

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique
Université Mentouri -Constantine-

Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques

N° d'ordre :

Série :

MEZ
3698

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de

MAGISTER
En
Mathématiques

Thème

**Cycles limites et solution stationnaire des équations
différentielles stochastiques.**

Option : Analyse Mathématique Appliquée

Par

Melle : MEZIANE KHADIDJA

Devant le jury

Président : M. DENCHE
Rapporteur : L. ABBAOUI
Examineur : N. HAMRI
Examineur : Z. MOHDEB

Professeur- Université Mentouri Cne
Professeur- Université de Sétif
Maître de Conférence- Université Mentouri Cne
Maître de Conférence- Université Mentouri Cne

Soutenue le : 05/06/2002

REMERCIEMENTS

**Avant tout, j'exprime mes vifs remerciements
à DIEU tout puissant.**

**Je remercie mon directeur de recherche
Mr L. ABBAOUI, d'avoir accepter de diriger
mon travail malgré ses lourdes responsabilités
et je lui exprime ma profonde gratitude pour
les conseils qu'il ma donnés tout au long de ce travail.
A mon co-encadreur Mr A. BENDJEDDOU, j'adresse
mes remerciements les plus sincères et ma reconnaissance
pour l'aide qu'il ma accordée sans limite durant
la réalisation de ce travail.**

**Je remercie Mr M. DENCHE , d'avoir accepter
d'être président de jury.**

**Mes remerciements s'adressent également à
Mr N. HAMRI et Mr Z. MOHDEB d'avoir accepter
de juger ce travail et d'en être les examinateurs.**

**Que tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin
trouvent ici mes remerciements les plus distingués.**

SOMMAIRE

Introduction	1
I. Chapitre 1 : Préliminaires	3
1.1 Solutions périodiques et cycles limites	4
1.2 Processus aléatoires et EDS.	9
II. Chapitre 2 : Cycle limite de l'équation de type Liénard.	16
2.1 Introduction.	16
2.2 Existence des solutions périodiques.	18
2.2.1 Classe I.	18
2.2.2 Classe II.	19
2.3 Exemples.	25
III. Chapitre 3 : Solutions stationnaires des EDS.	33
3.1 Introduction.	34
3.2 Non-explosion.	34
3.3 Solution stationnaire.	36
3.3.1 Existence et unicité.	36
3.3.2 Application.	42
3.3.3 Cas vectoriel.	43
IV. Chapitre 4 : Cycle limite et stabilité stochastique.	46
4.1 Introduction.	46
4.2 Résultats.	47
4.3 Application.	51
Conclusion.	54
Bibliographie.	55

Introduction.

Dans la pratique, les modèles mathématiques des phénomènes physiques se ramènent souvent à l'étude des équations différentielles déterministes du second ordre du type :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (D)$$

où x représente le vecteur de l'état du système et f est une fonction qui dépend du comportement du système.

L'analyse déterministe suppose une connaissance complète des propriétés dynamiques et de l'état initial du système.

L'analyse stochastique admet une incertitude dans la connaissance de un ou plusieurs éléments du second membre.

Parmi les sources principales du comportement aléatoire, on distingue les forces d'excitation aléatoires qui agissent dans des phénomènes tels que :

1. La réponse des bâtiments à l'excitation résultant de l'action du vent.
2. La réponse des bateaux et des plate-formes de forage à l'action de la houle.
3. La réponse d'un avion à la turbulence atmosphérique.

Un grand nombre d'excitations physiques ayant un temps de corrélation très court, peuvent être modélisées par un bruit blanc qui est un processus "purent" aléatoire.

Dans le cas des vibrations non-linéaires, l'effet du bruit blanc ne peut pas être généralement ignoré. Dans ce cas, la modélisation du comportement dynamique conduit à des équations différentielles stochastiques de la forme :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = \sigma(x, \dot{x})\dot{W}, \quad (S)$$

où $\dot{W}$ est un bruit blanc normalisé et $\sigma(x, \dot{x})$ est l'intensité du bruit blanc.

Dans cette étude, on s'intéresse particulièrement à des équations du type Liénard :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2)$$

Les solutions périodiques de l'équation du type Liénard ont été étudiées pendant longtemps. On citera en particulier l'équation de Van Der Pol :

$$f_1(x) = \mu(x^2 - 1), \quad g(x) = x, \quad \mu > 0$$

En 1967, [5] T.K. Caughey et H.J. Payne ont remarqué que l'oscillateur de Van Der Pol admet un cycle limite unique puis ont démontré que le même oscillateur soumis à une excitation gaussienne admet une solution stationnaire.

Ce travail comporte quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons les définitions et nous énonçons sans démonstration les théorèmes nécessaires pour cette étude.

Dans le chapitre 2, nous prouvons l'existence d'un cycle limite pour les équations (1) et (2) avec un choix convenable des fonctions f_1 , f_2 et nous en donnons l'expression exacte. D'autre part, nous nous intéressons à l'unicité et à la stabilité de ce cycle limite.

Dans le chapitre 3, nous considérons le cas stochastique et les équations deviennent :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\dot{W} \quad (3)$$

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\dot{W} \quad (4)$$

Nous nous intéressons au régime stationnaire, puis en utilisant la technique de Lyapounov, on cherche si les équations (3) et (4) admettent des solutions stationnaires.

Dans le dernier chapitre, nous prouvons qu'il y a une relation entre l'existence des solutions périodiques et les solutions stationnaires.

Signalons enfin que chaque chapitre est illustré par des exemples.

Chapitre 1

Préliminaires.

Ce chapitre a pour objet de rappeler et de préciser certaines définitions et résultats importants pour notre étude. Il est structuré en deux parties dont la première est consacrée à la théorie des solutions périodiques et des cycles limites et la deuxième à la théorie des processus aléatoires et des équations différentielles stochastiques.

Partie I : Solutions périodiques et cycles limites.

Partie II : Processus aléatoires et EDS.

1.1 Partie I : Solutions périodiques et cycles limites.

Les solutions périodiques jouent un rôle très important dans les problèmes de physique et d'électronique car ils représentent des phénomènes répétitifs. Dans plusieurs cas, la solution périodique représente la position finale, dans le sens où toutes les solutions voisines convergent vers cette solution et ainsi, les transitions dues aux conditions initiales s'annulent .

Définition 1 :

La solution du système autonome du second ordre qui s'écrit dans l'espace des phases :

$$\dot{X} = F(X) \quad (1.1)$$

est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que $X(t + T) = X(t)$, $\forall t \in [0, \infty[$, X est alors dit période.

Si on se place dans le plan des phases $(x, \dot{x})$, alors les solutions périodiques sont représentées par des courbes fermées.

Remarque 2 :

Les points fixes du système (1.1) sont des solutions périodiques constantes.

Définition 3 :

Soient $X = \varphi(t)$ la solution périodique de l'équation (1.1) et K la courbe représentative de cette solution. On dit que X est une solution périodique isolée si :

$\exists \rho > 0, \forall Y$ dans le plan des phases : $d(X, Y) < \rho, \forall X \in K$, implique qu'il n'existe pas de solution périodique passant par Y .

Définition 4 :

Le cycle limite est une solution périodique non constante isolée de l'équation (1.1) représentée dans le plan des phases par une trajectoire fermée isolée.

Proposition 5 [18] :

Soit $X = \varphi(t)$ un cycle limite de l'équation (1.1), alors la trajectoire fermée K de l'équation (1.1) partage le plan des phases en un domaine intérieur et un domaine extérieur tels que toutes les trajectoires intérieures ou extérieures démarrant à proximité de K s'enroulent en spirale sur K quand $t \rightarrow +\infty$ ou bien $t \rightarrow -\infty$.

Théorème 6 (le critère de Bendixon)[12] :

Soient f et g deux fonctions de classe $C^1(\Omega \subset R^2, R)$, où Ω est un domaine simplement connexe.

Considérons le système autonome :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

Si $df/dx + dg/dy$ a un signe constant, alors le système (1.2) n'admet aucune solution périodique.

Théorème 7 (Bendixon-Poincaré)[12] :

Soient f et g deux fonctions de classe $C^1(\Omega \subset R^2, R)$, où Ω est un fermé borné de R^2 .

Supposons que :

- le système (1.2) n'admet pas de point fixe dans Ω ,
 - la solution $\Gamma = \{(x, y) = (\varphi(t), \psi(t)), t \geq t_0\}$ reste à l'intérieur de Ω ,
- alors l'une des deux propositions suivantes est satisfaite :

- 1) Γ est un cycle limite.
- 2) Γ s'enroule en spirale sur un cycle limite.

Dans les deux cas, le système (1.2) admet une solution périodique.

Proposition 8 [12] :

Une condition nécessaire pour que la solution $\Gamma = \{(x, y) = (\varphi(t), \psi(t)), t \geq t_0\}$ de système (1.2) soit un cycle limite est que la somme des indices aux points d'équilibre entourés par Γ soit égale à 1.

$$\Gamma \text{ est un cycle limite} \implies I_\Gamma = 1,$$
$$\text{où } I_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma \frac{f dg - g df}{f^2 + g^2}$$

Théorème 9 [12] :

Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1.3)$$

qui s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x, y)y - g(x) \end{cases},$$

où f et g sont des fonctions continues. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) $\exists a > 0$ tel que $f(x, y) > 0$ pour $\sqrt{x^2 + y^2} > a$,
- 2) $f(0, 0) < 0$ (d'où $f(x, y) < 0$ au voisinage de $(0, 0)$),
- 3) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$,
- 4) $G(x) = \int_0^x g(u)du \rightarrow +\infty$ si $x \rightarrow +\infty$,

alors l'équation (1.3) admet au moins une solution périodique

Théorème 10 (Levinson-Smith)[11] :

Soient f et g deux fonctions continues.

On note $F(x) = \int_0^x f(u)du$ et $G(x) = \int_0^x g(u)du$.

L'équation du type Liénard :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (1.4)$$

qui s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases}$$

admet une solution périodique unique si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1) f est une fonction paire.
- 2) $\exists a > 0$ tel que $F(x) < 0$ pour $0 < x < a$ et $F(x) > 0$ pour $x > a$,
- 3) $F(x) \rightarrow +\infty$ si $x \rightarrow +\infty$,
- 4) $g(x)$ est une fonction impaire telle que $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$,
- 5) $G(x) = \int_0^x g(s)ds \rightarrow +\infty$ si $|x| \rightarrow +\infty$.

Définition 11 :

Soit Γ^* une trajectoire représentative pour la solution $x^*(t)$ de l'équation $\dot{x} = f(x)$ démarrant au point a^* à l'instant $t = t_0$. Soit Γ une autre trajectoire démarrant en un autre point a .

Si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $|a - a^*| < \delta \implies \sup \{ \text{dist}(x, \Gamma^*), x \in \Gamma \} < \varepsilon$, alors la trajectoire Γ^* est dite stable au sens de Poincaré.

Définition 12 :

On appelle cycle limite stable, un cycle limite vers lequel les trajectoires voisines convergent.

On appelle cycle limite instable, un cycle limite duquel les trajectoires voisines s'éloignent.

On appelle cycle limite semi-stable, un cycle limite vers lequel les trajectoires voisines convergent d'un côté et s'éloignent de l'autre.

1.1.1 Cycle limite et bifurcation de Hopf.

Certaines bifurcations créent des cycles limites et d'autres solutions périodiques. Ce type de bifurcation est appelée bifurcation de Hopf.

La bifurcation de Hopf se produit dans les oscillateurs non linéaires lorsque un point fixe bifurque en un cycle ou un cycle devient un point fixe.

On sait que les solutions d'un système linéaire $\dot{x} = Ax$ sont périodiques si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont purement imaginaires, dans ce cas le point fixe à l'origine est un centre.

Mais, si les valeurs propres de A ne sont pas toutes de partie réelle nulle, alors il n'existe aucune solution périodique (non constante).

Dans le cas non linéaire, on a la même situation : toutes les solutions dans le premier quadrant sont périodiques.

Dans plusieurs exemples, la linéarisation garantit que l'origine est bien un centre alors que ce n'est pas le cas car l'origine change de stabilité : de stable asymptotiquement il devient instable sans passer par l'étape de centre .

