

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Frères Mentouri à Constantine



**Faculté des sciences exactes
Département des Mathématiques**

N° d'ordre: 111/DS/2015
Série: 03/MAT/2015

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Option: Analyse Appliquée

Par

Adel Ouannas

Intitulée

Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets

Soutenue le: 07/12../2015

Devant le jury composé de :

- Mr. L. Merhoune	Prof.	Université de Constantine
- Mr. E. Zeraouia	Prof.	Université de Tébessa
- Mr. N.E. Hamri	Prof.	Centre universitaire de Mila
- Mr A. Ayadi	Prof.	Université d' O.E.B
- Mr K. Saoudi	MC.A	Université de Khenchela

Président.
Rapporteur.
Examineur.
Examineur.
Examineur.

Table des matières

Introduction générale	
1 Préliminaire sur les systèmes dynamiques non-linéaires discrets	1
1.1 Introduction	2
1.2 Notions de base	3
1.2.1 Système dynamique discret	3
1.2.2 Orbites	3
1.2.3 Points fixes	3
1.2.4 Points périodiques et p-cycles	3
1.3 Stabilité	4
1.3.1 Définitions	4
1.3.2 Linéarisation	5
1.3.3 Fonction de Lyapunov	5
1.4 Bifurcations	6
1.4.1 Définitions	6
1.4.2 Types de bifurcations	6
1.5 Section de Poincaré	7
1.5.1 Définition	7
1.5.2 Avantages de La méthode	8
1.6 Conclusion	8
2 Généralités sur le chaos	9
2.1 Introduction	10
2.2 Définition du chaos	11
2.3 Caractéristiques du chaos	12
2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales	12
2.3.2 Exposants de Lyapunov	12

2.3.3	Dimension fractale	14
2.3.4	Attracteur étrange	14
2.4	Transitions vers le chaos	15
2.4.1	Cascade de doublements de période	15
2.4.2	Par intermittence	15
2.4.3	Scénario de Ruelle et Takens	15
2.5	Conclusion	16
3	Exemples de systèmes chaotiques discrets (SCD)	17
3.1	Introduction	18
3.2	Systèmes chaotiques discrets dans le plan	18
3.2.1	Attracteur d'Hénon	18
3.2.2	Application de Lozi	19
3.2.3	Système de Lorenz discret	20
3.2.4	Modèle de Flow	21
3.2.5	Système de Zeraoulia-Sprott	22
3.3	Systèmes chaotiques discrets dans l'espace	23
3.3.1	Système de Hitzl-Zele	23
3.3.2	Système de Stefanski	24
3.3.3	Système de Baier-Klein	25
3.3.4	Système de Rössler discret	26
3.3.5	Système de Wang	27
3.4	Conclusion	28
4	Théorie de synchronisation	29
4.1	Introduction	30
4.2	Types de synchronisation	31
4.2.1	Synchronisation complète	31
4.2.2	Anti-Synchronisation	31
4.2.3	Synchronisation décalée	32
4.2.4	Synchronisation projective	32
4.2.5	Synchronisation FSHP	32
4.2.6	Synchronisation généralisée	33
4.2.7	Synchronisation Q-S	33
4.3	Méthodes de synchronisation	33

4.3.1	Méthode du contrôleur actif	34
4.3.2	Méthode du Backstepping	35
4.3.3	Méthode du mode glissant	36
4.4	Synchronisation chaotique et cryptage	38
4.4.1	Cryptage par addition	39
4.4.2	Cryptage par commutation	39
4.4.3	Cryptage par modulation	40
4.5	Conclusion	41
5	Quelques nouveaux résultats sur la synchronisation des systèmes chaotiques discrets	42
5.1	Introduction	43
5.2	Nouveau schéma de synchronisation chaotique pour des systèmes quadratiques en 3D	44
5.2.1	Systèmes maître-esclave	44
5.2.2	Nouveau schéma de synchronisation	45
5.2.3	Exemple d'illustration	46
5.3	Synchronisation FSHP inverse	48
5.3.1	Définition de synchronisation FSHP inverse	48
5.3.2	Synchronisation FSHP inverse en 2D	49
5.3.3	Synchronisation IFSHP en 3D	50
5.3.4	Synchronisation IFSHP en n -D	52
5.3.5	Exemples	53
5.4	Synchronisation généralisée des systèmes chaotiques discrets avec des dimensions différentes	56
5.4.1	Problème classique de la synchronisation généralisée	57
5.4.2	Problème inverse de la synchronisation généralisée	58
5.4.3	Exemples numériques	59
5.5	Nouveau type-généralisé de synchronisation chaotique	63
5.5.1	Synchronisation $\Lambda - \phi$ généralisée	64
5.5.2	Critère de synchronisation dans le cas : $d = m$	64
5.5.3	Critère de synchronisation dans le cas : $d \neq m$	65
5.5.4	Applications	67
5.6	Nouveau critère pour de synchronisation pour les systèmes chaotiques discrets	71
5.6.1	Cas des systèmes différents	71
5.6.2	Cas des systèmes identiques	74

5.6.3	Simulation numérique	75
5.7	Conclusion	76

Avant-propos

Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le Miséricordieux qui m'a donné la force, le courage et la réussite et qui a mis à ma disposition des gens merveilleux qui m'ont supporté et soutenu.

Aussi, je tiens à remercier chaleureusement mon Directeur de thèse Monsieur **E. Zeraoulia**, professeur à l'université de Cheikh Larbi Tebssi à Tebessa pour son soutien, sa générosité, sa disponibilité et sa patience. Je suis reconnaissant envers lui pour tout ce qu'il m'a apporté sur le plan scientifique. Merci pour tous les échanges scientifiques et les conseils précieux. Il était toujours présent pour moi tout au long de la thèse malgré ses nombreuses responsabilités, il a fortement contribué à mon évolution scientifique.

Je remercie chaleureusement les membres du Jury qui m'ont honoré d'avoir accepté évaluer mon travail. En particulier, je tiens à exprimer mon profond respect et ma parfaite reconnaissance pour le grand honneur que m'a fait Monsieur **L. Merhoune**, professeur, à l'université de Frères Mentouri à Constantine, en acceptant de présider le Jury de l'évaluation.

J'exprime ma très vive reconnaissance et toute ma gratitude à Monsieur **N.E. Hamri**, professeur, au centre universitaire d'Abdelhafid Boussouf à Mila, pour avoir bien voulu accepter de rapporter sur mon travail et participer au Jury.

Je suis très honoré que Monsieur **A. Ayadi**, professeur à l'université de Larbi Ben M'hidi à Oum El Bouaghi, que je remercie vivement, ait accepté d'examiner mon travail.

Je suis heureux d'exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **K. Saoudi** maître de conférences, à l'université Abbès Laghrour à Khenchela qui m'a fait l'honneur d'examiner mon travail.

J'adresse mes sincères remerciements à toute personne dont l'intervention a favorisé son aboutissement.

Merci à tous.

.

Liste des Figures.

- p. 18 Figure 3.1 : L'attracteur d'Hénon pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$.
- p. 19 Figure 3.2 : L'attracteur de Lozi pour les valeurs $a = 1.7$ et $b = 0.5$.
- p. 20 Figure 3.3 : L'attracteur de Lorenz discret pour les valeurs $\alpha = 1.25$ et $\beta = 0.75$.
- p. 21 Figure 3.4 : L'attracteur de Flow pour les valeurs $a = 0.1$ et $b = 1.7$.
- p. 22 Figure 3.5 : L'attracteur du système (3.5) pour $a = 3.36$, $b = 1.4$, $m_0 = 0.43$ et $m_1 = 0.41$.
- p. 23 Figure 3.6 : L'attracteur d'Hitzl-Zele lorsque $(\alpha, \beta) = (1.07, 0.3)$.
- p. 24 Figure 3.7 : L'attracteur de Stefanski lorsque $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.2$.
- p. 25 Figure 3.8 : L'attracteur hyperchaotique de Baier-Klein.
- p. 26 Figure 3.9 : L'attracteur hyperchaotique de Rössler à temps discret.
- p. 27 Figure 3.10 : L'attracteur hyperchaotique de système Wang.
- p. 38 Figure 4.1 : Cryptage par addition.
- p. 39 Figure 4.2 : Cryptage par commutation.
- p. 40 Figure 4.3 : Cryptage par modulation.
- p. 47 Figure 5.1 : L'évolution des erreurs de la SC entre les systèmes (5.10) et (5.11).
- p. 52 Figure 5.2 : L'évolution des erreurs de la SG entre les systèmes (5.31) et (5.32).
- p. 54 Figure 5.3 : L'évolution des erreurs de la SIG entre les systèmes (5.37) et (5.38).
- p. 59 Figure 5.4 : L'évolution des erreurs entre les systèmes (5.59) et (5.60) dans 3D.
- p. 61 Figure 5.5 : L'évolution des erreurs entre les systèmes (5.59) et (5.60) dans 2D.
- p. 67 Figure 5.6 : L'évolution de l'erreur e_1 .
- p. 68 Figure 5.7 : L'évolution de l'erreur e_2 .

Introduction générale

La synchronisation du chaos, sujet important sur les applications des sciences non linéaires, a été développé et largement étudiée au cours des dernières années.

Parallèlement aux grandes avancées réalisées dans la théorie du chaos, les perspectives de l'utilisation du chaos dans diverses applications, ont motivé les chercheurs à étudier la question de l'éventuelle possibilité de synchroniser le chaos. La synchronisation des oscillateurs non linéaires est un phénomène qui a attiré l'attention des chercheurs depuis le constat et la description de ce phénomène par **Huygens** en **1673**. Jusqu'à ce jour là, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés. Tout d'abord avec les travaux de **Yamada** et **Fujisaka** qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, **Afraimovich** et **Al.** ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement **Pecora** et **Carroll** ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation **identique**, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un appelé maître et l'autre esclave. Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation **généralisée**, dont **Rulkov** et **Al.** ont posé les bases.

Au cours des dernières années, la synchronisation des systèmes chaotiques a attiré beaucoup d'attention en raison de ses larges applications dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie. Différentes méthodes et diverses approches ont été appliquées avec succès à la synchronisation du chaos et hyperchaos dans les systèmes dynamiques, telles que : la méthode de contrôleur actif (adaptif), la méthode Feedback, la méthode de backstepping design et la méthode de contrôleur en mode glissant, etc.,. De nombreux types de synchronisation ont été proposés dans les systèmes chaotiques intéressants telles que : la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation projective, la synchronisation projective fonctionnelle, la synchronisation généralisée et la synchronisation Q-S, etc.,. La plupart des travaux en synchronisation du chaos ont été concentrés sur les systèmes chaotiques continus plutôt que les systèmes discrets.

Dans la pratique, les systèmes dynamiques chaotiques à temps discret jouent un rôle plus important que leurs parties continues. En fait, de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques ont été définis à l'aide des systèmes dynamiques discrets. Par conséquent, il est important de considérer la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques (hyperchaotiques) discrets. Récemment, de plus en plus d'attentions ont été accordées à la synchronisation du chaos (hyper-

chaos) dans les systèmes dynamiques discrets en raison de ses applications dans la télécommunication, la transmission sécurisée d'informations et la cryptographie.

Cette thèse a pour objet l'étude de la synchronisation des systèmes chaotiques discrets. Les principales visées de cette thèse sont :

1. Développement de nouveaux schémas de synchronisation pour les systèmes chaotiques (hyperchaotiques) discrets.
2. Proposition de nouveaux types de synchronisation chaotique dans le cas des systèmes discrets.
3. Etendre l'application des méthodes qui ont été obtenues à des classes plus larges de systèmes chaotiques discrets.
4. Recherche de nouveaux critères pour la synchronisation chaotiques discrète sans faire appel aux critères classiques.

Ce travail est donc structuré en cinq chapitres :

Le premier chapitre : consacré aux notions de base sur les systèmes dynamiques non-linéaires discrets tels que : la définition de système dynamique discret, les points fixes avec leurs classification et stabilité, en passant par la théorie de bifurcation et finissant par la section de Poincaré.

Dans le deuxième chapitre : nous faisons un panorama sur la théorie du chaos déterministe tels que : la définition du chaos, les caractéristiques du chaos et les divers scénarios de transition vers le chaos.

Dans le troisième chapitre : pour une bonne illustration de toutes les notions précédentes, des exemples concrets sur des systèmes chaotiques discrets dans le plans et dans l'espace sont donnés. Ces exemples seront utilisés comme des applications numériques pour valider les schémas et les critères de synchronisations que nous donnerons dans le dernier chapitre.

Le quatrième chapitre : après une introduction sur l'historique de la théorie de la synchronisation, on trouve aussi deux sections sur les différents types connus dans la synchronisation et les méthodes les plus usées et se termine par les méthodes de transmission chaotiques les plus rencontrées qui reposent sur le principe de synchronisation chaotique.

Le cinquième chapitre : expose le contenu de notre travail qui consiste en quelques nouveaux résultats sur la synchronisation des systèmes chaotiques discrets. Ce chapitre a fait l'objet de cinq publications :

1. **A New Synchronization Scheme for General 3D Quadratic Chaotic Systems in Discrete-Time.** *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 15 (2) (2015) pp. 163–170.
- 2- **On inverse full state hybrid projective synchronization of chaotic dynamical systems in discrete-time,** *International journal of dynamics and control*, 2015.

3- Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time. *Nonlinear Dynamics*, 2015.

4- A New Generalized-Type of Synchronization for Discrete-Time Chaotic Dynamical Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 10 (6), (2015), pp. 061019-8.

5- A New Chaos Synchronization Criterion for Discrete Dynamical Systems. *Applied Mathematical Sciences*, 8 (41), 2014, pp. 2025-2034.

À la fin, notre thèse sera terminée par une conclusion générale suivie d'une bibliographie riche, contenant plusieurs références concernant les systèmes dynamiques discrets, la théorie du chaos et la théorie de synchronisation.

Chapitre 1

Préliminaire sur les systèmes dynamiques non-linéaires discrets

-
- 1- Introduction
 - 2- Définitions et notions de base
 - 3- Stabilité
 - 4- Bifurcations
 - 5- Section de Poincaré
 - 6- Conclusion
-

1.1 Introduction

En mathématiques, en chimie et en physique théorique, un système dynamique est un ensemble très général de composants en interaction (un système), répartis sur plusieurs états et structurés selon certaines propriétés ; il est le plus souvent régi par un ensemble d'équations différentielles décrivant le mouvement des composants (leur dynamique) où interviennent une classe de paramètres accessibles.

On inclut donc dans cette définition les systèmes stochastiques qui satisfont l'hypothèse d'ergodicité, conservatif (qui conserve l'énergie totale) ou dissipatif (qui dissipe de l'énergie). La dynamique d'un nuage, d'une région de fluide, d'une galaxie en sont des exemples concrets. Les systèmes intégrables étudiés par **H. Poincaré** sont exceptionnels. Ce savant inventa une nouvelle théorie pour les étudier grâce à son approche de la géométrie des trajectoires dans l'espace des phases du système. L'espace des phases est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, une variété différentielle ou un espace mesurable, etc.,. Donc un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

- **causale** : c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent ;
- **déterministe** : c'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

On exclut donc dans la définition appliquée conventionnellement les systèmes «bruités» intrinsèquement stochastiques, qui relèvent de la théorie des probabilités. L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes :

- une évolution **continue** dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire. C'est à priori la plus naturelle physiquement, puisque le paramètre temps nous semble continu.
- une évolution **discontinue** dans le temps. Ce second cas est souvent le plus simple à décrire mathématiquement, même s'il peut sembler à priori moins réaliste physiquement. Cependant, l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

Le but de ce chapitre est de donner les notions de base concernant les systèmes dynamiques discrets et leurs propriétés telles que la stabilité et les bifurcations. Ainsi la méthode intéressante de la section de Poincaré et ses avantages.

