

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

N°d'ordre.....
Série.....

MES/4265

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister
En : Mathématiques

THEME

ETUDE DES SYSTEMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES

Option :
Equations Différentielles et applications

Présenté par :
Mesbah Kaouter

Devant le jury :

| | | | | |
|---------------------|--------------|-------|-------|-------------|
| Président : | M. Denche | Prof. | Univ. | Constantine |
| Rapporteur : | N. Hamri | M. C. | Univ. | Constantine |
| Examineur : | L. Marhoun | M. C. | Univ. | Constantine |
| Examineur : | T. Boudjedaa | M. C. | Univ. | Jijel |

Soutenu le :

2005



A mes très chers parents
A mon cher oncle: Bentounsi Hader
A mes amies et à ceux et celles qui
me sont très chers.

...Je dédie humblement ce travail.

| | |
|--|-----------|
| | 2 |
| 3.2 NOTIONS DE STABILITE | 17 |
| 3.2.1 DEFINITIONS DE STABILITE | 18 |
| 3.2.2 DYNAMIQUE LINEAIRE EN DIMENSION DEUX . | 19 |
| 3.2.3 DYNAMIQUE NON LINEAIRE | 23 |
| 3.3 NOTIONS DE BIFURCATION | 27 |
| 3.4 TRANSITION VERS LE CHAOS. | |
| 3.4.1 SECTIONS DE POINCARE | 35 |
| 3.4.2 CHEMINS VERS LE CHAOS | 37 |
| 3.5 CARACTERISATION DU CHAOS | 39 |
| 3.5.1 EXISTENCE DE L'ATTRACTEUR ETRANGE | 39 |
| 3.5.2 SERIES TEMPORELLES ET SPECTRE DE PUIS- | |
| SANCE | 39 |
| 3.5.3 EXPOSANTS DE LYAPUNOV | 41 |
| 3.5.4 DIMENSION FRACTALE | 43 |
| 3.6 CONCLUSION | 46 |
| | |
| 4 APPLICATION AU MODELE DE CHEN | 48 |
| 4.1 HISTORIQUE | 48 |
| 4.2 ETUDE DE MODELE DE CHEN | 50 |
| 4.2.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME | 50 |
| 4.2.2 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES | 57 |
| 4.3 PREMIERE MODIFICATION DU MODELE DE CHEN . . | 64 |
| 4.3.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME | 64 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| | | 3 |
| 4.3.2 | CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE | 66 |
| 4.3.3 | ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES | 67 |
| 4.4 | DEUXIEME MODIFICATION DU MODELE DE CHEN | 73 |
| 4.4.1 | ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME | 73 |
| 4.4.2 | CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE | 78 |
| 4.4.3 | ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES | 78 |
| 4.5 | AUTRE MODIFICATION DU MODELE DE CHEN | 84 |
| 4.5.1 | ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME | 84 |
| 4.5.2 | CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE | |
| 4.5.3 | ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES | 89 |
| 4.6 | CONCLUSION | 95 |
| 5 | APPLICATION AU MODELE DE ROSSLER | 97 |
| 5.1 | ETUDE DU MODELE DE ROSSLER | 97 |
| 5.1.1 | ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME | 98 |
| 5.1.2 | CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE | |
| 5.1.3 | ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES | 102 |
| 5.2 | PREMIERE MODIFICATION DU MODELE DE ROSSLER | 111 |
| 5.2.1 | ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME | 111 |
| 5.2.2 | CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE | |
| 5.2.3 | ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES | 114 |
| 5.3 | AUTRE MODIFICATION DU MODELE DE ROSSLER | 121 |
| 5.3.1 | ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME | 121 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.3.2 | ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES | 122 |
| 5.4 | CONCLUSION | 129 |
| A | THEOREME DE HARTMANN-GROBMAN | 131 |
| B | THEORIE DE FLOQUET | 132 |
| C | RESOLUTION DE L'EQUATION DU 3 ^{ème} DEGRE | 133 |
| D | PROGRAMME GENERANT L'ATTRACTEUR ETRANGE | 137 |

Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 HISTORIQUE

La puissance de la science naît de sa faculté à relier les effets et les causes. À partir des lois de la gravitation, nous sommes capables de prévoir les éclipses, par exemple, plusieurs milliers d'années avant qu'elles se produisent. Tous les phénomènes naturels ne sont pourtant pas aussi périodiques. Ainsi les mouvements de l'atmosphère, qui obéissent aux mêmes lois physiques que les mouvements des planètes, ne sont exprimés qu'en terme probabiliste. Il y a de l'imprévisible dans le temps qu'il fera, l'écoulement de l'eau ou le lancer des dés : pour tous les phénomènes de ce type, aucune relation n'apparaît immédiatement entre une cause et un effet, et l'on dit qu'ils sont aléatoires.

Une découverte étonnante a remi en cause cette hypothèse : des systèmes déterministes constitués de très peu d'éléments ont aussi des comportements aléatoires. On qualifie aujourd'hui de chaotiques ces systèmes dont l'étude est en plein essor. Le futur du système déterministe est complètement déterminé par son passé, mais

en pratique, les incertitudes sur les conditions initiales sont amplifiées, de sorte que si le court terme est prévisible, l'évolution à long terme ne l'est plus (la prévisibilité est fondamentalement limitée). On trouve des applications de la science du chaos dans une multitude de domaines principalement en physique.

Historiquement, en 1776, selon *Laplace*, dans son "Essai philosophique sur les probabilités" il suffisait de connaître la position et la vitesse de toutes les particules de l'univers à un instant donné, pour calculer l'intégralité de son évolution ultérieure. On conçoit facilement la difficulté d'un tel programme, mais pendant plus de 100 ans, on a tenu l'idée de Laplace pour fondée au moins dans son principe [14].

Dans les années 1890, *Henri Poincaré* a introduit une approche géométrique pour résoudre certains aspects qualitatifs de la dynamique du système solaire. Il est le premier à concevoir la notion de chaos. Il savait résoudre les équations du mouvement de deux corps célestes s'attirant par la gravitation ce qui permettait de comprendre avec une bonne approximation la forme elliptique des orbites des planètes autour du soleil, pour avoir meilleurs prédictions, il fallait cependant inclure l'influence gravitationnelle des planètes entre elles, c'est à dire étudier la dynamique non plus de deux corps considérés comme isolés du reste du système solaire, mais d'un plus grand nombre de corps à la fois. *Poincaré* a démontré l'impossibilité de prédire à long terme la position de trois corps en interaction gravitationnelle comme le système soleil, terre et lune. Une petite incertitude sur la mesure de la vitesse et de la position de ces derniers à un instant donné peut se répercuter de façon dramatique sur la prédiction de leurs évolutions dans quelques millions d'années [30].

Entre les années 1920 et 1960, plusieurs mathématiciens (tels *Kolmogorov*, *Arnold*

et *Moser*) poursuivirent l'étude des systèmes Hamiltoniens non linéaires sachant la tradition de *Poincaré*. Les ingénieurs s'intéressèrent également aux applications des oscillateurs non linéaires à la technologie de la radio, du radar et du laser. Cependant, une étape déterminante en dynamique non linéaire a été atteinte en 1963 par *Edward Lorenz*, un météorologiste armé d'un ordinateur à haute vitesse [25], [5]. Dans ses études numériques d'un simple modèle d'un fluide en convection, il découvrit des solutions apériodiques irrégulières qui démontrèrent une sensibilité aux conditions initiales dans un système dissipatif, c'est à dire des attracteurs chaotiques. Dans les années 1970, l'étude des systèmes non linéaires s'est étendue à d'autres disciplines. *David Ruelle et Floris Takens* [34] proposèrent en 1971 une nouvelle théorie de la turbulence dans les fluides qui mettait en doute le mécanisme accepté, due à *Landau* [24]. Ils réalisent qu'un petit nombre de bifurcation (c'est à dire de changement qualitatif dans le comportement d'un système quand un paramètre extérieur change) peut être suffisant pour générer une solution chaotique. Plus tard, *Robert May* étudia de simples applications itératives pour décrire la dynamique des populations dans un écosystème. Il trouva ainsi un comportement dynamique très riche. *Mitchell Feigenbaum* [16] a ensuite découvert que des lois universelles décrivent certaines transitions d'un état régulier à un état chaotique quand un paramètre extérieur varie.

1.2 PLAN DE TRAVAIL

Le but de ce travail est l'étude des systèmes dynamiques chaotiques. Pour atteindre ce but, il faut donner d'abord quelques définitions de base.

Après ce **premier chapitre** d'introduction, où nous nous sommes intéressés à l'historique du chaos, le **deuxième chapitre** est consacré aux définitions des différents outils mathématiques qui nous servent à mieux comprendre le comportement chaotique : comme le chaos est apparu lors de ce qu'on appelle un système dynamique, on a donné la définition de ce dernier.

Dans le **troisième chapitre**, nous parlons de la théorie du chaos en faisant appel aux notions de stabilité, d'attracteurs et des différents chemins vers le chaos. Dans ce même chapitre, nous traitons la caractérisation du chaos en parlant des séries temporelles, des exposants de Lyapunov et enfin de la dimension fractale.

Nous abordons dans les **chapitres quatre et cinq** l'étude qualitative et numérique sur deux modèles connus : *Chen* et *Rosler* ainsi que sur ses différentes modifications, en utilisant les éléments caractéristiques cités aux chapitres précédents.

Les résultats numériques sont représentés par des figures qui désignent les graphes des solutions des systèmes non linéaires, les séries temporelles et les exposants de Lyapunov.

Les solutions sont calculées en langage Fortran par un programme de la méthode de "Runge-kutta" d'ordre 4, et les graphes sont tracés par le logiciel Matlab.

Une bibliographie classée par ordre alphabétique permettra au lecteur d'avoir une idée plus précise des différents éléments de la théorie du chaos, ainsi des résultats obtenus sur la dynamique des modèles de *Chen* et de *Rosler*.

Chapitre 2

OUTILS D'ANALYSE

Le chaos est un terme qui est souvent associé au hasard. Mais il n'en est rien. Il possède une certaine structure qui peut être caractérisée qualitativement.

2.1 SYSTEME DYNAMIQUE

Le chaos est apparu lors de ce que l'on appelle **un système dynamique**. Ce dernier est un modèle permettant de décrire l'évolution au cours du temps d'un ensemble d'objet en interaction, il est défini par un triplet $D(X, T, \Phi)$, constitué de l'espace d'état X , du domaine temporel T et d'une application de transition d'état $\Phi : X \times T \rightarrow X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales, l'état du système à tout instant. Plus précisément, pour tout $x_0 \in X$, **la trajectoire** qui a x_0 pour origine, est définie par l'application $\Phi_{x_0}(t) = \Phi(x_0, t)$, elle associe donc à chaque instant un point dans l'espace d'état. L'ensemble de ces points constitue une courbe appelée **orbite** de x_0 . L'application $\Phi^t : X \rightarrow X$ est appelée **le flot** du

système à l'instant t . Il donne un instantané du comportement du système sur tout l'espace. $\Phi^t(x)$ possède les propriétés suivantes :

1. $\Phi_t(x_0) = x_0$.
2. $\Phi_{t+s}(x) = \Phi_t(\Phi_s(x))$.

La famille des applications est appelée un semi groupe.

-Si $T = \mathbb{R}^+$, le système est dit à *temps continu*.

-Si $T = \mathbb{N}$, le système est dit à *temps discret*.

Le système dynamique est dit autonome si le flot ne dépend pas du temps t .

Dans le cas contraire, le système est dit forcé, ce dernier peut être réduit à la forme autonome par un changement de variable.

2.2 POINT LIMITE, ENSEMBLE LIMITE ET ENSEMBLE INVARIANT

Définition 2. 2. 1

Le **point limite** ω d'une trajectoire $x(t) = \Phi(t, x_0)$ est un point P satisfaisant à :

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$$

pour une certaine suite $t_k \rightarrow \infty$.

De même, un point P' est le **point limite** α d'une trajectoire $x(t) = \Phi(t, x_0)$ si P' satisfaisant à :

$$P' = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k)$$

pour une certaine suite $t_k \rightarrow -\infty$.

L'ensemble de tous les points limites ω (respectivement α) est désigné par $\omega(x)$ (respectivement $\alpha(x)$). L'ensemble $\omega(x) \cup \alpha(x)$ est appelé l'**ensemble limite** de $x(t)$.

De plus, l'ensemble limite $\omega(t)$ (respectivement $\alpha(x)$) est dit **invariant** si et seulement si toute trajectoire commençant en un point $y \in \omega(x)$ (respectivement $y' \in \alpha(x)$) reste confinée dans $\omega(x)$ (respectivement dans $\alpha(x)$). Les ensembles invariants, sont appelés aussi **variétés invariantes** [13].

2.3 ESPACE DES PHASES

Définition 2. 3. 1

L'**espace des phases** d'un système dynamique déterministe de dimension n est un espace mathématique muni d'un repère dont les n axes de coordonnées correspondent aux différents **degrés de liberté** (variables caractérisant la dynamique du système). Il sert à représenter (à schématiser) l'évolution des systèmes dynamiques.

2.3.1 QUELQUES PROPRIETES DE L'ESPACE DES PHASES

-**Non intersection des trajectoires** : les différentes trajectoires de l'espace des phases **ne se coupent** jamais (sauf à un point de convergence) [5].

-**Diminution des aires** (respectivement des volumes) : pour le système dissipatif (qui consomme de l'énergie au cours du temps), prenons un domaine de l'espace des

phases (ce qui peut être vu comme un ensemble de conditions initiales), on constate au cours de l'évolution une contraction des aires (des volumes), par conséquent la surface (respectivement le volume) de départ se trouve réduite à un segment lors de l'arrivée sur la trajectoire limite. C'est la perte d'information sur les conditions initiales.

Remarque 2. 3. 1. 1

Le système conservatif (qui conserve de l'énergie) est caractérisé par la conservation des aires

2.4 CONCLUSION

Nous avons donné dans ce chapitre quelques notions mathématiques élémentaires, en commençant par la définition du système dynamique là où le système chaotique (sujet de notre étude) a eu naissance. Puis, nous avons défini l'ensemble limite et l'ensemble invariant qui nous servent à mieux comprendre quelques notions plus compliquées dans le prochain chapitre, en particulier la notion d'attracteur étrange. Enfin nous avons défini un autre outil qui sert à représenter l'évolution des systèmes dynamiques, c'est l'espace des phases, tout en citant quelques propriétés de ce dernier.

Chapitre 3

THEORIE DU CHAOS

3.1 NOTIONS D'ATTRACTEURS

Définition 3. 1. 1

L'**attracteur** est un ω ensemble limite des trajectoires débutant aux points de l'espace des phases correspondants à l'état initial. Schématiquement, l'attracteur est une forme géométrique indécomposable qui caractérise l'évolution à long terme des systèmes dynamiques dans l'espace des phases [19].

3.1.1 PROPRIETES GENERALES

-**Bassin d'attraction** : L'attracteur est inclu dans le bassin d'attraction qui est une partie de l'espace des phases formée de l'ensemble des conditions initiales qui mènent à cet attracteur considéré après un temps fini. Toute orbite amenée par le flot dont le point initial est dans ce bassin, est entièrement contenue dans ce dernier [21].



FIG. 3.1 – Un attracteur et son bassin d'attraction.

Dans la figure (3.1), les trajectoires qui commencent aux points initiaux p, q, r, s sont attirées vers l'attracteur.

-Le **volume** (respectivement surface) de l'attracteur est **nul** (respectivement nulle).

-La **dimension** de l'attracteur est **inférieure** à la dimension de l'espace des phases [5], [13].

-L'**invariance** par le flot.

3.1.2 DIFFERENTS TYPES D'ATTRACTEURS

Il y a trois types d'attracteurs simples correspondants à des systèmes prévisibles où l'état du système peut être calculé de manière très précise à tout instant à partir d'une situation connue [1], [6].

Point fixe : le point fixe est la limite des trajectoires en forme de spirales qui correspondent à la perte de l'énergie.

Cycle limite : le cycle limite est une courbe fermée qui est la limite des trajectoires qui correspondent aux solutions périodiques des systèmes caractérisés par un mouvement oscillatoire périodique.

Tore T^2 (Attracteur quasi-périodique) : l'attracteur torique est une surface en forme de chambre à air qui résulte de la superposition de deux oscillations indépendantes. Les trajectoires dans l'espace des phases, s'enroulent en spirale autour du tore. Dans les systèmes où le mouvement résulte de la combinaison de plus de deux oscillations, les attracteurs sont parfois des tores de dimension supérieure dans les espaces des phases de dimension supérieure.

un autre type d'attracteur apparaît pour les systèmes imprévisibles :

L'attracteur étrange : l'attracteur étrange est une forme géométrique plus complexe qui caractérise l'évolution des systèmes chaotiques. Il n'est pas une surface lisse, mais une surface repliée plusieurs fois sur elle-même, dont les plis imbriqués les uns dans les autres ne se recoupent jamais, il est caractérisé par [5], [29] :

-**La sensibilité aux conditions initiales (s. c. i)** : deux trajectoires initialement très voisines de l'espace des phases s'écartent l'une de l'autre et divergent de façon exponentielle au cours du temps et peuvent se retrouver à deux extrémités opposées de l'attracteur, mais cette divergence est un phénomène local : elle ne peut pas être indéfinie. Il est clair que la moindre erreur ou simple imprécision sur la condition initiale interdit de décider à tout instant quelle sera la trajectoire effectivement suivie et de savoir le devenir à long terme du système. La s. c. i est à l'origine de l'imprévisibilité caractéristique des systèmes chaotiques.

Exemple 3. 1. 2. 1 :L'Attracteur de Rossler

La divergence des trajectoires s'effectue suivant une spirale plane, puis les trajectoires émergent depuis le plan dans l'espace avec retour et réinjection au centre de la spirale et ainsi de suite (voir figure suivante). Cela s'explique par une double

opération : L'étirement nécessaire à la s. c. i suivi d'un repliement sans lequel les trajectoires ne pourraient rester confinées dans un espace borné.

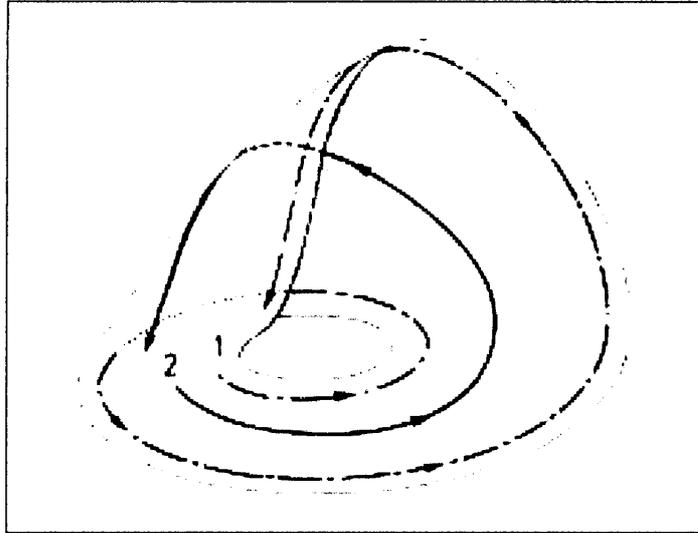


FIG. 3.2 – Evolution de la trajectoire.

-Le **volume** de l'attracteur étrange **est nul**.

-La **longueur** de l'attracteur étrange **est infinie**, bien qu'il soit contenu dans un espace fini.

-Le **mélange** : pour tout point P de l'attracteur, il existe des orbites démarrées dans le bassin d'attraction en x_0 et qui passent aussi près que l'on veut de P en x_k par exemple, mais jamais ne passeront exactement par P . C'est pour ça que l'orbite ne se recoupe jamais. La propriété de mélange est à priori difficile à visualiser de façon satisfaisante, puisqu'aucune méthode n'est donnée pour le choix de x_0 et que le premier terme x_k qui atteint le voisinage de P peut être d'indice très élevé.

-La **dimension fractale** : si on prend le système tridimensionnel, on a :

D'une part, la dimension d de l'attracteur étrange doit être strictement supérieure

à deux ($d > 2$) pour que la s. c. i ait lieu.

D'autre part, le volume de l'attracteur étrange est nul et ça implique que :

$$d < 3$$

On en déduit :

$$2 < d < 3$$

3.2 NOTIONS DE STABILITE

On désigne par stable tout système qui peut résister aux petites perturbations et qui revient vers son régime stationnaire.

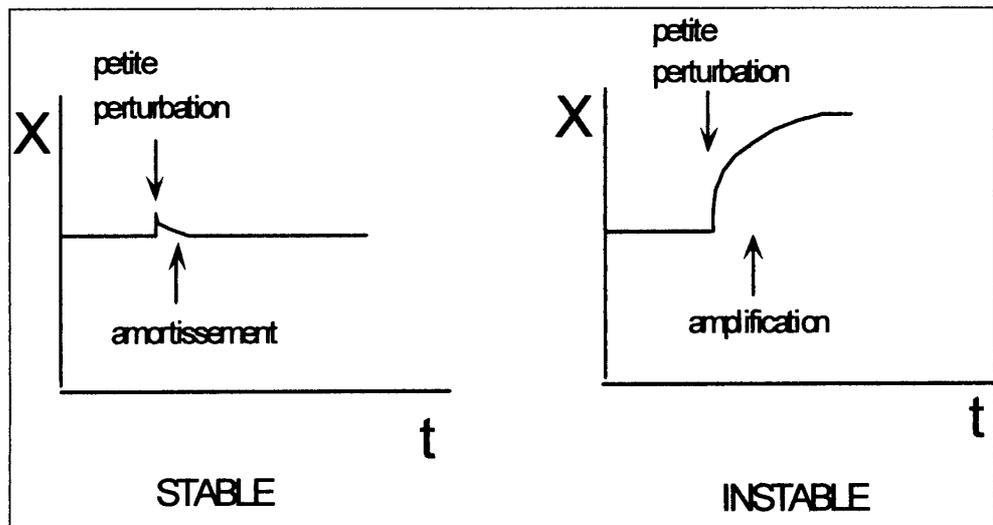


FIG. 3.3 – Résistance aux petites perturbations.

L'étude de la stabilité s'effectue localement autour du point d'équilibre, alors la première étape consiste à trouver ce point :

Le point d'équilibre \bar{x} d'un système autonome [3] :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C^r(u), \quad u \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

est la solution de l'équation algébrique $f(x) = 0$.

C'est une trajectoire particulière et par opposition à toutes les autres trajectoires, c'est la seule à se réduire trivialement à un point, autrement dit :

$$x(t_0) = \bar{x} \Leftrightarrow x(t) = \bar{x}, \quad \text{pour } t \geq t_0$$

Par le changement de variable $\xi = x - \bar{x}$, on peut ramener le point \bar{x} à l'origine.

3.2.1 DEFINITIONS DE STABILITE

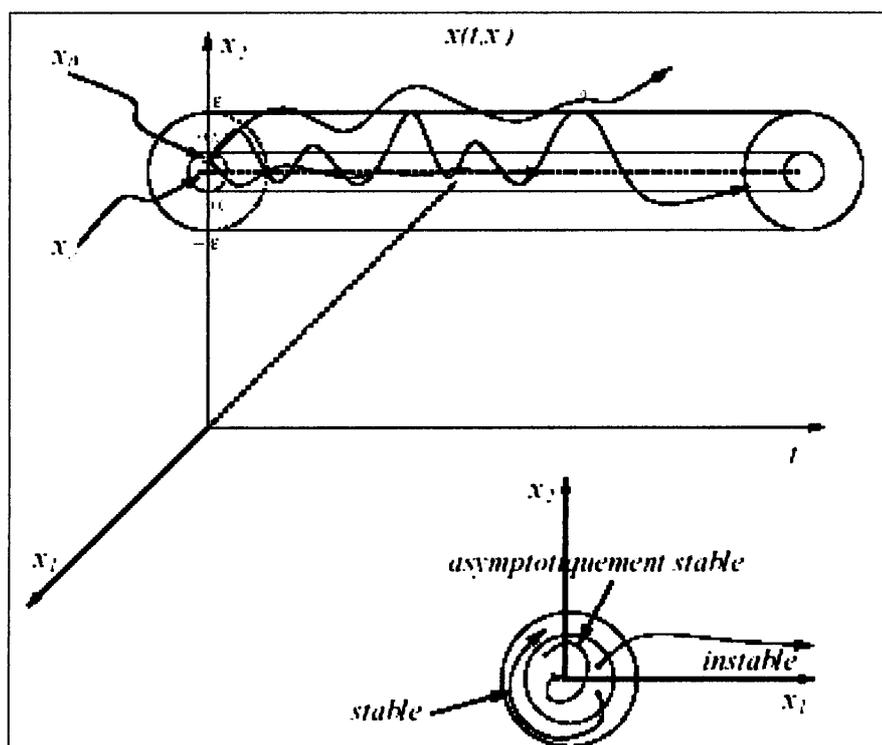


FIG. 3.4 – Stabilité au sens de Lyapunov.

Définition 3. 2. 1. 1 [20] :

Le point d'équilibre \bar{x} est dit **stable au sens de Lyapunov** si pour tout ϵ positif, il existe α positif tel que : $\|x(0) - \bar{x}\| < \alpha$ implique $\|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$, pour tout t positif.

Définition 3. 2. 1. 2

\bar{x} est dit **asymptotiquement stable** s'il est stable au sens de Lyapunov et si de plus, $\|x(t) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ ($\|\cdot\|$ désigne une norme sur l'espace des phases).

Remarque 3. 2. 1. 1

\bar{x} est dit instable, s'il n'est pas stable.

3.2.2 DYNAMIQUE LINEAIRE EN DIMENSION DEUX

On considère dans \mathbb{R}^2 le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2 non nulle à coefficients réels.

La solution générale de (3.2) s'écrit sous la forme [8] :

$$X(t) = e^{At} X_0, \quad (3.3)$$

On étudie le comportement du système au voisinage de 0. À cet effet, on notera λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres de A . Plusieurs cas sont à considérer :

1. Les valeurs propres sont réelles et distinctes

Les composantes des vecteurs colonnes de la matrice de passage de la base canonique vers la base propre dénotée P , sont celles des vecteurs propres associés aux valeurs propres réelles et distinctes λ_1 et λ_2 .

La matrice représentant A dans la base des vecteurs propres s'obtient à partir de son expression dans la base de départ par la formule [26] :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP$$

Où P^{-1} est l'inverse de P . Si on effectue alors le changement de coordonnées $\xi = P^{-1}X$, (3.3) devient :

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \tilde{A}\xi \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Et les solutions s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \xi_1(0) \\ \xi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \xi_2(0) \end{cases} \quad (3.5)$$

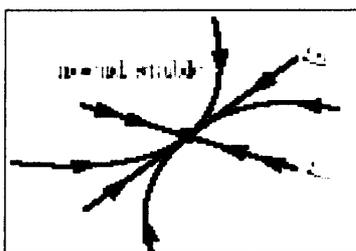


FIG. 3.5 – Un nœud stable.

Lorsque les valeurs propres sont de même signe, on a affaire à un point d'équilibre

de type *nœud stable* ou *instable* suivant que ces valeurs propres sont négatives ou positives.

La figure (3.5) représente un *nœud stable* où les trajectoires ont une allure parabolique. Pour voir un *nœud instable*, il suffit de changer le sens des flèches.

Lorsque les valeurs propres sont de signe opposé, l'origine est un *point selle* (ou *col*). La figure suivante représente un point selle où les trajectoires ont une allure hyperbolique, elle sont rentrantes dans la direction du vecteur propre associé à la valeur propre négative et sortantes dans l'autre direction du vecteur propre associé à la valeur propre positive.

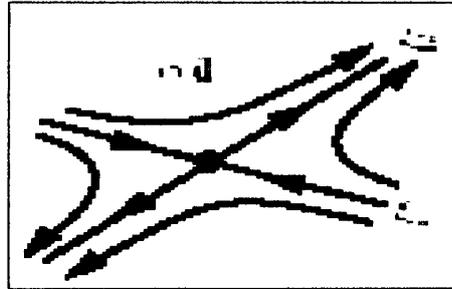


FIG. 3.6 – Un col.

2. Les valeurs propres sont complexes et distinctes

Lorsque les deux valeurs propres sont complexes : $\lambda_1 = \sigma + i \omega$ et $\lambda_2 = \sigma - i \omega$, leurs deux vecteurs propres associés sont également complexes conjugués et distinctes [2]. Si on effectue le changement de coordonnées : $\xi = P^{-1}X$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice de passage P , les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \xi_0 \\ \xi_2(t) = e^{\sigma t} (-\sin \omega t + \cos \omega t) \xi_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Les trajectoires correspondantes sont associées à *un point spiral* appelé *foyer stable* ou *instable* selon le signe de σ . Dans le cas marginal où $\sigma = 0$, on parle de *point elliptique* ou de *centre* (voir la figure suivante).

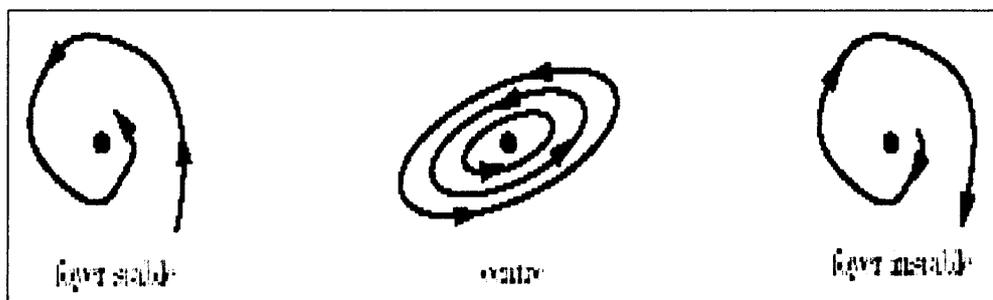


FIG. 3.7 – Un foyer stable, un centre et un foyer instable.

3. Les valeurs propres sont égales et A est diagonalisable

Deux valeurs propres sont égales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Si $a_{12} = 0$ (respectivement $a_{21} = 0$) et de plus $a_{21} = 0$ (respectivement $a_{12} = 0$), alors dans ce cas A est proportionnel à l'opérateur identité I . Le point d'équilibre correspondant stable ou instable (selon le signe de la valeur propre) est appelé *une étoile* (voir la figure suivante) :

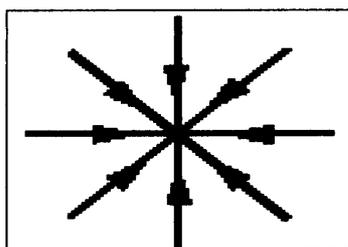


FIG. 3.8 – Une étoile.

4. Les valeurs propres sont égales et A n'est pas diagonalisable

Lorsque les deux valeurs propres sont égales ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), alors : A possède un seul vecteur propre [26]. On représente A par une matrice sous forme normale de Jordan :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dans la base propre, on effectue le changement de coordonnées $\xi = P^{-1}X$, où P^{-1} est l'inverse de la matrice de passage P , les solutions s'écrivent :

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{\lambda t} \xi_1(0) \\ \xi_2(t) = e^{\lambda t} \xi_2(0) + t e^{\lambda t} \xi_1(0) \end{cases} \quad (3.7)$$

On dit que l'origine est *un nœud dégénéré stable* ou *instable* suivant que λ est négative ou positive. La figure suivante représente *un nœud dégénéré stable* :

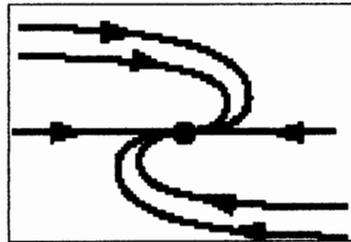


FIG. 3.9 – un nœud dégénéré stable.

Remarque 3. 2. 2. 1

Les points d'équilibre du type *nœud* ou *foyer* sont généralement appelés *puits* s'ils sont stables et *sources* s'ils sont instable.

3.2.3 DYNAMIQUE NON LINEAIRE

La première étape dans l'étude de chaque système dynamique non linéaire consiste à le linéariser.

On considère le système différentiel non linéaire suivant :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in C^r(U), U \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

avec : $x(0) = x_0$

Soit \bar{x} le point d'équilibre, au voisinage duquel on veut tester la stabilité. Au voisinage de \bar{x} , la solution générale x s'écrit : $x = \bar{x} + \zeta$, où ζ est interprétée comme une petite perturbation à \bar{x} .

Le développement de Taylor du premier ordre de $f(x)$ montre que le comportement du système non linéaire ressemble à celui du linéarisé [35] :

$$\frac{d\zeta}{dt} = f(\bar{x}) + J\zeta \quad (3.9)$$

Où J se présente comme matrice Jacobienne de $f(x)$ par rapport à x .

Introduisant la définition du point d'équilibre, on obtient :

$$\frac{d\zeta}{dt} = J\zeta \quad (3.10)$$

Nous sommes donc ramenés à un système dynamique linéaire.

D'après le théorème de *Hartmann-Grobman* (voir annexe A), si le spectre de l'opérateur linéarisé ne contient pas de valeurs propres nulles ou de partie réelle nulle, la linéarisation permet de comprendre l'évolution d'une perturbation infinitésimale.

Si une valeur propre est nulle ou de partie réelle nulle, la linéarisation ne donne pas d'information sur la dynamique du problème non linéaire, même si on peut conclure pour le système linéarisé (3.10) [13].

On suppose que le point d'équilibre ait été ramené à l'origine par un changement de coordonnées et on suppose également que J possède à la fois : s vecteurs propres

$\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ correspondant aux valeurs propres dont la partie réelle est strictement négative, p vecteurs propres $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ correspondant aux valeurs propres dont la partie réelle est strictement positive et k vecteurs propres $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ correspondant aux valeurs propres dont la partie réelle est nulle.