1.2 Partie II : Processus aléatoires et EDS.

Généralement, quand on modélise des phénomènes physiques en utilisant les équations différentielles déterministes, on néglige l'effet des perturbations aléatoires. Dans certains cas, la prise en compte de l'influence de ces perturbations est nécessaire à cause de son importance et on utilise les équations différentielles stochastiques (EDS) qui comportent des termes aléatoires. Les solutions de telles équations sont des processus aléatoires. Dans cette partie, nous allons commencer par donner certaines définitions et certains résultats concernant les processus aléatoires qui nous intéressent, ensuite nous préciserons la notion d'EDS et nous énoncerons des théorèmes d'existence et d'unicité.

1.2.1 Processus aléatoires.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ un processus aléatoire, alors X_t est une variable aléatoire pour tout $t \in [t_0, T]$. Pour $\omega \in \Omega$, $X_{(\cdot)}(\omega)$ est une fonction définie de $[t_0, T]$ dans R^d appelée réalisation, trajectoire ou fonction simple du processus aléatoire X_t .

Un processus aléatoire est complètement caractérisé par la famille des distributions conjointes des variables aléatoires $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, t_1, \dots, t_n \in [t_0, T]$ définies par :

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

où $x_1, \dots, x_n \in R^d$ et $X_{t_k} \leq x_k$ signifie $X_{t_k}^{(i)} \leq x_k^{(i)}$ pour $k = 1, \dots, n$ et $i = 1, \dots, d$.

1.2.2 Processus aléatoires stationnaires.

Les processus stationnaires constituent une importante classe des processus aléatoires, on peut les définir comme des processus dont les caractéristiques probabilistes ne varient pas avec le temps ou encore comme des processus qui se déroulent dans des conditions ne variant pas avec le temps.

Définition 13 :

Un processus aléatoire $\{X_t, t \in [0, \infty]\}$ est dit stationnaire si :

$$\forall t_1, \dots, t_n \geq 0, \forall \tau > 0, \text{ on a } F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}}(x_1, \dots, x_n).$$

Propriétés.

Si X_t est un processus aléatoire stationnaire, alors :

- 1) $F_{X_t}(x) = F_{X_{t+\tau}}(x), \forall t, \tau \geq 0$ (F_{X_t} ne dépend pas de t).
- 2) $F_{X_{t_1}, X_{t_2}}(x_1, x_2) = F_{X_{t_1-t_1}, X_{t_2-t_1}}(x_1, x_2)$.
- 3) L'espérance mathématique $E(X_t)$ ne dépend pas de t .
- 4) La fonction de covariance $K_X(t, s)$ dépend seulement de $s - t$.

1.2.3 Processus de Markov.

Une classe importante de processus aléatoires est caractérisée par la propriété que le futur est indépendant du passé, si on connaît le présent. C'est en 1906 que Markov a introduit cette classe de processus aléatoires.

Définition 14 :

Un processus aléatoire $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ est appelé processus de Markov (élémentaire ou faible), s'il vérifie la propriété de Markov (élémentaire ou faible) suivante :

$$\forall s < t \in [t_0, T], \forall B \text{ borélien de } R^d : P(X_t \in B \mid \mathcal{F}[t_0, s]) = P(X_t \in B \mid X_s) \text{ p.s,}$$

où $\mathcal{F}[t_0, s]$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_u, t_0 \leq u \leq s$.

Proposition 15 [19] :

Soit $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ un processus de Markov, alors il existe une fonction à quatre arguments $P(s, x, t, B), s \leq t \in [t_0, T], x \in R^d, B$ borélien de R^d à valeurs dans $[0, 1]$ et appelée probabilité de transition, telle que :

- 1) $\forall s \leq t \in [t_0, T], \forall B \text{ borélien de } R^d, \forall x \in R^d :$

$$P(s, x, t, B) = P(X_t \in B \mid X_s = x) \quad \text{p.s.}$$

2) Pour $s \leq t$, et x fixés, la fonction $P(s, x, t, \cdot)$ est une mesure de probabilité sur la tribu borélienne de R^d .

3) Pour $s \leq t$, et B fixés, la fonction $P(s, \cdot, t, B)$ est mesurable (relativement à la tribu borélienne de R^d .)

4) Pour $s < u < t$: on a la relation suivante appelée équation de Chapman-Kolmogorov :

$$P(s, x, t, B) = \int_{R^d} P(u, \xi, t, B) P(s, x, u, d\xi).$$

Définition 16 :

Un processus de Markov défini sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ est dit homogène relativement au temps si :

$$\forall s, t \geq t_0, \forall \tau > 0 : P(s + \tau, x, t + \tau, B) = P(s, x, t, B), \forall x \in R^d \text{ et } \forall B \in B_R.$$

Dans ce cas $P(s, x, t, B) = P(x, t-s, B)$ pour $s < t$ où $P(x, t, B) = \{X_t \in B \mid X_0 = x\}$.

1.2.4 Processus de diffusion.

Les processus de diffusion sont des processus de Markov de type spécial avec des trajectoires continues, ils peuvent servir de modèle probabilistes pour la diffusion. On peut considérer le processus de Wiener (ou processus du mouvement brownien) comme modèle de diffusion.

Définition 17 :

Un processus de Markov $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ à valeurs dans R^d et à trajectoires presque sûrement continues est dit processus de diffusion si sa probabilité de transition vérifie les conditions suivantes :

$$1) \forall x \in R^d, \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \forall s \in [t_0, T] : \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| > \varepsilon} P(s, x, t, dy) = 0.$$

2) Il existe une fonction $f(s, x)$ à valeurs dans R^d telle que :

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) P(s, x, t, dy) = f(s, x).$$

la limite étant uniforme relativement à x . f est appelée vecteur dérive (drift).

3) Il existe une fonction $B(s, x)$ à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre d , telle que

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{t \downarrow s} \frac{1}{t-s} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)(y-x)^T P(s, x, t, dy) = B(s, x),$$

la limite étant uniforme relativement à x . B est appelée matrice de diffusion.

Le processus de Wiener W_t est le modèle mathématique du mouvement brownien d'une petite particule dans un fluide. C'est un processus de diffusion homogène avec un drift $f \equiv 0$ et une matrice de diffusion $B \equiv I$.

Le bruit blanc gaussien ξ_t est un processus aléatoire avec $m_\xi = 0$ et une matrice de covariance $\delta(t)I$. Il représente la dérivée au sens généralisé du processus de Wiener.

Remarque 18 :

Supposons que dans les conditions 2) et 3), on remplace les moments tronqués par les moments usuels, alors les deux premiers moments de l'accroissement $X_t - X_s$ sous la condition $X_s = x$ quand $t \downarrow s$ sont :

$$\begin{aligned} E_{s,x}(X_t - X_s) &= f(s, x)(t - s) + o(t - s) \\ E_{s,x}(X_t - X_s)(X_t - X_s)^T &= B(s, x)(t - s) + o(t - s) \end{aligned}$$

donc $f(s, x)$ représente le vecteur vitesse moyenne du mouvement aléatoire décrit par X_t sous la condition $X_s = 0$ et $G(s, x)$ mesure l'amplitude de la fluctuation de $X_t - X_s$ autour de sa valeur moyenne.

Si on néglige les termes $o(t-s)$, on peut écrire : $X_t - X_s \approx f(s, X_s)(t-s) + G(s, X_s)\xi$ avec $E_{s,x}\xi = 0$, $cov_{s,x}\xi = I(t-s)$ et $G(s, x)$ est une matrice carrée d'ordre d telle que $GG^T = B$. Sachant que l'accroissement $W_t - W_s$ du processus de Wiener possède la distribution normale $N(0, I(t-s))$ on peut prendre $\xi = W_t - W_s$ et obtenir donc la relation : $X_t - X_s = f(s, X_s)(t-s) + G(s, X_s)(W_t - W_s)$.

En passant formellement aux différentielles, on obtient :

$$dX_t = f(s, X_s)dt + G(s, X_s)dW_t.$$

Cette dernière équation est une équation différentielle stochastique qui admet X_t comme solution dans le sens suivant :

$$X_t = c + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t G(s, X_s) dW_s,$$

où $X_{t_0} = c$.

La première intégrale peut être comprise dans le sens de l'intégrale de Riemann. Par contre, la seconde intégrale pose un problème car les trajectoires du processus de Wiener W_t sont à variations non bornées et donc, on ne peut pas interpréter cette intégrale au sens de Riemann-Stieltjes. Il faut donc définir une intégrale (l'intégrale stochastique) pour une classe aussi large que possible de fonctions $G(t, x)$. Le problème a été résolu par Itô et cette intégrale porte son nom.

1.2.5 Existence et unicité des solutions des EDS.

Théorème 19 [8] :

Soit l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + G(t, X_t)dW_t, t \in [t_0, T] \\ X_{t_0} = c \end{cases} \quad (1.5)$$

où W_t est un processus de Wiener, c est une variable aléatoire indépendante de $\{W_t - W_{t_0}, \forall t \geq t_0\}$ et

$f : [t_0, T] \times R^d \longrightarrow R^d$ et $G : [t_0, T] \times R^d \longrightarrow M_R(d, m)$ où

f et G sont mesurables et vérifient les propriétés suivantes :

1) $\exists K_1 > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T], \forall x \in R^d$ et $\forall y \in R^d$:

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |G(t, x) - G(t, y)| \leq K_1 |x - y|$$

2) $\exists K_2 > 0$ tel que $\forall t \in [t_0, T]$ et $\forall x \in R^d$:

$$|f(t, x)|^2 + |G(t, x)|^2 \leq K_2(1 + |x|^2).$$

Alors l'équation (1.5) admet une solution X_t à valeurs dans R^d continue presque sûrement et satisfaisant la condition initiale $X_{t_0} = c$.

L'unicité est dans le sens que si X_t et Y_t sont des solutions continues presque sûrement telles que $X_{t_0} = Y_{t_0} = c$, alors $P \{ \sup |X_t - Y_t| > 0, t \in [t_0, T] \} = 0$.

Remarque 20 :

I) Pour que la condition de Lipshitz soit satisfaite, il suffit que $f(t, x)$ et $G(t, x)$ admettent des dérivées partielles f_{x_i} et G_{x_i} continues et bornées pour tout $t \in [t_0, T]$.

II) Dans le cas d'une équation différentielle stochastique autonome i. e. $f(t, x) = f(x)$ et $G(t, x) = G(x)$ la condition 2) est une conséquence de la condition de Lipshitz.

III) Sous les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité et si de plus les fonctions $t \longrightarrow f(t, x)$ et $t \longrightarrow G(t, x)$ sont continues en t , alors la solution est un processus de diffusion de vecteur dérive $f(t, x)$ et de matrice de diffusion $B(t, x) = [G(t, x)^T G(t, x)]$.

1.2.6 Mesure invariante et état final de la densité de probabilité.

Définition 21 :

On appelle mesure invariante associée au processus de Markov homogène $\{X_t, t \in [0, +\infty[\}$, la mesure de probabilité $P_s(dy)$ dans R^n solution de l'équation intégrale :

$P_s(dy) = \int_{R^n} P_s(dx) P(x, t, dy)$, où $P(x, t, dy)$ est la probabilité de transition homogène du processus X_t .

Si $P_s(dx)$ a une densité $p_s(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dx dans R^n , alors la densité $p_s(x)$ est appelée état final (steady state) de la densité de probabilité.

Théorème 22 [13] :

Soit $\{X_t, t \in [0, +\infty[\}$ un processus de Markov, le processus X_t est stationnaire si et seulement si :

- 1) X_t admet une probabilité de transition homogène.
- 2) X_t a une mesure invariante $P_s(dx)$ tel que $P_{X_0}(dx) = P_s(dx)$.

Théorème 23 [19] :

Soit $\{X_t, t \in [0, +\infty[\}$ un processus de diffusion. Supposons que :

1) $f(x)$ et $[G(x)]$ sont indépendants de temps et la probabilité de transition est homogène $P(s, x, t, dy) = P(x, t - s, dy)$

2) La probabilité de transition $P(x, t, dy)$ admet une densité $p(x, t, y)$:

$$P(x, t, dy) = p(x, t, y)dy.$$

3) $f(x)$ et $[G(x)]$ sont des fonctions continues et les fonctions :

$y, t \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} p(x, t, y), y, t \longrightarrow \frac{\partial}{\partial y_j} [f_j(y)p(x, t, y)]$ pour $j = \overline{1, n}$ et $y, t \longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} [G_{jk}(y)p(x, t, y)]$ pour $j, k = \overline{1, n}$ existent et sont continues .

Alors X_t est un processus stationnaire.

Théorème 24 [19] :

$$\begin{cases} dX_t = f(X_t)dt + G(X_t)dW_t, & t \in [t_0, T] \\ X(t_0) = c \end{cases} \quad (1.6)$$

Supposons que l'équation (1.6) admette une solution unique $\{X_t, t \in [0, +\infty[\}$ qui est un processus de diffusion homogène.

