u_{tt}\right)_t dxdt$$

$$= \int_0^{\tau}\int_0^{b_1} a(t)\Im_{x_1} u \left(a(t)\Im_{x_1x_2} u_{tt}\right)_t \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt - \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_1} u\left(a(t)\Im_{x_1} u_{tt}\right)_t dxdt$$

$$= -\int_{\Omega} a^2(t)\Im_{x_1} u \cdot \Im_{x_1} u_{tt} \Big|_{t=s}^{t=T} dx + \int_{Q_s} a^2(t)\Im_{x_1} u_t \cdot \Im_{x_1} u_{tt} dxdt$$

$$+ \int_{Q_s} a(t)a'(t)\Im_{x_1} u \cdot \Im_{x_1}(u_{tt}) dxdt$$

$$= \int_{Q_s} a(t)a'(t)\Im_{x_1} u \cdot \Im_{x_1} u_{tt} dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} a^2(T)\left(\Im_{x_1}(u_t(.,.,T))\right)^2 dx$$

$$- \int_{Q_s} a(t)a'(t)\left(\Im_{x_1} u_t\right)^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega} a^2(T)\left(\Im_{x_1} u_t(.,.,T)\right)^2 dx - 2\int_{Q_s} a(t)a'(t)\left(\Im_{x_1} u_t\right)^2 dxdt$$

$$(3.10) \quad - \int_{Q_s} \left(a(t)a''(t) + a'^2\right)\Im_{x_1} u \cdot \Im_{x_1} u_t dxdt$$

$$+ \int_{\Omega} a(T)a'(T)\Im_{x_1} u(.,.,T) \cdot \Im_{x_1} u_t(.,.,T) dx.$$

La substitution des égalités (3.8), (3.9) et (3.10) dans l'identité (3.7), donne

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega} a(s)\cdot\left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}(x,s)\right)^2 dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega} a^2(T)\left(\Im_{x_2}(u_t(.,.,T))\right)^2 dx\\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega} a^2(T)\left(\Im_{x_1}u_t(.,.,T)\right)^2 dx=2\int_{Q_s} a(t)a'(t)\left(\Im_{x_2}u_t\right)^2 dxdt\\
&+\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\Im_{x_2}u\cdot\Im_{x_2}u_t dxdt-\int_{\Omega} a(T)a'(T)\Im_{x_2}u(.,.,T)\cdot\Im_{x_2}u_t(.,.,T)dx\\
&+2\int_{Q_s} a(t)a'(t)\left(\Im_{x_1}u_t\right)^2 dxdt+\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\Im_{x_1}u\cdot\Im_{x_1}u_t dxdt\\
&-\int_{\Omega} a(T)a'(T)\Im_{x_1}u(.,.,T)\cdot\Im_{x_1}u_t(.,.,T)dx+\frac{1}{2}\int_{Q_s} a'(t)\cdot\left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)^2 dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

A l'aide de l'inégalité de Cauchy, on estime le deuxième, le troisième, le cinquième et le sixième terme du membre droit de l'égalité (3.11) de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\Im_{x_2}u\cdot\Im_{x_2}u_t dxdt\\
&\leq\frac{1}{2}\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\left(\Im_{x_2}u\right)^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\left(\Im_{x_2}u_t\right)^2 dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega} a(T)a'(T)\Im_{x_2}u(.,.,T)\cdot\Im_{x_2}u_t(.,.,T)dx\\
&\leq\frac{c_0^2}{4}\int_{\Omega}\left(\Im_{x_2}u_t(x_1,\xi_2,T)\right)^2 dx+\frac{1}{c_0^2}\int_{\Omega}\left(a(T)a'(T)\right)^2\left(\Im_{x_2}u\ (x_1,\xi_2,T)\right)^2 dx,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\Im_{x_1}u\cdot\Im_{x_1}u_t dxdt\\
&\leq\frac{1}{2}\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\left(\Im_{x_1}u\right)^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_s}\left(a(t)a''(t)+a'^2\right)\left(\Im_{x_1}u_t\right)^2 dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega} a(T)a'(T)\Im_{x_1}u(.,.,T))\cdot\Im_{x_1}u_t(.,.,T)dx\\
&\leq\frac{c_0^2}{4}\int_{\Omega}\left(\Im_{x_1}u_t(\xi_1,x_2,T)\right)^2 dx+\frac{1}{c_0^2}\int_{\Omega}\left(a(T)a'(T)\right)^2\left(\Im_{x_1}u\ (\xi_1,x_2,T)\right)^2 dx.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

En vertu des conditions **C1**, **C2** et en combinant les inégalités (3.12)-(3.15) ainsi que l'égalité (3.11), il vient :

(3.16)
$$
\begin{aligned}
&\frac{c_0}{2}\int_\Omega \left(\Im_{x_1x_2} u_{tt}(x,s)\right)^2 dx + \frac{c_0^2}{4}\int_\Omega \left(\Im_{x_2} u_t(.,.,T)\right)^2 dx + \frac{c_0^2}{4}\int_\Omega \left(\Im_{x_1}(u_t(.,.,T))\right)^2 dx \\
&\leq 2c_1c_2\int_{Q_s}\left(\Im_{x_2}u_t\right)^2 dxdt + 2c_1c_2\int_{Q_s}\left(\Im_{x_1}u_t\right)^2 dxdt + \frac{c_2}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)^2 dxdt \\
&+\frac{(c_1c_3+c_2^2)}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_2}u\right)^2 dxdt + \frac{(c_1c_3+c_2^2)}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_2}u_t\right)^2 dxdt \\
&+\frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_\Omega \left(\Im_{x_2}u\ (x_1,\xi_2,T)\right)^2 dx \\
&+\frac{(c_1c_3+c_2^2)}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_1}u\right)^2 dxdt + \frac{(c_1c_3+c_2^2)}{2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_1}u_t\right)^2 dxdt \\
&+\frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_\Omega \left(\Im_{x_1}u\ (\xi_1,x_2,T)\right)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Le sixième et le neuvième terme du membre droit de l'inégalité (3.16), peuvent être éliminé du second membre à l'aide des inégalités élémentaires

(3.17)
$$
\frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_\Omega \left(\Im_{x_2}u\ (x_1,\xi_2,T)\right)^2 dx \leq \frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_2}u\right)^2 dxdt + \frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_2}u_t\right)^2 dxdt,
$$

(3.18)
$$
\frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_\Omega \left(\Im_{x_1}u\ (\xi_1,x_2,T)\right)^2 dx \leq \frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_1}u\right)^2 dxdt + \frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\int_{Q_s}\left(\Im_{x_1}u_t\right)^2 dxdt.
$$

En combinant les inégalités (3.16)-(3.18), on obtient

(3.19)
$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}(x,s)\right)^2 dx + \int_\Omega \left(\Im_{x_2}u_t(.,.,T)\right)^2 dx + \int_\Omega \left(\Im_{x_1}u_t(.,.,T)\right)^2 dx \\
&\leq c_5\left\{\int_{Q_s}\left(\Im_{x_2}u_t\right)^2 dxdt + \int_{Q_s}\left(\Im_{x_1}u_t\right)^2 dxdt + \int_{Q_s}\left(\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right)^2 dxdt\right. \\
&\left.+\int_{Q_s}\left(\Im_{x_2}u\right)^2 dxdt + \int_{Q_s}\left(\Im_{x_1}u\right)^2 dxdt\right\},
\end{aligned}
$$

où
$$c_5 = \frac{\max\left\{2c_1c_2 + \frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}, \frac{c_2}{2}, \frac{c_1c_3 + c_2^2}{2} + \frac{c_1^2c_2^2}{c_0^2}\right\}}{\min\left\{\frac{c_0}{2}, \frac{c_0^2}{4}\right\}}.$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Friedrichs [73] pour exprimer les normes de $\Im_{x_1}u$ et $\Im_{x_2}u$ en terme des normes de $\Im_{x_1}u_t$ et $\Im_{x_2}u_t$, pour obtenir

$$\begin{aligned} &\left\|\Im_{x_1x_2}u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1}u_t(.,.,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}u_t(.,.,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le c_6\left\{\left\|\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_1}u_t\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_2}u_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}\right\}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pour continuer, on introduit une nouvelle fonction β définie par

$$\beta(x,t) = \int_t^T u_{\tau\tau}d\tau,$$

alors

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \beta(x,s) - \beta(x,t),$$

et

$$\frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = \beta(x,s).$$

D'où, on a

$$\begin{aligned} &\left\|\Im_{x_1x_2}u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + (1 - 2c_6(T-s))\left(\left\|\Im_{x_1}\beta(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}\beta(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\le 2c_6\int_s^T\left[\left\|\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1}\beta\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}\beta\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]dt. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Par conséquent, si $s_0 > 0$ satisfait

$$(1 - 2c_6(T - s_0)) = 1/2,$$

alors l'inégalité (3.21) entraîne

(3.22)
$$\left\|\Im_{x_1x_2}u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\beta(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\beta(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq 4c_6\int_s^T\left[\left\|\Im_{x_1x_2}u_{tt}\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1}\beta\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\beta\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]dt,$$

pour tout $s\in[T-s_0,T]$.

En dénotant la somme des trois termes du membre droit de l'inégalité (3.22) par $\alpha(s)$, il vient

(3.23)
$$-\alpha'(s)\leq 4c_6\alpha(s).$$

En intégrant l'inégalité (3.23) sur (s,T) et en tenant compte du fait que $\alpha(T)=0$, on conclut que

(3.24)
$$\alpha(s)\exp(4c_6 s)\leq 0.$$

Il s'ensuit de (3.24), que $\Im_{x_1x_2}\Psi\equiv 0$ presque partout dans Q_{T-s_0}. En réitérant le même raisonnement, un nombre fini de fois, on montre que $\Im_{x_1x_2}\Psi\equiv 0$ et par suite $\Psi\equiv 0$ presque partout dans Q.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2. On doit montrer la validité de l'égalité $\overline{R(L)}=F$. Comme F est un espace de Hilbert, l'égalité $\overline{R(L)}=F$ est vraie, si de l'égalité :

(3.25)
$$(Lu,W)_F=\int_Q\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u\cdot\Im_{x_1x_2}\Psi\,dxdt$$
$$+\int_\Omega\left(\Im_{x_1}\ell_1u\cdot\Im_{x_1}\omega_0+\Im_{x_2}\ell_1u\cdot\Im_{x_2}\omega_0\right)dx+\int_\Omega\left(\Im_{x_1x_2}\ell_2u\cdot\Im_{x_1x_2}\omega_1\right)dx=0,$$

il s'ensuit que $\Psi\equiv 0$, $\omega_0\equiv 0$ et $\omega_1\equiv 0$, presque partout dans Q, où $W=(\Psi,\omega_0,\omega_1)\in R(L)^{\perp}$.

Si l'on considère un élément quelconque de $D_0(L)$, la relation (3.25) entraîne

$$\int_Q\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}u\cdot\Im_{x_1x_2}\Psi\,dxdt=0..$$

D'où, en vertu de la proposition, on déduit que $\Psi\equiv 0$. Et par conséquent, à partir de l'égalité (3.25) on obtient

$$\int_{\Omega}\left(\Im_{x_1}\ell_1 u\cdot\Im_{x_1}\omega_0+\Im_{x_2}\ell_1 u\cdot\Im_{x_2}\omega_0\right)dx+\int_{\Omega}\left(\Im_{x_1x_2}\ell_2 u\cdot\Im_{x_1x_2}\omega_1\right)dx=0.$$

Comme les ensembles de valeurs $R(\ell_1)$ et $R(\ell_2)$ sont partout denses dans les espaces de normes $\sqrt{\left\|\Im_{x_1}\omega_0\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\omega_0\right\|^2_{L^2(\Omega)}}$ et $\sqrt{\left\|\Im_{x_1x_2}\omega_1\right\|^2_{L^2(\Omega)}}$, on a $\omega_0\equiv 0$ et $\omega_1\equiv 0$, presque partout dans Ω. Ce qui achève la démonstration du théorème2.

CHAPITRE II

SUR UNE CLASSE D'EQUATIONS HYERBOLIQUES AVEC UNE CONDITION INTEGRALE A POIDS

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES AVEC UNE CONDITION INTÉGRALE A POIDS

1. Formulation du problème

Dans le domaine $Q = (0,R)\times(0,T)$, où $0 < R < \infty$ et $0 < T < \infty$, on considère l'équation hyperbolique du second ordre avec l'opérateur de Béssel

$$(1.1)\qquad \mathcal{L}v = v_{tt} - \frac{1}{r}v_r - v_{rr} = \mathrm{f}(r,t) \qquad (r,t)\in Q .$$

On associe à l'équation (1.1) les conditions initiales

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} \ell_1 v &= v(r,0) = \Phi(r), && r\in(0,R),\\ \ell_2 v &= v_t(r,0) = \Psi(r), && r\in(0,R), \end{aligned}$$

la condition intégrale

$$(1.3)\qquad \int_0^R rv(r,t)dr = m(t), \qquad t\in(0,T),$$

et la condition au bord de Neumann

$$(1.4)\qquad v_r(R,t) = \mu(t), \qquad t\in(0,T)$$

où $f(r,t)$, $\Phi(r), \Psi(r), m(t)$ et $\mu(t)$ sont des fonctions connues. On suppose que les conditions initiales vérifient les conditions de compatibilité suivantes:

$$\int_0^R r\,\Phi(r)dr = m(0), \qquad \Phi_r(R) = \mu(0),$$

$$\int_0^R r\,\Psi(r)dr = m'(0), \qquad \Psi_r(R) = \mu'(0).$$

Le problème (1.1)-(1.4) peut être considéré comme un problème aux limites non locales pour une équation hyperbolique singulière. Dans ce chapitre, on démontre l'existence, l'unicité et la dépendance continue des données de la solution forte du problème (1.1)-(1.4). Au point de vue de la méthode appliquée, il est préférable de transformer le problème (1.1)-(1.4) avec conditions aux limites non homogènes (1.3)-(1.4), à un problème équivalant avec conditions aux limites homogènes. Pour cela on introduit une nouvelle fonction inconnue u définie par :

$$u(r,t) = v(r,t) - U(r,t),$$

où

$$U(r,t) = r\mu(t) + \frac{12(r-R)^2}{R^4}\left(m(t) - \frac{R^3}{3}\mu(t)\right).$$

Alors, le problème (1.1)-(1.4) peut être formulé de la manière suivante:

(1.5) $$\mathcal{L}u = \mathrm{f}(r,t) - \quad U = f(r,t),$$

(1.6) $$\ell_1 u = \Phi(r) - \ell_1 U = \varphi(r), \qquad \ell_2 u = \Psi(r) - \ell_2 U = \psi(r),$$

(1.7) $$\int_0^R r u(r,t)dr = 0,$$

(1.8) $$u_r(R,t) = 0.$$

Ainsi, au lieu de chercher la fonction v, solution du problème (1.1)-(1.4), on cherche la fonction u, solution du problème (1.5)-(1.8). Et le problème (1.1)-(1.4) aura la solution $v(r,t) = u(r,t) + U(r,t)$.

2. Espaces Fonctionnels.

Pour l'étude du problème posé (1.5)-(1.8), introduisons tout d'abord certains espaces fonctionnels qui nous sont nécessaires.

Soit $L^2_\rho(Q)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrables avec poids ayant la norme finie :

$$\|u\|_{L^2_\rho(Q)} = \left(\int_Q r u^2 dr dt\right)^{1/2}.$$

Le produit scalaire dans $L^2_\rho(Q)$ est défini par :

$$(u,w)_{L^2_\rho(Q)} = (r u, w)_{L^2(Q)}.$$

$V^{1,0}_\rho(Q)$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire:

$$(u,w)_{V^{1,0}_\rho(Q)} = (u,w)_{L^2_\rho(Q)} + (u_r, w_r)_{L^2_\rho(Q)},$$

et de la norme associée

$$\|u\|^2_{V^{1,0}_\rho(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_r\|^2_{L^2_\rho(Q)}.$$

Les espaces avec poids sur l'intervalle $(0,R)$, tels que $L^2_\rho(0,R)$ et $V^1_\rho(0,R)$ sont aussi utilisés. Leurs définitions sont analogues à celles des espaces sur Q.

Écrivons maintenant le problème (1.5)-(1.8) sous la forme opérationnelle suivante :

$$Lu = \mathcal{F}.$$

Dans cette dernière équation $Lu = (\mathcal{L}u, \ell_1 u, \ell_2 u)$ et $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$. L'opérateur L est considéré de l'espace E dans F, où E est l'espace de Banach des fonctions $u \in L^2_\rho(Q)$, vérifiant les conditions (1.7)- (1.8), et ayant la norme finie :

$$\|u\|^2_E = \sup_{0 \le \tau \le T} \left(\|u_t(.,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \|u(.,\tau)\|^2_{V^1_\rho(0,R)} \right),$$

et F est l'espace de Hilbert $L^2_\rho(Q) \times V^1_\rho(0,R) \times L^2_\rho(0,R)$, constitué des éléments $\mathcal{F} = (f, \varphi, \psi)$ dont la norme

$$\|\mathcal{F}\|^2_F = \|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\psi\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \|\varphi\|^2_{V^1_\rho(0,R)}$$

est finie.

Le domaine de définition $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble de toutes les fonctions $u \in L^2_\rho(Q)$ pour lesquelles $u_t, u_{tt}, u_r, u_{tr}, u_{rr} \in L^2_\rho(Q)$ et vérifiant les conditions (1.7)-(1.8).

3. Estimation a priori.

Théorème 1. *Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'inégalité de l'énergie*

$$\|u\|_E \leq c\|Lu\|_F, \tag{3.1}$$

où c est une constante positive indépendante de la solution u.

Démonstration. Considérons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de l'équation (1.5) et l'opérateur

$$Mu = r\,u_t - r\,\Im_r^2(\rho u_t),$$

où $Q^\tau = (0,R)\times(0,\tau)$ avec $0 \leq \tau \leq T$, et $\Im_r^2(\rho u_t) = \int\limits_0^r\int\limits_0^\rho \eta u_t \, d\eta d\rho$, on a

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} &= -\left(u_{tt}, r\,\Im_r^2(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} + \left(u_{rr}, r\,\Im_r^2(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} \\ &+ \left(u_r, \Im_r^2(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} + \left(u_{tt}, ru_t\right)_{L^2(Q^\tau)} \\ &- \left(u_{rr}, ru_t\right)_{L^2(Q^\tau)} - \left(u_r, u_t\right)_{L^2(Q^\tau)}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

En utilisant les conditions (1.6)-(1.8), des intégrations standards par parties de chaque terme du membre de droite de l'égalité (3.2), on obtient:

(3.3)
$$-\left(u_{tt}, r\,\Im_r^2(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} = -\int_0^\tau \Im_r(\rho u_{tt})\Im_r^2(\rho u_t)\,\Big|_{r=0}^{r=R} dt + \int_{Q^\tau} \Im_r(\rho u_{tt})\Im_r(\rho u_t)\,dr\,dt = \frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho u_t(.,\tau))\right\|^2_{L^2(0,R)} - \frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho\psi)\right\|^2_{L^2(0,R)},$$

(3.4)
$$\left(u_{rr}, r\,\Im_r^2(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} = \int_0^\tau r u_r \Im_r^2(\rho u_t)\Big|_{r=0}^{r=R} dt - \left(u_r, r\,\Im_r(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} - \left(u_r, \Im_r^2(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)},$$

(3.5)
$$\left(u_{tt}, r\,u_t\right)_{L^2(Q^\tau)} = \frac{1}{2}\left\|u_t(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} - \frac{1}{2}\left\|\psi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)},$$

(3.6)
$$-\left(u_{rr}, r u_t\right)_{L^2(Q^\tau)} = -\int_0^\tau r u_r u_t\Big|_{r=0}^{r=R} dt + \left(u_r, u_t\right)_{L^2(Q)} + \int_{Q^\tau} r u_r u_{tr}\,dr\,dt = \frac{1}{2}\left\|u_r(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} - \frac{1}{2}\left\|\varphi_r\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \left(u_r, u_t\right)_{L^2(Q)}.$$

Substituons les égalités (3.3)-(3.6) dans l'égalité (3.2), il vient

(3.7)
$$\frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho u_t(.,\tau))\right\|^2_{L^2(0,R)} + \frac{1}{2}\left\|u_t(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \frac{1}{2}\left\|u_r(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} = \frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho\psi)\right\|^2_{L^2(0,R)} + \frac{1}{2}\left\|\psi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \frac{1}{2}\left\|\varphi_r\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \left(u_r, r\Im_r(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} + \left(\mathcal{L}u, r u_t\right)_{L^2(Q^\tau)} - \left(\mathcal{L}u, r\,\Im_r^2(r u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)}.$$

Les trois derniers termes du membre de droite, peuvent êtres estimés de la manière suivante :

(3.8)
$$\left(u_r, r\Im_r(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} \le \frac{1}{2}\left\|u_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{R}{2}\left\|\Im_r(\rho u_t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)},$$

(3.9)
$$\left(\mathcal{L}u, r u_t\right)_{L^2(Q^\tau)} \le \frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},$$

(3.10)
$$-\left(\mathcal{L}u, r\Im_r^2(\rho u_t)\right)_{L^2(Q^\tau)} \le \frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{R^3}{4}\left\|\Im_r(\rho u_t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}.$$

En évoquant les inégalités (3.8)-(3.10) et (3.7), il en résulte que

$$\left\|\Im_r(\rho u_t(.,\tau))\right\|^2_{L^2(0,R)}+\left\|u_t(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}+\left\|u_r(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}$$

(3.11)

$$\leq 2\left\|\mathcal{L}u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|\varphi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}+\left(\frac{R^4}{2}+1\right)\left\|\psi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}$$

$$+R\left(\frac{R^2}{2}+1\right)\cdot\left\|\Im_r(\rho u_t)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)}+\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|u_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}.$$

En vertu de l'inégalité élémentaire

$$\left\|u(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}\leq\left\|u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|\varphi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)},$$

et l'inégalité (3.11), il vient

(3.12)

$$\begin{aligned}&\left\|\Im_r(\rho u_t(r,\tau))\right\|^2_{L^2(0,R)}+\left\|u(r,\tau)\right\|^2_{V^1_\rho(0,R)}+\left\|u_t(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}\\&\leq c_1\left(\left\|\mathcal{L}u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|\psi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}+\left\|\varphi\right\|^2_{V^1(0,R)}\right)\\&+c_2\left(\left\|u\right\|^2_{V^{1,0}_\rho(Q^\tau)}+\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}\right),\end{aligned}$$

où

$$c_1=\max\left(R^4/2+1,\,2\right),$$

et

$$c_2=\max\left(1,\,R\left(1+R^2/2\right)\right).$$

En appliquant le lemme 1 du chapitre I, on obtient

(3.13)

$$\begin{aligned}&\left\|\Im_r(\rho u_t(r,\tau))\right\|^2_{L^2(0,R)}+\left\|u(r,\tau)\right\|^2_{V^1_\rho(0,R)}+\left\|u_t(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}\\&\leq c_1e^{c_2\tau}\left(\left\|f\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left\|\varphi\right\|^2_{V^1_\rho(0,R)}+\left\|\psi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}\right)\\&\leq c_1e^{c_2T}\left(\left\|f\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}+\left\|\varphi\right\|^2_{V^1_\rho(0,R)}+\left\|\psi\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)}\right).\end{aligned}$$

Puisque le premier terme du membre de gauche de l'inégalité (3.13) est positif, il en résulte que

$$\|u(r,\tau)\|^2_{V^1_\rho(0,R)} + \|u_t(r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,R)}$$

$$\leq c_1 e^{c_2 T}\left(\|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\varphi\|^2_{V^1_\rho(0,R)} + \|\psi\|^2_{L^2_\rho(0,R)}\right).$$

Comme le membre de droite de l'inégalité ainsi obtenue est indépendant de τ, passons alors au supremum par rapport à τ sur l'intervalle $[0,T]$, on obtient l'inégalité désirée (3.1), avec $c = c_1^{1/2} e^{c_2 T/2}$.

