République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

et de la Recherche Scientifique

Université de Constantine
Institut des Mathématiques

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Magister

en Mathématiques

Option : Algèbre

Thème

Groupe d'Automorphismes des Formes Trilinéaires Alternées de Rang 8

Par : Mr. Noureddine MIDOUNE

Soutenue le : / /1997 devant le jury composé de :

MM.	**DENECHE Mohammed**, Maître de conférences, U. de Constantine	Président
	BENKAFADAR Nacerdine, Maître de conférences, U. de Constantine	Examinateur
	NOUI Lemnouar, Chargé de cours, U. de Batna	Rapporteur
	REBIAI Salahedine, Maître de conférences, U. de Batna	Examinateur
	BENLAHCENE Moussa, Chargé de cours, U. de Batna	Examinateur

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Noui Lemnouar pour m'avoir guidée le long de mon travail, et avoir mis à ma disposition sa documentation qu'il trouve ici, l'expression de mon respect et mes remerciements les plus profonds.

De même, je remercie vivement Monsieur Deneche Mohammed Maître de conférences à l'Université de Constantine pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Benkafadar Nacereddine Professeur à l'Université de Constantine et Rebiai Salaheddine Maître de conférences à l'Université de Batna et Benlahcène Moussa chargé de cours à l'Université de Batna, d'avoir accepté de juger mon travail.

Qu'il me soit aussi permis au terme de cette thèse de remercier Debba Salim pour leur disponibilité et l'intérêt qu'ils ont portés à mon travail.

Table des matières

TABLE DES NOTATIONS

S_ω	Support de ω	I-1-2
$rg(\omega)$	rang de ω	I-1-2
$Aut\,(\omega)$	groupe d'automorphismes	I-1-4
$d_1(\omega)$		I-1-5
$\varpi(\alpha)$		I-1-5
$SP(\varphi)$		I-1-8
$Sp_{2m}(K)$		I-1-9
γ_m	puissance divisée	I-1-11
ω_5		I-2-5
ω_3		I-2-7.2
$\omega_{8,1}$, …, $\omega_{8,13}$		II-1
c_{ijk}	coefficient de $e_i\, e_j\, e_k$	III-1
$\omega_{6,1}$, $\omega_{6,2}$		IV-1-2
$\omega_{7,1}$,…, $\omega_{7,5}$		IV-1-2

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'une des applications de la théorie des groupes est liée au problème de classification, la classification des trivecteurs (ou les formes trilinéaires alternées) par l'action du groupe linéaire se fait en deux étapes :

1) Classification sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque .

2) Utilisation de la cohomologie galoisienne pour déduire la classification sur un corps quelconque ou sur certains corps spéciaux (corps finis, corps ordonnés maximaux, corps locaux, ...) plusieurs auteurs ont étudié les formes multilinéaires alternées; le cas bilinéaire étant simple, celui des formes trilinéaires est l'objet principal des recherches:

En 1931, J.A. Schouten, a classifié les trivecteurs de rang 7, sur $K = \mathbb{C}$. Gurevitch a donné la classification des trivecteurs de rang 8 sur $\mathbb{C}$.

En 1976, Gresp a étudié le cas $n = 7$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique différente de 2 et 3.

En 1983, D. Djokovic's a étudié le cas $n = 8$ et $K = I\!R$. P. Revoy et Noui ainsi que Cohen et A. Helminck, ont étudié les dimensions 6 et 7.

L. Noui a étudié le cas $n = 8$, sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque[7], pour l'utilisation de la cohomologie galoisienne il est nécessaire de déterminer les groupes d'automorphismes des trivecteurs. la détermination des groupes d'automorphismes à un isomorphisme local prés est insuffisante pour l'utilisation de la cohomologie [8] , en effet pour $A = Aut(\omega_{7,5})$ on a la suite suivante $1 \to G_2(K) \to A \to \mu_3(K) \to 1$, où $G_2(K)$ est un groupe simple de dimension 14, et il est, aussi, la composante connexe de A. Le groupe d'automorphismes de $\omega_{7,5}$ à un isomorphisme local prés est : $A' = G_2(K)$, on trouve:

$H^1(G,A) \neq H^1(G, A')$, où $G = Gal(\overline{K}, K)$ groupe de Galois, $\overline{K}$ clôture algébrique de K et $A = [G_2(K)] . \mu_3(K)$.

En particulier, si on prend $K = I\!F_q$ un corps fini avec $q \equiv 1[3]$, on obtient :

$H^1(G, A) = 3$, $\omega_{7,5}$, $\lambda\omega_{7,5}$, $\lambda^2\omega_{7,5}$ $(\lambda \notin K^{*3})$

$H^1(G, A') = 1$, $\omega_{7,5}$

Donc en négligeant le groupe discret, on n'obtient pas toutes les orbites en question ce qui motive la détermination complète des groupes d'automorphismes , ce qui est l'objet principal de notre travail .

Dans le premier chapitre, on donne des généralités où apparaît la notion de l'action, de puissances divisées, d'invariant, groupe d'automorphismes ,... .

Au chapitre II, nous déterminons les groupes d'automorphismes des trivecteurs (ou les formes trilinéaires alternées) $\omega_{8,i}\ _{1\leq i\leq 7}$, dont l'invariant numérique $d_1(\omega)$ vaut 3, et ceci sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque .

Le troisième chapitre est consacré au cas $d_1(\omega) = 5$.

Au dernier chapitre une application de classification sur les corps finis est donnée en précisant les cardinaux de certaines orbites .

I - Algèbre Extérieure et Groupes d'Automorphismes

I - Algèbre Extérieure et Groupes d'Automorphismes

I-1. Généralités:

I-1-1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K. La classification des p-vecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\Lambda^p E$.

- Soit f un endomorphisme de E, l'application linéaire

$\Lambda^p f: \Lambda^p E \to \Lambda^p E$ définie par $\Lambda^p f(x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_p) = f(x_1) \wedge f(x_2) \ldots \wedge f(x_p)$ est un endomorphisme de $\Lambda^p E$. L'action de $GL(E)$ est alors ainsi définie :

$\forall f \in GL(E),\ \forall \omega \in \Lambda^p E, f.\omega = (\Lambda^p f)(\omega)$.

Du fait des isomorphismes $\Lambda^p E^* \approx (\Lambda^p E)^*$, on emploiera indifféremment le langage des formes alternées ou des p-vecteurs.

L'étude est consacrée au cas $p=3$ et $n = 8$, sur un corps algébriquement clos, c'est-à-dire l'action de $GL_8(K)$ sur $\Lambda^3 E$.

I-1-2. Support et rang:

Soit $\omega \in \Lambda^3 E$, on appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \Lambda^3 F$; la dimension de S_ω s'appelle le rang de ω qu'on note $d_0(\omega)$ ou $rg(\omega)$.

- Le rang est invariant par l'action du groupe linéaire $GL(E)$ et par extension des scalaires.

- De l'isomorphisme entre $\Lambda^p K^{p+1}$ et $\Lambda^1 K^{p+1}$, on déduit qu'il n'y a pas de p-vecteurs de rang $p+1$; en particulier il n'y a pas de trivecteurs de rang 4.

I-1-3. Vecteur décomposable :

Un p-vecteur non nul ω est décomposable s'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_p$ dans E tel que $\omega = x_1 \Lambda x_2 \ldots \Lambda x_p$. Le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \ldots, x_p$, donc $S_\omega = \langle x_1, x_2, \ldots, x_p \rangle$, dans ce cas $d_0(\omega) = dim\ S_\omega = p$.

- Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables .

I-1-4. Groupe d'automorphismes:

Le groupe des automorphismes de ω, $Aut(\omega)$ est le sous-groupe d'isotropie de ω dans l'action de $GL(E)$ c'est à dire le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E qui laissent ω invariant:

$Aut(\omega) = \{f / f \in GL(E) \text{ et } \Lambda^p f(\omega) = \omega\} = \{f / f \in GL(E) \text{ et } f.\omega = \omega\}$.

- L'orbite de ω par $GL(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à droite $GL(E)/Aut(\omega)$.

I-1-5. Invariant numérique $d_1(\omega)$:

On associe à un 3-vecteur (trivecteur) d'autre invariant numérique que son rang. Soit $G_1(E)$ l'espace projectif $IP(E)$ et considérons la projection : $P_\alpha : \Lambda^3 E \longrightarrow \Lambda^3(E/\alpha)$. Pour $\alpha \in G_1(E)$, on appelle $\varpi(\alpha)$ l'image de ω par P_α et on pose :

$d_1(\omega) = inf_\alpha(rang\,\varpi(\alpha)), \alpha \in G_1(E)$. On a $d_0(\omega) = rg(\omega) > d_1(\omega)$, $d_1(\omega)$ est invariant par l'action de $GL(E)$.

I-1-6. Lemme:

Soit E un espace vectoriel de dimension paire et ω un trivecteur de rang maximal : $d_1(\omega) \neq 0$, en particulier si $dim\, E = 8$, $d_1(\omega) \neq 0$.

Preuve:

On a $d_1(\omega) = inf_\alpha(rg\,\varpi(\alpha))$, où α parcourt l'espace projectif $IP(E)$ des droites de E.

Si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx, x \neq 0$. Tel que $\varpi(\alpha) = 0$.

Soit $E`$ un supplémentaire de $Kx$ dans $E$: De $E = E` \oplus Kx$, résulte $\Lambda^3 E \approx \Lambda^3 E` \oplus (Kx \otimes \Lambda^2 E`)$, alors $\omega = ux + \omega`$ et $\varpi(\alpha) = 0$ signifie que $\omega`$ est nul; de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$.

Comme ω est de rang maximal, $S_u = E`$ et $E`$ est de dimension paire ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E.

I-1 -7. Base symplectique :

Soit ω un bivecteur de rang maximal de $\Lambda^2 E$: il existe une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E de sorte que $\omega = \sum_{i=1}^{k} e_{2i-1}e_{2i}$ et $2k \leq n \leq 2k+1$ [6]

Si $dim\ E = 2m$ et φ est une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur E, il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 2m$, dans laquelle φ s'écrit $\sum e^*_{2i-1}\ e^*_{2i}$, cette base est dite «***Base symplectique***».[6].

I-1-8. Groupe symplectique :

Le groupe symplectique $Sp(\varphi)$ est le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E qui laisse φ invariante: $\forall f \in Sp(\varphi),\ \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$.

I-1 -9. Remarques:

1) $f \in Sp(\varphi)$, f transforme toute base symplectique en une autre:

$\varphi(f(e_{2i-1}), f(e_{2i})) = \varphi(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1$ et $\varphi(f(e_k), f(e_l)) = 0$ si $\{k, l\}$ n'est pas de la forme $\{2i-1, 2i\}$.

2) Si $\{u_1, \ldots u_{2m}\}$ est une base symplectique de E, on définit un élément f de $Sp(\varphi)$ par $f(e_i) = u_i,\ _{1 \leq i \leq 2m}$. Donc $Sp(\varphi)$ est en bijection avec l'ensemble des bases symplectiques de E. On note $Sp_{2m}(K)$, le groupe $Sp(\varphi)$ où φ est la forme bilinéaire alternée canonique sur K^{2m} [6].

I-1 -10. Proposition :

Soit $K = IF_q$, on a $|Sp_{2m}(K)| = q^{m^2} \prod_{k=1}^{m} (q^{2k}-1)$ [6]

I-1 -11. Puissance divisée :

Théorème:

Un système de puissances divisées existe dans l'idéal $\bigoplus_{K \geq 1} \Lambda^{2k}E$ de l'algèbre extérieure de E. [11]

Ce résultat est bien connu dans le cas des corps, il admet une généralisation au cas d'un anneau quelconque et d'un module non nécessairement libre sous la forme suivante :

Soit M un A-module , ΛM son algèbre extérieure; des puissances divisées existent dans l'idéal (la sous-algèbre commutative des éléments de degré pair de algèbre extérieur de E) $\bigoplus_{K \geq 2} \Lambda^{2k} M$. Si M est projectif de type fini de rang $2m$, on obtient une forme polynôme (de degré

m) γ_m: $\Lambda^2 M^* \to \Lambda^{2m} M^*$ qui est le pfaffien: si $u \in \Lambda^2 M^*$, u est non dégénérée si et seulement si $\gamma_m(u)$ engendre le A-module $\Lambda^{2m} M^*$.

Si $u = \sum_{i=1}^{r} x_{2i-1} x_{2i}$ où $\{x_1,\ldots,x_{2r},\ldots,x_n\}$est une base de E. $\gamma_k(u) = \sum_{1<i_1<\ldots<i_k} x_{2i_1-1} x_{2i_1} \ldots x_{2i_k-1} x_{2i_k}$ de sorte que $rg(u) = 2k$ équivaut à $\gamma_k(u) \neq 0$ et $\gamma_{k+1}(u) = 0$. [9], [11]

I-1-12. Remarques

1) Si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative, les puissances divisées sont définies par :

$$\gamma_k(u) = \frac{u^k}{k!} \qquad [5]$$

2) Les puissances divisées permettent d'étudier les sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 E$. [5]

I-2. Parties stables

Soit ω trivecteur non nul de $\Lambda^3 E$.

I-2-1. Lemme:

L'ensemble $R_i(\omega) = \{x \in E \,/\, \varpi(x)$ est de type $\omega_i\}$ est une partie stable pour $Aut(\omega)$.

Preuve :

Prenons $E = \langle x\rangle \oplus E'$, alors ω s'écrit: $\omega = x\,u + \omega'$ avec $\omega' \in \Lambda^3 E'$ ($\dim E' = n-1$) et $\varpi(x) = \varpi'(x)$, comme $x \notin E'$ alors ϖ' est de même type que $\varpi'(x)$.

Si $f \in A = Aut(\omega)$, $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ donc $f(x)\Lambda^2 f(u) + \Lambda^3 f(\omega') = \omega$,

d'où $\varpi(f(x)) = \overline{\Lambda^3 f(\omega')} f(x)$. Comme f est une application linéaire bijective, elle transforme le trivecteur ω' à un trivecteur de même type, c'est à dire $f(\omega')$ est dans l'orbite de ω', par suite $\varpi(f(x))$ est de type ω_i, d'où $f(x) \in R_i(\omega)$ et $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$.

I-2-2. Remarque

En particulier, on a $R_3(\omega) = \{x \in E \,/\, \varpi(x)$ est de rang 3 $\}$ est stable pour $Aut(\omega)$, ainsi que $R_5(\omega) = \{x \in E \,/\, \varpi(x)$ est de rang 5 $\}$.

I-2-3. Soit $x \in E$, et considérons la forme bilinéaire alternée f' définie par :

$f'(y, z) = f(x, y, z)$ ($y, z \in E$ et f une forme trilinéaire alternée), alors l'ensemble :

$\overline{R_i(f)} = \{x \in E / rg(f') = 2i\}$ $(0 \leq 2i \leq n)$ est stable par $Aut(\omega)$ [3]

Ce qui est utile pour déterminer $Aut(\omega_{8,1})$.

I-2-4. Lemme

Soit E un K-e.v de dimension finie, V_1 et V_2 deux s.e.v de E tels que :

$V_1 \cap V_2 = \{0\}$ et $f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$ où $f \in GL(E)$ alors $(f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2)$ ou $(f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1)$.

Preuve :

Supposons que $f(V_1) \not\subset V_2$ et montrons que $(f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2)$.

Soit $y \neq 0$, $y = f(x_1) \in f(V_1)$ alors $y \in V_1 \cup V_2$. Si $y \in V_2$ alors :

$y = f(x_1) \in V_2$, et il existe $y_1 \neq 0$, $y_1 = f(x'_1) \notin V_2$, donc: $y_1 = f(x'_1) \in V_1$ par suite :

$y + y_1 = f(x_1 + x'_1) \in V_1 \cup V_2$.

Si $y + y_1 \in V_1$ alors $y = 0$ (contradiction).

Si $y + y_1 \in V_2$ alors $y_1 \in V_2$ (").

donc $y \in V_1$ et $f(V_1) \subset V_1$.

Comme $f \in GL(E)$ on a $\dim f(V_1) = \dim V_1$, donc $f(V_1) = V_1$. De l'inclusion :

$V_1 \cup f(V_2) \subset V_1 \cup V_2$, on déduit: $f(V_2) \subset V_2$ (car $f(x_2) \in V_1 = f(V_1)$ et $f(x_2) \in f(V_2)$ d'où $f(x_2) = 0$).

Et de même si on suppose que $f(V_2) \not\subset V_1$ d'où le résultat.

I-2-5. Proposition

Soit le trivecteur $\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$ et $A = Aut(\omega_5)$. Alors on a les suites exactes suivantes :

$$1 \to A' \to A \to K^* \to 1$$
$$1 \to K^4 \to A' \to Sp_4(K) \to 1$$

Preuve

Considérons l'ensemble $E_1 = \{x \in E / x\omega_5 = 0\}$; si $x = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i$ appartient à E_1, on a $x = \alpha_1 e_1$,

donc $E_1 = \langle e_1 \rangle$. Si $x \in E_1$, on a $\Lambda^4 f(x\omega_5) = f(x)\Lambda^3 f(\omega_5) = f(x)\omega_5 = 0$ pour $f \in A$, d'où :

$f(E_1) \subset E_1$, et il existe $\lambda \in K^*$ tel que $f(e_1) = \lambda e_1$. La matrice de f dans la base $\{e_1,\dots,e_5\}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & B \end{pmatrix}$; cela permet de définir un homomorphisme surjectif de groupes de A dans K^* par : $\psi(f) = \lambda$.

Pour $\alpha \in K^*$, on prend pour antécédent l'application linéaire $f : E \to E$ définie par : $f(e_1) = \alpha e_1$, $f(e_{2i}) = \alpha^{-1} e_{2i}$, $f(e_{2i+1}) = e_{2i+1}$ pour $i = 1, 2$.

Soit $f \in A' = Ker\ \psi$: $e_1 \Lambda^2 f(e_2e_3 + e_4e_5) = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$, autrement dit : $\Lambda^2 f(e_2e_3+e_4e_5) = e_2e_3+e_4e_5 + xe_1$ avec $x \in E_2 = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$. Considérons $g : E_2 \to E_2$, l'application linéaire dont la matrice est B : $\Lambda^2 g(e_2e_3 + e_4e_5) = e_2e_3 + e_4e_5$.

L'homomorphisme $\overline{\psi} : A' \to Sp_4(K)$, défini par $\overline{\psi}(f) = B$, est surjectif et de noyau isomorphe à K^4, d'où le résultat.