S'il existe une fonction définie positive $V : R^n \longrightarrow R_+$ vérifiant :

i) $V(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$.

ii) $\sup \{ \mathcal{L}V(x), |x| > R \} = -C_R \longrightarrow -\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$, où

$$\mathcal{L}V(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} V(x) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n G_{jk}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} V(x)$$

Alors il existe une mesure invariante $P_s(dx)$ associée au processus de diffusion X_t .

Chapitre 2

Cycles limites de l'équation de type Liénard.

2.1 Introduction.

Considérons l'équation générale de type Liénard :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0, \quad \dot{x} = dx/dt, \quad (2.1)$$

où $f(x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^n f_{i+1}(x)\dot{x}^i$.

Selon [7], cette équation est appelée équation de type Liénard d'ordre n , lorsque $n = 0$ ou $n = 1$, l'équation (2.1) s'écrit :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.2)$$

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.3)$$

La solution de l'équation de Liénard la plus intéressante au point de vue des applications correspondant au cycle limite dans le plan des phases.

Définition 25 :

Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 qu'un cycle limite est une solution périodique isolée représentée dans le plan des phases par une trajectoire fermée isolée. D'autre part le cycle limite ne dépend pas des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$.

Dans [12], D.W. Jordan et P. Smith ont expliqué que les trajectoires voisines ne sont pas fermées et se comportent comme des spirales qui s'approchent ou s'éloignent du cycle limite lorsque $t \rightarrow +\infty$. Ceci concerne aussi bien les trajectoires qui démarrent à l'intérieur que celle qui démarrent à l'extérieur en fonction des conditions initiales. Ces solutions sont relativement de moindre importance en comparaison avec la solution périodique.

Les cas où on peut déterminer le cycle limite exact pour les équations (2.2) et (2.3) sont rares, même si parfois on peut obtenir une expression analytique.

Dans [17], A.A. Mostafa a trouvé une expression exacte pour le cycle limite de l'équation (2.2), en choisissant de manière appropriée les fonctions f_1 et g .

Dans [9], [10], L.G. Hamilton a établi des conditions suffisantes pour l'existence d'une solution périodique pour les équations (2.2) et (2.3), en utilisant une famille des fonctions définies positives.

Dans [22], Z. Jin a établi des conditions suffisantes pour l'existence, l'unicité et la stabilité d'une solution périodique pour l'équation (2.3).

Cet chapitre est consacré à la détermination d'une expression exacte pour le cycle limite pour les équations (2.2) et (2.3) correspondant à un choix plus général des fonctions f_1 , f_2 et g .

Nous obtenons aussi des conditions suffisantes pour l'unicité et la stabilité de ce cycle limite et nous illustrons nos résultats par des exemples.

2.2 Existence des solutions périodiques.

2.2.1 Classe I.

Considérons l'équation :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (2.4)$$

Supposons que :

i) f et g sont des fonctions continues.

ii) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$.

Posons $F(x) = \int_0^x f(u)du$ et $G(x) = \int_0^x g(u)du$.

L'équation (2.4) s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (2.5)$$

Théorème 26 [10] :

Supposons que :

1) L'origine est répulsive.

2) Il existe $\alpha > 0$, $k \leq 0$, $k_1 \geq 0$ et $a < 0 < b$ tels que :

i) $F(x) \leq k_1$ pour $a \leq x \leq 0$ et

$$F(a) \leq k_1 - [(k - \frac{1}{\alpha} - k_1)^2 - 2G(a)]^{1/2}.$$

ii) $F(x) \geq \alpha G(x) + k$ pour $0 \leq x \leq b$ et

$$F(b) \geq k + [(\frac{1}{\alpha} + 2k_1 - 2k)^2 - 2G(b)]^{1/2}.$$

Alors le système (2.5) admet au moins une solution périodique située entre les lignes $x = a$ et $x = b$.

Preuve. : ■

Le lemme 2.5 [10] et les hypothèses 1) et 2)i) assurent que la trajectoire qui démarre au point $(0, k - \frac{1}{\alpha})$ coupe le demi-axe $y > 0$ au point $(0, y_1)$ avec $0 < y_1 \leq -k + \frac{1}{\alpha} + 2k_1$.

Le lemme 2.2 [10] et les hypothèses 1) et 2)ii), assurent que la trajectoire qui démarre au point $(0, y_1)$ coupe le demi-axe $y < 0$ au point $(0, y_2)$ avec $k - \frac{1}{\alpha} < y_2 < 0$.

En appliquant le théorème de Poincaré-Bendixon, on montre que le système (2.5) admet au moins une solution périodique.

Remarque 27 :

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tels que $g(x)[F(x) - \alpha G(x)] < 0$ pour $0 < |x| < r$, alors l'origine est repulsive.

2.2.2 Classe II.

Considérons l'équation :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.6)$$

Supposons que :

- i) f_1, f_2 et g sont des fonctions continues.
- ii) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$.
- iii) $\int_0^{+\infty} g(x) = \int_0^{-\infty} g(x) = +\infty$.

L'équation (2.6) s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f_2(x)y^2 - f_1(x)y - g(x) \end{cases} \quad (2.7)$$

Théorème 28 [9] :

Supposons que i), ii) et iii) sont vérifiées et de plus :

- 1) L'origine est repulsive.
- 2) Il existe $b > 0$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ avec $\beta^2 - 4\alpha \geq 0$ tels que :
 $\forall x \geq b : f_1(x) \geq \beta g(x)$ et $0 \leq f_2(x) \leq \alpha g(x)$.

3) Il existe $a < 0$, $\alpha_1 > 0$ et $\beta_1 > 0$ avec $\beta_1^2 - 4\alpha_1 < 0$ tels que :

$$\forall x \leq a : f_1(x) \geq \beta_1 g(x) \text{ et } f_2(x) \leq \alpha_1 g(x).$$

Alors, l'équation (2.6) admet au moins une solution périodique.

Preuve. : ■

Du lemme 2 [9] et de la condition 2), on obtient que toute trajectoire correspondant à une solution de (2.6) démarrante au point (b, y_0) , $y_0 > 0$ coupe la droite $x = b$ au point (b, y_1) avec $\rho_1 < y_1 < 0$ où $\rho_1 = -\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha)/2\beta}$

D'après le théorème de Poincaré-Bendixon, le système (2,7) admet au moins une solution périodique.

Remarque 29 :

On peut remplacer la condition 3) par la condition suivante :

$$\exists a < 0 \text{ tel que : } \forall x \leq a : f_1(x) \geq 0 \text{ et } f_2(x) \leq 0.$$

Théorème 30 [22] :

Supposons que i) et ii) sont vérifiées, de plus :

$$1) \int_0^{+\infty} g(s) \exp[2 \int_0^s f_2(u) du] ds \longrightarrow +\infty \text{ si } |x| \longrightarrow +\infty.$$

2) Si $f_1(0) < 0$ (resp. $f_1(0) > 0$), alors il existe $\delta_1, \delta_2 \in R$ avec $\delta_1 < 0 < \delta_2$ et $f_1(x) \geq 0$ pour $x \notin [\delta_1, \delta_2]$ (resp. $f_1(x) \leq 0$ pour $x \notin [\delta_1, \delta_2]$).

$$3) \text{ Il existe } \alpha \leq \delta_1 \text{ et } \beta \geq \delta_2 : \int_\alpha^\beta f_1(s) \exp[\int_0^s f_2(u) du] ds > 0. (\text{resp. } < 0)$$

Alors, l'équation (2.6) admet au moins une solution périodique stable.(resp. instable)

Preuve. : ■

Grace à la transformation utilisée dans le lemme 1 [22], le système (2.7) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \tilde{F}(x) \\ \dot{y} = -\tilde{g}(x) \end{cases}$$

$$\text{avec } \tilde{F}(x) = \int_0^x f(s) ds, f(x) = f_1(x) \exp[\int_0^x f_2(s) ds] \text{ et } \tilde{g}(x) = g(x) \exp[2 \int_0^x f_2(s) ds]$$

Considérons le cas $f_1(0) < 0$ (le cas $f_1(0) > 0$ est similaire, en remplaçant y et t par $-y$ et $-t$).

Nous avons :

(1) $x\tilde{g}(x) = xg(x) \exp[2 \int_0^x f_2(s)ds] > 0$ pour $x \neq 0$ et $\tilde{G}(x) = \int_0^x \tilde{g}(s)ds \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$

(2) Puisque $f(x) = f_1(x) \exp[\int_0^x f_2(s)ds]$ est continue et $f(0) = f_1(0) < 0$, alors

$f(x) < 0$ pour x suffisamment proche de 0, donc $x\tilde{F}(x) = x \int_0^x f(s)ds < 0$ pour x suffisamment proche de 0.

(3) Soit $k_1 = \tilde{F}(\beta)$ et $k_2 = \tilde{F}(\alpha)$, on a :

$k_1 - k_2 = \int_\alpha^\beta f(s)ds = \int_\alpha^\beta f_1(s) \exp[\int_0^s f_2(u)du]ds > 0$ et donc $k_1 > k_2$, $f(x) \geq 0$ pour $x \notin [\alpha, \beta]$, d'où $\tilde{F}(x)$ est monotone croissante pour $x \notin [\alpha, \beta]$.

Posons $M = \max(|\alpha|, \beta)$, alors $\tilde{F}(x) \geq k_1$ pour $x > M$ et $\tilde{F}(x) \leq k_2$ pour $x < -M$.

Du lemme 2,1[22], on conclut que (2.6) admet au moins un cycle limite stable.

Pour obtenir nos principaux résultats, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 31 [17] :

Soient p, q et h trois polynômes tels que :

1) p est un polynôme pair, avec $p(0) > 0$ et il existe une constante $\beta > 0$ telle que : $p(\beta) = 0$ et $p(x) < 0$ pour tout $x \in]0, \beta[$.

2) $q(x)$ et $h(x)$ sont des polynômes impairs.

Alors, l'équation :

$$\ddot{x} - [p'((m+r)hp^{r-1} + (m+1)q) + h'p^r + pq']\dot{x} + mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}] = 0, \quad ()' = \frac{d}{dx} \quad (2.8)$$

admet un cycle limite d'expression exacte :

$$\dot{x} = hp^r + pq \pm p^m \quad (2.9)$$

tel que : $m = n + \frac{1}{2}$ où $n = 0, 1, 2, \dots$ et $r = 2, 3, \dots$

Ce cycle limite est situé entre les lignes $x = -\beta$ et $x = +\beta$.

Preuve. : ■

Dérivons (2.9) par rapport à t et remplaçons dans (2.4) et (2.9), nous obtenons :

$$(hp^r + pq \pm p^m)[h'p^r + rp^{r-1}\dot{p}h + pq' + p'q \pm mp^{m-1}p' + f] + g = 0, \text{ où :}$$

$$\dot{x}[(m+r)hp^{r-1}p' + (m+1)qp' + h'p^r + qp' + f] - \dot{x}mp'(hp^{r-1} + q) + g = 0,$$

alors :

$$\dot{x}[(m+r)hp^{r-1}p' + (m+1)qp' + h'p^r + qp' + f] - \dot{x}mp'(hp^{r-1} + q) + (-\ddot{x} - f\dot{x}) = 0$$

et donc :

$$\ddot{x} - [p'((m+r)hp^{r-1} + (m+1)q) + h'p^r + pq']\dot{x} + mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}] = 0.$$

Lemme 32 [22] :

Supposons que :

1) f_1, f_2 et g sont des fonctions continues de R dans R .

2) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} g(s) \exp[2 \int_0^s f_2(u)du]ds \longrightarrow +\infty$
si $|x| \longrightarrow +\infty$.

3) Ils existes α_1 et $\alpha_2 \in R : \alpha_1 < 0 < \alpha_2$ tels que $G(\alpha_1) = G(\alpha_2)$.

4) $f_1(x) < 0$ pour $x \in]\alpha_1, \alpha_2[$ et $f_1(x) \geq 0$ pour $x \notin [\alpha_1, \alpha_2]$.

Alors, l'équation (2.6) admet au plus un seul cycle limite stable.

Preuve. : ■

La démonstration de ce lemme se déduit facilement à partir du lemme 2.3 et du théorème 2.3 [22].

Maintenant, on peut établir nos principaux résultats.

Théorème 33 :

Supposons que :

1) p, q et h vérifient les hypothèses du lemme 31.