Le théorème d'*Hadamard-Perron* [13], permet d'écrire \mathbb{R}^n en somme directe de sous espaces supplémentaire invariant à J :

$$\mathbb{R}^N = E_- \oplus E_+ \oplus E_0$$

où :

E_- est le sous ensemble engendré par les vecteurs propres $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$.

E_+ est le sous ensemble engendré par les vecteurs propres $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

E_0 est le sous ensemble engendré par les vecteurs propres $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$

Le théorème suivant [13] dit "*théorème de la variété centrale*" précise le comportement de la solution de notre système dynamique au voisinage de $\bar{x} = 0$.

Théorème 3.2.3.1

Il existe des variétés de classe C^k (k suffisamment grand), stable W^- , instable W^+ et centrale W^0 tangentes respectivement à E_- , E_+ et E_0 en \bar{x} . Ces variétés sont invariantes par rapport au flot de $f(x)$.

Le théorème de la variété centrale implique que l'on peut choisir les coordonnées $(z_0, z_-, z_+) \in W^0 \times W^- \times W^+$, l'équation (3.8) devient :

$$\begin{cases} \frac{dz_0}{dt} = A_0 z_0 + f_0(z_0, z_-, z_+) \\ \frac{dz_-}{dt} = A_- z_- + f_-(z_0, z_-, z_+) \\ \frac{dz_+}{dt} = A_+ z_+ + f_+(z_0, z_-, z_+) \end{cases} \quad (3.11)$$

où :

A_0 est la matrice $k \times k$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle nulle.

A_- est la matrice $s \times s$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle négative.

A_+ est la matrice $p \times p$ dont les valeurs propres ont leur partie réelle positive.

f_0 , f_- et f_+ sont des termes non linéaires.

Pour trouver la variété centrale du système [7], on pose :

$$z_- = h_-(z_0), \quad z_+ = h_+(z_0)$$

Portant $h_-(z_0)$ et $h_+(z_0)$ dans l'expression de $\frac{dz_0}{dt}$ dans (3.11), on obtient :

$$\frac{dz_0}{dt} = A_0 z_0 + f_0(z_0, h_-(z_0), h_+(z_0)) \quad (3.12)$$

Le théorème suivant [13] permet de lier la dynamique de (3.12) à celle de (3.11) :

Théorème 3.2.3.2

Si l'origine de (3.12) est localement asymptotiquement stable (respectivement instable), alors l'origine de (3.11) est aussi localement asymptotiquement stable (respectivement instable).

Remarque 3.2.3.1

Pour calculer les fonctions $h_{\pm}(z_0)$, on résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned} Dh_{\pm}(z_0) [A_0 z_0 + f_0(z_0, h_-(z_0), h_+(z_0))] - A_{\pm} h_{\pm}(z_0) \\ - f_{\pm}(z_0, h_-(z_0), h_+(z_0)) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dans la pratique, on résout approximativement (3.13) en développant $h_{\pm}(z_0)$ en série de Taylor autour de $z_0 = 0$ en tenant compte du fait que $h_{\pm}(0) = Dh_{\pm}(0) = 0$.

3.3 NOTIONS DE BIFURCATION

Si pour une valeur donné d'un paramètre, le comportement du système dynamique changent qualitativement, on dit qu'il y a **bifurcation**. Une telle valeur où survient la bifurcation et où se cristallise l'histoire du système est par définition un **point de bifurcation**. Elle permet de savoir si le système est consistant ou non.

La représentation de la solution en fonction du temps consiste un **diagramme de bifurcation**.

On considère maintenant un système dynamique non linéaire dépendant d'un paramètre réel μ :

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

En suivant la démarche précédente, on fournit une étude de la bifurcation à partir de la matrice Jacobienne J tel que

$$J = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial x}$$

Les équations (3.11) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dz_0}{dt} = A_0(\mu)z_0 + f_0(z_0, z_-, z_+, \mu) \\ \frac{dz_-}{dt} = A_-(\mu)z_- + f_-(z_0, z_-, z_+, \mu) \\ \frac{dz_+}{dt} = A_+(\mu)z_+ + f_+(z_0, z_-, z_+, \mu) \\ \frac{d\mu}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (3.15)$$

l'équation de la variété centrale s'écrit alors :

$$z_{\pm} = h_{\pm}(z_0, \mu)$$

On pose $\frac{dz_0}{dt} = G(x, \mu)$ et écrivant cette équation sous la forme d'un développement de Taylor autour de $(\bar{x}, \mu) = (0, 0)$, nous obtenons [13] :

$$\begin{aligned} \frac{dz_0}{dt} = & G(0, 0) + G_{z_0}z_0 + G_{\mu}\mu + \frac{1}{2}(G_{z_0z_0}z_0^2 + 2G_{z_0\mu}\mu z_0 + G_{\mu\mu}\mu^2) \\ & + \frac{1}{6}(G_{z_0z_0z_0}z_0^3 + 3G_{z_0z_0\mu}\mu z_0^2 + 3G_{z_0\mu\mu}\mu^2 z_0 + G_{\mu\mu\mu}\mu^3) + O(z_0, \mu) \end{aligned} \quad (3.16)$$

où G_{z_0} , G_{μ} , $G_{z_0z_0}$, $G_{z_0\mu}$, $G_{\mu\mu}$, $G_{z_0z_0z_0}$, $G_{z_0z_0\mu}$, $G_{z_0\mu\mu}$ et $G_{\mu\mu\mu}$ sont les dérivées partielles évaluées au point $(\bar{x}, \mu) = (0, 0)$.

Suivant des conditions sur ces dérivées partielles de $G(z_0, \mu)$, nous aurons une bifurcation nœud-col, une bifurcation transcritique ou une bifurcation fourche. Pour une étude approfondie, le lecteur est renvoyé vers la référence [7].

Pour mieux comprendre les types de bifurcation, nous donnons un exemple pour chacun de ces types [5]. La démarche d'étude de chaque exemple sera toujours la même : rechercher les points d'équilibre puis les valeurs des paramètres pour les quels le système se déstabilise et enfin rassembler les informations des bifurcations sur les diagrammes correspondants tel que : Les points et les courbes pleins correspondent à des points d'équilibre et branches de solutions stables. Les points vides et les courbes en pointillé correspondent à des points d'équilibre et branches de solution instables.

Il existe plusieurs types de bifurcation [12], [28], parmi lesquelles, on peut citer :

BIFURCATION NŒUD COL

La bifurcation nœud-col est le cas le plus simple des bifurcations. Elle peut survenir dans un système qui n'a pas de point fixe.

Exemple 3.3.1

Soit le système :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (3.17)$$

Il possède trois solutions stationnaires

$$\bar{x}_0 = 0, \bar{x}_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$$

Pour $\mu < 0$, il n'existe aucun point d'équilibre. En faisant augmenter μ , il apparaît le point d'équilibre $\bar{x}_0 = 0$ en $\mu = 0$, augmentant encore μ pour qu'il ne prenne que des valeurs strictement positives, les deux autres solutions apparaissent.

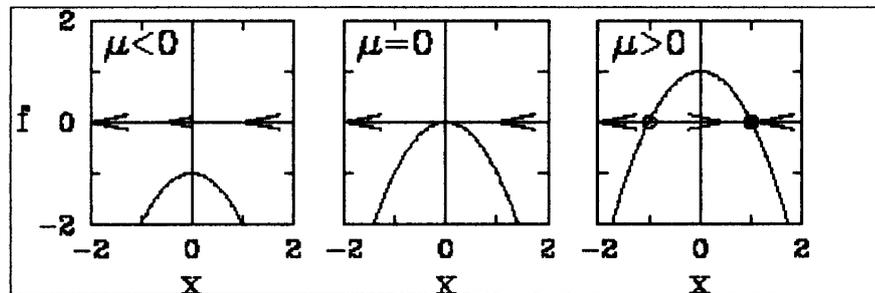


FIG. 3.10 – La fonction $f(x, \mu) = \mu - x^2$ en fonction de μ .

Donc il y a transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucune solution d'équilibre et de deux solutions d'équilibre (l'une est stable, l'autre est instable selon le signe de f).

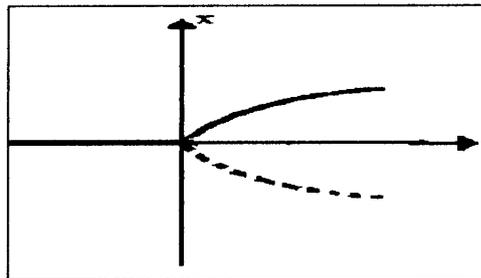


FIG. 3.11 – Diagrammes de bifurcations noeud-cols.

Le diagramme de bifurcation dans la page précédente résume ces informations.

BIFURCATION TRANSCRITIQUE

Exemple 3.3.2

Etudiant le système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2, \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (3.18)$$

Il possède deux solutions stationnaires

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ et } \bar{x}_2 = \mu$$

Ces deux solutions coexistent pour $\mu < 0$, la première solution est stable et devient instable pour $\mu > 0$

On peut vérifier également que la deuxième solution fait le contraire. Il y a donc échange de stabilité entre les deux solutions en $\mu = 0$.

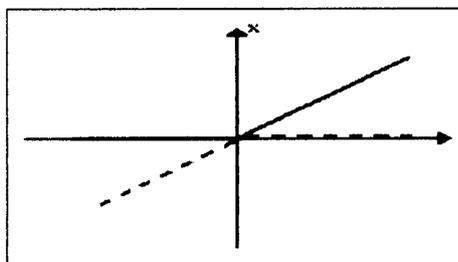


FIG. 3.12 – Diagramme de bifurcation transcritique.

BIFURCATION FOURCHE

Exemple 3.3.3

Considérons l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3, \quad x, \mu \in \mathbb{R} \quad (3.19)$$

Ce système possède trois solutions stationnaires

$$\bar{x}_0 = 0 \text{ et } \bar{x}_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$$

Pour $\mu < 0$, il n'existe que la solution stable \bar{x}_0 qui devient instable à $\mu = 0$.

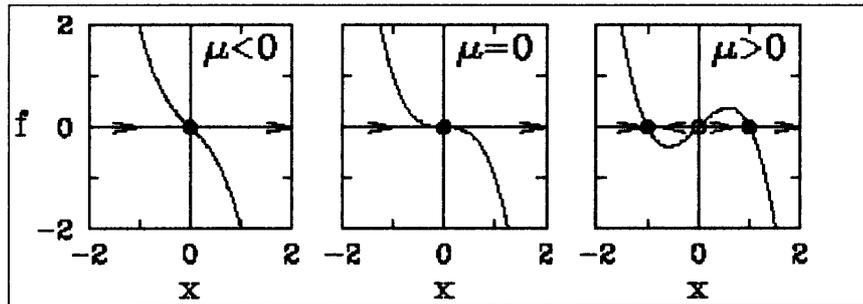


FIG. 3.13 – La fonction $f(x) = \mu x - x^2$ en fonction de μ .

Augmentant encore le paramètre μ , c'est à dire qu'il devient positif, une paire de solutions est créée. Le diagramme de bifurcation est donné dans la figure suivante :

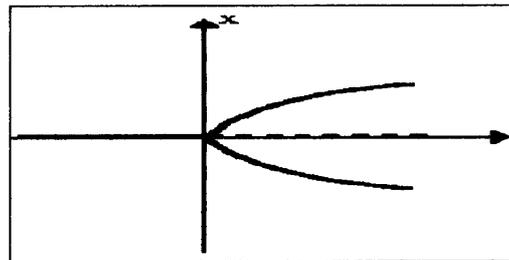


FIG. 3.14 – Diagramme de bifurcation fourche.

Dans un système qui va se déstabiliser par une bifurcation fourche, on doit s'attendre à rencontrer une symétrie des solutions : si $x(t)$ est une solution du système,

alors $-x(t)$ en est aussi.

BIFURCATION DE HOPF

Lorsqu'un point donne naissance à un cycle limite par franchissement d'une valeur critique, on a affaire à quelque chose de très particulier, appelée bifurcation de Hopf. Au point de bifurcation, la paire des valeurs propres complexes conjuguées de la matrice Jacobienne du système traverse l'axe des imaginaires et donc la partie réelle s'anule et un cycle limite se crée

Exemple 3.3.4

Soit l'équation différentielle :

$$\frac{dz}{dt} = (\mu + i\omega)z - |z|^2 z \quad (3.20)$$

Pour faire apparaître ses solutions, il est commode de passer en variables réelles en utilisant un repère soit cartésien, soit polaire. Posant par exemple $z = e^{i\theta}$, l'équation précédente devient :

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \mu r - r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \end{cases} \quad (3.21)$$

Les points d'équilibre dans les coordonnées polaires sont solutions de

$$\frac{dr}{dt} = 0 \quad (3.22)$$

Elles sont données par :

$$r = 0 \text{ et } r = \pm\sqrt{\mu}$$

L'équation $\frac{dr}{dt} = \mu r - r^3$ décrit une bifurcation de fourche et l'équation $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ décrit une rotation.

La figure suivante montre le comportement au voisinage d'une bifurcation de Hopf.

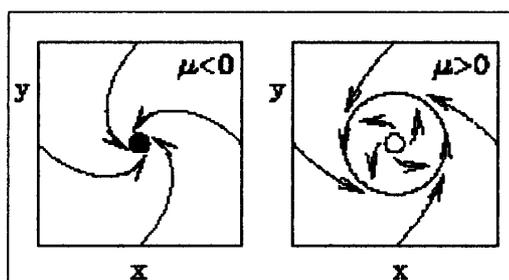


FIG. 3.15 – Le comportement des trajectoires pour $\mu < 0$ et pour $\mu > 0$

Pour $\mu < 0$, le seul point d'équilibre est l'origine qui est stable. La création du cycle limite stable en $\mu = 0$ a rendu instable le point d'équilibre stationnaire.

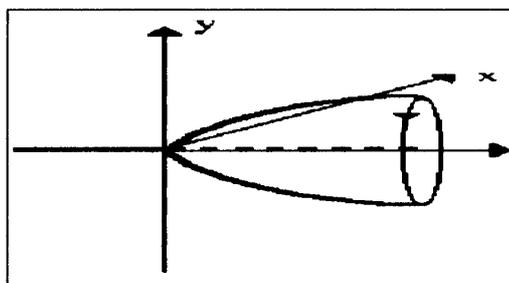


FIG. 3.16 – diagrammes de bifurcation montrant les solutions en fonction de μ .

Remarque 3.3.1

Les exemples précédents correspondent tous à des situations surcritiques, on entend par là que les termes non linéaires ont un effet opposé à celui de l'instabilité engendré par le terme d'ordre moins élevé. En changeant le signe du terme non linéaire, les propriétés de stabilité s'inversent et la bifurcation est dite sous critique.

3.4 TRANSITION VERS LE CHAOS.

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dits **paramètres de contrôle**, qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondantes à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle peut conduire à une modification de la nature des régimes dynamiques développés dans le système.

La question qui se pose ici est : quelle sont les voies qui mènent un système dynamique d'un comportement régulier vers un autre d'un comportement chaotique. C'est de cette question qu'est née la notion de "routes" vers le chaos (ou encore "scénarios"). On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais elle est marquée par des bifurcations. On parle également, lors d'une telle transition, d'une perte de stabilité structurelle. Les divers routes vers le chaos passent le plus souvent par l'étape du régime périodique. Le classement de ces scénarios revient alors à les trier suivant la manière dont le cycle limite peut perdre sa stabilité [4].

Dans le système d'ordre 2, la solution périodique sera un cercle, une ellipse ou toute forme géométrique fermée. Et pour revenir à son état initial, le système met exactement une période. L'étude de la stabilité non plus d'un point d'équilibre du flot, mais d'une solution périodique n'est pas aisée pour le système d'ordre supérieur à 2. La **section de Poincaré** [24] permet de contourner cette difficulté et d'effectuer l'étude sans être obligé de suivre le flot pas à pas.

Nous allons exposer brièvement la notion de section de Poincaré :

3.4.1 SECTIONS DE POINCARÉ

CONSTRUCTION ET PROPRIETES

La **section de Poincaré** est l'intersection d'un attracteur d'un système à n degrés de liberté avec un sous ensemble de \mathbb{R}^n selon un sens d'évolution donné [5], [13]. On s'intéresse au cas tridimensionnel (flot continu dans \mathbb{R}^3). A partir d'une condition initiale, on obtient un ensemble de points formant la section de Poincaré (une carte de dimension 2).

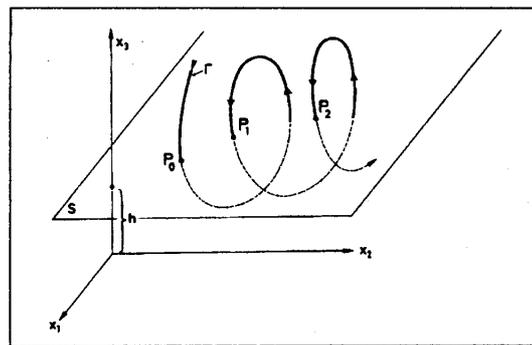


FIG. 3.17 – Section de Poincaré.

INTERET PRATIQUE DE LA METHODE DE POINCARÉ

- La réduction d'une unité du nombre de coordonnées.
- La discrétisation du temps permet à substituer aux équations différentielles des équations algébriques définissant l'application de Poincaré.
- La section de Poincaré réserve le même genre de propriétés topologiques que le

flot : sa construction (nature) et les caractéristiques structurelles de l'attracteur qu'il possède [5].

DIFFERENTS TYPES DE SECTION DE POINCARÉ

(a) SOLUTION PERIODIQUE

Lorsque la solution est périodique, la trajectoire tend vers un cycle limite. La section de Poincaré est donc un point fixe P_0 de l'application T tel que :

$$P_0 = T(P_0) = T^2(P_0) = \dots$$

L'application continue T est décrite par la matrice M dite matrice de Floquet (voir Annexe B) tel que :

$$T(P_0 + \delta) - P_0 \simeq M\delta, \|\delta\| \rightarrow 0$$

Et la solution de la trajectoire dépend des valeurs propres de M .

Si on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$ les valeurs propres de M , alors : Si $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, 2, \dots, N - 1$, l'orbite périodique est stable.

(b) SOLUTION BI-PERIODIQUE

Lorsque la solution est bi périodique à deux fréquences f_1 et f_2 , la trajectoire tend vers un tore T^2 , la section de Poincaré est donc des intervalles de temps réguliers égaux à la période du premier mouvement.

(c) SOLUTION APERIODIQUE

Pour la solution apériodique, la section de Poincaré est une surface mais si la dynamique apériodique est fortement dissipative, alors la section de Poincaré est une simple courbe.

3.4.2 CHEMINS VERS LE CHAOS

On cite ici les trois routes vers le chaos les plus célèbres [5] :

PASSAGE PAR LA QUASI-PERIODICITE

La théorie de *Ruelle-Takens* proposée en 1971 a remis fondamentalement en cause le mécanisme imaginé par *Landau* lequel une infinité de bifurcations de Hopf successives et donc une infinité de degrés de liberté serait nécessaire pour engendrer la turbulence. *Ruelle* et *Takens* ont montré qu'un petit nombre de bifurcations suffirait à produire un comportement chaotique [34]. Cette idée peut être représentée de la façon suivante : On suppose qu'un système dynamique (tel que l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux) possède un point attracteur T^0 de dimension 0, par augmentation d'un paramètre de contrôle, une bifurcation de Hopf transforme ce point attracteur en un attracteur périodique T^1 de dimension 1 (oscillant à une fréquence f_1). La deuxième bifurcation de Hopf transforme l'attracteur périodique T^1 en un attracteur quasi-périodique T^2 de dimension 2 (à deux fréquences f_1 et f_2). La troisième bifurcation de Hopf transforme l'attracteur quasi-périodique T^2 en un autre quasi-périodique T^3 de dimension 3 (avec trois fréquences f_1 , f_2 et f_3). Après certaines perturbations, l'attracteur T^3 perd sa stabilité et se détruit en laissant place à un attracteur étrange.

Une autre route passant aussi par la quasi-périodicité est celle où le chaos apparaît directement à partir d'un régime quasi-périodique à 2 fréquences, ce qui nécessite la manifestation d'un autre degré de liberté. La preuve de l'existence ne découle pas d'une théorie rigoureusement démontrée, mais plutôt d'expériences numériques [4].

PASSAGE PAR LA CASCADE SOUS HARMONIQUE

En augmentant le paramètre de contrôle, la période T (fréquence f_1) du mouvement se met à doubler, cela se traduit par l'apparition d'un tore T^2 (de période 2), le phénomène se reproduit successivement donnant naissance aux solutions de périodes $4T, 8T, \dots$ dont chaque étape s'accompagne du doublement de la période. On assiste ainsi à une cascade sous harmonique qui aboutit finalement au chaos [5].

PASSAGE PAR LES INTERMITTENCES

Le comportement caractéristique des intermittences est celui d'un régime qui est régulier pendant un certain intervalle de temps et qu'il est interrompu brutalement par une fluctuation anormale lorsque le paramètre de contrôle dépasse légèrement une valeur critique dite seuil d'intermittence. Le régime reprend ensuite son comportement régulier et le processus recommence. Les "bouffées" s'accroissent spontanément en s'éloignant du seuil d'intermittence jusqu'à ce que le régime devienne entièrement chaotique.

Il existe trois types de transition par intermittence, la classification [4] en intermittence de type I, II et III repose sur l'analyse des trajectoires des multiplicateur de Floquet rapport au cercle unité dans le plan complexe (voir Annexe B) : Le type I

est réalisé en traversant le cercle unité par (+1), le type II par (-1) et enfin, le type III par deux valeurs propres complexes conjuguées [5].

3.5 CARACTERISATION DU CHAOS

On s'intéresse dans cette section à l'étude de la détermination effective des phénomènes de dépendance sensible aux conditions initiales et leur structure fractale afin de pouvoir caractériser le chaos présent dans un régime dynamique complexe observé expérimentalement.

3.5.1 EXISTENCE DE L'ATTRACTEUR ETRANGE

(Voir la section 3.1).

3.5.2 SERIES TEMPORELLES ET SPECTRE DE PUISSANCE

Les informations acquises se présentent le plus souvent sous la forme de séries temporelles de mesure effectuées sur le système. Il s'agit donc d'un problème de traitement du signal qui a pour intérêts essentiels :

- La description du passage vers un régime chaotique d'un système dynamique.
- La reconstruction des orbites dans un pseudo espace des phases (construction d'un système équivalent) pour déterminer les propriétés significatives de la structure topologique de l'attracteur.

La **série temporelle** est la valeur d'une des variables du système dynamique, soit $x(t)$ cette variable.

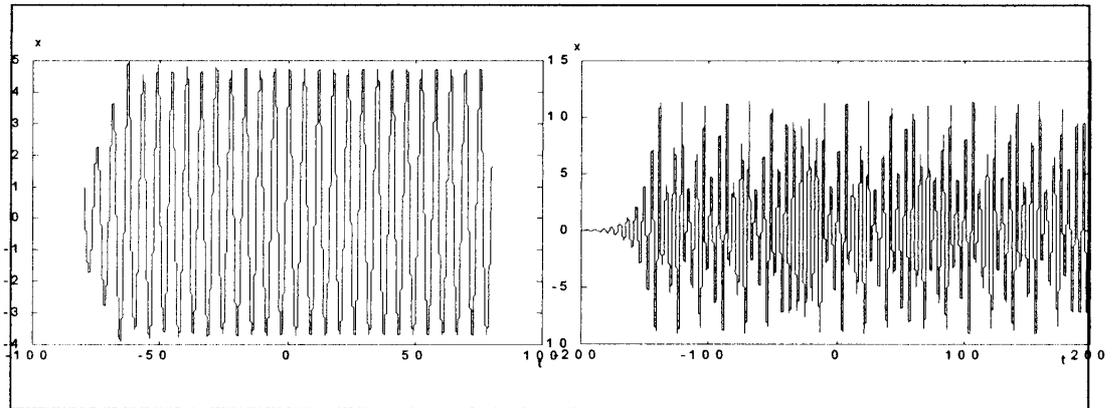


FIG. 3.18 – Le modèle de Rossler (chapitre 5). (a) Signal périodique ($c=2.5$).
(b) Signal aperiodique ($c=5.7$).

Le **spectre de puissance (ou de Fourier)** de $x(t)$ (On suppose que $x(t)$ est intégrable) est la quantité :

$$S(s) = |X(s)|^2$$

$X(s)$ est la transformation de Fourier de $x(t)$ dans \mathbb{C} et elle est donnée par :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2ist} dt$$

Numériquement [17], on utilise la transformation de Fourier discrète :

$$X(n \Delta s) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k \Delta t) e^{-\frac{i2\pi nk}{N}}$$

Avec

$$\Delta s = \frac{1}{N \Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Si $x(t)$ est une variable de l'espace des phases, alors sa partie imaginaire est nulle. En donnant N et Δt , $x(k \Delta t)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ seront calculés par la méthode de Runge-Kutta [8].

Alors le spectre de puissance est donné par :

$$S(n \Delta s) = |X(n \Delta s)|^2$$

Le spectre de puissance du signal périodique ou quasi-périodique est discontinu, mais il est continu si le signal est apériodique.

3.5.3 EXPOSANTS DE LYAPUNOV

L'**exposant de Lyapunov** sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à de très petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations de condition initiale, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales au sens de Shannon.

En résumé, l'exposant de Lyapunov est l'opposé de la stabilité.

Un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace des phases. L'apparition du chaos exige l'existence d'un exposant de Lyapunov positif selon au moins un axe [5], tout en rendant compte que la somme des exposants est négative (respectivement nulle) pour les systèmes dissipatifs (respectivement conservatifs).

CARACTERISATION D'UN ATTRACTEUR

Un exposant de Lyapunov positif (respectivement négative) selon une direction

| Type d'attracteur | Signe des exposants de Lyapunov |
|--------------------|---------------------------------|
| Point fixe | - - - |
| Cycle limite | 0 - - |
| Tore T^2 | 0 0 - |
| Attracteur étrange | + 0 - |

TAB. 3.1 – Caractérisation des attracteurs

indique [4], [11] qu'une divergence entre deux trajectoires voisines augmente (respectivement diminue) exponentiellement avec le temps. C'est une caractérisation d'un attracteur étrange ou non.

Le tableau ci-dessus nous indique les différents types d'attracteurs d'un système tridimensionnel en fonction des signes des exposants de Lyapunov.

CALCUL DES EXPOSANTS DE LYAPUNOV

Soit le système continu :

$$\frac{dx}{dt} = f(x); f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Les exposants de Lyapunov sont donnés [13] par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \left(\frac{\|v_i(t)\|}{\|v_i(t_0)\|} \right); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

A chaque pas de temps, les n vecteurs v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, définis à $t = 0$ par :

$$\left\{ v_i = (0, 0, \dots, 0, \underset{\downarrow}{1}, 0, \dots, 0); \quad i = 1, 2, \dots, n \right. \quad (3.23)$$

seront calculés avec une méthode d'intégration numérique (par exemple Runge-Kutta d'ordre 4) par :

$$v'_i(t) = J(x).v_i(t)$$

Où J est la matrice Jacobienne de f . Ils sont orthonormés par le procédé de Gram-Schmid.

3.5.4 DIMENSION FRACTALE

On a vu dans la sous-section 3.1.2 que la dimension fractale est l'une des propriétés importantes de l'attracteur étrange. Pour deux ensembles A et B dans \mathbb{R}^n , elle vérifie les propriétés suivantes [13] :

1. Si $A \subset B$, alors $d(A) \leq d(B)$.
2. Si $A = \emptyset$, alors $d(A) = 0$.
3. $d(A \cup B) = \max(d(A), d(B))$.

Il existe plusieurs types de dimensions, les plus célèbres [11], [18] sont :

DIMENSION DE KOLMOGOROV (DE CAPACITE)

Considérons un segment de longueur L . Ce segment peut toujours être recouvert par $N(\epsilon)$ petits segments de longueur ϵ .

$$\text{Où } N(\epsilon) = L \left(\frac{L}{\epsilon}\right).$$

Pour un carré de côté L , on peut avoir un recouvrement par $N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^2$ petits carrés de côté ϵ .

$$\text{En général, on a } N(\epsilon) = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^d.$$

En passant au logarithme, on obtient :

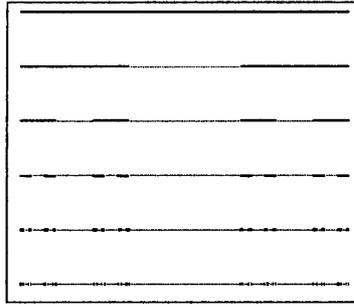


FIG. 3.19 – Ensemble de Cantor.

$$d = \frac{\log N(\epsilon)}{\log L - \log \epsilon} \quad (3.24)$$

A la limite pour de très petits ϵ , le terme $\log L$ dans (3.24) devient négligeable devant $-\log \epsilon$, d'où la définition de la dimension de capacité d_c [24] :

$$d_c = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (3.25)$$

En appliquant par exemple la définition (3.25) à :

Ensemble de Cantor, on trouve : $d_c \simeq 0.6309$ et au Triangle de Sierpinski, on trouve : $d_c \simeq 1.5849$.

DIMENSION DE HAUSDORFF

Soit M un ensemble de \mathbb{R}^n recouvert par des ensembles A_i de petits diamètres

C'est-à-dire :

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad 0 < \delta(A_i) \leq \epsilon$$

On définit la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle [23] par :

$$\mu_d(A) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^d, \quad |A_i| \leq \epsilon \right.$$

La dimension de Hausdorff de l'ensemble M est le réel d_H défini par :

$$\mu_d(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } d > d_H \\ +\infty & \text{si } d < d_H \end{cases} \quad (3.26)$$

Dans plusieurs cas, la dimension de Hausdorff est égale à la dimension de capacité grâce au théorème de Hutchinson [13] suivant :

Théorème 3.5.4.1 (Hutchinson)

Si l'ensemble M est l'attracteur d'un système de fonctions itérées :

$$\{\omega_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Avec un facteur de contraction S_i , $i = 1, 2, \dots, N$ et si les images des ω_i sont déconnectées ou seulement juxtaposées, alors $d_H = d_c = D$, où D est l'unique solution de :

$$|s_1|^D + |s_2|^D + \dots + |s_N|^D = 1$$

Si $d_H > 0$, alors $\mu_{d_H}(M)$ est un réel positif.

EXPOSANT DE LYAPUNOV ET DIMENSION FRACTALE

(a) DIMENSION DE KAPLAN ET YORK

Soit j un entier positif tel que :

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$$

C'est à dire, il y a un rétrécissement d'un facteur $e^{\sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i t}$ et un allongement d'un facteur $e^{\sum_{i=1}^j \lambda_i t}$.

On définit la dimension de Kaplan et York D_{xy} par :

$$D_{xy} = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (3.27)$$

(b) DIMENSION DE MORI

Soient m_0 le nombre d'exposants de Lyapunov nul, m_+ le nombre d'exposants de Lyapunov positif, $\overline{\lambda}_+$ la moyenne des exposants positifs et $\overline{\lambda}_-$ celle des exposants négatifs.

On définit la dimension de Mori D_M par :

$$D_M = m_0 m_+ \left(1 + \frac{\overline{\lambda}_+}{|\overline{\lambda}_-|} \right) \quad (3.28)$$

3.6 CONCLUSION

La théorie du chaos est vaste, pour la bien comprendre il faut savoir comment atteindre ce phénomène (le chaos) et comment le caractériser. La variation du paramètre de contrôle peut conduire à une variation de la nature des régimes dynamiques, c'est à dire un système d'un comportement régulier peut perdre sa stabilité et évoluer vers un autre d'un comportement chaotique en impliquant une série de bifurcation. Cette transition suit des chemins dits "chemins vers le chaos" qu'on n'a pas encore

pu savoir sous quelles conditions ses phénomènes (de transition vers le chaos) se produisent. Les trois voies célèbres vers le chaos sont : *La quasi-périodicité, la cascade sous harmonique et les intermittences.*

Pour rendre quantitatives les observations faites sur des systèmes chaotiques, nous avons présenté dans la deuxième partie de ce chapitre des moyens quantitatifs souvent complémentaires entre elles : *la série temporelle, le spectre de Fourier, la dimension fractale* dont nous avons donné la définitions de plusieurs dimension : *dimension de Kolmogorov, dimension de Kaplan et York et dimension de Mori.* Ces deux dernières dimensions sont fonction des *exposants de Lyapunov* dont nous avons présenté une méthode pour les calculer.

Chapitre 4

APPLICATION AU MODELE DE CHEN

4.1 HISTORIQUE

La chaotification du système de Lorenz [25] contrôlé a mené à la découverte d'un nouveau système chaotique appelé système de Chen, dont le comportement dynamique de ce dernier est plus compliquée que le comportement du premier [9], [35].

Le système de Lorenz contrôlé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - y - xz + u \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (4.1)$$

où x , y et z sont fonctions de t et $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$, a , b et c sont des constantes et u est un

contrôleur linéaire de la forme :

$$u = k_1x + k_2y + k_3z$$

La détermination de u revient à la détermination de k_1 , k_2 et k_3 .

Les points d'équilibre de (4.1) sont :

$$l_1(0, 0, 0), l_{2,3} \left(K, K, \frac{K^2}{b} \right)$$

avec :

$$K = \frac{k_3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_3^2 + 4b(c + k_1 + k_2 - 1)}$$

k_1 , k_2 , et k_3 sont choisies de sorte que le système a un comportement chaotique [10]. D'où :

$$k_1 = -a, k_2 = 1 + c, k_3 = 0$$

Par conséquent, le contrôleur est donc donné par :

$$u = -ax + (1 + c)y$$

et (4.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (4.2)$$

Le système (4.2) est appelé **système de Chen**.