Proposition 1. *L'opérateur L de E dans F admet une fermeture $\overline{L}$.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition est analogue à celle de la proposition 1 du premier chapitre.

Désignons par $D(\overline{L})$ le domaine de définition de l'opérateur L.

Définition. La solution de l'équation :

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \qquad \mathcal{F} = (f,\varphi,\psi)$$

est appelée *solution forte* du problème.

Par passage à la limite, on prolonge l'inégalité (3.1) aux solutions fortes, on a alors :

(3.14) $$\|u\|_E \leq c\|\overline{L}u\|_F, \qquad \text{pour tout } u \in D(\overline{L}).$$

L'estimation (3.14) entraîne les corollaires suivants:

Corollaire 1. *Si la solution forte du problème (1.4)-(1.6) existe, alors elle est unique et dépend continûment de $\mathcal{F} = (f,\varphi,\psi) \in F$.*

Corollaire2. *L'ensemble de valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé dans F et égale à $\overline{R(L)}$.*

4. Existence de la solution

Théorème 2. *Pour chaque* $f \in L^2_\rho(Q)$, $\varphi \in V^1_\rho(0,R)$ *et* $\psi \in L^2_\rho(0,R)$, *il existe une solution forte unique* $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$ *du problème (1.4)-(1.6), vérifiant l'estimation*

$$\sup_{0 \le \tau \le T}\left(\|u(r,\tau)\|^2_{V^1_\rho(0,R)} + \|u_t(r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(0,R)}\right)$$
$$\le c\left(\|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\psi\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \|\varphi\|^2_{V^1_\rho(0,R)}\right)$$

où c *est une constante positive indépendante de la solution* u.

Démonstration. De l'inégalité (3.1), il s'ensuit que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse continu $\overline{L}^{-1}$. Du corollaire 2, on déduit que l'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé. D'où, il suffit de démontrer la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F, i.e., $\overline{R(L)} = F$. Nous avons besoin de démontrer la proposition suivante:

Proposition 2. *Si pour* $\Psi \in L^2(Q)$ *et pour tout* $u \in D_0(L) = \{u / u \in D(L) : \ell_1 u = \ell_2 u = 0\}$, on a

(4.1) $$(\mathcal{L}u, \Psi)_{L^2_\rho(Q)} = 0,$$

alors Ψ *s'annule presque partout dans* Q.

Démonstration de la proposition. La relation (4.1) est donnée pour toute fonction $u \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous une forme particulière.

Soit u solution de l'équation

(4.2) $$u_{tt} - \Im^2_r(\rho u_{tt}) = g(r,t),$$

où

(4.3) $$g(r,t) = \int_t^T \Psi(r,\tau)d\tau.$$

Et soit u la fonction définie par

(4.4)
$$u = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \le t \le s, \\ \int_s^t (t-\tau) u_{\tau\tau} d\tau, & \text{si } s \le t \le T. \end{cases}$$

Des relations (4.2) et (4.3), on a

(4.5)
$$\Psi(r,t) = (-u_{tt} + \Im_r^2(\rho u_{tt}))_t.$$

Lemme. *La fonction u définie par (4.2) et (4.4) possède des dérivées par rapport à t jusqu'au troisième ordre inclus appartenant à* $L_\rho^2(Q_s)$, où $Q_s = (0,R) \times (s,T)$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 2 du premier chapitre.

Pour continuer la démonstration de la proposition 2, on remplace Ψ dans (4.1) par sa représentation (4.5), on aura

(4.6)
$$\begin{aligned} &-(u_{tt}, u_{ttt})_{L_\rho^2(Q_s)} + (u_{tt}, \Im_r^2(\rho u_{ttt}))_{L_\rho^2(Q_s)} \\ &+(u_r, u_{ttt})_{L^2(Q_s)} - (u_r, \Im_r^2(\rho u_{ttt}))_{L^2(Q_s)} \\ &+(u_{rr}, u_{ttt})_{L_\rho^2(Q_s)} - (u_{rr}, \Im_r^2(\rho u_{ttt}))_{L_\rho^2(Q_s)} = 0. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.7)-(1.8) et de la forme particulière de la solution u définie par les relations (4.2) et (4.4), on ramène l'égalité (4.6) à une autre plus simple. Dans ce but, on intègre par parties chaque terme de l'égalité (4.6).

(4.7)
$$-(u_{tt}, u_{ttt})_{L_\rho^2(Q_s)} = \frac{1}{2}\|u_{tt}(r,s)\|^2_{L_\rho^2(0,R)},$$

$$(4.8)\quad \begin{aligned}\left(u_{tt},\Im_r^2(\rho u_{ttt})\right)_{L^2_\rho(Q)} &= \int_s^T \Im_r(\rho u_{tt})\Im_r^2(\rho u_{ttt})\Big|_{r=0}^{r=R} dt\\ &- \int_{Q_s} \Im_r(\rho u_{tt})\Im_r(\rho u_{ttt})drdt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^R \left(\Im_r(\rho u_{tt})\right)^2\Big|_{t=s}^{t=T} dr = \frac{1}{2}\left\|\Im_r\left(\rho u_{tt}(\rho,s)\right)\right\|^2_{L^2(0,R)},\end{aligned}$$

$$(4.9)\quad \left(u_r,u_{ttt}\right)_{L^2(Q)} = \int_0^R u_r u_{tt}\Big|_{t=s}^{t=T} dr - \left(u_{rt},u_{tt}\right)_{L^2(Q_s)},$$

$$(4.10)\quad \begin{aligned}\left(u_{rr},u_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} &= \int_0^R r u_{rr}u_{tt}\Big|_{t=s}^{t=T} dr - \int_{Q_s} r u_{rrt}u_{tt}drdt\\ &= -\int_s^T r u_{rt}u_{tt}\Big|_{r=0}^{r=R} dt + \int_{Q_s} r u_{rt}u_{ttr}drdt + \int_{Q_s} u_{rt}u_{tt}drdt\\ &= \frac{1}{2}\left\|u_{rt}(r,T)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \left(u_{rt},u_{tt}\right)_{L^2(Q_s)},\end{aligned}$$

$$(4.11)\quad \begin{aligned}-\left(u_{rr},\Im_r^2(\rho u_{ttt})\right)_{L^2_\rho(Q)} &= -\left(u_{rt},\Im_r(\rho u_{tt})\right)_{L^2_\rho(Q_s)} + \left(u_r,\Im_r^2(\rho u_{ttt})\right)_{L^2(Q_s)}\\ &- \int_s^T r u_r\Im_r^2(\rho u_{ttt})\Big|_{r=0}^{r=R} dt.\end{aligned}$$

En substituant les égalités (4.7)-(4.11) dans (4.6), il vient,

$$(4.12)\quad \begin{aligned}&\left\|u_{tt}(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \left\|u_{rt}(r,T)\right\|^2_{L^2(0,R)} + \left\|\left(\Im_r(\rho u_{tt}(\rho,s)\right)\right\|^2_{L^2(0,R)}\\ &= 2\left(u_{rt},\Im_r(\rho u_{tt})\right)_{L^2_\rho(Q_s)}.\end{aligned}$$

Estimons maintenant le membre droit de (4.12) à l'aide de l'inégalité de Cauchy, ce qui donne

$$(4.13)\quad \begin{aligned}&\left\|u_{tt}(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \left\|u_{rt}(r,T)\right\|^2_{L^2(0,R)} + \left\|\left(\Im_r(\rho u_{tt}(r,s)\right)\right\|^2_{L^2(0,R)}\\ &\le R\left\|u_{rt}\right\|^2_{L^2(Q_s)} + R\left\|\Im_r(\rho u_{tt})\right\|^2_{L^2(Q_s)}.\end{aligned}$$

L'inégalité (4.13) est essentielle pour notre démonstration. Pour l'utiliser, on remarque que la constante R est indépendante de s. Cependant la fonction u dans (4.13) dépend de s. Dans le but d'éviter cette difficulté, on introduit une nouvelle fonction β définie par la formule suivante :

$$\beta(r,t) = \int_t^T u_{\tau\tau} d\tau ,$$

on alors

$$u_t(r,t) = \beta(r,s) - \beta(r,t),$$

et

$$u_t(r,T) = \beta(r,s).$$

Ainsi, l'inégalité (4.13) peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned} &\left\| u_{tt}(r,s) \right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \left\| \Im_r(\rho u_{tt}(r,s) \right\|^2_{L^2(0,R)} + (1-2R(T-s)) \left\| \beta_r(r,s) \right\|^2_{L^2(0,R)} \\ &\le 2R \left(\left\| \Im_r(\rho u_{tt}) \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\| \beta_r \right\|^2_{L^2(Q_s)} \right) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Si $s_0 > 0$ vérifie $2R(T - s_0) = \dfrac{1}{2}$, alors l'inégalité (4.14) implique que

$$\begin{aligned} &\left\| u_{tt}(r,s) \right\|^2_{L^2_\rho(0,R)} + \left\| \Im_r(\rho u_{tt}(r,s)) \right\|^2_{L^2(0,R)} + \left\| \beta_r(r,s) \right\|^2_{L^2(0,R)} \\ &\le 4R \left\| \Im_r(\rho u_{tt}) \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\| \beta_r \right\|^2_{L^2(Q_s)}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

pour tout $s \in [T - s_0, T]$.

Posons

$$\alpha(s) = \left\| \Im_r(\rho u_{tt}) \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\| \beta_r \right\|^2_{L^2(Q_s)},$$

dans (4.15), on obtient

$$\left\| u_{t}(r,s) \right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(0,R)} - \frac{d\alpha}{ds} \leq 4R\alpha(s),$$

de cette dernière inégalité, il en résulte que

(4.16) $$-\frac{d}{ds}\left(\alpha(s)e^{4Rs}\right) \leq 0.$$

Puisque $\alpha(T) = 0$, une intégration de (4.16) sur l'intervalle $[s,T]$ donne

(4.17) $$\alpha(s).e^{4Rs} \leq 0.$$

Il s'ensuit de l'inégalité (4.17), que $\Psi = 0$ presque partout dans Q_{T-s_0}. Puisque la longueur s ne dépend pas du choix de l'origine, on en déduit en procédant de la même manière, étape par étape que $\Psi = 0$ presque partout dans Q. Ce qui achève la démonstration de la proposition 2.

Soit $W = (\Psi, \omega_0, \omega_1) \in R(L)^{\perp}$, tel que

(4.18) $$\left(\mathcal{L}u, \Psi\right)_{L^{2}_{\rho}(Q)} + \left(\ell_{1}u, \omega_{0}\right)_{V^{1}_{\rho}(0,R)} + \left(\ell_{2}u, \omega_{1}\right)_{L^{2}_{\rho}(0,R)} = 0.$$

Si on pose $u \in D_0(L)$ dans l'équation (4.18), on obtient

$$\left(\mathcal{L}u, \Psi\right)_{L^{2}_{\rho}(Q)} = 0, \quad \text{pour tout } u \in D_0(L).$$

D'où, en vertu de la proposition 2, on déduit que $\Psi = 0$. Ainsi l'équation (4.18) devient

$$\left(\ell_{1}u, \omega_{0}\right)_{V^{1}_{\rho}(0,R)} + \left(\ell_{2}u, \omega_{1}\right)_{L^{2}_{\rho}(0,R)} = 0.$$

Puisque $\ell_1 u$ and $\ell_2 u$ sont indépendants, et les ensembles des valeurs des opérateurs ℓ_1 and ℓ_2 sont partout denses dans les espaces de Hilbert $V^{1}_{\rho}(0,R)$ et $L^{2}_{\rho}(0,R)$, respectivement. D'où $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 0$, et par conséquent $W = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

CHAPITRE III

PROBLEME MIXTE AVEC UNE CONDITION INTEGRALE A POIDS POUR UNE EQUATION PARABOLIQUE AVEC L'OPERATEUR DE BESSEL

PROBLÈME MIXTE AVEC UNE CONDITION INTÉGRALE A POIDS POUR UNE ÉQUATION PARABOLIQUE AVEC L'OPÉRATEUR DE BESSEL

1. Introduction

On considère le problème de chercher la fonction $(r,t) \to v(r,t)$, solution du problème:

(1.1) $$\mathcal{L}v = v_t - \frac{1}{r}(rv_r)_r = \mathrm{f}(r,t), \qquad r \in (0,R), \quad t \in (0,T),$$

où R, T sont des constantes positives données.

On associe à l'équation (1.1), la condition initiale

(1.2) $$\ell v = v(r,0) = \Phi(r), \qquad r \in (0,R),$$

la condition au bord de type Neumann

(1.3) $$v_r(R,t) = \mu(t), \qquad t \in (0,T),$$

et la condition intégrale avec poids

(1.4) $$\int_0^R rv(r,t)dr = m(t),$$

où $f(r,t), \Phi(r), \mu(t)$ et $m(t)$ sont des fonctions données.

Le problème mixte (1.1)-(1.4) peut être considéré comme un problème non local pour une équation parabolique avec l'opérateur de Bessel. Dans ce chapitre, sur la base de la méthode des inégalités de l'énergie, on démontre l'existence et l'unicité de la solution généralisée du problème (1.1)-(1.4). Au point de vu de la méthode utilisée, il est préférable de transformer le problème (1.1)-(1.4) avec conditions aux bords non homogènes (1.3) et (1.4) à un problème équivalent avec conditions homogènes. Pour cela on introduit une nouvelle fonction inconnue u définie par :

$$u(r,t) = v(r,t) - U(r,t),$$

où

$$U(r,t) = \mu(t)\cdot r + \frac{12(r-R)^2}{R^4}\left(m(t) - \frac{R^3}{3}\mu(t)\right).$$

Ainsi le problème (1.1)-(1.4) peut être formulé de la manière suivante:

(1.5) $$\mathcal{L}u = \mathrm{f}(r,t) - \mathcal{L}U = f(r,t),$$

(1.6) $$\ell u = u(r,0) = \Phi(r) - \ell U = \varphi(r),$$

(1.7) $$u_r(R,t) = 0,$$

(1.8) $$\int_0^R ru(r,t)dr = 0.$$

Au lieu de chercher la fonction v solution du problème (1.1)-(1.4), on montre l'existence et l'unicité de la solution u du problème (1.5)-(1.8). Et la solution v sera donnée par $v(r,t) = u(r,t) + U(r,t)$.

Pour l'étude du problème (1.5)-(1.8), on utilise quelques espaces fonctionnels. Soit $L^2_\sigma(Q)$ et $L^2_\rho(Q)$ les espaces de Hilbert avec poids constitués des (classes de) fonctions, définies et de carré intégrables dans Q, de normes finies respectivement

$$\|u\|^2_{L^2_\sigma(Q)} = \|ru\|^2_{L^2(Q)},$$

et

$$\|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} = \left\|\sqrt{r}u\right\|^2_{L^2(Q)}.$$

Et soit $V^{1,0}_\sigma(Q)$ le sous espace de $L^2_\sigma(Q)$, muni de la norme finie

$$\|u\|^2_{V^{1,0}_\sigma(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\sigma(Q)} + \|u_r\|^2_{L^2_\sigma(Q)}.$$

On utilise aussi les espaces avec poids sur l'intervalle $(0,R)$ tels que $L^2_\sigma(0,R)$, $L^2_\rho(0,R)$ et $V^1_\sigma(0,R)$, dont les définitions sont analogues à celles des espaces sur Q, par exemple, $V^1_\sigma(0,R)$ est le sous espace de $L^2_\sigma(0,R)$ dont la norme associée finie est:

$$\|u\|^2_{V^1_\sigma(0,R)} = \|u\|^2_{L^2_\sigma(0,R)} + \|u_r\|^2_{L^2_\sigma(0,R)}$$

Le problème (1.5)-(1.8) est équivalant à l'équation opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F} \quad ,$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$ et $\mathcal{F} = (f,\varphi)$. Le domaine de définition $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions $u \in L^2_\sigma(Q)$ pour lesquelles $u_t, u_r, u_{tr}, u_{rr} \in L^2_\sigma(Q)$ et qui vérifient les conditions (1.7) et (1.8). L'opérateur L est considéré de E dans F, où E est l'espace de Banach constitués des fonctions $u \in L^2_\sigma(Q)$, vérifiant les conditions (1.7) et (1.8), et ayant la norme finie:

$$\|u\|^2_E = \|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q)} + \|(ru_r)_r\|^2_{L^2(Q)} + \sup_{0\le\tau\le T}\|u(r,\tau)\|^2_{V^1_\sigma(0,R)},$$

et F est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments $\mathcal{F} = (f,\varphi) \in L^2_\sigma(Q) \times V^1_\sigma(0,R)$ dont la norme :

$$\|\mathcal{F}\|^2_F = \|f\|^2_{L^2_\sigma(Q)} + \|\varphi\|^2_{V^1_\sigma(0,R)}$$

est finie.

On suppose que la fonction φ satisfait les conditions de compatibilité :

$$\varphi_r(R) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^R r\varphi\, dr = 0 .$$

2. Estimations à priori.

Théorème 1. *Pour toute fonction* $u \in D(L)$, *on a l'estimation à priori*

(2.1) $$\|Lu\|_F \le 2\|u\|_E .$$

Démonstration. De l'équation (1.5), il s'ensuit que

(2.2) $$\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q)} \leq 2\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q)} + 2\|(ru_r)_r\|^2_{L^2(Q)}.$$

La condition (1.6) implique que

(2.3) $$\|\varphi\|^2_{V^1_\sigma(0,R)} \leq \sup_{0\leq\tau\leq T}\|u(r,\tau)\|^2_{V^1_\sigma(0,R)}.$$

En additionnant les inégalités (2.2) et (2.3), on obtient l'estimation désirée (2.1). Ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Théorème 2. *pour toute fonction* $u \in D(L)$, *il existe une constante c positive indépendante de la solution u, telle que*

(2.4) $$\|u\|_E \leq c\|Lu\|_F.$$

Démonstration. Considérons le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de l'équation (1.5) et l'opérateur intégro-différentiel

$$Mu = r\Im_r(\rho u_t) + r^2u_t - ru_r,$$

où

$$\Im_r(\rho u) = \int_0^r \rho u(\rho,t)d\rho,$$

et

$$Q^\tau = (0,R)\times(0,\tau),$$

avec $0 \leq \tau \leq T$, il vient

(2.5) $$\begin{aligned}&\int_{Q^\tau} ru_t\Im_r(\rho u_t)drdt + \int_{Q^\tau} r^2u_t^2drdt\\ &-\int_{Q^\tau} ru_r u_t drdt - \int_{Q^\tau}(ru_r)_r\Im_r(\rho u_t)drdt\\ &-\int_{Q^\tau} ru_t(ru_r)drdt + \int_{Q^\tau} u_r(ru_r)drdt = (f, Mu)_{L^2_\sigma(Q^\tau)}.\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (16.)-(1.8), et en intégrant par parties chaque terme de l'égalité (2.5), on obtient

(2.6) $$\int_{Q^\tau} r u_t \Im_r(\rho u_t)\,drdt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \left(\Im_r(\rho u_t)\right)^2\Big|_{r=0}^{r=R} dt = 0,$$

(2.7) $$-\int_{Q^\tau}(r u_r)_r \Im_r(\rho u_t)\,drdt = -\int_0^\tau r u_r \Im_r(\rho u_t)\Big|_{r=0}^{r=R} dt + \int_{Q^\tau} r^2 u_r u_t\,drdt = \int_{Q^\tau} r^2 u_r u_t\,drdt,$$

(2.8) $$-\int_{Q^\tau} r u_t (r u_r)_r\,drdt = -\int_0^\tau r^2 u_r u_t\Big|_{r=0}^{r=R} dt + \int_{Q^\tau} r^2 u_r u_{tr}\,drdt + \int_{Q^\tau} r u_r u_t\,drdt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^R r^2 (u_r(r,\tau))^2 dr - \frac{1}{2}\int_0^R r^2 \varphi_r^2 dr + \int_{Q^\tau} r u_r u_t\,drdt,$$

(2.9) $$\int_{Q^\tau} u_r (r u_r)_r\,drdt = \frac{1}{2}\int_0^\tau r u_r^2\Big|_{r=0}^{r=R} dt + \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} u_r^2\,drdt = \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} u_r^2\,drdt.$$

La substitution des relations (2.6)-(2.9) dans (2.5) donne

(2.10) $$\int_{Q^\tau} r^2 u_t^2\,drdt + \frac{1}{2}\int_0^R r^2 (u_r(r,\tau))^2 dr + \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} u_r^2\,drdt$$
$$= \int_{Q^\tau} r f \Im_r(\rho u_t)\,drdt + \int_{Q^\tau} r^2 f u_t\,drdt - \int_{Q^\tau} r f u_r\,drdt$$
$$- \int_{Q^\tau} r^2 u_r u_t\,drdt + \frac{1}{2}\int_0^R r^2 \varphi_r^2 dr.$$

Estimons maintenant les quatre premiers termes du membre de droite de (2.10), à l'aide de l'inégalité de Cauchy, on aura

(2.11) $$\int_{Q^\tau} r f \Im_r(\rho u_t)\,drdt \le \frac{1}{8}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + R^2\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)},$$

(2.12) $$\int_{Q^\tau} r^2 u_t \cdot f\,drdt \le \frac{1}{8}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + 2\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)},$$

$$-\int_{Q^\tau} ru_r \cdot f dr dt \le \frac{1}{2}\|u_r\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}, \tag{2.13}$$

$$-\int_{Q^\tau} r^2 u_r \cdot u_t dr dt \le \frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|u_r\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}. \tag{2.14}$$

De l'identité (2.10), et en vertu des inégalités (2.11)-(2.14), il vient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|u_r(r,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(0,R)} \\ &\le \left(R^2 + \frac{5}{2}\right)\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|\varphi_r\|^2_{L^2_\sigma(0,R)} + \|u_r\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

De l'équation (1.5), on obtient

$$\frac{1}{16}\|(ru_r)_r\|^2_{L^2(Q^\tau)} \le \frac{1}{8}\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \frac{1}{8}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}. \tag{2.16}$$

Soit l'inégalité élémentaire

$$\frac{3}{16}\|u(r,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(0,R)} \le \frac{3}{16}\|\varphi\|^2_{L^2_\sigma(0,R)} + \frac{3}{16}\|u\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \frac{3}{16}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}. \tag{2.17}$$

Ainsi à partir des inégalités (2.15)-(2.17) découle l'inégalité

$$\begin{aligned} &\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|(ru_r)_r\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \|u(r,\tau)\|^2_{V^2_\sigma(0,R)} \\ &\le (42+16R^2)\cdot\left(\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|\varphi\|^2_{V^1_\sigma(0,R)}\right) \\ &+ (42+16R^2)\|u\|^2_{V^1_\sigma(Q^\tau)}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Appliquons maintenant le lemme 1 du chapitre 1, il vient

$$\begin{aligned} &\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|(ru_r)_r\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \|u(r,\tau)\|^2_{V^1_\sigma(0,R)} \\ &\le k_1 e^{k_1 T}\left(\|f\|^2_{L^2_\sigma(Q)} + \|\varphi\|^2_{V^1_\sigma(0,R)}\right), \end{aligned} \tag{2.19}$$

où $k_1 = 42 + 16R^2$.