2) f_2 est une fonction continue de R^2 dans R .

Alors l'équation :

$$\ddot{x} + f_2\dot{x}^2 - f_3\dot{x} + f_2[(hp^r + pq)^2 - p^{2m}] + mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}] = 0, \quad (2.10)$$

où $f_3(x, \dot{x}) = p'((m+r)hp^{r-1} + (m+1)q) + \dot{h}p^r + pq' + 2f_2(hp^r + pq)$
admet au moins un cycle limite d'expression exacte (2.9), situé entre les lignes $x = -\beta$
et $x = +\beta$.

Preuve. : ■

Au lieu d'invoquer un théorème d'existence, nous allons directement montrer que (2.9)
est bien un cycle limite pour l'équation de (2.10).

L'équation (2.10) est équivalente à :

$$\ddot{x} - [f_3 - 2f_2(hp^r + pq)]\dot{x} + mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}] + f_2[(\dot{x} - (h^r p + pq))^2 - p^{2m}] = 0$$

où sur le cycle limite (2.9) on a : $\dot{x}^2 = +p^{2m} + 2\dot{x}(hp^r + pq) - (hp^r + pq)^2$

Nous observons que toute solution de (2.9) vérifie :

$$\ddot{x} - f_3(x, \dot{x})\dot{x} + 2f_2(hp^r + pq)\dot{x} + mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}] = 0. \quad (2.11)$$

et vérifie aussi :

$$f_2(x, \dot{x})[\dot{x}^2 - 2\dot{x}(hp^r + pq) + (hp^r + pq)^2 - p^{2m}] = 0, \quad (2.12)$$

donc elle est bien solution de (2.10).

Remarque 34 :

Si on compare le théorème 33 avec les résultats de Luiz Guidorizzi (voir [9] théorème 3), on trouve que nos conditions sont moins restrictives que celles de Guidorizzi dans un certain sens. En particulier, nous avons prouvé l'existence de la solution périodique sans l'hypothèse $xg(x) > 0$ et avec des conditions plus générales sur f_2 .

Considérons maintenant le cas où f_2 dépend seulement de x . Posons :

$$f_1 = -[p'((m+r)hp^{r-1} + (m+1)q) + h'p^r + pq' + 2f_2(hp^r + pq)],$$

$$g = f_2[(hp^r + pq)^2 - p^{2m}] + mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}],$$

$$\text{et } G(x) = \int_0^x g(s) \exp[2 \int_0^s f_2(u) du] ds.$$

Théorème 35 :

Supposons que :

- 1) p, q et h vérifient les hypothèses du lemme 31.
- 2) f_2 est une fonction continue impaire de R dans R .
- 3) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $G(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$.
- 4) Il existe $\alpha > 0$ tel que $f_1(x) < 0$ pour $|x| < \alpha$ et $f_1(x) \geq 0$ pour $|x| \geq \alpha$.

Alors, l'équation (2.10) admet un cycle limite unique et stable avec l'expression exacte (2.9), situé entre les lignes $x = -\beta$ et $x = +\beta$.

Preuve. : ■

En appliquant le théorème 33, on montre dans un premier temps l'existence d'un cycle limite. Pour montrer qu'il est unique et stable, nous allons montrer que les conditions du lemme 32 sont satisfaites.

Montrer d'abord que G est une fonction paire. En effet :

$$\begin{aligned} g(-x) &= f_2(-x)[(h(-x)p^r(-x) + p(-x)q(-x))^2 - p^{2m}(-x)] + \\ &\quad + mp(-x)\dot{p}(-x)[(h(-x)p^{r-1}(-x) + q(-x))^2 - p^{2(m-1)}(-x)] = -g(x). \end{aligned}$$

donc g est une fonction impaire. D'autre part $G(-x) = \int_0^{-x} g(s) \exp[2 \int_0^s f_2(u) du] ds$ et donc en utilisant le changement de variable $y = -x$ et en revenant à la notation de y par x , nous obtenons : $G(-x) = G(x)$.

Si nous choisissons $\alpha_1 = -\alpha, \alpha_2 = +\alpha$, il est facile de voir que toutes les conditions du lemme 32 sont vérifiées, et donc le cycle limite est unique et stable.

Considérons le cas $f_2 \equiv 0$, alors les fonctions f_1, g et G deviennent :

$$\begin{aligned} f_1 &= -[\dot{p}((m+r)hp^{r-1} + (m+1)q) + hp^r + pq'], \\ g(x) &= mp\dot{p}[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}] \text{ et } G(x) = \int_0^x g(s) ds. \end{aligned}$$

et on obtient l'équation :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (2.13)$$

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Corollaire 36 :

Sous les conditions suivantes :

- 1) p, q et h vérifient les hypothèses du lemme 31.
- 2) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0, G(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$.
- 3) $\exists \alpha > 0$ tel que $f_1(x) < 0$ pour $|x| < \alpha$ et $f_1(x) \geq 0$ pour $|x| \geq \alpha$.

Alors, l'équation (2.13) admet un cycle limite unique et stable avec l'expression exacte (2.9), situé entre les lignes $x = -\beta$ et $x = +\beta$.

2.3 Exemples.

Exemple 37 :

Prenons $r = 2, m = \frac{1}{2}, n = 0$.

$$p(x) = (10 - x^2), \quad q(x) = x^3, \quad h(x) = x.$$

$$f_1(x) = 2x^2(10 - x^2) + 3x^4 - (10 - x^2)^2$$

$$\text{et } g(x) = -x(10 - x^2) \left[(x(10 - x^2) + x^3)^2 - (10 - x^2)^{-1} \right]$$

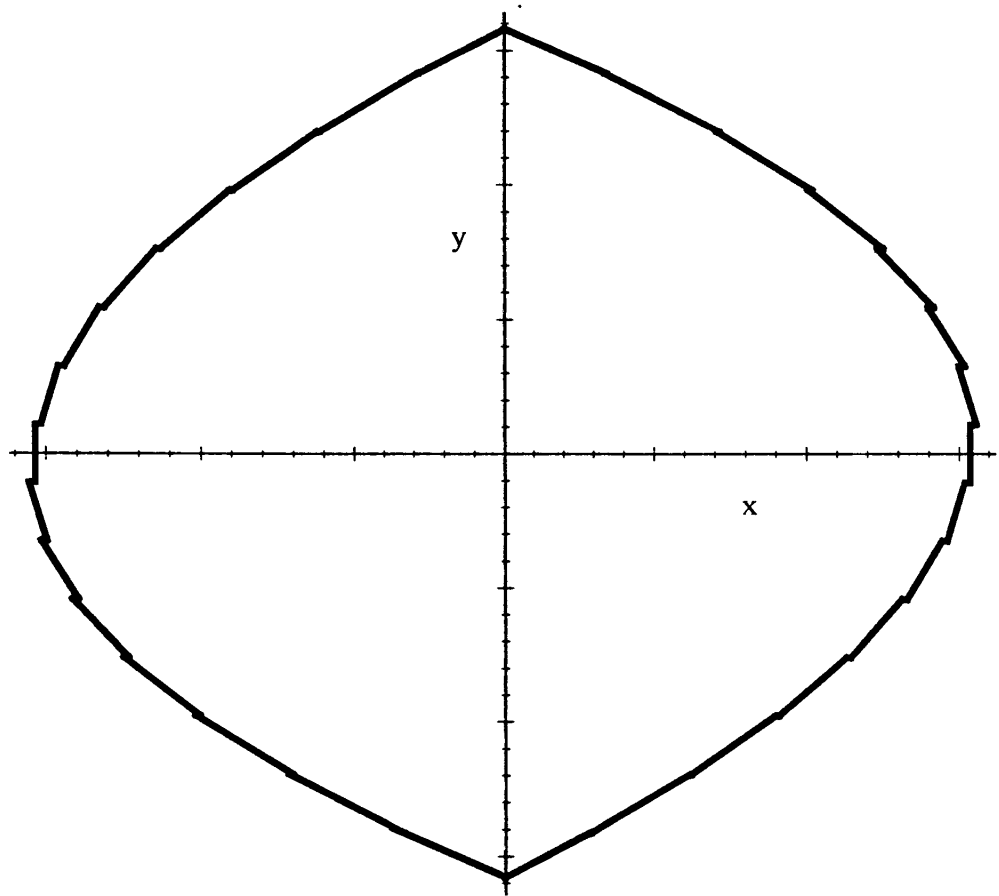
En appliquant le corollaire 36, alors l'équation :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{2.14}$$

admet

$$\dot{x} = x(10 - x^2)^2 + x^3(10 - x^2) \pm (10 - x^2)^{1/2}$$

comme cycle limite unique et stable, situé entre les lignes $x = -\sqrt{10}$ et $x = +\sqrt{10}$.



Cycle limite pour l'équation (2.14)

Exemple 38 :

Prenons $r = 2$, $m = 1/2$ et $n = 0$

$$p(x) = (4 - x^2), \quad h(x) = 0, \quad q(x) = x, \quad f_2(x) = x,$$

où $f_1(x) = 2x^4 - 4x^2 - 4$ et $g(x) = x^7 - 7x^5 + 13x^3 - 3x$.

Il est facile de vérifier que toutes les conditions du théorème 35 sont satisfaites.

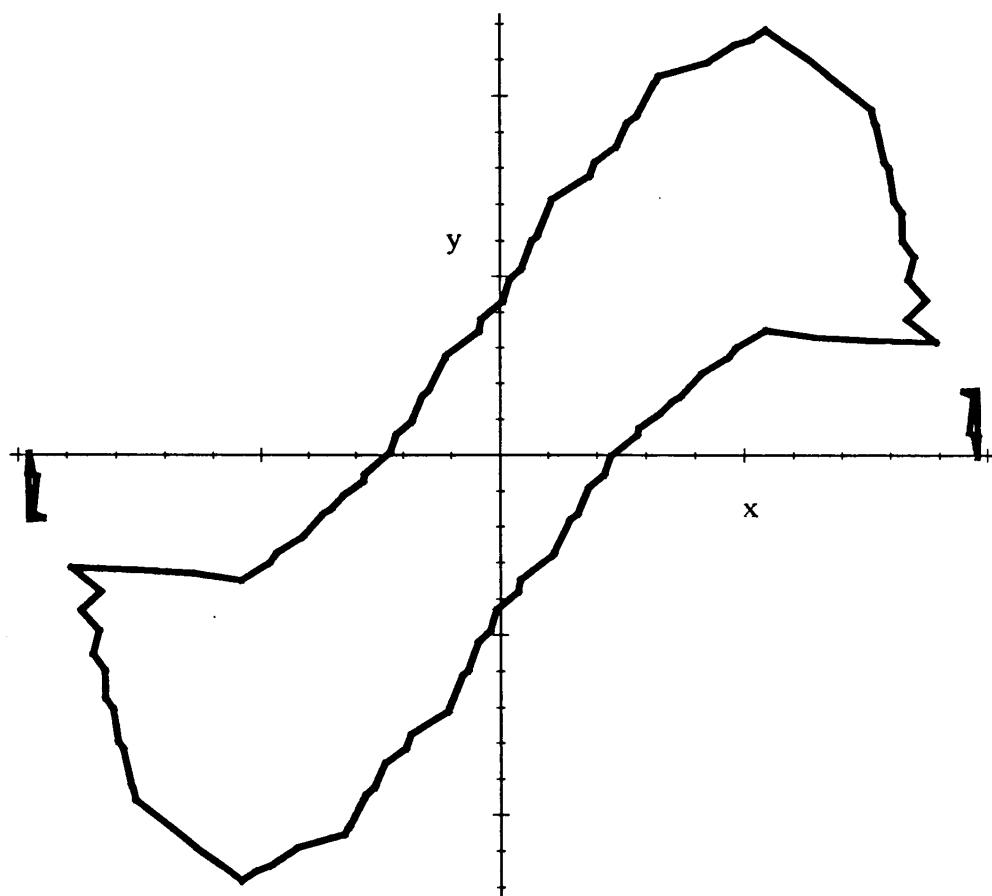
Donc, l'équation :

$$\ddot{x} + x\dot{x}^2 + (2x^4 - 4x^2 - 4)\dot{x} + x^7 - 7x^5 + 13x^3 - 3x = 0 \quad (2.15)$$

admet

$$\dot{x} = x(4 - x^2) \pm \sqrt{(4 - x^2)} \quad (2.16)$$

comme cycle limite unique et stable, situé entre les lignes $x = -2$ et $x = +2$.