1.2 Notions de base

1.2.1 Système dynamique discret

Un système dynamique discrets est représenté par une équation aux différences finies comme suit :

$$x(k+1) = F(x(k), k), \quad (1.1)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$. On peut écrire aussi :

$$F^0(x) = x, F^1(x) = F(x), F^2(x) = F(F(x)), \dots, F^k(x) = F(F^{k-1}(x)),$$

et

$$x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_k = F^k(x_0).$$

1.2.2 Orbites

L'orbite de x par le système dynamique F est définie par :

$$O = \{F^k(x), k \in \mathbb{N}\}. \quad (1.2)$$

1.2.3 Points fixes

On appelle "point fixe" d'un système dynamique discret F tout point x tel que

$$F^p(x) = x, \quad p = 0, 1, 2 \quad (1.3)$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre. Si la matrice jacobienne $DF(x)$ n'a pas de valeurs propres dont le module soit égal à $+1$, x est un point fixe **hyperbolique**. Si tous les modules des valeurs propres de $DF(x)$ sont égaux à $+1$, x est un point fixe **elliptique**.

1.2.4 Points périodiques et p-cycles

S'il existe $k \geq 1$, tel que $F^k(x) = x$, on dit que x est un point **périodique**. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que :

$$F^k(x) = x. \quad (1.4)$$

Un ensemble $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un p -cycle), si :

$$\begin{cases} F(x(i)) = x(i+1), & i = 0, 1, \dots, p-1, \\ F(x(p-1)) = x(0). \end{cases} \quad (1.5)$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour F^p où $F^p(x(i)) = x(i)$, pour $i = 0, 1, \dots, p-1$ et n'est pas un point fixe pour F^k si $k < p$.

1.3 Stabilité

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes. Nous n'abordons ici que le problème du point fixe et pour les points périodiques de période p , il suffit de considérer la p -ième itérée de l'application.

Soit le système dynamique non linéaire

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad (1.6)$$

dont la réponse est telle que :

$$x(k) = x(k, k_0, x(k_0)), \quad (1.7)$$

et les condition initiales définies par

$$x(k_0) = x(0). \quad (1.8)$$

Soit x_f un point fixe du système, on a :

$$x_f = F(x_f). \quad (1.9)$$

1.3.1 Définitions

Définition 1.1 Le système est dit **stable au sens de Lyapunov** par rapport au point fixe x_f si pour des conditions initiales $x(k_0)$ suffisamment proches du point fixe soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta : \|x(k_0) - x_f\| < \delta \Rightarrow \|x(k, k_0, x(k_0)) - x_f\| < \varepsilon, \forall k \geq k_0. \quad (1.10)$$

Définition 1.2 Le point fixe x_f est **attractif** lorsqu'il y a convergence de l'état x vers l'état x_f au bout d'un temps infini, les conditions initiales $x(k_0)$ étant bornées, soit :

$$\forall k_0 \in \mathbb{N}; \exists \delta_0(k_0), \text{ tel que : } \|x(k_0) - x_f\| < \delta_0(k_0) \Rightarrow \lim x(k, k_0, x(k_0)) = x_f, \quad (1.11)$$

lorsque $\delta_0(k_0) = +\infty$, on dit que le point fixe x_f est globalement attractif.

Définition 1.3 Le point fixe x_f est dit **asymptotiquement** (respectivement globalement asymptotiquement) stable lorsqu'il est à la fois stable au sens de Lyapunov et attractif (respectivement globalement asymptotiquement)

1.3.2 Linéarisation

On considère le cas où le système non linéaire décrit par (1.6) admet, au voisinage de $x_f = 0$, un développement limité de la forme :

$$x(k+1) = Ax(k) + r(\|x\|), \quad (1.12)$$

dans lequel la matrice A est constante et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|r(\|x\|)\|}{\|x\|} = 0. \quad (1.13)$$

Le système linéaire décrit par la relation :

$$x(k+1) = Ax(k), \quad (1.14)$$

peut être considéré comme la linéarisation de (1.6) autour $x_f = 0$. il permet de statuer, localement, sur la stabilité du système non linéaire au point $x_f = 0$.

Théorème 1.1 1- Si tous les valeurs propres de A sont des modules strictement inférieurs à l'unité, alors le point fixe x_f du système (1.6) est asymptotiquement stable.

2- Si la matrice A admet au moins une valeur propre de module strictement supérieur à l'unité, alors le point fixe x_f est instable.

3- Si certaines valeurs propres de la matrice A sont sur le cercle du rayon de l'unité et les autres à l'intérieur, on ne peut pas conclure la stabilité locale du point fixe x_f .

1.3.3 Fonction de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov permet l'analyse de la stabilité directement à partir des équations qui décrivent le système et ne nécessitent pas la détermination explicite de leurs solutions. Nous introduisons une fonction continue $v(x(k)) : R^n \rightarrow R^+$, dite de Lyapunov, vérifiant : $v(x(k))$ définie positive, c'est-à-dire $v(x(k)) > 0, \forall x(k) \neq 0$, et $v(0) = 0$.

Le principe de la deuxième méthode de Lyapunov consiste à remplacer l'étude de convergence de $x(k, k_0, x(k_0))$ vers $x_f = 0$ par celle de $v(x(k)) = v(x(k, k_0, x(k_0)))$. En effet, si $\Delta v(k)$ est définie négative pour tout k et pour $x(k)$ au voisinage de $x_f = 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall x(k), \quad \Delta v(x(k)) &= v(x(k+1)) - v(x(k)) \\ &= v(F(x(k))) - v(x(k)) < 0, \end{aligned}$$

nous pouvons alors conclure à la stabilité du point fixe $x_f = 0$.

1.4 Bifurcations

1.4.1 Définitions

Soit le système dynamique non-linéaire suivant

$$x(k+1) = F(x(k), \alpha), \quad (1.15)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{N}$ et $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4 Une **bifurcation** est un **changement qualitatif** de la solution x_f du système (1.15) lorsqu'on modifie le **paramètre de contrôle** α , c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Définition 1.5 Un **diagramme de bifurcation** est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

1.4.2 Types de bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions $F(x(k), \alpha)$. Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale, qui est l'équation générale typique de ce type de bifurcation [1, 2, 3]. Parmi les différents types de bifurcations, pour les systèmes dynamiques discrets, on trouve [4] :

1- Bifurcation de type noeud-col (ou tangente, ou pli) : cette bifurcation se produit lorsque l'une des deux valeurs propres de $DF(x(k), \alpha)$ est égale à +1. Sur le diagramme des bifurcations on observe, dans ce cas, une courbe de points fixes continue tangente à la ligne droite verticale. Deux points d'équilibre existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n'existe.

2- Bifurcation transcritique : sur le diagramme de bifurcations cela se traduit par deux branches différentes de points fixes qui se croisent en un point et par le changement de stabilité des deux branches au passage par le point d'intersection.

3- Bifurcation de doublement de période (ou flip) : cette bifurcation a lieu lorsque l'une des deux valeurs propres de $DF(x(k), \alpha)$ est égales à -1 . Un point fixe stable d'ordre 1, devient instable en même temps que l'apparition d'un cycle d'ordre 2 stable.

4- Bifurcation de Neimark-Sacker : cette bifurcation se produit lorsque $DF(x(k), \alpha)$ possède deux valeurs propres complexe égales à $e^{\pm i\theta}$.

1.5 Section de Poincaré

Soit le système dynamiques différentiel suivant

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1.16)$$

et soit Φ le **flot** du système (1.16)

$$\begin{aligned} \Phi & : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \\ (x, t) & \rightarrow \Phi_t(x) = \Phi(x, t) \end{aligned}$$

qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_t(x_0) & = x_0 \\ \Phi_{t+s}(x_0) & = \Phi_t(\Phi_s(x_0)), \text{ pour tous } t, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.5.1 Définition

la section de Poincaré S est définie par :

$$S = \{H \cap \Phi_t(x), t, x \in \mathbb{R}\}, \quad (1.17)$$

où H un hyperplan transverse au flot Φ_t dans l'espace des phases. La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques (notamment les trajectoires

périodiques). Le principe de construction de cette technique est illustré par la figure 1.1

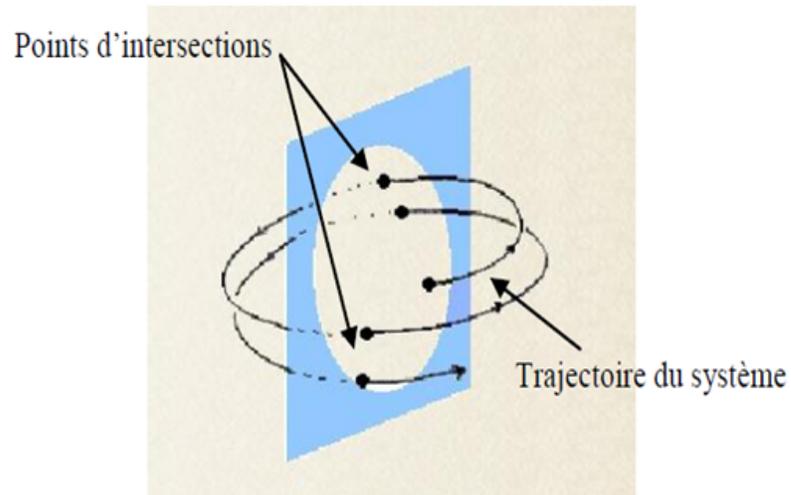


Figure 1.1 - Principe de section de Poincaré.

1.5.2 Avantages de La méthode

- Elle transforme un système continu de dimension d (discrétiser le système) en un système discret de dimension $d - 1$ en conservant les mêmes propriétés topologiques.
- La description, la représentation et l'interprétation de la dynamique est simplifiée.
- La recherche des attracteurs autres que les points fixes est possible et leur étude est simplifiée via les applications.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons avancé un rappelle récapitulatif sur les systèmes dynamiques non linéaires discrets et leurs propriétés générales.

Chapitre 2

Généralités sur le chaos

-
- 1- Introduction
 - 2- Définition du chaos
 - 3- Caractéristiques du chaos
 - 4- Transitions vers le chaos
 - 5- Conclusion
-

2.1 Introduction

Dans l'usage courant, le «**chaos**» signifie "un état de désordre". Cependant, dans la théorie du chaos, le terme est défini plus précisément. La théorie du chaos est un domaine des études en mathématiques, avec des applications dans plusieurs disciplines comme la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, la météorologie, la sociologie et la philosophie. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales. De petites différences dans les conditions initiales (telles que celles dues à des erreurs d'arrondi dans le calcul numérique) produisent des résultats très divergents pour de tels systèmes dynamiques, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales, sans éléments aléatoires impliqués. Ce comportement est connu sous le nom de **chaos déterministe**, ou tout simplement **le chaos**. Il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos. Cependant, le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut :

- **la non-linéarité** : l'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.
- **le déterminisme** : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.
- **la sensibilité** : le système manifeste une très haute sensibilité aux changements de conditions.
- **l'imprévisibilité** : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- **l'irrégularité**. l'ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques

Le comportement chaotique peut être observé dans de nombreux systèmes naturels, comme les conditions météorologiques et le climat. Ce comportement peut être étudié par l'analyse d'un modèle mathématique chaotique, ou par des techniques d'analyse telles que des parcelles de récurrence et de section de Poincaré.

Dans ce présent chapitre, nous donnons une brève étude quantitative sur le chaos. Définition du chaos, quelques outils mathématiques de quantification du chaos et différentes routes vers le chaos sont les grandes lignes de ce chapitre.

2.2 Définition du chaos

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. Avant de donner la définition du chaos, due à **R.L Devaney**, quelques définitions de base sont nécessaires [6, 7].

Soit $(I \subset \mathbb{R}, d)$ désignant un espace métrique compact (d est une distance), et soit F la fonction

$$F : I \rightarrow I, x(k+1) = F(x(k)), x(0) \in I. \quad (2.1)$$

Définition 2.1 *Supposons que X est un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X : $\overline{Y} = X$. Ce qui revient à dire que Y est dense dans X si pour tout $x \in X$ on peut trouver une séquence de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x .*

Définition 2.2 *F est dite avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x(0) \in I$ et tout $\varepsilon > 0$ il exist un point $y(0) \in I$ point et un entier $j \geq 0$ satisfaisant : $d(x(0), y(0)) > \varepsilon \Rightarrow d(F^{(j)}(x(0)), F^{(j)}(y(0))) > \delta$, où d représente la distance et $F^{(j)}$ la j ème itération de F .*

Définition 2.3 *F est dite topologiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans I , il exist $x(0) \in U$ et un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $F^{(j)}(x(0)) \in V$ ou, de façon équivalente, il exist un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, tel que pour $F^{(j)}(U) \cap V \neq \emptyset$.*

On est maintenant en position d'énoncer la défintion du chaos, au sens de **Devaney** [8].

Définition 2.4 *La fonction F 2.1 est dite constituée d'une dynamique chaotique si :*

- (i) *F possède une sensibilité aux conditions initiales,*
- (ii) *F est topologiquement transitive,*
- (iii) *L'ensemble des points périodiques de F est denses dans I .*

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur lesquels elle repose sont facilement observables.

2.3 Caractéristiques du chaos

2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du xix^e siècle par **Poincaré**, puis a été redécouvert en **1963** par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système [9, 10].

2.3.2 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov servent à mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines et permettent de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases [11, 12, 13]. Soit le système dynamique nonlinéaire discret suivant :

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad (2.2)$$

avec $x(k) \in \mathbb{R}^n$. Nous supposons que la trajectoire émanant d'un état initial $x(0)$ atteint un attracteur. $x(k)$ est ainsi bornée à l'intérieur de l'attracteur.

Nous choisissons deux conditions initiales très proches, note $x(0)$ et $\hat{x}(0)$ et ne regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. En supposant que les deux trajectoires $x(k)$ et $\hat{x}(k)$ s'écart exponentialement, après k il vient :

$$|\hat{x}(k) - x(k)| = |\hat{x}(0) - x(0)| e^{\lambda k}, \quad (2.3)$$

λ indique le taux de divergence par itération des deux trajectoires dont l'expression est la suivante :

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{\hat{x}(k) - x(k)}{\hat{x}(0) - x(0)} \right|. \quad (2.4)$$

Pour $x(0)$ et $\hat{x}(0)$ proche, si le module de la différence $\varepsilon = |\hat{x}(0) - x(0)|$ a tendance à converger vers zéro, on obtient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left| \frac{\hat{x}(k) - x(k)}{\hat{x}(0) - x(0)} \right|, \quad (2.5)$$

cela donne :

$$\begin{aligned}
 \lambda_L &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{\dot{x}(k) - x(k)}{\dot{x}(k-1) - x(k-1)} \times \frac{\dot{x}(k-1) - x(k-1)}{\dot{x}(k-2) - x(k-2)} \times \dots \times \frac{\dot{x}(1) - x(1)}{\dot{x}(0) - x(0)} \right| \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{\dot{x}(i+1) - x(i+1)}{\dot{x}(i) - x(i)} \right| \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{F(\dot{x}(i)) - F(x(i))}{\dot{x}(i) - x(i)} \right|.
 \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{dF(x(i))}{dx(i)} \right|, \quad (2.6)$$

λ_L , appelé exposant de Lyapunov, mesure le taux moyen de divergence de deux trajectoires distinctes, à partir de deux conditions initiales très proches.