I-2-6 Remarque

Dans le cas où $dim\ E = 2k+1$, on a un résultat analogue : si $\omega = e_1(e_2e_3 + \dots + e_{2k}e_{2k+1})$ et $A = Aut(\omega)$, on a :

$$1 \to A' \to A \to K^* \to 1$$

$$1 \to K^{2k} \to A' \to Sp_{2k}(K) \to 1$$

et en particulier si $K = IFq$, $|A| = q^{k^2+2k}(q-1)\prod_{i=1}^{k}(q^{2i}-1)$. [6]

I-2-7. Exemples et applications :

I-2-7-1 Soit E un K-ev de dimension finie alors :

1) $d_1(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega$ est divisible par un vecteur

2) $E = Kx \oplus E_2 \Rightarrow \Lambda^p E \approx \Lambda^p E_2 \oplus (\Lambda^{p-1} E_2 \otimes Kx)$.

3) $\omega \in \Lambda^p E \Rightarrow \omega = xu + \omega'$ avec $u \in \Lambda^{p-1} E_2$, $\omega' \in \Lambda^p E_2$ (décomposition unique)

$\Rightarrow \exists x_0 \in E - \{0\} / \omega = x_0 u + \omega_0'$ où: $rg(\omega_0') = d_1(\omega')$.

4) $x\omega = 0 \Leftrightarrow x$ divise $\omega \Leftrightarrow \omega' = 0$

Preuve

1) $d_1(\omega) = 0 \Rightarrow \exists\ \alpha \in G_1(E) / rg(\varpi(\alpha)) = 0$, d'où $\varpi(\alpha) = 0$.

Si $\alpha = K e_1$ on obtient : $\omega = y \wedge e_1$, ce qu'il faut montrer.

2) $E = Kx \oplus E_2 \Rightarrow \Lambda^p E \approx \bigoplus_{k=0}^{p} (\Lambda^k Kx \otimes \Lambda^{p-k} E_2) \approx \Lambda^p E_2 \oplus (\Lambda^{p-1} E_2 \otimes Kx)$

car $\Lambda^k Kx = 0$ si $K \geq 2$

3) De (2) on déduit que tout élément ω de $\Lambda^p E$ s'écrit d'une façon unique sous la forme

$\omega = u \otimes x + \omega' = ux + \omega'$ avec $\omega' \in \Lambda^p E_2$, $u \in \Lambda^{p-1} E_2$ alors $\varpi(\alpha) = \varpi(Kx) = \varpi'(Kx)$.

Soit l'application linéaire f / $f : \Lambda^p(E) \longrightarrow \Lambda^p(E/Kx)$

$$\omega \mapsto f(\omega) = \omega'$$

On remarque que $\Lambda^p E_2$ s'identifie à $\Lambda^p(E/Kx)$ par f, d'où :

$\varpi(Kx) = \omega'$ or $d_1(\omega) = inf(rg(\omega'))$, $Kx \in G_1(E)$

alors : $d_1(\omega) \leq \mathrm{rg}(\omega')$ d'où l'existence de $x_0 \in E\text{-}\{0\}$,

tel que $\omega = ux_0 + \omega_0'$ avec $d_0(\omega_0') = rg(\omega_0') = d_1(\omega)$

4) $x\omega = 0 \Rightarrow \omega = y \wedge x \Rightarrow x$ divise ω car $\omega = xu + \omega'$.

x divise ω, et si $\omega' \neq 0$, $\omega = ux + \omega' = yx$ alors x divise ω',

d'où : $\omega' = y'x = \sum x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_p}$ avec $x_{i_m} \in E_2$ or $E_2 \cap Kx = \{0\}$, et x intervient dans l'écriture de ω' (contradiction), donc $\omega' = 0$.

I-2-7-2 Soit E un K-ev tel que $dim\ E = 3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E, $\omega \in \Lambda^3 E$ -$\{0\}$ avec $\omega = e_1 e_2 e_3$ alors $Aut(\omega) = SL_3(E)$

Preuve :

Soit $f \in Aut(\omega)$ alors $f.\omega = \omega$ c-à-d $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ donc :

$f(e_1 e_2 e_3) = e_1 e_2 e_3$ or $f(e_1 e_2 e_3) = det_f\, e_1 e_2 e_3 = e_1 e_2 e_3$ d'où :

$det_f = 1$ c-à-d $Aut(\omega) = SL_3(E)$.

II - Groupe d'automorphismes de ω où l'invariant $d_1(\omega) = 3$

II - Groupe d'automorphismes de ω où l'invariant $d_1(\omega) = 3$

II -1. Trivecteurs de rang 8 :

Théorème : [7]

> *Sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, il existe treize classes d'équivalence de trivecteurs de rang 8 . Dans une base (e_i) de E, $1 \leq i \leq 13$, un représentant de chaque classe est donné par $\omega_{8,i}$, $1 \leq i \leq 13$, de la table 1.*

Table 1

$\omega_{8,i}$	Notation de Gurevitch	Expression d'un représentant de l'orbite	$d_1(\omega)$
$\omega_{8,1}$	XVI	$e_1(e_2e_3+e_4e_5)+e_6e_7e_8$	3
$\omega_{8,2}$	XI	$e_1(e_2e_3+e_4e_5+e_6e_7)+e_5e_6e_8$	3
$\omega_{8,3}$	XVII	$e_1(e_3e_4+e_5e_6)+e_2(e_3e_5+e_7e_8)$	5
$\omega_{8,4}$	XIII	$e_1(e_2e_3+e_4e_5)+e_6(e_2e_7+e_4e_8)$	5
$\omega_{8,5}$	XIX	$e_1(e_2e_3+e_4e_5)+e_6(e_2e_3+e_7e_8)$	5
$\omega_{8,6}$	XIV	$e_1(e_2e_3+e_4e_5+e_6e_7)+e_8(e_4e_3+e_5e_6)$	5
$\omega_{8,7}$	XII	$e_1(e_2e_3+e_4e_5+e_6e_7)+e_2(e_5e_6+e_7e_8)$	5
$\omega_{8,8}$	XVIII	$e_1(e_2e_8+e_3e_6+e_4e_7)+e_6e_7e_8+e_3e_4e_5$	6
$\omega_{8,9}$	XXI	$e_1\left[e_2(e_3+e_4)+e_5e_6\right]+e_3e_5e_7+e_4e_6e_8$	6
$\omega_{8,10}$	XX	$e_1(e_2e_8+e_6e_7)+e_2e_3e_5+e_3e_4e_6+e_4e_5e_7$	6
$\omega_{8,11}$	XV	$e_1(e_3e_7+e_5e_4+e_8e_2)+e_8(e_4e_3+e_6e_7)+e_2e_4e_6$	6
$\omega_{8,12}$	XXII	$e_1\left[(e_4-e_7)(e_3-e_8)+e_5e_7)\right]+e_2(e_3e_4+e_5e_6)+e_6e_7e_8$	7
$\omega_{8,13}$	XXIII	$e_1\left[e_5(e_3+e_7)+e_8e_4\right]+e_2(e_3e_4+e_5e_6)+e_6e_7e_8$	7

II- 2. Groupe d'automorphismes de ω où l'invariant $d_1(\omega) = 3$

On s'intéresse aux groupes d'automorphismes des trivecteurs (ou les formes trilinéaires alternées) $\omega_{8,i}$, i=1, 2 où l'invariant $d_1(\omega) = 3$.

II-2-1 Le groupe A_1 = Aut($\omega_{8,1}$)

Proposition

Le groupe d'automorphismes A_1 = $Aut(\omega_{8,1})$ est déterminé par les suites exactes suivantes:

$$1 \to SL_3(K) \to A_1 \to Aut(\omega_5) \to 1$$

$$1 \to A_0 \to Aut(\omega_5) \to K^* \to 1$$

$$1 \to K^4 \to A_0 \to Sp_4(K) \to 1$$

où $\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$

Preuve :

Soit $\omega = e_1^*(e_2^*e_3^* + e_4^*e_5^*) + e_6^*e_7^*e_8^*$, déterminons $\bar{R}_{-1}(\omega) = \bar{R}_0(\omega) \cup \bar{R}_1(\omega)$. (2 - 3)

Posons donc :

$$f^a : f^a(x,y) = \omega(a,x,y) \text{ avec } a = \sum_{i=1}^{8} a_i e_i$$

$$\text{alors } \omega^a = a_1e_2^*e_3^* - a_2e_1^*e_3^* + a_3e_1^*e_2^* + a_1e_4^*e_5^* - a_4e_1^*e_5^* + a_5e_1^*e_4^* + a_6e_7^*e_8^* - a_7e_6^*e_8^* + a_8e_6^*e_7^* \quad \text{donc:}$$

$$\omega^a = (a_1e_2^* - a_2e_1^*)e_3^* + (a_1e_4^* - a_4e_1^*)e_5^* + (a_6e_7^* - a_7e_6^*)e_8^* + e_1^*(a_3e_2^* + a_5e_4^*) + a_8e_6^*e_7^*.$$

Calculons : $\gamma_2(\omega^a) = \dfrac{(\omega^a)^2}{2!}$ avec $\gamma_2(\omega^a) = 0$, on trouve :

$$a_1 = 0 \text{ et } \begin{cases} a_2a_6 = 0 \\ a_2a_7 = 0 \\ a_2a_8 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_3a_6 = 0 \\ a_3a_7 = 0 \\ a_3a_8 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_4a_6 = 0 \\ a_4a_7 = 0 \\ a_4a_8 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_5a_6 = 0 \\ a_5a_7 = 0 \\ a_5a_8 = 0 \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} a_2V = 0 \\ a_3V = 0 \\ a_4V = 0 \\ a_5V = 0 \end{cases} \text{ où } V = \begin{pmatrix} a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}$$

si $V \neq 0$ alors $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ donc on a le s.e.v $\langle e_6, e_7, e_8 \rangle$,

si $V = 0$ alors $a_6 = a_7 = a_8 = 0$ donc on a le s.e.v $\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$, enfin $\overline{R}_{\leq 1}(\omega) = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \cup \langle e_6, e_7, e_8 \rangle = V_1 \cup V_2$

Remarquons que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ donc si $f \in A_1 \subset Aut(\omega)$ on a

$f(\overline{R}_{\leq 1}(\omega)) \subset \overline{R}_{\leq 1}(\omega)$ d'où $\{f(V_1) \subset V_1 \; et \; f(V_2) \subset V_2\}$ ou

$\{f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1\}$. (2 – 4)

le cas $\{f(V_1) \subset V_2 \, et \; f(V_2) \subset V_1\}$ est impossible car dans ce cas

$f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5) \in \langle e_6, e_7, e_8 \rangle \;\; et \;\; f(e_6), f(e_7), f(e_8) \in \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$ et $f \in A_1$

c'est à dire $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$, il suffit de considérer le coefficient de $e_1e_2e_3$, on trouve $1 = 0$, d'où

$\{f(V_1) \subset V_1 \;\; et \;\; f(V_2) \subset V_2\}$, et la matrice associée à f prend la forme suivante :

$$M(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0_{1\times 4} & 0_{1\times 3} \\ \alpha_2 & & \\ \alpha_3 & & \\ \alpha_4 & A & 0_{4\times 3} \\ \alpha_5 & & \\ \alpha_6 & & \\ \alpha_7 & 0_{3\times 4} & B \\ \alpha_8 & & \end{pmatrix}$$

Soit $f \in A_1$, $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$, entraîne :

$\Lambda^3 f\,[e_1(e_2e_3 + e_4e_5)] + \Lambda^3 f(e_6e_7e_8) = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$

donc $\Lambda^3 f[\, e_1(\, e_2e_3 + e_4e_5)] + \lambda\, e_6e_7e_8 = e_1\,(\, e_2e_3 + e_4e_5\,) + e_6e_7e_8$

alors c_{678}: $\lambda = 1$ avec $\lambda = detB$ donc: $B \in SL_3\,(K)$

par suite $\Lambda^3 f\,[\, e_1(e_2e_3 + e_4e_5)\,] = e_1(e_2e_3 + e_4e_5\,)$ c'est à dire.

$f(e_1)\, \Lambda^2 f(\, e_2e_3 + e_4e_5) = e_1\,(e_2e_3 + e_4e_5)$, donc:

$f(e_1)e_1(\, e_2e_3 + e_4e_5\,) = 0$ par suite: $(\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_8e_8)e_1e_2e_3 + (\alpha_1e_1 + \ldots + \alpha_8e_8)e_1e_4e_5 = 0$

donnent $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_8 = 0$,

d'où: $f(e_1) = \alpha_1 e_1$ avec $\Lambda^3 f\,[\, e_1(e_2e_3 + e_4e_5)\,] = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$,

on en déduit que $f\,|_{\langle e_1,\, e_2,\, e_3,\, e_4,\, e_5\rangle} \in Aut\,(\omega_5\,)$, ce qui permet de définir un homomorphisme de groupe Ψ:

$$A_1 \xrightarrow{\;\Psi\;} Aut(\omega_5\,)$$

$$f \mapsto \Psi(f) = f|\langle e_1, \ldots, e_5\rangle$$

Ψ est évidemment surjectif, car il suffit de prendre $B = Id_3$, d'autre part:

$Ker(\Psi) = \{f / f \in A_1 \text{ et } \alpha_1 = 1, A = Id_4\}$,

or $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$, entraîne $Ker(\Psi) \approx SL_3(K)$,

d'où l'exactitude de la suite suivante :

$$1 \to SL_3(K) \xrightarrow{\Psi} A_1 \to Aut(\omega_5) \to 1 \quad (*)$$

et comme $Aut(\omega_5)$ vérifie les suites exactes: (2-5)

$$1 \to A_0 \to Aut(\omega_5) \to K^* \to 1 \qquad (**)$$

$$1 \to K^4 \to A_0 \to Sp_4(K) \to 1 \qquad (***)$$

alors $A_1 = Aut(\omega_{8,1})$ est défini par (*) , (**) et (***) .

II-2-1. Le groupe $A_2 = \mathrm{Aut}(\omega_{8,2})$

Proposition

Le groupe d'automorphismes $A_2 = Aut(\omega_{8,2})$ est déterminé par les suites exactes suivantes:

$$1 \to A_2' \to A_2 \to K^* \to 1$$

$$1 \to A_2'' \to A_2' \to SL(K) \to 1$$

$$1 \to A_2 \to A_2 \to K \to 1$$

$$1 \to K^{16} \to A_2''' \to SL_2(K) \to 1$$

Preuve :

Déterminons d'abord la partie stable $R_3(\omega) = \{x \in E \;/\; \varpi(x) \text{ est de rang } 3\}$, où: $\omega = \omega_{8,2}$, remarquons que $e_1 \in R_3(\omega)$.

Soit: $x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$ donc si $\alpha_1 \neq 0$, on a $e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_8 e_8$.

alors: $\varpi(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_8 e_8)(e_2 e_3 + e_4 e_5 + e_6 e_7) + e_5 e_6 e_8$,

par suite: $\varpi(x) = \lambda_2 \bar{e}_2 \bar{e}_4 \bar{e}_5 + \lambda_2 \bar{e}_2 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_3 \bar{e}_3 \bar{e}_4 \bar{e}_5 + \lambda_3 \bar{e}_3 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_4 \bar{e}_4 \bar{e}_2 \bar{e}_3$

$$+ \lambda_4 \bar{e}_4 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_5 \bar{e}_5 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \lambda_5 \bar{e}_5 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_6 \bar{e}_6 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \lambda_6 \bar{e}_6 \bar{e}_4 \bar{e}_5$$

$$+ \lambda_7 \bar{e}_7 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \lambda_7 \bar{e}_7 \bar{e}_4 \bar{e}_5 + \bar{e}_5 \bar{e}_6 \bar{e}_8$$

$[rang(\varpi(x)) = 3] \Leftrightarrow [\varpi(x) \text{ est décomposable}]$.

Soient les relations :

$$\sum_{i\in J-H} \varepsilon_{i,J,H}\, a_{J-\{i\}}\, a_{H\cup\{i\}} = 0. \quad (*)$$

où $\varepsilon_{i,J,H} = \pm 1$

les relations (*) sont appelées les relations de Grassmann : Ce sont donc des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\varpi(x)$ soit décomposable. ([1], [2])

Posons $J=\{2,4,5,6\}$; $H=\{2,7\}$ donc $J-H=\{4,5,6\}$. Par suite (*) donnent:

$\varepsilon_4 a_{256}a_{247} + \varepsilon_5 a_{246}a_{257} + \varepsilon_6 a_{245}a_{267} = 0$.

donc $\varepsilon_4(0)+\varepsilon_5(0)+\varepsilon_6(\lambda_2)(\lambda_2) = 0$ d'où $\lambda_2^2 = 0$ c'est à dire $\lambda_2 = 0$.

Posons: $J=\{3,4,5,6\}$; $H=\{3,7\}$ donc $J-H=\{4,5,6\}$ parsuite (*) donnent:

$\varepsilon_4 a_{356}a_{347} + \varepsilon_5 a_{346}a_{357} + \varepsilon_6 a_{345}a_{367} = 0$,

alors: $\varepsilon_4(0)+\varepsilon_5(0)+\varepsilon_6(\lambda_3)(\lambda_3) = 0$ d'où: $\lambda_3 = 0$.

posons $J=\{2,3,4,6\}$; $H=\{4,7\}$ donc: $J-H=\{2,3,6\}$ parsuite (*) donne:

$\varepsilon_2 a_{346}a_{247} + \varepsilon_3 a_{246}a_{347} + \varepsilon_6 a_{234}a_{467} = 0$.

alors: $\varepsilon_6(\lambda_4)(\lambda_4) = 0$, d'où: $\lambda_4 = 0$.

posons: $J=\{2,3,5,6\}$; $H=\{5,7\}$ donc: $J-H=\{2,3,6\}$ parsuite (*) donne:

$\varepsilon_2 a_{356}a_{257} + \varepsilon_3 a_{256}a_{357} + \varepsilon_6 a_{235}a_{567} = 0$.

alors: $\varepsilon_6(\lambda_5)(\lambda_5) = 0$, d'où: $\lambda_5 = 0$,

posons: $J=\{2,3,4,6\}$; $H=\{5,6\}$ donc: $J-H=\{2,3,4\}$ parsuite:

$\varepsilon_2 a_{346}a_{256} + \varepsilon_3 a_{246}a_{356} + \varepsilon_4 a_{236}a_{456} = 0$ alors: $\varepsilon_4(\lambda_6)(\lambda_6) = 0$ d'où: $\lambda_6 = 0$.

posons: $J=\{2,3,4,7\}$; $H=\{5,7\}$ donc: $J-H=\{2,3,4\}$,

alors: $\varepsilon_2 a_{347}a_{257} + \varepsilon_3 a_{247}a_{357} + \varepsilon_4 a_{237}a_{457} = 0$ d'où: $\lambda_7 = 0$.

posons: $J=\{2,3,4,8\}$; $H=\{5,8\}$ donc: $J-H=\{2,3,4\}$ alors:

$\varepsilon_2 a_{348}a_{258} + \varepsilon_3 a_{248}a_{358} + \varepsilon_4 a_{238}a_{458} = 0$ d'où: $\lambda_8 = 0$

on en déduit que: $\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_8=0$, c'est à dire $e_1 = \lambda_1 x$ où: $x = \alpha_1 e_1$, on obtient:

$R_3(\omega) = \langle e_1 \rangle$

De la permutation

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6e_7	e_8
e_1	e_5	e_6	e_8	e_2	e_3e_7	e_4

$\omega_{8,2}$ devient $\omega = e_1(e_5e_6 + e_8e_2 + e_3e_7) + e_2e_3e_4$.