4.2 ETUDE DE MODELE DE CHEN

4.2.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME

L'espace des phases du système de Chen (4.2) est tridimensionnel (x, y, z) ainsi que l'espace de contrôle (a, b, c) .

Le flot est invariant par la symétrie $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ et l'axe z est invariant.

La symétrie persiste pour toutes les valeurs de paramètres.

Pour $a = 35$, $b = 3$ et $c > 0$, on a la divergence de champ de vitesse :

$$\nabla v = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$$

Du système (4.2), on trouve :

$$\nabla v = -a + c - b$$

Le système est donc dissipatif pour $c < a + b = 38$.

Pour $c = 28$, la divergence est toujours constante et négative ($\nabla v = -10$).

Si un ensemble de conditions initiales occupe à l'instant $t = 0$ un volume $\Omega(0)$, alors les trajectoires rempliront à l'instant t un volume $\Omega(t)$ tel que :

$$\Omega(t) = \Omega(0) \exp \{ - (a + b - c) t \}$$

On constate que le volume décroît au cours du temps. Le système possède donc un ensemble attractant de volume nul.

CALCUL DES POINTS D'EQUILIBRE

| c | Points d'équilibre |
|-------------|--------------------|
| < 17.5 | c_1 |
| ≥ 17.5 | c_1, c_2, c_3 |

TAB. 4.1 – Points d'équilibre du modèle de Chen

Les points d'équilibre sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0 = a(y - x) \\ 0 = (c - a)x + cy - xz \\ 0 = xy - bz \end{cases} \quad (4.3)$$

D'où :

$$c_1(0, 0, 0), \quad c_2\left(+\sqrt{b(2c - a)}, +\sqrt{b(2c - a)}, 2c - a\right) \text{ et} \\ c_3\left(-\sqrt{b(2c - a)}, -\sqrt{b(2c - a)}, 2c - a\right)$$

Le tableau (4.1) indique leur naissance lorsque le paramètre de contrôle c varie.

ETUDE DE LA STABILITE

L'étude de la stabilité revient à l'étude des signes des valeurs propres de la matrice

Jacobienne au voisinage de chacun des points d'équilibre pour $a = 35$, $b = 3$.

STABILITE DE L'ORIGINE

La matrice Jacobienne autour de l'origine est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation suivante :

$$(-b - \lambda) (\lambda^2 + \lambda(a - c) - 2ac + a^2) = 0$$

$$\text{Donc : } \lambda_1 = -b, \lambda_2 = \frac{c-a-\sqrt{(a-c)^2+4a(2c-a)}}{2} \text{ et } \lambda_3 = \frac{c-a+\sqrt{(a-c)^2+4a(2c-a)}}{2}.$$

On a : λ_1 est toujours négative pour tout c .

Pour $0 < c < 16.24$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres complexes de partie réelle négative (l'origine est un foyer asymptotiquement stable "un puit").

Pour $16.24 < c < \frac{a}{2}$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles négatives (l'origine est un noeud impropre asymptotiquement stable "un puit").

Pour $c > \frac{a}{2}$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles positives (l'origine est point selle).

Pour $c = \frac{a}{2}$, les valeurs propres deviennent : $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = -\frac{a}{2}$ et $\lambda_3 = 0$.

On étudie la stabilité de l'origine à l'aide de la théorie de la variété centrale (voir la sous section 3.2.3).

Les vecteurs propres associés sont : $v_1(0, 0, 1)^T$, $v_2(2, 1, 0)^T$ et $v_3(1, 1, 0)^T$.

On passe à la base des vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

On considère ϵ comme une nouvelle variable et on écrit le système sous la forme standard. Pour cela, nous posons $c = \frac{a}{2} + \epsilon$ et par transformation inverse, nous

obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \epsilon \end{pmatrix} + (u+2v) \begin{pmatrix} 2\epsilon - 2w \\ -\epsilon + w \\ u + v \\ 0 \end{pmatrix} + (u+v) \begin{pmatrix} 2\epsilon \\ -\epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -b$ et $\lambda_3 = -\frac{a}{2}$.

On pose :

$$v = h_1(u, \epsilon), \quad w = h_2(u, \epsilon), \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$f(u, v, w, \epsilon) = (u + 2h_1(u, \epsilon))(2\epsilon - 2h_2(u, \epsilon)) + (u + h_1(u, \epsilon))(2\epsilon),$$

$$g(u, v, w, \epsilon) = (u + 2h_1(u, \epsilon)) \begin{pmatrix} -\epsilon + h_2(u, \epsilon) \\ u + h_1(u, \epsilon) \end{pmatrix} + (u + h_1(u, \epsilon)) \begin{pmatrix} -\epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le développement de Taylor de $h_1(u, \epsilon)$, $h_2(u, \epsilon)$, $Dh_1(u, \epsilon)$ et $Dh_2(u, \epsilon)$ au voisinage de $(u, \epsilon) = (0, 0)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
h_1(u, \epsilon) &= b_{11}\epsilon^2 + b_{12}u\epsilon + a_{12}u^2 + \dots \\
h_2(u, \epsilon) &= b_{21}\epsilon^2 + b_{22}u\epsilon + a_{22}u^2 + \dots \\
Dh_1(u, \epsilon) &= b_{12}\epsilon + 2a_{12}u + \dots \\
Dh_2(u, \epsilon) &= b_{22}\epsilon + 2a_{22}u + \dots
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Les fonctions $h_1(u, \epsilon)$ et $h_2(u, \epsilon)$ sont calculées à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} Dh_1(u, \epsilon) \\ Dh_2(u, \epsilon) \end{pmatrix} [A_1u + f(u, h_1(u, \epsilon), h_2(u, \epsilon), \epsilon)] \\
&-A_2 \begin{pmatrix} h_1(u, \epsilon) \\ h_2(u, \epsilon) \end{pmatrix} - g(u, h_1(u, \epsilon), h_2(u, \epsilon), \epsilon) = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Simplifiant (4.7) et annulant les coefficients des puissances de u et de ϵ , on obtient :

terme en ϵ^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2}b_{11} &= 0 \Rightarrow b_{11} = 0 \\
-bb_{21} &= 0 \Rightarrow b_{21} = 0
\end{aligned}$$

terme en u^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2}a_{12} &= 0 \Rightarrow a_{12} = 0 \\
-ba_{22} + 1 &= 0 \Rightarrow a_{22} = \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

terme en $u\epsilon$:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{2}b_{12} + 2 &= 0 \Rightarrow b_{12} = -\frac{4}{a} \\
-bb_{22} &= 0 \Rightarrow b_{22} = 0
\end{aligned}$$

en substituant les termes a_{12} , a_{22} , b_{11} , b_{12} , b_{21} , b_{22} dans (4.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
v = h_1(u, \epsilon) &= -\frac{4}{a}u\epsilon + \dots \\
w = h_2(u, \epsilon) &= \frac{1}{b}u^2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Enfin, portant (4.8) dans (4.5), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 4u\epsilon + \dots \\ \dot{\epsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Le seul point d'équilibre de (4.9) $u = 0$ est stable pour $\epsilon < 0$, instable pour $\epsilon > 0$.

STABILITE DES POINTS C_2, C_3

La matrice Jacobienne dans ce cas est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \mp \sqrt{b(2c-a)} \\ \pm \sqrt{b(2c-a)} & \pm \sqrt{b(2c-a)} & -b \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(a+b-c) + \lambda(bc) + 2ab(2c-a).$$

On pose :

$$A_1 = a + b - c,$$

$$A_2 = bc,$$

$$A_3 = 2ab(2c - a)$$

Les relations entre les racines du polynôme caractéristique et ses coefficients s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = -(a + b - c) \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 & = bc \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = -2ab(2c - a) \end{cases} \tag{4.10}$$

Pour $\frac{a}{2} < c < a + b$, les coefficients A_1 , A_2 et A_3 sont tous positifs. D'où l'existence d'une racine réelle négative [15]. On note λ_1 cette valeur propre.

On pose :

$$\lambda = \alpha - \frac{A_1}{3}$$

On obtient le polynôme réduit :

$$k(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q$$

avec :

$$\begin{aligned} p &= \frac{-A_1^2}{3} + A_2, \\ q &= \frac{2A_1^3}{27} - \frac{A_1A_2}{3} + A_3. \end{aligned}$$

Nous utilisons les formules de Cardan (Voir annexe C) pour résoudre ce polynôme, pour $a = 35$, $b = 3$ et $\frac{a}{2} < c < a + b$:

Le discriminant est :

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2$$

Pour $17.5 < c < 17.587$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles et négatives (c_1 et c_2 sont deux noeuds impropres asymptotiquement stables "deux puits").

Si c est **légèrement** plus grand que **17.587**, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres complexes et conjuguées $\lambda_{1,2} = \lambda_r \pm i\lambda_c$ et le système (4.10) devient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_r & = -(a + b - c) \\ \lambda_r^2 + \lambda_c^2 + 2\lambda_1\lambda_r & = bc \\ \lambda_1(\lambda_r^2 + \lambda_c^2) & = -2ab(2c - a) \end{cases} \quad (4.11)$$

La partie réelle de ces valeurs propres est négative (c_1 et c_2 sont deux foyers asymptotiquement stables "deux puits").

Si c continue de croître, on obtient $\lambda_r = 0$ pour $c \simeq 20.07$, où la bifurcation de Hopf apparaît (c_1 et c_2 deviennent deux points selles pour $c > 20.07$).

CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE

Pour $c < \frac{a}{2}$, le seul point d'équilibre est l'origine et il est asymptotiquement stable.

Pour $c = \frac{a}{2}$, l'origine perd sa stabilité et deux autres points d'équilibre asymptotiquement stables apparaissent. C'est la bifurcation fourche.

Pour $c = 20.07$, les deux points d'équilibre perdent leur stabilité à cause de la bifurcation de Hopf qui donne naissance à un attracteur étrange en $c = 28$.

4.2.2 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

Afin de donner une évidence numérique sur le caractère chaotique du système (4.2), on présente brièvement quelques résultats.

ATTRACTEUR ETRANGE

Pour les paramètres suivants :

$$a = 35, b = 3 \text{ et } c = 28$$

Le système (4.2) exhibe un attracteur étrange (ainsi que ses projections) que nous représentons dans les figures suivantes :

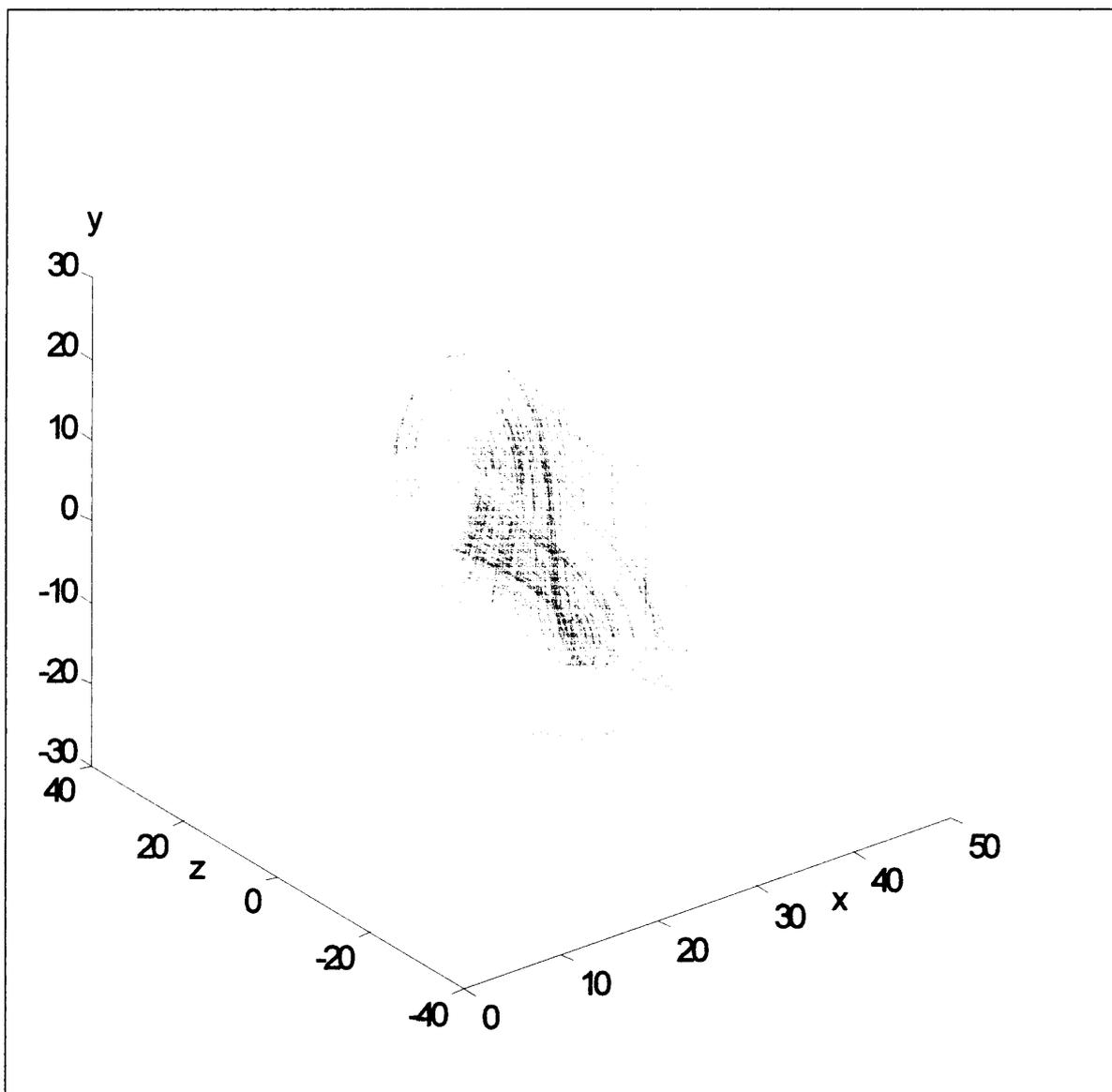


FIG. 4.1 – L'attracteur étrange de Chen dans l'espace (z, x, y) .

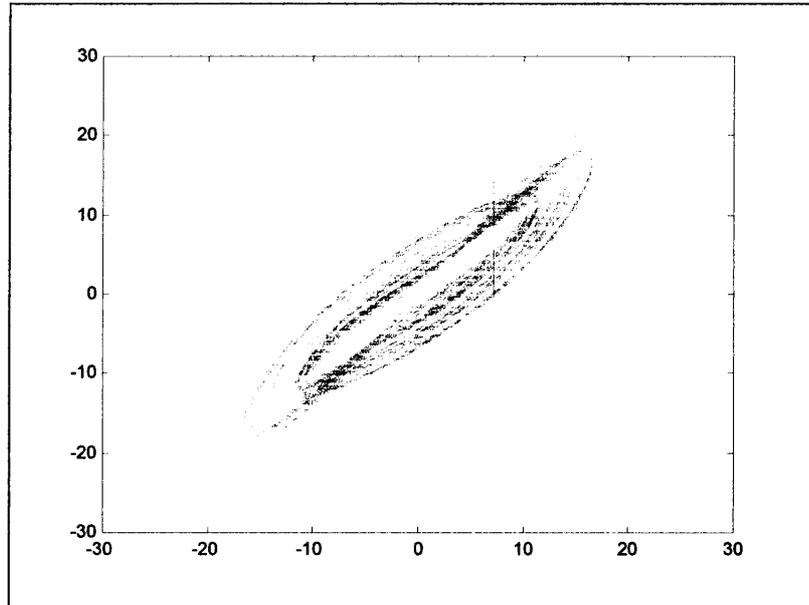


FIG. 4.2 – Projection de l'attracteur étrange de Chen sur le plan (x, y) .

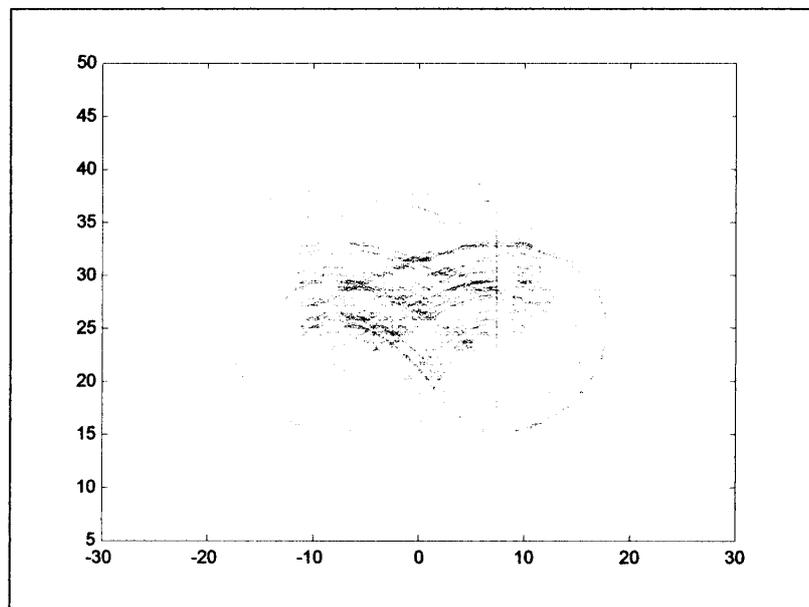


FIG. 4.3 – Projection de l'attracteur étrange de Chen sur le plan (y, z) .

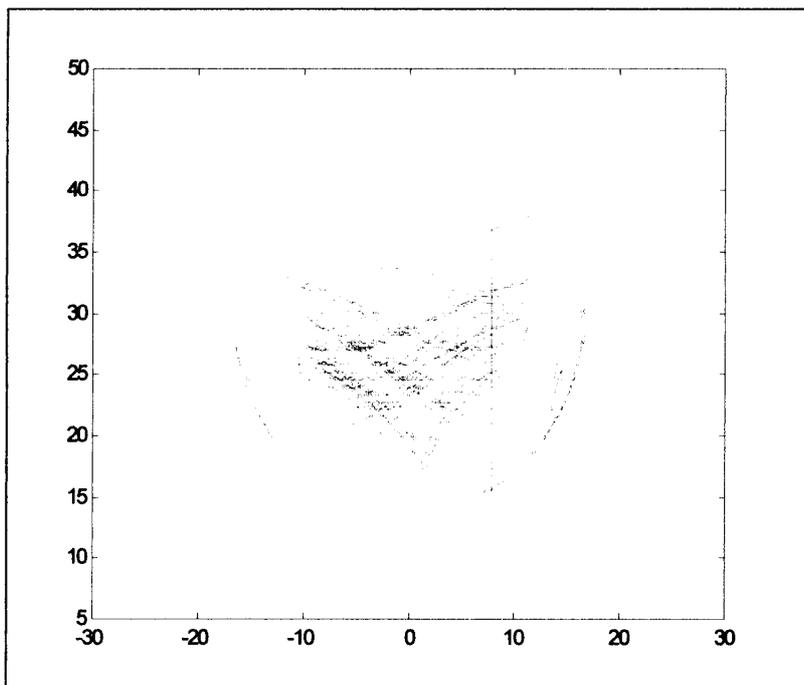


FIG. 4.4 – Projection de l'attracteur étrange de Chen sur le plan (x, z) .

TRANSITION VERS LE CHAOS

Par passage par les intermittences, le système (4.2) atteint le chaos [9]. Le paramètre c joue le rôle de paramètre de contrôle.

La figure suivante donne les séries temporelles (une autre caractéristique du chaos) du système (4.2).

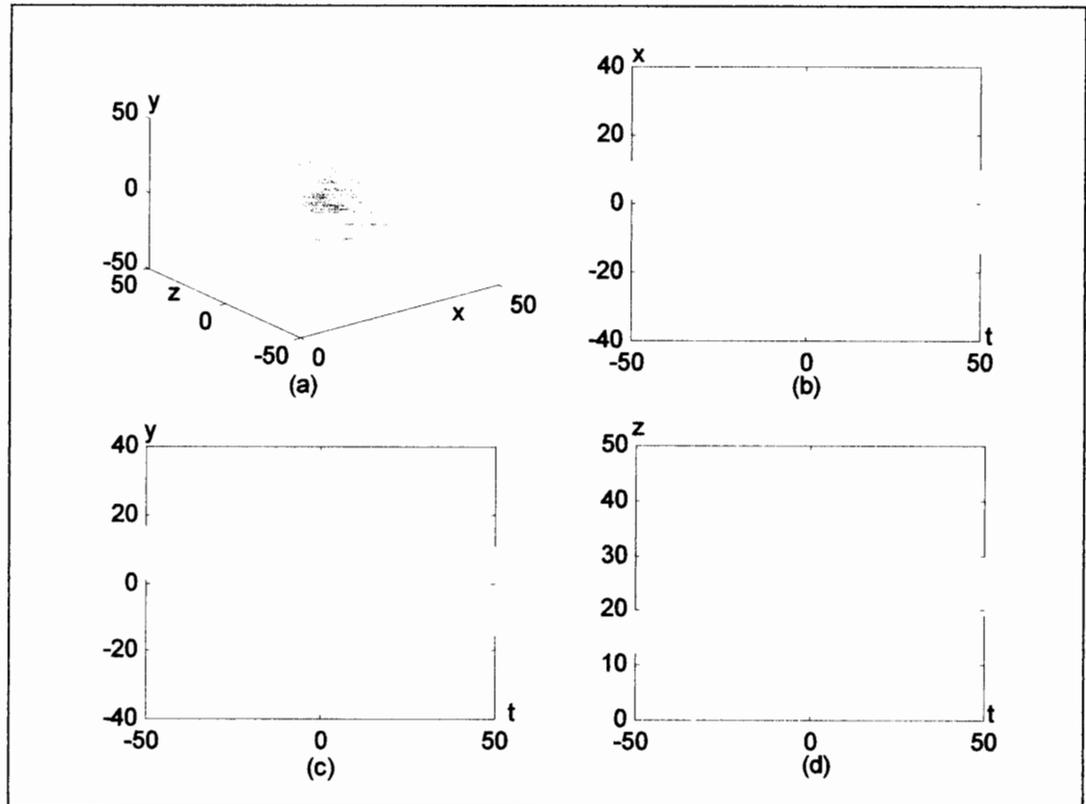


FIG. 4.5 – (a) L'attracteur étrange de Chen. (b) Le signal chaotique $x(t)$. (c) Le signal chaotique $y(t)$. (d) Le signal chaotique $z(t)$.

EXPOSANTS DE LYAPUNOV ET DIMENSION FRACTALE

Pour le système (4.2), on trouve trois valeurs pour les exposants de Lyapunov :

$$\lambda_1 = 2.02, \lambda_2 = 0.00 \text{ et } \lambda_3 = -12.02$$

On peut voir les exposants de Lyapunov en fonction de temps sur la figure suivante.

La dimension de Lyapunov est définie par :

$$D = j_0 + \frac{\sum_{i=1}^{j_0} \lambda_i}{|\lambda_{j_0+1}|}$$

Dans notre cas, la dimension de Lyapunov est :

$$D = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}$$

$$\simeq 2.168$$

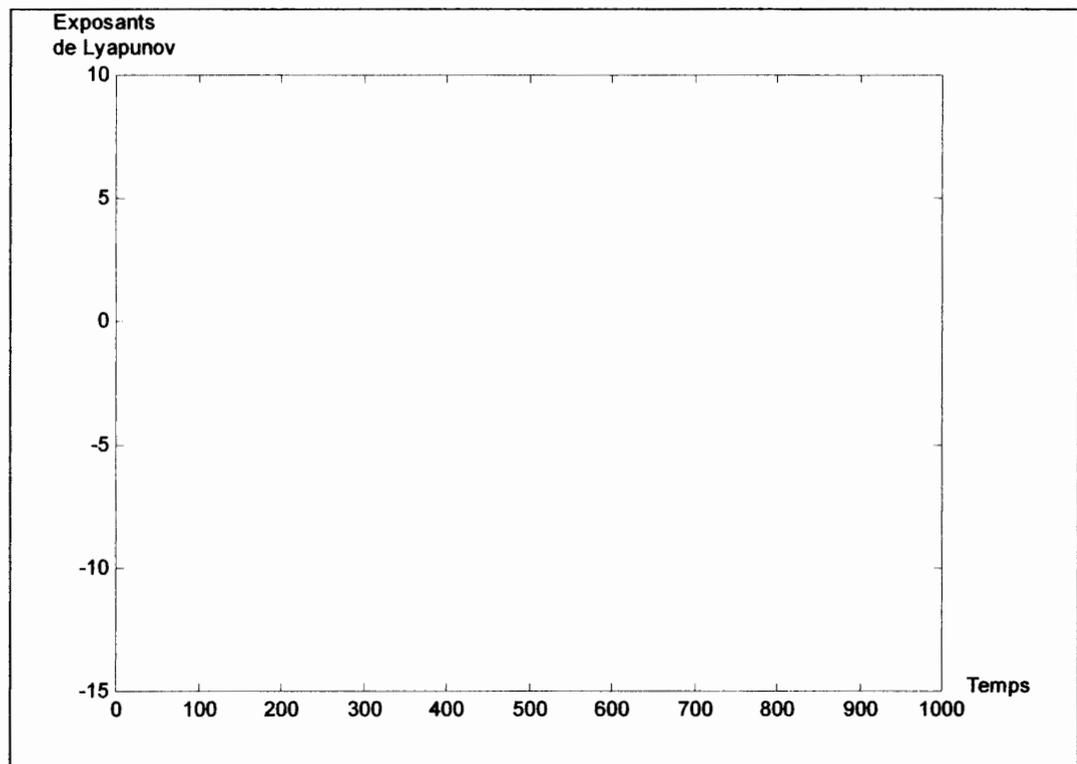


FIG. 4.6 – Les trois exposants de Lyapunov en fonction de temps du système de Chen.

Si on veut regarder la dynamique du système (4.2) après le chaos, on varie encore le paramètre de contrôle c . Nous obtenons les résultats regroupés dans la figure suivante (avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$).

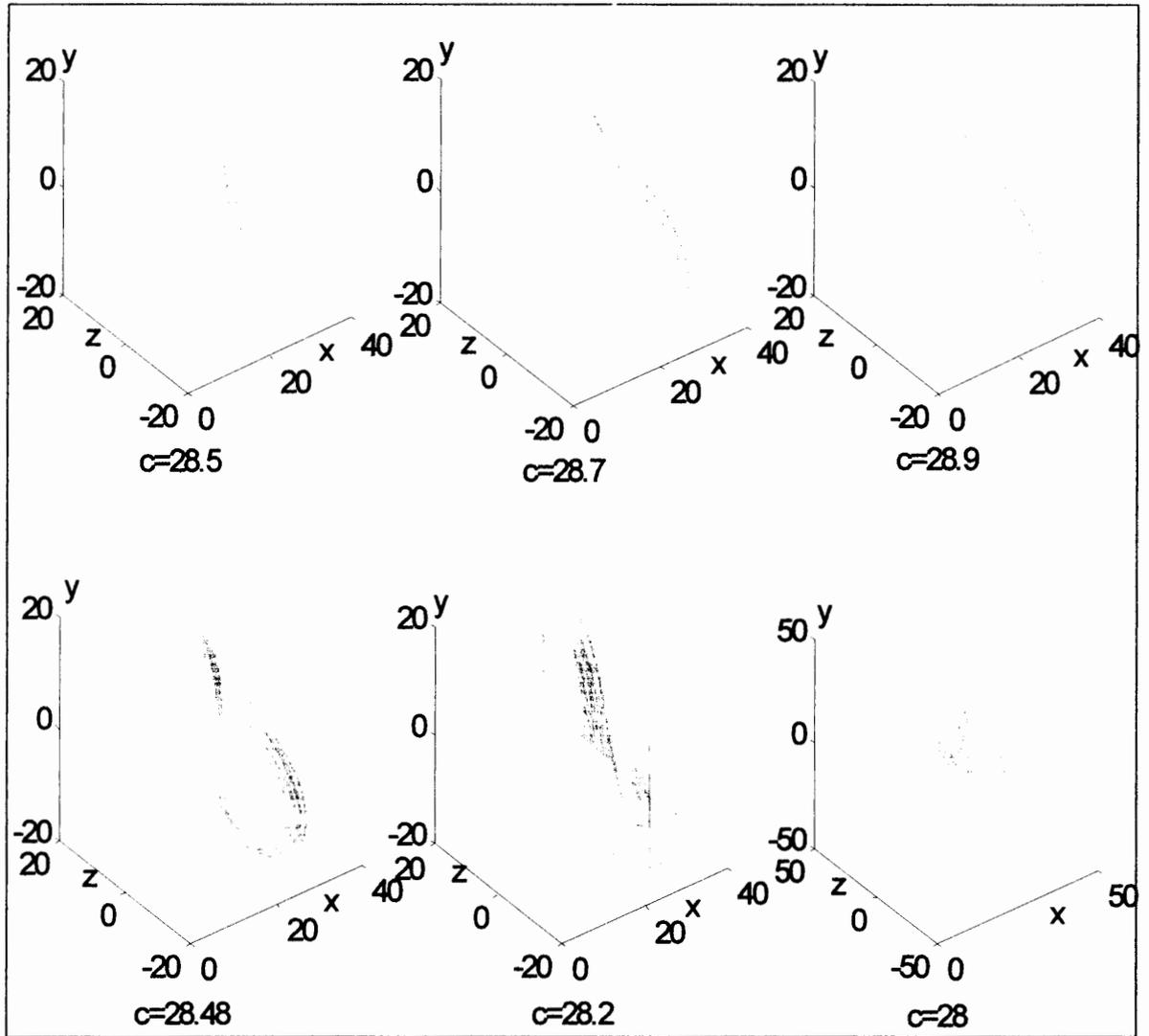


FIG. 4.7 – Attracteurs du système de Chen dans l'espace (z, x, y) pour différentes valeurs de c .

4.3 PREMIERE MODIFICATION DU MODELE DE CHEN

En remplaçant le terme non-linéaire xy par x^2 dans le modèle de Chen, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = x^2 - bz \end{cases} \quad (4.12)$$

où x , y et z sont fonctions de t et $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$.

4.3.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME

Tout comme le système de Chen, le système (4.12) possède aussi une symétrie $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$, l'axe z est invariante.

La divergence de champ de vitesse est négative si $c < a + b$. Pour $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$, le système est donc dissipatif et il possède un ensemble attractant de volume nul.

CALCUL DES POINTS D'EQUILIBRE

Le tableau suivant indique la naissance des points d'équilibre lorsque le paramètre

Pour $c = 19.539$, les deux points d'équilibre perdent leur stabilité à cause de la bifurcation de Hopf qui donne naissance à un attracteur étrange en $c = 28$.

4.3.3 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

ATTRACTEUR ETRANGE

Pour les paramètres suivants :

$$a = 35, b = 3 \text{ et } c = 28$$

Le système (4.12) exhibe un attracteur étrange (ainsi que ses projections) que nous représentons dans les figures suivantes :

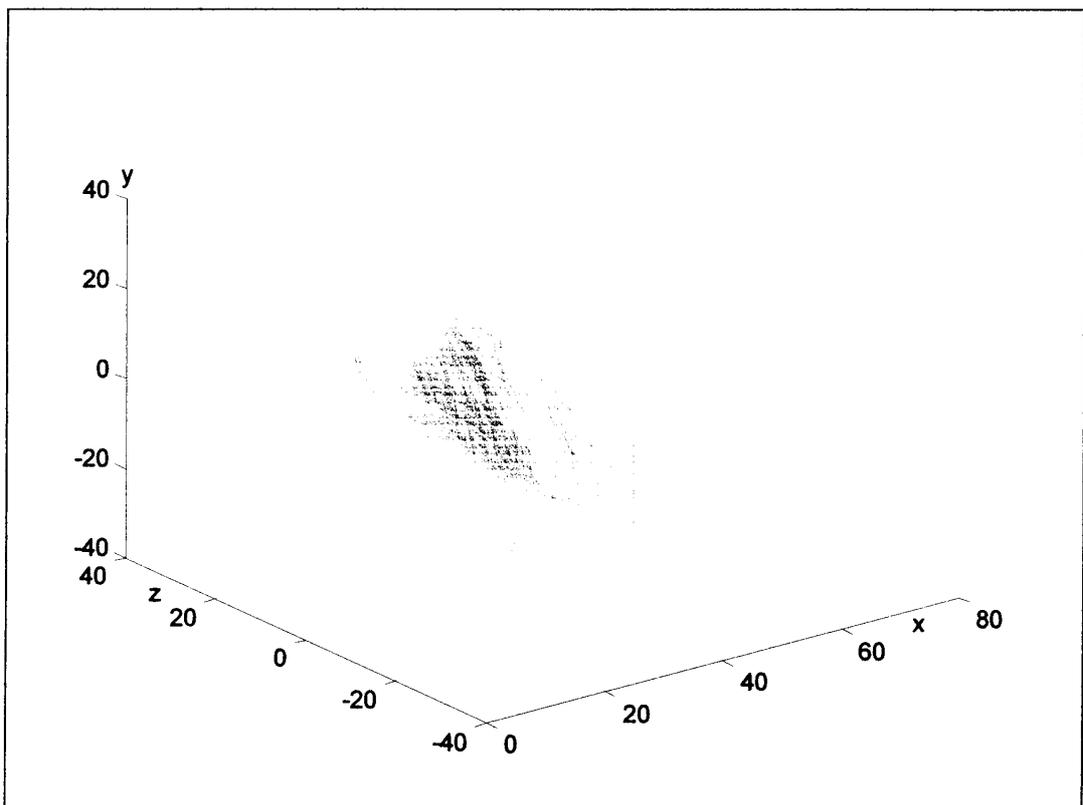


FIG. 4.8 – L'attracteur étrange du système (4.12) dans l'espace (z, x, y) .