On remarque que le membre de droite de (2.19) est indépendant de τ, on passe alors au supremum par rapport à τ de 0 à T. On obtient ainsi l'inégalité (2.4), avec $c = k_1^{1/2} e^{k_1 T/2}$.

3. Existence et unicité de la solution

Il s'ensuit de l'inégalité (2.1) que l'opérateur $L: E \to F$ est continu, et de l'inégalité (2.4) que l'ensemble des valeurs $R(L)$ de L est fermé dans F, par conséquent, il existe l'opérateur inverse continu L^{-1} donnant la solution. En d'autres termes, L est un homéomorphisme linéaire de l'espace E dans l'ensemble fermé $R(L) \subset F$. Pour démontrer qu'il existe une solution unique du problème (1.5)-(1.8), on doit montrer que $R(L) = F$.

Théorème 3. *Pour tout élément* $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, *il existe une solution unique* $u = L^{-1}\mathcal{F}$ *du problème* (1.5)-(1.8), *vérifiant l'estimation,*

$$\|u\|_E \leq c\|\mathcal{F}\|_F ,$$

où c *est une constante positive indépendante de la solution* u.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème on a besoin d'établir d'abord la proposition suivante:

Proposition. *Si, pour tout* u *dans l'ensemble* $D_0(L) = \{u / u \in D(L) : \ell u = 0\}$, *et si pour une fonction* $\Psi \in L^2_\sigma(Q)$, *on a*

(3.1) $$(\mathcal{L}u, \Psi)_{L^2_\sigma(Q)} = 0 ,$$

alors $\Psi = 0$ *s'annule presque partout dans* Q.

Démonstration de la proposition. Étant donner que la relation (4.1) est donnée pour toute fonction $u \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous une forme particulière.

Définissons d'abord la fonction g par la relation

$$g(r,t) = \int_t^T \Psi(r,s)ds ,$$

et soit u_t la solution de l'équation

$$\frac{1}{r}\left(u_t - \Im_r^2(\rho u_t)\right) = g(r,t), \tag{3.2}$$

où

$$\Im_r^2(\rho u_t) = \int_0^r \int_0^\rho \eta u_t(\eta,t)d\eta\, d\rho.$$

On définit la fonction solution u par

$$u = \begin{cases} \int_s^t u_\xi d\xi, & 0 \le t \le s, \\ 0, & s \le t \le T. \end{cases} \tag{3.3}$$

On a maintenant

$$\Psi(r,t) = \frac{1}{r}(\Im_r^2(\rho u_t) - u_t)_t. \tag{3.4}$$

Les relations (3.2) et (3.3) entraînent que u est dans $D_0(L)$.

Lemme. *La fonction* u *définie par les relations* (3.2) et (3.3) *admet des dérivées par rapport à* t *jusqu'au second ordre inclus appartenant à l'espace* $L^2{}_\sigma(Q_s)$, *où* $Q_s = (0,R)\times(s,T)$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme 1 du chapitre 1.

Pour continuer la démonstration de la proposition, remplaçons Ψ dans la relation (3.1) par sa représentation (3.4), on a

$$\begin{aligned} &\int_Q ru_t\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt - \int_Q u_r\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt + \int_Q u_r u_{tt}drdt \\ &-\int_Q ru_{rr}\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt - \int_Q ru_t u_{tt}drdt + \int_Q ru_{rr}u_{tt}drdt = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Utilisons les conditions aux bords (1.7) et (1.8), la forme spéciale de u donnée par (3.2) et (4.3), et intégrons ensuite par parties le premier et les trois derniers termes du membre de gauche de la relation (3.5), il vient

(3.6)
$$\begin{aligned}\int_Q ru_t\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt &= \int_s^T \Im_r(\rho u_t)\cdot\Im_r^2(\rho u_{tt})\Big|_{r=0}^{r=R}dt \\ &\quad -\int_{Q_s}\Im_r(\rho u_t)\cdot\Im_r(\rho u_{tt})drdt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^R\left(\Im_r(\rho u_t)\right)^2\Big|_{t=s}^{t=T}dr \\ &= \frac{1}{2}\left\|\Im_r(\rho u_t(r,s)\right\|^2_{L^2(0,R)},\end{aligned}$$

(3.7)
$$\begin{aligned}-\int_Q ru_{rr}\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt &= -\int_s^T ru_r\Im_r^2(\rho u_{tt})\Big|_{r=0}^{r=R}dt \\ &+\int_{Q_s}u_r\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt+\int_{Q_s}ru_r\Im_r(\rho u_{tt})drdt \\ &=\int_0^R ru_r\Im_r(\rho u_t)\Big|_{t=s}^{t=T}dr-\int_{Q_s}ru_{tr}\Im_r(\rho u_t)drdt \\ &+\int_{Q_s}u_r\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt \\ &=-\int_{Q_s}ru_{tr}\Im_r(\rho u_t)drdt+\int_{Q_s}u_r\Im_r^2(\rho u_{tt})drdt,\end{aligned}$$

(3.8)
$$-\int_Q ru_tu_{tt}drdt=\frac{1}{2}\left\|u_t(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(0,R)},$$

(3.9)
$$\begin{aligned}\int_Q ru_{rr}u_{tt}drdt &= \int_s^T ru_ru_{tt}\Big|_{r=0}^{r=R}dt-\int_{Q_s}ru_ru_{ttr}drdt-\int_{Q_s}u_ru_{tt}drdt \\ &=-\int_0^R ru_ru_{tr}\Big|_{t=s}^{t=T}dr+\left\|u_{tr}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}-\int_{Q_s}u_ru_{tt}drdt \\ &=\left\|u_{tr}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}-\int_{Q_s}u_ru_{tt}drdt.\end{aligned}$$

Substituons les égalités (3.6)-(3.9) dans (3.5), on obtient

$$\|u_{tr}\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \frac{1}{2}\|\Im_r(\rho u_t(\rho,s)\|^2_{L^2(0,R)} + \frac{1}{2}\|u_t(r,s)\|^2_{L^2_\rho(0,R)} = \int_{Q_s} ru_{tr}\Im_r(\rho u_t)drdt. \tag{3.10}$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy, on estime le membre de droite dans (3.10), pour avoir

$$\|u_{tr}\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \|\Im_r(\rho u_t(\,.,s)\|^2_{L^2(0,R)} + \|u_t(\,.,s)\|^2_{L^2_\rho(0,R)} \leq k\left(\|\Im_r(\rho u_t)\|^2_{L^2(Q_s)} + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}\right), \tag{3.11}$$

où $k = \max(R,1)$. Si on pose

$$\alpha(s) = \|\Im_r(\rho u_t)\|^2_{L^2(Q_s)} + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q_s)},$$

alors de l'inégalité (3.11), on obtient

$$\|u_{tr}\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} - \frac{d\alpha}{ds} \leq k\alpha(s).,$$

Et par conséquent, on a

$$-\frac{d}{ds}\left(\alpha(s)e^{ks}\right) \leq 0. \tag{3.12}$$

En tenant compte du fait que $\alpha(T) = 0$, une intégration par parties de l'inégalité (3.12) sur l'intervalle (s,T), on obtient

$$\alpha(s)e^{ks} \leq 0. \tag{3.13}$$

L'inégalité (3.13), montre que $\Psi = 0$ presque partout dans Q_{T-s_0}. Puisque s ne dépend pas du choix de l'origine, raisonnons de la même manière, au bout d'un nombre fini de fois on montre que $\Psi = 0$ presque partout dans Q. Ainsi la proposition 2 est démontrée.

On revient à la démonstration du théorème 3. Il suffit de démontrer que l'ensemble $R(L)$ est dense dans F. Soit $W = (\Psi,\omega_0) \in R(L)^\perp$, tel que

$$(\mathcal{L}u,\Psi)_{L^2_\sigma(Q)} + (\ell u,\omega_0)_{V^1_\sigma(0,R)} = 0. \tag{3.14}$$

Posons $u \in D_0(L)$ dans l'équation (3.14), il vient

$$(\mathcal{L}u, \Psi)_{L_\rho^2(Q)} = 0, \qquad \forall u \in D_0(L).$$

D'où a partir, de la proposition précédente, on déduit que $\Psi = 0$. Ainsi, l'inégalité (3.14) devient

(3.15) $$(\ell u, \omega_0)_{V_r^1(0,R)} = 0,$$

puisque $R(\ell)$ de l'opérateur ℓ est partout dense dans $V_r^1(0,R)$, alors l'inégalité (3.15) implique que $\omega_0 = 0$. D'où $W = 0$. cela achève la démonstration du théorème 3.

CHAPITRE IV

SUR UNE EQUATION PARABOLIQUE DU SECOND ORDRE AVEC CONDITIONS NON LOCALES

SUR UNE ÉQUATION PARABOLIQUE DU SECOND ORDRE AVEC CONDITIONS NON LOCALES

1. Position du problème

Soit $Q = \Omega \times (0,T)$, un domaine dans IR^3 avec $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ où $a < \infty$, $b < \infty$ et $T < \infty$. On considère le problème de déterminer la solution u, dans Q, de l'équation différentielle

(1.1) $$\mathcal{L}u = u_t - \frac{1}{x}(xu_x)_x - \frac{1}{x^2}u_{yy} = f(x,y,t), \qquad (x,y,t) \in Q,$$

vérifiant la condition initiale

(1.2) $$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \qquad 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$

la condition de Dirichlet en x

(1.3) $$u(a,y,t) = 0, \qquad 0 < t < T,\ 0 < y < b,$$

la condition de Neumann en y

(1.4) $$u_y(x,b,t) = 0, \qquad 0 < t < T,\ 0 < x < a,$$

et les conditions intégrales

(1.5) $$\int_0^a xu(x,y,t)dx = 0, \qquad \int_0^b u(x,y,t)dy = 0.$$

On suppose que la fonction φ, satisfait les conditions de compatibilité :

$$\varphi(a,y) = 0, \qquad \varphi_y(x,b) = 0,$$

$$\int_0^a x\varphi(x,y)dx = 0 \quad \text{and} \quad \int_0^b \varphi(x,y)dy = 0.$$

Dans ce chapitre, en se basant sur une estimation à priori, et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème considéré, on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (1.1)-(1.5).

Le problème (1.1)-(1.5), peut être mis sous la forme opérationnelle :

$$Lu = \mathcal{F}$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, $\mathcal{F} = (f, \varphi)$. Le domaine de définition de l'opérateur L est l'ensemble défini par $D(L) = \{u \in L^2(Q) / u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xt} \in L^2(Q)$, vérifiant (1.3) – (1.5)$\}$

L'opérateur L est considéré de l'espace E dans F, où E est l'espace de Banach constitué des fonctions $u \in L^2(Q)$, satisfaisant aux conditions aux bords (1.3)-(1.5) et dont la norme

$$\|u\|_E^2 = \int_Q \left[x^3\left(\Im_y(u_t)\right)^2 + x\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 + x^3 u_x^2 + x u_y^2\right] dxdydt$$

$$+ \sup_{0\le\tau\le T} \int_\Omega \left[(x + x^3)u^2(.,.,\tau) + x^3\left(\Im_y(u_x(.,.,\tau))\right)^2\right] dxdy,$$

est finie.

Et F est l'espace de Hilbert ayant la norme

$$\|\mathcal{F}\|_F^2 = \int_Q (\mathcal{L}u)^2\, dxdydt + \int_\Omega \left[(x + x^3)\varphi^2 + x^3\left(\Im_y(\varphi_x)\right)^2\right] dxdy.$$

Le produit scalaire dans F est défini par :

$$(\mathcal{F}, V)_F = \int_Q f \cdot v dxdydt + \int_\Omega \left[(x + x^3)\varphi \cdot w dxdy + x^3 \Im_y(\varphi_x) \cdot \Im_y(w_x)\right] dxdydt,$$

où $\mathcal{F} = (f, \varphi)$ et $V = (v, w)$ sont deux éléments appartenant à l'espace de Hilbert F.

Estimation à priori et ses conséquences

Théorème 1. *Pour toute fonction $u \in D(L)$, on a l'estimation a priori suivante*

(2.1) $$\|u\|_E \le c\|Lu\|_F$$

où c est une constante positive indépendante de la solution u.

Démonstration. On multiplie scalairement l'équation (1.1) par l'expression :

$$Mu = -x^3\Im_y^2 u_t + 2x^2\Im_y^2 u_x + x^3\Im_{xyy}(\xi u_t) + x^3\Im_y u_y,$$

et on intègre ensuite sur le domaine $Q^\tau = \Omega \times (0,\tau)$, où

$$\Im_x u = \int_0^x u(\xi, y, t)d\xi,$$

il vient

$$\begin{aligned}
(2.2) \quad (\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} &= -\int_{Q^\tau} x^3 u_t \cdot \Im_y^2 u_t dxddt + \int_{Q^\tau} x^2 (xu_x)_x \Im_y^2 u_t dxdydt \\
&+ \int_{Q^\tau} xu_{yy} \cdot \Im_y^2 u_t dxdydt + 2\int_{Q^\tau} x^2 u_t \cdot \Im_y^2 u_x dxdydt \\
&- 2\int_{Q^\tau} x(xu_x)_x \Im_y^2 u_x dxdydt - 2\int_{Q^\tau} u_{yy} \cdot \Im_y^2 u_x dxdydt \\
&+ \int_{Q^\tau} x^3 u_t \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t) dxdydt - \int_{Q^\tau} x^2 (xu_x)_x \Im_{xyy}(\xi u_t) dxdydt \\
&- \int_{Q^\tau} xu_{yy} \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t) dxdydt + \int_{Q^\tau} x^3 u_t \cdot \Im_y u_y dxdydt \\
&- \int_{Q^\tau} x^2 (xu_x)_x \Im_y u_y dxdydt - \int_{Q^\tau} xu_{yy} \cdot \Im_y u_y dxdydt.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la condition initiale (1.2) et des conditions aux bords (1.3)-(1.5), et en faisant des intégrations par parties standards de chaque terme du membre de droite de l'identité (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
(2.3) \quad & -\int_{Q^\tau} x^3 u_t \cdot \Im_y^2 u_t dxdydt = \int_{Q^\tau} x^3 \left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt \\
& -\int_0^a\int_0^\tau x^3 \Im_y u_t \cdot \Im_y^2 u_t \Big|_{y=0}^{y=b} dxdt = \int_{Q^\tau} x^3 \left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.4) \quad & \int_{Q^\tau} x^2 (xu_x)_x \Im_y^2 u_t dxdydt = -2\int_{Q^\tau} x^2 u_x \cdot \Im_y^2 u_t dxdydt \\
& + \int_0^b\int_0^\tau x^3 u_x \cdot \Im_y^2 u_t \Big|_{x=0}^{x=a} dydt - \int_{Q^\tau} x^3 u_x \cdot \Im_y^2 u_{tx} dxdydt
\end{aligned}$$

$$= 2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_t dxdydt + \int_{Q^\tau} x^3 \Im_y u_{tx} \cdot \Im_y u_x dxdydt$$

$$- \int_0^a\int_0^\tau x^3 \Im_y u_x \cdot \Im_y^2 u_{tx}\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt - 2\int_0^a\int_0^\tau x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega x^3 \left(\Im_y u_x(.,.,\tau)\right)^2 dxdy - \frac{1}{2}\int_\Omega x^3 \left(\Im_y \varphi_x\right)^2 dxdy$$

$$+ 2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_t dxdydt,$$

$$\int_{Q^\tau} xu_{yy} \cdot \Im_y^2 u_t dxdydt = -\int_{Q^\tau} xu_y \cdot \Im_y u_t dxdydt + \int_0^a\int_0^\tau xu_y \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

(2.5)
$$= -\int_0^a\int_0^\tau xu \cdot \Im_y u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt + \int_{Q^\tau} xuu_t dxdydt$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega xu^2(.,.,\tau) dxdy - \frac{1}{2}\int_\Omega x\varphi^2 dxdy,$$

$$2\int_{Q^\tau} x^2 u_t \cdot \Im_y^2 u_x dxdydt = -2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_t \cdot \Im_y u_x dxdydt$$

(2.6)
$$+ 2\int_0^a\int_0^\tau x^2 \Im_y u_t \cdot \Im_y^2 (u_x)\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt = -2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_t \cdot \Im_y u_x dxdydt,$$

$$-2\int_{Q^\tau} x(xu_x)_x \cdot \Im_y^2 u_x dxdydt = 2\int_{Q^\tau} x(x\Im_y u_x)_x \cdot \Im_y u_x dxdydt$$

(2.7)
$$-2\int_0^a\int_0^\tau x\left(x\Im_y u_x\right)_x \cdot \Im_y^2 u_x\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

$$= \int_0^b\int_0^\tau x^2 \left(\Im_y u_x\right)^2\Big|_{x=0}^{x=a} dydt = a^2 \int_0^b\int_0^\tau \left(\Im_y u_x(a,y,t)\right)^2 dtdy,$$

$$-2\int_{Q^\tau} u_{yy} \cdot \Im_y^2 u_x dxdydt = 2\int_{Q^\tau} u_y \cdot \Im_y u_x dxdydt - 2\int_0^a\int_0^\tau u_y \cdot \Im_y^2 u_x\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

(2.8)
$$= 2\int_0^a\int_0^\tau u \cdot \Im_y u_x\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt - 2\int_{Q^\tau} u \cdot u_x dxdydt$$

$$= -\int_0^a\int_0^\tau u^2\Big|_{x=0}^{x=a} dydt = \int_0^a\int_0^\tau u^2(0,y,t)dydt,$$

$$\begin{aligned}
&\int_{Q^\tau} x^3 u_t \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt = \int_0^a\int_0^\tau x^3\Im_y u_t\cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt \\
&-\int_{Q^\tau} x^3\Im_y u_t\cdot\Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt + \int_{Q^\tau} x\big(\Im_{xy}(\xi u_t)\big)^2 dxdydt \\
&-\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^\tau x^2\big(\Im_{xy}(\xi u_t)\big)^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt \\
&= \int_{Q^\tau} x\big(\Im_{xy}(\xi u_t)\big)^2dxdydt,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q^\tau} x^2(xu_x)_x \Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt = 2\int_{Q^\tau} x^2u_x\cdot\Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt \\
&+\int_{Q^\tau} x^4 u_x\cdot\Im_y^2 u_t dxdydt - \int_0^b\int_0^\tau x^3u_x\cdot\Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{x=0}^{x=a}dydt \\
&=\int_0^a\int_0^\tau x^4\Im_y u_x\cdot\Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt + 2\int_0^a\int_0^\tau x^2\Im_y u_x\cdot\Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt \\
&-\int_{Q^\tau} x^4\Im_y u_x\cdot\Im_y u_t dxdydt - 2\int_{Q^\tau} x^2\Im_y u_x\cdot\Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt \\
&=-\int_{Q^\tau} x^4\Im_y u_x\cdot\Im_y u_t dxdydt - 2\int_{Q^\tau} x^2\Im_y u_x\cdot\Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q^\tau} xu_{yy}\cdot\Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt = \int_{Q^\tau} xu_y\cdot\Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt - \int_0^a\int_0^\tau xu_y\cdot\Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt \\
&=\int_{Q^\tau} xu_y\cdot\Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{Q^\tau} x^3u_t\cdot\Im_y u_y dxdydt = -\int_{Q^\tau} x^3u_y\cdot\Im_y u_t dxdydt + \int_0^a\int_0^\tau x^3\Im_y u_t\cdot\Im_y u_y\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt \\
&=-\int_0^a\int_0^\tau x^3 u\cdot\Im_y u_t\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt + \int_{Q^\tau} x^3 u\cdot u_t dxdydt
\end{aligned} \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega} x^3 u^2(.,.,\tau)dxdy - \frac{1}{2}\int_{\Omega} x^3 \varphi^2 dxdy ,$$

(2.13)

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q^\tau} x^2 (xu_x)_x \cdot \Im_y u_y dxdydt = 2\int_{Q^\tau} x^2 u_x \cdot \Im_y u_y dxdydt \\
&-\int_0^b\int_0^\tau x^3 u_x \cdot \Im_y u_y \Big|_{x=0}^{x=a} dydt + \int_{Q^\tau} x^3 u_x \cdot \Im_y u_{xy} dxdydt \\
&= -\int_{Q^\tau} x^3 \Im_y u_x \cdot u_{xy} dxdydt + 2\int_0^a\int_0^\tau x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_y \Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&-2\int_{Q^\tau} x^2 u_y \cdot \Im_y u_x dxdydt + \int_0^a\int_0^\tau x^3 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_{xy} \Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&= \int_{Q^\tau} x^3 u_x^2 dxdydt - 2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_x \cdot u_y dxdydt,
\end{aligned}$$

(2.14)

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q^\tau} xu_{yy} \cdot \Im_y u_y dxdydt = -\int_0^a\int_0^\tau xu_y \cdot \Im_y u_y \Big|_{y=0}^{y=b} dxdt + \int_{Q^\tau} xu_y^2 dxdydt \\
&= \int_{Q^\tau} xu_y^2 dxdydt.
\end{aligned}$$

En substituant les égalités (2.3)-(2.14) dans (2.2), il vient

(2.15)

$$\begin{aligned}
&\int_{Q^\tau} x^3 \left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} x^3 \left(\Im_y u_x(.,.,\tau)\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_{\Omega} xu^2(.,.,\tau)dxdy \\
&+ a^2\int_0^b\int_0^\tau \left(\Im_y u_x(a,y,t)\right)^2 dtdy + \int_0^b\int_0^\tau u^2(0,y,t)dtdy + \int_{Q^\tau} x\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 dxdydt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Omega} x^3 u^2(.,.,\tau)dxdy + \int_{Q^\tau} x^3 u_x^2 dxdydt + \int_{Q^\tau} xu_y^2 dxdydt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega} x^3 \left(\Im_y \varphi_x\right)^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_{\Omega} x^3 \varphi^2 dxdy + \frac{1}{2}\int_{\Omega} x\varphi^2 dxdy \\
&+ \int_{Q^\tau} x^4 \Im_y u_x \cdot \Im_y (u_t) dxdydt + 2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_{xy}(\xi u_t) dxdydt \\
&- \int_{Q^\tau} xu_y \cdot \Im_{xy}(\xi u_t) dxdydt + 2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_x \cdot u_y dxdydt - \int_{Q^\tau} x^3 \mathcal{L}u \cdot \Im_y^2 u_t dxdydt
\end{aligned}$$

$$+2\int_{Q^\tau} x^2 \mathcal{L}u\cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt + \int_{Q^\tau} x^3 \mathcal{L}u\cdot \Im_y u_y\,dxdydt + \int_{Q^\tau} x^3 \mathcal{L}u\cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt .$$