Comme $R_3(\omega) = \langle e_1 \rangle$ est une partie stable donc on peut définir un homomorphisme de groupes π :

$$A_2 \xrightarrow{\pi} K^*$$
$$f \mapsto \pi(f) = \lambda \quad \text{où } f(e_1) = \lambda e_1.$$

π est surjectif en effet pour $\lambda \in K^*$; il existe $f_0 \in A_2$ définie par:

$f_0(e_1) = \lambda e_1,\ f_0(e_2) = \lambda^{-1} e_2,\ f_0(e_3) = e_3,\ f_0(e_4) = \lambda e_4,$
$f_0(e_5) = e_5, f_0(e_6) = \lambda^{-1} e_6,\ f_0(e_7) = \lambda e_7,\ f_0(e_8) = e_8$

d'où l'exactitude de la suite $1 \to A_2' \to A_2 \xrightarrow{\pi} K^* \to 1$

où $A_2' = Ker\pi$. Soit $f \in A_2'$ alors $\omega = e_1(e_5e_6 + e_8e_2 + e_3e_7) + e_2e_3e_4$ donc $e_1\omega = e_1e_2e_3e_4$ parsuite $\Lambda^4 f(e_1\omega) = f(e_1)\Lambda^3 f(\omega) = e_1\omega = \Lambda^4 f(e_1e_2e_3e_4)$, c'est à dire: $\Lambda^4 f(e_1e_2e_3e_4) = e_1e_2e_3e_4$ d'où le s.e.v $\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ est stable par f. Dans ce cas la matrice de f est de la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \\ & & & & x_5 & y_5 & z_5 & t_5 \\ & & 0_{4\times 4} & & x_6 & y_6 & z_6 & t_6 \\ & & & & x_7 & y_7 & z_7 & t_7 \\ & & & & x_8 & y_8 & z_8 & t_8 \end{pmatrix}$$

l'égalité $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ donne $e_1[(x_1e_1 + \ldots + x_8e_8)(y_1e_1 + \ldots + y_8e_8)$
$+ (t_1e_1 + \ldots + t_8e_8)(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) + (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4)(z_1e_1 + \ldots + z_8e_8)\ ] +$
$+ (a_1e_1 + \ldots + a_4e_4)(b_1e_1 + \ldots + b_4e_4)(c_1e_1 + \ldots + c_4e_4) = e_1e_5e_6 + e_1e_8e_2 + e_1e_3e_7 + e_2e_3e_4$

donc: $c_{156}: \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} = 1$ d'où $\begin{pmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$.

$\begin{cases} c_{157}: & x_5y_7 - x_7y_5 = 0 \\ c_{167}: & x_6y_7 - x_7y_6 = 0 \end{cases}$ donnent $x_7 = y_7 = 0$

et

$\begin{cases} c_{158}: & x_5y_8 - x_8y_5 = 0 \\ c_{168}: & x_6y_8 - x_8y_6 = 0 \end{cases}$ donnent $x_8 = y_8 = 0$

ceci nous permet de définir l'homomorphisme t :

$$A_2' \xrightarrow{t} SL_2(\mathcal{K})$$
$$f \to t(f) = \begin{pmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix}$$

t est surjectif pour $\begin{pmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{K})$, il existe $f_1 \in A_2'$ définie par :

$f_1(e_1) = e_1,\ f_1(e_2) = e_2,\ f_1(e_3) = e_3,\ f_1(e_4) = e_4,$
$f_1(e_5) = x_5e_5 + x_6e_6,\ f_1(e_6) = y_5e_5 + y_6e_6,\ f_1(e_7) = e_7,\ f_1(e_8) = e_8$

on en déduit que la suite suivante est exacte :

$1 \to A_2'' \to A_2' \xrightarrow{t} SL_2(\mathcal{K}) \to 1$

où: $A_2'' = Ker(t)$,

soit $f \in A_2''$ donc: $x_5 = y_6 = 1$ et $x_6 = y_5 = 0$, et comme $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ on obtient

$$\begin{aligned} &e_1\big[(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + e_5)(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + e_6) + \\ &(t_1e_1 + \ldots + t_8e_8)(a_1e_1 + \ldots + a_4e_4) + (b_1e_1 + \ldots + b_4e_4)(z_1e_1 + \ldots + z_8e_8)\big] + \\ &+ (a_1e_1 + \ldots + a_4e_4)(b_1e_1 + \ldots + b_4e_4)(c_1e_1 + \ldots + c_4e_4) = e_1e_5e_6 + e_1e_8e_2 + e_1e_3e_7 + e_2e_3e_4 \end{aligned}$$

donc on a:

$$c_{234}: \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 1 \text{ et (I) } \begin{cases} c_{182}: t_8a_2 - b_2z_8 = 1 \\ c_{183}: t_8a_3 - b_3z_8 = 0 \\ c_{184}: t_8a_4 - b_4z_8 = 0 \end{cases} \text{ et (II) } \begin{cases} c_{137}: t_7a_3 - b_3z_7 = 1 \\ c_{127}: t_7a_2 - b_2z_7 = 0 \\ c_{147}: t_7a_4 - b_4z_7 = 0 \end{cases}$$

Le système (I) donne: $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0$, ainsi que le système (II) donne: $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0$

on obtient (III) $\begin{cases} a_2b_4 - b_2a_4 = 0 \\ a_3b_4 - b_3a_4 = 0 \end{cases}$

si: $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ alors:

$$c_{234}: \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_4 - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} c_3 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} c_2 = 1$$

c-à-d $0 = 1$ (absurde), d'où $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$

Le système (III) donne $a_4 = b_4 = 0$ et c_{234} dévient $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} . c_4 = 1$. Ce qui permet de définir un homomorphisme η:

$$A''_2 \xrightarrow{\eta} K^*$$
$$f \longrightarrow \eta(f) = c_4$$

η est surjectif, en effet l'application linéaire f_2 définie par :

$f_2(e_1) = e_1, f_2(e_2) = e_2,\ f_2(e_3) = c_4^{-1}e_3;\ f_2(e_4) = c_4 e_4,\ f_2(e_5) = e_5,\ f_2(e_6) = e_6$
$f_2(e_7) = c_4 e_7,\ f_2(e_8) = e_8$ est l'antécédant de c_4

d'où l'exactitude de la suite suivante :

$1 \to A'''_2 \to A''_2 \xrightarrow{\eta} K^* \to 1$ où $A'''_2 = Ker(\eta)$,

soit $f \in A'''_2$ donc $c_4 = 1$, or c_{234} donnent $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 1$ c-à-d $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$;

ceci nous permet de définir un homomorphisme P:

$$A'''_2 \xrightarrow{P} SL_2(K)$$
$$f \mapsto P(f) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

P est surjectif en effet pour :

$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$, il existe $f_3 \in A'''_2$ définie par: $f_3(e_1) = e_1, f_3(e_2) = a_2e_2 + a_3e_3$,

$f_3(e_3) = b_2e_2 + b_3e_3, f_3(e_4) = e_4, f_3(e_5) = e_5, f_3(e_6) = e_6, f_3(e_7) = a_2e_7 + a_3e_8$,

$f_3(e_8) = b_2e_7 + b_3e_8$.

Soit $f \in Ker(P)$, donc $a_2 = b_3 = 1$ et $a_3 = b_2 = 0$ et comme $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ alors:

$e_1\big[(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + e_5)(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + e_6) + (t_1e_1 + .. + t_8e_8) \times$

$\times (a_1e_1 + e_2) + (b_1e_1 + e_3)(g_1e_1 + ... + g_8e_8)\big] + (a_1e_1 + e_2)(b_1e_1 + e_3)(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + e_4)$

$= e_1e_5e_6 + e_1e_8e_2 + e_1e_3e_7 + e_2e_3e_4$ donc $c_{137}: z_7 = 1, c_{127}: t_7 = 0, c_{182}: t_8 = 1, c_{183}: z_8 = 0$,

$c_{145}: y_4 = 0$, $c_{146}: x_4 = 0$, $c_{142}: t_4 + b_1 = 0$ alors $t_4 = -b_1, c_{134}: z_4 + a_1 = 0$ alors $z_4 = -a_1$,

$c_{125}: -y_2 - t_5 = 0$ alors $t_5 = -y_2$, $c_{126}: x_2 - t_6 = 0$ alors $t_6 = x_2$, $c_{135}: -y_3 + z_5 = 0$ alors

$z_5 = y_3$, $c_{136}: x_3 + z_6 = 0$ alors $z_6 = -x_3$,

$c_{123}: \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - t_3 - z_2 + c_1 - b_1c_3 - a_1c_2 = 0$ donc $t_3 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 + c_1 - b_1c_3 - a_1c_2.(**)$ enfin la matrice associée à f prend la forme :

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 & x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où t_3 est donné par (**), on obtient $Ker\ P \approx K^{16}$ d'où l'exactitude de la suite suivante :

$$1 \to K^{16} \to A'''_2 \xrightarrow{P} SL_2(K) \to 1.$$

III - Groupe d'automorphismes de ω où l'invariant $d_1(\omega) = 5$

III - Groupe d'automorphismes de ω où l'invariant $d_1(\omega) = 5$

On s'intéresse aux groupes d'automorphismes des trivecteurs (ou les formes trilinéaires alternées) $\omega_{8,i\ 3\le i\le 7}$ de rang 8 sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque avec $d_1(\omega)=5$, et pour cela on a les propositions suivantes :

III -1. Le groupe $A_3 = Aut(\omega_{8,3})$

Proposition

Le groupe d'automorphismes $A_3 = Aut(\omega_{8,3})$ est déterminé par les suites exactes suivantes :

$$1 \to A'_3 \to A_3 \to K^* \times K^* \to 1$$
$$1 \to A''_3 \to A'_3 \to SL_2(K) \to 1$$
$$1 \to K^9 \to A''_3 \to SL_2(K) \to 1$$

Preuve :

Déterminons la partie stable $R_5(\omega) = \{x \in E,\ \varpi(x) \text{ est de rang } 5\}$, où: $\omega=\omega_{8,3}$, on remarque que $e_1, e_2 \in R_5(\omega)$.

Pour dire que $rang\ (\varpi(x)) = 5$, il suffit de vérifier que l'application $\tilde{f}$ définie par: $E/\langle x\rangle \xrightarrow{\tilde{f}} \Lambda^4\left(E/\langle x\rangle\right)$ n'est pas injective: $\tilde{f}(\overline{x'}) = \overline{x'}.\overline{\omega(x)}$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i;$ si $\alpha_1 \neq 0$ on écrit $e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + ...+ \lambda_8 e_8$

parsuite: $\varpi(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + ...+ \lambda_8 e_8)(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$

donc :

$$\varpi(x) = \lambda_2 \overline{e_2e_3e_4} + \lambda_2 \overline{e_2e_5e_6} + \lambda_5 \overline{e_5e_3e_4} + \lambda_6 \overline{e_6e_3e_4} + \lambda_7 \overline{e_7e_3e_4} + \lambda_7 \overline{e_7e_5e_6} + \lambda_8 \overline{e_8e_3e_4}$$
$$+ \lambda_8 \overline{e_8e_5e_6} + \lambda_3 \overline{e_3e_5e_6} + \lambda_4 \overline{e_4e_5e_6} + \overline{e_2e_3e_5} + \overline{e_2e_7e_8}.$$

Utilisons l'application $\tilde{f}$, on obtient le tableau suivant: (pour alléger l'écriture on écrit *ijkl* au lieu de $\overline{e_ie_je_ke_l}$)

$\tilde{f}(\overline{e_2})$	$\tilde{f}(\overline{e_3})$	$\tilde{f}(\overline{e_4})$	$\tilde{f}(\overline{e_5})$	$\tilde{f}(\overline{e_6})$	$\tilde{f}(\overline{e_7})$	$\tilde{f}(\overline{e_8})$	$\overline{e_ie_je_ke_c}$
λ_5		1	$-\lambda_2$				2345
λ_6				$-\lambda_2$			2346
λ_7					$-\lambda_2$		2347
λ_8						$-\lambda_2$	2348
λ_3	$-\lambda_2$						2356
					-1		2357
						-1	2358
							2367
							2368
	-1						2378
λ_4		$-\lambda_2$					2456
							2457
							2458
							2467
							2468
		-1					2478
λ_7					$-\lambda_2$		2567
λ_8						$-\lambda_2$	2568
			-1				2578
				-1			2678
	λ_4	$-\lambda_3$	λ_6	$-\lambda_5$			3456
			λ_7		$-\lambda_5$		3457
			λ_8			$-\lambda_5$	3458
				λ_7	$-\lambda_6$		3467
				λ_8		$-\lambda_6$	3468
					λ_8	$-\lambda_7$	3478
	λ_7				$-\lambda_3$		3567
	λ_8					$-\lambda_3$	3568
							3578
							3678
		λ_7			$-\lambda_4$		4567
		λ_8				$-\lambda_4$	4568
							4578
							4678
					λ_8	$-\lambda_7$	5678

Donc $\tilde{f}$ n'est pas injective, s'il existe $\overline{x'} \neq 0$; $\overline{x'} = \sum_{i=2}^{8} \delta_i e_i$ et $\overline{x'}.\varpi(x) = 0$, d'où:

$$\begin{cases}\delta_7(-1)=0\\ \delta_8(-1)=0\\ \delta_3(-1)=0\\ \delta_4(-1)=0\\ \delta_5(-1)=0\\ \delta_6(-1)=0\end{cases}\quad \text{alors } \delta_3=\delta_4=\delta_5=\delta_6=\delta_7=\delta_8=0$$

et :

$$\begin{cases}\delta_2(\lambda_5)=0\\ \delta_2(\lambda_6)=0\\ \delta_2(\lambda_7)=0\\ \delta_2(\lambda_8)=0\\ \delta_2(\lambda_3)=0\\ \delta_2(\lambda_4)=0\end{cases}\quad \begin{array}{l}\text{alors si } \delta_2=0\ ,\ \overline{x'}=0\ (\text{contradiction car } \overline{x'}\neq 0)\\ \text{par suite } \delta_2\neq 0 \text{ donc } \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=0\end{array}$$

d'où $e_1=\lambda_1 x+\lambda_2 e_2$ ou bien $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$ avec $\alpha_1\neq 0$, dans ce cas :

$\varpi(x)=\lambda_2\overline{e_2e_3e_4}+\lambda_2\overline{e_2e_5e_6}+\overline{e_2e_3e_5}+\overline{e_2e_7e_8}$ c-à-d :

$\varpi(x)=\overline{e_2}\left[\overline{e_3}(\lambda_2\overline{e_4}+\overline{e_5})+\lambda_2\overline{e_5e_6}+\overline{e_7e_8}\right]$, donc $\overline{\omega(x)}=\overline{e_2}\,u$

où $u=\overline{e_3}(\lambda_2\overline{e_4}+\overline{e_5})+\lambda_2\overline{e_5e_6}+\overline{e_7e_8}$, calculons $\gamma_2(u)=\dfrac{u^2}{2!}=\dfrac{1}{2}u^2$ donc :

$$\gamma_2(u)=\frac{1}{2}\left[\lambda_2^2\overline{e_3e_4e_5e_6}+\lambda_2\overline{e_3e_4e_7e_8}+\overline{e_3e_5e_7e_8}+\lambda_2\overline{e_5e_6e_7e_8}\right].$$

remarquons que $\gamma_2(u)\neq 0$, pour tout $\lambda_2\in K$, par suite $rang(u)\neq 2$, on calcule $\gamma_3(u)=\dfrac{u^3}{3!}$,

on trouve:

$$\gamma_3(u)=\frac{1}{6}\left[\lambda_2^2\overline{e_3e_4e_5e_6e_7e_8}+\lambda_2^2\overline{e_5e_6e_3e_4e_7e_8}+\lambda_2^2\overline{e_7e_8e_3e_4e_5e_6}\right], \text{donc :}$$

$$\begin{cases}\gamma_2(u)\neq 0\\ et\\ \gamma_3(u)=0\end{cases}\Leftrightarrow rang(u)=4,\ \text{d'où } \lambda_2=0$$

par suite $e_1=\lambda_1 x$ ou $x=\alpha_1 e_1$ et $rang(\overline{\omega(x)})=5$ et la même chose pour α_2, c'est-à-dire si $\alpha_2\neq 0$, on obtient $x=\alpha_2 e_2$ et $rang(\varpi(x))=5$, on en déduit:

$R_5(\omega)=\langle e_1\rangle\cup\langle e_2\rangle=V_1\cup V_2$ où $V_1=\langle e_1\rangle$ et $V_2=\langle e_2\rangle$ et $V_1\cap V_2=\{0\}$

Soit $f \in A_3 = Aut(\omega)$ donc $f(R_5(\omega)) \subset R_5(\omega)$ et on a $\{f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2\}$ ou $\{f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1\}$.

Le cas $\{f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1\}$ est absurde car dans ce cas $f(e_1) = \lambda e_2$ et

$f(e_2) = \beta e_1$ par suite $\omega = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$, posons $u = e_3e_4 + e_5e_6$

et $V = e_3e_5 + e_7e_8$, or $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ entraine

$$\begin{cases} \lambda e_1e_2\Lambda^2 f(u) = e_1e_2V = \lambda e_1e_2\left[f(e_3)f(e_4) + f(e_5)f(e_6)\right] & (*) \\ \beta e_1e_2\Lambda^2 f(V) = e_2e_1u = \beta e_2e_1\left[f(e_3)f(e_5) + f(e_7)f(e_8)\right] & (**) \end{cases}$$

d'où le support des deux membres de (*) est :

$\langle e_1, e_2, e_3, e_5, e_7, e_8\rangle = \langle e_1, e_2, f(e_3), f(e_4), f(e_5), f(e_6)\rangle$

et de meme pour (**) c-à-d:

$\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle = \langle e_1, e_2, f(e_3), f(e_5), f(e_7), f(e_8)\rangle$

donc la matrice de f prend la forme suivante :

$$M(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \delta_1 & \gamma_1 & a_1 & b_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \beta & \delta_2 & \gamma_2 & a_2 & b_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \delta_3 & \gamma_3 & a_3 & b_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & \beta_4 \\ 0 & 0 & \delta_5 & \gamma_5 & a_5 & b_5 & \alpha_5 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_7 & 0 & b_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_8 & 0 & b_8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le coefficient de $e_2e_7e_8$ dans l'égalité $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ implique que 1=0 d'où la contradiction.