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c \mp \sqrt{b(2c-a)} \\ \pm 2\sqrt{b(2c-a)} & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2(a + b - c) + \lambda(ab - bc) + 2ab(2c - a).$$

Pour $\frac{a}{2} < c < a + b$, les coefficients de ce polynôme sont tous positifs. D'où l'existence d'une racine réelle négative. On note λ_1 cette valeur propre. En utilisant les formules de Cardan, on en déduit les signes des deux autres valeurs propres :

Pour $c < 17.585$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles et négatives (c_2 et c_3 sont deux noeuds impropres asymptotiquement stables "deux puits").

Pour c légèrement plus grand que **17.585**, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres complexes et conjuguées de partie réelle négative $\lambda_{2,3} = \lambda_r \pm i\lambda_c$, (c_2 et c_3 sont deux foyers asymptotiquement stables "deux puits").

Si c continue de croître, on obtient $\lambda_r = 0$ pour $c \simeq 19.539$, où la bifurcation de Hopf apparaît (c_2 et c_3 sont deux points selles).

4.3.2 CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE

Pour $c < \frac{a}{2}$, le seul point d'équilibre est l'origine, et il est asymptotiquement stable.

Pour $c = \frac{a}{2}$, l'origine perd sa stabilité et deux autres points d'équilibre apparaissent, c'est la bifurcation fourche. Ces deux points d'équilibre sont asymptotiquement stables pour $\frac{35}{2} < c < 19.539$.

Pour $c = 19.539$, les deux points d'équilibre perdent leur stabilité à cause de la bifurcation de Hopf qui donne naissance à un attracteur étrange en $c = 28$.

4.3.3 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

ATTRACTEUR ETRANGE

Pour les paramètres suivants :

$$a = 35, b = 3 \text{ et } c = 28$$

Le système (4.12) exhibe un attracteur étrange (ainsi que ses projections) que nous représentons dans les figures suivantes :

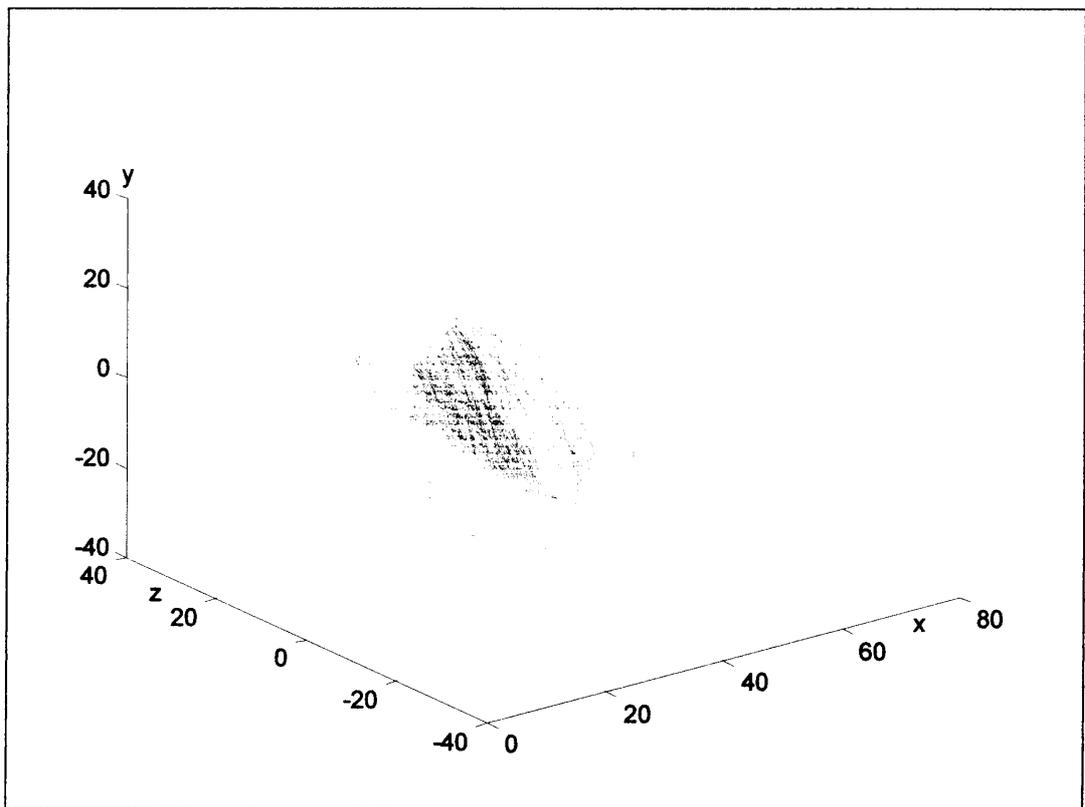


FIG. 4.8 – L'attracteur étrange du système (4.12) dans l'espace (z, x, y) .

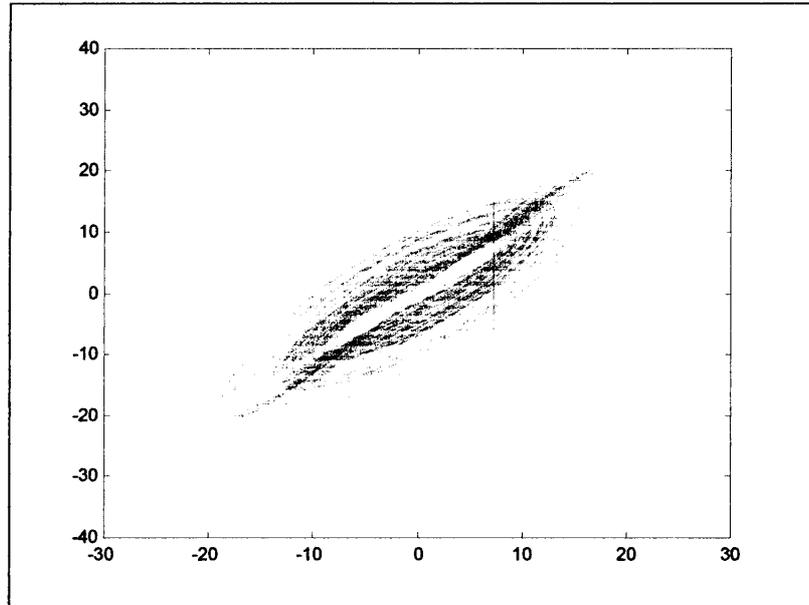


FIG. 4.9 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.12) sur le plan (x, y) .

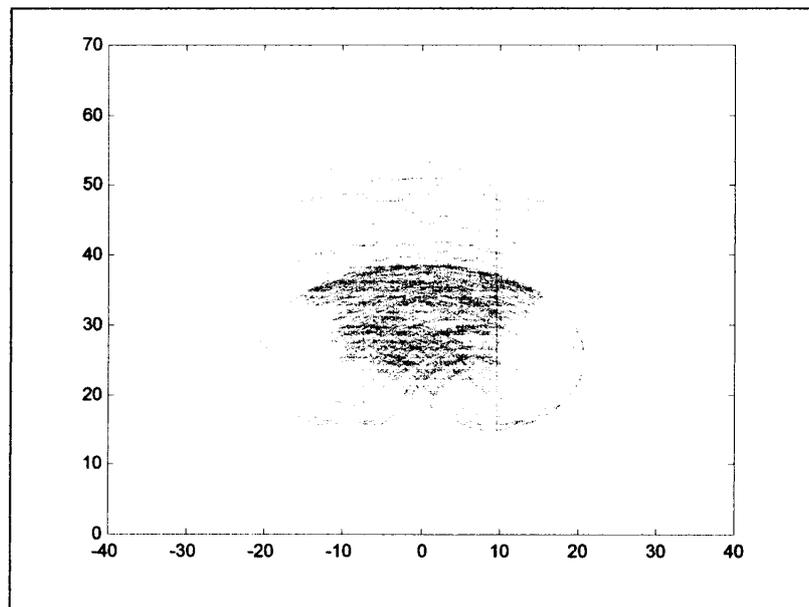


FIG. 4.10 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.12) sur le plan (y, z) .

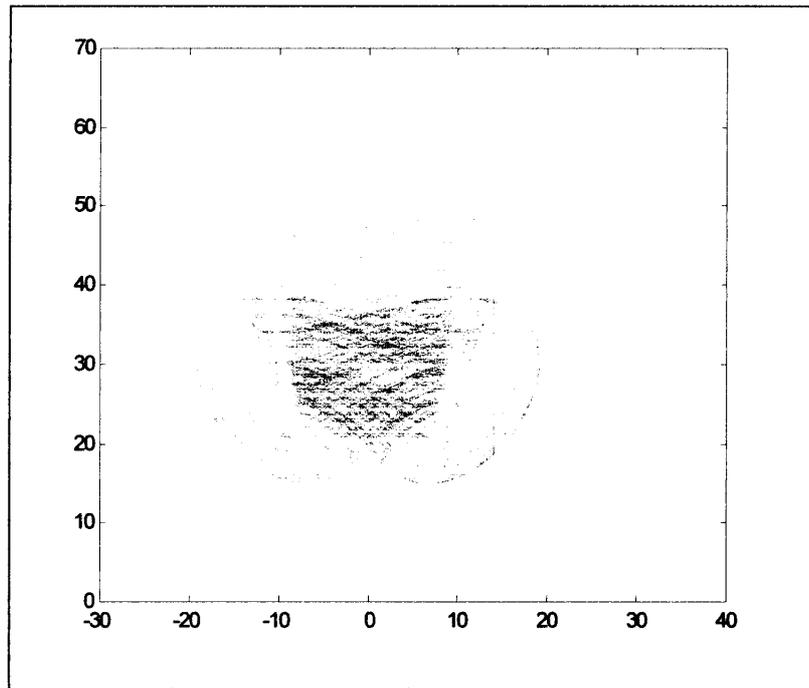


FIG. 4.11 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.12) sur le plan (x, z) .

TRANSITION VERS LE CHAOS

Une transition vers le chaos du système (4.12) s'effectue en passant par des différents attracteurs dont on a regroupé quelques un dans la figure suivante.

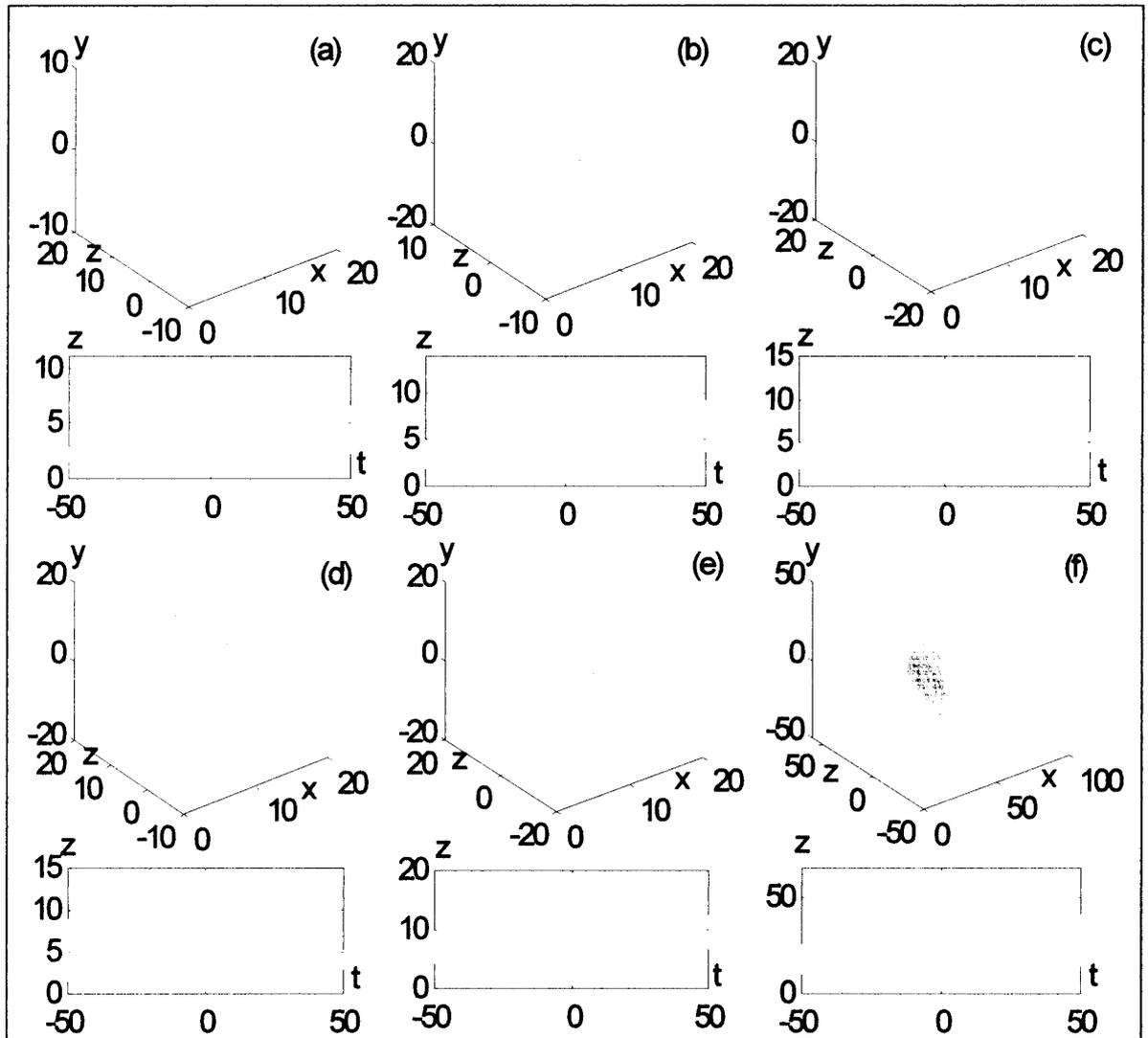


FIG. 4.12 – Quelques attracteurs du système (4.12) avec leurs évolutions temporelles

$z(t)$: (a) $c = 20$, (b) $c = 20.5$, (c) $c = 20.7$, (d) $c = 21$, (e) $c = 22$, (f) $c = 28$

EXPOSANTS DE LYAPUNOV ET DIMENSION FRACTALE

Pour le système (4.12), les trois valeurs des exposants de Lyapunov sont les suivantes :

$$\lambda_1 = 2.65, \lambda_2 = 0.00 \text{ et } \lambda_3 = -12.65$$

On peut voir les exposants de Lyapunov en fonction de temps sur la figure suivante.

Dans notre cas (système (4.12)), la dimension de Lyapunov est :

$$D = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}$$

$$\simeq 2.209$$

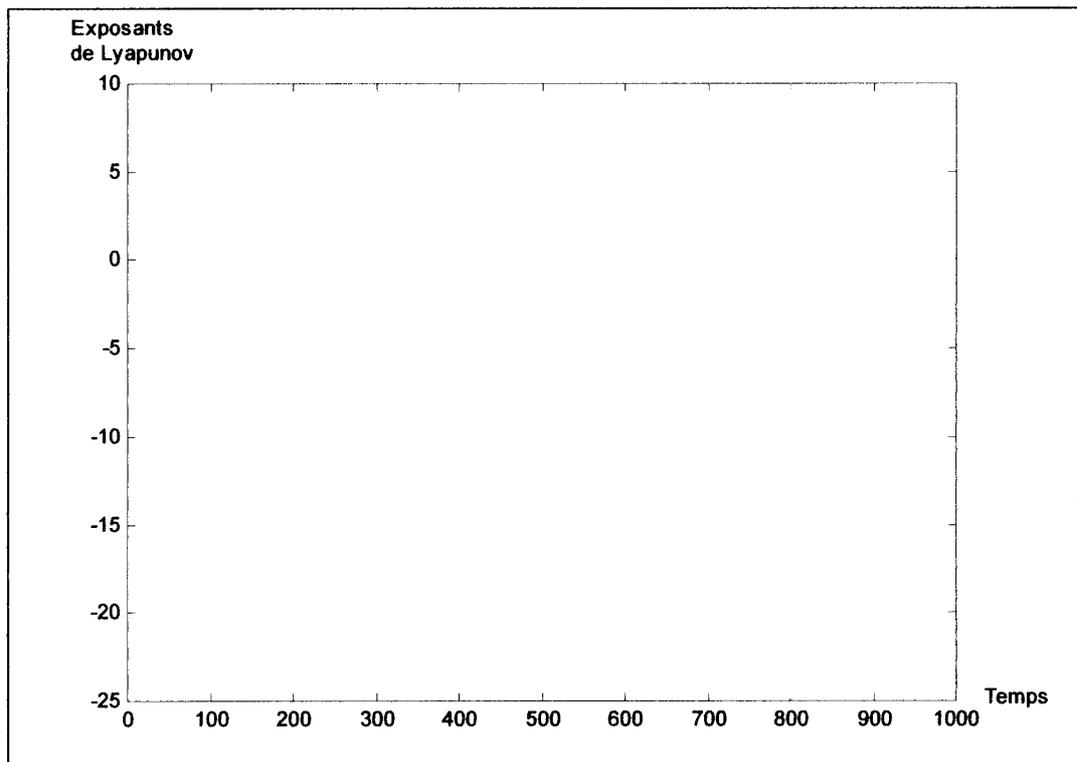


FIG. 4.13 – Les trois exposants de Lyapunov en fonction de temps du système (4.12).

Si on veut regarder la dynamique du système (4.12) après le chaos, on varie encore le paramètre de contrôle c . Nous obtenons les résultats regroupés dans la figure suivante (avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$).

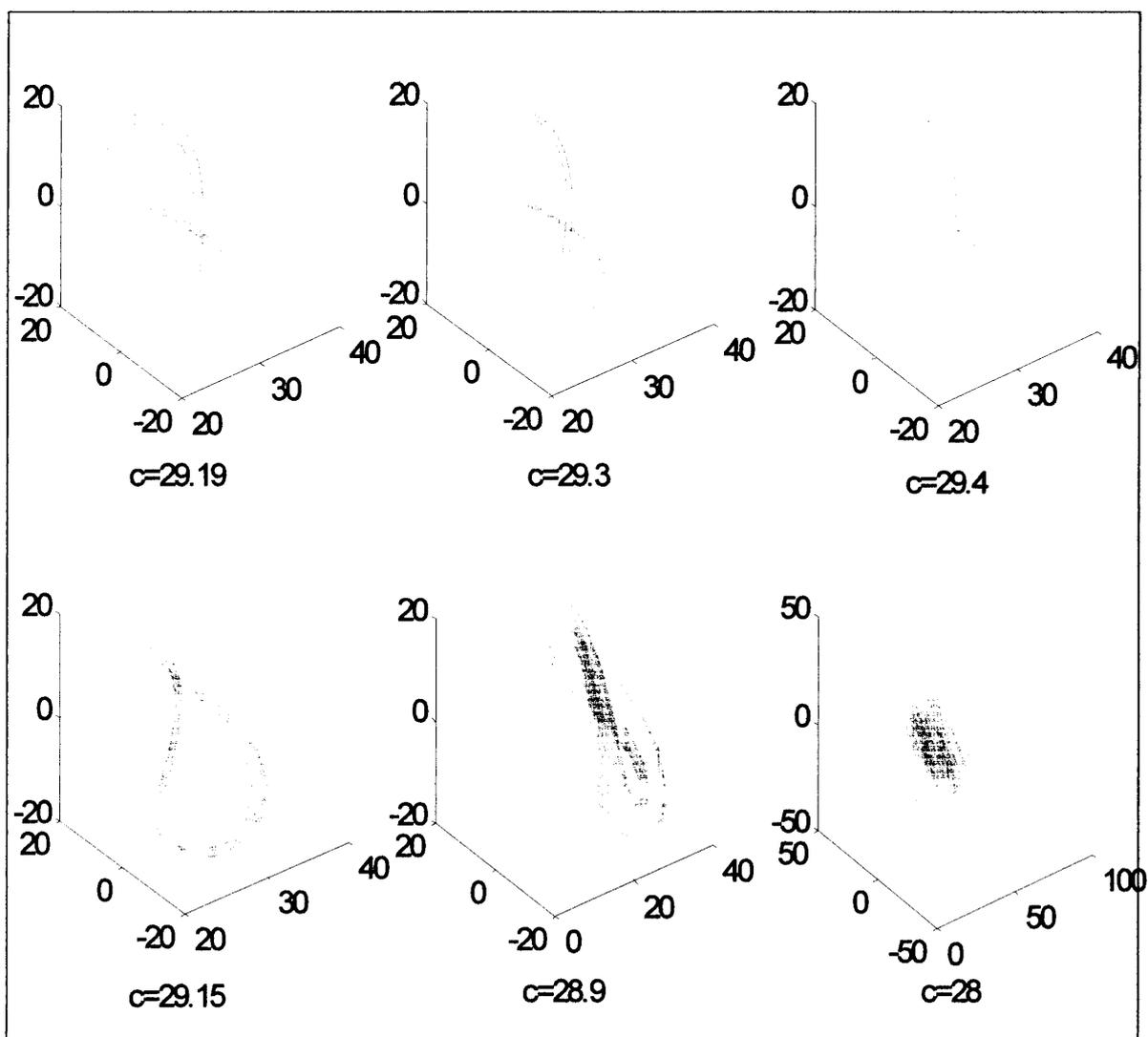


FIG. 4.14 – Attracteurs du système (4.12) dans l'espace (z, x, y) pour différentes valeurs de c .

4.4 DEUXIEME MODIFICATION DU MODELE DE CHEN

En remplaçant le terme non-linéaire xy par $x+x^2$ dans le modèle de Chen, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = x^2 + x - bz \end{cases} \quad (4.13)$$

où x, y et z sont fonctions de t et $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$.

4.4.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME

L'espace des phases est tridimensionnel (x, y, z) . a, b et c sont des constantes réelles.

La divergence du champs de vitesse est négative si $c < a + b$. Pour $a = 35, b = 3$ et $c = 28$, le système (4.13) est dissipatif et donc possède un ensemble attractant de volume nul.

CALCUL DES POINTS D'EQUILIBRE

Les points d'équilibre du système sont :

$$c_1 = (0, 0, 0), \quad c_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{24c - 419}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{24c - 419}}{2}, 2c - a \right) \text{ et}$$

$$c_3 = \left(\frac{-1 + \sqrt{24c - 419}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{24c - 419}}{2}, 2c - a \right)$$

En faisant varier le paramètre c , nous obtenons pour points d'équilibre les points représentés dans le tableau suivant :

| c | Points d'équilibre |
|---------------|--------------------|
| < 17.458 | c_1 |
| ≥ 17.458 | c_1, c_3, c_4 |

TAB. 4.3 – Points d'équilibre du système (4.13)

ETUDE DE LA STABILITE

STABILITE DE L'ORIGINE

La matrice Jacobienne au voisinage de c_1 est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 1 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation donnée par :

$$\lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + (ab - bc - a(2c - a))\lambda - ab(2c - a) = 0$$

$$\text{d'où } \lambda_1 = \frac{c-35+\sqrt{(c-a)^2+4a(2c-a)}}{2}, \lambda_2 = \frac{c-35-\sqrt{(c-a)^2+4a(2c-a)}}{2} \text{ et } \lambda_3 = -b.$$

On a : λ_3 est toujours négative pour tout c .

Pour $0 < c < 16.24$, λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres complexes de partie réelle négative (l'origine est un foyer asymptotiquement stable "un puit").

Pour $16.24 < c < \frac{a}{2}$, λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres réelles négatives (l'origine est un noeud impropre asymptotiquement stable "un puit").

Pour $c > 17.5$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles positives (l'origine est instable "un point selle").

Pour $c = 17.5$, les valeurs propres deviennent : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{a}{2}$ et $\lambda_3 = -b$.

On étudie la stabilité de l'origine à l'aide de la théorie de la variété centrale :

Les vecteurs propres associés sont : $v_1(b, b, 1)^T$, $v_2(\frac{-a+2b}{2}, \frac{-a+2b}{4}, 1)^T$ et $v_3(0, 0, 1)^T$

On passe à la base des vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \frac{-a+2b}{2} & 0 \\ b & \frac{-a+2b}{4} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

On considère ϵ comme une nouvelle variable. Pour cela, nous posons $c = \frac{a}{2} + \epsilon$.

On écrit le système sous la forme standard et par transformation inverse, nous

obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{b}\epsilon - \frac{2}{b}(u+v+w) \\ \frac{4(u+v+w)}{-a+2b} - \frac{4}{-a+2b}\epsilon \\ (bu + (\frac{-a+2b}{2})v) - \frac{2a(u+v+w)}{-ab+2b^2} + \frac{2a}{-ab+2b^2}\epsilon \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$+ (bu + (\frac{-a+2b}{4})v) \begin{pmatrix} \frac{2}{b}\epsilon \\ -\frac{4}{-a+2b}\epsilon \\ \frac{2a}{-ab+2b^2}\epsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

En suivant la même démarche de l'étude que celle effectuée pour le système de

Chen, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 4u\epsilon - 2u^2 + \dots \\ \dot{\epsilon} &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Le système (4.16) possède deux points d'équilibre : $u = 0$ (stable pour $\epsilon < 0$ et instable pour $\epsilon > 0$) et $u = 2\epsilon$ (stable pour $\epsilon > 0$ et instable pour $\epsilon < 0$).

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE C_2

La matrice Jacobienne autour de c_2 est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \frac{1+\sqrt{24c-419}}{2} \\ -\sqrt{24c-419} & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Et les valeurs propres sont solutions de l'équation :

$$\lambda^3 + \lambda^2(a+b-c) + \lambda(ab-bc) + \frac{a}{2}\sqrt{24c-419} + \frac{a}{2}(24c-419) = 0$$

On a :

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{a}{2}\sqrt{24c-419} - \frac{a}{2}(24c-419)$$

Donc il existe une valeur propre réelle négative. Notons λ_1 cette valeur propre.

En utilisant les formules de Cardan, on en déduit les signes des deux autres valeurs propres.

Pour $17.458 < c < 17.502$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles négatives (c_2 est un noeud impropre asymptotiquement stable "un puit").

Pour c **légèrement** plus grand que **17. 502**, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres complexes et conjuguées de partie réelle négative $\lambda_{2,3} = \lambda_r \pm i\lambda_c$ (c_2 est un foyer asymptotiquement stable "un puit").

Si c continue de croître, on obtient $\lambda_r = 0$ pour $c \simeq 19. 284$, où la bifurcation de Hopf apparaît.

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE C_3

La matrice Jacobienne autour de c_3 est :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \frac{1-\sqrt{24c-419}}{2} \\ \sqrt{24c-419} & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Et les valeurs propres sont solutions de l'équation :

$$\lambda^3 + \lambda^2(a+b-c) + \lambda(ab-bc) - \frac{a}{2}\sqrt{24c-419} + \frac{a}{2}(24c-419) = 0$$

On a :

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +\frac{a}{2}\sqrt{24c-419} - \frac{a}{2}(24c-419)$$

Regardant le signe du produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ pour savoir le signe d'une de ces valeurs propres qu'on la note λ_1 , et utilisant les formules de Cardan pour savoir le signe des deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 .

Pour $17.458 < c < 17.5$, il existe une valeur propre réelle positive λ_1 . λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles négatives (c_3 est un point selle instable).

Pour $17.5 < c < 17.628$, λ_1 devient une valeur propre réelle négative et les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 gardent leur signe et leur nature (c_3 est un noeud impropre asymptotiquement stable "un puit").

Pour c légèrement plus grand que **17. 628**, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres complexes et conjuguées de partie réelle négative $\lambda_{2,3} = \lambda_r \pm i\lambda_c$ (c_3 est un foyer asymptotiquement stable "un puit").

Si c continue de croître, on obtient $\lambda_r = 0$ pour $c \simeq 19. 755$, où la bifurcation de Hopf apparaît.

4.4.2 CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE

Pour $c > 0$, le seul point d'équilibre est l'origine et il est asymptotiquement stable. Pour $c \simeq 17.5$, l'origine perd sa stabilité et deux autres points d'équilibre apparaissent, l'un stable et l'autre instable, le point stable perd sa stabilité pour $c \simeq 19.284$ où survient une bifurcation de Hopf et le point instable devient stable mais il perd sa stabilité encore une fois pour $c \simeq 19.755$ sous la présence d'une bifurcation de Hopf. L'attracteur étrange apparaît clairement en $c = 28$.

4.4.3 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

ATTRACTEUR ETRANGE

Pour les paramètres suivants :

$$a = 35, b = 3 \text{ et } c = 28$$

Le système (4.13) présente l'attracteur étrange (ainsi que ses projections) de les figures suivantes :

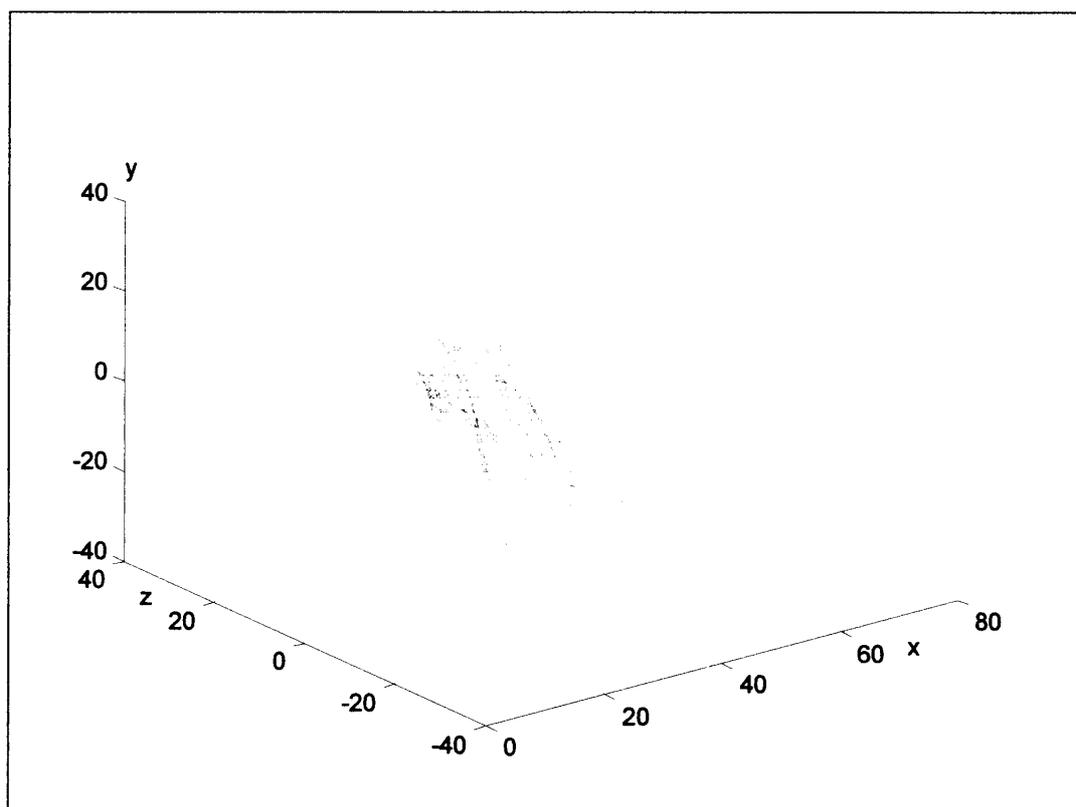


FIG. 4.15 – L'attracteur étrange du système (4.13) dans l'espace (z, x, y) .

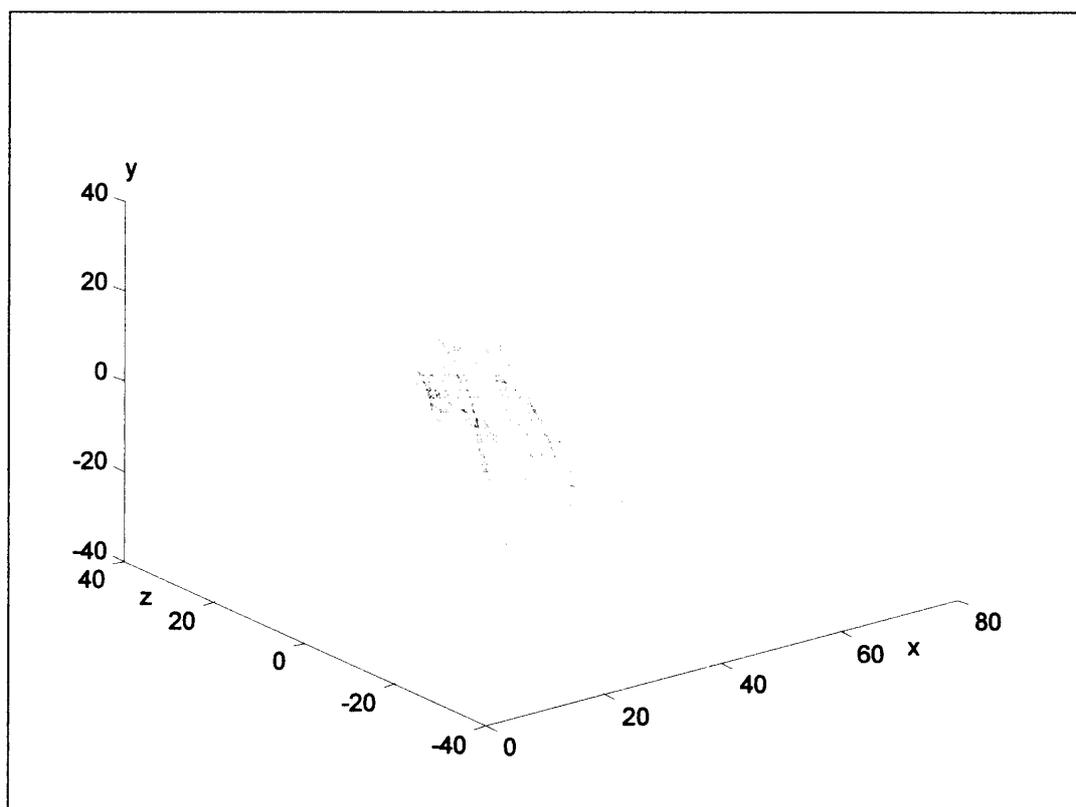


FIG. 4.15 – L'attracteur étrange du système (4.13) dans l'espace (z, x, y) .