En vertu d'une inégalité élémentaire, on estime les huit derniers termes du membre de droite de l'inégalité (2.15) de la manière suivante :

$$(2.16)\qquad \int_{Q^\tau} x^4 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_t\,dxdydt \le a^2 \int_{Q^\tau} x^3 (\Im_y u_x)^2\,dxdydt + \frac{1}{4}\int_{Q^\tau} x^3(\Im_y u_t)^2\,dxdydt ,$$

$$(2.17)\qquad 2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt \le 8\int_{Q^\tau} x^3(\Im_y u_x)^2\,dxdydt + \frac{1}{8}\int_{Q^\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_t))^2\,dxdydt ,$$

$$(2.18)\qquad -\int_{Q^\tau} xu_y \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt \le \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} xu_y^2\,dxdydt + \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_t))^2\,dxdydt ,$$

$$(2.19)\qquad 2\int_{Q^\tau} x^2 \Im_y u_x \cdot u_y\,dxdydt \le 8\int_{Q^\tau} x^3(\Im_y u_x)^2\,dxdydt + \frac{1}{8}\int_{Q^\tau} xu_y^2\,dxdydt ,$$

$$(2.20)\qquad -\int_{Q^\tau} x^3 \mathcal{L}u\cdot \Im_y^2 u_t\,dxdydt \le \frac{1}{4}\int_{Q^\tau} x^3(\Im_y u_t)^2\,dxdydt + \frac{a^3 b^2}{2}\int_{Q^\tau} f^2\,dxdydt ,$$

$$(2.21)\qquad 2\int_{Q^\tau} x^2 \mathcal{L}u\cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt \le \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} x^3(\Im_y u_x)^2\,dxdydt + ab^2\int_{Q^\tau} f^2\,dxdydt ,$$

$$(2.22)\qquad \int_{Q^\tau} x^3 \mathcal{L}u\cdot \Im_y u_y\,dxdydt \le \frac{1}{8}\int_{Q^\tau} xu_y^2\,dxdydt + a^5 b^2\int_{Q^\tau} f^2\,dxdydt ,$$

$$(2.23)\qquad \int_{Q^\tau} x^3 \mathcal{L}u\cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt \le \frac{1}{8}\int_{Q^\tau} x(\Im_{xy}(\xi u_t))^2\,dxdydt + a^5 b^2\int_{Q^\tau} f^2\,dxdydt .$$

Puisque le quatrième et le cinquième terme du membre du droite de l'égalité (2.15) sont positifs, alors en vertu des inégalités (2.16)-(2.23), on a

$$(2.24)\qquad \begin{aligned} &\int_{Q^\tau}\left[x^3(\Im_y u_t)^2 + x(\Im_{xy}(\xi u_t))^2 + x^3 u_x^2 + xu_y^2\right]dxdydt \\ &+\int_{\Omega}\left[x^3(\Im_y u_x(\cdot,\cdot,\tau))^2 + (x+x^3)u^2(\cdot,\cdot,\tau)\right]dxdy \\ &\le k\left\{\int_{Q^\tau}\left[x^3(\Im_y u_x)^2 + f^2\right]dxdydt + \right. \end{aligned}$$

$$+\int_{\Omega}\left[x^{3}\left(\Im_{y}\varphi_{x}\right)^{2}+(x+x^{3})\varphi^{2}\right]dxdy\Bigg\},$$

où $\qquad k=\max\left(8a^{5}b^{2}+4ab^{2}+2a^{3}b^{2},4a^{2}+66\right).$

De l'inégalité (2.24), et du lemme 1 du chapitre 1, on conclut que

$$\int_{Q^{\tau}}\left[x^{3}\left(\Im_{y}u_{t}\right)^{2}+x\left(\Im_{xy}(\xi u_{t})\right)^{2}+x^{3}u_{x}^{2}+xu_{y}^{2}\right]dxdydt$$
$$+\int_{\Omega}\left[x^{3}\left(\Im_{y}u_{x}(.,.,\tau)\right)^{2}+(x+x^{3})u^{2}(.,.,\tau)\right]dxdy$$
$$\leq ke^{k\tau}\left\{\int_{\Omega}\left[x^{3}\left(\Im_{y}\varphi_{x}\right)^{2}+(x+x^{3})\varphi^{2}\right]dxdy+\int_{Q^{\tau}}f^{2}dxdydt\right\}\tag{2.25}$$
$$\leq ke^{kT}\left\{\int_{\Omega}\left[x^{3}\left(\Im_{y}\varphi_{x}\right)^{2}+(x+x^{3})\varphi^{2}\right]dxdy+\int_{Q}f^{2}dxdydt\right\}.$$

Puisque le membre de droite de l'estimation (2.25) ne dépend pas de τ, en passant au supremum par rapport à τ de 0 to T, il s'ensuit que

$$\int_{Q^{\tau}}\left[x^{3}\left(\Im_{y}u_{t}\right)^{2}+x\left(\Im_{xy}(\xi u_{t})\right)^{2}+x^{3}u_{x}^{2}+xu_{y}^{2}\right]dxdydt$$
$$+\sup_{0\leq\tau\leq T}\int_{\Omega}\left[x^{3}\left(\Im_{y}u_{x}(.,.,\tau)\right)^{2}+(x+x^{3})u^{2}(.,.,\tau)\right]dxdy$$
$$\leq ke^{kT}\left\{\int_{\Omega}\left[x^{3}\left(\Im_{y}\varphi_{x}\right)^{2}+(x+x^{3})\varphi^{2}\right]dxdy+\int_{Q}f^{2}dxdydt\right\}.$$

De cette dernière inégalité découle (2.1), avec $c=\sqrt{k}e^{k\frac{T}{2}}$.

Proposition 1. *L'opérateur L de l'espace E dans F est fermable.*

On démontre cette proposition de la même manière que celle de la proposition 1 du chapitre 1.

Désignons par $\overline{L}$, la fermeture de l'opérateur L et par, $D(\overline{L})$ son domaine de définition.

Définition. On appelle ***solution forte*** du problème (1.1)-(15), solution de l'équation opérationnelle

$$\overline{L}u = \mathcal{F} \tag{2.26}$$

En passant à la limite, l'estimation (2.1) peut être prolongée à $\overline{L}$, soit

$$\|u\|_E \leq c\|\overline{L}u\|_F, \qquad \text{pour tout } u \text{ dans } D(\overline{L}), \tag{2.27}$$

d'où le :

Corollaire 1. *La solution forte du problème (1.1)-(1.5) si elle existe, elle est unique et dépend continûment des éléments* $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$.

Corollaire 2. *L'ensemble des valeurs* $R(\overline{L})$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égal à la fermeture* $\overline{R(L)}$ *de* $R(L)$.

3. Existence et unicité de la solution

Théorème 2. *Pour tout élément* $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in F$, *il existe une solution* $u = L^{-1}\mathcal{F}$ *du problème (1.1)-(1.5), vérifiant l'estimation*

$$\int_Q \left[x^3\left(\Im_y u_t\right)^2 + x\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 + x^3 u_x^2 + x u_y^2\right] dxdydt$$

$$+ \sup_{0\leq\tau\leq T} \int_\Omega \left[(x + x^3)u^2(.,.,\tau) + x^3\left(\Im_y u_x(.,.,\tau)\right)^2\right] dxdy$$

$$\leq c\left\{\int_Q (\mathcal{L}u)^2\, dxdydt + \int_\Omega \left[(x + x^3)\varphi^2 + x^3\left(\Im_y \varphi_x\right)^2\right] dxdy\right\}.$$

où c *est une constante positive indépendante de la solution* u.

Démonstration. De l'estimation (2.27), on déduit que l'opérateur $\overline{L}$ admet un inverse continu $\overline{L}^{-1}$. Et du corollaire 2, il s'ensuit que l'ensemble des valeurs $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé. Par conséquent, il suffit de démontrer que l'ensemble $R(L)$ est dense dans l'espace F. Pour cela démontrons d'abord le résultat suivant

Théorème 3. *Si, pour une fonction* $\Psi \in L^2(Q)$, *on a*

(3.1) $$\int_Q \mathcal{L}u \cdot \Psi dxdydt = 0$$

pour tout $u \in D_0(L) = \{\, u/\ u \in D(L):\ \ell u = 0\, \}$, *alors* Ψ *s'annule presque partout dans* Q.

Démonstration du théorème 3. Puisque la relation (3.1) est supposée vraie pour toute fonction $u \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous une forme particulière.

Définissons d'abord la fonction g par la relation suivante

(3.2) $$g(x,y,t) = \int_t^T \left(\Psi - x^6 \mathfrak{I}_{xyy}(\xi u_t) + 10x^3 \mathfrak{I}_y^2 u_t - 20x^2 \mathfrak{I}_y^2 u_x\right) d\tau .$$

Soit u la solution de l'équation

(3.3) $$-x^5 \mathfrak{I}_y^2 u_t = g,$$

où $$\mathfrak{I}_y^2 v = \int_0^y \int_0^\eta v(x,\varsigma,t) d\varsigma d\eta .$$

Et soit la fonction u donnée par

(3.4) $$u = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le s \\ \int_s^t u_\tau d\tau & s \le t \le T \end{cases}$$

Des relations (3.2) et (3.3), on a

(3.5) $$\Psi(x,y,t) = x^5 \mathfrak{I}_y^2 u_{tt} + x^6 \mathfrak{I}_{xyy}(\xi u_t) - 10x^3 \mathfrak{I}_y^2 u_t + 20x^2 \mathfrak{I}_y^2 u_x .$$

Lemme. *La fonction* Ψ *définie par la relation (3.5) est dans* $L^2(Q)$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme du chapitre 1.

On établit maintenant la démonstration du théorème 3. Remplaçons Ψ dans (3.1) par sa représentation (3.5), il vient

$$
\begin{aligned}
&\int_Q x^5 u_t \cdot \Im_y^2 u_{tt}\,dxdydt - \int_Q x^4 (xu_x)_x \cdot \Im_y^2 u_{tt}\,dxdydt \\
&- \int_Q x^3 u_{yy} \cdot \Im_y^2 u_{tt}\,dxdydt + \int_Q x^6 u_t \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\,dxdydt \\
&- \int_Q x^5 (xu_x)_x \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\,dxdydt - \int_Q x^4 u_{yy} \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\,dxdydt \\
&- 10\int_Q x^3 u_t \cdot \Im_y^2 u_t\,dxdydt + 10\int_Q x^2 (xu_x)_x \cdot \Im_y^2 u_t\,dxdydt \\
&+ 10\int_Q xu_{yy} \cdot \Im_y^2 u_t\,dxdydt + 20\int_Q x^2 u_t \cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt \\
&- 20\int_Q x(xu_x)_x \cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt - 20\int_Q u_{yy} \cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt = 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

En évoquant les relations (3.3), (3.4), les conditions aux bords (1.3)-(1.5), et en intégrant par parties chaque terme de (3.6), on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_Q x^5 u_t \cdot \Im_y^2 u_{tt}\,dxdydt &= -\int_{Q_s} x^5 \Im_y u_t \cdot \Im_y u_{tt}\,dxdydt \\
&+ \int_s^T \int_0^a x^5 \Im_y u_t \cdot \Im_y^2 (u_{tt})\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega x^5 \left(\Im_y u_t(.,.,s)\right)^2 dxdy\ ,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$-\int_{Q} x^4 (xu_x)_x \cdot \Im_y^2 u_{tt}\,dxdydt = \int_{Q_s} x^5 u_x \cdot \Im_y^2 u_{ttx}\,dxdydt$$

$$+4\int_{Q_s} x^4 u_x \cdot \Im_y^2 u_{tt}\,dxdydt - \int_s^T\int_0^b x^5 u_x \cdot \Im_y^2 u_{tt}\Big|_{x=0}^{x=a} dydt$$

$$= 4\int_0^a\int_0^b x^4 u_x \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{t=s}^{t=T} dxdy + \int_0^a\int_0^b x^5 u_x \cdot \Im_y^2 u_{tx}\Big|_{t=s}^{t=T} dxdy$$

$$-\int_{Q_s} x^5 u_{tx} \cdot \Im_y^2 u_{tx}\,dxdydt - 4\int_{Q_s} x^4 u_{tx} \cdot \Im_y^2 u_t\,dxdydt$$

$$= \int_{Q_s} x^5 \left(\Im_y u_{tx}\right)^2 dxdydt + 4\int_{Q_s} x^4 \Im_y u_{tx} \cdot \Im_y u_t\,dxdydt$$

$$-\int_s^T\int_0^a x^5 \Im_y u_{tx} \cdot \Im_y^2 (u_{tx})\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt - 4\int_s^T\int_0^a x^4 \Im_y u_{tx} \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

$$= \int_{Q_s} x^5 \left(\Im_y u_{tx}\right)^2 dxdydt - 8\int_{Q_s} x^3 \left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt$$

$$+2\int_s^T\int_0^b x^4 \left(\Im_y u_t\right)^2\Big|_{x=0}^{x=a} dydt$$

(3.8)
$$= \int_{Q_s} x^5 \left(\Im_y u_{tx}\right)^2 dxdydt - 8\int_{Q_s} x^3 \left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt \;,$$

$$-\int_{Q} x^3 u_{yy} \cdot \Im_y^2 u_{tt}\,dxdydt = \int_{Q_s} x^3 u_y \cdot \Im_y u_{tt}\,dxdydt$$

$$-\int_s^T\int_0^a x^3 u_y \cdot \Im_y^2 u_{tt}\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

(3.9)
$$= -\int_{Q_s} x^3 u \cdot u_{tt}\,dxdydt + \int_s^T\int_0^a x^3 u \cdot \Im_y u_{tt}\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

$$= \int_{Q_s} x^3 u_t^2\,dxdydt,$$

$$\int_{Q} x^6 u_t \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t) dxdydt = -\int_{Q_s} x^6 \Im_y u_t \cdot \Im_{xy}(\xi u_t) dxdydt$$

$$+\int_s^T\int_0^a x^6 \Im_y u_t \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

(3.10)
$$= \frac{5}{2}\int_{Q_s} x^4 \left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 dxdydt - \frac{1}{2}\int_s^T\int_0^b x^5 \left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2\Big|_{x=0}^{x=a} dydt$$

$$= \frac{5}{2}\int_{Q_s} x^4 \left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 dxdydt,$$

$$-\int_{Q} x^5 (xu_x)_x \Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt = \int_{Q_s} x^7 u_x \cdot \Im_y^2 u_t dxdydt$$

$$+5\int_{Q_s} x^5 u_x \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt - \int_s^T\int_0^b x^6 u_x \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{x=0}^{x=a} dydt$$

$$= -\int_{Q_s} x^7 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_t dxdydt - 5\int_{Q_s} x^5 \Im_y u_x \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt$$

$$+\int_s^T\int_0^a x^7 \Im_y u_x \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt + 5\int_s^T\int_0^a x^5 \Im_y u_x \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

$$= -\int_{Q_s} x^7 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_t dxdydt - 5\int_{Q_s} x^5 \Im_y u_x \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt.$$

$$= \int_{Q_s} x^7 \Im_y u \cdot \Im_y u_{tx} dxdydt + 12\int_{Q_s} x^6 \Im_y u \cdot \Im_y u_t dxdydt$$

$$+25\int_{Q_s} x^4 \Im_y u \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt - \int_s^T\int_0^b x^7 \Im_y u \cdot \Im_y u_t\Big|_{x=0}^{x=a} dydt$$

$$-5\int_s^T\int_0^b x^5 \Im_y u \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)\Big|_{x=0}^{x=a} dydt$$

$$= \int_{Q_s} x^7 \Im_y u \cdot \Im_y u_{tx} dxdydt + 12\int_{Q_s} x^6 \Im_y u \cdot \Im_y u_t dxdydt \tag{3.11}$$

$$+25\int_{Q_s} x^4 \Im_y u \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt,$$

$$-\int_{Q} x^4 u_{yy} \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)dxdydt = \int_{Q_s} x^4 u_y \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt$$

$$-\int_s^T\int_0^a x^4 u_y \cdot \Im_{xyy}(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt$$

$$= -\int_{Q_s} x^4 u \cdot \Im_x(\xi u_t)dxdydt + \int_s^T\int_0^b x^4 u \cdot \Im_{xy}(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \tag{3.12}$$

$$= \int_{Q_s} x^4 u_t \cdot \Im_x(\xi u)dxdydt + 3\int_{Q_s} x^2 \Im_x(\xi u)\cdot \Im_x(\xi u_t)dxdydt$$

$$-\int_s^T\int_0^b x^3 \Im_x(\xi u_t)\cdot \Im_x(\xi u)\Big|_{x=0}^{x=a} dydt$$

$$= \int_{Q_s} x^4 u_t \cdot \Im_x(\xi u)dxdydt + \frac{3}{2}\int_{\Omega} x^2 \big(\Im_x(\xi u(.,.,T))\big)^2 dxdy,$$

$$-10\int_{Q} x^3 u_t \cdot \Im_y^2 u_t dxdydt = -10\int_s^T\int_0^a x^3 \Im_y u_t \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \tag{3.13}$$

$$+10\int_{Q_s} x^3 \big(\Im_y u_t\big)^2 dxdydt,$$

(3.14)
$$
\begin{aligned}
&10\int_{Q} x^2 (xu_x)_x \Im_y^2 u_t\,dxdydt = -10\int_{Q_s} x^3 u_x \cdot \Im_y^2 u_{tx}\,dxdydt \\
&-20\int_{Q_s} x^2 u_x \cdot \Im_y^2 u_t\,dxdydt + 10\int_s^T\int_0^b x^3 u_x \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{x=0}^{x=a} dydt \\
&= 10\int_{Q_s} x^3 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_{tx}\,dxdydt + 20\int_{Q_s} x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_t\,dxdydt \\
&-10\int_s^T\int_0^a x^3 \Im_y u_x \cdot \Im_y^2 u_{tx}\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt - 20\int_s^T\int_0^a x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&= 5\int_{\Omega} x^3 \left(\Im_y u_x(.,.,T)\right)^2 dxdy + 20\int_{Q_s} x^2 \Im_y u_x \cdot \Im_y u_t\,dxdydt,
\end{aligned}
$$

(3.15)
$$
\begin{aligned}
&10\int_{Q} xu_{yy} \cdot \Im_y^2 u_t\,dxdydt = -10\int_{Q_s} xu_y \cdot \Im_y u_t\,dxdydt \\
&+10\int_s^T\int_0^a xu_y \cdot \Im_y^2 u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&10\int_{Q_s} xu \cdot u_t\,dxdydt - 10\int_s^T\int_0^a xu \cdot \Im_y u_t\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&= 5\int_0^b\int_0^a xu^2(.,.,T)\,dxdy,
\end{aligned}
$$

(3.16)
$$
\begin{aligned}
&20\int_{Q} x^2 u_t \cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt = -20\int_{Q_s} x^2 \Im_y u_t \cdot \Im_y u_x\,dxdydt \\
&+20\int_s^T\int_0^a x^2 \Im_y u_t \cdot \Im_y^2 u_x\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&= -20\int_{Q_s} x^2 \Im_y u_t \cdot \Im_y u_x\,dxdydt,
\end{aligned}
$$

(3.17)
$$
\begin{aligned}
&-20\int_{Q} x(xu_x)_x \cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt = 20\int_{Q_s} \left(x\Im_y u_x\right)_x x\Im_y u_x\,dxdydt \\
&-20\int_s^T\int_0^a x\left(x\Im_y u_x\right)_x \cdot \Im_y^2 u_x\Big|_{y=0}^{y=b} dxdt \\
&= 10\int_s^T\int_0^b x^2\left(\Im_y u_x\right)^2\Big|_{x=0}^{x=a} dydt = 10a^2\int_s^T\int_0^b \left(\Im_y u_x(a,y,t)\right)^2 dydt,
\end{aligned}
$$

(3.18)
$$
\begin{aligned}
&-20\int_{Q} u_{yy}\cdot \Im_y^2 u_x\,dxdydt = -20\int_s^T\int_0^a u_y\cdot \Im_y^2 u_x\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt\\
&+20\int_{Q_s} u_y\cdot \Im_y u_x\,dxdydt\\
&=20\int_s^T\int_0^a u\cdot \Im_y u_x\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt-20\int_{Q_s} u\cdot u_x\,dxdydt\\
&=-10\int_s^T\int_0^b u^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt=10\int_s^T\int_0^b u^2(0,y,t)\,dydt.
\end{aligned}
$$

En substituant les identités (3.7)-(3.18) dans (3.6), on obtient

(3.19)
$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega} x^5\left(\Im_y u_t(.,.,s)\right)^2 dxdy+\int_{Q_s} x^5\left(\Im_y u_{tx}\right)^2 dxdydt\\
&+\int_{Q_s} x^3 u_t^2\,dxdydt+\frac{5}{2}\int_{Q_s} x^4\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 dxdydt\\
&+2\int_{Q_s} x^3\left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt+\frac{3}{2}\int_{\Omega} x^2\left(\Im_x(\xi u(.,.,T))\right)^2 dxdy\\
&+5\int_{\Omega} x^3\left(\Im_y u_x(.,.,T)\right)^2 dxdy+5\int_{\Omega} xu^2(.,.,T)\,dxdy+\\
&10a^2\int_s^T\int_0^b\left(\Im_y u_x(a,y,t)\right)^2 dydt+10\int_s^T\int_0^b u^2(0,y,t)\,dydt\\
&=-\int_{Q_s} x^7\Im_y u\cdot \Im_y u_{tx}\,dxdydt-25\int_{Q_s} x^4\Im_y u\cdot \Im_{xy}(\xi u_t)\,dxdydt\\
&-\int_{Q_s} x^4 u_t\cdot \Im_x(\xi u)\,dxdydt-12\int_{Q_s} x^6\Im_y u\cdot \Im_y u_t\,dxdydt.
\end{aligned}
$$

On estime maintenant chaque terme du membre de droite de la relation (3.19) à l'aide de l'inégalité de Cauchy de la forme $2\alpha\beta\le\delta\alpha^2+1/\delta\ \beta^2$, et d'une inégalité de type Poincaré [73], il vient que

(3.20)
$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} x^7\Im_y u\cdot \Im_y u_{tx}\,dxdydt\le\frac{1}{2}\int_{Q_s} x^5\left(\Im_y u_{tx}\right)^2 dxdydt\\
&+\frac{a^4}{2}\left\{\int_{Q_s} x^5\left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt+a^2\int_{Q_s} x^3\left(\Im_y u_x\right)^2 dxdydt\right\},
\end{aligned}
$$

(3.21)
$$-25\int_{Q_s} x^4\Im_y u\cdot\Im_{xy}(\xi u_t)dxdydt \le 2\int_{Q_s} x^4\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 dxdydt + \frac{5^4a^3b^2}{16}\int_{Q_s} xu^2dxdydt,$$

(3.22)
$$-\int_{Q_s} x^4u_t\cdot\Im_x(\xi u)dxdydt \le \frac{a^3}{2}\int_{Q_s} x^2\left(\Im_x(\xi u)\right)^2 dxdydt + \frac{1}{2}\int_{Q_s} x^3u_t^2dxdydt,$$