On obtient $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$, ceci permet de définir la suite exacte :

$$1 \to A'_3 \to A_3 \xrightarrow{\pi} K^* \times K^* \to 1$$

où $\pi(f) = (a,b)$ si $f(e_1) = ae_1$ et $f(e_2) = be_2$

π est surjective, en effet l'application linéaire f définie par:

$f(e_1) = ae_1, f(e_2) = be_2, f(e_3) = e_3, f(e_4) = a^{-1}e_4$

$f(e_5) = b^{-1}e_5, f(e_6) = a^{-1}be_6, f(e_7) = e_7, f(e_8) = b^{-1}e_8$

est l'antécédent du couple (a , b).

Soit $f \in A_3{}' = Ker(\pi)$, donc: $a = b = 1$, par suite l'égalité $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ entraîne:

$e_2e_1\Lambda^2 f(e_3e_4+e_5e_6)=e_2e_1(e_3e_4+e_5e_6)$

d'où $\langle e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\rangle=\langle e_1,e_2,f(e_3),f(e_4),f(e_5),f(e_6)\rangle$

par suite la matrice associée à f est de la forme :

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 & \delta_1 & \lambda_1 & \mu_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 & \delta_2 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & 0 & & & & & \lambda_3 & \mu_3 \\ 0 & 0 & & B & & & \lambda_4 & \mu_4 \\ 0 & 0 & & & & & \lambda_5 & \mu_5 \\ 0 & 0 & & & & & \lambda_6 & \mu_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & \mu_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & \mu_8 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas: $\det M(f)=\det B \times \begin{vmatrix} \lambda_7 & \gamma_7 \\ \lambda_8 & \gamma_8 \end{vmatrix} \neq 0$, donc $\det B\neq 0$, or $\Lambda^3 f(\omega)=\omega$ entraine:

$e_1\left[(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_6e_6)(\gamma_1e_1+\ldots+\gamma_6e_6)+(\beta_1e_1+\ldots+\beta_6e_6)(\delta_1e_1+\ldots.+\delta_6e_6)\right]$

$+e_2\left[(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_6e_6)(\beta_1e_1+\ldots+\beta_6e_6)+(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_8e_8)(\mu_1e_1+\ldots+\mu_8e_8)\right]$

$=e_1e_3e_4+e_1e_5e_6+e_2e_3e_5+e_2e_7e_8.$

Donc: $c_{278}:\begin{vmatrix} \lambda_7 & \mu_7 \\ \lambda_8 & \mu_8 \end{vmatrix}=1$, alors $\begin{pmatrix} \lambda_7 & \mu_7 \\ \lambda_8 & \mu_8 \end{pmatrix}\in SL_2(K).$

Ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes ψ:

$A'_3 \xrightarrow{\psi} SL_2(K)$

$f\mapsto \psi(f)=\begin{pmatrix} \lambda_7 & \mu_7 \\ \lambda_8 & \mu_8 \end{pmatrix}$

ψ est surjectf eneffet pour $\begin{pmatrix} \lambda_7 & \mu_7 \\ \lambda_8 & \mu_8 \end{pmatrix}\in SL_2(K)$, il existe $f\in A'_3$ définie par:

$f(e_1)=e_1,\ f(e_2)=e_2,\ f(e_3)=e_3,\ f(e_4)=e_4,\ f(e_5)=e_5,\ f(e_6)=e_6,$

$f(e_7)=\lambda_7e_7+\lambda_8e_8, f(e_8)=\mu_7e_7+\mu_8e_8.$

d'où l'exactitude de la suite suivante :

$1\to A''_3\to A'_3 \xrightarrow{\psi} SL_2(K)\to 1$, où $A''_3=Ker\ \psi$.

Soit $f\in A''_3$ donc $\lambda_7=\mu_8=1$ *et* $\lambda_8=\mu_7=0$ par suite $\Lambda^3 f(\omega)=\omega$ entraine

$$e_1\left[(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_6e_6)(\gamma_1e_1+\ldots+\gamma_6e_6)+(\beta_1e_1+\ldots+\beta_6e_6)(\delta_1e_1+\ldots+\delta_6e_6)\right]+$$

$$+e_2\left[(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_6e_6)(\beta_1e_1+\ldots+\beta_6e_6)+(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_6e_6+e_7)(\mu_1e_1+\ldots+\mu_6e_6+e_8)\right]$$

$=e_1e_3e_4+e_1e_5e_6+e_2e_3e_5+e_2e_7e_8$ donc:

$c_{217}: \mu_1=0; c_{237}: \mu_3=0; c_{247}: \mu_4=0; c_{257}: \mu_5=0; c_{267}: \mu_6=0; c_{218}: \lambda_1=0;$

$c_{238}: \lambda_3=0, c_{248}: \lambda_4=0; c_{258}: \lambda_5=0, c_{268}: \lambda_6=0$

et $c_{235}: \begin{vmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \alpha_5 & \beta_5\end{vmatrix}=1$ alors $\begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \alpha_5 & \beta_5\end{pmatrix}\in SL_2(K)$

et

$$\begin{cases} c_{236}: \alpha_3\beta_6-\alpha_6\beta_3=0\\ c_{256}: \alpha_5\beta_6-\alpha_6\beta_5=0\end{cases} \text{ alors } \alpha_6=\beta_6=0$$

et

$$\begin{cases} c_{234}: \alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3=0\\ c_{254}: \alpha_5\beta_4-\alpha_4\beta_5=0\end{cases} \text{ alors } \alpha_4=\beta_4=0$$

dans la base $\{e_1,e_2,e_3,e_5=e'_4,e_4=e'_5,e_6,e_7,e_8\}$, on peut définir un homomorphisme τ:

$$A''_3 \xrightarrow{\tau} SL_2(K)$$
$$f\mapsto \tau(f)=\begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \alpha_5 & \beta_5\end{pmatrix}$$

τ est surjectif en effet pour $\begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \alpha_5 & \beta_5\end{pmatrix}\in SL_2(K)$, il existe $f\in A''_3$ définie par:

$f(e_1)=e_1, f(e_2)=e_2, f(e_3)=\alpha_3e_3+\alpha_5e_5, f(e_4)=\beta_5e_4-\beta_3e_6,$

$f(e_5)=\beta_3e_3+\beta_5e_5, f(e_6)=-\alpha_5e_4+\alpha_3e_6, f(e_7)=e_7, f(e_8)=e_8$

d'où l'exactitude de la suite suivante :

$1\to A'''_3\to A''_3\xrightarrow{\tau} SL_2(K)\to 1$, où $A'''_3=Ker\ \tau$

Soit $f\in A'''_3$ donc $\alpha_3=\beta_5=1$ et $\alpha_5=\beta_3=0$ par suite $\Lambda^3f(\omega)=\omega$ entraine:

$$e_1\left[(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+e_3)(\gamma_1e_1+\ldots+\gamma_6e_6)+(\beta_1e_1+\beta_2e_2+e_5)(\delta_1e_1+\ldots+\delta_6e_6)\right]+$$

$$+e_2\left[(\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+e_3)(\beta_1e_1+\beta_2e_2+e_5)+(\lambda_2e_2+e_7)(\mu_2e_2+e_8)\right]=$$

$e_1e_3e_4+e_1e_5e_6+e_2e_3e_5+e_2e_7e_8$. Donc:

$c_{134}: \gamma_4=1; c_{156}: \delta_6=1; c_{145}: \delta_4=0; c_{136}: \gamma_6=0$

$$c_{124}: \alpha_2 = 0;\ c_{126}: \beta_2 = 0 \text{ et } \begin{cases} c_{125}: -\delta_2 - \alpha_1 = 0 \\ c_{123}: -\gamma_2 + \beta_1 = 0 \\ c_{135}: \gamma_5 - \delta_3 = 0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} \delta_2 = -\alpha_1 \\ \gamma_2 = \beta_1 \\ \delta_3 = \gamma_5 \end{cases}$$

Enfin la matrice de f est de la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \beta_1 & \alpha_1 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma_3 & \gamma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_5 & \delta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $A'''_3 \cong K^9$,

on obtient la suite exacte :

$$1 \to K^9 \to A''_3 \xrightarrow{\tau} SL_2(K) \to 1$$

III-2. Le groupe $A_4 = Aut(\omega_{8,4})$

Proposition

Le groupe d'automorphismes $A_4 = Aut(\omega_{8,4})$ est déterminé par les suites exactes suivantes :

$$1 \to A'_4 \to A_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 1$$
$$1 \to A''_4 \to A'_4 \to K^* \times K^* \to 1$$
$$1 \to K^{12} \to A''_4 \to SL_2(K) \times SL_2(K) \to 1$$

Preuve :

Soit le changement de base:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_6	e_2	e_4	e_7	e_3	e_5	e_8

Donc : $\omega_{8,4} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$ devient $\omega = e_1(e_3e_6 + e_4e_7) + e_2(e_3e_5 + e_4e_8)$

Déterminons la partie stable $R_5(\omega) = \{x \in E \quad \omega(x) \text{ est de rang } 5\}$, pour cela on remarque que $e_1, e_2, e_3, e_4 \in R_5(\omega)$

Soit $x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$, si $\alpha_3 \neq 0$, on ecrit $e_3 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 x + \lambda_4 e_4 + \ldots + \lambda_8 e_8$, par suite:

$$\overline{\omega}(x) = \overline{e_1}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 x + \lambda_4 e_4 + \ldots + \lambda_8 e_8)\overline{e_6} + \overline{e_1 e_4 e_7} + \overline{e_2}(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 x + \lambda_4 e_4 + \ldots + \lambda_8 e_8)\overline{e_5} + \overline{e_2 e_4 e_8}.$$

donc $$\overline{\omega}(x) = \lambda_2 \overline{e_1 e_2 e_6} + \lambda_4 \overline{e_1 e_4 e_6} + \lambda_5 \overline{e_1 e_5 e_6} + \lambda_7 \overline{e_1 e_7 e_6} + \lambda_8 \overline{e_1 e_8 e_6} + \overline{e_1 e_4 e_7} + \lambda_1 \overline{e_2 e_1 e_5} + \lambda_4 \overline{e_2 e_4 e_5} + \lambda_6 \overline{e_2 e_6 e_5} + \lambda_7 \overline{e_2 e_7 e_5} + \lambda_8 \overline{e_2 e_8 e_5} + \overline{e_2 e_4 e_8}$$

Donc pour dire que $rang(\overline{\omega}(x)) = 5$, il suffit de vérifier que l'application $\widetilde{f}$ n'est pas injective, par suite on a le tableau suivant :

$\tilde{f}(\overline{e_1})$	$\tilde{f}(\overline{e_2})$	$\tilde{f}(\overline{e_4})$	$\tilde{f}(\overline{e_5})$	$\tilde{f}(\overline{e_6})$	$\tilde{f}(\overline{e_7})$	$\tilde{f}(\overline{e_8})$	$\overline{e_ie_je_ke_l}$
λ_4		$-\lambda_1$					*1245*
	$-\lambda_4$	λ_2					*1246*
	-1						*1247*
1							*1248*
$-\lambda_6$	$-\lambda_5$		λ_2	λ_1			*1256*
$-\lambda_7$							*1257*
						λ_1	*1258*
$-\lambda_8$	λ_7				$-\lambda_2$		*1267*
	λ_8					$-\lambda_2$	*1268*
							1278
							4567
							4568
							4678
							4578
							5678
		λ_6		$-\lambda_4$			*2456*
		λ_7			$-\lambda_4$		*2457*
		λ_8	1			$-\lambda_4$	*2458*
							2467
				1			*2468*
					1		*2478*
				$-\lambda_7$	λ_6		*2567*
				$-\lambda_8$		λ_6	*2568*
					$-\lambda_8$	λ_7	*2578*
							2678
		$-\lambda_5$	λ_4				*1456*
			1				*1457*
							1458
		λ_7		1	$-\lambda_4$		*1467*
		λ_8				$-\lambda_4$	*1468*
						-1	*1478*
			λ_7		$-\lambda_5$		*1567*
			λ_8			$-\lambda_5$	*1568*
							1578
					$-\lambda_8$	λ_7	*1678*

Donc $\tilde{f}$ n'est pas injective, s'il existe $\overline{x'} \neq 0 \,;\, \overline{x'} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq 3}}^{8} \delta_i e_i$, et $\overline{x'}.\overline{\omega}(x) = 0$, d'où:

$\delta_1 = \delta_2 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = 0$ et

$$\begin{cases} \delta_4(\lambda_2)=0 \\ \delta_4(-\lambda_1)=0 \\ \delta_4(\lambda_6)=0 \\ \delta_4(\lambda_7)=0 \\ \delta_4(\lambda_8)=0 \\ \delta_4(-\lambda_5)=0 \end{cases}$$

Alors: si $\delta_4 = 0$, on obtient $\overline{x'} = 0$ (contradiction), par suite $\delta_4 \neq 0$, c'est-à-dire :
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$, on en déduit $e_3 = \lambda_3 x + \lambda_4 e_4$ où $x = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 \,/\, \alpha_3 \neq 0$.
Dans ce cas $\overline{\omega}(x) = \lambda_4 \overline{e_1 e_4 e_6} + \lambda_4 \overline{e_2 e_4 e_5} + \overline{e_1 e_4 e_7} + \overline{e_2 e_4 e_8}$, ou bien
$\overline{\omega}(x) = \overline{e_4}\left[\lambda_4 \overline{e_6 e_1} + \lambda_4 \overline{e_5 e_2} + \overline{e_7 e_1} + \overline{e_8 e_2}\right]$
c'est à dire $\overline{\omega}(x) = \overline{e_4}.u$ où: $u = \lambda_4 \overline{e_6 e_1} + \lambda_4 \overline{e_5 e_2} + \overline{e_7 e_1} + \overline{e_8 e_2}$.

$$u = (\lambda_4 \overline{e_6} + \overline{e_7})\overline{e_1} + (\lambda_4 \overline{e_5} + \overline{e_8})\overline{e_2}$$

Calculons $\gamma_2(u) = \dfrac{u^2}{2!}$, donc:

$$\gamma_2(u) = \frac{1}{2}\left[\lambda_4^2 \overline{e_6 e_1 e_5 e_2} + \lambda_4 \overline{e_6 e_1 e_8 e_2} + \lambda_4 \overline{e_7 e_1 e_5 e_2} + \overline{e_7 e_1 e_8 e_2}\right].$$

On remarque que pour tout $\lambda_4 \in K, \gamma_2(u) \neq 0$, par suite $rang(u) \neq 2$, on en déduit :
rang (u) = 4, car u est de la forme : $u = u_1 \overline{e_1} + u_2 \overline{e_2}$, d'où $x \in \langle e_3, e_4 \rangle$. (*)

On utilise la même méthode pour e_1, e_2, c'est-à- dire :
$x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_1 \neq 0$, on trouve $x \in \langle e_1, e_2 \rangle$. (**)

Donc de (*), (**), on en déduit $R_5(\omega) = \langle e_1, e_2 \rangle \cup \langle e_3, e_4 \rangle = V_1 \cup V_2$ où $V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ et $V_2 = \langle e_3, e_4 \rangle$.

Comme $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, donc si $f \in A_4 = Aut(\omega)$ on a :
$f(R_5(\omega)) \subset R_5(\omega)$ et $\{f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2\}$ ou $\{f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1\}$
ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes φ :

$$A_4 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$f \mapsto \varphi(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

φ est surjectif en effet $\varphi(id_E) = 1$ et $\varphi(f_0) = -1$ où f_0 est définie par: $f_0(e_1) = e_3$, $f_0(e_2) = e_4$, $f_0(e_3) = e_1$, $f_0(e_4) = e_2$, $f_0(e_5) = -e_7$, $f_0(e_6) = -e_6$, $f_0(e_7) = -e_5$, $f_0(e_8) = -e_8$.

On obtient une suite exacte :

$1 \to A'_4 \to A_4 \xrightarrow{\varphi} Z/2Z \to 1$ avec $A'_4 = Ker\varphi$

Soit $f \in A'_4$ donc $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$ par suite la matrice associée à f prend la forme suivante :

$$M(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & \alpha_4 & \beta_4 & \delta_4 & \gamma_4 \\ & & & & \alpha_5 & \beta_5 & \delta_5 & \gamma_5 \\ & & 0_{4\times 4} & & \alpha_6 & \beta_6 & \delta_6 & \gamma_6 \\ & & & & \alpha_7 & \beta_7 & \delta_7 & \gamma_7 \\ & & & & \alpha_8 & \beta_8 & \delta_8 & \gamma_8 \end{pmatrix}$$

ceci permet de construire un homomorphisme de grappe π :

$$A'_4 \xrightarrow{\pi} K^* \times K^*$$

$$f \mapsto \pi(f) = (\alpha, \beta) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \text{et} \\ \beta = \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} \end{cases}$$

π est surjectif, en effet l'application linéaire définie par :

$f_1(e_1) = \alpha e_1$, $f_1(e_2) = e_2$, $f_1(e_3) = \beta e_3$, $f_1(e_4) = e_4$, $f_1(e_5) = \beta^{-1} e_5$, $f_1(e_6) = \alpha^{-1}\beta^{-1} e_6$, $f_1(e_7) = \alpha^{-1} e_7$, $f_1(e_8) = e_8$ est l'antécédant du couple (α, β).

d'où l'exactitude de la suite : $1 \to A''_4 \to A'_4 \xrightarrow{\pi} K^* \times K^* \to 1$, avec $A''_4 = ker(\pi)$.

Soit $f \in A''_4$ donc $\alpha = \beta = 1$, parsuite $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$, ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes ψ :

$$A''_4 \xrightarrow{\psi} SL_2(K) \times SL_2(K)$$

$$f \mapsto \psi(f) = (h,t) \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} h = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ t = \begin{pmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ψ **est surjectif en effet l'application linéaire définie par :**

$f_2(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2,\ f_2(e_2) = b_1e_1 + b_2e_2,\ f_2(e_3) = c_3e_3 + c_4e_4,$

$f_2(e_4) = d_3e_3 + d_4e_4,\ f_2(e_5) = a_1d_4e_5 - a_2d_4e_6 + a_2d_3e_7 - a_1d_3e_8,$

$f_2(e_6) = -b_1d_4e_5 + b_2d_4e_6 - b_2d_3e_7 + b_1d_3e_8$

$f_2(e_7) = b_1c_4e_5 - b_2c_4e_6 + b_2c_3e_7 - b_1c_3e_8$

$f_2(e_8) = a_1c_4e_5 + a_2c_4e_6 - a_2c_3e_7 + a_1c_3e_8$

est l'antécédent du couple (h, t).