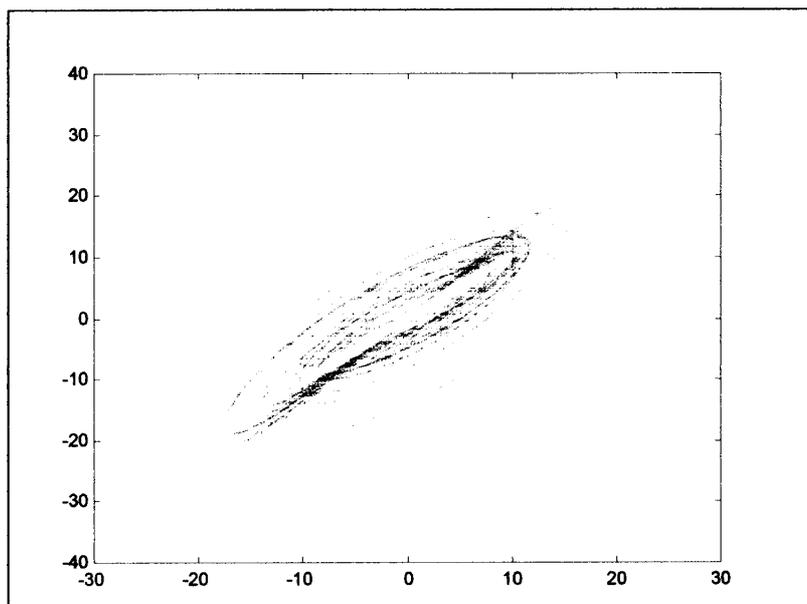


FIG. 4.16 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.13) sur le plan (x, y) .

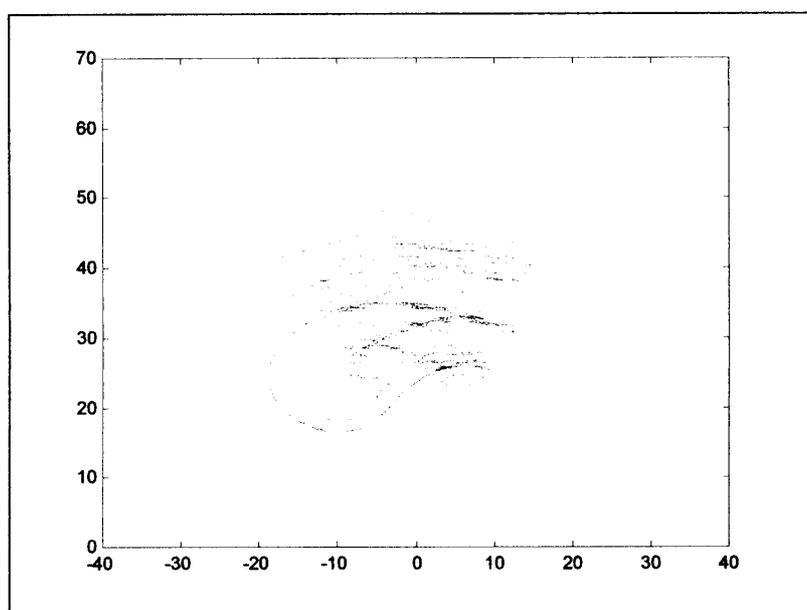


FIG. 4.17 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.13) sur le plan (y, z) .

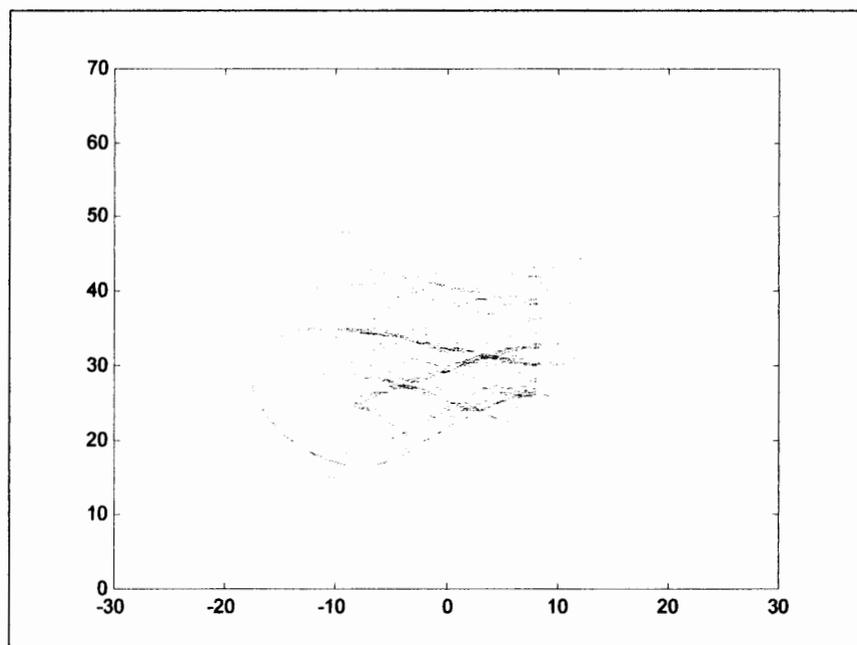


FIG. 4.18 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.13) sur le plan (x, z) .

TRANSITION VERS LE CHAOS

La figure suivante présente quelques attracteurs du système (4.13), obtenus en variant le paramètre de contrôle c .

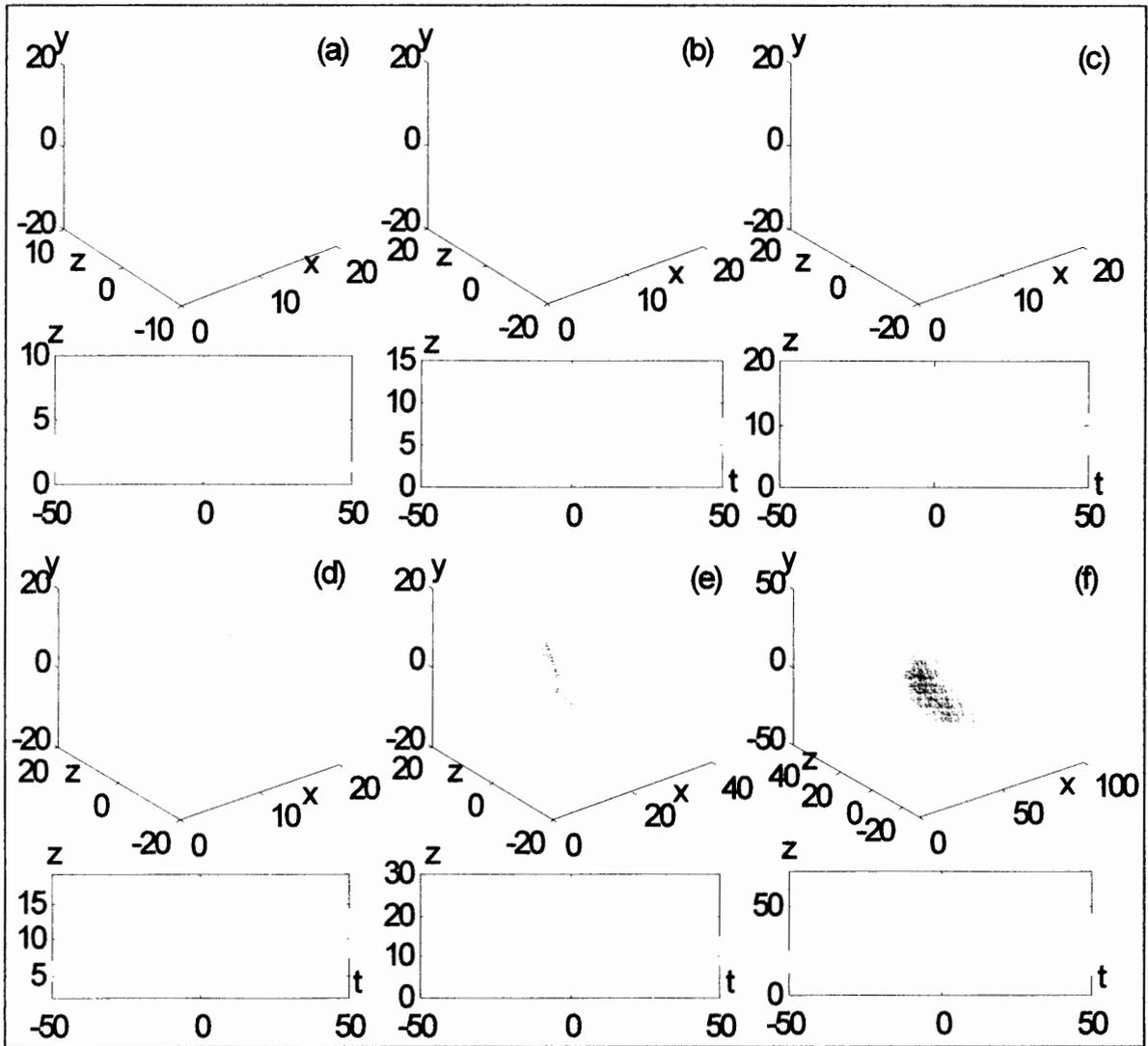


FIG. 4.19 – Quelques attracteurs du système (4.13) avec leurs évolutions temporelles

$z(t)$: (a) $c = 20$, (b) $c = 20.5$, (c) $c = 21$, (d) $c = 22$, (e) $c = 23.2$, (f) $c = 28$

EXPOSANTS DE LYAPUNOV ET DIMENSION FRACTALE

Pour le système (4.13), les trois exposants de Lyapunov sont les suivants :

$$\lambda_1 = 2.64, \lambda_2 = 0.00, \lambda_3 = -12.64$$

On peut voir les exposants de Lyapunov en fonction de temps sur la figure (4.20)

Dans notre cas (système (4.13)), la dimension de Lyapunov est :

$$D = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}$$
$$\simeq 2.209$$

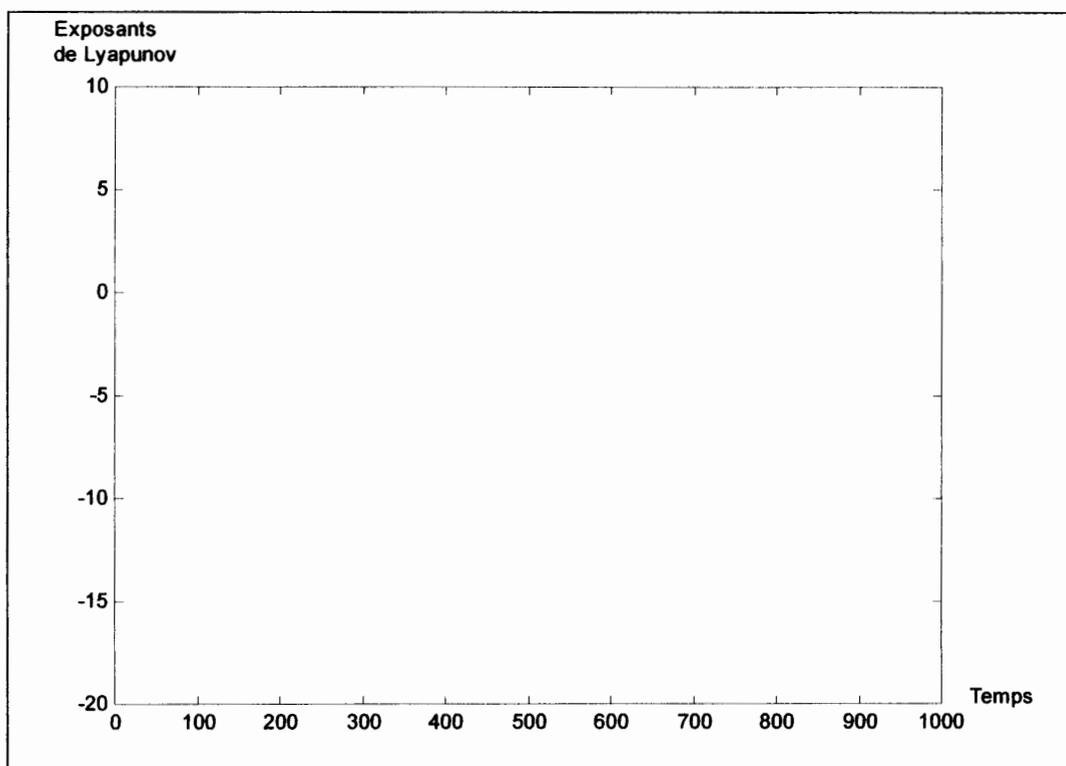


FIG. 4.20 – Les trois exposants de Lyapunov en fonction de temps du système (4.13).

4.5 AUTRE MODIFICATION DU MODELE DE CHEN

En modifiant la deuxième équation dans le système (4.13), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cy - xz \\ \dot{z} = x + x^2 - bz \end{cases} \quad (4.17)$$

où x , y et z sont fonctions de t et $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$.

4.5.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME

L'espace des phases est tridimensionnel (x, y, z) . a , b et c sont des constantes réelles.

La divergence du champs de vitesse est négative si $c < a + b$. Pour $a = 35$, $b = 3$ et $c = 28$, Le système (4.17) est dissipatif et donc possède un ensemble attractant de volume nul.

CALCUL DES POINTS D'EQUILIBRE

Les points d'équilibre sont tel que :

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

Le tableau sur la page suivante représente la naissance de ces points d'équilibre.

| c | Points d'équilibre |
|----------------------|---------------------------|
| $< -\frac{1}{4b}$ | c_1 |
| $\geq -\frac{1}{4b}$ | c_1, c_2, c_3 |

TAB. 4.4 – Points d'équilibre du système (4.17)

tel que :

$$c_1(0, 0, 0), \quad c_2\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4bc}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{1 + 4bc}}{2}, c\right) \text{ et}$$

$$c_3\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4bc}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4bc}}{2}, c\right)$$

ETUDE DE LA STABILITE

STABILITE DE L'ORIGINE

La matrice Jacobienne autour de c_1 est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation suivante :

$$\lambda^3 + (a + b - c)\lambda^2 + (-ac + b(a - c))\lambda - abc = 0$$

D'où : $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = -a$ et $\lambda_3 = c$.

On a : λ_1 et λ_2 sont toujours négatives pour tout c .

Pour $c < 0$, λ_3 est une valeur propre réelle négative (l'origine est un nœud impropre asymptotiquement stable "un puit").

Pour $c > 0$, λ_3 est une valeur propre réelle positive (l'origine est instable "un point selle")

Pour $c = 0$, les valeurs propres deviennent : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -a$ et $\lambda_3 = -b$.

On étudie la stabilité de l'origine à l'aide de la théorie de la variété centrale :

Les vecteurs propres associés sont : $v_1(b, b, 1)^T$, $v_2(-a + b, 0, 1)^T$ et $v_3(0, 0, 1)^T$

On passe à la base des vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a + b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

On considère ϵ comme une nouvelle variable. Pour cela, nous posons $c = \frac{a}{2} + \epsilon$.

On écrit le système sous la forme standard et par transformation inverse, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\epsilon} \end{pmatrix} = ((-a + b)v + bw) \begin{pmatrix} -\frac{1}{b}(u + v + w) \\ -\frac{a}{-a+b} + \frac{1}{-a+b}(u + v + w) \\ 1 + ((-a + b)v + bw) + \frac{a}{-a+b} - \frac{a(u+v+w)}{-ab+b^2} \\ 0 \end{pmatrix} + bw \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{b} \\ -\frac{a}{-a+b} - \frac{\epsilon}{-a+b} \\ -\frac{a}{-a+b} + \frac{a\epsilon}{-ab+b^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & -b & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \epsilon \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

En suivant la même démarche de l'étude que celle effectuée pour le système de

Chen, on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u\epsilon - u^2 + \dots \\ \dot{\epsilon} &= 0\end{aligned}\tag{4.20}$$

Le système (4.17) possède deux points d'équilibre : $u = 0$ (stable pour $\epsilon < 0$ et instable pour $\epsilon > 0$) et $u = \epsilon$ (stable pour $\epsilon > 0$ et instable pour $\epsilon < 0$).

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE C_2

La matrice Jacobienne autour de c_2 est :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \frac{1+\sqrt{1+4bc}}{2} \\ -\sqrt{1+4bc} & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solution de l'équation suivante :

$$\lambda^3 + \lambda^2(a + b - c) + \lambda(ab - bc) + \frac{a}{2}\sqrt{1+4bc} + \frac{a}{2}(1 + 4bc) = 0$$

On a :

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{a}{2}\sqrt{1+4bc} - \frac{a}{2}(1 + 4bc)$$

Donc, il existe une valeur propre réelle négative. Notons λ_1 cette valeur propre.

En utilisant les formules de Cardan, nous obtenons :

Pour $-0.08 < c < 0.14$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles négatives (c_2 est un noeud impropre asymptotiquement stable).

Pour $c > 0.14$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres complexes et conjuguées de partie réelle négative $\lambda_{2,3} = \lambda_r \pm i\lambda_c$ (c_2 est un foyer asymptotiquement stable "un puit").

Si c continue de croître, on obtient $\lambda_r = 0$ pour $c \simeq 9.448$, où la bifurcation de Hopf apparait.

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE C_3

La matrice Jacobienne autour de c_3 est :

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \frac{1-\sqrt{1+4bc}}{2} \\ \sqrt{1+4bc} & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Et les valeurs propres sont solutions de l'équation suivante :

$$\lambda^3 + \lambda^2(a+b-c) + \lambda(ab-bc) - \frac{a}{2}\sqrt{1+4bc} + \frac{a}{2}(1+4bc) = 0$$

On a :

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +\frac{a}{2}\sqrt{1+4bc} - \frac{a}{2}(1+4bc)$$

Regardant le signe du produit $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ pour savoir le signe d'une de ces valeurs propres qu'on la note λ_1 , et utilisant les formules de Cardan pour savoir le signe des deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 .

Pour $-0.08 < c < 0$, il existe une valeur propre réelle positive λ_1 . λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres réelles négatives (c_3 est un point selle instable).

Pour $0 < c < 0.489$, λ_1 devient une valeur propre réelle négative et les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 gardent leur signe et leur nature (c_3 est un noeud impropre asymptotiquement stable "un puit").

Pour c légèrement plus grand que **0.489**, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propres complexes et conjuguées de partie réelle négative $\lambda_{2,3} = \lambda_r \pm i\lambda_c$ (c_3 est un foyer asymptotiquement stable "un puit").

Si c continue de croître, on obtient $\lambda_r = 0$ pour $c \simeq 10.489$, où la bifurcation de Hopf apparaît.

4.5.2 CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE

Pour $c < -0.08$, le seul point d'équilibre est l'origine et il est asymptotiquement stable. Pour $c \simeq 0$, l'origine perd sa stabilité et deux autres points d'équilibre apparaissent, l'un stable et l'autre instable, le point stable perd sa stabilité pour $c \simeq 9.448$ où survient une bifurcation de Hopf et le point instable devient stable mais il perd sa stabilité encore une fois pour $c \simeq 10.489$ sous la présence d'une bifurcation de Hopf. L'attracteur étrange apparaît clairement en $c = 26$.

4.5.3 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

ATTRACTEUR ETRANGE

Pour les paramètres suivants :

$$a = 35, b = 3 \text{ et } c = 26$$

Le système (4.17) présente l'attracteur étrange (ainsi que ses projections) dans les figures suivantes :

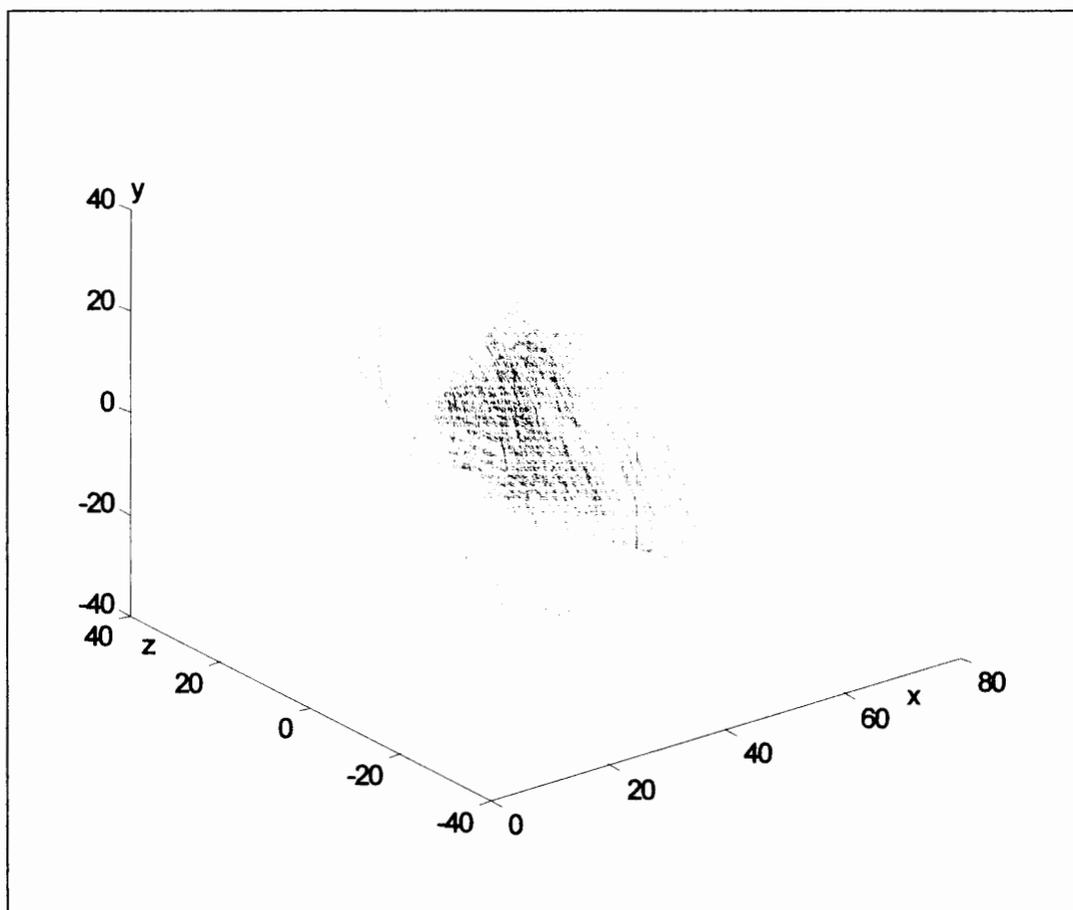


FIG. 4.21 – L'attracteur étrange du système (4.17) dans l'espace (x, y, z) .

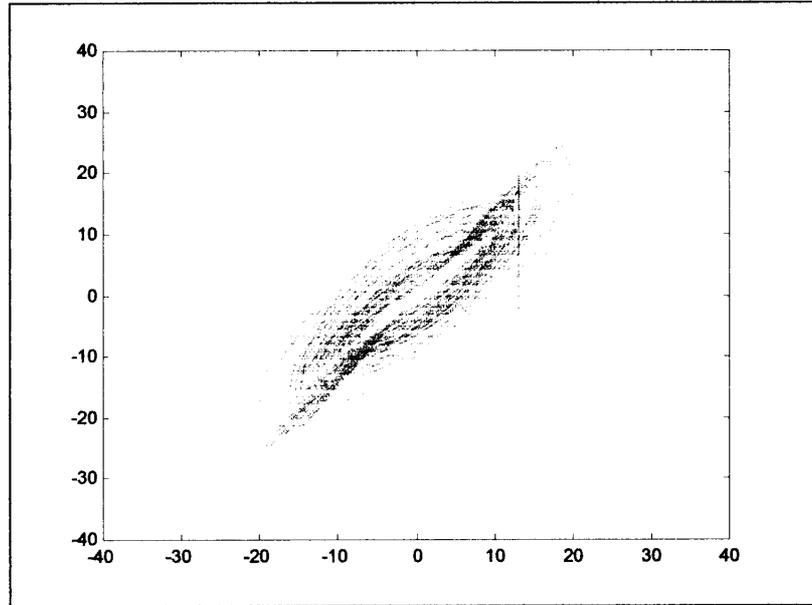


FIG. 4.22 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.17) sur le plan (x, y) .

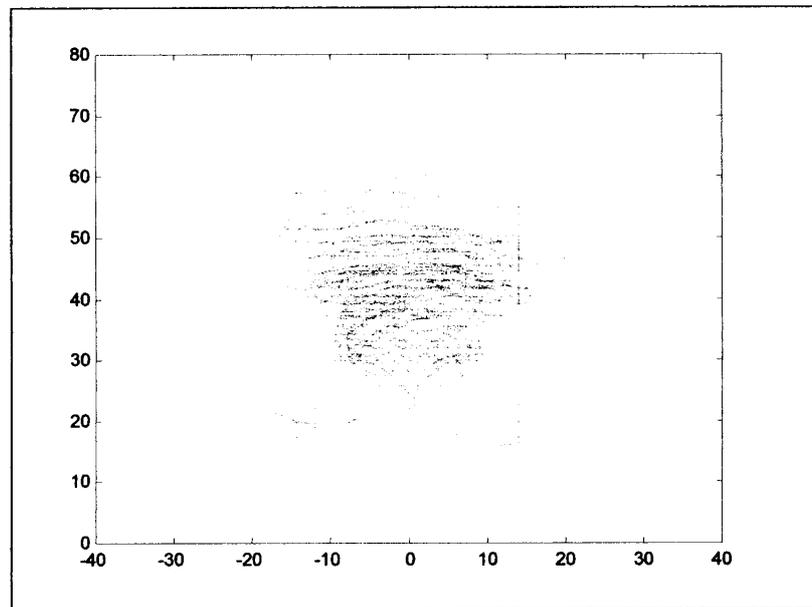


FIG. 4.23 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.17) sur le plan (y, z) .

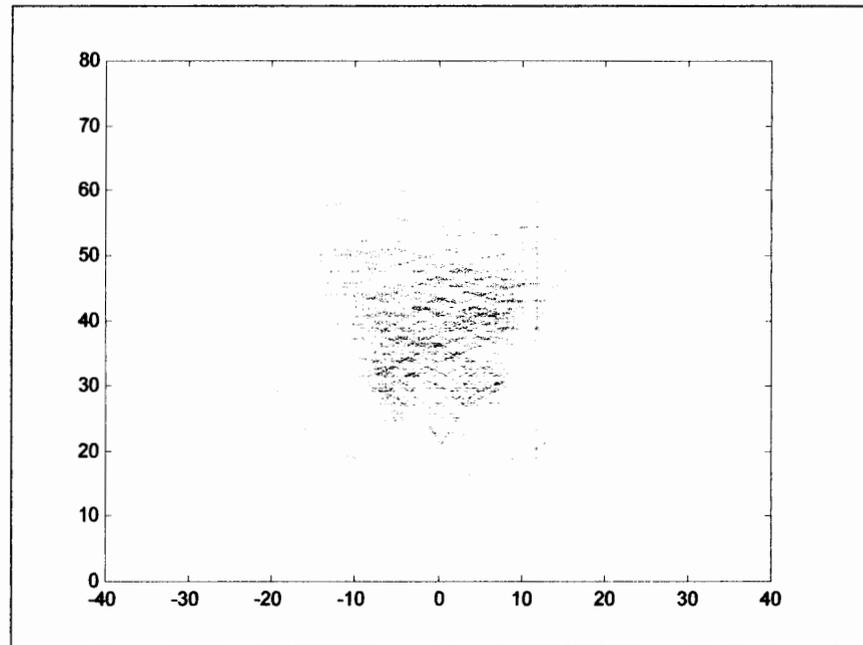


FIG. 4.24 – Projection de l'attracteur étrange du système (4.17) sur le plan (x, z) .

TRANSITION VERS LE CHAOS

Comme les systèmes précédents, on aboutit des différents attracteurs en variant le paramètre de contrôle c .

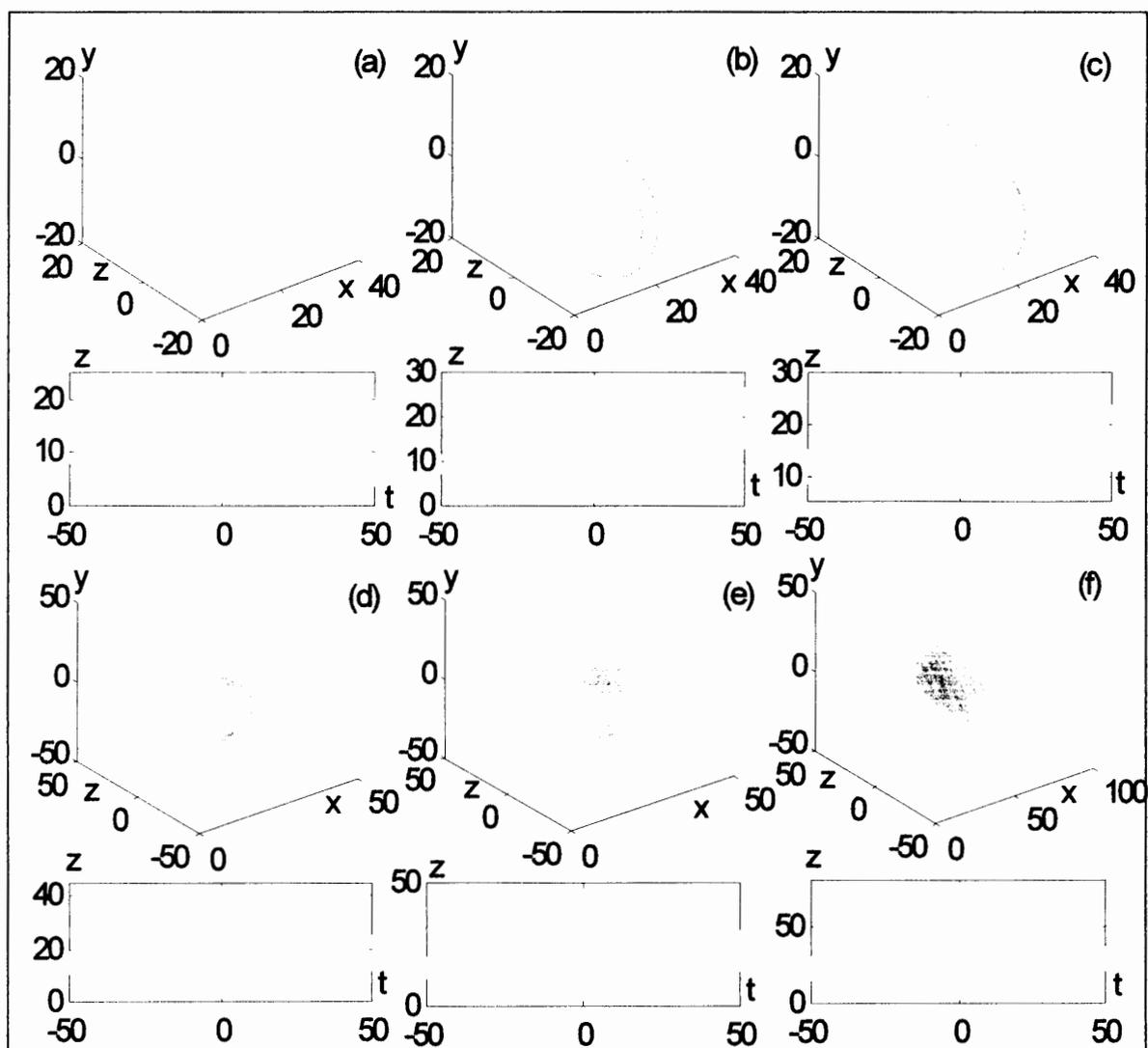


FIG. 4.25 – Quelques attracteurs du système (4.17) avec leurs évolutions temporelles

$z(t)$: (a) $c = 11$, (b) $c = 13$, (c) $c = 15$, (d) $c = 18$, (e) $c = 20$, (f) $c = 26$

EXPOSANTS DE LYAPUNOV ET DIMENSION FRACTALE

Pour le système (4.17), les trois exposants de Lyapunov sont les suivants :

$$\lambda_1 = 3.19, \lambda_2 = 0.00, \lambda_3 = -15.19$$

On peut voir les exposants de Lyapunov en fonction de temps sur la figure (4.26)

Dans notre cas (système (4.17)), la dimension de Lyapunov est :

$$D = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}$$
$$\simeq 2.210$$

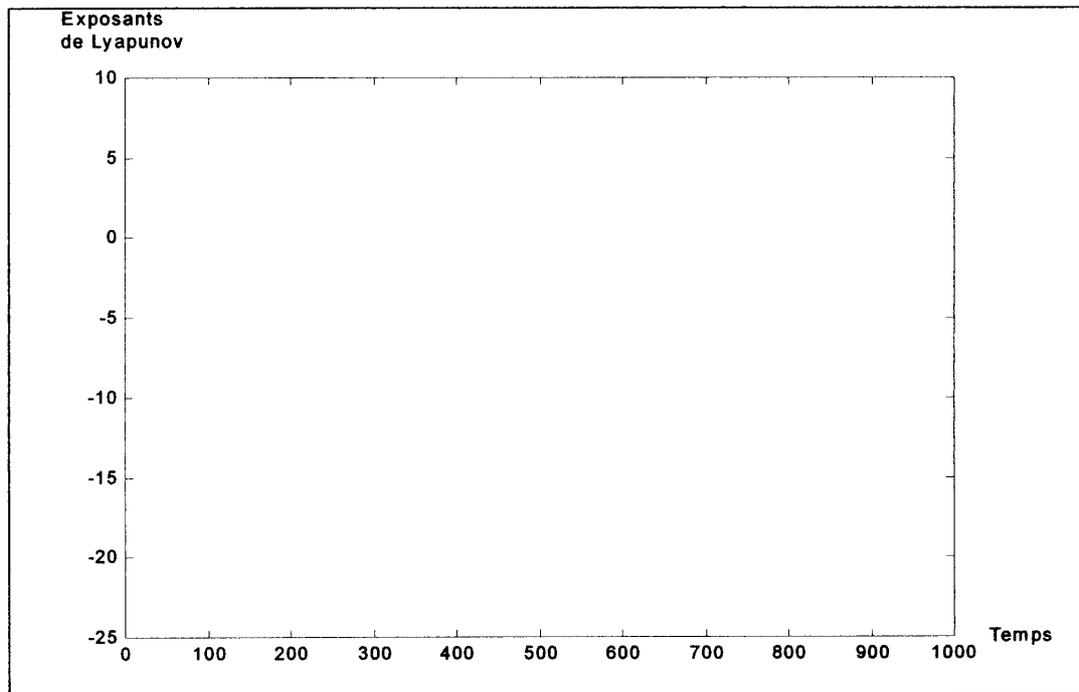


FIG. 4.26 – Les trois exposants de Lyapunov en fonction de temps du système (4.17).