Cycle limite de l'équation (2.15)

Exemple 39 :

Prenons $r = 2$, $m = 1/2$, $n = 0$.

$p(x) = (3 - x^2)$, $h(x) = 3x$, $q(x) = 9x$, $f_2(x) = x^3$, où :

$$f_1(x) = -3(2x^4 + 1) \left[(3 - x^2)^2 + 3(3 - x^2) \right] + 3x^2 [5(3 - x^2) + 9]$$

$$\text{et } g(x) = -x(3 - x^2) \left[(3x(3 - x^2) + 9x)^2 - \frac{1}{3-x^2} \right] + x^3 \left[(3x(3 - x^2)^2 + 9x(3 - x^2))^2 - (3 \right.$$

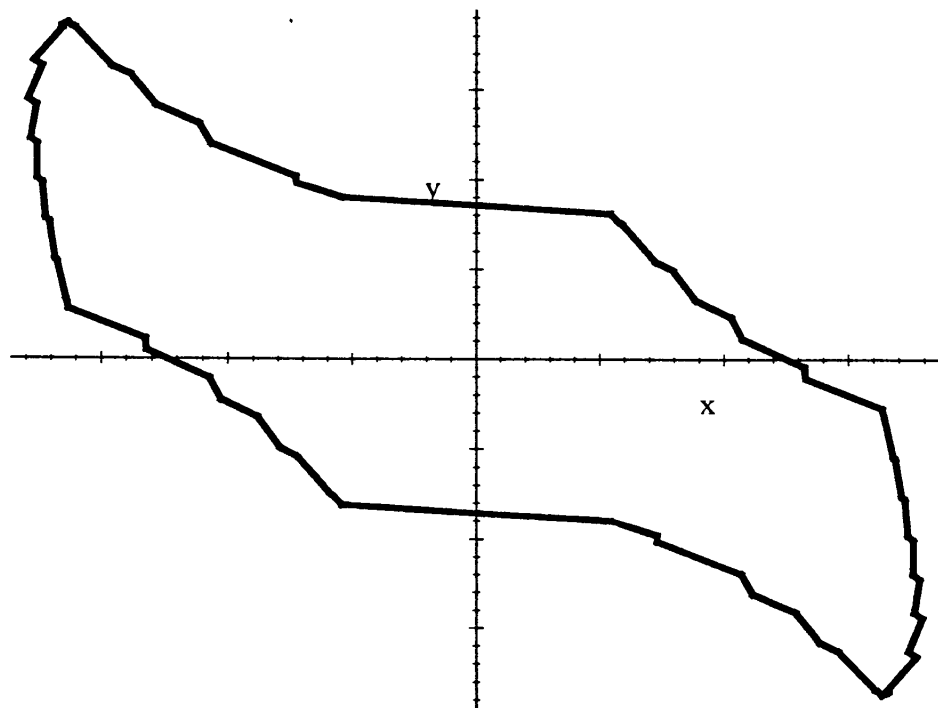
En utilisant le théorème 33, on montre que l'équation :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.17)$$

admet

$$\dot{x} = 3x(3 - x^2)^2 + 9x(3 - x^2) \pm (3 - x^2)^{1/2} \quad (2.18)$$

comme cycle limite situé entre les lignes $x = -\sqrt{3}$ et $x = +\sqrt{3}$.



Cycle limite pour l'équation (2.17)

Exemple 40 :

Prenons

$$r = 2, m = 3/2, n = 1$$

$p(x) = (1 - x^2)$, $q(x) = \alpha x$, $h(x) = \beta x$, $f_2(x) = \gamma x$, où : α , β et γ sont des constantes.

$$f_1(x) = -2\beta\gamma x^6 + (4\beta\gamma - 8\beta + 2\alpha\gamma)x^4 + (6\alpha + 9\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma)x^2 - \beta - \alpha$$

$$\text{et } g(x) = [\beta x(1 - x^2) + \alpha x]^2 - (1 - x^2)[\gamma x(1 - x^2)^2 - \beta(1 - x^2)]$$

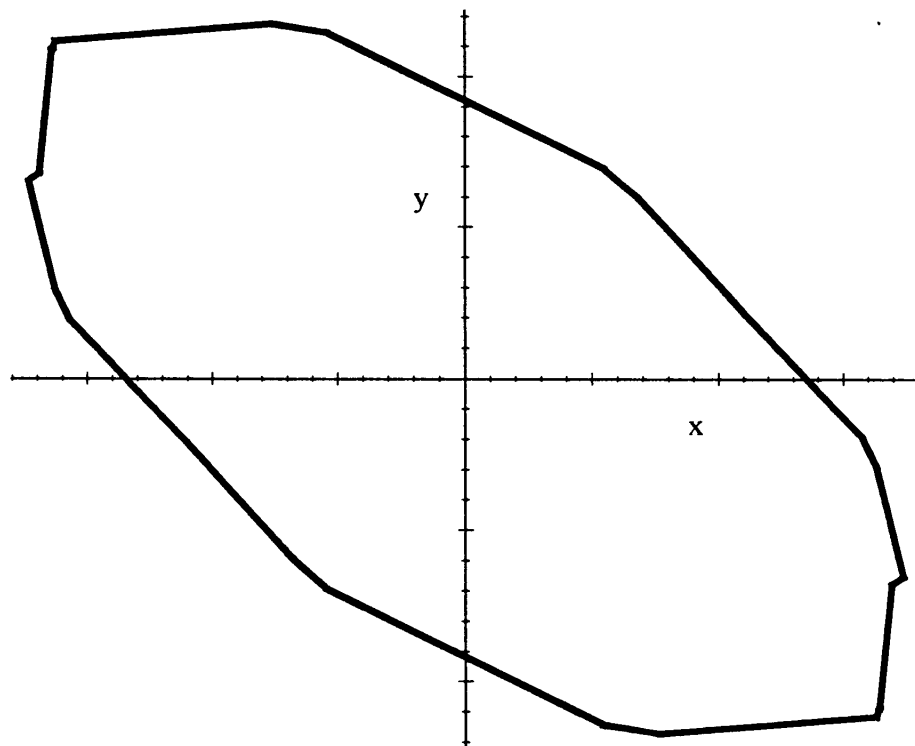
Appliquons le théorème 35, alors l'équation :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2.19)$$

admet

$$\dot{x} = \beta x(1 - x^2)^2 + \alpha x(1 - x^2) \pm (1 - x^2)^{3/2} \quad (2.20)$$

comme cycle limite unique et stable, situé entre les lignes $x = -1$ et $x = +1$.



Le cycle limite de l'équation (2.19)

Chapitre 3

Solution stationnaire des EDS.

3.1 Introduction.

Les ingénieurs qui s'intéressent aux vibrations aléatoires doivent nécessairement traiter le cas des oscillateurs stochastiques non-linéaires soumis généralement à une excitation aléatoire du type bruit blanc. Ces oscillateurs sont modélisés par des équations différentielles stochastiques du second ordre de la forme :

$$\ddot{x}_t + f(x_t, \dot{x}_t) = \sigma(x_t, \dot{x}_t)\dot{W}_t, \quad (3.1)$$

où x_t évolue dans R^n avec $t \geq 0$, f est une fonction de $R^n \times R^n$ dans $M_R(n, n)$, $\dot{W}$ représente le bruit blanc standard et σ est l'intensité du bruit blanc.

Mathématiquement, l'équation (3.1) est interprétée dans l'espace des phases comme étant une équation différentielle stochastique au sens de Itô :

$$\begin{cases} dx_t = y_t dt \\ dy_t = -f(x_t, y_t)dt + \sigma(x_t, y_t)dW_t \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier :

- 1) La non explosion de la solution en un temps fini.

2) L'existence et l'unicité d'une solution stationnaire.

Pour cela, nous utilisons la deuxième méthode de Lyapounov, cette méthode étant décrite et utilisée par plusieurs auteurs dont Arnold [4], Khasminskii [15], Kushner[16].

3.2 Non explosion de la solution.

Soit l'oscillateur stochastique :

$$\begin{cases} dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dW(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{p.s.} \end{cases}, \quad (3.3)$$

où x_t évolue dans R^n avec $t \geq 0$, b est une fonction définie de R^n dans R^n et σ est une application définie de R^n dans $M_R(n, n)$.

Théorème 41 [15] :

Supposons que :

$$1) \begin{cases} \forall R > 0, \exists K_R > 0 : |b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K_R |x - y| \\ \forall |x| \leq R, \forall |y| \leq R \end{cases}$$

2) x_0 est une variable aléatoire indépendante de $W = \{W(t), t \geq 0\}$ et $E(|x_0|^2) < \infty$.

3) Il existe une fonction V définie de R^n dans R_+ , de classe C^2 appelée fonction de Lyapounov et vérifiant :

$$V(x) \longrightarrow +\infty \text{ si } |x| \longrightarrow +\infty \text{ et } LV(x) \leq cV(x) \text{ où } c > 0, \forall x \in R^n.$$

$$L = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

est le générateur infinitésimal associé au processus de diffusion solution du système (3.3), avec $a(x) = [\sigma(x)\sigma^T(x)]$.

Alors l'oscillateur (3.3) admet une solution unique qui n'explose pas en un temps fini.

Considérons maintenant l'oscillateur :

$$\ddot{x}_t + f(x_t, \dot{x}_t) + g(x_t) = \sigma(x_t, \dot{x}_t) \dot{W}_t \quad (3.4)$$

Posons $y_t = \dot{x}_t$, alors l'oscillateur (3.4) devient :

$$\begin{cases} dx_t = y_t dt \\ dy_t = -[f(x_t, y_t) + g(x_t)]dt + \sigma(x_t, y_t)dW_t \end{cases} \quad (3.5)$$

et on a le résultat suivant :

Théorème 42 [3] :

Soit le système :

$$\begin{cases} dx_t = y_t dt \\ dy_t = -[f(x_t, y_t) + g(x_t)]dt + \sigma(x_t, y_t)dW_t \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{p.s} \quad (3.6)$$

Sous les conditions suivantes :

- 1) f est localement lipschitzienne,
 - 2) la fonction $G(x) = \int_0^x g(s)ds$ est de classe C^2 et $G(x) \rightarrow +\infty$ si $|x| \rightarrow +\infty$,
 - 3) $\exists K_1 > 0, \exists C > 0$ tels que $\frac{1}{2}Tr[\sigma(x, y)\sigma^T(x, y)] \leq \langle y, f(x, y) \rangle + C[G(x) + \frac{1}{2}|y|^2] + K_1$,
 - 4) la variable aléatoire (x_0, y_0) est indépendante du processus $\{W(t), t > 0\}$,
- le système (3.6) admet une solution unique qui n'explose pas en un temps fini.

Preuve. : ■

Les conditions 1) et 2) assurent que les coefficients du système vérifient la condition

1) du théorème 41, d'une part. D'autre part, soit la fonction de Lyapounov V définie par $V(x, y) = G(x) + \frac{1}{2}\langle y, y \rangle + K$, $K > 0$. Il est facile de vérifier que $V(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in R^n \times R^n$, $V(x, y) \rightarrow +\infty$ si $|x|^2 + |y|^2 \rightarrow +\infty$ et

$$LV(x, y) = -\langle f(x, y), y \rangle + \frac{1}{2}Tr[\sigma(x, y)\sigma^T(x, y)] \leq C[G(x) + \frac{1}{2}|y|^2] + K_1 \leq CV(x, y) - CK + K_1.$$

Si on choisit $K \geq K_1/C$, alors $LV(x, y) \leq CV(x, y)$, $\forall (x, y) \in R^n \times R^n$.

Ainsi, la condition 3) du théorème 41 est vérifiée et donc le système (3.6) admet une solution unique qui n'explose pas en un temps fini.

3.3 Solution stationnaire.

Soit l'oscillateur stochastique :

$$\begin{cases} dx(t) = b(x(t))dt + \sigma(x(t))dW(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0 & \text{p.s.} \end{cases}, \quad (3.7)$$

où $x(t)$ évolue dans R^n avec $t \geq 0$, b est une fonction de R^n dans R^n et σ est une application définie de R^n dans $M_R(n, n)$.

3.3.1 Existence et unicité.

On sait que l'existence d'une solution stationnaire est liée à l'existence d'une mesure invariante. En 1960, [14] Khasminskii a donné des conditions suffisantes pour l'existence d'une mesure invariante. Dans sa monographie [15], il énonce le résultat suivant :

Théorème 43 [15] :

Supposons que :

$$1) \forall R > 0, \exists K_R : \begin{cases} |b(x) - b(y)| - |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K_R |x - y| \\ \forall |x| \leq R, \forall |y| \leq R \end{cases},$$

2) la variable aléatoire x_0 est indépendante du processus $\{W(t), t \geq 0\}$.