(3.23)
$$-12\int_{Q_s} x^6\Im_y u\cdot\Im_y u_t dxdydt \le 6\int_{Q_s} x^5\left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt + 6a^2\left\{a^2\int_{Q_s} x^3\left(\Im_y u_x\right)^2 + \int_{Q_s} x^5\left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt\right\}.$$

Puisque les deux derniers termes du membre gauche de la relation (3.19) sont positifs, en combinant alors les inégalités (3.20)-(3.23) et (3.19), on obtient

(3.24)
$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} x^5\left(\Im_y u_t(.,.,s)\right)^2 dxdy + \int_{Q_s} x^5\left(\Im_y u_{tx}\right)^2 dxdydt\\ &+\int_{Q_s} x^3u_t^2dxdydt + \int_{Q_s} x^4\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2 dxdydt\\ &+\int_{Q_s} x^3\left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt + \int_{\Omega} x^2\left(\Im_x(\xi u(.,.,T))\right)^2 dxdy\\ &+\int_{\Omega} x^3\left(\Im_y u_x(.,.,T)\right)^2 dxdy + \int_{\Omega} xu^2(.,.,T)dxdy\\ &\le c\left[\int_{Q_s} x^3\left(\Im_y u_x\right)^2 dxdydt + \int_{Q_s} x^5\left(\Im_y u_t\right)^2 dxdydt\right.\\ &\left.+\int_{Q_s} x^2\left(\Im_x(\xi u)\right)^2 dxdydt + \int_{Q_s} xu^2dxdydt\right],\end{aligned}$$

où

$$c = \max\left\{ 12+12a^2+a^4,\ 12a^4+2a^6,\ a^3, \frac{5^4a^3b^2}{8}\right\}.$$

L'inégalité (3.24), est essentielle dans notre démonstration. Pour l'utiliser, on note que la constante c ne dépend pas de s, mais la solution u, dans (3.24), dépend de s. Afin d'éviter cette difficulté, on introduit une nouvelle fonction β définie par la formule

$$\beta(x,y,t)=\int_t^T u_\tau(x,y,\tau)d\tau.$$

D'où on déduit que

$$u(x,y,t)=\beta(x,y,s)-\beta(x,y,t).$$

Et sur la base de (3.24), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_s}\left[+x^5\left(\Im_y u_{tx}\right)^2+x^3\left(\Im_y u_t\right)^2+x^3u_t^2+x^4\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2\right]dxdydt\\
&+\int_\Omega x^5\left(\Im_y u_t(.,.,s)\right)^2dxdy+\left(1-2c(T-s)\right)\left\{\int_\Omega x\beta^2(.,.,s)dxdy\right.\\
(3.25)\qquad&\left.+\int_\Omega x^2\left(\Im_x(\xi\beta(.,.,s))\right)^2dxdy+\int_\Omega x^3\left(\Im_y\beta_x(.,.,s)\right)^2dxdy\right\}\\
&\le 2c\left\{\int_{Q_s}\left[x^5\left(\Im_y\beta_t\right)^2+x\beta^2+x^2\left(\Im_x(\xi\beta)\right)^2+x^3\left(\Im_y\beta_x\right)^2\right]dxdydt\right\}.
\end{aligned}$$

Si on choisit $s_0>0$ tel que $1-2c(T-s_0)=\dfrac{1}{2}$, alors (3.25) entraîne que

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_s}\left[x^5\left(\Im_y u_{tx}\right)^2+x^3\left(\Im_y u_t\right)^2+x^3u_t^2+x^4\left(\Im_{xy}(\xi u_t)\right)^2\right]dxdydt\\
&+\int_\Omega x^5\left(\Im_y u_t(.,.,s)\right)^2dxdy+\int_\Omega\left[x^3\left(\Im_y\beta_x(.,.,s)\right)^2\right.\\
(3.26)\qquad&\left.+x^2\left(\Im_x(\xi\beta(.,.,s))\right)^2+x\beta^2(.,.,s)\right]dxdy\\
&\le 4c\left\{\int_{Q_s}\left[x^5\left(\Im_y\beta_t(x,y,t)\right)^2+x^3\left(\Im_y\beta_x(x,y,t)\right)^2\right.\right.\\
&\left.\left.+x^2\left(\Im_x(\xi\beta(x,y,t))\right)^2+x\beta^2(x,y,t)\right]dxdydt\right\}
\end{aligned}$$

pour tout $s \in [T - s_0, T]$.

Notons la somme des quatre termes du membre de droite de l'inégalité (3.26) par $\alpha(s)$. D'où il vent

$$\int_{Q_s} \left[x^5 (\Im_y u_{tx})^2 + x^3 (\Im_y u_t)^2 + x^3 u_t^2 + x^4 (\Im_{xy} (\xi u_t))^2\right] dx dy dt$$

$$-\frac{d\alpha(s)}{ds} \leq 4c\alpha(s).$$

Par conséquent,

(3.27) $$-\frac{d}{ds}(\alpha(s)\exp(4cs)) \leq 0.$$

En tenant compte du fait que $\alpha(T) = 0$, l'intégration de (3.27) sur l'intervalle (s,T) donne

(3.28) $$\alpha(s)\exp(4cs) \leq 0.$$

D'où on déduit de (3.28), que $\Psi = 0$ presque partout dans Q_{T-s_0}. En procédant toujours de la même manière, au bout d'un nombre fini de fois, on peut montrer que $\Psi = 0$ presque partout dans Q, car s ne dépend pas de l'origine. Cela achève la démonstration du théorème 3.

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2. On considère une fonction $W = (\Psi, \omega_0) \in R(L)^{\perp}$. Alors cette fonction vérifie l'égalité

(3.29) $$\int_Q \mathcal{L}u \cdot \Psi dx dy dt + \int_\Omega \left[(x + x^3)\ell u \cdot \omega_0 + x^3 \Im_y (d\ell u / dx) \cdot \Im_y (d\omega_0 / dx)\right] dx dy = 0,$$

où $u \in E$ et $W = (\Psi, \omega_0) \in F$, il s'ensuit que $\Psi = 0$ et $\omega_0 = 0$.

Si on pose $u \in D_0(L)$ dans la relation (3.29), on obtient

$$\int_Q \mathcal{L}u \cdot \Psi dx dy dt = 0, \qquad \forall u \in D_0(L).$$

D'où en vertu du théorème 3, on déduit que $\Psi = 0$. Ainsi (3.29) devient

(3.30) $$\int_{\Omega}\left[(x+x^3)\ell u\cdot\omega_0 + x^3\Im_y(d\ell u/dx)\Im_y(d\omega_0/dx)\right]dxdy = 0 \qquad \forall u \in D(L).$$

Puisque l'ensemble des valeurs $R(\ell)$ de l'opérateur de trace ℓ est partout dense dans l'espace de Hilbert de norme

$$\left(\int_{\Omega}\left[(x+x^3)\omega_0^2 + x^3\left(\Im_y(d\omega_0/dx)\right)^2\right]dxdy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où $\omega_0 = 0$. Par conséquent le théorème 2 est démontré.

CHAPITRE V

PROBLEME MIXTE AVEC CONDITIONS INTEGRALES POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS PARABOLIQUES BIDIMENSIONNELLES

PROBLÈME MIXTE AVEC CONDITIONS INTÉGRALES POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS PARABOLIQUES BIDIMENSIONNELLES

1. Formulation du problème

Soit $Q = \Omega \times (0,T)$ un domaine dans IR^3, où $T > 0$ et $\Omega = (0,b_1) \times (0,b_2)$.

On considère l'équation différentielle :

(1.1) $$\mathcal{L}v = v_t - a(t)\Delta v = f(x,t), \qquad (x,t) = (x_1,x_2,t) \in Q,$$

où $b_i, i = 1,2$ sont des constantes connues, et la fonction $a(t)$ vérifie les conditions :

C1. $$c_0 \leq a(t) \leq c_1,\ a'(t) \leq c_2,$$

C2. $$c_3 \leq a'(t),\ a''(t) \leq c_4,$$

pour tout $t \in [0,T]$..

A l'équation (1.1), on associe la condition initiale

(1.2) $$\ell v = v(x,0) = \varphi(x),$$

et les conditions aux limites intégrales,

(1.3) $$\int_0^{b_i} v(x,t)dx_i = 0, \qquad \int_0^{b_i} x_i v(x,t)dx_i = 0, \qquad i = 1, 2.$$

où f, φ sont des fonctions données avec :

$$\int_0^{b_i} \varphi(x)dx_i = 0, \quad \int_0^{b_i} x_i\varphi(x)dx_i = 0, i = 1, 2.$$

Pour $n = 1$, ce problème apparaît dans l'étude de la flexion quasi-statique d'une baguette thermoélastique [7].

Ce présent travail, peut être considéré comme prolongement des travaux [8], [7] et [20] dans la mesure où, d'une part, les conditions envisagées sont encore uniquement de type intégral et, d'autre part, l'équation étudiée est de type parabolique à deux dimensions.

Dans ce chapitre, en suivant la méthode des inégalités de l'énergie, présentée dans [10], on démontre l'existence et l'unicité de la solution. Dans ce but, on établie deux estimations a priori bilatérales et on démontre que l'opérateur $L=(\mathcal{L},\ell)$, engendré par ce problème, réalise un homéomorphisme linéaire entre les deux espaces E et F qui seront convenablement choisis.

2. Estimations a priori

Le problème (1.1)-(1.3) peut être considéré comme la résolution de l'équation opérationnelle

$$Lv=(f,\varphi)$$

où L est un opérateur défini de E dans F, où E est un espace de Banach constitué des fonctions $\Im_{x_1x_2}v\in L_2(Q)$, dont la norme

$$\|v\|_E=\left(\int_{Q_c}\left((\Im_{x_1x_2}v_t)^2+(\Im_{x_1x_2}\Delta v)^2\right)dxdt+\sup_{0\le\tau\le T}\int_\Omega\left((\Im_{x_1}v(.,.,\tau))^2+(\Im_{x_2}v(.,.,\tau))^2\right)dx\right)^{1/2},$$

est finie, et F est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$((\mathcal{L}v,\ell v),(f,\varphi))_F=\int_Q\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}v\cdot\Im_{x_1x_2}f\,dxdt+\int_\Omega(\Im_{x_1}\ell v\cdot\Im_{x_1}\varphi+\Im_{x_2}\ell v\cdot\Im_{x_2}\varphi)dx$$

et de la norme associée :

$$\|(f,\varphi)\|_F=\left(\int_Q(\Im_{x_1x_2}f)^2dxdt+\int_\Omega\left((\Im_{x_1}\varphi)^2+(\Im_{x_2}\varphi)^2\right)dx\right)^{1/2}.$$

Le domaine de définition de l'opérateur L est l'ensemble des fonctions $\Im_{x_1x_2}u\in L^2(Q)$ telles que $\Im_{x_1x_2}u_t,\Im_{x_1x_2}u_{tt},\Im_{x_1x_2}u_{x_1x_1},\Im_{x_1x_2}u_{x_2x_2}\in L^2(Q)$, et vérifiant les conditions (1.3).

Théorème 1. *Si la fonction $a(t)$ satisfait aux conditions* **C1**, alors *pour tout $v \in D(L)$, on a l'estimation,*

(2.1) $$\|Lv\|_F \leq c\|v\|_E$$

où c est une constante positive indépendante de la solution v.

Démonstration. Appliquons l'opérateur $\Im_{x_1x_2}$ à l'équation (1.1), il vient

(2.2) $$\int_{Q_t}(\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}v)^2dxdt \leq 2\int_{Q_t}\left((\Im_{x_1x_2}v_t)^2 + a^2(t)(\Im_{x_1x_2}\Delta v)^2\right)dxdt$$

La condition initiale (1.2) entraîne

(2.3) $$\int_{\Omega}\left((\Im_{x_1}\ell v)^2 + (\Im_{x_2}\ell v)^2\right)dx \leq \sup_{0\leq\tau\leq T}\int_{\Omega}\left((\Im_{x_1}v(.,.,\tau))^2 + (\Im_{x_2}v(.,.,\tau))^2\right)dx.$$

En combinant les inégalités (2.2) et (2.3) et en utilisant les conditions **C1**, l'inégalité (2.1) découle immédiatement, avec $c = \sqrt{2\max(1,c_1^2)}$.

Théorème 2. *Si les conditions du théorème 1 sont satisfaites, on a l'estimation a priori,*

(2.4) $$\|v\|_E \leq c\|Lv\|_F \ ,$$

où c est une constante positive indépendante de la solution v.

Démonstration. Multiplions l'équation (1.1) par l'opérateur $Mv = \Im^2_{x_1x_2}v_t$, où

$$\Im^2_{x_1x_2}h = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi_2}h(\eta_1,\eta_2,t)d\xi_1d\xi_2d\eta_1d\eta_2,$$

et intégrons ensuite sur le sous domaine $Q^\tau = \Omega\times(0,\tau)$, où $0 \leq \tau \leq T$, on obtient

(2.5) $$\int_{Q^\tau}f\cdot\Im^2_{x_1x_2}v_tdxdt = \int_{Q^\tau}v_t\cdot\Im^2_{x_1x_2}v_tdxdt - \int_{Q^\tau}a(t)v_{x_1x_1}\cdot\Im^2_{x_1x_2}v_tdxdt - \int_{Q^\tau}a(t)v_{x_2x_2}\cdot\Im^2_{x_1x_2}v_tdxdt$$

Intégrons par parties chaque terme de (2.5) et tenons compte des conditions (1.2)-(1.3), on obtient

$$(2.6)\qquad \begin{aligned}\int_{Q^\tau} v_t \cdot \Im^2_{x_1x_2} v_t dxdt &= \int_0^\tau\int_0^{b_2} \Im_{x_1} v_t \cdot \Im^2_{x_1x_2} v_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 xt - \int_{Q^\tau} \Im_{x_1} v_t \cdot \Im_{x_1x_2x_2} v_t dxdt \\ &= \int_0^\tau\int_0^{b_2} \Im_{x_1x_2} v_t \cdot \Im_{x_1x_2x_2} v_t \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} \left(\Im_{x_1x_2} v_t\right)^2 dxdt \\ &= \int_{Q^\tau} \left(\Im_{x_1x_2} v_t\right)^2 dxdt,\end{aligned}$$

$$(2.7)\qquad \begin{aligned}-\int_{Q^\tau} a(t) v_{x_1x_1} \Im^2_{x_1x_2} v_t dxdt &= \int_0^\tau\int_0^{b_2} a(t) v_{x_1} \cdot \Im^2_{x_1x_2} v_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q^\tau} a(t) v_{x_1} \cdot \Im_{x_1x_2x_2} v_t dxdt \\ &= \int_0^\tau\int_0^{b_2} a(t) v \cdot \Im_{x_1x_2x_2} v_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q^\tau} a(t) v \cdot \Im^2_{x_2} v_t dxdt \\ &= \int_0^\tau\int_0^{b_1} a(t) \Im_{x_2} v \cdot \Im^2_{x_2} v_t \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} a(t) \Im_{x_2} v \cdot \Im_{x_2} v_t dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega a(\tau)\left(\Im_{x_2} v(x_1,\xi_2,\tau)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega a(0)\left(\Im_{x_2}\varphi(x_1,\xi_2)\right)^2 dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{Q^\tau} a'(t)\left(\Im_{x_2} v\right)^2 dxdt,\end{aligned}$$

$$(2.8)\qquad \begin{aligned}-\int_{Q^\tau} a(t) v_{x_2x_2} \Im^2_{x_1x_2} v_t dxdt &= \frac{1}{2}\int_\Omega a(\tau)\left(\Im_{x_1} v(\xi_1,x_2,\tau)\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega a(0)\left(\Im_{x_1}\varphi(\xi_1,x_2)\right)^2 dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{Q^\tau} a'(t)\left(\Im_{x_2} v\right)^2 dxdt,\end{aligned}$$

$$(2.9)\qquad \begin{aligned}\int_{Q^\tau} f \cdot \Im^2_{x_1x_2} v_t dxdt &= \int_0^\tau\int_0^{b_2} \Im_{x_2} f \cdot \Im^2_{x_1x_2} v_t \Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2 dt - \int_{Q^\tau} \Im_{x_2} f \cdot \Im_{x_1x_2x_2} v_t dxdt \\ &= \int_0^\tau\int_0^{b_2} \Im_{x_1x_2} f \cdot \Im_{x_1x_2x_2} v_t \Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1 dt + \int_{Q^\tau} \Im_{x_1x_2} f \cdot \Im_{x_1x_2} v_t dxdt \\ &= \int_{Q^\tau} \Im_{x_1x_2} f \cdot \Im_{x_1x_2} v_t dxdt.\end{aligned}$$

Substituons les identités (2.6)-(2.9) dans l'égalité (2.5), on a

$$\begin{aligned}
&\int_{Q^\tau}(\Im_{x_1x_2}v_t)^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_{\Omega}a(\tau)\Big((\Im_{x_1}v(\xi_1,x_2,\tau))^2+(\Im_{x_2}v(x_1,\xi_2,\tau))^2\Big)dx\\
&=\int_{Q^\tau}\Im_{x_1x_2}f\cdot\Im_{x_1x_2}v_t\,dxdt+\frac{1}{2}\int_{\Omega}a(0)\Big((\Im_{x_1}\varphi)^2+(\Im_{x_2}\varphi)^2\Big)dx\\
&+\frac{1}{2}\int_{Q^\tau}a'(t)\big(\Im_{x_2}v\big)^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q^\tau}a'(t)\big(\Im_{x_1}v\big)^2\,dxdt.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Utilisons l'inégalité de Cauchy pour majorer le premier terme du membre droit de l'égalité (2.5), il vient,

$$\begin{aligned}
&\int_{Q^\tau}(\Im_{x_1x_2}v_t)^2\,dxdt+\int_{\Omega}a(\tau)\Big((\Im_{x_1}v(\xi_1,x_2,\tau))^2+(\Im_{x_2}v(x_1,\xi_2,\tau))^2\Big)dx\\
&\le\int_{Q}\big(\Im_{x_1x_2}f\big)^2\,dxdt+\int_{\Omega}a(0)\Big((\Im_{x_1}\varphi)^2+(\Im_{x_2}\varphi)^2\Big)dx.\\
&+\int_{Q^\tau}a'(t)\big(\Im_{x_2}v\big)^2\,dxdt+\int_{Q^\tau}a'(t)\big(\Im_{x_1}v\big)^2\,dxdt.
\end{aligned}\tag{2.11}$$

Appliquons l'opérateur $\Im_{x_1x_2}$ à l'équation (1.1) et intégrons sur Q^τ, on obtient

$$\frac{1}{4}\int_{Q^\tau}a^2(t)(\Im_{x_1x_2}\Delta v)^2\,dxdt\le\frac{1}{2}\int_{Q}(\Im_{x_1x_2}f)^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q^\tau}(\Im_{x_1x_2}v_t)^2\,dxdt.\tag{2.12}$$

Additionnons les inégalités (2.11) et (2.12), et utilisons les conditions **C1**, on aura

$$\begin{aligned}
&\int_{Q^\tau}\Big((\Im_{x_1x_2}v_t)^2+(\Im_{x_1x_2}\Delta v)^2\Big)dxdt\\
&+\int_{\Omega}\Big((\Im_{x_1}v(\xi_1,x_2,\tau))^2+(\Im_{x_2}v(x_1,\xi_2,\tau))^2\Big)dx\\
&\le k\Bigg\{\int_{Q}\big(\Im_{x_1x_2}f\big)^2\,dxdt+\int_{\Omega}\Big((\Im_{x_1}\varphi)^2+(\Im_{x_2}\varphi)^2\Big)dx\\
&+\int_{Q^\tau}\big(\Im_{x_2}v\big)^2\,dxdt+\int_{Q^\tau}\big(\Im_{x_1}v\big)^2\,dxdt\Bigg\},
\end{aligned}\tag{2.13}$$

où
$$k=\frac{\max\big(6,4c_1,4c_2\big)}{\min\big(1,c_0^2,4c_0\big)}.$$

En appliquant le lemme 1 du chapitre 1, on obtient

$$(2.14)\qquad \begin{aligned}&\int_{Q^{\tau}}\left((\Im_{x_1x_2}v_t)^2+(\Im_{x_1x_2}\Delta v)^2\right)dxdt+\int_{\Omega}\left((\Im_{x_1}v(\xi_1,x_2,\tau))^2+(\Im_{x_2}v(x_1,\xi_2,\tau))^2\right)dx\\ &\le M\left\{\int_{Q}(\Im_{x_1x_2}f)^2dxdt+\int_{\Omega}\left((\Im_{x_1}\varphi)^2+(\Im_{x_2}\varphi)^2\right)dx.\right.\end{aligned}$$

où $M = ke^{kT}$.

Comme le membre droit de l'inégalité (2.14) est indépendant de τ, il s'ensuit, en passant dans le membre gauche au supremum par rapport à τ de 0 à T, on obtient l'inégalité (2.4) avec $c = \sqrt{M} = \sqrt{k}e^{\frac{k}{2}}$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

3. Existence et unicité de la solution

Nous pouvons maintenant énoncer un résultat d'existence :

Théorème 3. *Supposons que les conditions* **C1** et **C2** *sont satisfaites. Alors pour tout* $(f,\varphi)\in F$, *le problème (1.1)-(1.3) admet une solution unique* $v = L^{-1}(f,\varphi)$, *vérifiant les estimations (2.1) et (2.4).*

Démonstration. De l'inégalité (2.1) on déduit que l'opérateur L de E dans F est continu, et de l'inégalité (2.4) il s'ensuit qu'il admet un inverse L^{-1} continu, et que l'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'opérateur L est fermé; i.e., L réalise un homéomorphisme linéaire de l'espace E sur l'ensemble fermé $R(L)\subset F$. Pour montrer que le probème (1.1)-(1.3) admet une solution unique, il suffit de monter la densité de l'ensemble $R(L)$ dans F. Pour cela montrons le résultat suivant:

Proposition. *Si les conditions du théorème 3 sont satisfaites et si pour* $\Im_{x_1x_2}\Psi\in L^2(Q)$, *on a*

$$(3.1)\qquad \int_{Q}\Im_{x_1x_2}\mathcal{L}v\cdot\Im_{x_1x_2}\Psi\,dxdt=0,$$

pour tout $v\in D_0(L)=\{v/v\in D(L),\ \ell v=0\}$, *alors* $\Psi=0$ *presque partout dans* Q.