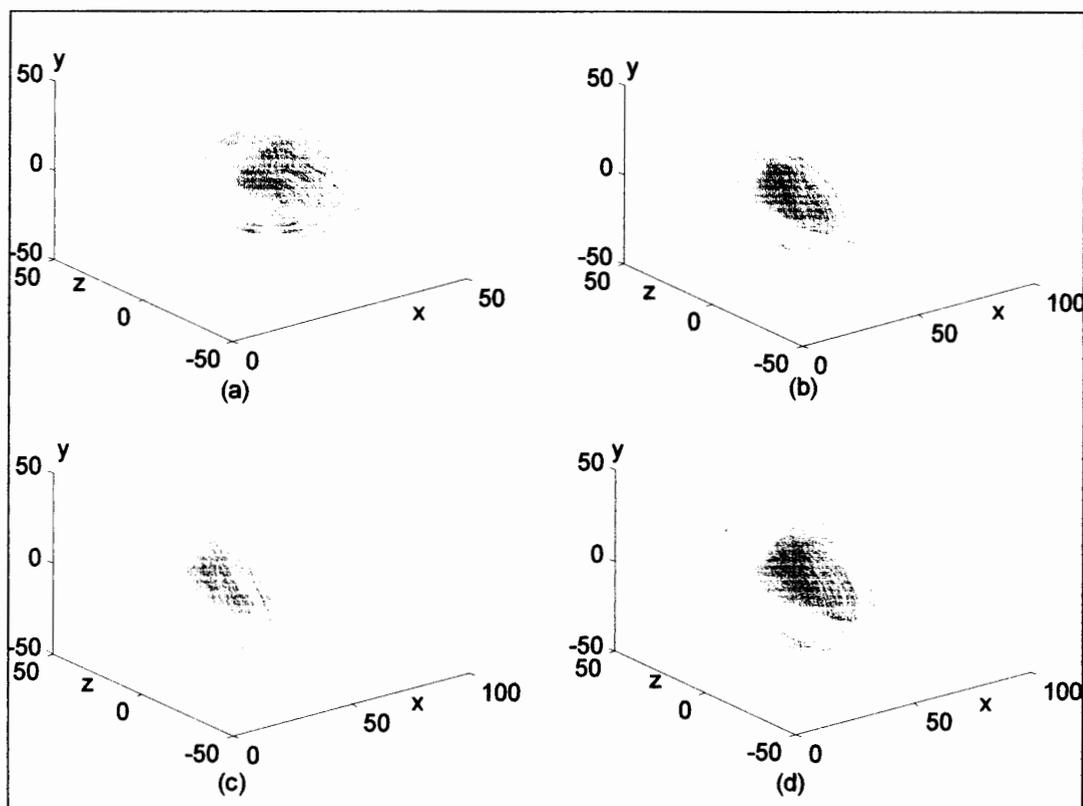


FIG. 4.27 – Comparison : (a) Attracteur étrange du système de Chen. (b) Attracteur étrange du système (4.12). (c) Attracteur étrange du système (4.13). (d) Attracteur étrange du système (4.17).

4.6 CONCLUSION

Nous avons présenté le modèle connu de Chen inspiré théoriquement du modèle de Lorenz. En remplaçant le terme non linéaire $h(x, y) = xy$ par les polynômes de degré deux :

1. $h_1(x) = x^2$

2. $h_2(x) = x^2 + x$

nous avons obtenu deux modèles modifiés du modèle original de Chen, modifiant encore le modèle associé à la non linéarité h_2 , nous avons obtenu un troisième modèle. L'étude détaillée de ces modèles (le modèle de Chen et ses modifications) et de leurs dynamiques était l'objet de ce chapitre.

Les comportements chaotiques a été prouvé numériquement et établit analytiquement. Nous avons traité en premier temps leurs dynamiques en faisant appel à des outils mathématiques analytiques (qualitatifs), puis nous avons observé les résultats dans l'étude numérique.

Nous espérons dans l'avenir, compléter notre étude en prouvons l'existence d'un homéomorphisme entre certains systèmes d'équation différentielles d'ordre trois et le modèle de Chen, pour avoir un déploiement de ce modèle.

Chapitre 5

APPLICATION AU MODELE DE ROSSLER

5.1 ETUDE DU MODELE DE ROSSLER

Le modèle de Rossler est lié à l'étude de l'écoulement des fluides. Les équations de ce modèle ont été découvertes à la suite de travaux en cinétique chimique ([31], ??, ??), elles sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - c)z \end{cases} \quad (5.1)$$

Où x , y et z sont fonctions de t et $\dot{() = \frac{d}{dt}}$

5.1.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME

L'espace des phases est un espace à trois dimensions (x, y, z) ainsi que l'espace de contrôle (a, b, c) .

La divergence de champ de vitesse est négative (le système est dissipatif) si :

$$x < c - a$$

CALCUL DES POINTS D'EQUILIBRE

On pose $k = 2\sqrt{ab}$

Les solutions ou les points d'équilibre du système dépendent des signes des paramètres, elles sont présentées sur la page suivante :

| a | b | c | z | points d'équilibre |
|-----|----------|-------------|---|---|
| < 0 | < 0 | $-k$ | $z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}$ | $\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} \right)$ |
| < 0 | < 0 | $= -k$ | $z = \frac{c}{2a}$ | $\left(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a} \right)$ |
| < 0 | < 0 | $> -k$ | critique | aucun point d'équilibre |
| < 0 | < 0 | $< k$ | critique | aucun point d'équilibre |
| < 0 | < 0 | $= k$ | $z = \frac{c}{2a}$ | $\left(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a} \right)$ |
| < 0 | < 0 | $> k$ | $z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}$ | $\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} \right)$ |
| < 0 | = 0 | < 0 | $z_1 = 0$ et $z_2 = \frac{c}{a}$ | $(0, 0, 0)$ et $\left(c, \frac{-c}{a}, \frac{c}{a} \right)$ |
| < 0 | = 0 | = 0 | $z = 0$ | $(0, 0, 0)$ |
| < 0 | = 0 | > 0 | critique | aucun point d'équilibre |
| = 0 | $\neq 0$ | $\neq 0$ | $z = \frac{b}{c}$ | $\left(\frac{ab}{c}, \frac{-b}{c}, \frac{b}{c} \right)$ |
| = 0 | = 0 | $\neq 0$ | $z = 0$ | $(0, 0, 0)$ |
| > 0 | > 0 | $< k$ | critique | aucun point d'équilibre |
| > 0 | > 0 | $= k$ | $z = \frac{c}{2a}$ | $\left(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a} \right)$ |
| > 0 | > 0 | $> k$ | $z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}$ | $\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} \right)$ |
| > 0 | > 0 | $< -k$ | critique | aucun point d'équilibre |
| > 0 | > 0 | $= -k$ | $z = \frac{c}{2a}$ | $\left(\frac{c}{2}, \frac{-c}{2a}, \frac{c}{2a} \right)$ |
| > 0 | > 0 | $> -k$ | $z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}$ | $\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} \right)$ |
| > 0 | = 0 | < 0 | $z_1 = 0$ et $z_2 = \frac{c}{a}$ | $(0, 0, 0)$ et $\left(c, \frac{-c}{a}, \frac{c}{a} \right)$ |
| > 0 | = 0 | = 0 | $z = 0$ | $(0, 0, 0)$ |
| > 0 | = 0 | > 0 | $z_1 = 0$ et $z_2 = \frac{c}{a}$ | $(0, 0, 0)$ et $\left(c, \frac{-c}{a}, \frac{c}{a} \right)$ |
| < 0 | < 0 | pour tout c | $z_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}$ | $\left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} \right)$ |

TAB. 5.1 – Points d'équilibre du modèle de Rossler

ETUDE DE LA STABILITE

pour $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ et si $c > k$, on obtient deux points d'équilibre :

$$R_1 \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} \right) \text{ et}$$

$$R_2 \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \frac{-c + \sqrt{c^2 - k^2}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} \right)$$

L'étude de stabilité revient à l'étude des signes des valeurs propres de la matrice Jacobienne du système au niveau des points d'équilibre pour $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE R_1

La matrice Jacobienne autour du point R_1 est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c + \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} & 0 & \frac{-c + \sqrt{c^2 - k^2}}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation suivante :

$$\lambda^3 + \left(-a + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - k^2}\right) \lambda^2 + \left(\frac{1}{2a}(c + \sqrt{c^2 - k^2}) + a\left(-\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - k^2}\right) + 1\right) \lambda - \sqrt{c^2 - k^2} = 0$$

On pose :

$$A_1 = -a + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - k^2},$$

$$A_2 = \frac{1}{2a}(c + \sqrt{c^2 - k^2}),$$

$$A_3 = -\sqrt{c^2 - k^2}.$$

On remarque que : $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -A_3$

Pour $c > k$, le coefficient A_3 est négatif. D'où l'existence d'une valeur propre réelle positive.

Donc ce point est instable.

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE R_2

On a la matrice Jacobienne dans ce cas :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c - \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} & 0 & \frac{-c - \sqrt{c^2 - k^2}}{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par :

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(-a + \frac{c + \sqrt{c^2 - k^2}}{2} \right) + \lambda \left(1 + \frac{c - \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} - \frac{ac + a\sqrt{c^2 - k^2}}{2} \right) + \sqrt{c^2 - k^2} = 0$$

On pose :

$$\begin{aligned} A_1 &= -a + \frac{c + \sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \\ A_2 &= 1 + \frac{c - \sqrt{c^2 - k^2}}{2a} - \frac{ac + a\sqrt{c^2 - k^2}}{2}, \\ A_3 &= \sqrt{c^2 - k^2}. \end{aligned}$$

On a : $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -A_3$.

Pour $c > k$, le coefficients A_3 est positif. D'où l'existence d'une valeur propre réelle négative. Notons λ_1 cette valeur propre.

On utilise les formules de Cardan pour compléter l'étude :

On a pour c légèrement plus grand que $k = 0.4$ et $a = b = 0.2$, les deux autres valeurs propres sont complexes et conjuguées $\lambda_{2,3} = \lambda_r \pm i\lambda_c$. Elles sont de parties réelles positives.

Si c continue de croître, une bifurcation de Hopf survient et une solution périodique de période 2 apparaît pour $c \simeq 2.7$, on remarque la naissance d'une solution périodique de période 4 par une autre bifurcation de Hopf pour $c \simeq 3.81$ encore pour $c \simeq 4.3$, une solution périodique de période 3 apparaît et qu'elle est d'après le théorème de **Sharkowski** [13] suivit par des cycles de tous les ordres.

Pour $c = 5.7$, c'est l'attracteur étrange.

5.1.2 CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE

Pour $c > k = 0.4$, le système possède deux points d'équilibre, l'un de ces points est un cycle limite.

Une série de bifurcation de Hopf fait apparaître quelques solutions périodiques, et enfin l'attracteur étrange pour $c = 5.7$

5.1.3 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

Dans toute la suite, on prendra pour valeur des paramètres les valeurs suivantes :

$$a = b = 0.2 \text{ et } c = 5.7$$

ATTRACTEUR ETRANGE (ATTRACTEUR EN ROTATION)

Le système (5.1) exhibe un attracteur étrange (ainsi que ses projections) que nous représentons dans la figure suivante :

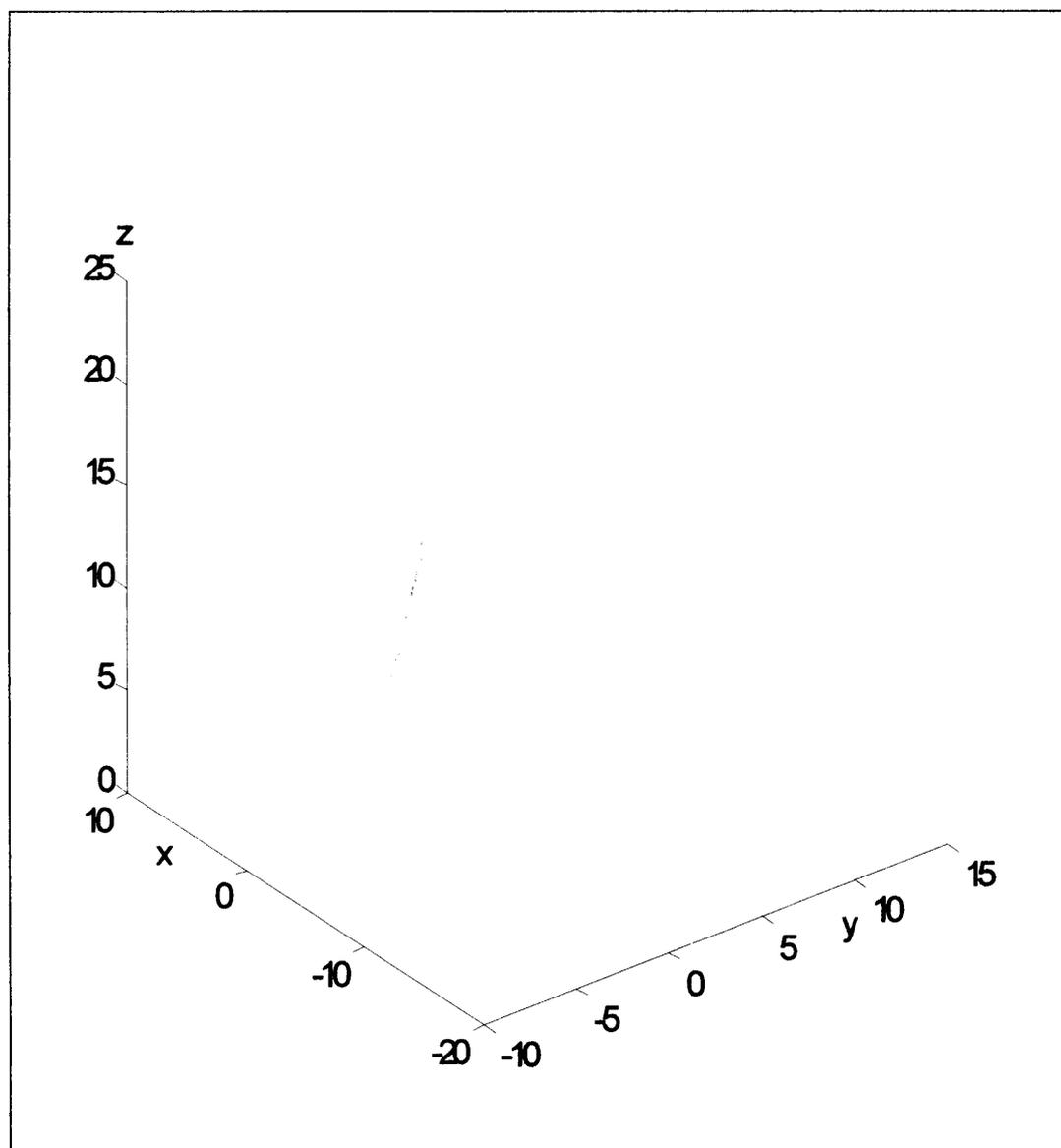


FIG. 5.1 – L'attracteur étrange de Rossler dans l'espace (x, y, z) .

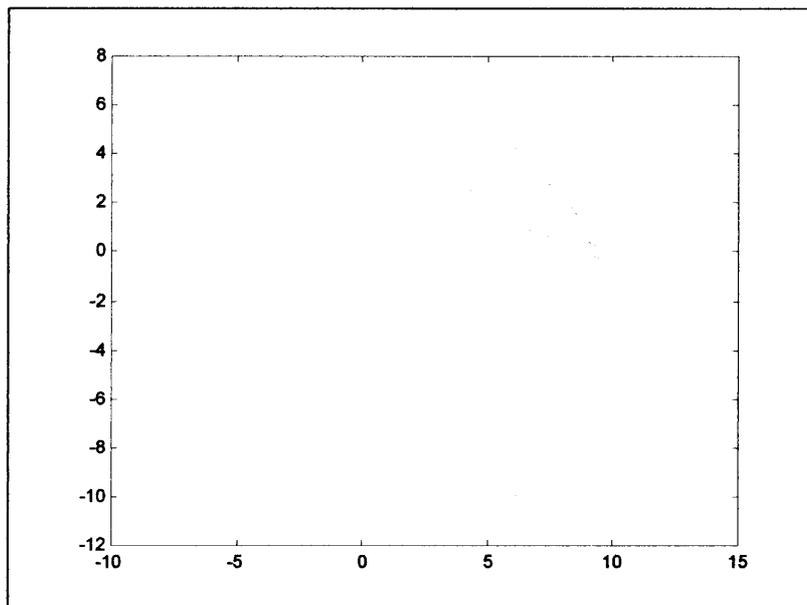


FIG. 5.2 – Projection de l'attracteur étrange de Rossler sur le plan (x, y) .

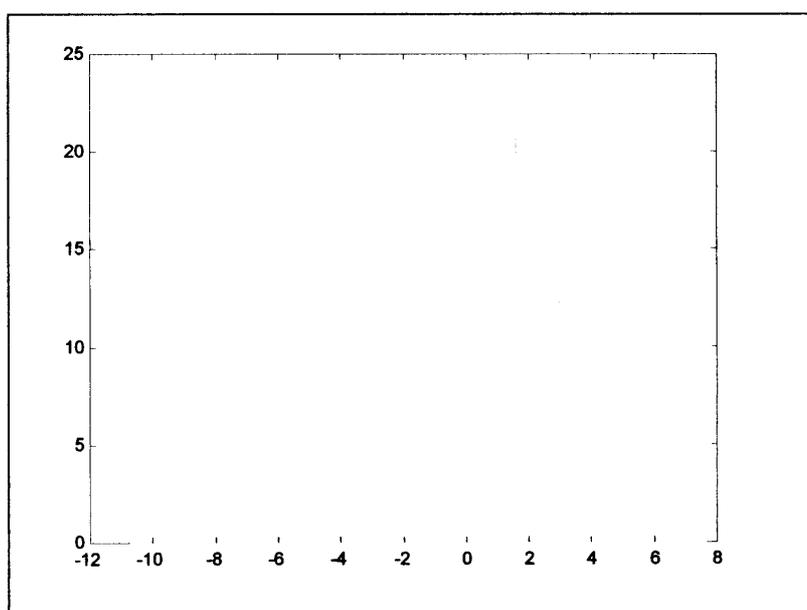


FIG. 5.3 – Projection de l'attracteur étrange de Rossler sur le plan (y, z) .

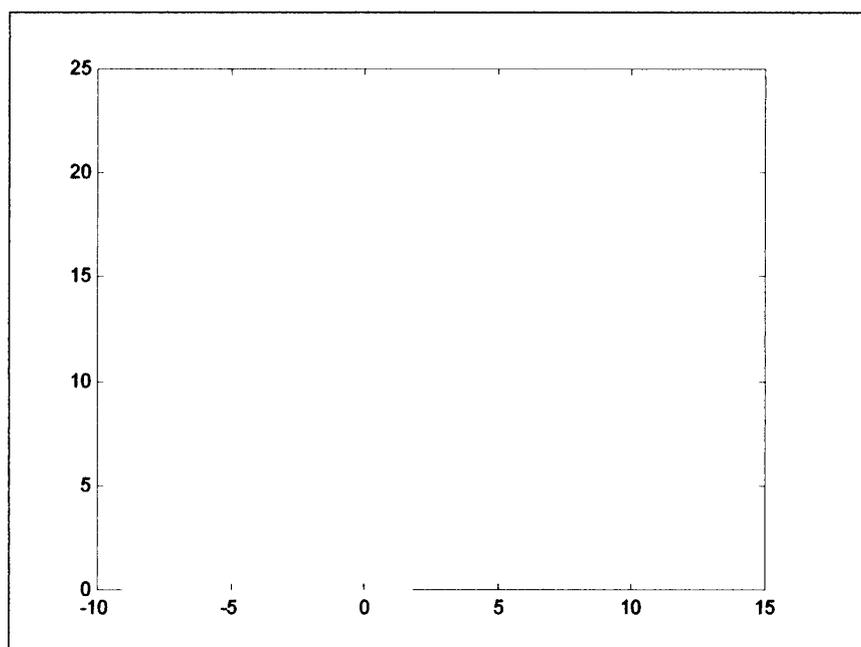


FIG. 5.4 – Projection de l'attracteur étrange de Rossler sur le plan (x, z) .

TRANSITION VERS LE CHAOS ET BIFURCATION

En étudiant l'influence de c sur le caractère chaotique ou non du système, on met en évidence un phénomène caractéristique des systèmes chaotiques : le doublement de période qui se traduit par le doublement du nombre de trajectoires observées dans l'espace des phases une, puis deux, puis quatre cycles. . .

Les doublements de période sont ensuite observés de plus en plus fréquemment à mesure que c augmente.

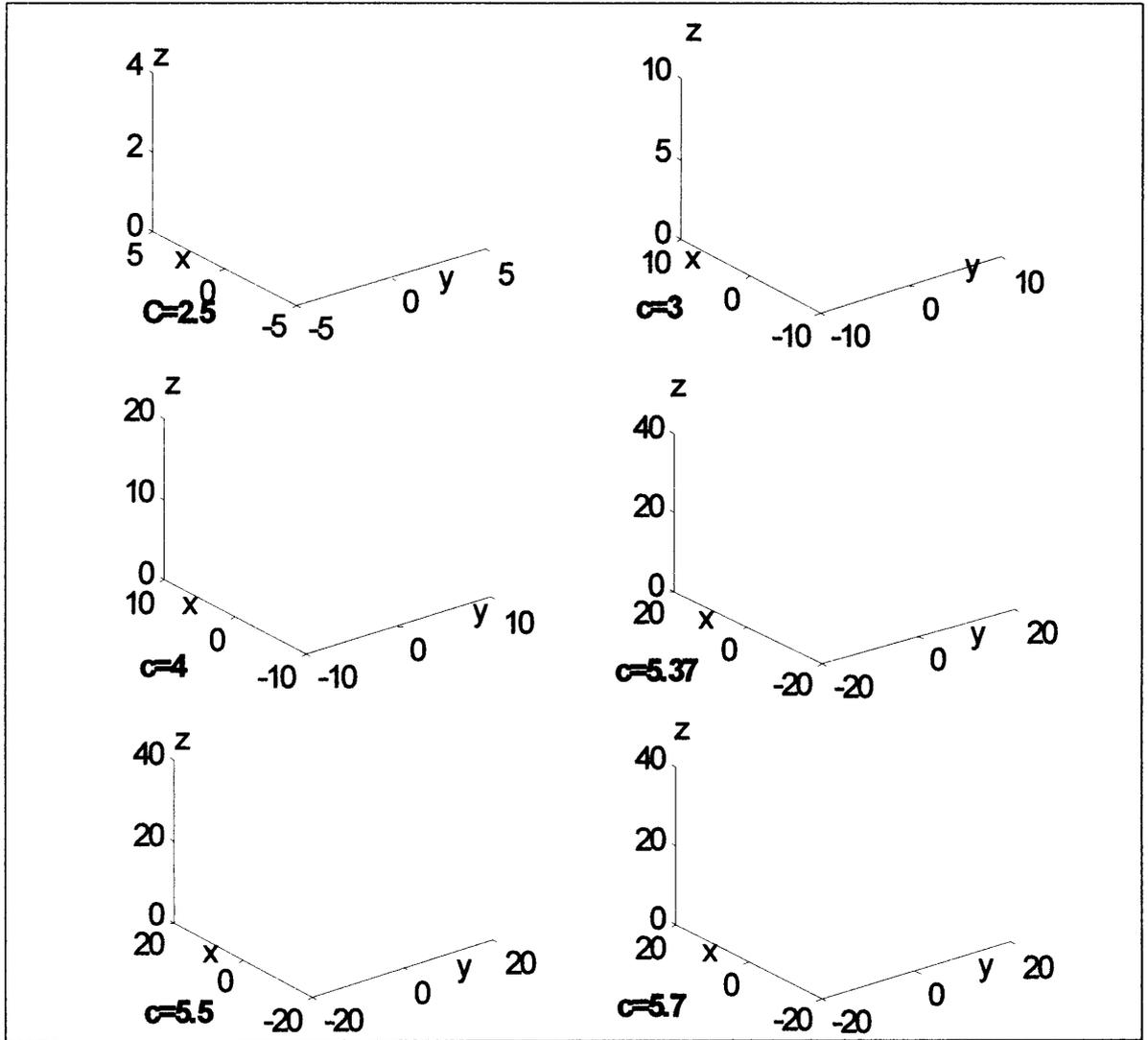


FIG. 5.5 – La transition vers le chaos par cascade de dédoublement de période pour le modèle de Rossler (d'un cycle limite à un attracteur étrange).

La figure (5.5), le tableau et les figures suivants résument les différentes étapes et caractères (signaux, exposants de Lyapunov, dimension de Lyapunov) de la transition vers le chaos par le doublement de période [4] (avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$).

| Figure | a | b | c | Exposants de Lyapunov | Dimension de Lyapunov |
|--------|------|------|-------|-----------------------|-----------------------|
| 5. 6 | 0. 2 | 0. 2 | 2. 50 | (0.00, -0.04, -2.12) | 1.000 |
| 5. 7 | 0. 2 | 0. 2 | 3. 00 | (0.00, -0.042, -2.61) | 1.000 |
| 5. 8 | 0. 2 | 0. 2 | 4. 00 | (0.00, -0.09, -3.55) | 1.000 |
| 5. 9 | 0. 2 | 0. 2 | 5. 37 | (0.00, -0.01, -5.01) | 1. 111 |
| 5. 10 | 0. 2 | 0. 2 | 5. 50 | (0.01, 0.00, -5.15) | 2. 002 |
| 5. 11 | 0. 2 | 0. 2 | 5. 70 | (0.07, 0.00, -5.41) | 2. 014 |

TAB. 5.2 – Transition vers le chaos pour le modèle de Rossler

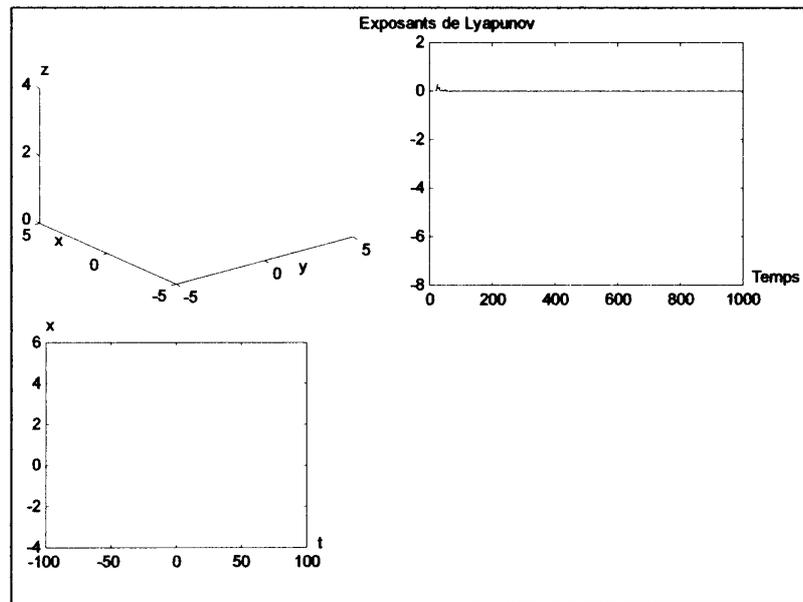


FIG. 5.6 – Solution périodique (un seul minimum de l'abscisse) pour le système de Rossler .

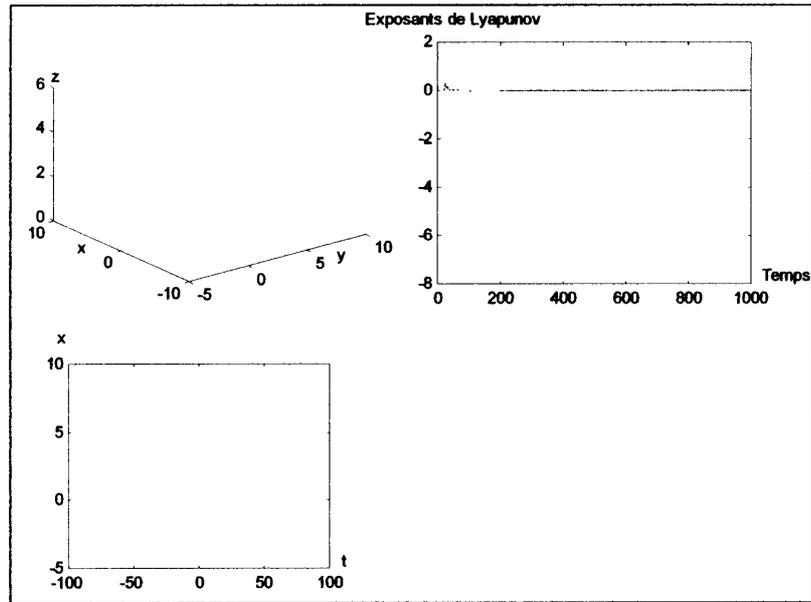


FIG. 5.7 – Solution périodique (deux minimum de l'abscisse) pour le système de Rossler.

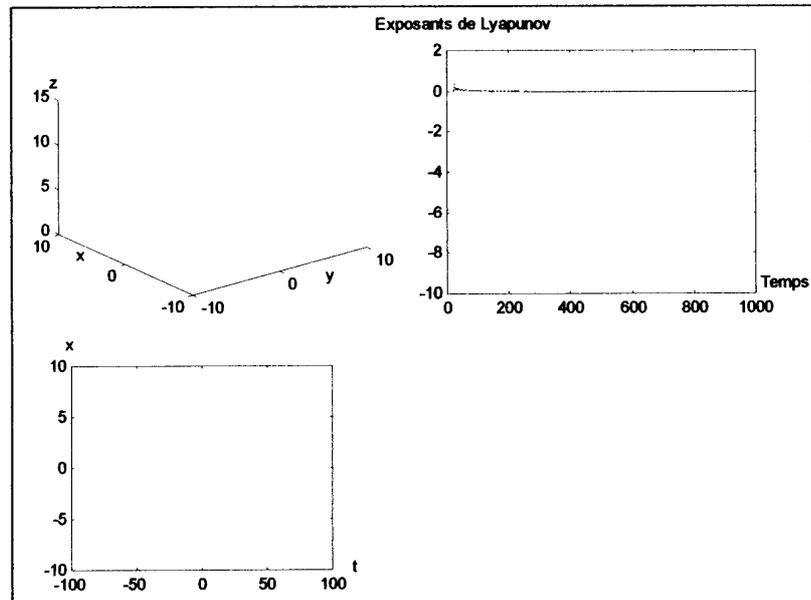


FIG. 5.8 – Solution périodique (quatre minima de l'abscisse) pour le système de Rossler.

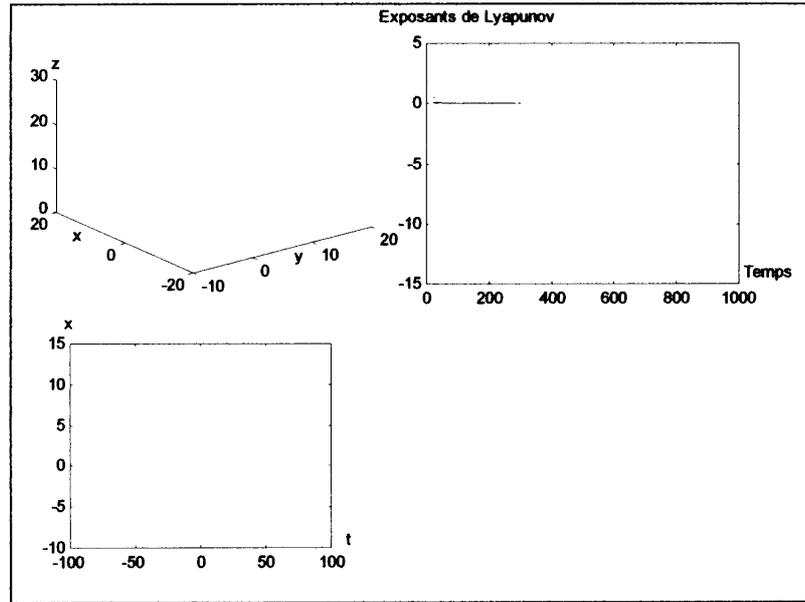


FIG. 5.9 – Solution périodique (trois minima de l'abscisse) pour le système de Rossler.