3) Il existe une fonction de Lyapounov $V_1 : R^n \longrightarrow R_+$ de classe C^2 telle que :

$$\begin{cases} V_1(x) \longrightarrow +\infty \text{ si } |x| \longrightarrow +\infty \\ LV_1(x) \leq cV_1(x), \forall x \in R^n \end{cases},$$

4) il existe une autre fonction de Lyapounov $V_2 : R^n \longrightarrow R_+$ de classe C^2 telle que :

$$LV_2 \longrightarrow -\infty \text{ si } |x| \longrightarrow +\infty,$$

$$LV_i(x) = \frac{\partial}{\partial x} V_i(x)b(x) + \frac{1}{2}Tr[\sigma^T(x)\sigma(x)]\frac{\partial^2}{\partial x^2} V_i(x) \quad (i = 1, 2).$$

Alors, l'oscillateur (3.7) admet une solution stationnaire.

Dans notre travail, on s'intéresse aux deux classes d'oscillateurs de la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{x}_t + f(x_t)\dot{x}_t + g(x_t) &= \sigma(x_t, \dot{x}_t)\dot{W}_t \\ \ddot{x}_t + f_2(x_t)\dot{x}_t^2 + f_1(x_t)\dot{x}_t + g(x_t) &= \sigma(x_t, \dot{x}_t)\dot{W}_t \end{aligned}$$

Classe I.

Considérons l'oscillateur :

$$\ddot{x}_t + f(x_t)\dot{x}_t + g(x_t) = \sigma(x_t, \dot{x}_t)\dot{W}_t. \quad (3.8)$$

Dans l'espace des phases, (3.8) s'écrit :

$$\begin{cases} dx_t = y_t dt \\ dy_t = -[f(x_t)y_t + g(x_t)]dt + \sigma(x_t, y_t)dW_t \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans ce cas, le générateur infinitésimal associé à (3.9) est donné par :

$$LV(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) - [f(x)y + g(x)] \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y) \quad (3.10)$$

et on a le résultat suivant :

Théorème 44 :

Sous les conditions suivantes :

- 1) f et g sont des fonctions de classe C^1 ,
- 2) $\exists R > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour $|x| > R$,
- 3) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $G(x) = \int_0^x g(s)ds \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$,
- 4) $\sigma^2(x, y) \leq \frac{1}{2}f(x)y^2$,

le système (3.9) admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

Les conditions 1) et 4) impliquent que les coefficients du système (3.9) vérifient la condition de Lipchitz.

D'autre part, considérons maintenant la fonction V définie par :

$$V(x, y) = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{2}y^2G(x) + \frac{1}{2}[G(x)]^2.$$

Il est clair que V est de classe C^2 et vérifie $V(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

et $V(x, y) \longrightarrow +\infty$ si $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$.

Appliquons le générateur infinitésimal (3.10) à la fonction V , nous aurons :

$$\begin{aligned} LV(x, y) &= \frac{-1}{2}f(x)y^4 - f(x)y^2G(x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x, y)[\frac{3}{2}y^2 + G(x)] \\ &= \frac{-1}{2}y^2[f(x)y^2 - \frac{3}{2}\sigma^2(x, y)] - G(x)[f(x)y^2 - \frac{1}{2}\sigma^2(x, y)] \\ &\leq -\frac{1}{8}f(x)y^4 - \frac{3}{4}f(x)G(x)y^2. \end{aligned}$$

Donc $LV(x, y) \longrightarrow -\infty$ quand $x^2 + y^2 \longrightarrow +\infty$

En vertu du théorème 43, le système (3.9) admet donc une solution stationnaire.

Remarque 45 :

Si on applique le changement de variable suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi : R \times R \longrightarrow R \times R \\ (x, y) \longrightarrow (x, y + F(x)) \end{array} \right. , \quad (*)$$

alors la condition 4) qui est trop restrictive est remplacée par une condition plus faible.

Pour le nouveau système :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t = (y_t - F(x_t))dt \\ dy_t = -g(x_t)dt + \sigma(x_t, y_t - F(x_t))dW_t \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{array} \right. , \quad \text{p.s} \quad (3.11)$$

où $F(x) = \int_0^x f(s)ds$, $G(x) = \int_0^x g(s)ds$, on détermine une autre fonction de Lyapounov.

Théorème 46 :

Supposons que :

- 1) f et g sont des fonctions de classe C^1 ,
- 2) $\exists R > 0$ tel que $f(x) > 0$ pour $|x| > R$,
- 3) $xg(x) > 0$, $G(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$,
- 4) $\exists K_1 > 0, \exists c \in]0, 1[: \sigma^2(x, y - F(x)) \leq cf(x)[y - F(x)]^2 + (1 - c)F(x)g(x) + K_1$.

Alors, pour chaque condition initiale (x_0, y_0) indépendante du processus $\{W_t, t \geq 0\}$, le système (3.11) admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

Les conditions 1) et 4) assurent que les coefficients du système (3.11) vérifient la condition 1) du théorème 43. D'autre part, soit la fonction V définie par :

$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) + \frac{c}{2}F^2(x) - cF(x)y + K$, où c est une constante positive avec $c < 1$ et K est une constante positive qui sera choisie plus loin. Il est facile de voir que V est de classe C^2 .

On sait que : $\frac{c}{2}y^2 + \frac{c}{2}F^2(x) \geq cyF(x)$ et donc :

$$V(x, y) \geq \frac{1}{2}y^2 + G(x) + \frac{c}{2}F^2(x) - \frac{c}{2}y^2 - \frac{c}{2}F^2(x) + K \geq \frac{(1-c)}{2}y^2 + G(x) + K.$$

d'où $V(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in R^2$ et $V(x, y) \longrightarrow +\infty$ si $x^2 + y^2 \longrightarrow +\infty$.

Appliquons le générateur infinitésimal associé au système (3.11) à la fonction V , on obtient :

$$\begin{aligned} LV(x, y) &= (y - F(x)) \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) - g(x) \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, y - F(x)) \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y) \\ &= -cf(x)[y - F(x)]^2 - (1 - c)F(x)g(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x, y - F(x)) \\ &\leq -\frac{c}{2}f(x)[y - F(x)]^2 - \frac{(1-c)}{2}F(x)g(x) + \frac{1}{2}K_1. \end{aligned}$$

donc $LV(x, y) \longrightarrow -\infty$ si $x^2 + y^2 \longrightarrow +\infty$.

La fonction V satisfait donc toutes les conditions du théorème 43, d'où l'existence d'une solution stationnaire.

Remarque 47 :

Si les conditions 1), 2) et 3) du théorème 46 sont satisfaites et $\sigma(x, y)$ est constante, alors le résultat du théorème 46 reste valable.

Classe II.

Considérons l'oscillateur :

$$\ddot{x}_t + f_2(x_t)\dot{x}_t^2 + f_1(x_t)\dot{x}_t + g(x_t) = \sigma(x_t, \dot{x}_t)\dot{W}_t \quad (3.12)$$

qui s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} dx_t = y_t dt \\ dy_t = -[f_2(x_t)y_t^2 + f_1(x_t)y_t + g(x_t)]dt + \sigma(x_t, y_t)dW_t \end{cases} \quad (3.13)$$

Pour démontrer l'existence d'une solution stationnaire dans le cas de la classe II, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 48 :

Supposons que f_1, f_2 et g sont des fonctions continues.

Alors, l'oscillateur :

$$\ddot{x}_t + f_2(x_t)\dot{x}_t^2 + f_1(x_t)\dot{x}_t + g(x_t) = \sigma(x_t, \dot{x}_t)\dot{W}_t \quad (3.14)$$

est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = y_t - \tilde{F}(x_t) \\ \dot{y}_t = -\tilde{g}(x_t) + \sigma(x_t, y_t - \tilde{F}(x_t))\dot{W}_t \end{cases}, \quad (3.15)$$

où $\tilde{f}(x) = f_1(x) \exp[\int_0^x f_2(s)ds]$, $\tilde{F}(x) = \int_0^x \tilde{f}(s)ds$ et $\tilde{g}(x) = g(x) \exp[2 \int_0^x f_2(s)ds]$.

Preuve. : ■

L'oscillateur (3.14) s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -f_1(x)v - f_2(x)v^2 - g(x) + \sigma(x, v)\dot{W} \end{cases} \quad (3.16)$$

En appliquant à ce système la transformation suivante :

$$\begin{cases} x = x \\ v = [- \int_0^x f_1(s) \exp[\int_0^s f_2(u)du]ds + y] \exp[- \int_0^x f_2(s)ds] \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x} = [-\int_0^x f_1(s) \exp[\int_0^s f_2(u) du] ds + y] \exp[-\int_0^x f_2(s) ds] \\ \dot{y} = g(x) \exp[\int_0^x f_2(s) ds] + \sigma(x, \dot{x}) \dot{W} \exp[\int_0^x f_2(s) ds] \end{cases} \quad (3.17)$$

Utilisons maintenant la transformation de temps $d\tau = \exp[-\int_0^x f_2(s) ds] dt$, tout en gardant la notation de τ par t , le système (3.17) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \int_0^x f_1(s) \exp[\int_0^s f_2(u) du] ds \\ \dot{y} = -g(x) \exp[2 \int_0^x f_2(s) ds] + \sigma(x, y - \int_0^x f_1(s) \exp[\int_0^s f_2(u) du] ds) \dot{W} \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_t = y_t - \tilde{F}(x_t) \\ \dot{y}_t = -\tilde{g}(x_t) + \sigma(x_t, y_t - \tilde{F}(x_t)) \dot{W}_t \end{cases}$$

Théorème 49 :

Sous les hypothèses suivantes :

- 1) f_1, f_2 et g sont des fonctions de classe C^1 ,
 - 2) $\exists R > 0$ tel que $\tilde{f}(x) > 0$ pour $|x| > R$,
 - 3) $x\tilde{g}(x) > 0$ et $\tilde{G}(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$,
 - 4) $\exists K_2 > 0, \exists c]0, 1[: \sigma^2(x, y - \tilde{F}(x)) \leq c\tilde{f}(x)[y - \tilde{F}(x)]^2 + (1 - c)\tilde{g}(x)\tilde{F}(x) + K_2$,
- l'oscillateur (3.14) admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

On opère de la même façon que pour le cas de la classe I.

La fonction de Lyapounov est définie dans ce cas par :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \tilde{G}(x) + \frac{c}{2}\tilde{F}^2(x) - cy\tilde{F}(x) + K,$$

où $K > 0$ et $0 < c < 1$.

3.3.2 Applications.

Oscillateur de type Duffing.

Considérons l'oscillateur :

$$\begin{cases} \ddot{x}_t + \xi \dot{x}_t + \sum_{j=1}^{2m} a_j (x_t)^{j+1} = \sigma \dot{W}_t \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{p.s.} \quad (3.18)$$

où ξ, a_{2m} sont des constantes strictement positives et $\sigma, a_j \in R$ pour $1 \leq j \leq 2m-1$ et m est un entier quelconque.

Dans ces conditions, toutes les hypothèses du théorème 44 sont vérifiées car on a :

$$f(x) = \xi, g(x) = \sum_{j=1}^{2m} a_j x^{j+1} \text{ et } xg(x) = \sum_{j=1}^{2m} a_j x^{j+2} \longrightarrow +\infty \text{ si } |x| \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, le théorème 44 s'applique et par conséquent l'oscillateur (3.18) admet une solution stationnaire.

Oscillateur de type Van der Pol.

Considérons l'oscillateur :

$$\begin{cases} \ddot{x}_t + \xi(x_t^2 - 1)\dot{x}_t + \sum_{j=1}^{2m} a_j (x_t)^{j+1} = \sigma \dot{W}_t \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{p.s.} \quad (3.19)$$

où les constantes ξ, m, σ et a_j ($j = 1, \dots, m$) vérifient les conditions de l'exemple précédent.

Dans ce cas $f(x) = \xi(x^2 - 1)$ et on a $f(x) > 0$ pour $|x| > 1$ et $xg(x) = \sum_{j=1}^{2m} a_j x^{j+2} \longrightarrow +\infty$ si $|x| \rightarrow +\infty$.

En vertu du théorème 46, l'oscillateur (3.19) admet donc une solution stationnaire.