Soit $f \in Ker(\psi)$ donc $a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 1$ et $a_2 = b_1 = c_4 = d_3 = 0$,

par suite $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ entraine:

$e_1[e_3(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_8 e_8) + e_4(\delta_1 e_1 + \ldots + \delta_8 e_8)] + e_2[e_3(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_8 e_8) + e_4(\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_8 e_8)] =$
$e_1e_3e_6 + e_1e_4e_7 + e_2e_3e_5 + e_2e_4e_8$ donc

$$\begin{cases} c_{135} \\ c_{137} \\ c_{138} \\ c_{145} \\ c_{146} \\ c_{148} \end{cases} \text{donnent } \beta_5 = \beta_7 = \beta_8 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_8 = 0$$

$$\text{et } \begin{cases} c_{236} \\ c_{237} \\ c_{238} \\ c_{245} \\ c_{246} \\ c_{247} \end{cases} \text{donnent } \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 0$$

et $\begin{cases} c_{136} \\ c_{147} \\ c_{235} \\ c_{248} \end{cases}$ donnent $\beta_6 = \delta_7 = \alpha_5 = \gamma_8 = 1$

et $\begin{cases} c_{132}: \beta_2 - \alpha_1 = 0 \\ c_{134}: \beta_4 - \delta_3 = 0 \\ c_{142}: \delta_2 - \gamma_1 = 0 \\ c_{234}: \alpha_4 - \gamma_3 = 0 \end{cases}$ alors $\beta_2 = \alpha_1, \delta_3 = \beta_4, \gamma_1 = \delta_2$ et $\gamma_3 = \alpha_4$

Par suite la matirce de f est de la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} I_4 & \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 & \delta_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \delta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \beta_4 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \delta_4 & \gamma_4 \end{matrix} \\ 0_{4X4} & I_4 \end{pmatrix}$$

d'où $Ker\ (\psi) \cong K^{12}$.

On en déduit que la suite suivante est exacte :

$$1 \to K^{12} \to A''_4 \xrightarrow{\psi} SL_2(K) \times SL_2(K) \to 1$$

enfin A_4 est défini par les suites exactes :

$$1 \to A'_4 \to A_4 \to Z/2Z \to 1$$

$$1 \to A''_4 \to A'_4 \to K^* \times K^* \to 1$$

$$1 \to K^{12} \to A''_4 \to SL_2(K) \times SL_2(K) \to 1.$$

III-3. Le groupe $A_5 = Aut(\omega_{8,5})$

Proposition

Le groupe d'automorphismes $A_5 = Aut(\omega_{8,5})$ est déterminé par les suites exactes suivantes :

$$1 \to A'_5 \to A_5 \to \mathfrak{S}_3 \to 1$$

$$1 \to A''_5 \to A'_5 \to K^* \to 1$$

$$1 \to A'''_5 \to A''_5 \to SL_2(K) \to 1$$

$$1 \to K^6 \to A'''_5 \to SL_2(K) \times SL_2(K) \to 1$$

Preuve

On utilise la permutation suivante :

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_1	e_3	e_4	e_5	e_6	e_2	e_7	e_8

$\omega_{8,5}$ devient $\omega = e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_4 + e_7e_8)$.

Déterminons la partie stable

$$R_5(\omega) = \left\{x \in E \,/\, \varpi(x) \text{ est de rang } 5\right\}.$$

Remarquons que $e_1, e_2 \in R_5(\omega)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$ avec $\alpha_1 \neq 0$, on écrit donc $e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_8 e_8$, on utilise l'application $\tilde{f}$ (définie en III 1), pour dire que $rang(\varpi(x)) = 5$

Il suffit de montrer que $\tilde{f}$ n'est pas injective, c-à-d s'il existe $\overline{x'} \neq 0$; $\overline{x'} = \sum_{i=2}^{8} \delta_i e_i$ et $\overline{x'}.\overline{\omega}(x) = 0$.

Par un simple calcul, on trouve :

$$\delta_3 = \delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta_2(\lambda_3) = 0 \\ \delta_2(\lambda_4) = 0 \\ \delta_2(\lambda_5) = 0 \\ \delta_2(\lambda_6) = 0 \\ \delta_2(\lambda_7) - \delta_7(\lambda_2 + 1) = 0 \\ \delta_2(\lambda_7) - \delta_7(\lambda_2) = 0 \\ \delta_2(\lambda_8) - \delta_8(\lambda_2) = 0 \\ \delta_2(\lambda_8) - \delta_8(\lambda_2 + 1) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \delta_7(\lambda_4) = 0 \\ \delta_7(\lambda_5) = 0 \\ \delta_7(\lambda_6) = 0 \\ \delta_8(\lambda_3) = 0 \\ \delta_8(\lambda_4) = 0 \\ \delta_8(\lambda_5) = 0 \\ \delta_8(\lambda_6) = 0 \\ \delta_7(\lambda_8) - \delta_8(\lambda_7) = 0 \end{cases}$$

donc si $\delta_2 = 0$ alors :

$\begin{cases}\delta_7(\lambda_2+1)=0\\ \delta_8(\lambda_2+1)=0\end{cases}$ et $\begin{cases}\delta_7(\lambda_2)=0\\ \delta_8(\lambda_2)=0\end{cases}$ d'où $\delta_7=\delta_8=0$ par suite $\overline{x'}=0$ (contradiction).

D'où $\delta_2\neq 0$, c-à-d $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=0$ et

$\begin{cases}\delta_2(\lambda_7)-\delta_7(\lambda_2+1)=0\\ \delta_2(\lambda_7)-\delta_7(\lambda_2)=0\end{cases}$ alors $\delta_7=0$ donc $\lambda_7=0$,

$\begin{cases}\delta_2(\lambda_8)-\delta_8(\lambda_2+1)=0\\ \delta_2(\lambda_8)-\delta_8(\lambda_2)=0\end{cases}$ alors $\delta_8=0$ donc $\lambda_8=0$,

on en déduit que $e_1=\lambda_1 x+\lambda_2 e_2$ où $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$ avec: $\alpha_1\neq 0$, dans ce cas :

$\varpi(x)=\lambda_2\overline{e_2e_3e_4}+\lambda_2\overline{e_2e_5e_6}+\overline{e_2e_3e_4}+\overline{e_2e_7e_8}=\overline{e_2}\left[\lambda_2\overline{e_3e_4}+\lambda_2\overline{e_5e_6}+\overline{e_3e_4}+\overline{e_7e_8}\right]=\overline{e_2}.u$

où $u=(\lambda_2+1)\overline{e_3e_4}+\lambda_2\overline{e_5e_6}+\overline{e_7e_8}$.

Calculons $\gamma_2(u)=\dfrac{u^2}{2!}$ donc:

$\gamma_2(u)=\dfrac{1}{2}\left[\lambda_2(\lambda_2+1)\overline{e_3e_4e_5e_6}+(\lambda_2+1)\overline{e_3e_4e_7e_8}+\lambda_2\overline{e_5e_6e_7e_8}\right]$

$\gamma_2(u)=0$ alors $\lambda_2=0$ et $\lambda_2+1=0$ c'est à dire $\lambda_2=0$ et $\lambda_2=-1$, ce qui est absurde,

d'où $\gamma_2(u)\neq 0$; par suite $rg(u)\neq 2$.

On calcule $\gamma_3(u)=\dfrac{u^3}{3!}$, on trouve:

$\gamma_3(u)=\dfrac{1}{6}\left[\lambda_2(\lambda_2+1)\overline{e_3e_4e_5e_6e_7e_8}+\lambda_2(\lambda_2+1)\overline{e_5e_6e_3e_4e_7e_8}+\lambda_2(\lambda_2+1)\overline{e_7e_8e_3e_4e_5e_6}\right]$,

donc :

$\gamma_3(u)=0$ alors $\lambda_2(\lambda_2+1)=0$ c'est-à-dire $\lambda_2=0$ où $\lambda_2=-1$ par suite:

$\begin{cases}\gamma_2(u)\neq 0\\ et\\ \gamma_3(u)=0\end{cases}\Leftrightarrow rang(u)=4\Leftrightarrow \lambda_2=0$ ou $\lambda_2=-1$,

si $\lambda_2=0$, alors $e_1=\lambda_1 x$ ou $x=\alpha_1 e_1$ d'où $x\in\langle e_1\rangle$,

si $\lambda_2=-1$, alors $e_1=\lambda_1 x-e_2$ ou $x=\alpha_1(e_1+e_2)$ d'où $x\in\langle e_1+e_2\rangle$,

et de même pour α_2, c-à-d si $\alpha_2\neq 0$, on trouve $x\in\langle e_2\rangle$ou $x\in\langle e_1+e_2\rangle$.

On en déduit $R_5(\omega)=\langle e_1\rangle\cup\langle e_2\rangle\cup\langle e_1+e_2\rangle$.

$R_5(\omega) = (V_1 \cup V_2) \cup V_3$ où $V_1 = \langle e_1 \rangle, V_2 = \langle e_2 \rangle, V_3 = \langle e_1 + e_2 \rangle$,

~~or si~~ $f \in \cancel{A_5 = Aut(\omega)}$ ~~on a~~ $\cancel{f(R_5(\omega)) \subset R_5(\omega)}$ ~~et~~ $\cancel{\{f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2}$ ~~et~~ $\cancel{f(V_3) \subset V_3\}}$.

~~où~~ $\{f(V_1 \cup V_2) \subset V_3$ et $f(V_3) \subset V_1 \cup V_2\}$. si ~~on a~~ $f \in A_5 = Aut(\omega)$ on a $f(V_i) \subset V_{\sigma(i)}$

~~Le cas~~ $\{f(V_1 \cup V_2) \subset V_3$ et $f(V_3) \subset V_1 \cup V_2\}$ est impossible car dans ce cas: où $\sigma \in S_3$

$f(e_1) = \lambda(e_1 + e_2), f(e_2) = \lambda'(e_1 + e_2)$ et $f(e_1 + e_2) = \beta e_1$ ou $\cancel{f(e_1 + e_2) = \delta e_2}$.

Si $f(e_1 + e_2) = \beta e_1$ alors $f(e_1) + f(e_2) = \lambda(e_1 + e_2) \cancel{+ \lambda'(e_1 + e_2) = (\lambda + \lambda')(e_1 + e_2)}$

$= \cancel{\beta e_1}$ ~~donc~~ $\cancel{\beta = 0}$ ~~par suite~~ $\cancel{e_1 + e_2 \in Ker(f) = \{0\}}$

~~car f est injective, d'où la contradiction. Et de même si~~ $\cancel{f(e_1 + e_2) = \delta e_2}$.

~~On en déduit que~~ si $f \in A_5$, $f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$ et $\cancel{f(V_3) \subset V_3}$.

~~Comme~~ $\cancel{V_1 \cap V_2 = \{0\}}$, ceci nous permet de definire un homomorphisme de groupes φ:

$A_5 \xrightarrow{\varphi} \cancel{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\ S_3$ $\qquad \varphi(f) = (\sigma)$ où $\sigma : \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ V_{\sigma(1)} & V_{\sigma(2)} & V_{\sigma(3)} \end{pmatrix}$

$f \mapsto \varphi(f) = \begin{cases} \cancel{0} & \text{si } \cancel{f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2 \text{ et } f(V_3) \subset V_3} \\ \cancel{1} & \cancel{\text{sinon}} \end{cases}$

φ est surjectif en effet : $S_3 = \langle s, t \rangle$ où $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

~~φ est surjectif en en effet~~ $\cancel{\varphi(id_E) = 0}$ ~~et~~ $\cancel{\varphi(f_0) = +1}$ ~~où~~ $\cancel{f_0}$ ~~est une application linéaire.~~

~~définie par :~~ s et t ont pour antécédents respectifs :

$\cancel{f_0(e_1) = e_2, f_0(e_2) = e_1, f_0(e_3) = e_3, f_0(e_4) = e_4, f_0(e_5) = e_7, f_0(e_6) = e_8}$

$\cancel{f_0(e_7) = e_5, f_0(e_8) = e_6}$,

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
f_s	e_2	e_1	e_3	e_4	e_7	e_8	e_5	e_6
f_t	e_2	$-e_1-e_2$	e_6	e_5	e_7	e_8	e_4	e_3

donc on obtient une suite exacte :

$$1 \to A'_5 \to A_5 \xrightarrow{\varphi} \cancel{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\ S_3 \to 1 \quad \text{où } A'_5 = Ker(\varphi).$$

Soit $f \in A'_5$ donc $f(V_1) \subset V_1$ et $f(V_2) \subset V_2$ et $f(V_3) \subset V_3$, par suite $f(e_1) = a e_1$ et

$f(e_2) = b e_2$ et $f(e_1 + e_2) = \delta(e_1 + e_2)$,

donc $a e_1 + b e_2 = \delta(e_1 + e_2)$ d'où $a = b$. On en déduit que la matrice de f est de la forme:

$$M(f)=\begin{pmatrix} a & 0 & c_1 & d_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & a & c_2 & d_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \alpha_4 & \beta_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & \gamma_5 & \delta_5 & \alpha_5 & \beta_5 \\ 0 & 0 & c_6 & d_6 & \gamma_6 & \delta_6 & \alpha_6 & \beta_6 \\ 0 & 0 & c_7 & d_7 & \gamma_7 & \delta_7 & \alpha_7 & \beta_7 \\ 0 & 0 & c_8 & d_8 & \gamma_8 & \delta_8 & \alpha_8 & \beta_8 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes π :

$$A'_5 \xrightarrow{\pi} K^*$$
$$f \mapsto \pi(f)=a$$

π est surjectif en effet pour $a \in K^*$; il existe $f_1 \in A'_5$ définie par:

$f_1(e_1)=ae_1, f_1(e_2)=ae_2, f_1(e_3)=ae_3, f_1(e_4)=e_4, f_1(e_5)=a^{-1}e_5, f_1(e_6)=e_6,$
$f_1(e_7)=a^{-1}e_7, f_1(e_8)=e_8$

d'où l'exactitude de la suite suivante :

$$1 \to A''_5 \to A'_5 \xrightarrow{\pi} K^* \to 1 \quad \text{où} \quad A''_5=Ker(\pi).$$

Soit $f \in A''_5$ donc $a=1$ par suite $e_2\omega=e_2e_1(e_3e_4+e_5e_6)$, or $\Lambda^3 f(\omega)=\omega$ entraine $e_2e_1\left[f(e_3)f(e_4)+f(e_5)f(e_6)\right]=e_2e_1(e_3e_4+e_5e_6)$ (*)

donc le support des deux membres de (*) est :

$\langle e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\rangle=\langle e_1,e_2,f(e_3),f(e_4),f(e_5),f(e_6)\rangle,$

c'est à dire le $s.e.v$ $\langle e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\rangle$ est stable par f. On en déduit:

$c_7=c_8=d_7=d_8=\gamma_7=\gamma_8=\delta_7=\delta_8=0$

et $det\ M(f)=det\ B.\begin{vmatrix}\alpha_7 & \beta_7\\ \alpha_8 & \beta_8\end{vmatrix}\neq 0$ où $B=\begin{pmatrix} c_3 & d_3 & \gamma_3 & \delta_3\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ c_6 & d_6 & \gamma_6 & \delta_6\end{pmatrix}$

d'où $\begin{vmatrix}\alpha_7 & \beta_7\\ \alpha_8 & \beta_8\end{vmatrix}\neq 0$ or $\Lambda^3 f(\omega)=\omega$ entraine :

$$e_1\left[(c_1e_1+...+c_6e_6)(d_1e_1+...+d_6e_6)+(\gamma_1e_1+...+\gamma_6e_6)(\delta_1e_1+..+\delta_6e_6)\right]+$$
$$+e_2\left[(c_1e_1+...+c_6e_6)(d_1e_1+...+d_6e_6)+(\alpha_1e_1+...+\alpha_8e_8)(\beta_1e_1+....+\beta_8e_8)\right]=$$
$$=e_1e_3e_4+e_1e_5e_6+e_2e_3e_4+e_2e_7e_8$$

donc $c_{278}: \begin{vmatrix} \alpha_7 & \beta_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 \end{vmatrix} = 1$ donc $h = \begin{pmatrix} \alpha_7 & \beta_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$

ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes ψ

$$A''_5 \to SL_2(K)$$
$$f \mapsto \psi(f) = h$$

ψ est surjectif en effet pour $h \in SL_2(K)$; il existe $f \in A''_5$ définie par :

$f(e_i) = e_i$ $_{1\le i\le 6}$, et $f(e_7) = \alpha_7 e_7 + \alpha_8 e_8$, $f(e_8) = \beta_7 e_7 + \beta_8 e_8$ donc on a une suite exacte

$1 \to A'''_5 \to A''_5 \xrightarrow{\psi} SL_2(K) \to 1$, où $A'''_5 = Ker(\psi)$.