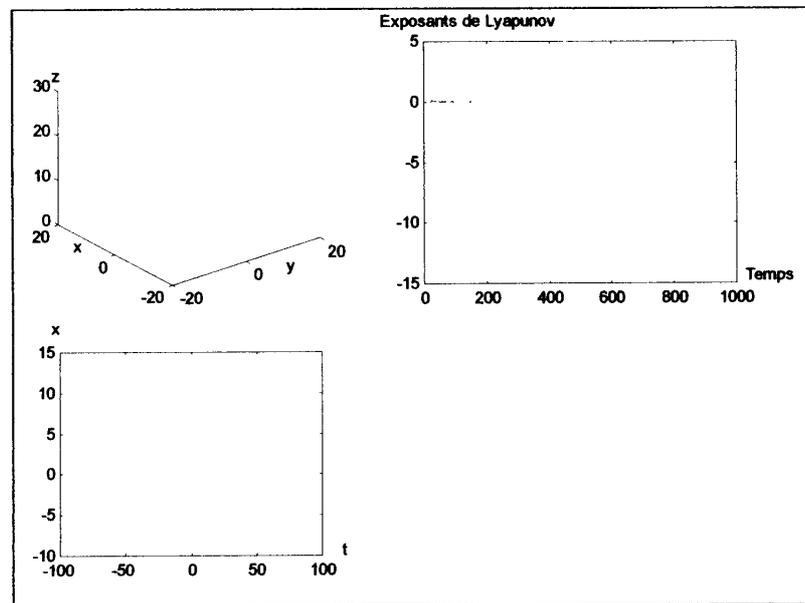


FIG. 5.10 – Attracteur de période supérieure à trois du système le système de Rossler.

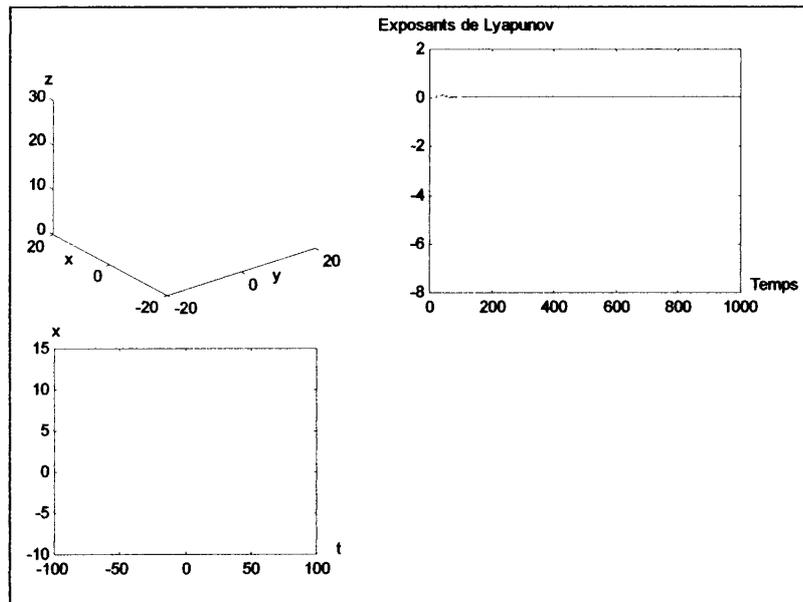


FIG. 5.11 – Attracteur étrange du système de Rossler.

5.2 PREMIERE MODIFICATION DU MODELE DE ROSSLER

Si on remplace le terme non linéaire \mathbf{xz} par le terme non linéaire \mathbf{x}^2 on aura un nouveau système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + x^2 - cz \end{cases} \quad (5.2)$$

où x , y et z sont fonctions de t et $(\dot{}) = \frac{d}{dt}$.

5.2.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME

L'espace des phases est tridimensionnel (x, y, z) ainsi que l'espace de contrôle (a, b, c) .

La divergence de champ de vitesse est négative pour $a < c$. Alors pour $a = 0$. 385
 $b = 0$ et $c = 2$, Le système (5.2) est donc dissipatif

CALCUL DES POINTS D'EQUILIBRE

On résout :

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

Pour $a > 0$, $b > 0$ et $c > 2a\sqrt{b}$, les points d'équilibre sont :

$$R_1 \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{2a}, \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{2a^2}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{2a^2} \right) \text{ et} \\ R_2 \left(\frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{2a}, \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{2a^2}, \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{2a^2} \right)$$

ETUDE DE STABILITE

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE R_1

La matrice Jacobienne autour de R_1 est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c + \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{a} & 0 & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation suivante :

$$\lambda^3 + (c - a)\lambda^2 + \left(1 + \frac{c + \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{a} - ac\right)\lambda - \sqrt{c^2 - 4a^2b} = 0$$

On pose :

$$A_1 = (c - a),$$

$$A_2 = \left(1 + \frac{c + \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{a} - ac\right),$$

$$A_3 = -\sqrt{c^2 - 4a^2b}.$$

On a une des relations entre les racines du polynôme et ses coefficients :

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -A_3 = \sqrt{c^2 - 4a^2b}$$

D'où l'existence d'une valeur propre positive. Donc le point d'équilibre R_1 est instable.

STABILITE DU POINT D'EQUILIBRE R_2

La matrice Jacobienne autour de R_2 est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c - \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{a} & 0 & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions de l'équation suivante :

$$\lambda^3 + (c - a)\lambda^2 + \left(1 + \frac{c - \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{a} - ac\right)\lambda + \sqrt{c^2 - 4a^2b} = 0$$

On pose :

$$A_1 = (c - a),$$

$$A_2 = \left(1 + \frac{c - \sqrt{c^2 - 4a^2b}}{a} - ac\right),$$

$$A_3 = \sqrt{c^2 - 4a^2b}.$$

Pour $c > 2a\sqrt{b}$, le coefficient A_3 est positif. D'où l'existence d'une racine réelle négative. Notons λ_1 cette valeur propre.

On utilise les formules de Cardan pour définir la nature des deux autres valeurs propres.

Pour c **légèrement** plus grand que 0 et $a = 0.385$, $b = 0$, les deux autres valeurs propres sont complexes et conjuguées $\lambda_{2,3} = \lambda_r \pm i\lambda_c$. Elles sont de partie réelle positive.

Si c continue de croître, une bifurcation de Hopf survient et une solution périodique de période 2 apparaît pour $c \simeq 0.8$. On remarque la naissance d'une solution périodique de période 4 par une autre bifurcation de Hopf pour $c \simeq 0.95$. L'attracteur étrange devient clair en $c = 2$, après une série de bifurcation.

5.2.2 CONCLUSION DE L'ETUDE ANALYTIQUE

Pour $c > 0$, le système possède deux points d'équilibre, l'un de ces points est un cycle limite. Une série de bifurcation de Hopf fait apparaître quelques solutions périodiques et enfin l'attracteur étrange pour $c = 2$.

5.2.3 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

Dans toute la suite, on prendra pour valeurs des paramètres les valeurs suivantes :

$$a = 0.385, b = 0 \text{ et } c = 2$$

ATTRACTEUR ETRANGE

Le système (5.2) exhibe un attracteur étrange (ainsi que ses projections) que nous représentons dans la figure suivante :

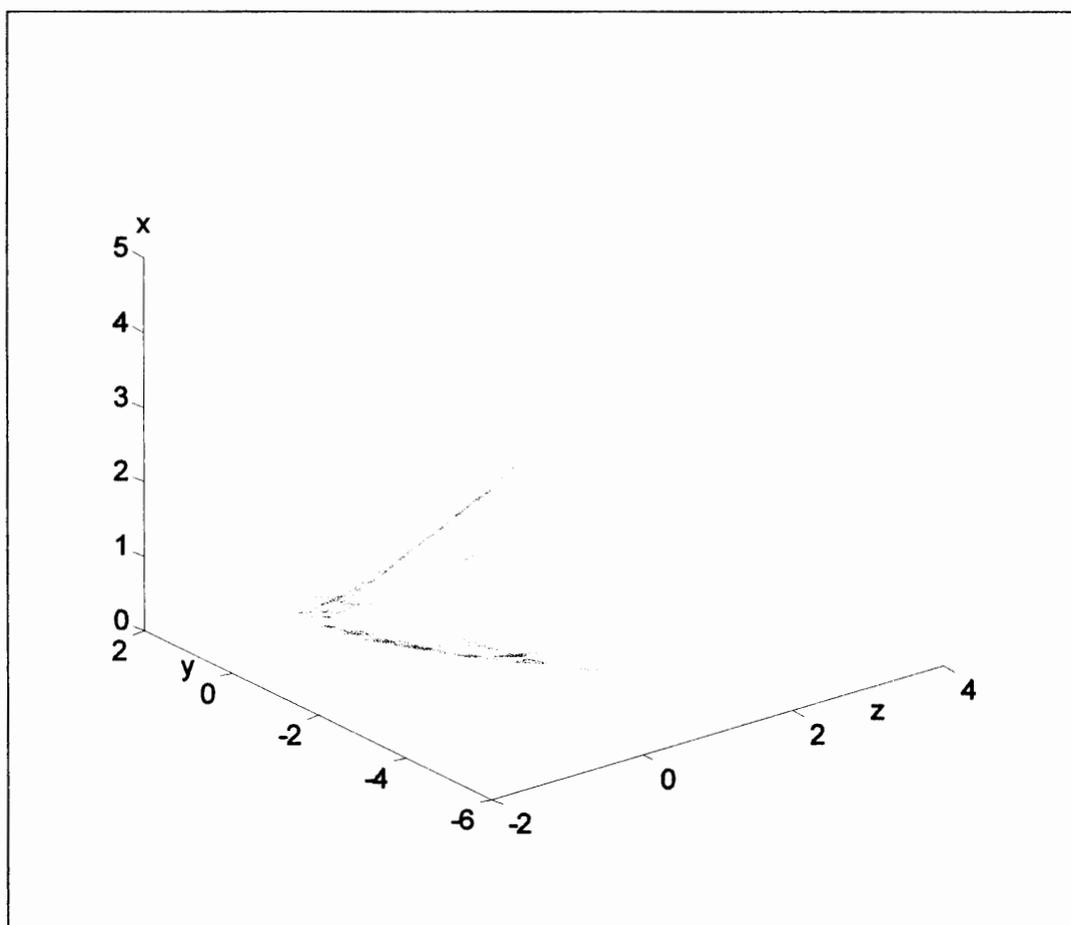


FIG. 5.12 – L'attracteur étrange du système (5.2) dans l'espace (y, z, x) .

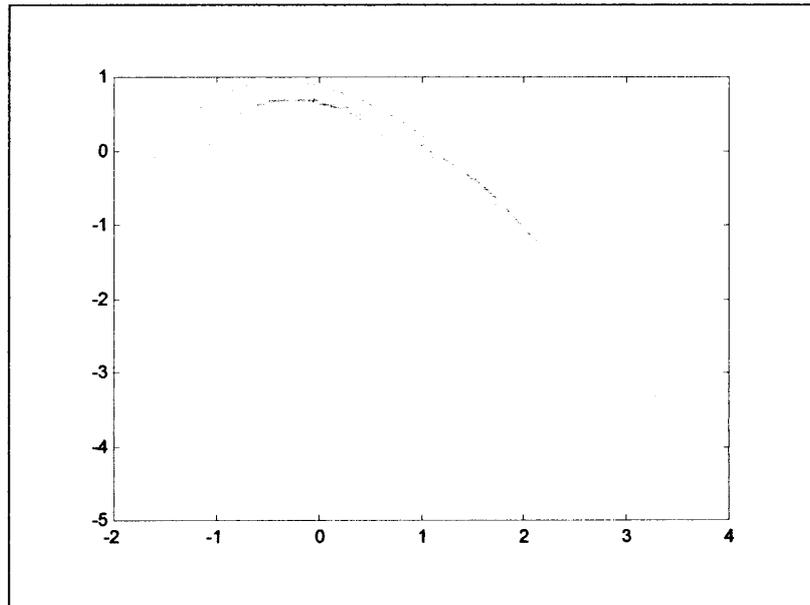


FIG. 5.13 – Projection de l'attracteur étrange du système (5.2) sur le plan (x, y) .

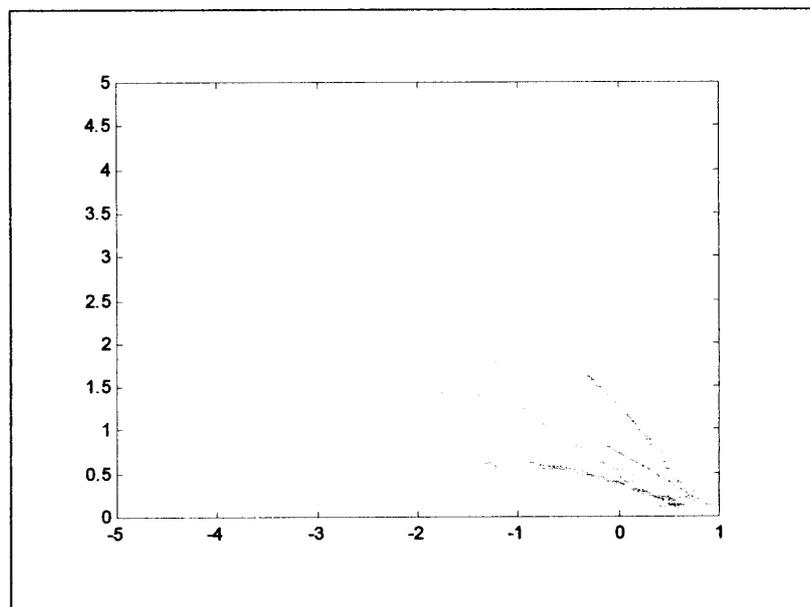


FIG. 5.14 – Projection de l'attracteur étrange du système (5.2) sur le plan (y, z) .

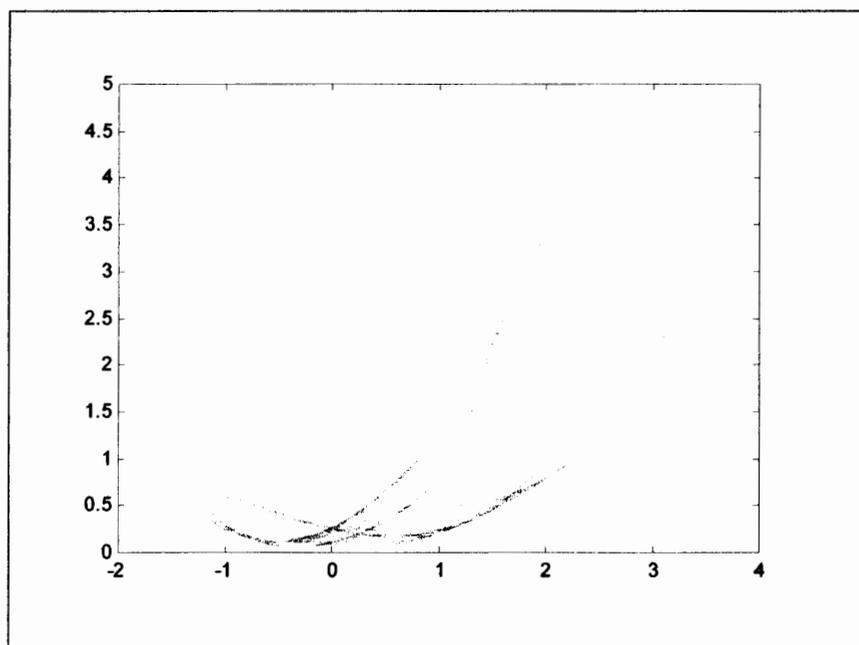


FIG. 5.15 – Projection de l'attracteur étrange du système (5.2) sur le plan (x, z) .

TRANSITION VERS LE CHAOS

Tout comme dans le cas de l'attracteur de Rossler, si on fait évoluer le paramètre c , on peut constater des différents attracteurs dont certains sont regroupés dans la figure (5.16) (avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$).

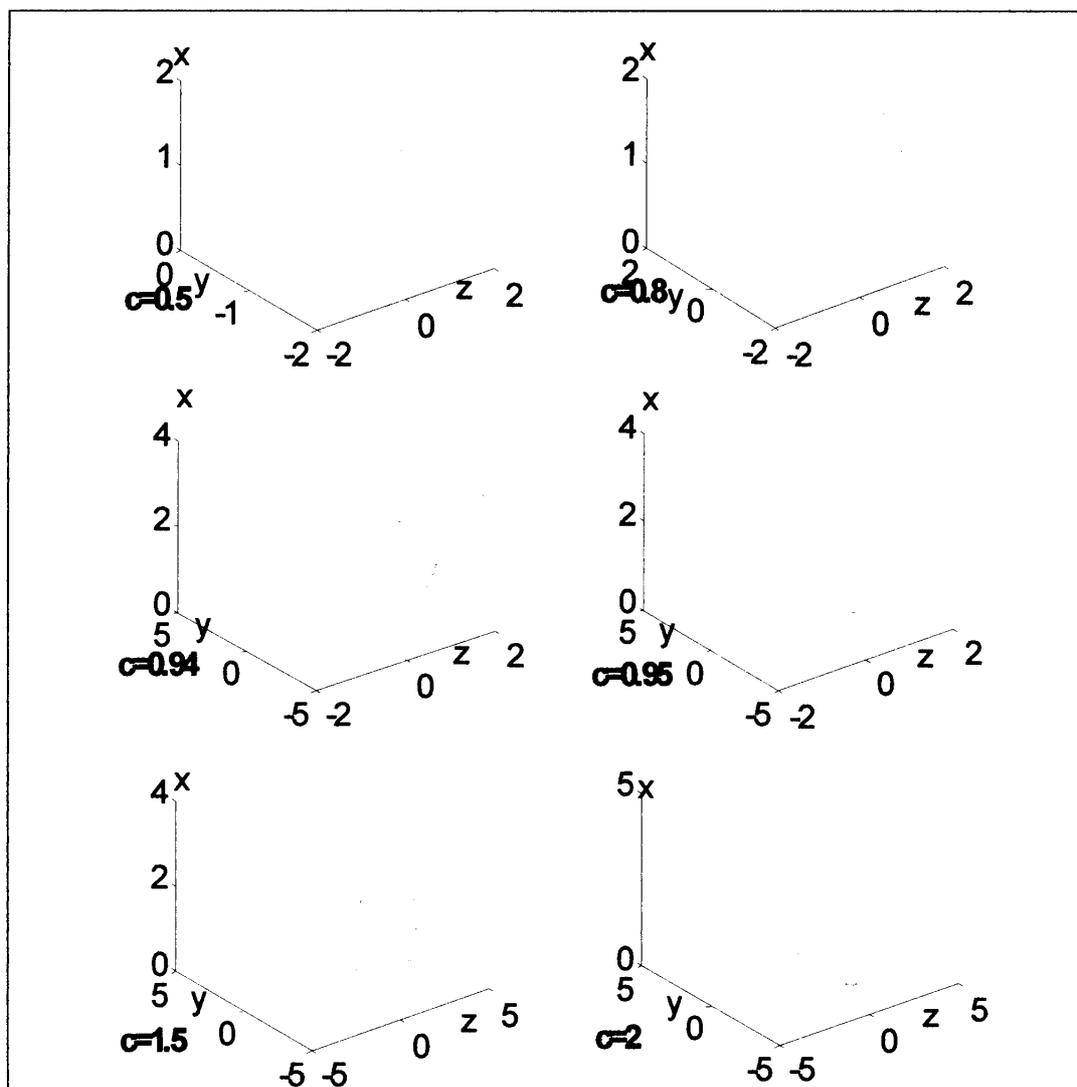


FIG. 5.16 – La transition vers le chaos par cascade de dédoublement de période pour le système (5.2). (d'un cycle limite à un attracteur étrange).

Tout comme dans le cas de l'attracteur de Rossler, on présente le tableau suivant :

| Figure | a | b | c | Exposants de Lyapunov | Dimension de Lyapunov |
|--------|--------|---|-------|-----------------------|-----------------------|
| 5. 17 | 0. 385 | 0 | 0. 50 | (0.00, -0.06, -0.06) | 1. 000 |
| 5. 18 | 0. 385 | 0 | 0. 80 | (0.00, -0.21, -0.21) | 1. 000 |
| 5. 19 | 0. 385 | 0 | 0. 94 | (0.00, -0.01, -0.55) | 1. 000 |
| 5. 20 | 0. 385 | 0 | 0. 95 | (0.00, -0.01, -0.56) | 1. 000 |
| 5. 21 | 0. 385 | 0 | 2. 00 | (0.04, 0.01, -1.66) | 2. 030 |

TAB. 5.3 – Transition vers le chaos du système (5.2)

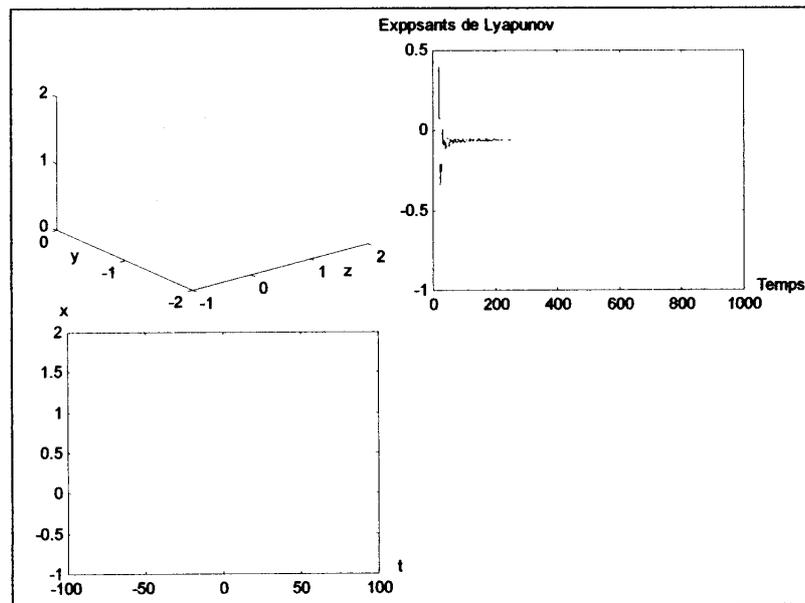


FIG. 5.17 – Solution périodique (un seul minimum de l'abscisse) du système (5.2).

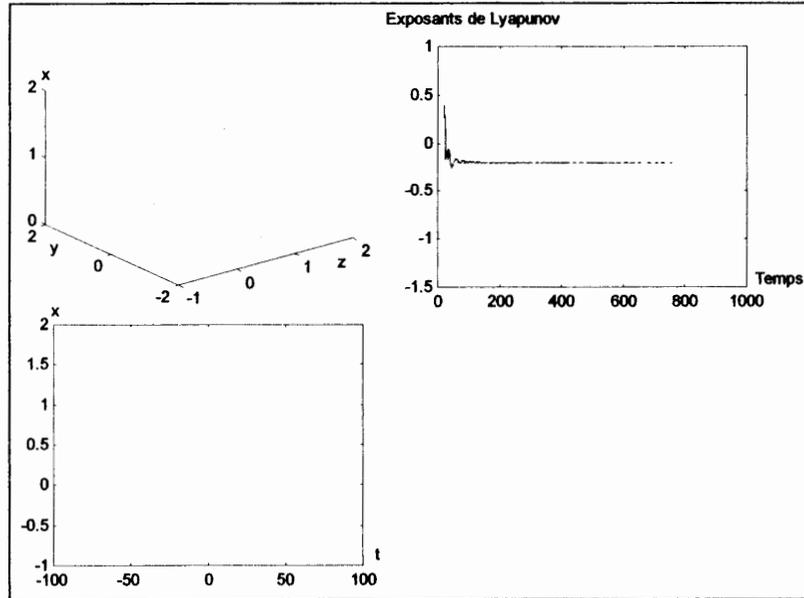


FIG. 5.18 – Solution périodique (deux minima de l'abscisse) du système (5.2).

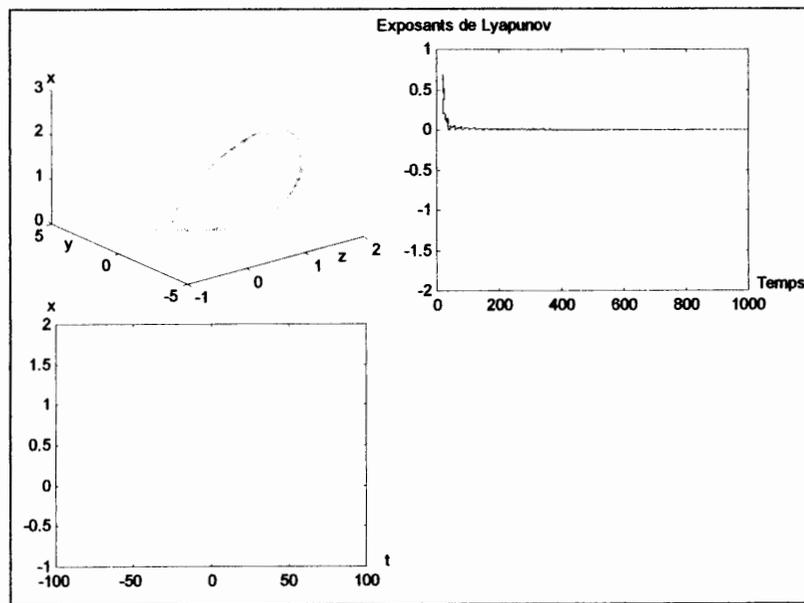


FIG. 5.19 – Solution périodique (trois minima de l'abscisse) du système (5.2).

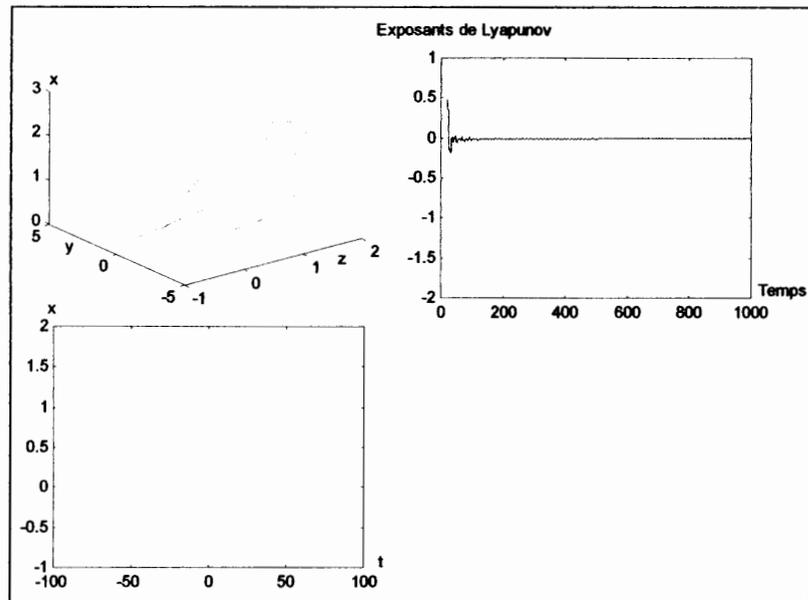


FIG. 5.20 – Solution périodique (quatre minima de l'abscisse) du système (5.2).

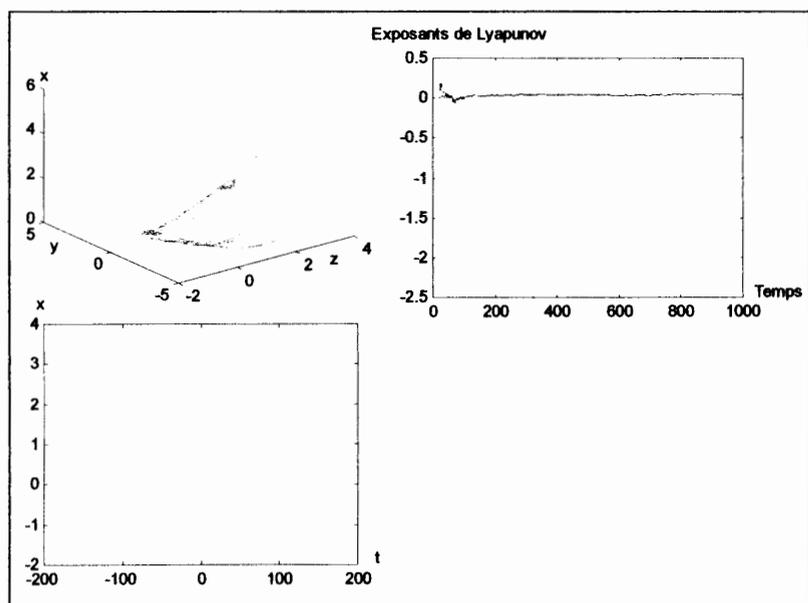


FIG. 5.21 – Attracteur étrange pour (5.2).

5.3 AUTRE MODIFICATION DU MODELE DE ROSSLER

Si on change le terme non linéaire \mathbf{xz} par le terme non linéaire $\mathbf{sgn}(\mathbf{x})$ on aura un nouveau système :

$$\begin{cases} \dot{x} = & -(y + z) \\ \dot{y} = & x + ay \\ \dot{z} = & b + \mathbf{sgn}(x) - cz \end{cases} \quad (5.3)$$

où x , y et z sont fonctions de t .

$\mathbf{sgn}(\cdot)$ donne le signe de son argument (ici l'argument est x) et $\dot{(\)} = \frac{d}{dt}$.

5.3.1 ANALYSE ET NATURE DU SYSTEME

Le système est dissipatif pour $a < c$.

Pour $c > 0$, les points d'équilibre sont donnés par :

$$R_1(0, 0, 0), R_2\left(\frac{a(b+1)}{c}, \frac{-b-1}{c}, \frac{b+1}{c}\right) \text{ et } R_3\left(\frac{a(b-1)}{c}, \frac{-b+1}{c}, \frac{b-1}{c}\right)$$

La matrice du système est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont les solutions de l'équation suivante :

$$(-c - \lambda)(\lambda^2 - a\lambda + 1) = 0$$

Pour tout a , $\lambda_1 = -c$ est une valeur propre négative.

Pour $a < -2$, λ_2 et λ_3 sont deux valeurs propre négatives (les points d'équilibre sont des noeuds impropres asymptotiquement stables).

Pour $-2 < a < 0$, les deux valeurs propres λ_2 et λ_3 sont complexes et de partie réelle négative (les points d'équilibre sont des foyers asymptotiquement stables).

Pour $0 < a < 2$, les deux valeurs propres λ_2 et λ_3 sont complexes et de partie réelle positive (les points d'équilibre sont des points selles).

Pour $a > 2$, les deux valeurs propres λ_2 et λ_3 sont réelles et au moins une est positive (les points d'équilibre sont des points selles).

5.3.2 ESSAIS ET RESULTATS NUMERIQUES

ATTRACTEUR ETRANGE

Pour les paramètres suivants :

$$a = 0.5, b = 0 \text{ et } c = 2$$

Le système (5.3) possède un attracteur étrange que nous représentons dans les figures suivantes :

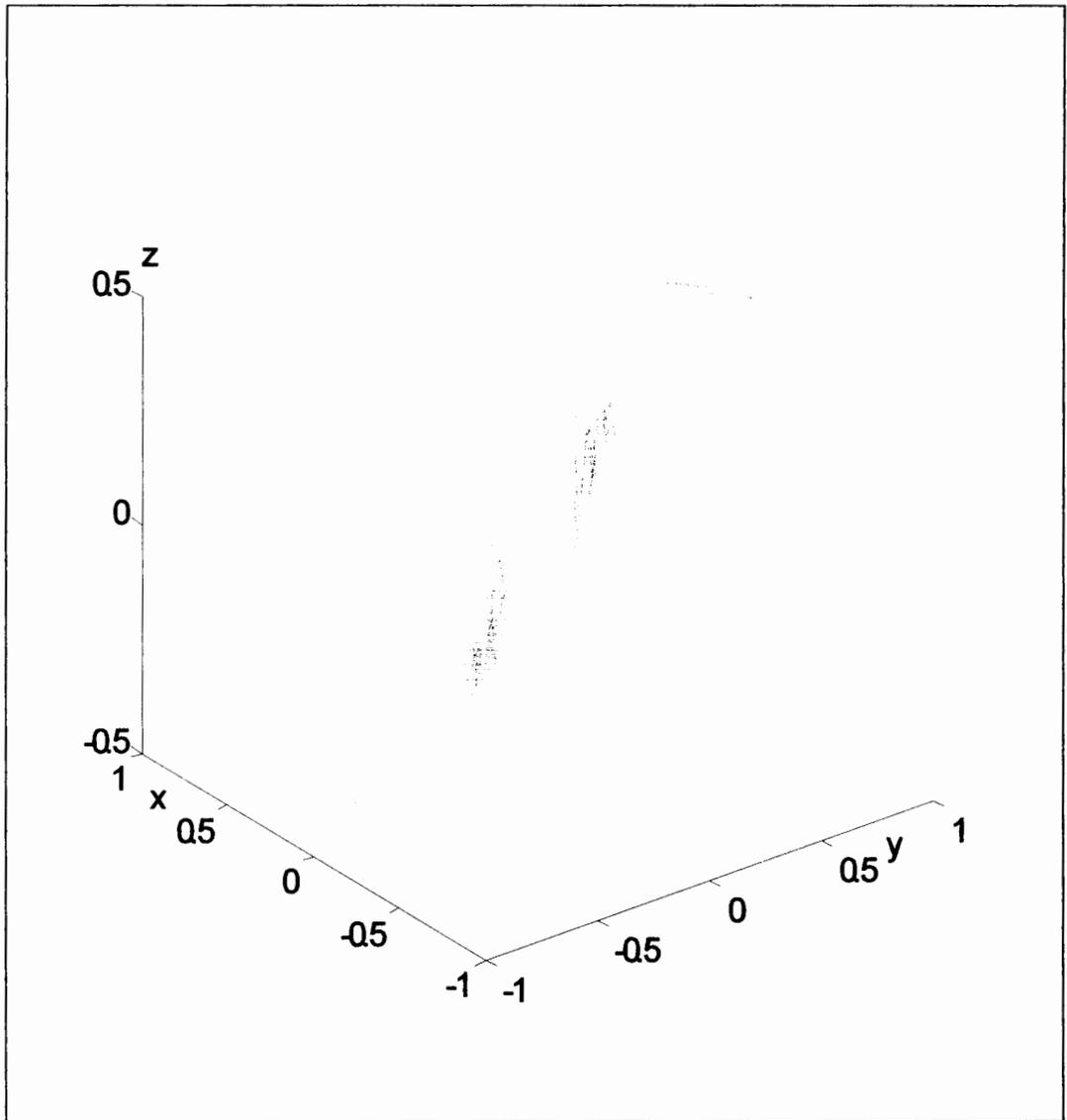


FIG. 5.22 – Attracteur étrange du système (5.3) dans le plan (x, y, z) .