Dans le cas d'un système de dimension $n > 1$ il existe n exposant de Lyapunov $\lambda_L^{(j)}$, ($j = 1, 2, \dots, n$), chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase. Pour le calcul de l'exposant de Lyapunov, nous partons d'un point initial $x(0) \in \mathfrak{R}^n$, pour caractériser le comportement infinitésimal autour du point $x(k)$ par la première matrice dérivée $DF(x(i))$

$$DF(x(i)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x(i))}{\partial x_1(i)} & \dots & \frac{\partial f_1(x(i))}{\partial x_n(i)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x(i))}{\partial x_1(i)} & \dots & \frac{\partial f_n(x(i))}{\partial x_n(i)} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Notons : $J_k = DF(x(k-1)) \dots DF(x(0))$, avec : $J_0 = DF(x(0))$.

L'exposant de Lyapunov est calculé par l'expression suivante :

$$\lambda_L^{(j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.8)$$

En analysant les exposants de Lyapunov d'un système, nous pouvons conclure sur le type du comportement de ce système comme suit :

- **Si** $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$, il existe des point fixes asymptotiquement stables.
- **Si** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$, l'attracteur est un cycle limite asymptotiquement stable.
- **Si** $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} < 0$, l'attracteur est un tore de dimension k , c'est-à-dire quasi-periodique.
- **Si** $\lambda_1 > 0$, $\sum_i \lambda_i < 0$, l'attracteur est chaotique.
- **Si** $\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0$, $\sum_i \lambda_i < 0$, l'attracteur est hyperchaotique.

2.3.3 Dimension fractale

Il existe plusieurs types de dimensions fractale (dimension de capacité, dimension d'information, dimension de corrélation,...) pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

Dimension de Hausdorff

La dimension de Hausdorff de $M \subset \mathbb{R}^n$ est défini par, [14] :

$$D_H = \sup \{d, \mu_d(M) = +\infty\} = \inf \{d, \mu_d(M) = 0\}, \quad (2.9)$$

d'où $\mu_d(M)$ est la mesure d -dimensionnelle de Hausdorff de l'ensemble M . Ce type de dimension dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble (attracteur ou non).

Dimension de Lyapunov

La dimension de Lyapunov est donné par, [15] :

$$D_L = \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} + j, \quad (2.10)$$

d'où $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ sont les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et j le grand entier naturel tel que : $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$. Ce type de dimensions tient compte de la dynamique du système .

2.3.4 Attracteur étrange

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions qui on trouve dans la littérature sont restrictives [16, 17, 18, 19, 20].

Définition 2.5 *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1) *U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U est entièrement contenue dans U . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.*
- 2) *Les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.*
- 3) *A est un objet fractal.*

4) Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

2.4 Transitions vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelé bifurcations. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

2.4.1 Cascade de doublements de période

Ce scénario a été observé dans les années 60 par **R.May** en dynamique de populations sur l'application logistique. Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc.,. Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique [21, 22].

2.4.2 Par intermittence

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.[23, 24].

2.4.3 Scénario de Ruelle et Takens

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens** [25]. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, après une série de définitions sur la notion du chaos, nous avons présenté des différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, telles que la notion de sensibilité aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov, la dimension fractale et les attracteurs étranges. En fin, quelques scénarios de transition vers le chaos sont cités.

Chapitre 3

Exemples de systèmes chaotiques discrets (SCD)

-
- 1- Introduction
 - 2- Systèmes chaotiques discrets dans le plan
 - 3- Systèmes chaotiques discrets dans l'espace
 - 4- Conclusion
-

3.1 Introduction

Dans la pratique, les systèmes chaotiques discrets (SCD) jouent un rôle plus important que leurs parties continues. En fait, de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques étaient définis en utilisant des systèmes chaotiques discrets. Certains systèmes chaotiques et hyperchaotiques discrets intéressants ont été présentés dans les deux dernières décennies.

Dans ce chapitre, nous donnons une illustration concrète de toutes les notions précédentes par des exemples célèbres de systèmes dynamiques chaotiques discrets dans le plan et dans l'espace.

3.2 Systèmes chaotiques discrets dans le plan

3.2.1 Attracteur d'Hénon

L'attracteur d'Hénon [26], est un système dynamique discret de dimension 2 dont la représentation d'état est la suivante :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a - x_1^2(k) + bx_2(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k), \end{cases} \quad (3.1)$$

pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$, cet attracteur présente un comportement chaotique, comme l'illustre la figure 3.1.

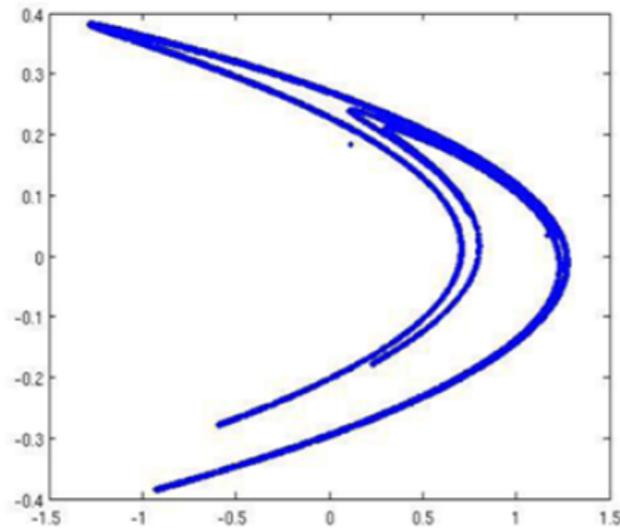


Figure 3.1 - L'attracteur chaotique d'Hénon pour les valeurs $a = 1.4$ et $b = 0.3$.

3.2.2 Application de Lozi

René Lozi [27], propose l'application suivante :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -a|x_1(k)| + x_2(k) + 1, \\ x_2(k+1) = bx_1(k), \end{cases} \quad (3.2)$$

pour les valeurs $a = 1.7$ et $b = 0.5$, cet attracteur suit un comportement chaotique comme le présente dans la figure 3.2.

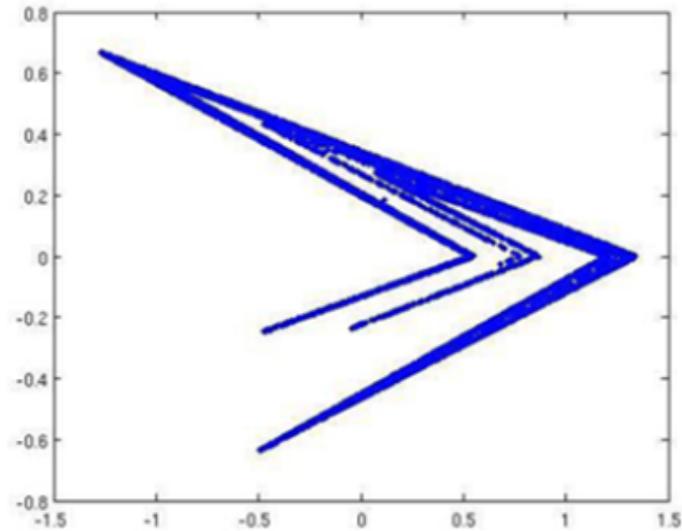


Figure 3.2 - L'attracteur chaotique de Lozi pour les valeurs $a = 1.7$ et $b = 0.5$.

3.2.3 Système de Lorenz discret

Le système de Lorenz discret [28], est donné par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1 + \alpha\beta)x_1(k) - \beta x_2(k)x_1(k), \\ x_2(k+1) = (1 - \beta)x_2(k) + \beta x_1^2(k). \end{cases} \quad (3.3)$$

Le système 3.3 a attracteur chaotique, voir la figure 3.3, lorsque $\alpha = 1.25$, et $\beta = 0.75$.

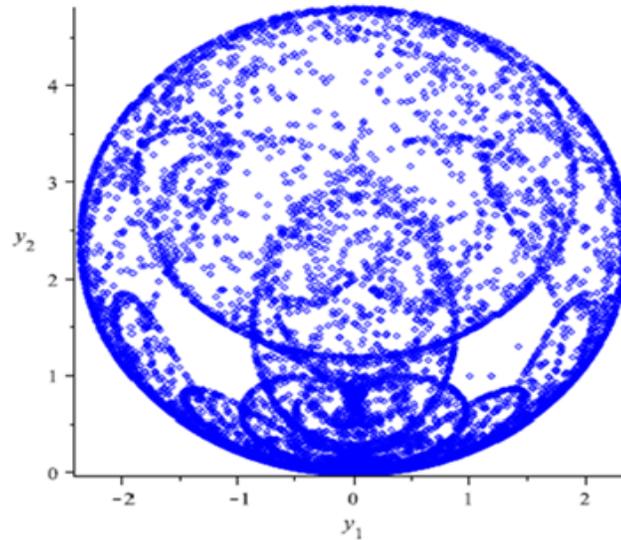


Figure 3.3 - L'attracteur chaotique de Lorenz discret pour les valeurs $\alpha = 1.25$, et $\beta = 0.75$.

3.2.4 Modèle de Flow

Le modèle de Flow est un système chaotique discret de dimension 2 [28], présenté par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + ax_1(k), \\ x_2(k+1) = b + x_1^2(k), \end{cases} \quad (3.4)$$

d'où $a = -0.1$, $\beta = -1.7$. L'attracteur chaotique de Flow est représenté dans la figure 3.4.

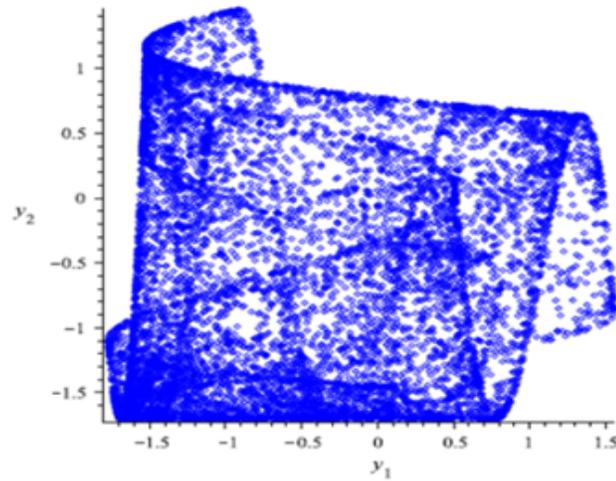


Figure 3.4 - L'attracteur de Flow pour les valeurs $a = -0.1$ et $b = -1.7$.

3.2.5 Système de Zeraoulia-Sprott

Zeraoulia et Sprott [29], ont introduit une nouvelle application discrète dans 2D comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - ah(x_2(k)), \\ x_2(k+1) = bx_1(k), \end{cases} \quad (3.5)$$

d'où a, b sont les paramètres de bifurcation et la fonction h est définie par :

$$h(x_2(k)) = \frac{1}{2} (2m_1x_2(k) + (m_0 - m_1)(|x_2(k) + 1| - |x_2(k) - 1|)).$$

L'application (3.5) a attracteur hyperchaotique lorsque pour $a = 3.36$, $b = 1.4$, $m_0 = -0.43$ et $m_1 = 0.41$, voir la figure 3.5.

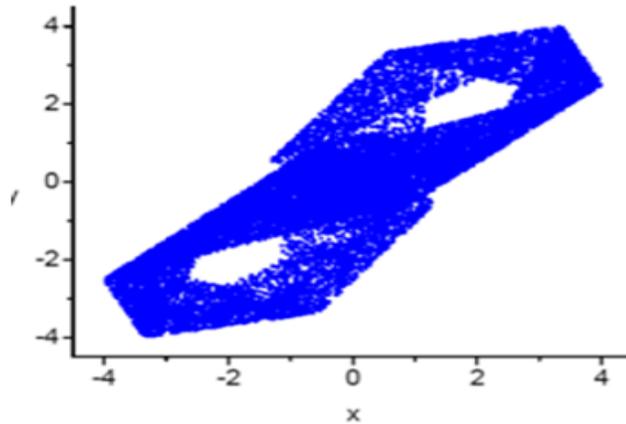


Figure 3.5 - L'attracteur hyperchaotique de l'application (3.5) pour $a = 3.36$, $b = 1.4$, $m_0 = -0.43$, et $m_1 = 0.41$ avec les conditions $x = y = 0.1$.

3.3 Systèmes chaotiques discrets dans l'espace

3.3.1 Système de Hitzl-Zele

Hitzl et Zele [30], obtiennent le système généralisé d'Hénon

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\beta x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_3(k) + 1 - \alpha x_2^2(k), \\ x_3(k+1) = \beta x_2(k) + x_1(k). \end{cases} \quad (3.6)$$

La figure 3.6, montre le comportement chaotique du système (3.6) lorsque $(\alpha, \beta) = (1.07, 0.3)$.

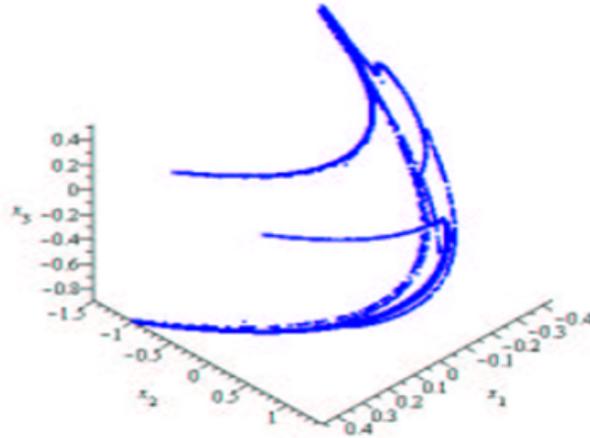


Figure 3.6 - L'attracteur chaotique d'Hitzl-Zele lorsque $(\alpha, \beta) = (1.07, 0.3)$.

3.3.2 Système de Stefanski

Stefanski [31], a présenté un système discret en 3D comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 1 + x_3(k) - \alpha x_2^2(k), \\ x_2(k+1) = 1 + \beta x_2(k) - \alpha x_1^2(k), \\ x_3(k+1) = \beta x_1(k), \end{cases} \quad (3.7)$$

et a montré que le système (3.7) était hyperchaotique et avait des attracteurs étranges avec deux exposants de Lyapunov positifs et une dimension fractale $2 < D_c < 3$ pour certains paramètres $\alpha \in [1.22, 1.40]$ et $\beta = 0, 2$. Dans la figure 3.7, l'attracteur hyperchaotique de Stefanski est obtenu

dans le cas où $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.2$.

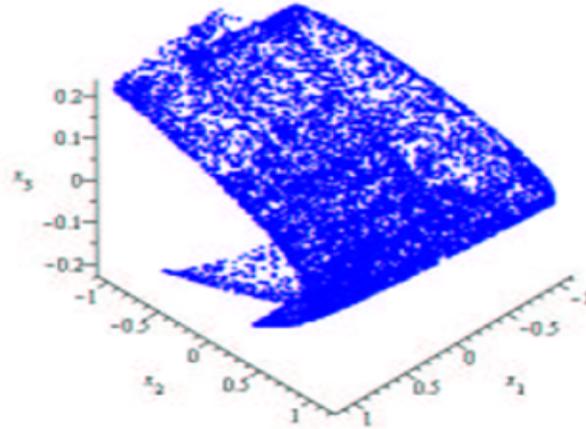


Figure 3.7 - L'attracteur hyperchaotique de Stefanski lorsque $\alpha = 1.4$ est $\beta = 0.2$.

3.3.3 Système de Baier-Klein

En 1985 [32, 33, 34], le système d'Hénon généralisé donné par

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 1.76, \\ x_2(k+1) = x_1(k), \\ x_3(k+1) = x_2(k), \end{cases} \quad (3.8)$$

a été présenté par Baier et Klein. L'attracteur hyperchaotique du système (3.8) est représenté dans la Figure 3.8.