Soit $f \in A'''_5$ donc $\alpha_7 = \beta_8 = 1$ et $\alpha_8 = \beta_7 = 0$, or $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ entraine:

$$e_1\left[(c_1e_1+\ldots+c_6e_6)(d_1e_1+\ldots+d_6e_6)+(\gamma_1e_1+\ldots\gamma_6e_6)(\delta_1e_1+\ldots+\delta_6e_6)\right]+$$
$$+e_2\left[(c_1e_1+\ldots+c_6e_6)(d_1e_1+\ldots+d_6e_6)+(\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_6e_6+e_7)(\beta_1e_1+\ldots+\beta_6e_6+e_8)\right]$$
$$= e_1e_3e_4 + e_1e_5e_6 + e_2e_3e_4 + e_2e_7e_8.$$

donc $\begin{cases} c_{217} \\ c_{218} \\ c_{237} \\ c_{238} \end{cases}$ donnent $\beta_1 = \alpha_1 = \beta_3 = \alpha_3 = 0$ et $\begin{cases} c_{247} \\ c_{248} \\ c_{257} \\ c_{258} \end{cases}$ donnent $\beta_4 = \alpha_4 = \beta_5 = \alpha_5 = 0$

et $\begin{cases} c_{267} \\ c_{268} \end{cases}$ donnent $\beta_6 = \alpha_6 = 0$

et $c_{234}: \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 1$ donc $h_1 = \begin{pmatrix} c_3 & d_3 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$ (*)

et $\begin{cases} c_{235}: c_3d_5 - c_5d_3 = 0 \\ c_{245}: c_4d_5 - c_5d_4 = 0 \end{cases}$ alors $d_5 = c_5 = 0$

$\begin{cases} c_{236}: c_3d_6 - c_6d_3 = 0 \\ c_{245}: c_4d_6 - c_6d_4 = 0 \end{cases}$ alors $d_6 = c_6 = 0$

$c_{156}: \begin{vmatrix} \gamma_5 & \delta_5 \\ \gamma_6 & \delta_6 \end{vmatrix} = 1$ donc $h_2 = \begin{pmatrix} \gamma_5 & \delta_5 \\ \gamma_6 & \delta_6 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$

et $\begin{cases} c_{135}: \gamma_3\delta_5 - \gamma_5\delta_3 = 0 \\ c_{136}: \gamma_3\delta_6 - \gamma_6\delta_3 = 0 \end{cases}$ alors $\gamma_3 = \delta_3 = 0$

et $\begin{cases} c_{145}: \gamma_4\delta_5 - \gamma_5\delta_4 = 0 \\ c_{146}: \gamma_4\delta_6 - \gamma_6\delta_4 = 0 \end{cases}$ alors $\gamma_4 = \delta_4 = 0$

Comme $d_5 = c_5 = d_6 = c_6 = 0$ et $h_1, h_2 \in SL_2(k)$, donc on peut définir un homomorphisme de groupes σ :

$$\begin{aligned} A'''_5 &\xrightarrow{\sigma} SL_2(K) \times SL_2(K) \\ f &\mapsto \sigma(f) = (h_1, h_2) \end{aligned}$$

σ est surjectif en effet l'application linéaire définie par :

$f_2(e_1) = e_1,\ f_2(e_2) = e_2,\ f_2(e_3) = c_3 e_3 + c_4 e_4,\ f_2(e_4) = d_3 e_3 + d_4 e_4,\ f_2(e_5) = \gamma_5 e_5 + \gamma_6 e_6,$

$f_2(e_6) = \delta_5 e_5 + \delta_6 e_6,\ f_2(e_7) = e_7,\ f_2(e_8) = e_8$ est l'antécédent du couple (h_1, h_2),

soit $f \in Ker(\sigma)$ donc $c_3 = d_4 = \gamma_5 = \delta_6 = 1$ et $c_4 = d_3 = \gamma_6 = \delta_5 = 0$,

or $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ entraine:

$$\begin{aligned} &e_1\Big[(c_1e_1 + c_2e_2 + e_3)(d_1e_1 + d_2e_2 + e_4) + (\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + e_5)(\delta_1 e_1 + \delta_2 e_2 + e_6)\Big] + \\ &+ e_2\Big[(c_1e_1 + c_2e_2 + e_3)(d_1e_1 + d_2e_2 + e_4) + (\alpha_2 e_2 + e_7)(\beta_2 e_2 + e_8)\Big] = \omega \end{aligned}$$

donc :

$\begin{cases} c_{126} \\ c_{125} \end{cases}$ donnent $\gamma_2 = \delta_2 = 0$ et $\begin{cases} c_{124} : c_2 - c_1 = 0 \\ c_{123} : -d_2 + d_1 = 0 \end{cases}$ alors

$$\begin{cases} c_2 = c_1 = c \\ \text{et} \\ d_2 = d_1 = d \end{cases}$$

donc la matrice de f prend la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & d & \gamma_1 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & d & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ & 0_{4\times 4} & & & & Id_4 & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

d'où $Ker(\sigma) \approx K^6$ et enfin on obtient une suite exacte

$$1 \to K^6 \to A'''_5 \xrightarrow{\sigma} SL_2(K) \times SL_2(K) \to 1$$

III-4. Le groupe $A_6 = Aut(\omega_{8,6})$

Proposition

Le groupe d'automorphismes $A_6 = Aut(\omega_{8,6})$ est déterminé par les suites exactes suivantes:

$$1 \to A'_6 \to A_6 \to K^* \times K^* \to 1$$
$$1 \to K^{13} \to A'_6 \to SL_2(K) \to 1$$

Preuve :

On a $\omega_{8,6} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$. On utilise la permutation suivante :

$$\downarrow \boxed{\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ e_1 & e_8 & e_3 & e_6 & e_5 & e_4 & e_7 & e_2 \end{array}}$$

Donc $\omega_{8,6}$ devient $\omega = e_1(e_8e_3 + e_6e_5 + e_4e_7) + e_2(e_6e_3 + e_5e_4)$

$R_5(\omega) = \{x \in E \,/\, \varpi(x)$ est de rang $5\}$,on remarque que $e_1 \in R_5(\omega)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$; si $\alpha_1 \neq 0$ on écrit $e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_8 e_8$

parsuite $\varpi(x) = \lambda_2 \overline{e_2 e_8 e_3} + \lambda_2 \overline{e_2 e_6 e_5} + \lambda_2 \overline{e_2 e_4 e_7} + \lambda_3 \overline{e_3 e_6 e_5} + \lambda_3 \overline{e_3 e_4 e_7} + \lambda_4 \overline{e_4 e_8 e_3} +$
$\lambda_4 \overline{e_4 e_6 e_5} + \lambda_5 \overline{e_5 e_8 e_3} + \lambda_5 \overline{e_5 e_4 e_7} + \lambda_6 \overline{e_6 e_8 e_3} + \lambda_6 \overline{e_6 e_4 e_7} + \lambda_7 \overline{e_7 e_8 e_3} +$
$\lambda_7 \overline{e_7 e_6 e_5} + \lambda_8 \overline{e_8 e_6 e_5} + \lambda_8 \overline{e_8 e_4 e_7} + \overline{e_2 e_6 e_3} + \overline{e_2 e_5 e_4}$

On utilise l'application $\tilde{f} : E/_{Kx} \to \Lambda^4(E/_{Kx})$ définie par $\tilde{f}(\overline{x'}) = \overline{x'}.\overline{\omega}(x)$, on obtient le tableau suivant :

$\tilde{f}(\overline{e_2})$	$\tilde{f}(\overline{e_3})$	$\tilde{f}(\overline{e_4})$	$\tilde{f}(\overline{e_5})$	$\tilde{f}(\overline{e_6})$	$\tilde{f}(\overline{e_7})$	$\tilde{f}(\overline{e_8})$	$\overline{e_ie_je_ke_l}$
	1						2345
		-1					2346
λ_3	$-\lambda_2$						2347
λ_4		$-\lambda_2$					2348
$-\lambda_3$	λ_2		-1				2356
							2357
λ_5			$-\lambda_2$				2358
				1			2367
λ_6				$-\lambda_2$		1	2368
λ_7							2378
$-\lambda_4$		λ_2		1			2456
$-\lambda_5$			λ_2		1		2457
						1	2458
$-\lambda_6$				λ_2			2467
							2468
λ_8						$-\lambda_2$	2478
$-\lambda_7$					λ_2		2567
$-\lambda_8$						λ_2	2568
							2578
							2678
	$-\lambda_4$	λ_3					3456
	$-\lambda_5$		λ_3				3457
		$-\lambda_5$	λ_4				3458
	$-\lambda_6$			λ_3			3467
		$-\lambda_6$		λ_4			3468
	λ_8	$-\lambda_7$			λ_4	$-\lambda_3$	3478
	$-\lambda_7$						3567
	$-\lambda_8$		$-\lambda_6$	λ_5		λ_3	3568
			$-\lambda_7$		λ_5		3578
				$-\lambda_7$	λ_6		3678
		$-\lambda_7$	λ_6	$-\lambda_5$	λ_4		4567
		$-\lambda_8$				λ_4	4568
			$-\lambda_8$			λ_5	4578
				$-\lambda_8$		λ_6	4678
					$-\lambda_8$	$+\lambda_7$	5678

donc $\tilde{f}$ **n'est pas injective s'il existe** $\overline{x'} \neq 0;\ \overline{x'} = \sum_{i=2}^{8} \delta_i \overline{e_i}$ et

$\overline{x'}\omega(x) = 0$, d'où $\delta_3(1) = 0,\ \delta_4(-1) = 0,\ \delta_2(\lambda_3) + \delta_3(-\lambda_2) = 0,\ \delta_2(\lambda_4) + \delta_4(-\lambda_2) = 0$

$\delta_2(-\lambda_3) + \delta_3(\lambda_2) + \delta_5(-1) = 0,\ \delta_2(\lambda_5) + \delta_5(-\lambda_2) = 0,\ \delta_6(1) = 0,\ \delta_2(\lambda_6) + \delta_6(-\lambda_2) +$

$+\delta_8(1)=0, \delta_2(\lambda_7)+\delta_7(-\lambda_2)=0, \delta_2(-\lambda_4)+\delta_4(\lambda_2)+\delta_6(1)=0, \delta_2(-\lambda_5)+\delta_5(\lambda_2)+$

$+\delta_7(1)=0, \delta_8(1)=0, \delta_2(-\lambda_6)+\delta_6(\lambda_2)=0, \delta_2(\lambda_8)+\delta_8(-\lambda_2)=0, \delta_2(-\lambda_7)+\delta_7(\lambda_2)=0$

$\delta_2(-\lambda_8)+\delta_8(\lambda_2)=0, \delta_3(-\lambda_4)+\delta_4(\lambda_3)=0, \delta_3(-\lambda_5)+\delta_5(\lambda_3)=0, \delta_4(-\lambda_5)+\delta_5(\lambda_4)=0$

$\delta_3(-\lambda_6)+\delta_6(\lambda_3)=0, \delta_4(-\lambda_6)+\delta_6(\lambda_4)=0, \delta_3(\lambda_8)+\delta_4(-\lambda_7)+\delta_7(\lambda_4)+\delta_8(-\lambda_3)=0$

$\delta_3(-\lambda_7)+\delta_7(\lambda_3)=0, \delta_3(-\lambda_8)+\delta_5(-\lambda_6)+\delta_6(\lambda_5)+\lambda_8(\delta_3)=0, \delta_5(-\lambda_7)+\delta_7(\lambda_5)=0$

$\delta_6(-\lambda_7)+\delta_7(\lambda_6)=0$ alors :

$\delta_4(-\lambda_7)+\delta_5(\lambda_6)+\delta_6(-\lambda_5)+\delta_7(\lambda_4)=0$

$\delta_4(-\lambda_8)+\delta_8(\lambda_4)=0$

$\delta_5(-\lambda_8)+\delta_8(\lambda_5)=0$

$\delta_6(-\lambda_8)+\delta_8(\lambda_6)=0$

$\delta_7(-\lambda_8)+\delta_8(\lambda_7)=0$

On en déduit $\delta_3=\delta_4=\delta_6=\delta_8=0$

et: $\delta_2(\lambda_3)=0$ et $\delta_5(\lambda_3)=0$ et $\delta_7(\lambda_3)=0$

$\delta_2(\lambda_4)=0 \quad \delta_5(\lambda_4)=0 \quad \delta_7(\lambda_4)=0$

$\delta_2(\lambda_6)=0 \quad \delta_5(\lambda_6)=0 \quad \delta_7(\lambda_6)=0$

$\delta_2(\lambda_8)=0 \quad \delta_5(\lambda_8)=0 \quad \delta_7(\lambda_8)=0$

et: $\delta_2(\lambda_3)+\delta_5=0 \Rightarrow \delta_5=0$

$\delta_2(\lambda_5)-\delta_5(\lambda_2)=0$

$\delta_2(\lambda_7)-\delta_7(\lambda_2)=0 \quad \Rightarrow \delta_7=0$

$\delta_2(\lambda_5)-\delta_5(\lambda_2)-\delta_7=0$

$\delta_5(\lambda_7)-\delta_7(\lambda_5)=0$

$\delta_5(\lambda_6)+\delta_7(\lambda_4)=0$

on obtient $\delta_3=\delta_4=\delta_5=\delta_6=\delta_7=\delta_8=0$

et $\delta_2(\lambda_3)=0$

$\delta_2(\lambda_4)=0$

$\delta_2(\lambda_5)=0$

$\delta_2(\lambda_6)=0$

$\delta_2(\lambda_7)=0$

$\delta_2(\lambda_8)=0$

si $\delta_2=0 \Rightarrow \overline{x'}=0$ (contradiction),

donc $\delta_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=0$.

Par suite $e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2$ c-à-d $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ avec $\alpha_1 \neq 0$,

donc $\varpi(x) = \lambda_2 \overline{e_2 e_8 e_3} + \lambda_2 \overline{e_2 e_6 e_5} + \lambda_2 \overline{e_2 e_4 e_7} + \overline{e_2 e_6 e_3} + \overline{e_2 e_5 e_4}$

$= \overline{e_2}\left[\lambda_2 \overline{e_8 e_3} + \lambda_2 \overline{e_6 e_5} + \lambda_2 \overline{e_4 e_7} + \overline{e_6 e_3} + \overline{e_5 e_4}\right]$, donc $\varpi(x) = \overline{e_2}.u$, où

$u = \lambda_2 \overline{e_8 e_3} + \lambda_2 \overline{e_6 e_5} + \lambda_2 \overline{e_4 e_7} + \overline{e_3 e_6} + \overline{e_5 e_4}$.

Calculons $\gamma_2(u) = \dfrac{u^2}{2!} = \dfrac{1}{2}u^2$ donc $\gamma_2(u) = \dfrac{1}{2}\left[\lambda_2^2 \overline{e_8 e_3 e_6 e_5} + \lambda_2^2 \overline{e_8 e_3 e_4 e_7} + \lambda_2 \overline{e_8 e_3 e_5 e_4} + \right.$

$\left. + \lambda_2^2 \overline{e_6 e_5 e_4 e_7} + \lambda_2 \overline{e_4 e_7 e_6 e_3} + \overline{e_6 e_3 e_5 e_4}\right]$ on remarque que: $\forall \lambda_2 \in K, \gamma_2(u) \neq 0$,

c-à-d $rg(u) \neq 2$.

Calculons $\gamma_3(u) = \dfrac{u^3}{3!} = \dfrac{1}{6}u^3 = \dfrac{1}{6}u.u^2$.

$\gamma_3(u) = \dfrac{1}{6}\left[\lambda_2 \overline{e_8 e_3 e_6 e_5 e_4 e_7} + \lambda_2^3 \overline{e_6 e_5 e_8 e_3 e_4 e_7} + \lambda_2^3 \overline{e_4 e_7 e_8 e_3 e_6 e_5}\right]$

donc $\begin{cases} \gamma_3(u) = 0 \\ \text{et} \\ \gamma_2(u) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow rg(u) = 4 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0$.

d'où $e_1 = \lambda_1 x$ on obtient $x = \alpha_1 e_1$ et $rg(\varpi(x)) = 5$.

d'où $R_5(\omega) = \langle e_1 \rangle - \{0\}$.

$\omega = e_1(e_8 e_3 + e_6 e_5 + e_4 e_7) + e_2(e_6 e_3 + e_5 e_4)$

$R_{7,1}(\omega) = \{x \in E \,/\, \varpi(x) \text{ est de type } \omega_{7,1}\}$ est une partie stable $(2-1)$,

on remarque que $e_2 \in R_{7,1}(\omega)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$; si $\alpha_2 \neq 0$ on écrit $e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e_3 + \ldots + \lambda_8 e_8$,

parsuite $\varpi(x) = \overline{e_1 e_8 e_3} + \overline{e_1 e_6 e_5} + \overline{e_1 e_4 e_7} + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e_3 + \ldots + \lambda_8 e_8)(e_6 e_3 + e_5 e_4)$

$= \overline{e_1 e_8 e_3} + \lambda_1 \overline{e_6 e_5} + \overline{e_1 e_4 e_7} + \lambda_1 \overline{e_1 e_6 e_3} + \lambda_1 \overline{e_1 e_5 e_4} + + \lambda_3 \overline{e_3 e_5 e_4} + \lambda_4 \overline{e_4 e_6 e_3}$

$+ \lambda_5 \overline{e_5 e_6 e_3} + \lambda_6 \overline{e_6 e_5 e_4} + \lambda_7 \overline{e_7 e_6 e_3} + \lambda_7 \overline{e_7 e_5 e_4} + \lambda_8 \overline{e_8 e_6 e_3} + \lambda_8 \overline{e_8 e_5 e_4}$.

On utilise la même méthode que $R_5(\omega)$, c-à-d $\bar{f}$ n'est pas injective s'il existe $\overline{x'} \neq 0$,

$\overline{x'} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{8} \delta_i \overline{e_i}$ et $\overline{x'}.\varpi(x) = 0$, on trouve les équations suivantes :

$$\begin{cases}\delta_3(-1)=0\\ \delta_4(-1)=0\\ \delta_5(-1)=0\\ \delta_6(+1)=0\\ \delta_7(1)=0\\ \delta_8(1)=0\end{cases} \quad \text{alors } \delta_3=\delta_4=\delta_5=\delta_6=\delta_7=\delta_8=0 \text{ et } \begin{cases}\delta_1(-\lambda_3)=0\\ \delta_1(\lambda_4)=0\\ \delta_1(\lambda_5)=0\\ \delta_1(-\lambda_6)=0\\ \delta_1(\lambda_7)=0\\ \delta_1(\lambda_8)=0\end{cases}$$

si $\delta_1 = 0$ alors $\overline{x'} = 0$ (contradiction), d'où $\delta_1 \neq 0$,

par suite $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$, c'est - à - dire

$e_2 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 x$ ou $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ avec $\alpha_2 \neq 0$

donc : $\overline{\omega}(x) = \overline{e_1e_8e_3} + \overline{e_1e_6e_5} + \overline{e_1e_4e_7} + \lambda_1\overline{e_1e_6e_3} + \lambda_1\overline{e_1e_5e_4}$

$$\overline{\omega}(x) = \overline{e_1}\left[\overline{e_6}(\overline{e_5} + \lambda_1\overline{e_3}) + \overline{e_4}(\overline{e_7} - \lambda_1\overline{e_5}) + \overline{e_8e_3}\right].$$

est de type $\omega_{7,1}$, on en déduit : $R_{7,1}(\omega) = \{x \in E / x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ et $\alpha_2 \neq 0\}$

- Soit $f \in Aut(\omega)$ c-à-d $f \in A_6$, donc la matrice associée à f est de la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & c_1 & d_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1\\ 0 & \beta & c_2 & d_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2\\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & \gamma_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3\\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \alpha_4 & \beta_4\\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & \gamma_5 & \delta_5 & \alpha_5 & \beta_5\\ 0 & 0 & c_6 & d_6 & \gamma_6 & \delta_6 & \alpha_6 & \beta_6\\ 0 & 0 & c_7 & d_7 & \gamma_7 & \delta_7 & \alpha_7 & \beta_7\\ 0 & 0 & c_8 & d_8 & \gamma_8 & \delta_8 & \alpha_8 & \beta_8 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de définir un homomorphisme de groupes :

$$A_6 \xrightarrow{\varphi} K^* \times K^* \to 1$$
$$f \mapsto \varphi(f) = (\lambda, \beta)$$

φ est surjective en effet l'application linéaire $f_{\lambda,\beta}$ définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1, & f(e_5) = \lambda^{-1}\beta e_5\\ f(e_2) = \beta e_2, & f(e_6) = \beta^{-1} e_6\\ f(e_3) = e_3, & f(e_7) = \lambda^{-2}\beta^2 e_7\\ f(e_4) = \lambda\beta^{-2} e_4, & f(e_8) = \lambda^{-1} e_8 \end{cases}$$

est l'antécédant du couple (λ, β)

Soit la suite exacte suivante: $1 \to A'_6 \to A_6 \xrightarrow{\varphi} K^* \times K^* \to 1$,

soit $f \in A'_6$ alors $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2 + \mu e_1$, parsuite:

$\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ entraine : $e_1 \Lambda^2 f(e_8 e_3 + e_6 e_5 + e_4 e_7) + f(e_2) \Lambda^2 f(e_6 e_3 + e_5 e_4) =$

$$= e_1(e_8 e_3 + e_6 e_5 + e_4 e_7) + e_2(e_6 e_3 + e_5 e_4)$$

donc $e_1 f(e_2)\left[f(e_6)f(e_3) + f(e_5)f(e_4)\right] = e_1 e_2(e_6 e_3 + e_5 e_4)$. (*)

Comme $e_1, f(e_2), f(e_4), f(e_5), f(e_6), f(e_3)$ sont libres, le support des deux membres de (*) est :

$$\langle e_1, f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5), f(e_6)\rangle = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$$

ce qui montre que la matrice B :

$$B \begin{pmatrix} c_7 & d_7 & \gamma_7 & \delta_7 \\ c_8 & d_8 & \gamma_8 & \delta_8 \end{pmatrix}$$

est nulle, par suite :

$$\det M(f) = \lambda\beta . \det A . \det C \neq 0 \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} c_3 & d_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ c_4 & d_4 & \gamma_4 & \delta_4 \\ c_5 & d_5 & \gamma_5 & \delta_5 \\ c_6 & d_6 & \gamma_6 & \delta_6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_7 & \beta_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 \end{pmatrix}.$$

Posons $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_7 & \beta_7 \\ \alpha_8 & \beta_8 \end{vmatrix}$, dans l'égalité $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$, les coefficients de $e_1 e_3 e_8$ et $e_1 e_3 e_7$

donnent $\begin{cases} -\beta_8 c_3 + d_3 \alpha_8 = 1 \\ -\beta_7 c_3 + d_3 \alpha_7 = 0 \end{cases}$

d'où $c_3 = \dfrac{1}{\Delta}\alpha_7$ et $d_3 = \dfrac{1}{\Delta}\beta_7$ et de même les coefficients de $e_1 e_3 e_8$ et $e_1 e_3 e_7$ entrainent

$c_4 = \dfrac{1}{\Delta}\alpha_8$ et $d_4 = \dfrac{1}{\Delta}\beta_8$.