Démonstration. La relation (3.1) est donnée pour tout $v \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous la forme particulière suivante :

(3.2) $$v = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le s \\ \int_s^t v_\tau d\tau & s \le t \le T \end{cases}$$

et telle que v_t est solution de l'équation

(3.3) $$a(t)\Im_{x_1x_2} v_t = \int_t^T \Im_{x_1x_2} \Psi(\xi_1,\xi_2,\tau)d\tau,$$

Des relations (3.2)-(3.3), on conclut que $v \in D_0(L) \subseteq D_s(L)$, où

$D_s(L) = \{ \mathbf{\upsilon} / \mathbf{\upsilon} \in D(L), \mathbf{\upsilon} = 0 \text{ pour } t \le s \}$,

et que

(3.4) $$\Im_{x_1x_2} \Psi(\xi_1,\xi_2,t) = -\big(a(t)\Im_{x_1x_2} v_t\big)_t.$$

Pour continuer la démonstration de la proposition on a besoin du résultat suivant:

Lemme. *La fonction $\Im_{x_1x_2}\Psi(\xi_1,\xi_2,t)$ définie par la relation (3.4) appartient à l'espace $L^2(Q)$.*

Démonstration. En vertu de l'inégalité (3.5) du chapitre 1 et des conditions **C1**, il vient que $-a_t(t)\Im_{x_1x_2} v_t \in L^2(Q)$. Pour démontrer que $-a(t)\Im_{x_1x_2} v_{tt}$ est dans l'espace $L^2(Q)$, on applique à l'équation (3.3) les opérateurs de régularisation introduits dans [32] (Lemme 9.1), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \int_t^T \Im_{x_1x_2}\Psi(\xi_1,\xi_2,\tau)d\tau - a_t(t)\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t - a(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\big(a(t)\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t - \rho_\varepsilon a(t)\Im_{x_1x_2} v_t\big).$$

D'où on a

$$\left\| a(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t \right\|^2_{L^2(Q_s)} \leq 3\left\| a_t(t)\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t \right\|^2_{L^2(Q_s)} + 3\left\| \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \int_t^T \Im_{x_1x_2} \Psi d\tau \right\|^2_{L^2(Q_s)}$$
$$+ 3\left\| \frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t - \rho_\varepsilon a(t)\Im_{x_1x_2} v_t \right) \right\|^2_{L^2(Q_s)}.$$

En utilisant les conditions **C1** et **C2** ainsi que les propriétés des opérateurs de régularisation utilisés, il vient

$$\left\| a(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t \right\|^2_{L^2(Q_s)} \leq c\left(\left\| v_t \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\| \Im_{x_1x_2} \Psi \right\|^2_{L^2(Q_s)} \right).$$

Et par conséquent $a(t)\dfrac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \Im_{x_1x_2} v_t$ est dans $L^2(Q)$.

Pour continuer la démonstration de la proposition en substituant $\Im_{x_1x_2}\Psi$, donnée par (3.4), dans l'équation (3.1), on obtient

(3.5)
$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1x_2} v_t \cdot \left(a(t)\Im_{x_1x_2} v_t \right)_t dxdt + \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_1x_2} v_{x_1x_1} \cdot \left(a(t)\Im_{x_1x_2} v_t \right)_t dxdt \\
&+ \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_1x_2} v_{x_2x_2} \cdot \left(a(t)\Im_{x_1x_2} v_t \right)_t dxdt = 0.
\end{aligned}$$

Intégrons par parties chaque terme du membre gauche de l'identité (3.5), en tenant compte des conditions (1.5) et de la forme particulière de v donnée par les relations (3.2) et (3.3), il vient

(3.6)
$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_s} \Im_{x_1x_2} v_t \cdot \left(a(t)\Im_{x_1x_2} v_t \right)_t dxdt = \int_{\Omega} a(t)\left(\Im_{x_1x_2} v_t \right)^2 \Big|_{t=s}^{t=T} dx + \int_{Q^s} a(t)\Im_{x_1x_2} v_t \cdot \Im_{x_1x_2} v_{tt} dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega} a(s)\left(\Im_{x_1x_2} v_t(\xi_1,\xi_2,s) \right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_{Q^s} a'(t)\left(\Im_{x_1x_2} v_t \right)^2 dxdt,
\end{aligned}$$

$$\int_{Q_s} a(t)\Im_{x_1x_2} v_{x_1x_1}\left(a(t)\Im_{x_1x_2} v_t\right)_t dxdt = \int_s^T\int_0^{b_2} a(t)\Im_{x_1x_2} v_{x_1x_1}\cdot\left(a(t)\Im_{x_1x_1x_2} v_t\right)_t\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt$$

$$-\int_{Q_s} a(t)\Im_{x_2} v_{x_1x_1}\cdot\left(a(t)\Im_{x_1x_1x_2} v_t\right)_t dxdt$$

$$= -\int_s^T\int_0^{b_1} a(t)\Im_{x_2} v_{x_1x_1}\cdot\left(a(t)\Im^2_{x_1x_2} v_t\right)_t\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt + \int_{Q_s} a(t)v_{x_1x_1}\left(a(t)\Im^2_{x_1x_2} v_t\right)_t\cdot dxdt$$

$$= \int_s^T\int_0^{b_2} a(t)v_{x_1}\cdot\left(a(t)\Im^2_{x_1x_2} v_t\right)_t\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt - \int_{Q_s} a(t)v_{x_1}\cdot\left(a(t)\Im_{x_1x_2x_2} v_t\right)_t dxdt$$

$$= -\int_s^T\int_0^{b_2} a(t)v\cdot\left(a(t)\Im_{x_1x_2x_2} v_t\right)_t\Big|_{x_1=0}^{x_1=b_1} dx_2dt + \int_{Q_s} a(t)v\cdot\left(a(t)\Im^2_{x_2} v_t\right)_t dxdt$$

$$= \int_s^T\int_0^{b_1} a(t)\Im_{x_2} v\cdot\left(a(t)\Im^2_{x_2} v_t\right)_t\Big|_{x_2=0}^{x_2=b_2} dx_1dt - \int_{Q_s} a(t)\Im_{x_2} v\cdot\left(a(t)\Im_{x_2} v_t\right)_t dxdt$$

$$= -\int_0^{b_1}\int_0^{b_2} a^2(t)\Im_{x_2} v\cdot\Im_{x_2} v_t\Big|_{t=s}^{t=T} dx + \int_{Q_s} a^2(t)\left(\Im_{x_2} v_t\right)^2 dxdt$$

$$+\int_{Q^s} a(t)a'(t)\Im_{x_2} v\cdot\Im_{x_2} v_t dxdt$$

$$= \int_{Q_s} a^2(t)\left(\Im_{x_2} v_t\right)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega a(t)a'(t)\left(\Im_{x_2} v\right)^2\Big|_{t=s}^{t=T} dx$$

$$\text{(3.7)}\qquad -\frac{1}{2}\int_{Q^s}\left(a(t)a''(t)+a'^2(t)\right)\left(\Im_{x_2} v\right)^2 dxdt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{Q^s}\left(a(t)a''(t)+a'^2(t)\right)\left(\Im_{x_2} v\right)^2 dxdt + \int_{Q^s} a^2(t)\left(\Im_{x_2} v_t\right)^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega a(T)a'(T)\left(\Im_{x_2} v(x_1,\xi_2,T)\right)^2 dx.$$

On trouve ainsi,

$$\int_{Q_s} a(t)\Im_{x_1x_2} v_{x_2x_2}\left(a(t)\Im_{x_1x_2} v_t\right)_t dxdt = -\frac{1}{2}\int_{Q^s}\left(a(t)a''(t)+a'^2(t)\right)\left(\Im_{x_1} v\right)^2 dxdt$$

$$\text{(3.8)}\qquad +\frac{1}{2}\int_\Omega a(T)a'(T)\left(\Im_{x_1} v(\xi_1,x_2,T)\right)^2 dx + \int_{Q^s} a^2(t)\left(\Im_{x_1} v_t\right)^2 dxdt.$$

Additionnons les relations (3.6)-(3.8) et tenons compte de l'identité (3.5) et des conditions **C1** et **C2**, on obtient

(3.9)
$$\begin{aligned}
&\frac{c_0}{2}\int_{\Omega}\left(\Im_{x_1x_2}v_t(\xi_1,\xi_2,s)\right)^2dx + c_0^2\int_{Q^s}\left(\Im_{x_2}v_t\right)^2dxdt + c_0^2\int_{Q^s}\left(\Im_{x_1}v_t\right)^2dxdt\\
&+\frac{c_0c_3}{2}\int_{\Omega}\left(\Im_{x_2}v(x_1,\xi_2,T)\right)^2dx + \frac{c_0c_3}{2}\int_{\Omega}\left(\Im_{x_1}v(\xi_1,x_2,T)\right)^2dx\\
&\le \frac{c_2}{2}\int_{Q^s}\left(\Im_{x_1x_2}v_t\right)^2dxdt + \frac{(c_1c_4+c_2^2)}{2}\int_{Q^s}\left(\Im_{x_1}v\right)^2dxdt\\
&\qquad + \frac{(c_1c_4+c_2^2)}{2}\int_{Q^s}\left(\Im_{x_2}v\right)^2dxdt.
\end{aligned}$$

Par conséquent

(3.10)
$$\begin{aligned}
&\left\|\Im_{x_1x_2}v_t(\xi_1,\xi_2,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1}v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_2}v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}\\
&\qquad + \left\|\Im_{x_2}v(x_1,\xi_2,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1}v(\xi_1,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le k\left\{\left\|\Im_{x_1x_2}v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_1}v\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_2}v\right\|^2_{L^2(Q_s)}\right\}
\end{aligned}$$

où

$$k = \frac{\max\left(c_2, c_1c_4+c_2^2\right)}{\min\left(c_0, c_0^2, c_0c_3\right)}.$$

Introduisons maintenant la fonction β définie par

$$\beta(x_1,x_2,t) = \int_t^T \boldsymbol{v}_\eta d\eta.$$

De cette dernière relation et de (3.2) on déduit que

(3.11)
$$v(x_1,x_2,t) = \beta(x_1,x_2,s) - \beta(x_1,x_2,t).$$

Les relations (3.10) et (3.11) donnent

(3.12)
$$\begin{aligned}
&\left\|\Im_{x_1x_2}v_t(\xi_1,\xi_2,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_1}v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_2}v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}\\
&+(1-2k(T-s))\left[\left\|\Im_{x_1}\beta(\xi_1,x_2,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\Im_{x_2}\beta(x_1,\xi_2,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\\
&\le 2k\left[\left\|\Im_{x_1x_2}v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_1}\beta(\xi_1,x_2,t)\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|\Im_{x_2}\beta(x_1,\xi_2,t)\right\|^2_{L^2(Q_s)}\right].
\end{aligned}$$

Si $s_0 > 0$ satisfait $2k(T-s_0) = \dfrac{1}{2}$, alors l'inégalité (3.12) entraîne que

(3.13)
$$\begin{aligned}&\left\|\Im_{x_1x_2} v_t(\xi_1,\xi_2,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_1} v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\left\|\Im_{x_2} v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}\\&+\left\|\Im_{x_1}\beta(\xi_1,x_2,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\Im_{x_2}\beta(x_1,\xi_2,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\&\leq 4k\left[\left\|\Im_{x_1x_2} v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\left\|\Im_{x_1}\beta(\xi_1,x_2,t)\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\left\|\Im_{x_2}\beta(x_1,\xi_2,t)\right\|^2_{L^2(Q_s)}\right],\end{aligned}$$

pour tout $T-s_0\leq s\leq T$.

Si l'on pose maintenant

$$\alpha(s)=\left\|\Im_{x_1x_2} v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\left\|\Im_{x_1}\beta(\xi_1,x_2,t)\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\left\|\Im_{x_2}\beta(x_1,\xi_2,t)\right\|^2_{L^2(Q_s)}.$$

On déduit de l'inégalité (3.13) que

$$\left\|\Im_{x_1} v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\left\|\Im_{x_2} v_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}-\alpha'(s)=4k\alpha(s).$$

D'où on a

$$-\alpha'(s)\leq 4k\alpha(s).$$

Et par conséquent

(3.14)
$$-\frac{d}{ds}\left(\alpha(s)e^{4ks}\right)\leq 0.$$

Puisque $\alpha(T)=0$, alors une intégration de l'inégalité (3.14) sur l'intervalle (s,T), donne

(3.15)
$$\alpha(s)e^{4ks}\leq 0.$$

D'où il s'ensuit de (3.15) que $\Psi=0$ presque partout dans Q_{T-s_0}. La longueur s étant indépendante du choix de l'origine, en procédant avec le même raisonnement, au bout d'un nombre fini de fois on montre que $\Psi=0$ presque partout dans Q. Par conséquent, la démonstration de la proposition est complète.

Revenons à la démonstration du théorème 3. On doit montrer la validité de l'égalité $R(L)=F$. Comme F est un espace de Hilbert, l'égalité $R(L)=F$ est vraie, si de l'égalité:

(3.16) $$(Lv,W)_F = \int_Q \Im_{x_1x_2} \mathcal{L}v \cdot \Im_{x_1x_2} \Psi dxdt + \int_\Omega \left(\Im_{x_1} \ell v \cdot \Im_{x_1} \omega_0 + \Im_{x_2} \ell v \cdot \Im_{x_2} \omega_0\right) dx = 0,$$

il s'ensuit que $\Psi = 0$, $\omega_0 = 0$, où $W = (\Psi, \omega_0) \in R(L)^{\perp}$.

Si on considère un élément quelconque de $D_0(L)$, la relation (3.16) entraîne

$$\int_Q \Im_{x_1x_2} \mathcal{L}v \cdot \Im_{x_1x_2} \Psi \, dxdt = 0.$$

D'où, en vertu de la proposition, on déduit que $\Psi = 0$. Et par conséquent à partir de la relation (3.16) on obtient

$$\int_\Omega \left(\Im_{x_1} \ell v \cdot \Im_{x_1} \omega_0 + \Im_{x_2} \ell v \cdot \Im_{x_2} \omega_0\right) dx = 0,$$

Puisque l'ensemble des valeurs de l'opérateur ℓ est partout dense dans l'espace de Hilbert de norme $\sqrt{\int_\Omega ((\Im_{x_1}\omega_0)^2 + (\Im_{x_2}\omega_0)^2) dx}$, on a $\omega_0 = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.

CHAPITRE VI

SOLUTION FORTE D'UN PROBLEME MIXTE AVEC UNE CONDITION NON LOCALE A POIDS POUR UNE EQUATION PARABOLIQUE BIDIMENSIONNELLE

SOLUTION FORTE D'UN PROBLEME MIXTE AVEC UNE CONDITION NON LOCALE A POIDS POUR UNE EQUATION PARABOLIQUE BIDIMENSIONNELLE

1. Introduction

Dans le domaine $Q = (0,a) \times (0,b) \times (0,T)$ où $a < \infty$, $b < \infty$ et $T < \infty$, on considère l'équation différentielle

(1.1) $$\mathcal{L}u = u_t - p(t)\left(\frac{1}{x}(xu_x)_x - \frac{1}{x^2}u_{yy}\right) = f(x,y,t),$$

où la fonction $p(t)$ vérifie les conditions:

C1. $c_0 \leq p(t) \leq c_1$, $p'(t) \leq c_2$, pour tout $t \in [0,T]$.

C2. $c_3 \leq p''(t) \leq c_4$, pour tout $t \in [0,T]$,

et les constantes c_i, $i = 0,1,2,3,4$ sont toutes positives.

A l'équation (1.1) on associe la condition initiale

(1.2) $$\ell u = u(x,y,0) = \varphi(x,y),$$

les conditions de Dirichlet

(1.3) $$u\big|_{x=a} = 0, \quad u\big|_{y=0} = 0, \quad u\big|_{y=b} = 0,$$

et la condition intégrale

(1.4) $$\int_0^a xu\,dx = 0,$$

où $p(t), \varphi(x,y)$ et $f(x,y,t)$ sont des fonctions données.

On se basant sur une estimation à priori et sur la densité de l'ensemble des valeurs de l'opérateur engendré par le problème considéré, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (1.1)-(1.4).

On suppose que la fonction φ, vérifie les conditions de compatibilité de la forme (1.3)-(1.4), c'est-à-dire

$$\varphi(a,y)=0, \quad \varphi(x,0)=0, , \quad \varphi(x,b)=0,$$

et

$$\int_0^a x\varphi(x,y)dx=0.$$

2.Espaces fonctionnels associés.

Pour l'étude du problème (1.1)-(1.4), on introduit les espaces fonctionnels suivants : Soit $L^2(Q)$ l'espace de Hilbert, constitué des (classes de) fonctions définies et de carré intégrables dans Q, muni du produit scalaire défini par

$$(u,v)_{L^2(Q)}=\int_Q uvdxdydt.$$

La norme associée est :

$$\|u\|_{L^2(Q)}=\left(\int_Q u^2dxdydt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On désigne par $L^2_\rho(Q)$ et $L^2_\sigma(Q)$, les espaces de Hilbert des fonctions de carré intégrables avec poids, dont les normes associées sont respectivement :

$$\|u\|_{L^2_\rho(Q)}=\left(\int_Q xu^2dxdydt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|u\|_{L^2_\sigma(Q)}=\left(\int_Q x^3u^2dxdydt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les produits scalaires dans ces deux espaces sont définis respectivement par

$$(u,v)_{L^2_\rho(Q)}=(xu,v)_{L^2(Q)},$$

$$(u,v)_{L^2_\sigma(Q)} = (x^3 u, v)_{L^2(Q)}.$$

Et soit $H^{1,0}_\rho(Q)$ l'espace de Hilbert constitué des éléments u de l'espace $L^2_\rho(Q)$ ayant des dérivées généralisées du premier ordre sommables dans Q. Cet espace est muni du produit scalaire défini par

$$(u,v)_{H^{1,0}_\rho(Q)} = (u,v)_{L^2_\rho(Q)} + (u_x, v_x)_{L^2_\rho(Q)} + (u_y, v_y)_{L^2_\rho(Q)}$$

et de la norme associée :

$$\|u\|^2_{H^{1,0}_\rho(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_y\|^2_{L^2_\rho(Q)}.$$

On utilise aussi les espaces avec poids sur le domaine $\Omega = (0,a)\times(0,b)$ tels que $L^2_\rho(\Omega), L^2_\sigma(\Omega)$, et $H^1_\rho(\Omega)$, dont les définitions sont analogues à celles des espaces sur Q. Par exemple, $H^1_\rho(\Omega)$ est le sous espace avec poids de $L^2_\rho(\Omega)$ dont la norme

$$\|u\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|u_x\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|u_y\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}$$

est finie.

On peut écrire le problème (1.1)-(1.4), sous la forme opérationnelle suivante

$$Lu = \mathcal{F},$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, $\mathcal{F} = (f, \varphi)$. L'opérateur L est considéré de l'espace E dans l'espace F, où E est l'espace de Banach de toute les fonctions $u \in L^2_\sigma(Q)$ vérifiant les conditions (1.3) et (1.4) et ayant la norme finie

$$\|u\|^2_E = \|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q)} + \sup_{0\le\tau\le T}\left\{ \|u(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \|u_x(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \|u_y(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \right\},$$

et F l'espace de Hilbert $L^2(Q)\times H^1_\rho(\Omega)$ ayant la norme

$$\|\mathcal{F}\|^2_F = \|f\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{H^1_\rho(\Omega)},$$

et le produit scalaire défini par

$$(\mathcal{F},\mathrm{W})_F=(f,\Psi)_{L^2(Q)}+(\varphi,\omega_0)_{H^1_\rho(\Omega)},$$

où $\mathcal{F}=(f,\varphi)$ et $\mathrm{W}=(\Psi,\omega_0)$.

Le domaine de définition $D(L)$ de l'opérateur L est l'ensemble de toutes les fonctions $u\in L^2_\sigma(Q)$ pour lesquelles $u_t,u_x,u_y,u_{tx},u_{ty},u_{xx},u_{yy}\in L^2_\sigma(Q)$ et vérifiant les conditions (1.3) et (1.4).

3. L'inégalité énergétique.

Théorème 1. *Supposons que la fonction $\alpha(t)$ vérifie les conditions* **C1**, *alors pour toute fonction $u\in D(L)$, il existe une constante positive c indépendante de la solution u telle que*

(3.1) $$\|u\|_E\le c\|Lu\|_F.$$

Démonstration. Multiplions scalairement l'équation (1.1) par l'opérateur intégro-différentiel

$$Mu=-x^3\Im_x(\xi u)-2x^2p(t)u_x+x^3u_t,$$

où $\Im_x u=\int_0^x u(\xi,y,t)d\xi$, et intégrons ensuite sur le sous domaine $Q^\tau=\Omega\times(0,T)$, où $0\le\tau\le T$, on obtient

(3.2)
$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u,Mu)_{L^2(Q^\tau)}&=\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}-2(x^2p(t)u_t,u_x)_{L^2(Q^\tau)}-(u_t,\Im_x(\xi u))_{L^2_\sigma(Q^\tau)}\\&-(x^2p(t)u_t,(xu_x)_x)_{L^2(Q^\tau)}+2(p^2(t)xu_t,(xu_x)_x)_{L^2(Q^\tau)}\\&+(x^2p(t)\Im_x(\xi u),(xu_x)_x)_{L^2(Q^\tau)}+(p(t)u_{yy},\Im_x(\xi u))_{L^2_\rho(Q^\tau)}\\&-(p(t)u_{yy},u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)}+2(p^2(t)u_x,u_{yy})_{L^2(Q^\tau)}.\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (1.2)-(1.4), et en intégrant par parties chaque terme du membre de droite de la relation (3.2), il en résulte

(3.3)
$$-(x^2p(t)u_t,(xu_x)_x)_{L^2(Q^\tau)} = -\int_0^\tau\int_0^b x^3p(t)u_tu_x\Big|_{x=0}^{x=a}dydt + (p(t)u_x,u_{tx})_{L^2_\sigma(Q^\tau)}$$
$$+2(x^2p(t)u_x,u_t)_{L^2(Q^\tau)}$$
$$=\frac{1}{2}\|p(\tau)u_x(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} - \frac{1}{2}\|p(0)\varphi_x\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)}$$
$$-\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p'(t)}\cdot u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + 2(p(t)x^2u_t,u_x)_{L^2(Q^\tau)},$$

(3.4)
$$2(p^2(t)xu_x,(xu_x)_x)_{L^2(Q^\tau)} = \int_0^\tau\int_0^b p^2(t)x^2u_x^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt$$
$$=a^2\|p(t)\cdot u_x(a,y,t)\|^2_{L^2((0,\tau)\times(0,b))},$$

(3.5)
$$(x^2p(t)\Im_x(\xi u),(xu_x)_x)_{L^2(Q^\tau)} = \int_0^\tau\int_0^b p(t)x^3u_x\cdot\Im_x(\xi u)\Big|_{x=0}^{x=a}dydt$$
$$-(p(t)x^4u,u_x)_{L^2(Q^\tau)} - 2(x^2p(t)\Im_x(\xi u),u_x)_{L^2(Q^\tau)}$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^b p(t)x^4u^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt + 2\left\|\sqrt{p(t)}\cdot u\right\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + 4(p(t)u,\Im_x(\xi u))_{L^2_\rho(Q^\tau)}$$
$$-2\int_0^\tau\int_0^b p(t)x^2u\cdot\Im_x(\xi u)\Big|_{x=0}^{x=a}dydt + 2\left\|\sqrt{p(t)}\cdot u\right\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}$$
$$=4\left\|\sqrt{p(t)}\cdot u\right\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}.$$

(3.6)
$$-(p(t)u_t,u_{yy})_{L^2_\rho(Q^\tau)} = (p(t)u_{ty},u_y)_{L^2_\rho(Q^\tau)}$$
$$-\int_0^\tau\int_0^a p(t)xu_yu_t\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt$$
$$=\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(\tau)}\cdot u_y(.,.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(0)}\cdot\varphi_y\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}$$
$$-\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p'(t)}\cdot u_y\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},$$