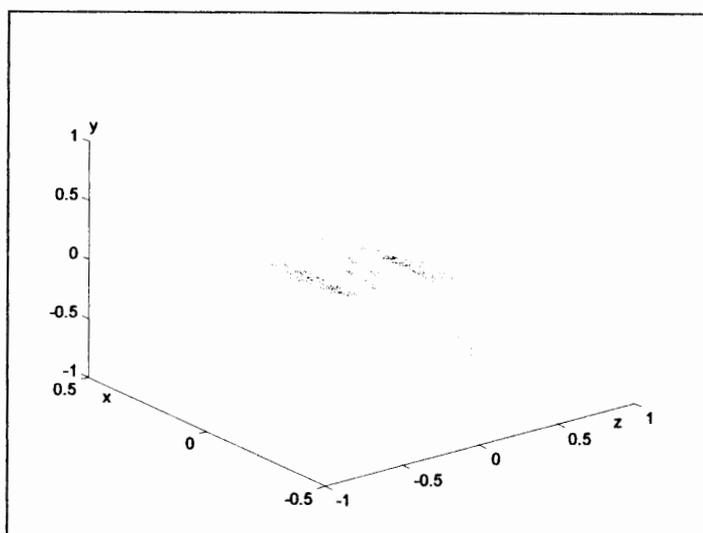


FIG. 5.23 – Attracteur étrange du système (5.3) dans le plan (x, z, y) .

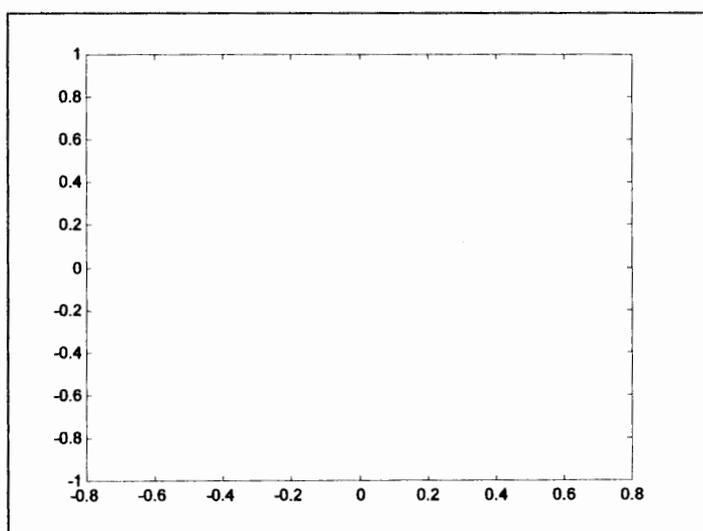


FIG. 5.24 – Projection de l'attracteur étrange du système (5.3) sur le plan (x, y) .

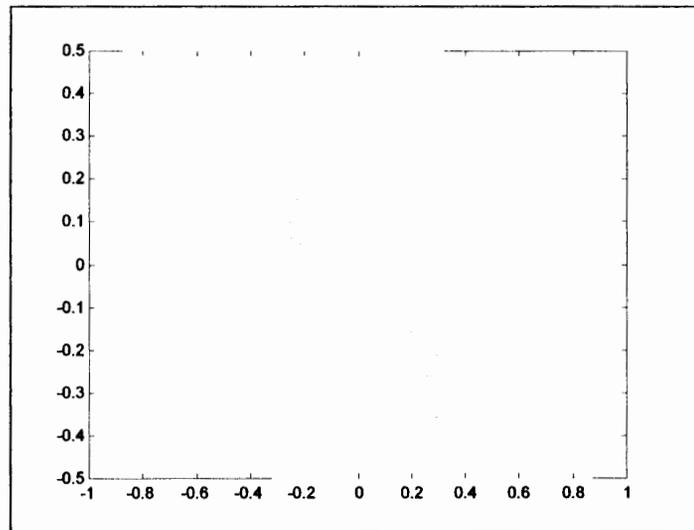


FIG. 5.25 – Projection de l'attracteur étrange du système (5.3) sur le plan (y, z) .

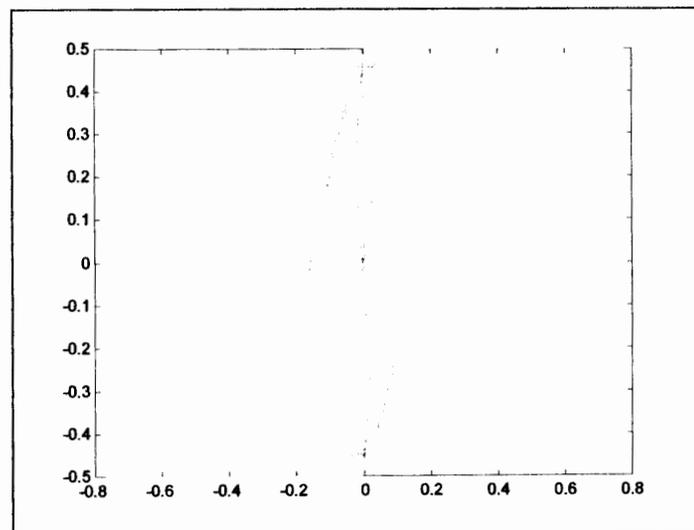


FIG. 5.26 – Projection de l'attracteur étrange du système (5.3) sur le plan (x, z) .

EVOLUTION TEMPORELLE

La figure suivante donne les séries temporelles du système (5.3).

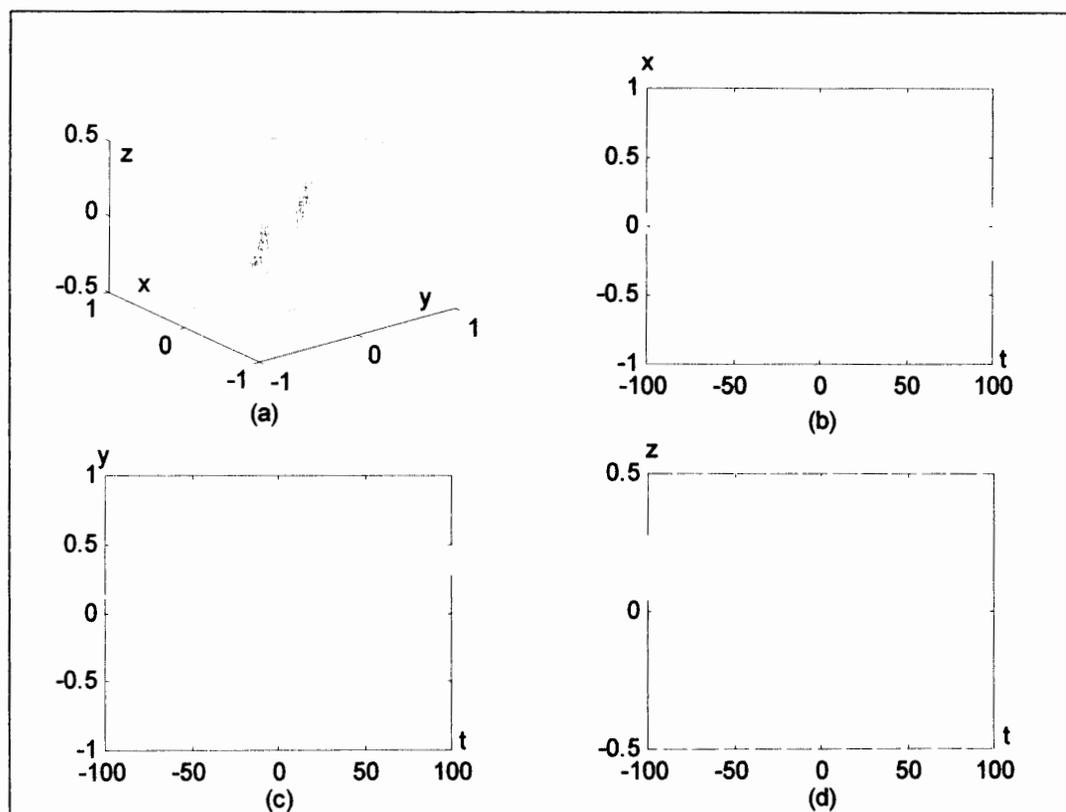


FIG. 5.27 – (a) L'attracteur étrange du système (5.3). (b) Le signal chaotique $x(t)$. (c) Le signal chaotique $y(t)$. (d) Le signal chaotique $z(t)$.

EXPOSANTS DE LYAPUNOV ET DIMENSION FRACTALE

Pour le système (5.3), les trois valeurs des exposants de Lyapunov sont les suivantes :

$$\lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 0.25 \text{ et } \lambda_3 = -2.00$$

On peut voir les exposants de Lyapunov en fonction de temps sur la figure suivante.

Dans notre cas (système (5.3)), la dimension de Lyapunov est :

$$D = 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|}$$
$$\simeq 2.250$$

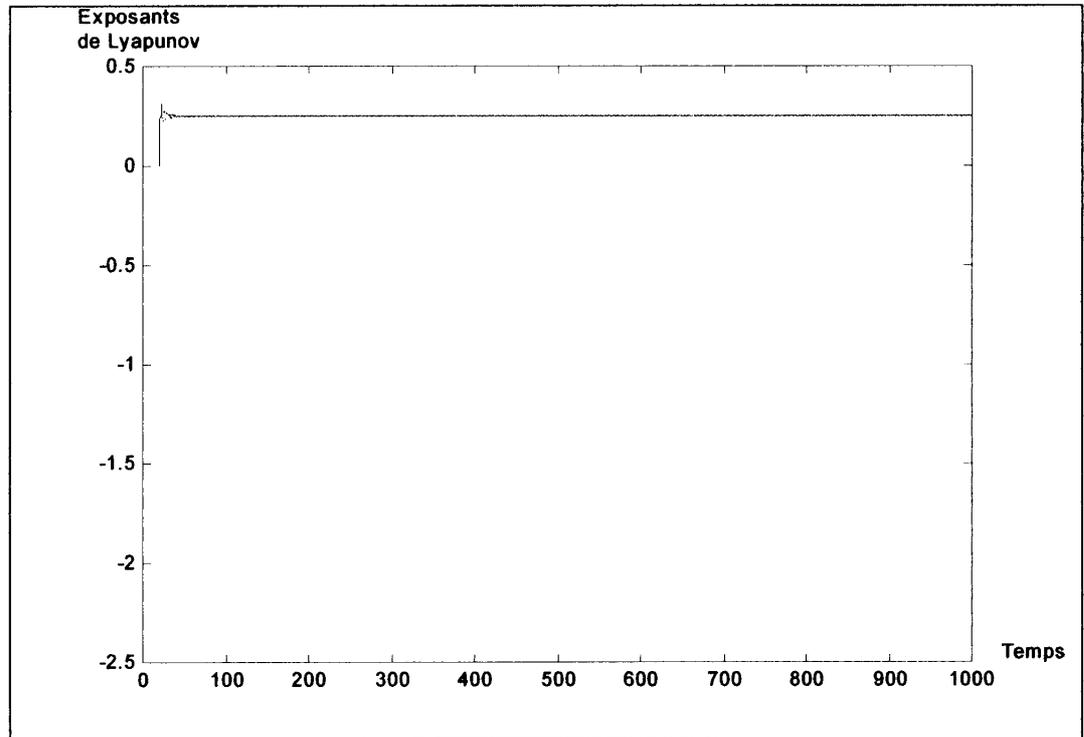


FIG. 5.28 – Les trois exposants de Lyapunov en fonction de temps du système (5.3).

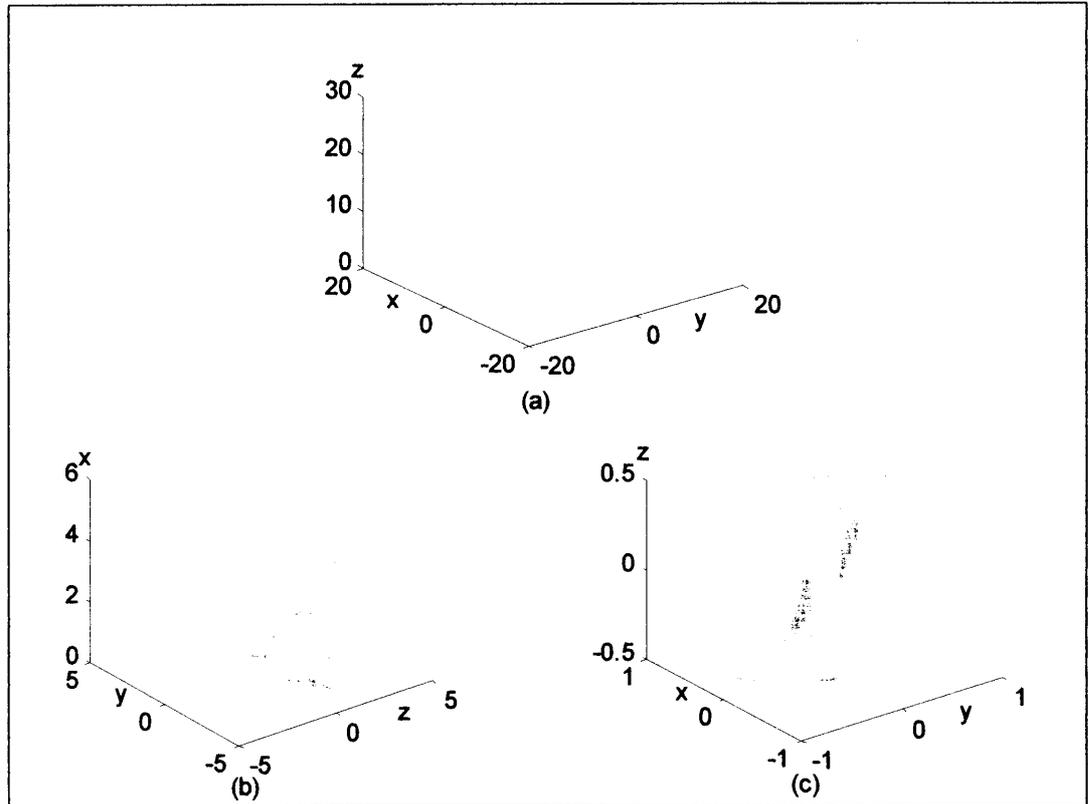


FIG. 5.29 – Comparaison : (a) Attracteur étrange de Rossler. (b) Attracteur étrange du système (5.2). (c) Attracteur étrange du système (5.3).

5.4 CONCLUSION

Nous avons traité dans ce chapitre le modèle connu de Rossler avec les deux approches : théorique (analytique) et numérique. Comme le modèle de Chen dans le chapitre précédent, nous avons extrait d'autres modèles chaotiques, cette fois en remplaçant le terme non linéaire xy (la seule non linéarité dans les équations du modèle de Rossler) par deux fonctions : la première régulière (polynôme du deuxième degré : $h_1(x) = x^2$) et l'autre linéaire par morceaux : $h_2(x) = \text{sgn}(x)$. Ces modèles modifiés ont été étudiés en suivant la démarche d'étude du modèle original de Rossler. Ils gardent une dynamique complexe et chaotique.

Pour le modèle de Rossler, nous espérons aussi réaliser un déploiement.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons présenté dans ce mémoire une étude analytique et une autre numérique de la dynamique des deux modèles connus :

1. Le modèle de Chen avec deux non linéarités quadratiques xy et xz .
2. Le modèle de Rossler avec la seule non linéarité quadratique xy .

En remplaçant le terme non linéaire xy pour chacun de ces modèles (Chen et Rossler) par un ensemble de non linéarités différentes, les modèles obtenus gardent leurs natures chaotiques.

Le travail n'est pas terminé, il nous reste à trouver l'homéomorphisme qui réalise le déploiement de chacun des deux modèles (Chen et Rossler). Aussi, essayer d'y appliquer quelques techniques de la synchronisation et du contrôle du chaos.

Annexe A

THEOREME DE HARTMANN-GROBMAN

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (A.1) et soit $DF(\bar{x})$ la matrice Jacobienne au point \bar{x} . Alors, on a le théorème suivant :

Théorème

Si $DF(\bar{x})$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certain voisinage U de \bar{x} .

Annexe B

THEORIE DE FLOQUET

Pour étudier le comportement (stabilité ou instabilité) de la solution périodique représentée par un cycle limite dans l'espace des phases de dimension n ; on considère un petit écart initial $\vec{\partial X}$ par rapport au cycle limite. On remarque qu'au bout d'une période, la condition initiale $X_0 + \vec{\partial X}$ est transformée en $X_0 + M \vec{\partial X}$, où M est une matrice $n \times n$ dite *matrice de Floquet*. De la transformation $X_0 + \vec{\partial X} \longrightarrow X_0 + M \vec{\partial X}$, on constate que si toutes les valeurs propres de M sont à l'intérieur du cercle unité D du plan complexe, l'écart décroît dans toutes les directions et la trajectoire se rapproche du cycle limite qui est donc stable. Mais, si au moins une des valeurs propres est à l'extérieur du D , l'écart croît dans une direction et la trajectoire s'éloigne du cycle limite qui est donc instable.

la perte de stabilité de la solution périodique n'est donc qu'un déplacement des valeurs propres selon trois types de croisement du cercle par $(+1)$, par (-1) et par $(\alpha \pm i\beta)$.

Annexe C

RESOLUTION DE L'EQUATION DU 3^{ème} DEGRE

Étude et résolution de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

Soit l'équation :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (\text{C.1})$$

(x réel, a, b, c et d réels, a non nul)

Divisons par a et posons $x = \alpha - \frac{b}{3a}$. On se ramène alors à la forme :

$$\alpha^3 + p\alpha + q = 0 \quad (\text{C.2})$$

avec :

$$x = \alpha - \frac{b}{3a}, \quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \quad q = \frac{2b^3}{27a^3} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2}$$

La fonction polynomiale $f(\alpha) = \alpha^3 + p\alpha + q$ est de degré impair, elle admet donc au moins **un zéro réel**, que nous appellerons ici le **zéro certain**.

Dans le cas général, posons dans (e2) : $\alpha = u + v$ et on développe l'expression obtenue : en imposant la condition $3uv = -p$, l'équation (e2) prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Il s'agit donc de rechercher deux nombres connaissant leur somme et leur produit : la résolution de (e2) est ramené au second degré. Posons désormais $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

◆ Si $\Delta > 0$, l'équation (e2) admet **l'unique solution réelle** :

$$\alpha_1 = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (\text{C.4})$$

Cette formule, dite de **Cardan**, résout l'équation du troisième degré lorsque p et q sont des entiers positifs.

◆ Si $\Delta < 0$, écrivons $\Delta = -z^2$.

L'application de la formule de **Cardan** amène à une solution α de la forme :

$$\alpha = \sqrt[3]{s + z\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{s - z\sqrt{-1}} \quad (\text{C.5})$$

Cherchons un nombre dont le cube serait $s + z\sqrt{-1}$ sous la même forme $a + b\sqrt{-1}$, il vient :

$$a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1} = s + z\sqrt{-1} \quad (\text{C.6})$$

Il faut donc avoir $a^3 - 3ab^2 = s$ et $3a^2b - b^3 = z$ et pour faire de même avec $s - z\sqrt{-1}$, il suffirait de changer b en $-b$.

La solution α serait ainsi de la forme : $(\mathbf{a} + \mathbf{b}\sqrt{-1}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}\sqrt{-1})$, soit $x = 2a$.
C'est un **nombre réel** : la formule de **Cardan** fournit donc en fait systématiquement le **zéro certain**.

Revenons alors à (e3) où u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré en z . Un calcul simple conduit à :

$$z = \frac{-q}{2} \pm i\sqrt{\frac{-q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \quad (\text{C.7})$$

avec $i^2 = -1$. Les nombres u^3 et v^3 sont donc complexes conjugués. Posons alors :

$$u^3 = r(\cos t + i.\sin t)$$

Vu que $\Delta < 0$, on a $p < 0$ et :

$$\left| \begin{array}{l} r = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} e^{it} \cos t = \frac{-q}{2r} \\ u_k = \sqrt{\frac{-p}{3}} \left[\cos \frac{t+2k\pi}{3} + i \sin \frac{t+2k\pi}{3} \right] \\ v_k = \bar{u}_k, k = \{0, 1, 2\} \end{array} \right. \quad (\text{C.8})$$

Par conséquent, l'équation (e2) admet **trois solutions réelles** α_k (éventuellement égales suivant la valeur de q).

L'équation initiale (e1) admet ainsi **trois solutions** : $\mathbf{x}_k = \alpha_k - \frac{b}{3a}$.

◆ Si $\Delta = 0$, soit $\frac{q^2}{4} = -\frac{p^3}{27}$, on a nécessairement $p \leq 0$:

On est enclin à envisager l'existence d'une solution double voire triple. Si tel est le cas, cette solution annule $3\alpha^2 + p$, expression dérivée de l'équation. On vérifie qu'il en est ainsi et que la 3^{ème} solution est alors :

◆ $\frac{p}{q}$ si $p < 0$ (une solution double)

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}, \alpha_3 = \frac{3q}{p}$$

♦0 si $p = 0$, donc si $q = 0$: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, on retrouve la solution triple évoquée ci-dessus.

Annexe D

PROGRAMME GENERANT L'ATTRACTEUR ETRANGE

C.....SYSTEME DE ROSSLER.....

SUBROUTINE EULER (xnn, xn, ffx, ynn, yn, ffy, znn, zn, ffz, dt)

IMPLICITNONE

DOUBLEPRECISION xnn, xn, ffx, ynn, yn, ffy, znn, zn, ffz, dt

xnn=dt*ffx+xn

ynn=dt*ffz+yn

znn=dt*ffz+zn

END

DOUBLEPRECISION FUNCTION FX(yn, zn)

IMPLICITNONE

DOUBLEPRECISION yn, zn

FX= -(yn+zn)

END FUNCTION

DOUBLEPRECISION FUNCTION FY(xn, yn, a)

IMPLICITNONE

DOUBLEPRECISION xn, yn, a

FY= xn+a*yn

END FUNCTION

DOUBLEPRECISION FUNCTION FZ(xn, zn, b, c)

IMPLICITNONE

DOUBLEPRECISION xn, zn, b, c

FZ=b+xn*zn-c*zn

END FUNCTION

SUBROUTINE CALC(x0, y0, z0, a, b, c, dt, ntps, nsauve, choix)

IMPLICITNONE

DOUBLE PRECISION xnn, xn, ffx, ynn, yn, ffy, znn, zn, ffz

DOUBLE PRECISION FX, FY, FZ

DOUBLE PRECISION a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, a4, b4, c4

DOUBLE PRECISION x0, y0, z0, a, b, c, dt

INTEGER choix, i, ntps, nsauve

OPEN (100,file='RESULT')

xn=x0

yn=y0

zn=z0

IF (choix. EQ. 1) THEN

```

DO 1 i=0, ntps

    ffx=-(yn+zn)

    ffy=xn+a*yn

    ffz=b+xn*zn-c*zn

    CALL EULER(xnn, xn, ffx, ynn, yn, ffy, znn, zn, ffz, dt)

    IF (mod(i, nsauve). eq. 0)THEN

        WRITE(100,*) xnn, ynn, znn

    ENDIF

    xn=xnn

    yn= ynn

    zn=znn

1          CONTINUE

CLOSE(100)

ELSE

C..... METHODE DE RUNGE-KUTTA .....

DO    2 i=0, ntps

    a1=dt*FX (yn, zn)

    b1=dt*FY(xn, yn, a)

    c1=dt*FZ(xn, z n, b, c)

    a2=dt*FX(yn+0. 5*b1, zn+0. 5*c1)

    b2=dt*FY(xn+0. 5*a1, yn+0. 5*b1 ,a )

    c2=dt*FZ(xn+0. 5*a1, zn+0. 5*c1, b, c)

    a3=dt*FX(yn+0. 5*b2, zn+0. 5*c2 )

```

```
b3=dt*FY(xn+0.5*a2, yn+0.5*b2, a )
```

```
c3=dt*FZ(xn+0.5*a2, zn+0.5*c2, b, c)
```

```
a4=dt*FX(yn+b3, zn+c3)
```

```
b4=dt*FY(xn+a3, yn+b3, a)
```

```
c4=dt*FZ(xn+a3, zn+c3, b, c)
```

```
xnn=xn+(a1+2.*a2+2.*a3+a4)/6.
```

```
ynn=yn+(b1+2.*b2+2.*b3+b4)/6.
```

```
znn=zn+(c1+2.*c2+2.*c3+c4)/6.
```

```
IF (mod(i,nsauve).eq.0) THEN
```

```
WRITE(100,*) xnn, ynn, znn
```

```
ENDIF
```

```
xn=xnn
```

```
yn=ynn
```

```
zn=znn
```

```
2 CONTINUE
```

```
CLOSE (100)
```

```
ENDIF
```

```
END
```

```
C..... PROGRAMME PRINCIPAL.....
```

```
IMPLICITNONE
```

```
DOUBLE PRECISION dt, x0, y0, z0, a, b, c
```

```
INTEGER choix, ntps, nsauve
```

```
C..... LECTURE DES PARAMETRES.....
```

```
WRITE(*,*) 'entrez les coordonees du point initial'  
  
READ(*,*) x0  
  
READ(*,*) y0  
  
READ(*,*) z0  
  
WRITE(*,*) 'entrez la valeur de a'  
  
READ (*,*) a  
  
WRITE(*,*) 'entrez la valeur de b'  
  
READ (*,*) b  
  
WRITE(*,*) 'entrez la valeur de c '  
  
READ (*,*) c  
  
WRITE(*,*) 'entrez le pas de temps'  
  
READ(*,*) dt  
  
WRITE (*,*)'entrez la durée simulée'  
  
READ(*,*) ntps  
  
WRITE(*,*) 'entrez le pas de sauvegarde'  
  
READ(*,*) nsauve  
  
WRITE(*,*) 'entrez votre choix de methode d integration'  
  
WRITE(*,*) '1 :methode d Euler'  
  
WRITE(*,*)'2 : methode de runge kutta ordre 4'  
  
READ(*,*) choix  
  
CALL CALC(x0, y0, z0, a, b, c, dt, ntps, nsauve, choix)  
  
END
```

REFERENCES

- [1] **Anos. D. V**, Dynamical Systems IX, Springer.
- [2] **Arnold. V**, Equations Différentielles Ordinaires, Mir Moscou (1974).
- [3] **Arnold. V**, Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires, Mir Moscou (1980).
- [4] **Bergé. P**, le Chaos Théorie et Expériences, Eyrolles (1988).
- [5] **Bergé. P, Pomeau. Y, Vidal. C**, L'ordre dans le Chaos, Hermann, éditeurs des sciences et des arts (1984).
- [6] **Boughaba. S**, Phenomenes de Chaos Deterministe et de Turbulence, Thèse de Doctorat, Univ. Mentouri. Constantine (2002).
- [7] **Boutat-Baddas. L**, Analyse des singularités d'observabilité et de Détectabilité, Thèse de Doctorat, Univ. Cergy-Pontoise (2002).
- [8] **Boyce. W. E and DiPrima. R. C**, Elementary Differential Equations, Wiley (1969).
- [9] **Chen. G and Ueat. T**, Yet Another Chaotic Attractor, Int. J. Bifurcation and Chaos 9(7). 1465-1466 (1999).
- [10] **Chen. G, Chengli. T, and Tong. Y**, on Stability and Bifurcation of Chen's System, Chaos Solutions and Fractals 19. 1269-1282 (2004).
- [11] **Cherbit. G**, Fractals, Wiley (1991).
- [12] **Chow. S and Hale. J. K**, Methods of Bifurcation Theoty, Springer (1982).
- [13] **Dang-Vu. H, Delcarte. C**. Bifurcations et Chaos, Ellipses (2000).
- [14] **Duhem. P**, la Théorie Physique, son Objet et sa Structure, Chevalier et Rivière (1906)
- [15] **Durand. E**, Solution Numeriques des Equations Algebriques T1. Masson et Cie (1971).
- [16] **Feigenbaum. M. J**, Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, Journal Statist. Phys, 21. 25-52 (1985).
- [17] **Gooley. J. W and Tukey. J. W**, An Algoritm for the Machine Calculations of Complex Fourier Series, Mathematics of Computation, 19. 297-301 (1965).
- [18] **Grassberger. P, Procaccia. I**, Mesuring the Srangeness of Strange Attractors Phsica, 9D (1983).
- [19] **Guckenheimer. J**, Nonlinear Oscillations, Dynamiqal Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer (1987).
- [20] **Hale. J and Koçak. H**, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag (1991).
- [21] **Hilborn. R. C**, Chaos and Nonlinear Dynamics, Oxford University Press (1994).

- [22] **Hompson. J. M. T. T** and **Stewart. H. B**, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley (1986).
- [23] **Hausdorff. F**, *Dimension und Auberes MaB*. *Math. Ann*, 79, 157. 179 (1919).
- [24] **Landau. I**. *Sur la Conjugaison Differentiable des Difféomorphismes du Cercle à des Rotations* Publication Mathematiques de l'I. H. E. S, 49 (1979).
- [25] **Lorenz. N**, *Deterministic Nonperiodic Flow*, *Journal of Atmospheric Sciences*, 20. 130 (1963).
- [26] **Manneville. P**, *Système Dynamique et Chaos*, Ecole Polytechnique, D E A (1998-1999).
- [27] **Mattheij. R. M. M** and **Molenaar. J**, *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice*, Wiley (1996).
- [28] **Mei. Z**, *Numerical Bifurcation Analysis for Reaction-Diffusion Equations*, Springer (2000).
- [29] **Jurgens. H**, **Peitgen. H. O** and **Saupe. D**, *Fractals*, Springer-Verlag (1992).
- [30] **Poincaré. H**. *CF. Science et methode* (1903).
- [31] **Rossler. O. E**, *Chemical Turbulence : Chaos in Simple Reaction-Diffusion System*, *Z. Naturforsch*, 31 A. 1168-1172 (1976).
- [32] **Rossler. O. E**, *an Equation for Continuous Chaos*, *Phys, Lett, A* 57(5). 397-398 (1976).
- [33] **Rossler. O. E**, *the Chaotic Hierarchy*, *Z. Naturforsch*, 38 A. 788-801 (1983).
- [34] **Ruelle. D**, **Takens. F**, *On the Nature of the Turbylence*, *Commun. Math. Phys*, 20. 167-192 (1971).
- [35] **Xia. H** and **Yu. X**, *Detecting in the Periodic Orbits of Chen's Chaotic Attractor*, *Int. J of Bifurcation and Chaos*, in Press (2000).

RESUME

Les modèles de Chen et de Rossler sont deux modèles connus. En remplaçant la non linéarité quadratique dans ces modèles par un ensemble des non linéarités assez régulières, nous obtenons de nouveaux modèles également chaotiques dont certains se développent, en suivant le chemin suivi par le modèle original (les intermittences pour le modèle de Chen, le doublement de période pour le modèle de Rossler). Les résultats des tests numériques que nous avons fait, nous confortent dans les résultats analytiques.

MOTS CLÉS

Systèmes dynamiques – Bifurcation locale – Attracteurs étranges – Routes vers le chaos.

RESUME

Les modèles de Chen et de Rossler sont deux modèles connus. En remplaçant la non linéarité quadratique dans ces modèles par un ensemble des non linéarités assez régulières, nous obtenons de nouveaux modèles également chaotiques dont certains se développent, en suivant le chemin suivi par le modèle original (les intermittences pour le modèle de Chen, le doublement de période pour le modèle de Rossler). Les résultats des tests numériques que nous avons fait, nous confortent dans les résultats analytiques.

MOTS CLÉS

Systèmes dynamiques – Bifurcation locale – Attracteurs étranges – Routes vers le chaos.