$\begin{cases} c_{157} \\ c_{158} \end{cases}$ donnent $c_5 = d_5 = 0$, et de même c_{167} et $c_{168} \Rightarrow c_6 = d_6 = 0$

Les coefficients de $e_1\ e_6\ e_5$ montrent que $\begin{vmatrix} \gamma_5 & \delta_5 \\ \gamma_6 & \delta_6 \end{vmatrix} = 1$,

d'autre part $\begin{cases} c_{263} \\ c_{253} \end{cases}$ donnent $c_3 = \gamma_5$ et $d_3 = -\delta_5$

et $\begin{cases} c_{254} \\ c_{264} \end{cases}$ donnent $c_4 = -\gamma_6$ et $d_4 = \delta_6$

par suite $\Delta = 1$ ce qui permet de construire l'homomorphisme

$$1 \to A''_6 \to A'_6 \xrightarrow{\psi} SL_2(K) \to 1$$

$$f \mapsto \psi(f) = h \quad \text{où} \quad h = \begin{pmatrix} \gamma_5 & \delta_5 \\ \gamma_6 & \delta_6 \end{pmatrix}$$

ψ est surjectif en effet pour $h \in SL_2(K)$, il existe $f \in A'_6$ définie par :

$f(e_1) = e_1,\ f(e_3) = \gamma_5 e_3 - \gamma_6 e_4,\ f(e_5) = \gamma_5 e_5 + \gamma_6 e_6$

$f(e_2) = e_2,\ f(e_4) = -\delta_5 e_3 + \delta_6 e_4,\ f(e_6) = \delta_5 e_5 + \delta_6 e_6$

$f(e_7) = \delta_5 e_7 - \gamma_6 e_8,\ f(e_8) = -\delta_5 e_7 + \delta_6 e_8,$

soit $f \in A''_6$ alors $\gamma_5 = \delta_6 = 1$ et $\delta_5 = \gamma_6 = 0, \Lambda^3 f(\omega) = \omega$ s'ecrit:

$$e_1\big[(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_6 e_6 + e_8)(c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3) + (\delta_1 e_1 + \ldots + \delta_4 e_4 + e_6)(\gamma_1 e_1 + \ldots + \gamma_4 e_4 + e_5)$$
$$+ (d_1 e_1 + d_2 e_2 + e_4)(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_6 e_6 + e_7)\big] + (\mu e_1 + e_2)\big[(\delta_1 e_1 + \ldots + \delta_4 e_4 + e_6) \times$$
$$\times (c_1 e_1 + c_2 e_2 + e_3) + (\mu_1 e_1 + \ldots + \gamma_4 e_4 + e_5)(d_1 e_1 + d_2 e_2 + e_4)\big] = \omega,$$

c_{127} et c_{182} donnent $d_2 = c_2 = 0$, d'autre part:

$c_{143}: \beta_4 + \delta_4 \gamma_3 - \delta_3 \gamma_4 + \alpha_3 + \mu(\delta_4 - \gamma_3) = 0$ donc $\beta_4 = \begin{vmatrix} \delta_3 & \gamma_3 \\ \delta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} - \alpha_3 - \mu(\delta_4 - \gamma_3)$

$c_{153}: \beta_5 = \delta_3$ et $c_{163}: \beta_6 = -\gamma_3 - \mu,\ c_{125}: \delta_2 = -d_1$

$c_{145}: \alpha_5 = \mu - \delta_4$ et $c_{162}: \gamma_2 = c_1,\ c_{164}: \alpha_6 = \gamma_4$ et $c_{243}: \delta_4 = \gamma_3$

$c_{123}: \beta_2 = \delta_1 - \mu\delta_2$ et $c_{124}: \alpha_2 = \mu\gamma_2 - \gamma_1$

et finalement la matrice de $f \in A''_6$ est de la forme:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & \mu & \gamma_2 & -\delta_2 & \gamma_1 & \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma_2 & \delta_2 & \mu\gamma_2 - \gamma_1 & \delta_1 - \mu\delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma_3 & \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma_4 & \gamma_3 & \alpha_4 & \beta_4 \\ & & & & 1 & 0 & \mu - \gamma_3 & \delta_3 \\ & & 0_{4X4} & & 0 & 1 & \gamma_4 & -\gamma_3 - \mu \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\beta_4 = \begin{vmatrix} \delta_3 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix} - \alpha_3 - \mu(\delta_4 - \gamma_3)$ d'où $A''_6 \approx K^{13}$, donc le groupe A_6 est défini par les suites exactes suivantes:

$1 \to A'_6 \to A_6 \to K^* \times K^* \to 1$

$1 \to K^{13} \to A'_6 \to SL_2(K) \to 1$

III-5. Le groupe $A_7 = Aut(\omega_{8,7})$

Proposition

Le groupe d'automorphismes $A_7 = Aut(\omega_{8,7})$ est déterminé par les suites exactes suivantes

$1 \to A'_7 \to A_7 \to K^* \to 1$

$1 \to A''_7 \to A'_7 \to SL_2(K) \to 1$

$1 \to K^{16} \to A''_7 \to K^* \to 1$

Preuve

On a $\omega_{8,7} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$, on utilise la permutation suivante :

$$\downarrow \begin{array}{|cccccccc|} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ e_1 & e_2 & e_8 & e_7 & e_5 & e_6 & e_4 & e_3 \end{array}$$

donc $\omega_{8,7}$ devient $\omega = e_1e_2e_8 + e_1(e_7e_5 + e_6e_4) + e_2(e_4e_3 + e_5e_6)$

$R_5(\omega) = \{x \in E / \overline{\omega}(x) \text{ est de rang } 5\}$, on remarque que $e_1, e_2 \in R_5(\omega)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{8} \alpha_i e_i$; si $\alpha_1 \neq 0$ on écrit $e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_8 e_8$

parsuite $\overline{\omega}(x) = \lambda_3\overline{e_3e_2e_8} + \lambda_4\overline{e_4e_2e_8} + \lambda_5\overline{e_5e_2e_8} + \lambda_6\overline{e_6e_2e_8} + \lambda_7\overline{e_7e_2e_8} + \lambda_2\overline{e_2e_7e_5} +$
$$+ \lambda_2\overline{e_2e_6e_4} + \lambda_3\overline{e_3e_7e_5} + \lambda_3\overline{e_3e_6e_4} + \lambda_4\overline{e_4e_7e_5} + \lambda_5\overline{e_5e_6e_4} + \lambda_6\overline{e_6e_7e_5}$$
$$+ \lambda_7\overline{e_7e_6e_4} + \lambda_8\overline{e_8e_7e_5} + \lambda_8\overline{e_8e_6e_4} + \overline{e_2e_4e_3} + \overline{e_2e_5e_6}.$$

On utilise l'application $\tilde{f} : E/_{Kx} \to \Lambda^4(E/_{Kx})$ définie par $\tilde{f}(\overline{x'}) = \overline{x'}.\overline{\omega}(x)$,alors:

$\tilde{f}$ n'est pas injective s'il existe $\overline{x'} \neq 0$: $\overline{x'} = \sum_{i\,2}^{8} \delta_i \overline{e_i}$ et $\overline{x'}.\overline{\omega(x)} = 0$,

en utilisant la même méthode on trouve :

$\delta_2 \lambda_3 = 0$ et $\delta_4 \lambda_3 = 0$ et $\delta_2 \lambda_4 - \delta_4 \lambda_2 = 0$

$\delta_2 \lambda_6 = 0$ et $\delta_4 \lambda_5 = 0$ $\delta_2 \lambda_5 - \delta_4 = 0$

$\delta_2 \lambda_7 = 0$ $\delta_4 \lambda_6 = 0$ $et\, \delta_3 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = 0$

$\delta_2 \lambda_8 = 0$ $\delta_4 \lambda_7 = 0$, $\delta_4 \lambda_8 = 0$

si $\delta_2 = 0$ alors $\delta_4 = 0$ avec $\delta_3 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = 0$, ce qui montre:

$\overline{x'} = 0$ (contradiction) donc $\delta_2 \neq 0$alors $\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$ et $\delta_4 \lambda_5 = 0$,

$\delta_2 \lambda_4 - \delta_4 \lambda_2 = 0, \delta_2 \lambda_5 - \delta_4 = 0$, on trouve $\lambda_4 = \lambda_5 \lambda_2\, et\, \delta_4 \lambda_5 = 0$

Si $\delta_4 = 0$ alors $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ d'où $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$.

Si $\delta_5 = 0$ alors $\lambda_4 = 0$ d'où $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$, enfin $e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2$

c-à-d $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$; $\alpha_1 \neq 0$, or

$\overline{\omega(x)} = \lambda_2 \overline{e_2 e_2 e_7 e_5} + \lambda_2 \overline{e_2 e_2 e_6 e_4} + \overline{e_2 e_4 e_3} + \overline{e_2 e_5 e_6} = \overline{e_2}\left[(\lambda_2 \overline{e_7} - \overline{e_6})\overline{e_5} + (\lambda_2 \overline{e_6} - \overline{e_3})\overline{e_4}\right] = \overline{e_2}.u$

où $u = (\lambda_2 \overline{e_7} - \overline{e_6})\overline{e_5} + (\lambda_2 \overline{e_6} - \overline{e_3})\overline{e_4}$.

Calculons $\gamma_2(u) = \dfrac{u^2}{2!}$:

Donc $\gamma_2(u) = \dfrac{1}{2}\left[\lambda^2 \overline{e_7 e_5 e_6 e_4} + \lambda_2 \overline{e_7 e_5 e_4 e_3} + \overline{e_4 e_3 e_5 e_6}\right]$

On remarque que$\gamma_2(u) \neq 0$, pour λ_2 quelconque, par suite $rg(u) \neq 2$. On calcule $\gamma_3(u) = \dfrac{u^3}{3!}$,

on trouve$\gamma_3(u) = 0$, donc:

$$\begin{cases} \gamma_3(u) = 0 \\ \text{et} & \Leftrightarrow rg(u) = 4, \text{ pour } \lambda_2 \text{ quelconque} \\ \gamma_2(u) \neq 0 \end{cases}$$

d'où $R_5(\omega) = \langle e_1, e_2 \rangle$.

Soit $f \in A_7 = Aut(\omega)$, donc la mqtrice associée à f est de la forme:

$M(f) = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où $A_0 \in GL_2(K)$, ceci permet de construire l'homomrphisme φ

$$1 \to A'_7 \to A_7 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K}^* \to 1$$
$$f \mapsto \varphi(f) = det\, A_0 = \lambda$$

φ est surjective en effet pour $\lambda \in K^*$, ilexiste $f_0 \in A_7$ avec:

$f_0(e_1) = \lambda e_1, f_0(e_2) = e_2, f_0(e_3) = \lambda e_3, f_0(e_4) = \lambda^{-1} e_4, f_0(e_5) = e_5, f_0(e_6) = e_6,$

$f_0(e_7) = \lambda^{-1} e_7, f_0(e_8) = \lambda^{-1} e_8 \,/\, \varphi(f_0) = \lambda.$

Soit $f \in A'_7$ donc $\lambda = 1$ c-à-d $A_0 \in SL_2(K)$, ce qui permet de définir un homomorphisme ψ :

$$1 \to A''_7 \to A'_7 \xrightarrow{\psi} SL_2(K) \to 1$$

$$f \mapsto \psi(f) = A_0$$

ψ est surjectif en effet pour $A_0 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$: il existe $M(f) \in A'_7$ définie par:

$$M(f) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^2 & 0 & 0 & a_1b_1 & b_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_1a_2 & 0 & 0 & a_1b_2 + b_1a_2 & 2b_1b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 0 & 0 & a_2b_2 & b_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\psi(f) = A_0$

Soit $f \in A''_7$ donc $A_0 = id_2$ c-à-d $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$, par suite $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$ donnent:

$$e_1e_2\left[f(e_4)f(e_3) + f(e_5)f(e_6)\right] = e_1e_2(e_4e_3 + e_5e_6) \qquad (*)$$

et $e_2e_1\left[f(e_7)f(e_5) + f(e_6)f(e_4)\right] = e_2e_1(e_7e_5 + e_6e_4) \qquad (**)$

Les supports des deux mêmbres de (*) et (**) montrent que les $s.e.v$ $\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\rangle$ et $\langle e_1, e_2, e_4, e_5, e_6, e_7\rangle$ sont stable par $A_7 = Aut(\omega)$, d'où la matrice de f est de la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 & d_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & c_2 & d_2 & \gamma_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & \gamma_4 & \delta_4 & \alpha_4 & \beta_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & \gamma_5 & \delta_5 & \alpha_5 & \beta_5 \\ 0 & 0 & c_6 & d_6 & \gamma_6 & \delta_6 & \alpha_6 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & \beta_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_8 \end{pmatrix}$$

dans l'égalité $\Lambda^3 f(\omega) = \omega$, les coefficients de $e_1e_2e_8$ montrent que $\beta_8 = 1$ et on a:

$e_1e_2(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_7 e_7 + e_8) + e_1\left[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7) \times\right.$

$(\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2+\gamma_4 e_4+\gamma_5 e_5+\gamma_6 e_6)+(\delta_1 e_1+\delta_2 e_2+\delta_4 e_4+\delta_5 e_5+\delta_6 e_6)\times$

$(d_1 e_1+d_2 e_2+d_4 e_4+d_5 e_5+d_6 e_6)]+e_2[(d_1 e_1+d_2 e_2+d_4 e_4+d_5 e_5+d_6 e_6)\times$

$(c_1 e_1+c_2 e_2+c_3 e_3+c_4 e_4+c_5 e_5+c_6 e_6)+(\gamma_1 e_1+\gamma_2 e_2+\gamma_4 e_4+\gamma_5 e_5+\gamma_6 e_6)\times$

$(\delta_1 e_1+\delta_2 e_2+\delta_4 e_4+\delta_5 e_5+\delta_6 e_6)]=e_1 e_2 e_8+e_1 e_7 e_5+e_1 e_6 e_4+e_2 e_4 e_3+e_2 e_5 e_6$, donc:

$c_{242}: d_4 c_3=1$ alors $d_4=c_3^{-1}$

$$\begin{cases} c_{243}: d_4 c_3=1 \\ c_{253}: d_5 c_3=0 \quad \text{alors} \quad d_4=c_3^{-1} \quad \text{et} \quad d_5=d_6=0 \\ c_{263}: d_6 c_3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{175}: \alpha_7\gamma_5=1 \\ c_{174}: \alpha_7\gamma_4=0 \quad \text{alors} \quad \alpha_7=\gamma_5^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_4=\gamma_6=0 \\ c_{176}: \alpha_7\gamma_6=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{256}: \gamma_5\delta_6=1 \quad \text{alors} \quad \delta_6=\gamma_5^{-1} \\ c_{164}: \delta_6 d_4=1 \quad \text{alors} \quad \delta_6=d_4^{-1} \end{cases} \text{donc} \quad d_4=\gamma_5=\delta_6^{-1} \quad \text{et} \quad \alpha_7=\delta_6=c_3$$

$c_{246}: d_4 c_6=0$ alors $c_6=0$

$c_{156}: \alpha_6\gamma_5=0$ alors $\alpha_6=0$

$c_{145}: \alpha_4\gamma_5-\delta_5 d_4=0$ or $d_4=\gamma_5$ donc $\alpha_4=\delta_5$

$c_{245}: d_4 c_5-\gamma_5\delta_4=0$ or $d_4=\gamma_5$ donc $c_5=\delta_4$

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} c_{123}: \beta_3-d_1 c_3 \quad \text{alors } \beta_3=d_1 c_3 \\ c_{124}: \beta_4-\alpha_4\gamma_2+\begin{vmatrix}\delta_2 & d_2\\ \delta_4 & d_4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}d_1 & c_1\\ d_4 & c_4\end{vmatrix}-\gamma_1\delta_4=0 \\ c_{125}: \beta_5+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \gamma_2\\ \alpha_5 & \gamma_5\end{vmatrix}-\delta_5 d_2-d_1 c_5-\begin{vmatrix}\gamma_1 & \delta_1\\ \gamma_5 & \delta_5\end{vmatrix}=0 \\ c_{126}: \beta_6-\delta_6 d_2-\gamma_1\delta_6=0 \quad \text{alors } \beta_6=\delta_6(d_2+\gamma_1) \\ c_{127}: \beta_7-\alpha_7\gamma_2=0 \quad \text{alors } \beta_7=\alpha_7\gamma_2 \end{cases}$$

Les relation (I) donnent $\beta_3,\ldots\ldots,\beta_7$, on en déduit que $M(f)$ s'exprime en fonction de 17 paramètres .