(3.7)
$$2(p^2(t)u_x,u_{yy})_{L^2(Q^\tau)}=-2(p^2(t)u_y,u_{xy})_{L^2(Q^\tau)}+2\int_0^\tau\int_0^a p^2(t)u_yu_x\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt$$
$$=\left\|p(t)u_y(0,y,t)\right\|^2_{L^2((0,b)\times(0,\tau))},$$

(3.8)
$$(p(t)u_{yy},\Im_x(\xi u))_{L^2_\rho(Q^\tau)}=-(p(t)u_y,\Im_x(\xi u_y))_{L^2_\rho(Q^\tau)}$$
$$+\int_0^\tau\int_0^a p(t)xu_y\Im_x(\xi u)\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^b p(t)\cdot(\Im_x(\xi u_y))^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt=0.$$

En substituant les égalités (3.3)-(3.8) dans (3.2), on obtient

(3.9)
$$\begin{aligned}&\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}+4\left\|\sqrt{p(t)}\cdot u\right\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(\tau)}\cdot u_x(.,.,\tau)\right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)}\\&+a^2\|p(t)u_x(a,y,t)\|^2_{L^2((0,b)\times(0,\tau))}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(\tau)}\cdot u_y(.,.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\\&+\left\|p(t)u_y(0,y,t)\right\|^2_{L^2((0,b)\times(0,\tau))}\\&=\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p'(t)}\cdot u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p'(t)}\cdot u_y\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}\\&+(u_t,\Im_x(\xi u))_{L^2_\sigma(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(0)}\cdot\varphi_x\right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)}\\&+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(0)}\cdot\varphi_y\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+(u_t,\mathcal{L}u)_{L^2_\sigma(Q^\tau)}\\&-2(p(t)x^2u_x,\mathcal{L}u)_{L^2(Q^\tau)}-(\Im_x(\xi u),\mathcal{L}u)_{L^2_\sigma(Q^\tau)}.\end{aligned}$$

On estime maintenant le troisième et les trois derniers termes du membre de droite de l'identité (3.9), à l'aide de l'inégalité de Cauchy avec ε et une inégalité de type Poincaré [73], On a

(3.10)
$$(u_t,\Im_x(\xi u))_{L^2_\sigma(Q^\tau)}\le\frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}+\frac{a^{\frac{7}{2}}}{2}\int_{Q^\tau}\frac{(\Im_x(\xi u))^2}{\sqrt{x}}dxdydt$$
$$\le16a^4\|u\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}+\frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)},$$

(3.11)
$$(u_t, \mathcal{L}u)_{L^2_\sigma(Q^\tau)} \le \frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + a^3\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(Q^\tau)},$$

(3.12)
$$-2(p(t)x^2u_x, \mathcal{L}u)_{L^2(Q^\tau)} \le \left\|\sqrt{p(t)}\,u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + a\left\|\sqrt{p(t)}\,\mathcal{L}u\right\|^2_{L^2(Q^\tau)},$$

(3.13)
$$\begin{aligned}-(\mathcal{L}u, \Im_x(\xi u))_{L^2_\sigma(Q^\tau)} &\le \frac{5}{8}a^{\frac{7}{2}}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \frac{2}{5}\int_{Q^\tau}\frac{(\Im_x(\xi u))^2}{\sqrt{x}}dxdydt \\ &\le \frac{5}{8}a^{\frac{13}{2}}\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \frac{32}{5}a^{\frac{1}{2}}\|u\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}.\end{aligned}$$

Si on minore le membre gauche de (3.9), alors à partir des inégalités (3.10)-(3.13) ainsi que des conditions **C1** découle l'inégalité

(3.14)
$$\begin{aligned}&\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + c_0\|u_x(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + c_0\|u_y(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\rho\Omega)} \\ &\le c_1\|\varphi_x\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + c_1\|\varphi_y\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + (20a^{\frac{7}{2}} + 8)\|u\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} \\ &+ (2a^3 + 2ac_1 + \frac{5}{4}a^{\frac{13}{2}})\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\ &+ (2c_1 + c_2)\|u_x\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + c_2\|u_y\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}.\end{aligned}$$

Soit l'inégalité élémentaire

(3 .15)
$$\frac{1}{4}\|u(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \le \frac{1}{4}\|u\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \frac{1}{4}\|\varphi\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \frac{1}{4}\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)}.$$

La combinaison des deux inégalités (3.14) et (3.15) donne

(3.16)
$$\begin{aligned}&\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|u_x(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \|u_y(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|u(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \\ &\le k\left(\|u\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|u_x\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \|\varphi\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \|u_y\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}\right),\end{aligned}$$

où

$$k = \frac{\max\left(\frac{c_1 a^2}{2}, c_1 + \frac{c_2}{2}, \frac{a^4}{4}, 16a^4 + \frac{32}{5}a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}, a^3 + ac_1 + \frac{5}{8}a^{\frac{13}{2}}\right)}{\min\left(\frac{c_0}{2}, \frac{1}{4}\right)}.$$

Appliquons maintenant le lemme 1 du chapitre 1 à l'inégalité (3.16), il vient

$$\begin{aligned}&\|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q^\tau)} + \|u_x(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \|u_y(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|u(.,.,\tau)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \\ &\leq ke^{kT}\left(\|\mathcal{L}u\|^2_{L^2(Q^\tau)} + \|\varphi\|^2_{H^1_\rho(\Omega)}\right)\end{aligned}$$

Le membre de droite de cette dernière inégalité est indépendant de τ, passons alors au supremum par rapport à τ de 0 à T, on obtient l'inégalité (3.1), avec $c = \sqrt{ke^{kT}}$.

Proposition. *L'opérateur L considéré de E dans F est fermable.*

Désignons par $\overline{L}$ la fermeture de l'opérateur L, et par $D(\overline{L})$ son domaine de définition.

Définition. On appelle solution de l'équation

$$\overline{L}u = (f,\varphi), \qquad u \in D(\overline{L})$$

solution forte du problème (1.1)-(1.4).

Puisque l'opérateur L est fermable, on peut alors prolonger l'estimation (3.1) à sa fermeture $\overline{L}$ pour obtenir

$$\|u\|_E \leq c\left\|\overline{L}u\right\|_F, \qquad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{3.17}$$

De l'inégalité (3.17), on en déduit :

Corollaire 1. *La solution forte du problème* (1.1)-(1.4) *si elle existe, elle est unique et dépend continûment des éléments* $(f,\varphi) \in F$.

Corollaire 2. *L'ensemble des valeurs* $R(\overline{L})$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est égal à la fermeture* $\overline{R(L)}$ de $R(L)$.

Pour assurer l'existence de la solution forte du problème (1.1)-(1.4), on doit démontrer que l'ensemble $R(L)$ est dense dans l'espace F.

4. Existence de la solution forte.

Théorème 2. *Si les conditions* **C1** *et* **C2** *sont satisfaites, alors pour chaque élément $f \in L^2(Q)$ et $\varphi \in H^1_\rho(\Omega)$ il existe une solution forte unique $u = \overline{L}^{-1}(f,\varphi)$ du problème (1.1)-(1.4), vérifiant l'inégalité*

$$\|u\|_E \leq c\left(\|f\|^2_{L^2(Q)} + \|\varphi\|^2_{H^1_\rho(\Omega)}\right)$$

où c est une constante positive indépendante de la solution u.

Démonstration. On déduit de l'estimation (3.17) que la fermeture de l'opérateur L admet un inverse continu $\overline{L}^{-1}$. Et puisque l'ensemble $R(\overline{L})$ est fermé, il suffit donc de démontrer que l'ensemble des valeurs $R(L)$ de l'opérateur L est dense dans l'espace F. Pour cela, on démontre d'abord la proposition suivante :

Proposition 2. *Si les conditions du théorème 2 sont vérifiées, si pour une fonction $\Psi \in L^2(Q)$, on a*

(4.1) $$(\mathcal{L}u, \Psi)_{L^2(Q)} = 0,$$

pour tout $u \in D(L)$ tels que $\ell u = 0$. Alors $\Psi = 0$ presque partout dans Q.

Démonstration. Du fait que l'égalité (4.1) est donnée pour toute fonction $u \in D_0(L)$, on peut alors l'exprimer sous une forme particulière.

Soit la fonction u donnée par

(4.2) $$u(x,y,t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq s, \\ \int_s^t u_\tau d\tau & s \leq t \leq T. \end{cases}$$

Et soit u_t solution de l'équation

$$x^5 p(t) u_t = g(x,y,t), \tag{4.3}$$

où

$$g(x,y,t) = \int_t^T \left(\Psi + x^6 \Im_x(\xi u_t) - 10x^3 p^2(t) u_t + 20x^2 p^3(t) u_x\right) d\tau. \tag{4.4}$$

Les relations (4.3) et (4.4) donnent

$$\Psi = (-x^5 p'(t) + 10x^3 p^2(t)) u_t - x^6 \Im_x(\xi u_t) - 20x^2 p^3(t) u_x - x^5 p(t)\ u_{tt}. \tag{4.5}$$

Lemme. *La fonction* Ψ *définie par la relation* (4.5) *appartient à l'espace* $L^2(Q)$.

Démonstration du lemme. En utilisant les conditions **C1**, **C2** et une inégalité analogue à l'inégalité (3.5) du chapitre I, on peut facilement démontrer que les termes $(-x^5 p'(t) + 10x^3 p^2(t)) u_t$, $-x^6 \Im_x(\xi u_t)$ et $-20x^2 p^3(t) u_x$ appartiennent à $L^2(Q)$. Pour démontrer que $-x^5 p(t) u_{tt} \in L^2(Q)$, on utilise les opérateurs de régularisation introduits dans [32] (lemme 9.1).

Appliquant donc les opérateurs ρ_ε et $\dfrac{\partial}{\partial t}$ à l'équation (4.3), on aura

$$p'(t) \cdot \rho_\varepsilon x^5 u_t + p(t) \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon x^5 u_t = \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon g$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left[p(t) \rho_\varepsilon x^5 u_t - \rho_\varepsilon p(t) x^5 u_t \right]$$

En utilisant les conditions **C1** et **C2**, il s'ensuit de cette dernière équation que

$$\left\| p(t) \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon x^5 u_t \right\|^2_{L^2(Q)} \le 3c_2^2 \left\| \rho_\varepsilon x^5 u_t \right\|^2_{L^2(Q)} + 3 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \rho_\varepsilon g \right\|^2_{L^2(Q)}$$
$$+ 3 \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left[p(t) \rho_\varepsilon x^5 u_t - \rho_\varepsilon p(t) x^5 u_t \right] \right\|^2_{L^2(Q)}.$$

En tenant compte des propriétés des opérateurs de régularisation utilisés, il vient

$$\left\| p(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon x^5 u_t \right\|^2_{L^2(Q)} \le k\left(\|u_t\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon g \right\|^2_{L^2(Q)} \right),$$

où $$k = 3\max\left\{c_2^2\, a^{10}, 1\right\}$$

Et par conséquent $x^5\alpha(t)u_{tt} \in L^2(Q)$.

Pour continuer la démonstration de la proposition 2, on remplace la fonction Ψ donnée par sa représentation (4.5) dans la relation (4.1), il vient

$$\begin{aligned}
&-(x^5u_t,(p(t)u_t)_t)_{L^2(Q)} + (p(t)x^4(xu_x)_x,(p(t)u_t)_t)_{L^2(Q)} \\
&+(p(t)u_{yy},(p(t)u_t)_t)_{L^2_\sigma(Q)} - (x^6u_t,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q)} \\
&+(p(t)x^5(xu_x)_x,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q)} + (p(t)x^4u_{yy},\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q)} \\
&+10\|p(t)u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} - 10(p^3(t)x^2(xu_x)_x,u_t)_{L^2(Q)} \\
&-10(p^3(t)u_{yy},u_t)_{L^2_\rho(Q)} - 20(p^3(t)x^2u_x,u_t)_{L^2(Q)} \\
&+20(p^4(t)\cdot(xu_x)_x,u_x)_{L^2_\rho(Q)} + 20(p^4(t)u_{yy},u_y)_{L^2(Q)} = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour mettre l'identité (4.6) sous une forme plus compacte, on utilise les conditions aux bords (1.3)-(1.4), la forme particulière de la solution u donnée par les relations (4.2)-(4.3) et les conditions **C1**, **C2**, et on intègre ensuite par parties chaque terme de (4.6), on obtient

$$-(x^5u_t,(p(t)u_t)_t)_{L^2(Q)} = -\int_\Omega x^5p(t)u_t^2\Big|_{t=s}^{t=T}dxdy + (p(t)x^5u_{tt},u_t)_{L^2(Q^\tau)}$$

$$= \frac{1}{2}\left\| \sqrt{p(s)}\cdot x^{\frac{5}{2}}u_t(.,.,s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\| \sqrt{p'(t)}\cdot x^{\frac{5}{2}}u_t \right\|^2_{L^2(Q^\tau)}, \tag{4.7}$$

$$(p(t)x^4(xu_x)_x,(p(t)u_t)_t)_{L^2(Q)}=\int_s^T\int_0^b p(t)x^5u_x(p(t)u_t)_t\Big|_{x=0}^{x=a}dydt-(px^5u_x,(pu_{tx})_t)_{L^2(Q_s)}$$
$$-4(p(t)x^4u_x,(pu_t)_t)_{L^2(Q_s)}$$
$$=\left\|p(t)x^{\frac{5}{2}}u_{tx}\right\|^2_{L^2(Q_s)}-\int_\Omega p^2(t)x^5u_xu_{tx}\Big|_{t=s}^{t=T}dxdy+(p(t)p'(t)x^5u_x,u_{tx})_{L^2(Q_s)}$$
$$+4(p^2(t)x^4u_{tx},u_t)_{L^2(Q_s)}-4\int_\Omega p^2(t)x^4u_xu_t\Big|_{t=s}^{t=T}dxdy$$
$$+4(p(t)p'(t)x^4u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}$$
$$=\left\|p(t)x^{\frac{5}{2}}u_{tx}\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\int_\Omega p(t)p'(t)x^5u_x^2\Big|_{t=s}^{t=T}dxdy-\frac{1}{2}\left\|(p(t)p''(t)+p'^2(t))x^{\frac{5}{2}}u_x\right\|^2_{L^2(Q_s)}$$
$$+2\int_0^b\int_s^T p^2(t)x^4u_t^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt-8\|p(t)u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}+4(p(t)p'(t)x^4u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}$$

(4.8)
$$=\left\|p(t)x^{\frac{5}{2}}u_{tx}\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(\tau)p'(\tau)}\cdot x^{\frac{5}{2}}u_x(.,.,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{1}{2}\left\|(pp''+p'^2)x^{\frac{5}{2}}u_x\right\|^2_{L^2(Q_s)}$$
$$-8\|p(t)u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}+4(p(t)p'(t)x^4u_x,u_t)_{L^2(Q_s)},$$

$$(p(t)u_{yy},(p(t)u_t)_t)_{L^2_\sigma(Q)}=\int_s^T\int_0^a p(t)x^3u_y(p(t)u_t)_t\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt-(pu_y,(pu_{ty})_t)_{L^2_\sigma(Q_s)}$$

(4.9)
$$=-\int_\Omega p^2(t)x^3u_yu_{ty}\Big|_{t=s}^{t=T}dxdy+\|p(t)u_{ty}\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}+(pp'u_{yt},u_y)_{L^2_\sigma(Q_s)}$$
$$=\|p(t)u_{ty}\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}+(p(t)p'(t)u_{yt},u_y)_{L^2_\sigma(Q_s)},$$

(4.10)
$$-(x^6u_t,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q)}=\frac{5}{2}\|x^2\Im_x(\xi u_t)\|^2_{L^2(Q_s)}$$
$$-\frac{1}{2}\int_s^T\int_0^b x^5(\Im_x(\xi u_t))^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt=\frac{5}{2}\|x^2\Im_x(\xi u_t)\|^2_{L^2(Q_s)},$$

(4.11)
$$(p(t)x^5(xu_x)_x,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q)}=-(p(t)x^7u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}-5(p(t)x^5u_x,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q_s)}$$
$$+\int_s^T\int_0^b p(t)x^6u_x\cdot\Im_x(\xi u_t)\Big|_{x=0}^{x=a}dydt$$
$$=-(p(t)x^7u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}-5(p(t)x^5u_x,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q_s)},$$

$$(4.12)\quad \begin{aligned}(p(t)x^4u_{yy},\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q)} &= \int_s^T\int_0^a p(t)x^4u_y\cdot\Im_x(\xi u_t)\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt-(px^4u_y,\Im_x(\xi u_{ty}))_{L^2(Q_s)}\\ &= -(p(t)x^4u_y,\Im_x(\xi u_{ty}))_{L^2(Q_s)},\end{aligned}$$

$$(4.13)\quad \begin{aligned}-10(p^3(t)x^2(xu_x)_x,u_t)_{L^2(Q)} &= 20(p^3(t)x^2u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}+10(p^3(t)u_x,u_{tx})_{L^2_\sigma(Q_s)}\\ &\quad -10\int_s^T\int_0^b p^3(t)x^3u_xu_t\Big|_{x=0}^{x=a}dydt\\ &= 5\int_\Omega p^3(t)x^3u_x^2\Big|_{t=s}^{t=T}dxdy-15\left\|p(t)\sqrt{p'}\cdot u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}+20(p^3(t)x^2u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}\\ &= 5\left\|p^{\frac{3}{2}}(T)(t)u_x(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)}+20(p^3(t)x^2u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}-15\left\|p(t)\sqrt{p'}\cdot u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)},\end{aligned}$$

$$(4.14)\quad \begin{aligned}-10(p^3(t)xu_{yy},u_t)_{L^2(Q)} &= 10(p^3(t)u_y,u_{ty})_{L^2_\rho(Q_s)}-10\int_s^T\int_0^a p^3(t)xu_yu_t\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt\\ &= 5\int_\Omega p^3(t)xu_y^2\Big|_{t=s}^{t=T}dxdy-15\left\|p(t)\sqrt{p'}\cdot u_y\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}\\ &= 5\left\|p^{\frac{3}{2}}(T)u_y(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}-15\left\|p(t)\sqrt{p'}\cdot u_y\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)},\end{aligned}$$

$$(4.15)\quad \begin{aligned}20(p^4(t)(xu_x)_x,u_x)_{L^2_\rho(Q)} &= 10\int_s^T\int_0^b p^4(t)(xu_x)^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt\\ &= 10a^2\left\|p^2(t)u_x(a,y,t)\right\|^2_{L^2((0,b)\times(s,T))},\end{aligned}$$

$$(4.16)\quad \begin{aligned}20(p^4(t)u_{yy},u_x)_{L^2(Q)} &= -20(p^4(t)u_y,u_{xy})_{L^2(Q_s)}+20\int_s^T\int_0^a p^4u_yu_x\Big|_{y=0}^{y=b}dxdt\\ &= -10\int_s^T\int_0^b p^4(t)\cdot u_y^2\Big|_{x=0}^{x=a}dydt\\ &= 10\left\|p^2(t)u_y(0,y,t)\right\|^2_{L^2((0,b)\times(s,T))}.\end{aligned}$$

La substitution des inégalités (4.7)-(4.16) dans (4.6) donne

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|x^{\frac{5}{2}}p(s)u_t(.,.,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+5\left\|p^{\frac{3}{2}}u_x(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)}+2\left\|p(t)u_t\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}\\
&+5\left\|p^{\frac{3}{2}}(T)u_y(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|p(t)x^{\frac{5}{2}}u_{tx}\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{pp'}\cdot x^{\frac{5}{2}}u_x(.,.,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\left\|p(t)u_{ty}\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}+\frac{5}{2}\left\|x^2\Im_x(\xi u_t)\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\left\|\sqrt{pp'}\cdot u_y(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)}\\
&+10a^2\left\|p^2(t)u_x(a,y,t)\right\|^2_{L^2((0,b)\times(s,T))}+10\left\|p^2(t)u_y(0,y,t)\right\|^2_{L^2((0,b)\times(s,T))}\\
&=(p(t)x^4u_y,\Im_x(\xi u_{ty}))_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\left\|x^{\frac{5}{2}}u_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\left\|(pp''+p'^2)u_y\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}\\
&-4(p(t)p'(t)x^4u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}+\frac{1}{2}\left\|(pp''+p'^2)x^{\frac{5}{2}}u_x\right\|^2_{L^2(Q_s)}+(px^7u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}\\
&+5(p(t)x^5u_x,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q_s)}+15\left\|p\sqrt{p'}\cdot u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)}+15\left\|p\sqrt{p'}\cdot u_y\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}.
\end{aligned}\tag{4.17}
$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy avec ε, de l'inégalité de Friedrichs, et de l'inégalité

$$\int_{Q_s}\frac{(\Im_x(\xi u_t))^2}{\sqrt{x}}dxdydt\leq 16a^{\frac{1}{2}}\int_{Q_s}x^3u_t^2dxdydt,$$

les premier, quatrième, sixième et septième termes du membre de droite de l'inégalité (4.17) peuvent être estimés de la manière suivante :

$$(p(t)x^7u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}\leq\frac{1}{2}\left\|\sqrt{p(t)}\cdot x^{\frac{5}{2}}u_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}+\frac{a^4}{2}\left\|\sqrt{p(t)}\cdot x^{\frac{5}{2}}u_x\right\|^2_{L^2(Q_s)},\tag{4.18}$$

$$-4(p(t)p'(t)x^4u_x,u_t)_{L^2(Q_s)}\leq 2\left\|\sqrt{pp'}\cdot x^{\frac{5}{2}}u_t\right\|^2_{L^2(Q_s)}+2\left\|\sqrt{pp'}\cdot u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)},\tag{4.19}$$

$$(p(t)x^4u_y,\Im_x(\xi u_{ty}))_{L^2(Q_s)}\leq 8a^8\left\|u_y\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}+\frac{1}{2}\left\|p(t)u_{ty}\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)},\tag{4.20}$$

(4.21) $$5(p(t)x^5u_x,\Im_x(\xi u_t))_{L^2(Q_s)} \leq \frac{5a}{2}\left\|p(t)x^{\frac{5}{2}}u_x\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \frac{5}{2}\left\|x^2\Im_x(\xi u_t)\right\|^2_{L^2(Q_s)}.$$

Si maintenant on néglige les deux derniers termes du membre de gauche de l'inégalité (4.17), on utilise les conditions **C1** et **C2** et on combine les inégalités (4.18)-(4.21) et l'inégalité (4.17), on obtient

(4.22) $$\begin{aligned}
&\left\|x^{\frac{5}{2}}u_t(.,.,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u_x(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \\
&+\left\|u_y(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left\|x^{\frac{5}{2}}u_{tx}\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|x^{\frac{5}{2}}u_x(.,.,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\left\|u_{ty}\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\|u_t\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\|u_y(.,.,T)\right\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \\
&\leq c\left(\left\|x^{\frac{5}{2}}u_t\right\|^2_{L^2(Q_s)} + \left\|u_x\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\|u_y\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \left\|u_y\right\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\|x^{\frac{5}{2}}u_x\right\|^2_{L^2(Q_s)}\right),
\end{aligned}$$

où

$$c = \frac{\max\left(\frac{c_2}{2}+2c_1c_2+\frac{c_1}{2},\frac{c_1c_4}{2}+\frac{c_2^2}{2}+\frac{a^4c_1}{2}+\frac{5ac_1^2}{2},15c_1^2c_2+2c_1c_2,\frac{c_4}{2},15c_1^2c_2+\frac{a^7}{32}\right)}{\min\left(\frac{c_0}{2},\frac{c_0^2}{2},\frac{c_0c_3}{2},5c_0^3,\frac{c_3}{2}\right)}.$$

On observe que la constante c dans l'inégalité (4.22) ne dépend pas de s, cependant, la solution u dans cette même estimation dépend de s. Pour éviter cette difficulté on introduit la fonction β définie par la formule :

$$\beta(x,y,t) = \int_t^T u_\tau d\tau.$$

De laquelle on déduit

$$u(x,y,t) = \beta(x,y,s) - \beta(x,y,t),$$

et on a

$$
\begin{aligned}
&\left\| x^{\frac{5}{2}} u_{tx} \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \|u_{ty}\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\| x^{\frac{5}{2}} u_t(x,y,s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+(1-2c(T-s))\left\{ \left\| x^{\frac{5}{2}} \beta_x(x,y,s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\beta_x(x,y,s)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \right. \\
&\left. + \|\beta_y(x,y,s)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|\beta_y(x,y,s)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \right\} \\
&\leq 2c\left[\left\| x^{\frac{5}{2}} \beta_x(x,y,t) \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \|\beta_x(x,y,t)\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\| x^{\frac{5}{2}} u_t \right\|^2_{L^2(Q_s)} \right. \\
&\left. + \|\beta_y(x,y,t)\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \|\beta_y(x,y,t)\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} \right].
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Si $s_0 > 0$ satisfait $1 = 4c(T - s_0)$, alors (4.23) implique

$$
\begin{aligned}
&\left\| x^{\frac{5}{2}} u_{tx} \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \|u_{ty}\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\| x^{\frac{5}{2}} \beta_x(x,y,s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \|\beta_x(x,y,s)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} + \|\beta_y(x,y,s)\|^2_{L^2_\sigma(\Omega)} \\
&+ \|\beta_y(x,y,s)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left\| x^{\frac{5}{2}} u_t(.,.,s) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 4c\left[\left\| x^{\frac{5}{2}} \beta_x(x,y,t) \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \|\beta_x(x,y,t)\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \left\| x^{\frac{5}{2}} u_t \right\|^2_{L^2(Q_s)} \right. \\
&\left. + \|\beta_y(x,y,t)\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \|\beta_y(x,y,t)\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} \right],
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

pour tout $s \in [T - s_0, T]$.