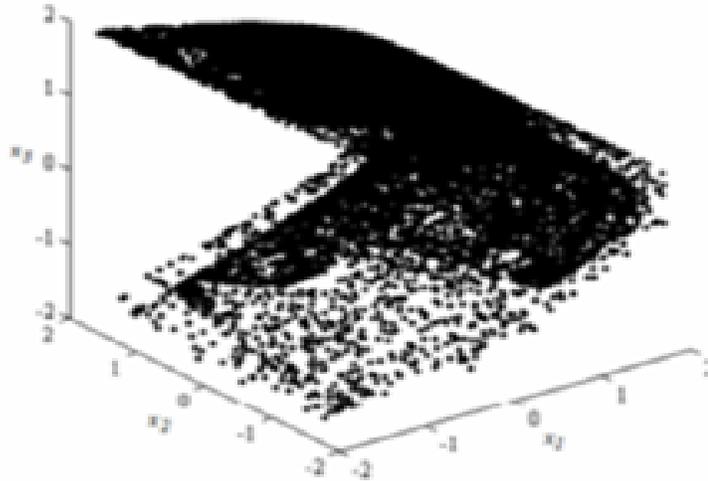


Figure 3.8 - L'attracteur hyperchaotique de Baier-Klein (3.8).

3.3.4 Système de Rössler discret

Le système discret de Rössler [35], est représenté par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k)(1-x_1(k)) - \beta(x_3(k) + \gamma)(1-2x_2(k)), \\ x_2(k+1) = \delta x_2(k)(1-x_2(k)) + \varsigma x_3(k), \\ x_3(k+1) = \eta(1-\theta x_1(k))[(x_3(k) + \gamma)(1-2x_2(k)) - 1], \end{cases} \quad (3.9)$$

tels que $\alpha = 3.8$, $\beta = 0.05$, $\gamma = 0.35$, $\delta = 3.78$, $\varsigma = 0.2$, $\eta = 0.1$ et $\theta = 1.9$. L'attracteur hyperchaotique du système (3.9) est représenté dans la Figure 3.9

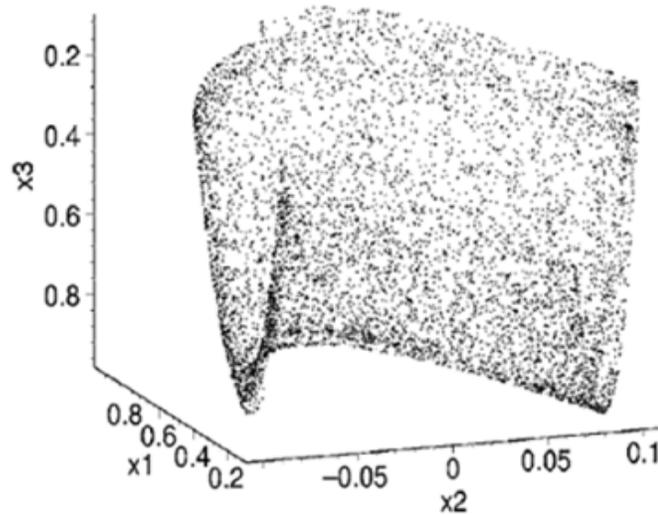


Figure 3.9 - L'attracteur hyperchaotique du système discret de Rossler (3.9).

3.3.5 Système de Wang

Le système de Wang [36], est décrit comme suit

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_3x_2(k) + (a_4 + 1)x_1(k), \\ x_2(k+1) = a_1x_1(k) + y_2(k) + a_2x_3(k), \\ x_3(k+1) = (a_7 + 1)x_3(k) + a_6x_2(k)x_3(k) + a_5. \end{cases} \quad (3.10)$$

Le système de Wang est hyperchaotique lorsque les valeurs des paramètres de bifurcation sont considérés comme $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (-1.9, 0.2, 0.5, -2.3, 2, -0.6, -1.9)$. L'attracteur hyper-

chaotique du système de Wang est présenté dans la Figure 3.10.

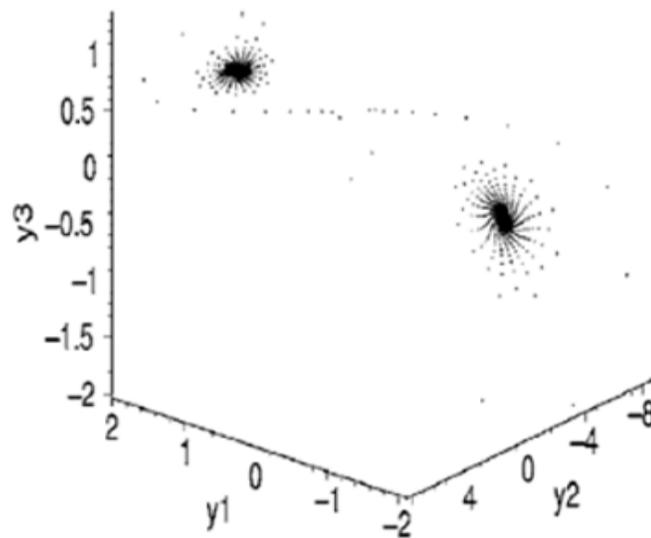


Figure 3.10 - L'attracteur hyperchaotique du système de Wang lorsque $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (-1.9, 0.2, 0.5, -2.3, 2, -0.6, -1.9)$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques exemples sur les systèmes chaotiques discrets dans les dimensions 2 et 3. Ces systèmes chaotiques sont utilisés ultérieurement comme des applications de simulation dans le chapitre 5 pour valider numériquement les résultats obtenus dans cette thèse. Beaucoup d'exemples sur les attracteurs étranges dans les systèmes dynamiques discrets sont trouvés dans des références qui traitent les systèmes dynamiques en générale ou qui ils sont liés à la théorie de contrôle et de synchronisation du chaos.

Chapitre 4

Théorie de synchronisation

-
- 1- Introduction
 - 2- Types de synchronisation
 - 3- Méthodes de synchronisation
 - 4- Synchronisation chaotique et cryptage
 - 5- Conclusion
-

4.1 Introduction

Le sens originel de synchronisation a été maintenu jusqu'à présent dans l'usage familier de ce mot, comme *un accord* ou *corrélation* dans le temps des différents processus. Ce phénomène était un sujet de recherche active depuis les jours les plus tôt de la physique [37, 38]. L'histoire de la synchronisation remonte au dix-septième siècle, quand le scientifique hollandais, **Christian Huygen** aurait constaté que deux de ses horloges à balancier, placées côte à côte, convergeaient rapidement vers un mouvement identique en phase et en fréquence ; c'est à dire que les deux horloges avaient une parfaite synchronisation. S'il les perturbait, elles se resynchronisaient en une demi-heure, et s'il les éloignait, la synchronisation cessait. Dans la terminologie moderne, cela signifie que les deux horloges ont été synchronisées dans l'antiphase due à l'accouplement par le support mural [39, 40].

Récemment, la recherche pour la synchronisation s'est déplacée vers les systèmes chaotiques. Et comme ces derniers sont caractérisés par la sensibilité aux conditions initiales, la synchronisation entre deux systèmes chaotiques paraissait impossible. Mais les travaux de plusieurs scientifiques dans ce domaine ont montré le contraire. Durant la décennie passée, plusieurs types de synchronisation ont été étudiés, et beaucoup de méthodes ont été proposées. Tout d'abord avec les travaux de **Yamada** et **Fujisaka** qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique [41]. Par la suite, **Afraimovich** et **Al.** ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique [42]. Ultérieurement **Pecora** et **Carroll** ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un appelé maître et l'autre esclave [43]. Une autre solution plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont **Rulkov** et **Al.** ont posé les bases [44]. Cette approche considère aussi une paire de systèmes configurés en maître-esclave, mais cette fois le couplage n'est pas réservé à l'identité [45, 46, 47]. En parallèle avec ces études, est apparue la notion de synchronisation de phases entre deux circuits chaotiques couplés, dans ce cas la synchronisation vise à réaliser une cohérence de phases entre les variables d'état des systèmes considérés [48, 49, 50].

Plusieurs similitudes entre les systèmes chaotiques et les systèmes cryptographiques ont été constatées, ce qui a motivé les chercheurs à exploiter des propriétés cryptographiques du chaos dans les applications de télécommunication et de transmission sécurisée d'informations [51, 52, 53, 54]. Depuis l'année 1990, l'utilisation de la synchronisation chaotique a attiré l'attention des chercheurs travaillant dans le domaine de la cryptographie [55, 56, 57].

4.2 Types de synchronisation

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S.

4.2.1 Synchronisation complète

On considère un système chaotique maître représenté par

$$X(k+1) = F(X(k)), \quad (4.1)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (4.1) et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Et un système chaotique esclave donné par

$$Y(k+1) = G(Y(k)) + U, \quad (4.2)$$

d'où $Y(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système (4.2), $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur de contrôle à déterminer. On définit l'erreur de la synchronisation complète en tant que

$$e(k) = Y(k) - X(k). \quad (4.3)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur U de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0. \quad (4.4)$$

d'où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $F \neq G$, c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés [58].

4.2.2 Anti-Synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [59]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit

$$e(k) = Y(k) + X(k). \quad (4.5)$$

4.2.3 Synchronisation décalée

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un **décalage** en temps [60]. On dit qu'on a une synchronisation **retardée** (ou **anticipée**) si les variables d'état $Y(k)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(k)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k - \tau)\| = 0, \quad \left(\text{où } \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k + \tau)\| \right), \quad \forall x(0), \quad (4.6)$$

avec τ est un nombre positif très petit.

4.2.4 Synchronisation projective

On dit qu'on a une **synchronisation projective** si les variables d'état $y_i(k)$ du système chaotique esclave $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(k)$ du système chaotique maître $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$, tels que [61] :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(k) - \alpha_i x_i(k)| = 0, \quad \forall (x(0), y(0)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

4.2.5 Synchronisation FSHP

On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (en anglais full state hybrid projective synchronization), si chaque variable d'état $y_i(k)$, $1 \leq i \leq n$, du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état $x_i(k)$, $1 \leq i \leq n$, du système chaotique maître, tels que :

$$\exists (\beta)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left| y_i(k) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(k) \right| = 0, \quad \forall (x(0), y(0)), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective [62, 63, 64, 65, 67, 68].

4.2.6 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents [70]. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. On considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par

$$\begin{cases} X(k+1) = F(X(k)), \\ Y(k+1) = G(Y(k)) + U, \end{cases} \quad (4.9)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un contrôleur.

S'il existe un contrôleur U et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$, vérifient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - \phi(X(k))\| = 0, \quad \forall x(0), \forall y(0), \quad (4.10)$$

alors, les systèmes maître-esclave (4.9) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction ϕ . Si la fonction ϕ est définie par $\phi(X(k)) = \Lambda X(k)$ tel que $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{m \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **full-state hybrid projective** [71].

4.2.7 Synchronisation Q-S

La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [72]. Nous disons qu'un système maître, n -dimensionnelle, $X(k)$ et un système esclave, m -dimensionnelle, $Y(k)$ sont en synchronisation $Q - S$ dans la dimension d , s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation

$$e(k) = Q(X(k)) - S(Y(k)), \quad (4.11)$$

vérifie $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0$.

4.3 Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

4.3.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques, a été proposée par Bai et Lonngren [73], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme [74, 75]. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad (4.12)$$

et

$$y(k+1) = G(y(k)) + U, \quad (4.13)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - x(k+1) \\ &= G(y(k)) - F(x(k)) + U. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si on peut écrire la quantité $G(y(k)) - F(x(k))$ de la façon suivante

$$G(y(k)) - F(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)), \quad (4.15)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e(k+1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) + U, \quad (4.16)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(k), y(k)), \quad (4.17)$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -Le(k), \quad (4.18)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e(k+1) = (A - L)e(k). \quad (4.19)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (4.12) et le système esclave (4.13) est transformé en problème de zero-stabilité du système (4.19). Maintenant, le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires discrets.

Théorème 4.1 *Le système maître (4.12) et le système esclave (4.13) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (4.17), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que les valeurs propres de $A - L$ se trouvent à l'intérieur du disque de l'unité.*

4.3.2 Méthode du Backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire [76, 77, 78]. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (4.20)$$

et

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3), \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + u, \end{cases} \quad (4.21)$$

d'où f_1 est une fonction linéaire, f_i , ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (4.20) et (4.21). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n. \end{cases} \quad (4.22)$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2), \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u, \end{cases} \quad (4.23)$$

d'où g_1 est une fonction linéaire, et g_i , ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (4.23) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j), \quad (4.24)$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j, α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j . u_j et α_j sont calculés à chaque fois de telle sorte que $\dot{V}_j < 0$.

Remarque 4.1 *Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

4.3.3 Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes [79, 80, 81, 82]. Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad (4.25)$$

et

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u, \quad (4.26)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (4.25) et le système esclave (4.26) est définie par : $e = y - x$. La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x, y) + u, \quad (4.27)$$

d'où $\eta(y, x) = f(y(t)) - f(x(t))$. Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (4.27), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x, y), \quad (4.28)$$

d'où v c'est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (4.28) dans (4.27), la dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv. \quad (4.29)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système (4.29) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant. Dans la méthode du mode glissant [83], nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j, \quad (4.30)$$

d'où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire : $s(e) = 0$, $\dot{s}(e) = 0$. Alors, on peut écrire :

$$\dot{s}(e) = C(Ae + Bv) = 0, \quad (4.31)$$

donc le contrôleur v est donné par

$$v = -(CB)^{-1} CAe, \quad (4.32)$$

d'où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par

$$\dot{e} = [I - B(CB)^{-1}C] Ae. \quad (4.33)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B(CB)^{-1}C] A$ soient toutes négatives. Dans [84], le contrôleur en mode glissant est proposé de la forme

$$\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - ks, \quad (4.34)$$

d'où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe, et $q, k > 0$, sont des constantes. Dans ce cas, Le contrôleur v est donné par

$$v = -(CB)^{-1} [C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], \quad (4.35)$$

ce qui est équivalent à

$$v = \begin{cases} -(CB)^{-1} [C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], & \text{si } s(e) > 0, \\ -(CB)^{-1} [C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], & \text{si } s(e) < 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

Théorème 4.2 *Le système maître (4.25) et le système esclave (4.26) sont globalement synchronisés par le contrôleur*

$$u = Bv - \eta(x, y), \quad (4.37)$$

d'où v est défini par (4.35), (A, B) soit contrôlable et $q, k > 0$.

Preuve. Pour observer la zero-stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{s^2}{2}, \quad (4.38)$$

d'où

$$\dot{V} = -ks - q \operatorname{sgn}(s) s, \quad (4.39)$$

puisque $\operatorname{sgn}(s)$ est toujours positive tant que $e \neq 0$ et $k, q > 0$, alors $\dot{V} < 0$. Ainsi, par la théorie de la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que la dynamique d'erreur (4.26) est globalement asymptotiquement zéro-stable. Par conséquent, il en résulte que le système maître (4.25) et le système esclave (4.26) sont globalement synchronisés. ■

4.4 Synchronisation chaotique et cryptage

Dans cette section, on s'intéresse aux techniques de transmission sécurisée d'informations qui reposent sur le principe de synchronisation chaotique. La majorité des techniques de cryptage chaotique utilisent la configuration maître-esclave pour laquelle on dispose d'un émetteur (système maître) qui génère le signal du texte chiffré transmis vers un système récepteur (système esclave) qui a pour objectif de synchroniser avec le système maître et de restaurer le signal d'information. Parmi les méthodes de transmission chaotiques on peut citer : le cryptage par addition, le cryptage par commutation, le cryptage modulation.