Remarquons que dans la base $\{e_1,e_2,e_5=e'_3,e_4,e'_5=e_3,e_6,e_7,e_8\}$, $M(f)$ prend la forme triangulaire :

$$M(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma_1 & d_1 & c_1 & \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & d_2 & c_2 & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & c_3{}^1 & 0 & c_5 & \alpha_4 & \alpha_5 & \beta_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_3{}^1 & c_4 & c_5 & \alpha_4 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & \beta_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de définir l'homomorphisme ρ :

$$1 \to A'''_7 \to A''_7 \xrightarrow{\rho} K^* \to 1$$
$$f \mapsto \rho(f) = c_3$$

Evidement ρ est surjectif, car il suffit de prendre $M(f)$ avec c_3 donné, donc :

si $f \in A'''_7$, c – à – d $c_3 = 1$, la matrice $M(f)$ associée à f est unipotente donc : $A'''_7 \cong K^{16}$,

finalement $A_7 = Aut(\omega)$ est défini par les suites exactes :

$$1 \to A'_7 \to A_7 \to K^* \to 1$$

$$1 \to A''_7 \to A'_7 \to SL_2(K) \to 1$$

$$1 \to K^{16} \to A''_7 \to K^* \to 1$$

IV - Cardinaux de certains groupes d'automorphismes dans le cas où le corps K est fini

IV - Cardinaux de certains groupes d'automorphismes dans le cas où le corps K est fini

Dans ce qui suit, on suppose que le corps K est fini ($|K| = q,\ K = IF_q$) et de caractéristique quelconque.

Notons ω_i^8 le trivecteur de rang $i\ (1 \leq i \leq 7)$ dans $\Lambda^3 K^8$, et $Aut(\omega_i)$ le groupe d'automorphismes de ω_i dans $\Lambda^3 K^i$.

IV- 1. Cardinal de Aut(ω) où rg (ω) < 8

IV-1-1. Rappelons des résultats classiques et faciles à vérifier [2]

$$\left|GL_n(IF_q)\right| = (q-1)\left|SL_n(IF_q)\right| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)$$

$$\left|G_{n,p}(IF_q)\right| = \left|GL_n(IF_q)\right| \Big/ \left|GL_p(IF_q)\right|.\left|GL_{n-p}(IF_q)\right|.q^{p(n-p)}$$

où $G_{n,p}(IF_q)$ est la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension p de IF_q^n, $1 \leq p \leq n-1$.

IV-1-2. Soit E un espace vectoriel de dimension 8 sur un corps fini $K = IF_q$. Les groupes d'automorphismes dans $\Lambda^3 K^8$ des trivecteurs de rang inférieur sont déterminés par les suites exactes suivantes : [1] , [4]

- $\omega_3 = e_1 e_2 e_3$ alors $Aut(\omega_3)$ est le groupe spécial $SL_3(IF_q)$, $Aut(\omega_3) = SL_3(IF_q)$

$$|Aut(\omega_3)| = \left|SL_3(IF_q)\right| = q^3(q^3-1)(q^2-1)$$

- $\omega_5 = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$ alors $Aut(\omega_5)$ est défini par:

$$1 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow K^* \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow K^4 \rightarrow A' \rightarrow Sp_4(K) \rightarrow 1 \text{ où } A = Aut(\omega_5).$$

donc: $|Aut(\omega_5)| = |K^4|.|K^*|.|SP_4(k)| = q^8(q-1)\Pi_{i=1}^{2}(q^{2i}-1)$

- $\omega_{6,1} = e_1 e_2 e_3 + e_4 e_5 e_6$ alors $A = Aut(\omega_{6,1})$ est défini par :

$$1 \to SL_3(K)\times SL_3(K) \to A \to Z/2Z \to 1$$

donc $|Aut(\omega_{6,1})| = |Z/2Z|.|SL_3(K)|^2 = 2q^6(q^3-1)^2(q^2-1)^2$

- $\omega_{6,2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6$ alors $A = Aut(\omega_{6,2})$ vérifie la suite exacte

$$1 \to K^8 \to A \to GL_3(K) \to 1$$

donc $|Aut(\omega_{6,2})| = |K^8|.|GL_3(k)| = q^{11}(q^3-1)(q^2-1)(q-1)$

- $\omega_{7,1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$ alors $A = Aut(\omega_{7,1})$ est défini par:

$$1 \to A' \to A \to K^* \to 1$$

$$1 \to K^6 \to A' \to Sp_6(K) \to 1$$

donc: $|Aut(\omega_{7,1})|. = |K^6|..|K^*|..|Sp_6(K)| = q^{15}(q-1)\prod_{i=1}^{3}(q^{2i}-1).$

- $\omega_{7,2} = \omega_{7,1} + e_2e_4e_6$ alors $A = Aut(\omega_{7,2})$ est donné par les suites exactes:

$$1 \to A' \to A \to K^* \to 1$$

$$1 \to K^9 \to A' \xrightarrow{\psi} SL_4(K)$$

$$1 \to K^3 \to \psi(A') \to SL_3(K) \to 1$$

donc : $|Aut(\omega_{7,2})| = q^{15}(q^3-1)(q^2-1)(q-1)$

- $\omega_{7,3} = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7$ *alors* $A = Aut(\omega_{7,3})$ est donné par les suites exactes:

$$1 \to A' \to A \to Z/2Z \to 1$$

$$1 \to A'' \to A' \to K^* \times K^* \to 1$$

$$1 \to K^{10} \to A'' \to SL_2(K) \times SL_2(K) \to 1$$

donc : $|Aut(A_{7,3})| = 2q^{12}(q-1)^2(q^2-1)^2$

- $\omega_{7,4} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$ alors $A = Aut(\omega_{7,4})$ est donné par les suites exactes:

$$1 \to A' \to A_4 \xrightarrow{\pi} GL_3(K)$$

$$1 \to PGL_2(K) \to \pi(A_4) \to K^* \to 1$$

$$1 \to K^8 \to A' \to SL_2(K) \to 1$$

donc : $\left|Aut(\omega_{7,4})\right| = q^{10}(q^2-1)^2(q-1)$

– $\omega_{7,5} = \omega_{7,2} + e_3e_5e_7$ alors $A = Aut(\omega_{7,5})$ verifie la suite exacte suivante:

$$1 \to G_2(K) \to A \to \mu_3(K) \to 1$$

donc : $\left|Aut(\omega_{7,5})\right| = \left|G_2(k)\right|.\left|\mu_3(k)\right| = \varepsilon q^6(q^6-1)(q^2-1)$

où ε est défini par: $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } pgcd(q-1,3)=1 \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$

et $\mu_3(K) = \{x \in K^* / x^3 = 1\}$

IV-1 -3. Lemme

Soit $K = IF_q$ un corps fini de caractéristique quelconque tel que $|K| = q$, alors le cardinal de $Aut(\omega_i^8), i < 8$ dans $\Lambda^3 K^8$ est donné par:

$\left|Aut(\omega_i^8)\right| = \left|GL_{8-i}(IF_q)\right|.\left|Aut(\omega_i)\right|.q^{i(8-i)}$

Preuve :

Comme $\left|Aut(\omega_i^8)\right| = \left|GL_8(IF_q)\right| \big/ \left|O(\omega_i^8)\right|$, où $O(\omega_i^8)$ est l'orbite de ω_i dans $\Lambda^3 K^8$

Pour calculer $O(\omega_i^8)$, on calcule tout d'abord le cardinal de son orbite dans $\Lambda^3 K^i$ c'est:

$\left|GL_i(IF_q)\right| \big/ \left|Aut(\omega_i)\right|$;

Ensuite le cardinal de son orbite dans $\Lambda^3 K^8$ s'obtient en multipliant par $\left|G_{8,i}(IF_q)\right|$.

On obtient alors $\left|O(\omega_i^8)\right| = \left(\left|GL_i(IF_q)\right| \big/ \left|Aut(\omega_i)\right|\right).\left|G_{8,i}(IF_q)\right|$,

donc $\left|O(\omega_i^8)\right| = \left|GL_8(IF_q)\right| \big/ \left|GL_{8-i}(IF_q)\right|.q^{i(8-i)}.\left|Aut(\omega_i)\right|$,

d'où $\left|Aut(\omega_i^8)\right| = q^{i(8-i)}\left|GL_{8-i}(IF_q)\right|.\left|Aut(\omega_i)\right|$.

IV-1- 4. Cardinal de $Aut(\omega_i^8)$

Le cardinal de groupe d'automorphismes de trivecteur de rang inférieur à 8 est donné par :

– Pour $i = 3$, on a $\left|Aut(\omega_3^8)\right| = q^{3(8-3)}\left|GL_5(IF_q)\right| . \left|Aut(\omega_3)\right|$,

donc $\left|Aut(\omega_3^8)\right| = q^{28}(q^5-1)(q^3-1)(q^3-1)^2(q^2-1)^2(q-1)$.

– Pour $i = 5$, on a $\left|Aut(\omega_5^8) = q^{15}\right|GL_3(IF_q)\left| . \right|Aut(\omega_5)\right|$,

donc $\left|Aut(\omega_5^8)\right| = q^{26}(q^4-1)(q^3-1)\ (q^2-1)^2(q-1)^2$.

– Pour $i = 6$, on a $\left|Aut(\omega_{6,1}^8)\right| = q^{12}\left|GL_2(IF_q)\right| . \left|Aut(\omega_{6,1})\right|$,

donc $\left|Aut(\omega_{6,1}^8)\right| = 2q^{19}(q^3-1)^2(q^3-1)^3(q-1)$.

– Pour $Aut(\omega_{6,2}^8)$, on a $\left|Aut(\omega_{6,2}^8)\right| = q^{12}\left|GL_2(IF_q)\right| . \left|Aut(\omega_{6,2})\right|$,

donc $\left|Aut(\omega_{6,2}^8)\right| = q^{24}(q^3-1)(q^2-1)^2(q-1)^2$.

– Pour $i = 7$, on a $\left|Aut(\omega_{7,1}^8)\right| = q^7\left|GL_1(IF_q)\right| . \left|Aut(\omega_{7,1})\right|$,

donc $\left|Aut(\omega_{7,1}^8)\right| = q^{22}(q^6-1)(q^4-1)(q-1)^2(q^2-1)$,

- Pour $Aut(\omega_{7,2}^8)$, on a $\left|Aut(\omega_{7,2}^8)\right| = q^7\left|GL_1(IF_q)\right| \left|Aut(\omega_{7,2})\right|$.

donc $Aut(\omega_{7,2}^8) = q^{22}(q^3-1)(q^2-1)(q-1)^2$.

- Pour $Aut(\omega_{7,3}^8)$, on a $\left|Aut(\omega_{7,3}^8)\right| = q^7\left|GL_1(IF_q)\right| . \left|Aut(\omega_{7,3})\right|$

donc $\left|Aut(\omega_{7,3}^8)\right| = 2q^{19}(q^2-1)^2(q-1)^3$

- Pour $Aut(\omega_{7,4}^8)$, on a $\left|Aut(\omega_{7,4}^8)\right| = q^7\left|GL_1(IF_q)\right| . \left|Aut(\omega_{7,4})\right|$

donc $\left|Aut(\omega_{7,4}^8)\right| = q^{17}(q^2-1)^2(q-1)^2$.

- Pour $Aut(\omega_{7,5}^8)$, on a $\left|Aut(\omega_{7,5}^8)\right| = q^7.\left|GL_1(IF_q)\right| . \left|Aut(\omega_{7,5})\right|$

donc $\left|Aut(\omega_{7,5}^8)\right| = \varepsilon q^{13}(q^6-1)(q^2-1)(q-1)$.

donc $\left|Aut(\omega_{7,5}^8)\right| = \varepsilon q^{13}(q^6-1)(q^2-1)(q-1)$.

IV-1-5. Cardinal de $O(\omega_i^8)$

On a $\left|O(\omega_i^8)\right| = \dfrac{\left|Gl_8(IF_q)\right|}{\left|Aut(\omega_i^8)\right|}$ donc:

$\left|O(\omega_3^8)\right| = (q^7-1)(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)$

$\left|O(\omega_5^8)\right| = q^2(q^7-1)(q^5-1)(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$.

$$|O(\omega^8_{6,1})| = \frac{1}{2}q^9(q^7-1)(q^5-1)(q^4+1)(q^3+1)(q^2+1)^2$$

$$|O(\omega^8_{6,2})| = q^4(q^8-1)(q^7-1)(q^5-1)(q^3+1)(q^2+1)(q^2+q+1)$$

$$|O(\omega^8_{7,1})| = q^6(q^8-1)(q^7-1)(q^5-1)(q^2+q+1)$$

$$|O(\omega^8_{7,2})| = q^6(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2+1)(q+1)$$

$$|O(\omega^8_{7,3})| = \frac{1}{2}q^9(q^8-1)(q^7-1)(q^5-1)(q^3+1)(q^2+1)(q^2+q+1)^2$$

$$|O(\omega^8_{7,4})| = q^{11}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2+1)(q^2+q+1)$$

$$|O(\omega^8_{7,5})| = \frac{1}{\varepsilon}q^{15}(q^8-1)(q^7-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^3-1)$$

IV-2. Cardinal de $Aut(\omega_i^8)$

IV-2-1. Le cardinal de $A_i = Aut(\omega_{8,i})_{1\leq i\leq 7}$, est donné par :

$$|A_1| = |SL_3(K)||K^*|.|Sp_4(K)|.|K^4| = q^{11}(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)^2(q-1)$$

$$|A_2| = |K^{*2}|.|SL_2^2(K)|.|K^{16}| = q^{18}(q^2-1)^2(q-1)^2$$

$$|A_3| = |K^{*2}|.|SL_2^2(K)|.|K^9| = q^{11}(q^2-1)^2(q-1)^2$$

$$|A_4| = |Z/2Z|.|K^2|.|SL_2^2(K)|.|K^{12}| = 2q^{14}(q^2-1)^2(q-1)^2$$

$$|A_5| = |Z/2Z|.|K^*|.|SL_2^3(K)|.|K^6| = 2q^9(q^2-1)^3(q-1)$$

$$|A_6| = |K^{*2}|.|SL_2(K)|.|K^{13}| = q^{14}(q^2-1)(q-1)^2$$

$$|A_7| = |K^{*2}|.|SL_2(K)|.|K^{16}| = q^{17}(q^2-1)(q-1)^2$$

IV-2-2. Cardinal de l'orbite $O(\omega_{8,i})$

Le cardinal de l'orbite de $\omega_{8,i}$ est donné par :

$$|O(\omega_{8,i})| = \frac{|GL_8(IF_q)|}{|Aut(\omega_{8,i})|}\quad 1\leq i\leq 7.$$

donc on a :

$$|O(\omega_{8,1})| = q^{17}(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4+1)(q^2+1)$$

$$|O(\omega_{8,2})| = q^{10}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2+1)(q^2+q+1)$$

$$|O(\omega_{8,3})| = q^{17}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2+1)(q^2+q+1)$$

$$|O(\omega_{8,4})| = \frac{1}{2}q^{14}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2+1)(q^2+q+1)$$

$$|O(\omega_{8,5})| = \frac{1}{2}q^{19}(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^3-1)(q^4+1)(q^2+1)^2$$

$$|O(\omega_{8,6}| = q^{14}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^2+q+1)$$

$$|O(\omega_{8,7})| = q^{11}(q^8-1)(q^7-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^4-1)(q^2+q+1)$$

IV-2-3. Remarque

Notons que la quantité $S=|\Lambda^3 E|-\left(\Sigma_i|O(\omega_i^n)|+\Sigma_i|O(\omega_{n,i})|\right)$ dépend du corps de base choisi, comme le montre le cas $n=7$ où S est nulle pour C et ne l'est pas pour un corps fini ([5]).

Il est probable qu'il soit ainsi pour $n=8$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N . Bourbaki , ***Algèbre*** , chapitres 1 à 3 , Hermann , Paris , 1970 .

[2] N . Bourbaki , ***Algèbre*** , chapitre 9 , Hermann , Paris 1959 .

[3] A . Cohen et A . Helminck , ***Trilinear alternating forms on a vector space of dimension*** 7, comm. in Algebra 16(1) , 1988 , p-25.

[4] G.B . Gurevitch, ***Theory of algebraic invariants*** , P .Noordhof LTD, Groningen, the Netherland , 1964.

[5] L.Noui et Ph. Revoy, ***Formes multilinéaires alternées***, Ann .Math. Blaise Pascal , VOL 1 n° =2 , 1994, pp 43 - 69.

[6] L. Noui, ***Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire***, thèse, université de Montpellier II, France , 1995.

[7] L.Noui . ***Classification des Formes trilinéaires alternées de rang 8 sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque***, comm colloque d'algèbre 2-3 Juin 96 , USTHB Alger.

[8] I. OZEKI , ***On the Microlocal structure of à Regular prohomogeneous vector space Associated with GL(8)***, proc. Japan Acad , 56, ser, A(1980).

[9] Ph. Revoy, ***Formes alternées et puissances divisées***, sém .P Dubreil , 26ème année, 1972 - 73, n° 8 , 10 P.

[10] Ph. Revoy, ***Trivecteurs de rang 6 , in coll. sur les formes quadratiques***, mémoire SMF 59, 1979, P.141 - 155 .

[11] Ph. Revoy, ***Formes trilinéaires alternées de rang*** 7, Bull. sc. Math.112, 1988 P. 357-368.

The automorphism groups of the alternating forms of rank 8.

Résumé en Anglais

Let E be a finite dimensional K vector space . The linear group GL(E) operates canonically over the space $\wedge^3$ E (or the space of the alternating forms) . The study of orbits use the classification over the arbitrary algebraically closed field K and the golois cohomology. The object of our work is the study of automorphism groups of alternating forms of rank 8. When the arithmetical invariant d_1 (ω) is equal to 3 or 5 . To carry this study, we have introduced some notions of exterior algebra: p-vector , rank, and invariants and we give a complete description for the automorphism groups.

Groupes d'automorphismes de formes trilinèaires alternées de rang 8.

Résumé en Français

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K. Le groupe linéaire GL(E) opère canoniquement sur l'espace $\wedge^3$ E (ou l'espace des formes trilinèaires alternées , par dualité) , la détermination des orbites se fait en deux étapes: La classification sur un corps algèbriquement clos de caractéristique quelconque et l'utilisation de la cohomologie galoisienne. Dans ce travail nous nous interessons au groupes d'automorphismes des formes trilinéaires alternées de rang 8 dont l'invariant numérique d_1 (ω) vaut 3 ou 5 , pour ce faire on introduit des notions d'algèbre exterieure (p-vecteur , rang , support ,invariant , groupes d'automorphismes, ..., Ces groupes sont complètement déterminés à l'aide des parties stables convenables.

زمر تذاكلات الأشكال ثلاثية الخطية

المتناوبة من الرتبة 8

Résumé en Arabe

ليكن E فضاء شعاعيا بعده n على حقل تبديلي K. الزمرة الخطية $GL(E)$ تؤثر طبيعيا على الفضاء $\wedge^3 E$ (أو على فضاء الأشكال ثلاثية الخطية المتناوبة وهذا بالثنوية).

تعيين المدارات يتم أولا بالتصنيف على حقل مغلق جبريا و بمميز كيفي ثم بإستخدام كومولوجية غالوا. كذلك نحدد زمر تذاكلات الأشكال ثلاثية الخطية المتناوبة من الرتبة 8 وبحيث اللمتغير الحسابي $d_1(\omega)$ يساوي 3 أو 5. لحساب مثل هذه الزمر نستعين بمفاهيم من الجبر الخارجي ونستخدم أجزاء صامدة ملائمة.