3.3.3 Cas vectoriel.

Considérons l'oscillateur :

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t) + f_i(x_i(t))\dot{x}_i(t) + \frac{\partial}{\partial x_i}G(x(t)) = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(x(t), \dot{x}(t))\dot{W}_j \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans l'espace des phases, l'oscillateur (3.20) s'écrit :

$$\begin{cases} dx_i = y_i dt \\ dy_i = -[f_i(x_i)y_i + \frac{\partial}{\partial x_i}G(x)]dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(x, y)dW_j \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.21)$$

Le changement de variable (*) dans le cas vectoriel est le suivant :

$$\begin{cases} \Phi : R^n \times R^n \rightarrow R^n \times R^n \\ (x, y) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1 + F_1(x_1), \dots, y_n + F_n(x_n)) \end{cases} \quad (**)$$

Appliquons la formule de Itô au processus :

$$\begin{cases} \Phi_i(x, y) = x_i, i = \overline{1, n} \\ \Phi_i(x, y) = y_{i-n} + F_{i-n}(x_{i-n}), i = \overline{n+1, 2n} \end{cases}$$

Alors, le système (3.21) devient :

$$\begin{cases} dx_i = (y_i - F_i(x_i))dt \\ dy_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}G(x)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(x, y - F(x))dW_j \\ i = \overline{1, n} \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{p.s} \quad (3.22)$$

où $F_i(x_i) = \int_0^{x_i} f_i(s)ds$ et $F(x) = (F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$.

Posons $H(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^{x_i} F_i(s)ds$, alors le générateur infinitésimal associé au système (3.22) est donné par :

$$L = \langle y - \nabla H(x), \nabla_x \rangle - \langle \nabla G(x), \nabla_y \rangle + \frac{1}{2} Tr[\sigma(x, y - F(x))\sigma(x, y - F(x))^T D_y^2] \text{ avec :}$$

$\nabla_x = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ et $D_y^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j})_{i,j=1,n}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designe le produit scalaire dans R^n .

Théorème 50 :

Supposons que :

1) f_i et $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ sont des fonctions de classe C^1 pour $i = \overline{1, n}$.

2) $\exists R_i > 0$ tel que $f_i(x_i) > 0$ pour $|x_i| > R_i$.

3) $\exists \alpha > 0, \exists R > 0 : \langle \nabla F(x)x, x \rangle \geq \alpha |x|^2, \forall |x| > R$.

4) $\langle x, \nabla G(x) \rangle \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$.

5) $\exists K_3 > 0, \exists c \in]0, 1[:$

$$Tr[\sigma(x, y - F(x))\sigma^T(x, y - F(x))] \leq c \nabla F(x) |y - F(x)|^2 + (1 - c) \langle \nabla G(x), F(x) \rangle + K_3.$$

Alors, pour chaque condition initiale (x_0, y_0) , le système (3.22) admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

Considérons la fonction de Lyapounov :

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + \frac{c}{2} \langle F(x), F(x) \rangle + G(x) - c \langle y, F(x) \rangle + K,$$

K et c sont des constantes strictement positives avec $c < 1$.

On sait que :

$$\frac{c}{2} \langle y, y \rangle + \frac{c}{2} \langle F(x), F(x) \rangle \geq c \langle y, F(x) \rangle$$

et donc :

$$\begin{aligned} V(x, y) &\geq \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + \frac{c}{2} \langle F(x), F(x) \rangle - \frac{c}{2} \langle y, y \rangle - \frac{c}{2} \langle F(x), F(x) \rangle + G(x) + K \geq \\ &\geq \frac{(1-c)}{2} \langle y, y \rangle + G(x) + K. \end{aligned}$$

alors, $V(x, y) \longrightarrow +\infty$ si $|x|^2 + |y|^2 \longrightarrow +\infty$.

En appliquant à la fonction V le générateur infinitésimal associé au système (3.22), on obtient :

$$LV(x, y) = -c \nabla F(x) |y - F(x)|^2 - (1 - c) \langle \nabla G(x), F(x) \rangle + \frac{1}{2} Tr[\sigma(x, y - F(x))\sigma^T(x, y - F(x))] \text{ et vu la condition 5), on a :}$$

$$LV(x, y) \leq -\frac{c}{2} \nabla F(x) |y - F(x)|^2 - \frac{(1-c)}{2} \langle \nabla G(x), F(x) \rangle + \frac{1}{2} K_3.$$

En utilisant les conditions 2) et 4), on obtient finalement :

$$LV(x, y) \longrightarrow -\infty \text{ si } |x|^2 + |y|^2 \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi, toutes les conditions du théorème 50 sont vérifiées et donc le système (3.22) admet une solution stationnaire.

Application.

Considérons l'oscillateur de type Van Der Pol :

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t) + \zeta(x_i^2(t) - 1) + \frac{\partial}{\partial x_i} G(x(t)) = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \dot{W}_j, & i = \overline{1, n} \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0 & \text{p.s.} \end{cases}, \quad (3.23)$$

- G est une fonction définie de R^n dans R_+ par $G(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \frac{\omega_0^2}{2(m+1)} (\langle Bx, x \rangle)^{m+1}$.
- A est une matrice réelle symétrique et définie positive.
- m est un entier quelconque et B est une matrice définie positive.
- ζ est une constante strictement positive .

On a : $f_i(x_i) = \zeta(x_i^2(t) - 1)$, $f_i(x_i) > 0$ pour $|x_i| > 1$ et donc $F_i(x_i) = \zeta(\frac{1}{3}x_i^3(t) - x_i)$.

D'autre part $\nabla F(x)$ est une matrice diagonale dont les éléments non nuls sont $f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)$

Prenons $R > 1$, alors pour $|x_i| > 1$, $f_i(x_i) > 0$ donc ∇F est définie positive, d'où il existe $\alpha > 0$ tel que $\langle \nabla F(x)x, x \rangle \geq \alpha |x|^2$.

$$\nabla G(x) = Ax + \omega_0^2 \langle Bx, x \rangle^m Bx, \quad \langle x, \nabla G(x) \rangle \geq \langle Ax, x \rangle \geq \lambda |x|^2 \text{ pour } \lambda > 0$$

$$\langle x, \nabla G(x) \rangle \longrightarrow +\infty \text{ si } |x| \longrightarrow +\infty.$$

$$\langle \nabla G(x), F(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \zeta(\frac{1}{3}x_i^2(t) - 1)x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \geq 0 \text{ pour } |x_i| > 1 \forall i = 1, \dots, n.$$

Toutes les conditions du théorème 50 sont donc vérifiées, d'où l'oscillateur (3.23) admet une solution stationnaire.

Chapitre 4

Cycle limite et stabilité stochastique.

4.1 Introduction.

Le terme stabilité est généralement utilisé comme un terme descriptif.

Le point d'équilibre est considéré comme stable ou instable en accord avec l'apparence dans le plan des phases. Le cycle limite est considéré comme stable ou instable selon le comportement des trajectoires voisines (spirales) qui peuvent s'approcher ou s'éloigner du cycle limite.

On s'intéresse à la question de savoir quelle est l'influence d'une perturbation donnée sur le comportement d'un système relativement à son comportement d'origine ?

Plus précisément, on veut savoir si un oscillateur stable dans le cas déterministe restera stable lorsqu'il est perturbé par une excitation aléatoire ?

Dans ce chapitre, on prouve qu'il y a un lien entre l'existence de solutions périodiques et celle des solutions stationnaires et on fait une comparaison entre les résultats des deux chapitres précédents.

On sait qu'il y a plusieurs types de stabilité stochastique (voir [4], [16],[21]) on se limite au cas de l'existence d'une solution stationnaire (qui assure la stabilité asymptotique).

4.2 Résultats.

Maintenant, on va donner le lien entre l'existence d'un cycle limite et l'existence d'une solution stationnaire.

Lemme 51 [12] :

Soient f et g deux fonctions continues.

Considérons l'équation :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (4.1)$$

qui s'écrit dans le plan des phases :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

Sous les conditions suivantes :

1) F est une fonction impaire et l'équation $F(x) = 0$ admet au moins une solution non nulle a ,

2) $F(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$,

3) g est une fonction impaire vérifiant $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $G(x) = \int_0^x g(s)ds \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$,

l'équation (4.1) admet un cycle limite unique.

On a le résultat suivant :

Théorème 52 :

Sous les hypothèses du lemme 51, l'oscillateur stochastique :

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = \sigma \dot{W} \quad (4.3)$$

où σ est une constante, admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

Les conditions 2) et 3) impliquent que les coefficients du système (4.2) verifient la condition de Lipchitz.

D'autre part, considérons maintenant la fonction V définie dans [15] :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + G(x) + [F(x) - \arctg x]y + \int_0^x f(u)[F(u) - \arctg u]du.$$

Vu la condition 2) et 3), on a : $\exists R > 0, \exists \alpha > 0 : F(x) \geq \alpha x$ pour $x > R$.

D'une part, $F(x) - \arctg x \geq F(x) - x \geq \alpha x - x = (\alpha - 1)x$ (choisissons $\alpha > 1$). La condition 3) est équivalente à : $\exists c > 0, \exists \beta > 0 : G(x) \geq cx^2, \forall |x| \geq \beta$.

$$\begin{aligned} \text{alors } V(x, y) &= \frac{1}{2}y^2 + G(x) + [F(x) - \arctg x]y + \int_0^x f(u)[F(u) - \arctg u]du \\ &\geq \frac{1}{2}y^2 + cx^2 + (\alpha - 1)xy + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 \text{ pour } |x| > \max \{R, \beta\}, \end{aligned}$$

et donc $V(x, y) \longrightarrow +\infty$ si $x^2 + y^2 \longrightarrow +\infty$.

Appliquons le générateur infinitésimal associé à la fonction V , on obtient :

$$\begin{aligned} LV(x, y) &= y \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) - [f(x)y + g(x)] \frac{\partial}{\partial y} V(x, y) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(x, y) \\ &= \frac{-y^2}{1+x^2} - g(x)[F(x) - \arctg x] + \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que $-g(x)[F(x) - \arctg x] \longrightarrow -\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$.

On a $G(x) \geq cx^2$ d'où $xg(x) \geq \frac{c}{2}x^2, \forall |x| > \beta$ et $F(x) - \arctg x \geq (\alpha - 1)x, \forall |x| > R$

alors $g(x)[F(x) - \arctg x] = (\alpha - 1)xg(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty, \forall |x| > \max \{R, \beta\}$ et

donc $LV(x, y) \longrightarrow -\infty$ si $x^2 + y^2 \longrightarrow +\infty$.

Ainsi du théorème 43 de l'existence d'une solution stationnaire, en posant : $V_1 = V_2 = V$, on montre que l'oscillateur (4.3) admet une solution stationnaire.

Passons maintenant à la classe II en considérant l'équation :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (4.4)$$

En appliquant la transformation utilisée dans [22], l'équation (4.4) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \tilde{F}(x) \\ \dot{y} = -\tilde{g}(x) \end{cases} \quad (4.5)$$

où $\tilde{f}(x) = f_1(x)[\exp \int_0^x f_2(s)ds]$, $\tilde{F}(x) = \int_0^x \tilde{f}(s)ds$ et $\tilde{g}(x) = g(x)[\exp 2 \int_0^x f_2(s)ds]$.

Le lemme 51 assure l'existence d'une solution périodique.

Lemme 53 :

Supposons que :

1) $\tilde{F}$ est une fonction impaire et l'équation $\tilde{F}(x) = 0$ admet au moins une solution non nulle a ,

2) $\tilde{F}(x) \longrightarrow +\infty$ si $x \longrightarrow +\infty$,

3) $\tilde{g}$ est une fonction impaire vérifiant $x\tilde{g}(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $\tilde{G}(x) = \int_0^x \tilde{g}(s)ds \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$,

Alors, l'équation (4.4) admet un cycle limite unique.

Théorème 54 :

Sous les conditions du lemme 53, l'oscillateur stochastique :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = \sigma\dot{W} \quad (4.6)$$

où σ est une constante, admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

Similaire à la démonstration précédente.