4.4.1 Cryptage par addition

Dans cette technique [85, 86, 87, 88, 89], s'appelée aussi le masquage chaotique, l'émetteur est un système chaotique $x(t)$ (système maître) dont le signal de sortie $y(t)$ est ajouté au signal du message. La somme de deux signaux est transmise au récepteur. Le récepteur (système esclave) est constitué d'un système chaotique identique à l'émetteur. Ainsi, après la synchronisation des deux systèmes chaotiques (émetteur et récepteur) le message est extrait à l'aide d'une opération de soustraction. La figure 4.1 illustre le principe de base de cette technique.

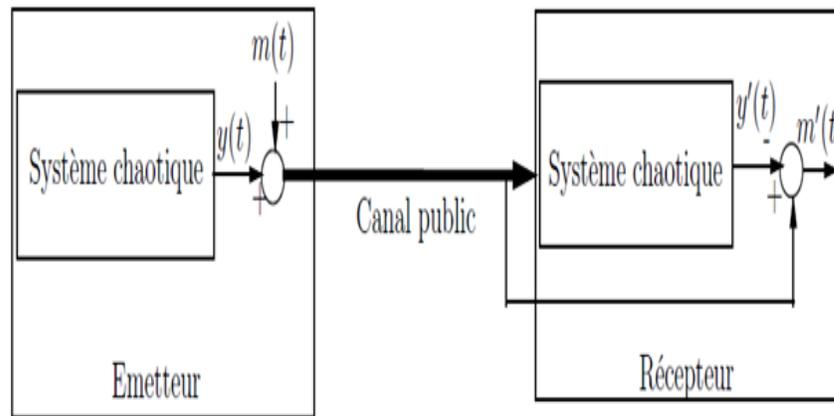


Figure 4.1 - Cryptage par addition.

4.4.2 Cryptage par commutation

Dans cette méthode [90, 91, 92], l'émetteur est composé de deux systèmes chaotiques et le message $M(t)$ (de type binaire : 0 ou 1) est utilisé pour commuter entre $A(t)$ encodant le bit 1 et $B(t)$ encodant le bit 0. Le signal résultant est transmis travers le canal de transmission vers le système récepteur constitué de deux systèmes chaotiques esclaves identique à ceux de l'émetteur. Le premier système esclave synchronise exclusivement avec le premier oscillateur (correspondant au signal chaotique $A(t)$) de telle façon que le bit 1 est détecté par la convergence de l'erreur de synchronisation vers zéro et par conséquent le signal d'information peut être enfin restauré à la

fin du processus de détection. Le schéma représentant cette méthode est donné par la figure 4.2.

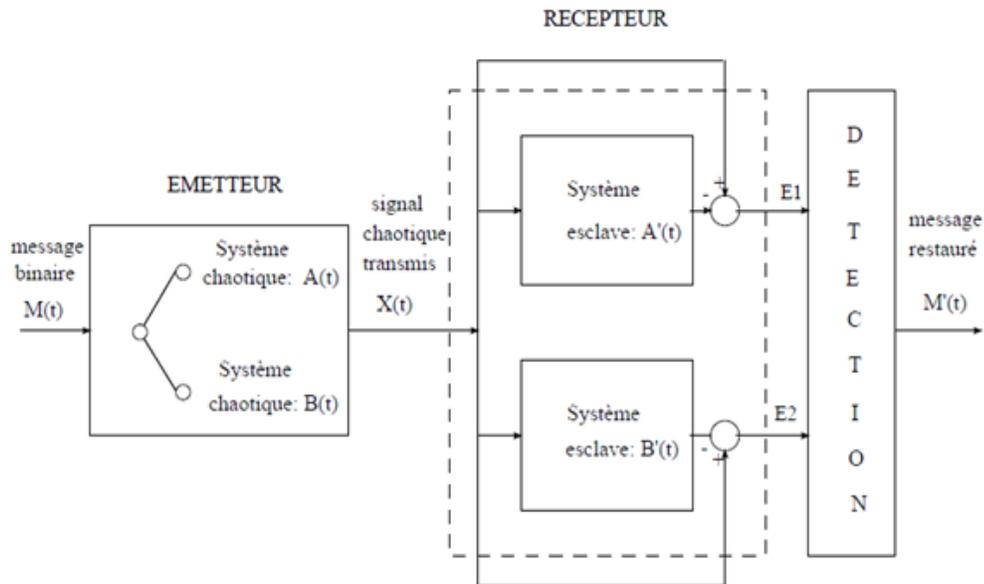


Figure 4.2 - Cryptage par commutation.

4.4.3 Cryptage par modulation

Le principe de la modulation paramétrique [93, 94, 95, 96], consiste à utiliser le message $M(t)$, pour moduler l'un des paramètres du système chaotique émetteur $X(t)$. Le système récepteur $Z(t)$ synchronise d'une manière adaptative avec l'émetteur chaotique et le message $M(t)$ est restauré par l'intermédiaire d'une loi d'adaptation. La figure 4.3 représente le schéma d'un système

de communication utilisant cette technique.

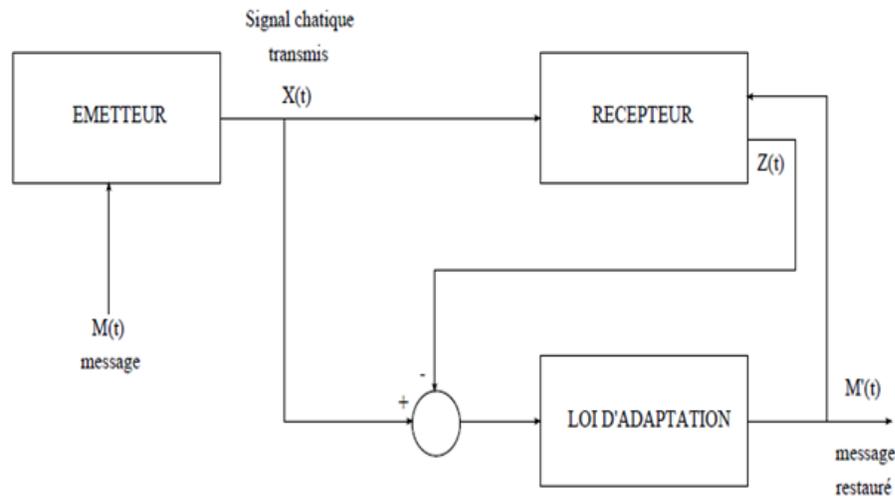


Figure 4. 3 - Cryptage par modulation.

4.5 Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter, les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes. La dernière section de ce chapitre est consacrée aux techniques de transmission sécurisée d'informations les plus rencontrées qui sont basées sur le principe de synchronisation chaotique.

Chapitre 5

Quelques nouveaux résultats sur la synchronisation des systèmes chaotiques discrets

-
- 1- Introduction
 - 2- Nouveau schéma de synchronisation chaotique pour des systèmes quadratiques en 3D
 - 3- Synchronisation FSHP inverse
 - 4- Synchronisation généralisée des systèmes chaotiques discrets avec des dimensions différentes
 - 5- Nouveau type-généralisé de synchronisation chaotique
 - 6- Nouveau critère de synchronisation pour les systèmes chaotiques discrets
 - 7- Conclusion
-

5.1 Introduction

Au cours des deux dernières années, de nombreux chercheurs ont proposés des différents schémas de contrôle pour la synchronisation du chaos [98, 99, 100, 101, 102], mais la plupart des travaux se sont concentrés sur les systèmes chaotiques continus plutôt que sur les systèmes discrets. Dans la pratique, les systèmes chaotiques discrets (SCD) jouent un rôle important et attirent de plus en plus d'attention [103]. En fait, de nombreux modèles mathématiques des processus physiques [104, 105, 106], des phénomènes biologiques [107], des réactions chimiques [108] et des systèmes économiques [109], sont bien décrits par l'intermédiaire de systèmes dynamiques chaotiques discrets. Récemment, la synchronisation des systèmes chaotiques discrets a été largement étudiée en raison de ses applications potentielles dans la sécurité des communications et la cryptographie [110, 111, 112, 113, 114, 115, 116].

Jusqu'à présent, diverses approches ont été proposées pour la synchronisation chaotique (hyperchaotique) discrets telles que : la synchronisation complète [117], la synchronisation retardée et anticipée [118, 119], la synchronisation impulsive [120], l'anti-synchronisation et hybride synchronisation [121], la synchronisation projective [122], la synchronisation projective fonctionnelle [123, 124, 125], la synchronisation projective matricielle [126], la synchronisation full state hybrid projective [127, 128], la synchronisation fonction-cascade [129], la synchronisation généralisée [130], la synchronisation Q-S [131, 35]. D'autre part, l'étude des synchronisations de types inverses telles que : la synchronisation projective inverse [132], la synchronisation projective matricielle inverse [133], la synchronisation full state hybrid projective inverse [134], la synchronisation retardée inverse [135, 136] et la synchronisation généralisée inverse [137], etc., est une idée séduisante et importante, surtout dans les applications.

Le présent chapitre expose le contenu de notre travail. Dans la section 2, nous étudions la synchronisation chaotique complète entre des systèmes quadratiques générales discrets. Dans la section 3, quelques résultats pour la synchronisation FSHP inverse dans 2D, 3D et n-D sont dérivés. La section 4, est consacrée à l'étude de la synchronisation généralisée et son type inverse. Un nouveau type de synchronisation généralisée est proposé dans la section 5. La section 6, a pour but de présenter un nouveau critère de synchronisation. Enfin, les résultats dérivés sont conclus dans la section 7.

5.2 Nouveau schéma de synchronisation chaotique pour des systèmes quadratiques en 3D

Dans cette section, un nouveau schéma de synchronisation est proposé pour un couple arbitraire de systèmes quadratiques chaotiques discrets en 3-D. Basée sur des contrôleurs non linéaires et la théorie de stabilité de Lyapunov, la méthode de synchronisation proposée est théoriquement rigoureuse. Le critère de synchronisation dérivé peut également s'appliquer à une classe large des systèmes chaotiques discrets. Notre schéma de contrôle est utilisé pour illustrer la synchronisation complète entre le système discret de Rössler et le système de Wang. En outre, des simulations numériques sont utilisées pour montrer l'efficacité et la faisabilité de la méthode de synchronisation proposée. Le contenu de cette section a fait l'objet d'une publication : "A New Synchronization Scheme for General 3D Quadratic Chaotic Systems in Discrete-Time", *Non-linear Dynamics and Systems Theory*, 15(2), 2015, 163–170 [138].

5.2.1 Systèmes maître-esclave

Considérons le système maître sous la forme suivante

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j(k) + \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \alpha_{pq}^{(i)}x_p(k)x_q(k) + c_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5.1)$$

d'où $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq 3}$ est le vecteur d'état du système maître, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $(\alpha_{pq}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $i = 1, 2, 3$, $(c_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont des nombres réels.

Comme système esclave, nous considérons le système chaotique suivant

$$y_i(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{ij}y_j(k) + \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \beta_{pq}^{(i)}y_p(k)y_q(k) + d_i + u_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5.2)$$

d'où $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq 3}$ est le vecteur d'état du système esclave, $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $(\beta_{pq}^{(i)}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $i = 1, 2, 3$, $(d_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont des nombres réels, et $(u_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont des contrôleurs.

Remarque 5.1 Les systèmes quadratiques chaotiques discrets en 3D peuvent être écrits sous la forme de (5.1) tels que : système de Baier-Klein, système de Stefanski, système discret de Rössler, système de Wang, etc.

Notre but, pour réaliser la synchronisation entre le système maître (5.1) et le système esclave (5.2) pour les constantes arbitraires a_{ij} , b_{ij} , $\alpha_{pq}^{(i)}$, $\beta_{pq}^{(i)}$, c_i et d_i , ($i, p, q = 1, 2, 3$), est de déterminer

les contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq 3$, qui stabilisent les erreurs de synchronisation suivantes

$$e_i(k) = y_i(k) - x_i(k), \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5.3)$$

alors le but de la synchronisation complète est de faire $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$, ($i = 1, 2, 3$).

5.2.2 Nouveau schéma de synchronisation

Les erreurs de synchronisation entre le système maître (5.1) et le système esclave (5.2), peuvent être dérivées de la manière suivante :

$$e_i(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{ij} e_j(k) + R_i + u_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5.4)$$

d'où

$$R_i = \sum_{j=1}^3 (b_{ij} - a_{ij}) x_j(k) + \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \beta_{pq}^{(i)} y_p(k) y_q(k) - \sum_{q=1}^3 \sum_{p=1}^3 \alpha_{pq}^{(i)} x_p(k) x_q(k) + d_i - c_i, \quad 1 \leq i \leq 3. \quad (5.5)$$

Pour réaliser une synchronisation complète entre les systèmes (5.1) et (5.2), nous choisissons les contrôleurs u_1 , u_2 et u_3 comme suit

$$\begin{cases} u_1 = l_1 e_1(k) + (b_{22} - b_{12} + l_2) e_2(k) - (b_{13} + b_{33} + l_3) e_3(k) - R_1, \\ u_2 = -(b_{21} + b_{11} + l_1) e_1(k) + l_2 e_2(k) + (b_{33} - b_{23} + l_3) e_3(k) - R_2, \\ u_3 = (b_{11} - b_{31} + l_1) e_1(k) - b_{32} e_2(k) + (b_{33} + 2l_3) e_3(k) - R_3, \end{cases} \quad (5.6)$$

d'où $(l_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont des constantes de contrôle à déterminer plus tard. En substituant l'équation (5.6) dans l'équation (5.4), Les erreurs de synchronisation peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{cases} e_1(k+1) = (b_{11} + l_1) e_1(k) + (b_{22} + l_2) e_2(k) - (b_{33} + l_3) e_3(k), \\ e_2(k+1) = -(b_{11} + l_1) e_1(k) + (b_{22} + l_2) e_2(k) + (b_{33} + l_3) e_3(k), \\ e_3(k+1) = (b_{11} + l_1) e_1(k) + 2(b_{33} + l_3) e_3(k), \end{cases} \quad (5.7)$$

Maintenant, nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.1 Si les constantes de contrôle $(l_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont choisies comme suit

$$\begin{cases} -b_{11} - \frac{1}{\sqrt{3}} < l_1 < -b_{11} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ -b_{22} - \frac{1}{\sqrt{2}} < l_2 < -b_{22} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -b_{33} - \frac{1}{\sqrt{6}} < l_3 < -b_{33} + \frac{1}{\sqrt{6}}, \end{cases} \quad (5.8)$$

alors le système maître (5.1) et le système esclave (5.2) sont globalement synchronisés par la loi de contrôle (5.6).