Maintenant si on note le membre de droite de l'inégalité (4.24) par $4c\alpha(s)$, on obtient donc

$$
\left\| x^{\frac{5}{2}} u_{tx} \right\|^2_{L^2(Q_s)} + \|u_{ty}\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} + \|u_t\|^2_{L^2_\sigma(Q_s)} - \frac{d\alpha}{ds} \leq 4c\alpha(s).
$$

D'où on a

$$
-\frac{d}{ds}\left(\alpha(s)\exp(4cs)\right) \leq 0. \tag{4.25}
$$

Puisque $\alpha(T) = 0$, une intégration de (4.25) sur l'intervalle (s,T) donne

(4.26) $$\alpha(s)\exp(4cs) \le 0.$$

L'inégalité (4.26) implique que $\Psi = 0$ presque partout dans Q_{T-s_0}. La longueur s_0 est indépendante du choix de l'origine, on procédant de la même manière, pas par pas, on montre que $\Psi = 0$ presque partout dans Q. Cela achève la démonstration de la proposition 2.

Pour continuer la démonstration du théorème 2, on doit montrer que l'ensemble des valeurs de l'opérateur L coïncide avec l'espace F. Mais comme F est un espace de Hilbert, l'égalité $R(L) = F$ est vraie si de la relation

(4.27) $$(\mathcal{L}u, \Psi)_{L^2(Q)} + (\ell u, \omega_0)_{H^1_\rho(\Omega)} = 0,$$

où u est dans E et $(\Psi, \omega_0) \in F$, il s'ensuit que $\Psi = 0$ et $\omega_0 = 0$.

En posant $u \in D_0(L)$ dans l'égalité (4.27), on obtient

$$(\mathcal{L}u, \Psi)_{L^2(Q)} = 0. \qquad \forall u \in D_0(L).$$

D'où, en vertu de la proposition 2, on déduit que $\Psi = 0$. Et par conséquent, (4.27) devient

(4.28) $$(\ell u, \omega_0)_{H^1_\rho(\Omega)} = 0 \qquad \forall u \in D(L).$$

Puisque l'ensemble des valeurs de l'opérateur de trace ℓ est partout dense dans l'espace $H^1_\rho(\Omega)$, alors de (4.28), on déduit que $\omega_0 = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Conclusion Générale

Cette thèse est vouée à l'étude de l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données de la solution de quelques problèmes mixtes avec conditions non locales appelées également conditions intégrales. La méthode des inégalités de l'énergie utilisée ici, apparaît comme parmi les plus efficaces et innovatrices pour l'étude de types des problèmes considérés.

Un cadre fonctionnel convenable de solutions est adapté à chaque problème étudié. On a choisi des espaces dont la topologie est définie par une norme (tout particulièrement des espaces de Banach et de Hilbert).

La méthode des estimations à priori est développée pour un nouveau type de problèmes mixtes avec conditions intégrales dans une structure multi-dimmensionnelle. Lors de l'étude de ces problèmes, les difficultés rencontrées sont principalement dû aux singularités des coefficients, d'où la difficultés du choix des multiplicateurs pour l'établissement des inégalités de l'énergie ainsi que la densité de l'ensemble des images des opérateurs engendrés par les problèmes considérés.

Bien que la démonstration de l'existence, l'unicité et la dépendance continue par rapport aux données des problèmes étudiés sont réalisées, il reste encore quelques questions ouvertes ayant trait aux points suivants :

- Il serait très utile de pouvoir passer aux cas des conditions aux limites non homogènes dans les problèmes traités dans les chapitres II, III, IV, et VI.
- Il apparaît aussi intéressant d'utiliser la méthode des estimations à priori pour obtenir des résultats pour le même type de conditions utilisées dans cette thèse pour des équations semi-linéaires, quasi-linéaires et non lineares.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. S.A.ALDASHEV, *A priori estimates for Tricomi and Darboux problems,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 19, N°6, 985-991, (1983).

[2]. N.E.BENOUAR, *Problème aux limites pour une classe d'équations d'ordre impair,* Bulletin de la classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 1-6, 51-58, (1994).

[3]. N.E.BENOUAR, *Problèmes aux limites pour une classe d'équations composites,* Compte Rondus de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 319, Série I, 953-958, (1994).

[4]. N.E.BENOUAR-L.BOUGUEFFA, Analyse mathématique : Problème aux limites pour une classe d'équations composites du quatrième ordre, Bulletin de la classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 6, 207-214, (1995).

[5]. N.E.BENOUAR-N.I.YURCHUK, *Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator*, Differentsial'nye Uravneniya., Vol. 27, N°12, 2094-2098, (1991).

[6]. A. BOUZIANI, *Solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équations hyperboliques,* Bulletin de la classe des sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 8, 53-70, (1997).

[7]. A. BOUZIANI, *On the quasi-static flexure of thermoelastic rod problem,* (Submitted in) Communications on Applied Analysis.

[8]. A. BOUZIANI, *Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation,* J. Appl. Math. Stochastic. Anal., Vol. 9, N°3, 323-330, (1996).

[9]. A.BOUZIANI, *On a third order parabolic equation with a non local boundary condition,* J. Appl. Math and Stochastics Analysis, (to appear), (1998).

[10]. A.BOUZIANI, *Solution forte d'un problème mixte avec une condition non locale pour une classe d'équations paraboliques,* Maghreb Mathematical Review, Vol. 6, N°1, 1-17, (1997).

[11]. A.BOUZIANI, *Problème aux limites pour certaines équations de type non classique du troisième ordre*, Bulletin de la classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 7-12, (1995).

[12]. A. BOUZIANI, *Mixed problem for certain non classical equations with a small paramater*, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 4, 389-400, (1994).

[13]. A.BOUZIANI, *Problème mixte avec conditions intégrales pour quelques équations aux dérivées partielles*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Constantine, (1996).

[14]. A.BOUZIANI, *Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equations*, Hiroshima Mathematical Journal., Vol. 27, N°3, 373-390, (1997).

[15]. A.BOUZIANI, *On a class of nonclassical hyperbolic equations with nonlocal conditions*, (to appear in) Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, (1999).

[16]. A.BOUZIANI, *Strong solution to a mixed problem for certain pseudoparabolic equations of variable order*, (à paraître aux) Annales de Mathématiques de l'Université de Sidi Bel Abbes, Vol.5, (1998).

[17]. A.BOUZIANI, *Solution forte d'un problème de transmission parabolique-hyperbolique pour une structure pluridimensionnelle*, Bulletin de la classe des Sciences, Académie Royale des Sciences de Belgique, Vol. 8, 53-70, (1997).

[18]. A.BOUZIANI- N.E.BENOUAR, *A mixed problem with integral conditions for a third order parabolic equation*, Kobe Journal of Mathematics, Vol. 15, N°1, 47-58, (1998).

[19]. A.BOUZIANI- N.E.BENOUAR, *Problème aux limites pour une classe d'équations de type non classique pour une structure pluri-dimensionnelle*, Bulletin of the Polish Academy of sciences, Vol. 43, N°4, 317-328, (1995).

[20]. A.BOUZIANI- N.E.BENOUAR, *Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations paraboliques,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 321, Série I, 1177-1182, (1995).

[21]. A.BOUZIANI-N.E.BENOUAR, *Problème mixte avec conditions intégrales pour une classe d'équations hyperboliques,* Bull of the Belgian Math. Soc., Vol. 3, 137-145, (1996).

[22]. N.I.BRISH-N.I.YURCHUK, *Some new boundary value problems for a class of partial differental equations- I,* Differential equations, Vol. 4, N°6, 560-570, (1968).

[23]. N.I.BRISH- N.I.YURCHUK, *Some new boundary value problems for a class of partial differential equations-II,* Differential Equations, Vol. 4, N°8, 770-775, (1968).

[24]. J.R.CANNON, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy,* Quart. Appl. Math., Vol.21, N°2, 155-160, (1963).

[25]. B.CARBONARO-R.RUSSO, *Energy inequalities and the domain of influence theorem in classical elastodynamics,* J.Elasticty, Vol. 14, 163-174, (1984).

[26]. G.D.DACHEV, *Boundary-value problems for a class of equations of mixed type,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 18, N°11, 1894-1902, (1982).

[27]. W.A.DAY, *Existence of the property of solutions of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories,* Quart. Appl. Math., Vol.40, 319-330, (1982).

[28]. V.P.DIEDENKO, *A Variational problem for equations of mixed type,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 13, N°1, 44-49, (1977).

[29]. J.A.DUBINSKII, *On some differential operator equations of arbitrary order,* Mat. Sbornik, Vol. 90, N°1, (1973).

[30]. K.O.FRIEDRICHS-H.LEWY, *Über di eidentigkeit und das Alhängigkeitsgebiet beim anfangs problem linearer hyperbolicsher differetcialgleichungen.* Math. Ann., 90, 192-204, (1928).

[31]. J.FRITZ, *Partial Differential Equations*, Berlin-Heidelberg-New york, Spriger-Verlag, (1978).

[32]. L.GARDING, *Cauchy's problem for hyperbolic equations*, University of Chicago, Lecture notes, (1957).

[33]. S.K. GODOUNOV-A.M.BLOKHIN, *Energy integrals in the theory of shock wave stability. Nonlinear deformation waves*, IUTAM. Symposium, Tallin, 1982 ; Springer-Verlag, 18-29, (1983).

[34]. S.K.GODOUNOV, *Intégrale d'énergie des équations hyperboliques d'après Petrovski*, Commentationes mathematicae Universitatis Carolinae, Praga 26, Vol. 1, 41-74, (1985).

[35]. A.GUEZANE-LAKOUD-F.REBBANI-N.I.YURCHUK, *Problème aux limites pour une équation différentielle opérationnelle de second ordre*, Maghreb Mathematical Review, Vol. 6, N°1, (1997).

[36]. M.E.GURTIN- R.C.M. CAMY, *Diffusion models for age-structured population*. Math. Biosci. 54, 49-59, (1981).

[37]. A.HILLION, *Les solutions mathématiques des populations*, presses Universitaire de France, (1986).

[38]. N.I.IONKIN, *Solution of a boundary value problem in heat conduction theory with non local boundary conditions*, Differentsial'nye Uravnenia, Vol. 13, N°2, 294-304, (1977).

[39]. N.I.KAMYNIN, *A boundary value problem in the theory of the heat conduction with non classical boundary condition*, TH., Vychist., Mat., Fiz., Vol. 43, N°6, 1006-1024, (1964).

[40]. A.V.KARTYNNIK, *Three point boundary value problem with an integral space variables conditions for second order parabolic equations*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 26, N°9, 1568-1575, (1990).

[41]. N.KEYFITZ, *Applied mathematical demography*. Berlin-Heidelberg-New york, Springer-Verlag, (1977).

[42]. N.V.KISLOV, *Boundary value problems for operational differential equations of mixed type*, Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 19, N°8, 1427-1436, (1983).

[43]. N.V.KISLOV, *On the differential equations of mixed type*, Trudi. M.E.I., Vol. 146, 60-69, (1972).

[44]. V.I.KORZYUK, *Energy inequality for the boundary value problem of a hyperbolic equation with a third order wave operator,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 27, N°6, 1014-1022, (1991).

[45]. V.I.KORZYUK, *The conjugacy of some non stationary differential equations of order 2m,* Differential Equations, Vol. 7, N°4, 576-579, (1971).

[46]. V.I.KORZYUK, *The problem of conjugate equations of hyperbolic and parabolic type,* Differential Equations, Vol. 4, N°10, 955-961, (1968).

[47]. V.I.KORZYUK, *A mixed problem for certain nonstationary equations with discontinuous coefficients,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 6, N°2, 343-352, (1970).

[48]. V.I.KORZYUK-V.V.DAINYAK, *A weak solution of a Dirichlet type problem for a third order differential equation,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 28, N°6, 1056-1066, (1992).

[49]. V.I.KORZYUK-N.I.YURCHUK, *The conjugation of nonstationary abstract linear differential equations,* Differential equations, Vol. 7, N°9, 1239-1245, (1974).

[50]. A.KUFNER, *Weighted Sobolev spaces,* Teubner-texte zur Mathematik-leibzig, (1980).

[51]. O.A.LADYZHENSKAYA, *On the solution of non-stationary operator equations,* Math. Sborn., Vol. 39, N°4, 491-524, (1956).

[52]. O.A. LADYZHENSKAYA, *A simple proof of the solvability of the fundamental boundary value problems and problem of eigenvalues for linear elliptic equations,* Vestinik Leningrad. Univ. Vol. 11, 23-29, (1956).

[53]. O.A.LADYZHENSKAYA, *Sur les équations opérationnelles non stationnaires et leurs applications aux problèmes linéaires de la physique mathématique*, Math. Sborn., Vol. 45, N°2, 132-158, (1958).

[54]. O.A.LADYZHENSKAYA, *The mixed problem for the hyperbolic equation.* Gos. Izdat.Tehn-Teor. Lit., Moscow, 279 PP, (1953).

[55]. O.A.LADYZHENSKAYA, *The boundary value problems of mathematical physics,* Springer-Verlag, New york, (1985).

[56]. O.A.LADYZHENSKAYA, *Sur les problèmes aux limites fondamentaux liés aux équations paraboliques et hyperboliques,* Dokl. Acad. Scien. URSS, Vol. 97, N°3, 395-398, (1954).

[57]. O.A.LADYZHENSKAYA-L.I.STUPIALIS, *Problème des conjugaison des équations ondulatoires et de conductibilité thermique,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 4, N°19, 38-46, (1965).

[58]. N.N.LANIN, *A Priori estimates for Tricomi and Dirichlet problems for an equation with degenerate type and order,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 12, N°1, 89-96, (1976).

[59]. T.I.LANINA, *Smoothness of a solution of a boundary-value problem for an equation of mixed type with two parallel degeneracy lines,* Diffrentsial'nye Uravneniya, Vol. 12, N°1, 97-102, (1976).

[60]. P.LAX, *On Cauchy's problem for hyperbolicequation and the differentiability of solutions of elliptic equations.* Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 8, 615-633, (1955).

[61]. J.LERAY, *Lectures on hyperbolic differential equations with variable coefficienent.* Princeton, Just for Adv. Study, (1952).

[62]. Y.LIN, *Parabolic partial differential equations subject to non local boundary conditions,* Ph.D. thesis, Washington state University, Pullman, WA, (1988).

[63]. J.L.LIONS, *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites.* Springer-Verlag, (1961).

[64]. F.E.LOMOVTSEV, *Necessary and sufficient conditions for the unique solvability of the Cauchy problem for second order hyperbolic equations with a variable domain, of operator equations,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 28, N°5, 712-722, (1992).

[65]. F.E.LOMOVTSEV- N.I.YURCHUK, *Boundary value problems for differential operational equations with variable operational-coefficient domains,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 27, N°10, 1754-1766.

[66]. S.MESLOUB-A.BOUZIANI, *Problème mixte avec conditions aux limites intégrales pour une classe d'équations paraboliques bidimensionnelles,* Bulletin de la classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, Vol. 6, 59-69, (1998).

[67]. S.MESLOUB-A.BOUZIANI, *On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition,* Internat. J. Math. & Math. Sciences, (to appear), (1999).

[68]. S.MESLOUB-A.BOUZIANI, *Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator,* J. Appl. Math. Stochastic. Anal, (to appear), (1999).

[69]. L.A.MOURAVEY-V.PHILIPPVSKI, *Sur un problème avec une condition aux limites non locale pour une équation parabolique*, Sborn. Math. 182, N°10, 1479-1512, (1991).

[70]. J.D.MURRAY, *Mathematical Biology.* Berlin-Heidelberg-New york, Springer-Verlag, (1989).

[71]. F.REBBANI- V.I.CHESSALIN, *Sur un problème aux limites pour une equation différentielle opérationnelle,* Annalles de la IX Ecole sur les opérateurs dans les espaces fonctionnels, TERNOPOL, (19983)

[72]. F.REBBANI- V.I.CHESSALIN, *Problème aux limites pour des équations différentielles opérationnelles d'ordre impair dans le rectangle*, Uzvestis Akad. Nauk.BSSSR, Série Phys. Mat. Nauk, N°3, (1984).

[73]. K.REKTORYS, *Variational methods in mathematics, sciences and engineering*, Library of Congress cataloging in publication data, (1977).

[74]. R.SAKOMOTO, *Mixed problems for hyperbolic equations I,* Jour. Math. Kyoto Univ., 10, 2, 349-373, (1970).

[75]. R.SAKOMOTO, *Mixed problems for hyperbolic equations II,* Jour. Math. Kyoto Univ., 10, 3, 403-417, (1970).

[76]. A.SAMARSKII, *Some problems in differential equations theory,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol.16, N°11, 1221-128, (1980).

[77]. P.SHI, *Weak solution to an evolution problem with a non local constraint*, SIAM.J. Math. Anal. Vol. 24, N°1, 46-58, (1993).

[78]. P.SHI- M.SHILLOR, *Design of contact patterns in one dimensional thermoelasticity, in Theoritical Aspects of Industrial Design,* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1992).

[79]. I.V.SUVEIKA, *Problems for an equation describing the propagation of disturbances in viscus media,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 23, N°5, 877-881, (1987).

[80]. N.V.TSYVIS- N.I.YURCHUK, *A three point boundary value problem for third order differenial operational equations,* Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 23, N°5, 877-881, (1987).

[81]. M.I.VISIK- O.A.LADYZHENSKAYA, *Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations*, Uspehi. Math. Nauk, Vol. 11, N°6,89-152, 1956 (Russian) ; English transl. Amer. Math. Soc., (2), 10, 223-281, (1958).

[82]. V.N.VRAGOV, *Some boundary-value problems for a class of three-dimensional equations of mixed type*, , Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 11, N°1, 27-32, (1975).

[83]. V.N.VRAGOV, *Theory of boundary-value problems for equations in mixed type in space*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 13, N°6, 1098-1105, (1977).

[84]. G.F.WEBB, *Theory of nonlinear age-dependent population dynamics*, New York, Dekker, (1985).

[85]. N.I.YURCHUK, *Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations*, Differentsial'nye Uravnenia, Vol. 22, N°19, 2117-2126, (1986)..

[86]. N.I.YURCHUK, *Méthode des inégalités de l'énergie pour l'étude de quelques équations opérationnelles dégénérées*, Differential Equations, Vol. 14, N°12, 2196-2211, (1978).

[87]. N.I.YURCHUK, *A partially characteristic boundary value problem for a particular type of partial differential equations I*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 4, N°12, 2258-2267, (1968).

[88]. N.I.YURCHUK, *Problèmes aux limites pluri-dimensonnels pour certaines équations différentielles opérationnelles : I. Estimation a priori*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 21, N°3, 417-425, (1985).

[89]. N.I.YURCHUK, *Mixed problems for linearized Kortweg-De-Vries equations degenerating in time into parabolic equations*, Soviet. Math. Dokl., Vol. 33, N°2, 435-437, (1986).

[90]. N.I.YURCHUK, *Mixed problems for parabolic equations of variable order*, Soviet. Math. Dokl., Vol. 26, N°1, 39-41, (1982).

[91]. N.I.YURCHUK, *A partially characteristic boundary value problem for a particular type of partial differential equations II*, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 5, N°3, 531-542, (1969).

[92]. N.I.YURCHUK, *Boundary-value problems for equations whose principal part contains operators of the form* $(d^{2m+1}/dt^{2m+1})+A$, Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 10, N°4, 759-762, (1974).

[93]. N.I.YURCHUK, *Boundary-value problems for equations whose principal part contains operators of the form* $(d^{2m}/dt^{2m})+A$, Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 10, N°5, 950-952, (1974).

[94]. N.I.YURCHUK, *Problèmes aux limites pour les équations différentielles opérationnelles d'ordre impair,* Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 13, N°3, 468-476, (1977).

[95]. N.I.YURCHUK, *Solvability of boundary-value problems for certain differential equations,* Differential equations, Vol. 13, N°4, 423-429, (1977).

[96]. N.I.YURCHUK, *Estimations a priori des solutions des problèmes aux limites por certaines équations différentielles opérationnelles,* Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 13, N°4, 626-636, (1977).

[97]. N.I.YURCHUK, *problèmes aux limites pluri-dimensionnels pour certaines équations différentielles opérationnelles : II. Résolution du problème et propriété de la solution,* Differntsial'nye Uravneniya, Vol. 21, N°5, 859-870, (1985).

[98]. N.I.YURCHUK-F.E.LOMOVTSEV, *Cauchy's problem for second order hyperbolic differential operational equations,* Differentsialnye Uravneniya, Vol. 12, N°12, 2242-2250, (1976).