Maintenant, on peut énoncer les résultats suivants :

Considérons l'équation (2.10) dans le cas stochastique :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\dot{W}, \quad (4.7)$$

où f_2 est une fonction continue impaire de R dans R ,

$$f_1(x) = -[p'((m+r)hp^{r-1} + (m+1)q) + \dot{h}p^r + pq' + 2f_2(hp^r + pq)],$$

et $g(x) = f_2[(hp^r + pq)^2 - p^{2m}] + mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}].$

Théorème 55 :

Supposons que :

- 1) $xg(x) > 0$ pour $x \neq 0$ et $G(x) \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$,
- 2) $\exists \alpha > 0 : f_1(x) < 0$ pour $|x| < \alpha$ et $f_1(x) \geq 0$ pour $|x| \geq \alpha$,
- 3) $\exists K_2 > 0, \exists c \in]0, 1[: \sigma^2(x, y - \tilde{F}(x)) \leq c\tilde{f}(x)[y - \tilde{F}(x)]^2 + (1 - c)\tilde{g}(x)\tilde{F}(x) + K_2.$

Alors, l'oscillateur (4.7) admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

Considérons la fonction de Lyapounov utilisée dans le chapitre 3 :

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \tilde{G}(x) + \frac{c}{2}\tilde{F}^2(x) - cy\tilde{F}(x) + K,$$

K et c sont des constantes positives et $c < 1$.

Vu la condition 1), on a $x\tilde{g}(x) = xg(x) \exp[2 \int_0^x f_2(s)ds] > 0$ pour $x \neq 0$

et $\tilde{G}(x) = \int_0^x \tilde{g}(s)ds \longrightarrow +\infty$ si $|x| \longrightarrow +\infty$.

En utilisant la condition 2), on a : $f_1(x) \exp[\int_0^x f_2(u)du] \geq 0$ pour $|x| \geq \alpha$, alors $\tilde{f}(x) \geq 0$ pour $|x| \geq \alpha$,

Toutes les conditions du théorème 49 sont donc vérifiées, alors l'oscillateur (4.7) admet une solution stationnaire.

Considérons maintenant le cas de l'équation (2.13) qui s'écrit dans le cas stochastique :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\dot{W} \quad (4.8)$$

$$\text{où } f_1(x) = -[p'((m+r)hp^{r-1} + (m+1)q) + h'p^r + pq']$$

$$\text{et } g(x) = mpp'[(hp^{r-1} + q)^2 - p^{2(m-1)}].$$

Corollaire 56 :

Sous des conditions analogues à celles du théorème 55, l'oscillateur stochastique (4.8) admet une solution stationnaire.

Preuve. : ■

On opère comme dans la preuve du théorème 46, on montre que la fonction

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}F^2(x) + G(x) - cyF(x) + K, \text{ vérifie :}$$

$$V(x, y) \longrightarrow +\infty \text{ et } LV(x, y) \longrightarrow -\infty \text{ quand } x^2 + y^2 \longrightarrow +\infty.$$

Puis on applique le théorème 43 [15].

Remarque 57 :

Dans le théorème 55 et le corollaire 56 les conditions 1) et 2) assurent l'existence d'un cycle limite unique et stable pour le cas déterministe correspondant.

La condition 3) peut être considérée comme condition sur l'intensité du bruit blanc de la perturbation permettant de maintenir la stabilité du système.

4.2.1 Applications.**Exemple 58 :**

Considérons l'équation de Van Der Pol :

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \varepsilon > 0 \quad (4.9)$$

On a $F(x) = \varepsilon(\frac{1}{3}x^3 - x)$, $F(\pm\sqrt{3}) = 0$ et $F(x) \longrightarrow +\infty$ pour $|x| \longrightarrow +\infty$. D'autre part $xg(x) = x^2 > 0$ pour $x \neq 0$.

Le lemme 51 garantit que l'équation (4.9) admet un cycle limite unique situé entre les lignes $x = -\sqrt{3}$ et $x = +\sqrt{3}$.

Si on perturbe le système par une excitation aléatoire avec une l'intensité σ constante, alors l'équation (4.9) devient :

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = \sigma\dot{W}, \quad \varepsilon > 0 \quad (4.10)$$

Le théorème 52 permet de conclure que l'oscillateur (4.10) admet une solution stationnaire.

Exemple 59 :

Considérons l'équation :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (4.11)$$

où $f_1(x) = 2x^2(10 - x^2) + 3x^4 - (10 - x^2)^2$

et $g(x) = -x(10 - x^2) \left[(x(10 - x^2) + x^3)^2 - (10 - x^2)^{-1} \right]$.

Comme on a vu dans le chapitre 2, l'équation (4.11) admet un cycle limite unique et stable, situé entre les lignes $x = -\sqrt{10}$ et $x = +\sqrt{10}$

Si on perturbe l'équation (4.11) par une excitation aléatoire interne d'intensité $\sigma(x, y)$ vérifiant :

$$\exists K_1 > 0, \exists c \in]0, 1[: \sigma^2(x, y - F(x)) \leq cf(x)[y - F(x)]^2 + (1 - c)F(x)g(x) + K_1,$$

alors le corollaire 56 permet de conclure que l'oscillateur stochastique :

$$\ddot{x} + f_1(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\dot{W} \quad (4.12)$$

admet une solution stationnaire.

Exemple 60 :

Considérons l'équation suivante :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (4.13)$$

avec $f_2(x) = x$, $f_1(x) = 5x^4(7-x^2) + 4x^2 - 3x^2(7-x^2)^2 - 7 + 2x \left[x^3(7-x^2)^2 + (7-x^2)x \right]$
et $g(x) = -(7-x^2) \left[x^3(7-x^2) + x \right]^2 + 1 + x \left[\left(x^3(7-x^2)^2 + (7-x^2)^2 x \right)^2 - 7 + x^2 \right]$.

On sait que l'équation (4.13) admet comme cycle limite :

$$\dot{x} = x^3(7-x^2)^2 + x(7-x^2) \pm \sqrt{(7-x^2)}. \quad (4.14)$$

Ce cycle limite est unique, stable et situé entre les lignes $x = -\sqrt{7}$ et $x = +\sqrt{7}$.

On perturbe l'équation (4.13) par une excitation aléatoire interne d'intensité $\sigma(x, y)$ vérifiant :

$$\exists K_2 > 0, \exists c \in]0, 1[: \sigma^2(x, y - \tilde{F}(x)) \leq c \tilde{f}(x) [y - \tilde{F}(x)]^2 + (1 - c) \tilde{g}(x) \tilde{F}(x) + K_2.$$

Le théorème 55 s'applique dans ce cas et ainsi l'oscillateur :

$$\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = \sigma(x, \dot{x})\dot{W} \quad (4.15)$$

admet une solution stationnaire.

Conclusion.

Ce travail nous a permis de voir que :

sous certaines conditions, les équations de type Liénard admettent un cycle limite. Ces mêmes conditions garantissent l'existence d'une solution stationnaire quand les systèmes considérées sont soumis à des perturbations aléatoires du type bruit blanc.

Plus précisément, on remarque que des conditions suffisantes de stabilité pour une classe d'oscillateurs déterministes assurent la stabilité des systèmes obtenus par l'introduction d'une perturbation aléatoire du type bruit blanc.

Par ailleurs, on a montré que la technique des fonctions de Lyapounov reste efficace pour l'étude de la stabilité stochastique.

Les résultats obtenus peuvent être utilisés dans l'ingénierie des systèmes dynamiques déterministes et stochastiques.

Perspective :

La question de l'équivalence entre les deux résultats reste cependant ouverte car on travaille avec des conditions suffisantes mais pas obligatoirement nécessaires.

Bibliographie

- [1] L.Abboui & A.Bendjeddou, Exact stationary solutions for a class of nonlinear oscillators, Far East J.Theo.Sta, 22 March 2000.
- [2] L.Abboui & A.Bendjeddou, On the exact limit cycle for Lienard type equation, Far East.J.Math.Sci (FJMS),2001.
- [3] H.Amrane, Thèse de magister en mathématiques, Université de Sétif 1999.
- [4] L.Arnold, Stochastic differential equation, theory and applications, Krieger publishing company Malabar Florida, 1992.
- [5] T.K.Caughey & H.J.Payne, On the response of class of self-excited oscillators to stochastic excitation, International journal of nonlinear mechanic, Vol 2, 125-151, Pergamon press l t d 1967.
- [6] T.K.Caughey, Nonlinear theory of random vibrations, In advances in applied mechanics, volume 11, Academic press, 209-253,1971.
- [7] H.I.Freedman & Y.Kuang, Uniqueness of limit cycle in Lienard type equation, Non-linear analysis,15,333-338,1990.
- [8] I.Guikhman & A.Skorokhod, Introduction à la théorie des processus aléatoires, Edition mir Moscow 1986.
- [9] L.G.Hamilton, Oscillating and periodic solutions of equation of the type $\ddot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 + f_1(x)\dot{x} + g(x) = 0$, Journal of mathematical analysis and applications,176,11-23,1993.
- [10] L.G.Hamilton, The family of functions $S_{\alpha,k}$ and the Lienard equation, Tankang journal of mathematics, volume 27, No 1, Spring 1996.

- [11] H.H.Jack, Ordinary differential equation, Krieger publishing company Malabar, Florida, 1980.
- [12] D.W.Jordan & P.Smith, Nonlinear ordinary differential equation, Oxford applied mathematics and computing science series, Second edition 1987.
- [13] S.Kazimier, Stochastic differential equations with applications to physics and engineering, Mathematics and its applications, Kluwer academic publishers Amsterdam, 1990.
- [14] R.Z.Khasminskii, Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of the solution of the cauchy problem for parabolic equations, Theory probab-appl (USSR) 5, 179-196, 1960.
- [15] R.Z.Khasminskii, Stability of systems of differential equations with random disturbances of parameters, Nauka Moscow, 1969.
- [16] H.J.Kushner, Stochastic stability and control, Academic press, 1967.
- [17] A.A.Mostafa, Relaxation oscillators with exact limit cycles, Journal of mathematical analysis and applications, 218, 308-312, 1998.
- [18] L.Pontraigine, Equations différentielles ordinaires, Edition mir Moscow 1975.
- [19] C.Soize, The Fokker-Planck equation for stochastic dynamical systems and its explicit steady state solutions, Word scientific publishing Singapore Newjersey London Hong kong 1994.
- [20] E.B.William & C.D.Richard, Elementary differential equations and boundary value problems, Sixth edition Troy Newyork, 1996.
- [21] M.Xuerong, Luapunov's second method for stochastic differential equations, www.stams.strath.ac.uk/~xuerong/talks/Berlin.pdf.
- [22] J.Zhou, On the existence and uniqueness of periodic solutions for Lienard-type equation, Nonlinear analysis :theory, methods & applications, volume 27, No 12, 1463-1470, 1996.

ملخص.

المعادلات من نوع ليونارد لها أهمية تطبيقية ، حيث أنها تستعمل في وضع نموذج للنظم الديناميكية. في عملنا هذا نهتم بالحلول الدورية و دورات النهاية من أجل هذا النوع من المعادلات و ندرس أيضا وجود الحلول الثابتة للمعادلات التفاضلية سطوكستية المتحصل عليها بعد ادخال اضطراب عشوائي من نوع فوضى بيضاء. و نبرهن أخيرا على تواجد رابطة بين وجود الحلول الدورية و وجود الحلول الثابتة ، بدقة أكثر نبين أن نفس الشروط تضمن النتائج الموافقة.

كلمات المفاتيح :

المعادلات ليونارد ، الحلول الدورية ، دورات النهاية ، المعادلات التفاضلية سطوكستية ، الحلول الثابتة ، الاستقرار السطوكستيكي.

Abstract.

Lienard type equations have certain practice interest, they are often used to modeling the behavior of dynamic systems.

In our work, we are interesting to periodic solutions and to limits cycles for these types of equations.

We also study the existence of stationary solutions of stochastic differentials equations obtained after an introduction of random perturbation of white noise type.

Finally, we have noticed that there is relation between the existence of periodic solutions and the existence of stationary solutions.

More precisely, we appears that the same conditions assure the correspond results.

Keyword:

Lienard equations, periodic solutions, limits cycles, S.D.E, stationary solutions, stochastic stability.

RESUME.

Les équations du type Liénard ont un intérêt pratique certain, elles sont souvent utilisées pour modéliser le comportement des systèmes dynamiques.

Dans notre travail, nous nous intéressons aux solutions périodiques et aux cycles limites pour les équations de ce types.

Nous étudions aussi l'existence des solutions stationnaires pour des équations différentielles stochastiques obtenues en introduisant une perturbation aléatoire du type bruit blanc.

Nous prouvons enfin qu'il y a un lien entre l'existence des solutions périodiques et l'existence des solutions stationnaires, plus précisément on montre que les mêmes conditions garantissent les résultats correspondants.

Mots clés :

équations de Liénard, solutions périodiques, cycles limites, EDS, solutions stationnaires, stabilité stochastique.