Preuve. Considérons la fonction de Lyapunov quadratique, suivante :

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k), \quad (5.9)$$

alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= V(e(k+1)) - V(e(k)) \\ &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\ &= 3(b_{11} + l_1)^2 + 2(b_{22} + l_2)^2 e_2^2(k) + 6(b_{33} + l_3)^2 e_3^2(k) \\ &\quad + [(b_{11} + l_1)(b_{22} + l_2) - (b_{11} + l_1)(b_{22} + l_2)] e_1(k) e_2(k) \\ &\quad + [-(b_{11} + l_1)(b_{33} + l_3) - (b_{11} + l_1)(b_{33} + l_3) + 2(b_{11} + l_1)(b_{33} + l_3)] e_1(k) e_3(k) \\ &\quad + [-(b_{22} + l_2)(b_{33} + l_3) + (b_{22} + l_2)(b_{33} + l_3)] e_2(k) e_3(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) - e_3^2(k) \\ &= (3(b_{11} + l_1)^2 - 1) e_1^2(k) + (2(b_{22} + l_2)^2 - 1) e_2^2(k) + (6(b_{33} + l_3)^2 - 1) e_3^2(k), \end{aligned}$$

en utilisant (5.8), nous obtenons : $\Delta V(e(k)) < 0$. Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$, $1 \leq i \leq 3$. Par conséquent, les systèmes (5.1) et (5.2) sont globalement synchronisés. ■

5.2.3 Exemple d'illustration

Dans cet exemple, on considère le système de Rössler discret comme système maître et le système de Wang contrôlé comme système esclave. Le système de Rössler discret, est décrit par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k)(1 - x_1(k)) - \beta(x_3(k) + \gamma)(1 - 2x_2(k)), \\ x_2(k+1) = \delta x_2(k)(1 - x_2(k)) + \varsigma x_3(k), \\ x_3(k+1) = \eta((x_3(k) + \gamma)(1 - 2x_2(k)) - 1)(1 - \theta x_1(k)), \end{cases} \quad (5.10)$$

d'où $\alpha = 3.8$, $\beta = 0.05$, $\gamma = 0.35$, $\delta = 3.78$, $\varsigma = 0.2$, $\eta = 0.1$ et $\theta = 1.9$. Le système de Wang contrôlé peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = a_3 y_2(k) + (a_4 + 1) y_1(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = a_1 y_1(k) + y_2(k) + a_2 y_3(k) + u_2, \\ y_3(k+1) = (a_7 + 1) y_3(k) + a_6 y_2(k) y_3(k) + a_5 + u_3, \end{cases} \quad (5.11)$$

d'où $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (-1.9, 0.2, 0.5, -2.3, 2, -0.6, -1.9)$, u_1, u_2 et u_3 sont des contrôleurs. Selon notre approche présentée ci-dessus, pour réaliser la synchronisation complète entre le système de Rössler discret (5.10) et le système contrôlé de Wang (5.11), les contrôleurs de synchronisation peuvent être construits comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = l_1 e_1(k) + (1 - a_3 + l_2) e_2(k) - (a_7 + 1 + l_3) e_3(k) - R_1, \\ u_2 = -(a_1 + a_4 + 1 + l_1) e_1(k) + l_2 e_2(k) + (a_7 + 1 - a_2 + l_3) e_3(k) - R_2, \\ u_3 = (a_4 + 1 + l_1) e_1(k) + (a_7 + 1 + 2l_3) e_3(k) - R_3, \end{cases} \quad (5.12)$$

d'où

$$R_i = L_i + N_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.13)$$

d'où

$$\begin{cases} L_1 = (a_4 + 1 - \alpha) x_1(k) + (a_3 - \beta\gamma) x_2(k) + \beta x_3(k) + \beta\gamma, \\ L_2 = a_1 x_1(k) + (1 - \beta\gamma) x_2(k) + (a_2 - \varsigma) x_3(k), \\ L_3 = -\theta(1 - \eta\gamma) x_1(k) + 2\eta\gamma x_2(k) + (a_7 + 1 - \eta) x_3(k) \\ \quad + a_5 - \eta\gamma + 1, \end{cases} \quad (5.14)$$

et

$$\begin{cases} N_1 = \alpha x_1^2(k) - 2\beta x_3(k) x_2(k), \\ N_2 = \delta x_2^2(k), \\ N_3 = a_6 y_2(k) y_3(k) - 2\eta\gamma\theta x_1(k) x_2(k) + \eta\theta x_1(k) x_3(k) \\ \quad + 2\eta x_2(k) x_3(k) - 2\eta\theta x_1(k) x_2(k) x_3(k), \end{cases} \quad (5.15)$$

et les constantes de contrôle $(l_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont choisies de la manière suivante

$$\begin{cases} -a_4 - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} < l_1 < -a_4 - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < l_2 < -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ -a_7 - 1 - \frac{1}{\sqrt{6}} < l_3 < -a_7 - 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{cases} \quad (5.16)$$

Il est facile de montrer que toutes les conditions du Théorème (5.1) sont satisfaites. Par conséquent, les systèmes (5.10) et (5.11) sont globalement synchronisés. En utilisant les contrôleurs (5.12), le système d'erreur peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} e_1(k+1) = (a_4 + 1 + l_1) e_1(k) + (1 + l_2) e_2(k) - (a_7 + 1 + l_3) e_3(k), \\ e_2(k+1) = -(a_4 + 1 + l_1) e_1(k) + (1 + l_2) e_2(k) + (a_7 + 1 + l_3) e_3(k), \\ e_3(k+1) = (a_4 + 1 + l_1) e_1(k) + 2(a_7 + 1 + l_3) e_3(k), \end{cases} \quad (5.17)$$

Corollaire 5.1 Si nous choisissons les constantes de contrôle $(l_i)_{1 \leq i \leq 3}$ comme suit : $l_1 = 1$, $l_2 = -\frac{1}{2}$ et $l_3 = 0.8$. Alors, les systèmes (5.10) et (5.11) sont globalement synchronisés.

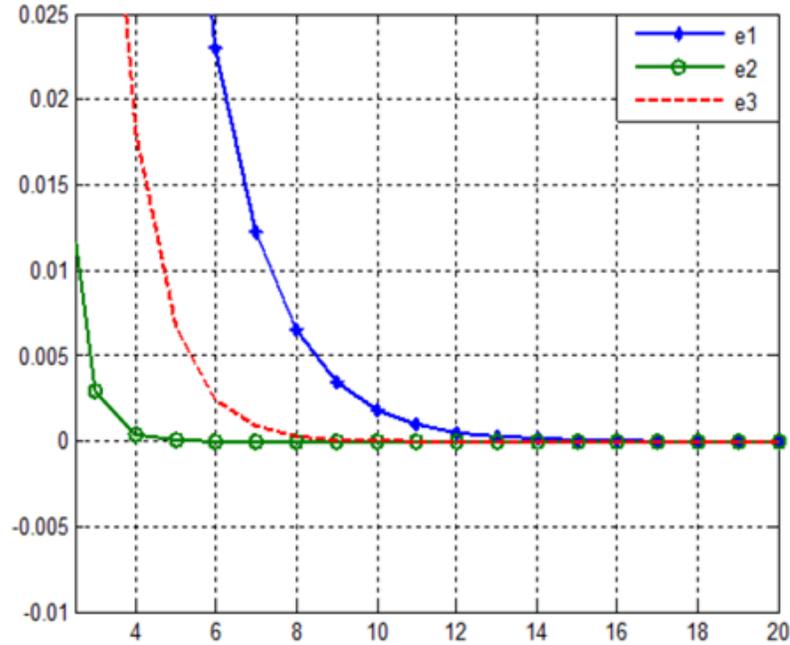


Figure 5.1 - Évolution des erreurs de la synchronisation complète entre les systèmes (5.10) et (5.11).

5.3 Synchronisation FSHP inverse

Dans cette section, quelques approches sont proposées pour étudier le problème de la synchronisation IFSP des SCD. Basé sur la stabilité de Lyapunov et des lois de contrôle non linéaires, des différents schémas pour la synchronisation FSHP inverse dans 2D, 3D et n-D sont présentés. Le contenu de cette section a fait l'objet d'une publication : “**On inverse full state hybrid projective synchronization of chaotic dynamical systems in discrete-time**”, *International journal of dynamics and control*, 2015 [134].

5.3.1 Définition de synchronisation FSHP inverse

Considérons les systèmes chaotiques suivants

$$x_i(k+1) = f_i(X(k)), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.18)$$

et

$$y_i(k+1) = g_i(Y(k)) + u_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.19)$$

d'où $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$, $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ sont les vecteurs d'état du système maître et le système esclave, respectivement, $f_i, g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, et u_i , $1 \leq i \leq n$, est un vecteur de contrôle.

Définition 5.1 On dit qu'on a une **synchronisation FSHP inverse** entre le système maître (5.18) et le système esclave (5.19), s'il existe des contrôleurs u_i , $1 \leq i \leq n$, et des constantes $(\theta_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de telle sorte que les erreurs de synchronisation

$$e_i(k) = x_i(k) - \sum_{j=1}^n \theta_{ij} y_j(k), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.20)$$

vérifie que $\lim_{k \rightarrow +\infty} e(k) = 0$, $1 \leq i \leq n$.

5.3.2 Synchronisation FSHP inverse en 2D

Nous considérons que le système maître est donné sous la forme suivante

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \sum_{j=1}^2 a_{1j} x_j(k) + f_2(X(k)), \\ x_2(k+1) = \sum_{j=1}^2 a_{2j} x_j(k) + f_2(X(k)), \end{cases} \quad (5.21)$$

d'où $X(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ est le vecteur d'état du système maître, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sont des fonctions non linéaires. Le système esclave, est donné comme suit :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = g_1(Y(k)) + u_1, \\ y_2(k+1) = g_2(Y(k)) + u_2, \end{cases} \quad (5.22)$$

d'où $Y(k) = (y_1(k), y_2(k))^T$ est le vecteur d'état du système esclave, $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, et u_i , $i = 1, 2$, sont des contrôleurs. Selon la définition de la synchronisation FSHP inverse, le système d'erreur entre le système maître (5.21) et le système esclave (5.22) peut être dérivé comme suit

$$\begin{cases} e_1(k+1) = (a_{11} + a_{22} - l_1) e_1(k) + (a_{12} + a_{21} - l_2) e_2(k) + R_1 - \sum_{j=1}^2 \theta_{1j} u_j, \\ e_2(k+1) = (a_{21} + a_{12} - l_2) e_1(k) - (a_{11} + a_{22} - l_1) e_2(k) + R_2 - \sum_{j=1}^2 \theta_{2j} u_j, \end{cases} \quad (5.23)$$

d'où $(l_i)_{1 \leq i \leq 2}$ sont des constantes de contrôle et

$$\begin{cases} R_1 = f_1 - \theta_{11} g_1 - \theta_{12} g_2 + \sum_{j=1}^2 \lambda_{1j} y_j(k), \\ R_2 = f_2 - \theta_{21} g_1 - \theta_{22} g_2 + \sum_{j=1}^2 \lambda_{2j} y_j(k), \end{cases} \quad (5.24)$$

d'où $\lambda_{11} = a_{21}\theta_{11} + a_{22}\theta_{21}$, $\lambda_{12} = a_{11}\theta_{12} + a_{12}\theta_{22}$, $\lambda_{21} = a_{11}\theta_{11} + a_{12}\theta_{21}$ et $\lambda_{22} = a_{11}\theta_{12} + a_{12}\theta_{22}$.
 Supposons que $\theta_{11}\theta_{22} \neq \theta_{12}\theta_{21}$, alors nous choisissons les contrôleurs $(u_i)_{1 \leq i \leq 2}$ comme suit

$$u_1 = \frac{\theta_{22}R_1 - \theta_{12}R_2}{\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21}} \text{ et } u_2 = \frac{\theta_{11}R_2 - \theta_{21}R_1}{\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21}}. \quad (5.25)$$

Théorème 5.2 Si les constantes de contrôle $(l_i)_{1 \leq i \leq 2}$ sont choisies comme suit

$$(a_{11} + a_{22} - l_1)^2 + (a_{21} + a_{12} - l_2)^2 < 1, \quad (5.26)$$

alors les systèmes (5.21) et (5.22) sont globalement synchronisés FSHP inverse en 2-D.

Preuve. En substituant Eq. (5.25) dans Eq. (5.23), le système d'erreur entre les systèmes (5.21) et (5.22) peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = (a_{11} + a_{22} - l_1)e_1(k) + (a_{12} + a_{21} - l_2)e_2(k), \\ e_2(k+1) = (a_{21} + a_{12} - l_2)e_1(k) - (a_{11} + a_{22} - l_1)e_2(k). \end{cases} \quad (5.27)$$

Considérons la fonction de Lyapunov quadratique suivante : $V(e(k)) = e_1^2(k) + e_2^2(k)$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= V(e(k+1)) - V(e(k)) \\ &= \sum_{i=1}^2 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^2 e_i^2(k) \\ &= (a_{11} + a_{22} - l_1)^2 e_1^2(k) + (a_{21} + a_{12} - l_2)^2 e_2^2(k) \\ &\quad + 2(a_{11} + a_{22} - l_1)(a_{12} + a_{21} - l_2)e_1(k)e_2(k) \\ &\quad + (a_{21} + a_{12} - l_2)^2 e_1^2(k) + (a_{11} + a_{22} - l_1)^2 e_2^2(k) \\ &\quad - 2(a_{11} + a_{22} - l_1)(a_{12} + a_{21} - l_2)e_1(k)e_2(k) \\ &\quad - e_1^2(k) - e_2^2(k) \\ &= [(a_{11} + a_{22} - l_1)^2 e_1^2(k) + (a_{21} + a_{12} - l_2)^2 - 1] (e_1^2(k) + e_2^2(k)). \end{aligned}$$

En utilisant (5.26), nous obtenons : $\Delta V(e(k)) < 0$. Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$, $i = 1, 2$. Par conséquent, les systèmes (5.21) et (5.22) sont globalement synchronisés FSHP inverse. ■

5.3.3 Synchronisation IFSHP en 3D

Dans ce cas, les systèmes maître et esclave sont considérés sous les formes suivantes

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j(k) + f_i(X(k)), \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5.28)$$

$$y_i(k+1) = g_i(Y(k)) + u_i, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (5.29)$$

d'où $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq 3}$, $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq 3}$ sont les vecteurs d'état du système maître et du système esclave, respectivement, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, sont des fonctions non linéaires, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$, et u_i , $1 \leq i \leq 3$, sont des contrôleurs. Le système d'erreur entre le système maître (5.28) et le système esclave (5.29) peut être donné par

$$\begin{pmatrix} e_1(k+1) \\ e_2(k+1) \\ e_3(k+1) \end{pmatrix} = (A + L) \begin{pmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \\ e_3(k) \end{pmatrix} - \theta U + R, \quad (5.30)$$

d'où $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, $U = (u_i)_{1 \leq i \leq 3}$

$$L_1 = \begin{pmatrix} l_1 & -a_{12} + a_{22} + l_2 & -a_{13} - (a_{33} + l_3) \\ -a_{21} + -2(a_{11} + l_1) & l_2 & -a_{23} \\ -a_{31} + a_{11} + l_1 & -a_{32} + a_{22} + l_2 & l_3 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

$(l_i)_{1 \leq i \leq 3}$ sont des constantes de contrôle, $\theta = (\theta_{ij})_{3 \times 3}$, et

$$R = f(X(k)) - \theta g(Y(k)) - L_1 X(k) + \theta(A + L_1)Y(k). \quad (5.32)$$

Théorème 5.3 Pour une matrice inversible θ , la synchronisation FSHP inverse entre le système maître (5.28) et le système esclave (5.29) se produit, si les conditions suivantes sont vérifiées

(i) $U = \theta^{-1}R$, d'où θ^{-1} est la matrice inverse de la matrice θ .

(ii) $|a_{11} + l_1| < \frac{1}{\sqrt{6}}$, $|a_{22} + l_2| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $|a_{33} + l_3| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Preuve. En utilisant (i), le système d'erreur (5.30) peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = (a_{11} + l_1)e_1(k) + (a_{22} + l_2)e_2(k) - (a_{33} + l_3)e_3(k), \\ e_2(k+1) = -2(a_{11} + l_1)e_1(k) + (a_{22} + l_2)e_2(k), \\ e_3(k+1) = (a_{11} + l_1)e_1(k) + (a_{22} + l_2)e_2(k) + (a_{33} + l_3)e_3(k). \end{cases} \quad (5.33)$$

Pour analyser la stabilité de la zéro-solution du système (5.33), nous considérons la fonction de Lyapunov : $V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k)$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \Delta V(e(k)) &= V(e(k+1)) - V(e(k)) \\
 &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\
 &= 6(a_{11} + l_1)^2 e_1^2(k) + 3(a_{22} + l_2)^2 e_2^2(k) + 2(a_{33} + l_3)^2 e_3^2(k) \\
 &\quad + [2(a_{11} + l_1)(a_{22} + l_2) - 2(a_{11} + l_1)(a_{22} + l_2)] e_1(k) e_2(k) \\
 &\quad + [-(a_{11} + l_1)(a_{33} + l_3) + (a_{11} + l_1)(a_{33} + l_3)] e_1(k) e_3(k) \\
 &\quad + [-(a_{22} + l_2)(a_{33} + l_3) + (a_{22} + l_2)(a_{33} + l_3)] e_2(k) e_3(k) \\
 &\quad - e_1^2(k) - e_2^2(k) - e_3^2(k) \\
 &= (6(a_{11} + l_1)^2 - 1) e_1^2(k) + (3(a_{22} + l_2)^2 - 1) e_2^2(k) + (2(a_{33} + l_3)^2 - 1) e_3^2(k),
 \end{aligned}$$

et par (ii) nous obtenons : $\Delta V(e(k)) < 0$. Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Par conséquent, les systèmes (5.28) et (5.29) sont globalement synchronisés FSHP inverse. ■

5.3.4 Synchronisation IFSHP en $n-D$

Considérons le couple des systèmes chaotiques suivant

$$X(k+1) = AX(k) + f(X(k)), \quad (5.34)$$

$$Y(k+1) = g(Y(k)) + U, \quad (5.35)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'état de système maître et de système esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur de contrôle. Le système d'erreur entre le système maître (5.34) et le système esclave (5.35) peut être décrit comme suit

$$\begin{aligned}
 e(k+1) &= X(k+1) - \theta Y(k+1) \\
 &= (A - L_2) e(k) + R - \theta U,
 \end{aligned} \quad (5.36)$$

d'où

$$R = L_2 X(k) + (A - L_2) \theta Y(k) + f(X(k)) - \theta g(Y(k)), \quad (5.37)$$

$\theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $L_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de contrôle inconnue.

Théorème 5.4 Pour une matrice inversible θ , la synchronisation IFSHP entre le système maître (5.34) et le système esclave (5.35) se produit, si les conditions suivantes sont vérifiées

(i) $U = \theta^{-1}R$, d'où θ^{-1} est la matrice inverse de la matrice θ .

(ii) $(A - L_2)^T (A - L_2) - I$ est une matrice définie négative.

Preuve. En substituant la loi de contrôle donnée par (??) dans Eq.(5.36), le système d'erreur entre les systèmes (5.34) et (5.35) est donné comme suit

$$e(k+1) = (A - L_2)e(k). \quad (5.38)$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov : $V(e(k)) = e^T(k)e(k)$, alors nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= e^T(k+1)e(k+1) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k)(A - L_2)^T (A - L_2)e(k) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k) \left[(A - L_2)^T (A - L_2) - I \right] e(k), \end{aligned}$$

et par (ii) nous obtenons : $\Delta V(e(k)) < 0$. Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0$. Par conséquent, les systèmes (5.34) et (5.35) sont globalement synchronisés FSHP inverse. ■

5.3.5 Exemples

Dans ce paragraphe, deux exemples sont considérés, pour donner une justification numérique aux schémas de contrôle présentés ci-dessus

Exemple 1 :

On considère le système de Lorenz discret comme un système maître et le système de Fold contrôlé comme un système esclave. Le système de Lorenz discret peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1+ab)x_1(k) - bx_1(k)x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_2(k+1) = (1-b)x_2(k) + bx_1^2(k), \end{cases} \quad (5.39)$$

d'où $(a, b) = (1.25, 0.75)$. Le système de Fold contrôlé est décrit comme :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \alpha y_1(k) + y_2(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = y_1^2(k) + \beta + u_2, \end{cases} \quad (5.40)$$

d'où $(\alpha, \beta) = (-0.1, -1.7)$, u_1 et u_2 sont des contrôleurs. Dans ce cas, nous choisissons les constantes $(\theta_{ij})_{2 \times 2}$ comme suits

$$\begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad (5.41)$$

et selon notre schéma de contrôle présenté dans le paragraphe 5.3.2, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + ab & 0 \\ 0 & 1 - b \end{pmatrix}, \quad (5.42)$$

$$\begin{pmatrix} f_1(X(k)) \\ f_2(X(k)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bx_1(k)x_2(k) \\ bx_1^2(k) \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Corollaire 5.2 Pour les systèmes maître-esclave (5.39) et (5.40), si les constantes de contrôle l_1 et l_2 sont choisies tels que :

$$(2 + ab - b - l_1)^2 + l_2^2 < 1, \quad (5.44)$$

alors sont globalement synchronisés FSHP inverse.

Les résultats numériques sont présentés, pour $(l_1, l_2) = (-2, 0.05)$, dans la figure 5.2.

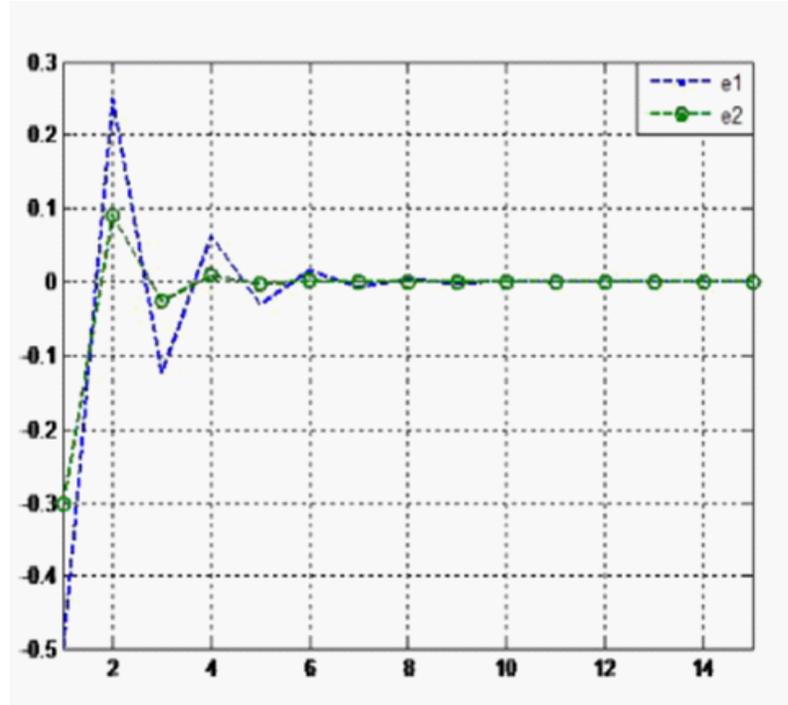


Figure 5.2 - Évolution des erreurs de la synchronisation FSHP inverse entre les systèmes (5.39) et (5.40).

Exemple 2 :

Maintenant, nous considérons que le système d'Hitzl-Zele est un système maître et le système contrôlé de Stefanski un système esclave. Le système d'Hitzl-Zele peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\beta x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_3(k) + 1 - \alpha x_2^2(k), \\ x_3(k+1) = \beta x_2(k) + x_1(k), \end{cases} \quad (5.45)$$

d'où $(\alpha, \beta) = (1.07, 0.3)$. Le système contrôlé de Stefanski est décrit comme :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 1 + y_3(k) - ay_2^2(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = 1 + by_2(k) - ay_1^2(k) + u_2, \\ y_3(k+1) = by_1(k) + u_3, \end{cases} \quad (5.46)$$

d'où $a = 1.4$, $b = 0.2$, u_1 , u_2 et u_3 sont les contrôleurs.

Dans ce cas, nous choisissons les constantes $(\theta_{ij})_{3 \times 3}$ comme suits

$$\theta = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad (5.47)$$

et selon notre schéma de contrôle présenté dans le paragraphe 5.3.3, nous obtenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

$$f(X(k)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \alpha x_2^2(k) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Corollaire 5.3 Pour les systèmes (5.45) et (5.46), si les constantes de contrôle l_1 , l_2 et l_3 sont choisies tels que :

$$|l_1| < \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad |l_2| < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad |l_3| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (5.50)$$

alors sont globalement synchronisés FSHP inverse.

Les résultats numériques sont présentés, pour $(l_1, l_2, l_3) = (-0.06, 0.01, -0.2)$, dans la figure 5.3.

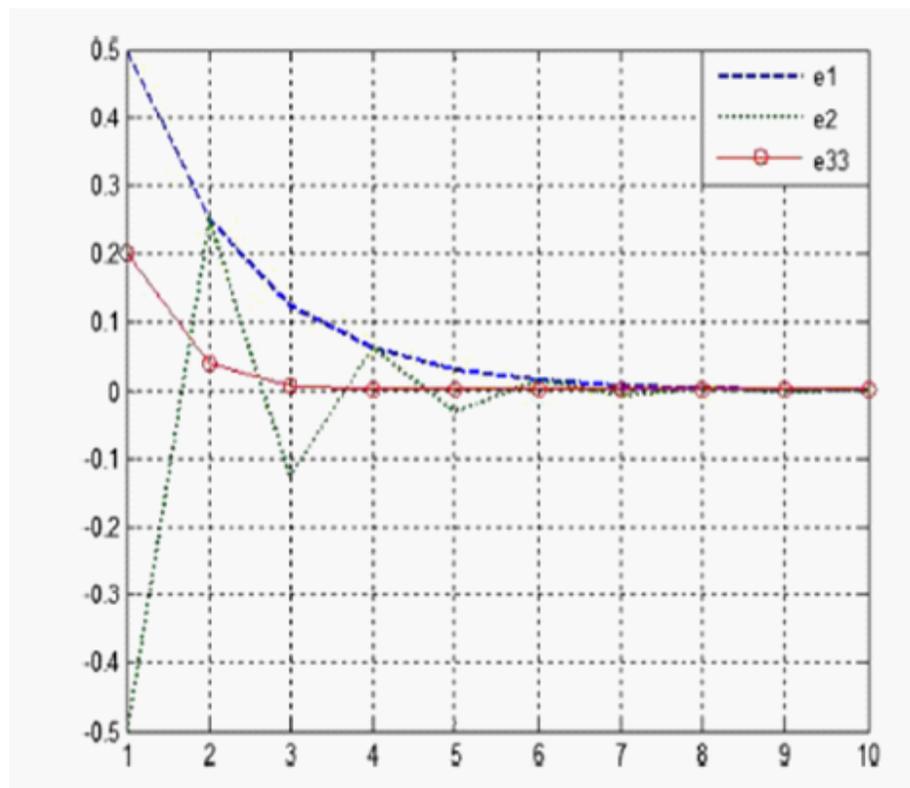


Figure 5.3 - L'évolution des erreurs de la synchronisation FSHP inverse entre les systèmes (5.45) et (5.46).

5.4 Synchronisation généralisée des systèmes chaotiques discrets avec des dimensions différentes

Parmi tous les types de synchronisations proposés, la synchronisation généralisée a été largement étudiée. En synchronisation généralisée, on dit que deux systèmes chaotiques sont synchronisés s'il existe une relation fonctionnelle entre les états du système maître et du système esclave [139]. Notons que la plupart des méthodes pour atteindre la synchronisation généralisée sont liées aux systèmes chaotiques continus [140, 141, 142]. Peu de méthodes sont liées aux systèmes chaotiques discrets [143, 144]. Dans cette section, nous étudions le problème classique et le problème inverse de la synchronisation généralisée dans le cas des systèmes chaotiques discrets avec des dimensions différentes. Des simulations numériques sont effectuées pour vérifier l'efficacité des schémas de synchronisation proposés. Le contenu de cette section a fait l'objet d'une publica-

tion : “Generalized Synchronization of Different Dimensional Chaotic Dynamical Systems in Discrete Time”, *Nonlinear Dyn.*, 2015 [145].

5.4.1 Problème classique de la synchronisation généralisée

Considérons le système maître suivant

$$X(k+1) = f(X(k)), \quad (5.51)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le système esclave, est donné comme suit :

$$Y(k+1) = BY(k) + g(Y(k)) + U, \quad (5.52)$$

d'où $Y(k) \in \mathbb{R}^m$, B est la matrice $m \times m$ des paramètres du système esclave, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la partie non linéaire et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un contrôleur.

Afin d'étudier le problème classique de la synchronisation généralisée entre les systèmes chaotiques discrets donnés par les équations (5.51) et (5.52), nous discutons la stabilité asymptotique de la zéro-solution du système d'erreur $e(k) = Y(k) - \phi(X(k))$. Nous choisissons un contrôleur U telles que les solutions du système d'erreur $e_i(k)$ vont à 0, $i = 1, 2, \dots, n$, que k tend vers $+\infty$. Dans ce cas, le système d'erreur de la synchronisation généralisée, entre le système maître (5.51) et le système esclave (5.52), peut être dérivé comme suit

$$e(k+1) = BY(k) + g(Y(k)) - \phi(f(X(k))) + U, \quad (5.53)$$

d'où $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Pour réaliser la synchronisation généralisée entre les systèmes (5.51) et (5.52), le contrôleur U est choisi comme suit :

$$U = -L_1 Y(k) - g(Y(k)) + \phi(f(X(k))) + (L_1 - B)\phi(X(k)), \quad (5.54)$$

d'où $L_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice de contrôle inconnue, à déterminer. En substituant l'équation (5.54) dans l'équation (5.53), le système d'erreur peut être décrit comme suit :

$$e(k+1) = (B - L_1)e(k). \quad (5.55)$$

Théorème 5.5 *S'il existe une matrice définie positive P_1 , de telle sorte que $(B - L_1)^T(B - L_1) - I = -P_1$, alors le système maître (5.51) et le système esclave (5.52) sont globalement synchronisés, par rapport à ϕ , pour le contrôleur (5.54).*

Preuve. Nous construisons la fonction de Lyapunov sous la forme

$$V(e(k)) = e^T(k)e(k), \quad (5.56)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= e^T(k+1)e(k+1) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k)(B - L_1)^T(B - L_1)e(k) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k) [(B - L_1)^T(B - L_1) - I] e(k) = -e^T(k)P_1e(k) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Alors, la solution zéro du système d'erreur (5.56) est asymptotiquement stable, et par conséquent, les systèmes (5.51) et (5.52) sont globalement synchronisés. ■

5.4.2 Problème inverse de la synchronisation généralisée

Maintenant, les systèmes chaotiques maître et esclave sont considérés sous les formes suivantes

$$X(k+1) = AX(k) + f(X(k)), \quad (5.57)$$

$$Y(k+1) = g(Y(k)) + U, \quad (5.58)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état du système maître et du système esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont les parties linéaire et non linéaire du système maître, respectivement, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un vecteur de contrôle. La définition de la synchronisation généralisée inverse entre le système maître (5.57) et le système esclave (5.58) est donnée par :

Définition 5.2 *Le système maître (5.57) et le système esclave (5.58) sont dits synchronisés généralisés inverses, s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de telle sorte que l'erreur de synchronisation*

$$e(k) = X(k) - \varphi(Y(k)), \quad (5.59)$$

vérifie que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|e(k)\| = 0$.

Dans ce cas, le système d'erreur entre le système maître (5.57) et le système esclave (5.58), peut être décrit comme suit :

$$e(k+1) = AX(k) + f(X(k)) - \varphi(g(Y(k)) + U). \quad (5.60)$$

Pour réaliser la synchronisation généralisée inverse entre les systèmes (5.57) et (5.58), le contrôleur U est choisi comme suit :

$$U = -g(Y(k)) + \varphi^{-1} [f(X(k)) + L_2 X(k) + (L_2 - A)\varphi(Y(k))], \quad (5.61)$$

d'où $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est la fonction inverse de φ et $L_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de contrôle inconnue, à déterminer plus tard. En substituant l'équation (5.61) dans l'équation (5.60), le système d'erreur peut être décrit comme suit :

$$e(k+1) = (A - L_2)e(k). \quad (5.62)$$

Théorème 5.6 *S'il existe une matrice définie positive P_2 , de telle sorte que $(A - L_2)^T(A - L_2) - I = -P_2$, alors le système maître (5.57) et le système esclave (5.58) sont globalement synchronisés, par rapport à φ , sous la loi de contrôle (5.61).*

Preuve. Nous construisons la fonction de Lyapunov sous la forme

$$V(e(k)) = e^T(k)e(k), \quad (5.63)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= e^T(k+1)e(k+1) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k)(A - L_2)^T(A - L_2)e(k) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k) [(A - L_2)^T(A - L_2) - I] e(k) = -e^T(k)P_2e(k) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Alors, la solution zéro du système d'erreur (5.63) est asymptotiquement stable, et par conséquent, les systèmes (5.57) et (5.58) sont globalement synchronisés. ■

5.4.3 Exemples numériques

Dans ce paragraphe, pour valider les résultats théoriques dérivés ci-dessus, deux exemples sont considérés.

Exemple 1 :

Ici, nous considérons le système hyperchaotique de Stefanski comme système maître et le système de Lorenz discret comme un système esclave. Le système de Stefanski peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 1 + x_3(k) - \alpha x_2^2(k), \\ x_2(k+1) = 1 + \beta x_2(k) - \alpha x_1^2(k), \\ x_3(k+1) = \beta x_1(k), \end{cases} \quad (5.64)$$

d'où $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.2$. Le système contrôlé de Lorenz discret peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = (1 + ab)y_1(k) - by_1(k)y_2(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = (1 - b)y_2(k) + by_2^2(k) + u_2, \end{cases} \quad (5.65)$$

d'où $a = 1.25$, $b = 0.75$ et $U = (u_1, u_2)^T$ est le contrôleur. Nous sélectionnons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la matrice de contrôle L_1 , respectivement, comme suit

$$\phi(x_1(k), x_2(k), x_3(k)) = (x_1(k) + x_3(k), x_2(k) + x_3(k)), \quad (5.66)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1.4 + \alpha\beta & 0 \\ 1 - \beta & 0,82 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Ensuite, selon notre approche présentée dans le paragraphe 5.4.1, nous obtenons

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \alpha\beta & 0 \\ 1 - \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.68)$$

et

$$g(Y(k)) = \begin{pmatrix} -\beta y_1(k)y_2(k) \\ \beta y_2^2(k) \end{pmatrix}. \quad (5.69)$$

En utilisant des calculs simples, nous pouvons montrer que $(B - L_1)^T(B - L_1) - I$ est une matrice définie négative. Par conséquent, dans ce cas, les systèmes (5.64) et (5.65) sont globalement synchronisés par rapport à ϕ . L'évolution des erreurs de la synchronisation généralisée entre les

systèmes (5.64) et (5.65) est représentée sur la Figure 5.4

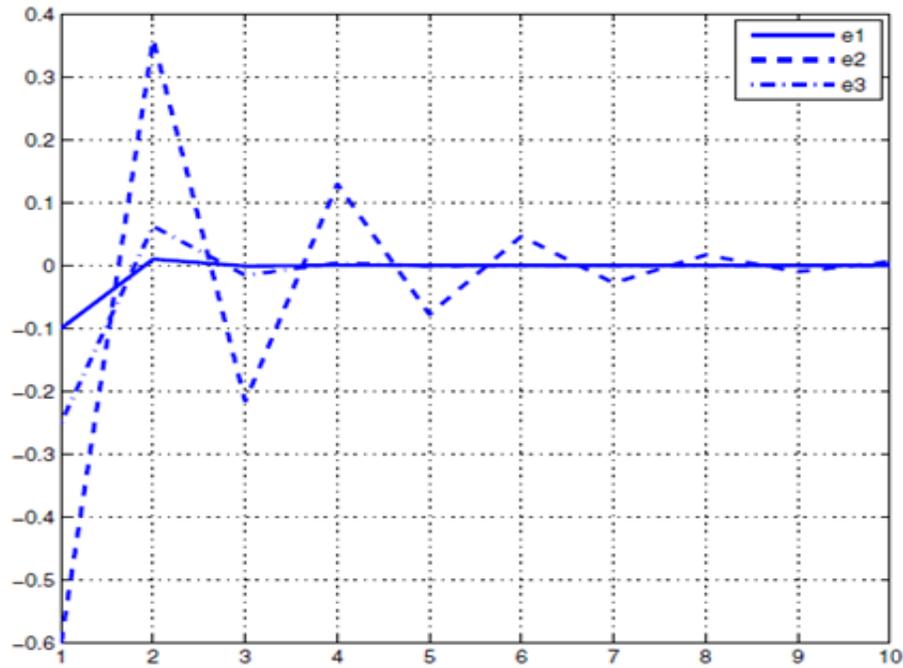


Figure 5.4 - L'évolution des erreurs de la synchronisation généralisée entre les systèmes (5.64) et (5.65).

Exemple 2 :

Maintenant, nous considérons le système d'Hitzl-Zele comme système maître et le système contrôlé de Fold comme système esclave. Le système d'Hitzl-Zele peut être défini comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\beta x_2(k), \\ x_2(k+1) = x_3(k) + 1 - \alpha x_2^2(k), \\ x_3(k+1) = \beta x_2(k) + x_1(k), \end{cases} \quad (5.70)$$

d'où $(\alpha, \beta) = (1.07, 0.3)$. Le système contrôlé de Fold discret peut être décrit par

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_2(k) + ay_1(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = b + y_1^2(k) + u_2, \end{cases} \quad (5.71)$$

d'où $(a, b) = (-0.1, -1.7)$ et $U = (u_1, u_2)^T$ est un contrôleur. Si nous sélectionnons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et la matrice de contrôle L_2 , respectivement, comme suit

$$\varphi(y_1(k), y_2(k)) = (y_1(k), y_2(k), 2y_1(k))^T, \quad (5.72)$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & -b & 0 \\ 0 & 0.61 & 1 \\ 1 & b & 0.25 \end{pmatrix}. \quad (5.73)$$

Ensuite, selon notre approche présentée dans le paragraphe 5.4.2, nous obtenons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.74)$$

et

$$f(X(k)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - ax_2^2(k) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.75)$$

Par des calculs simples, nous pouvons montrer que $(A - L_2)^T(A - L_2) - I$ est une matrice définie négative. Par conséquent, dans ce cas, les systèmes (5.70) et (5.71) sont globalement synchronisés par rapport à φ . L'évolution des erreurs de la synchronisation généralisée inverse entre les

systèmes (5.70) et (5.71) est illustrée dans la Figure 5.5.

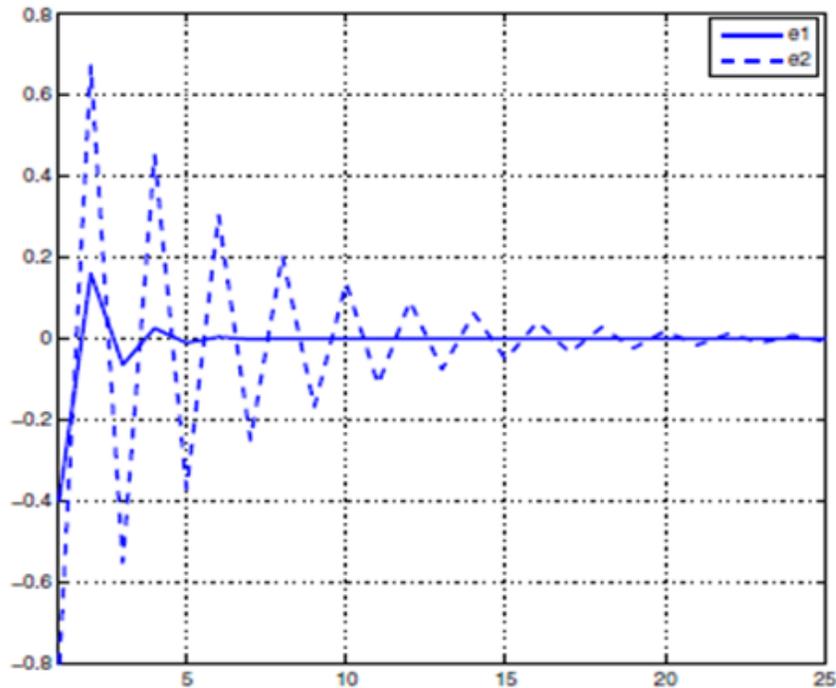


Figure 5.5 - L'évolution des erreurs de la synchronisation généralisée entre les systèmes (5.70) et (5.71).

5.5 Nouveau type-généralisé de synchronisation chaotique

Dans cette section, nous proposons un nouveau type de synchronisation en combinant entre la synchronisation projective matricielle et la synchronisation généralisée inverse. Basés sur des contrôleurs non linéaires et la théorie de stabilité de Lyapunov, des schémas efficaces de contrôle sont introduits et de nouveaux critères de synchronisation sont dérivés. Ce nouveau type de synchronisation chaotique nous permet d'étudier la synchronisation entre différents systèmes chaotiques discrets dans différentes dimensions. Le nouveau type de synchronisation est appliqué avec succès au plusieurs exemples et des simulations numériques sont données pour illustrer l'efficacité du nouveaux résultats. Le contenu de ce chapitre à fait l'objet d'une publication : "A New Generalized-Type of Synchronization for Discrete-Time Chaotic Dynamical Systems", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 10(6), 2015, 061019-8 [146].

5.5.1 Synchronisation $\Lambda - \phi$ généralisée

Considérons le couple des systèmes chaotiques suivant

$$\begin{cases} X(k+1) = f(X(k)), \\ Y(k+1) = g(Y(k)) + U, \end{cases} \quad (5.76)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état du système maître et du système esclave, respectivement, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un vecteur de contrôle.

Définition 5.3 *Le système maître $X(k)$ et le système esclave $Y(k)$ sont dits synchronisés généralisée $\Lambda - \phi$, s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$, une matrice Λ , $d \times m$, et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, de telle sorte que l'erreur de synchronisation*

$$e(k) = \Lambda Y(k) - \phi(X(k)), \quad (5.77)$$

vérifiant $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|e(k)\| = 0$. Le nombre d est appelé la dimension de la synchronisation.

Remarque 5.2 *Lorsque $(\Lambda, \phi(\cdot)) = (I, X(k))$, $(\Lambda, \phi(\cdot)) = (I, -X(k))$, $(\Lambda, \phi(\cdot)) = (\Lambda, X(k))$ et $(\Lambda, \phi(\cdot)) = (I, \phi(X(k)))$ la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation projective matricielle, et la synchronisation généralisée inverse apparaît, respectivement.*

5.5.2 Critère de synchronisation dans le cas : $d = m$

Dans ce cas, le système maître et le système esclave sont donnés sous les formes suivantes

$$\begin{cases} X(k+1) = f(X(k)), \\ Y(k+1) = BY(k) + g(Y(k)) + U, \end{cases} \quad (5.78)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état du système maître et du système esclave, respectivement, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, B est une matrice constante $m \times m$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction non linéaire et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est le contrôleur. Le système d'erreur entre le système maître et le système esclave du couple (5.78), selon la définition (5.2), peut être dérivé comme suit :

$$e(k+1) = (B - L)e(k) + \Lambda U + R, \quad (5.79)$$

d'où

$$R = (L - B)(\Lambda Y(k) - \phi(X(k))) - \phi(f(X(k))) + \Lambda(BY(k) + g(Y(k))), \quad (5.80)$$

et $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice de contrôle inconnue. Pour atteindre une synchronisation généralisée $\Lambda - \phi$ entre les systèmes du couple (5.78), nous proposons une loi de contrôle U come suit :

$$U = -\Lambda^{-1}R, \quad (5.81)$$

d'où Λ^{-1} est la matrice inverse de la matrice Λ . En utilisant le contrôleur (5.81), le système d'erreur (5.79) peut être décrit sous la forme

$$e(k+1) = (B - L)e(k). \quad (5.82)$$

En utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov on peut voir que, si la matrice de contrôle L est choisie de telle sorte que $(B - L)^T(B - L) - I$ soit une matrice définie négative, alors toute solution du système d'erreur (5.82) vont à 0, lorsque k tend vers $+\infty$.

Maintenant, on peut donner le Théorème suivant :

Théorème 5.7 *Pour une matrice Λ inversible, la synchronisation généralisée $\Lambda - \phi$ entre le système maître et le système esclave (5.78) se produit, si les conditions suivantes sont vérifiées*

(i) $U = -\Lambda^{-1}R$.

(ii) $(B - L)^T(B - L) - I$ est une matrice définie négative.

5.5.3 Critère de synchronisation dans le cas : $d \neq m$

Maintenant, nous considérons le couple maître-esclave comme suit

$$\begin{cases} X(k+1) = f(X(k)), \\ Y(k+1) = g(Y(k)) + U, \end{cases} \quad (5.83)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les vecteurs d'état du système maître et le système esclave, respectivement, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un vecteur contrôle. Dans ce cas, nous supposons que $d < m$. Le système d'erreur entre les systèmes du couple maître-esclave (5.83), peut être décrit comme suit :

$$e(k+1) = Le(k) + \Lambda U + R, \quad (5.84)$$

d'où

$$R = -L(\Lambda Y(k) - \phi(X(k))) + \Lambda g(Y(k)) - \phi(f(X(k))), \quad (5.85)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1d} & \cdots & \Lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{d1} & \cdots & \Lambda_{dd} & \cdots & \Lambda_{dm} \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

et $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_d)$ est une matrice de contrôle inconnue à déterminer. Pour réaliser la synchronisation généralisée $\Lambda - \phi$ entre les systèmes (5.83), le contrôleur U est choisi comme suit :

$$U = (u_1, \dots, u_d, 0, \dots, 0)^T, \quad (5.87)$$

en substituant l'équation (5.87) dans l'équation (5.84), le système d'erreur peut être décrit comme suit :

$$e(k+1) = Le(k) + \tilde{\Lambda}\tilde{U} + R, \quad (5.88)$$

d'où

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{d1} & \cdots & \Lambda_{dd} \end{pmatrix}, \quad (5.89)$$

et $\tilde{U} = (u_1, \dots, u_d)^T$ est le nouveau loi de contrôle. Pour atteindre la synchronisation généralisée $\Lambda - \phi$ entre les systèmes du couple (5.83), le vecteur \tilde{U} est donné come suit :

$$\tilde{U} = -\tilde{\Lambda}^{-1}R, \quad (5.90)$$

d'où $\tilde{\Lambda}^{-1}$ est la matrice inverse de la matrice $\tilde{\Lambda}$. En utilisant (5.90), le système d'erreur (5.88) peut être décrit comme

$$e(k+1) = Le(k). \quad (5.91)$$

Prenons la fonction de Lyapunov quadratique suivante : $V(e(k)) = \sum_{i=1}^d e_i^2(k)$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= V(e(k+1)) - V(e(k)) \\ &= \sum_{i=1}^d e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^d e_i^2(k) = \sum_{i=1}^d (l_i^2 - 1) e_i^2(k), \end{aligned}$$

si les constantes de contrôle $(l_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont choisies de telle sorte que $(l_i^2 - 1) < 1$, $(1 \leq i \leq d)$, nous obtenons : $\Delta V(e(k)) < 0$. Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0$, $(1 \leq i \leq d)$. Par conséquent, les systèmes (5.83) sont globalement synchronisés. Maintenant, on peut énoncer le Théorème suivant :

Théorème 5.8 *Pour une matrice Λ inversible, la synchronisation généralisée $\Lambda - \phi$ entre les systèmes du couple maître-esclave (5.83) se produit, si les conditions suivantes sont vérifiées*

(i) $\tilde{U} = -\tilde{\Lambda}^{-1}R$.

(ii) Toutes les constantes de contrôle $(l_i)_{1 \leq i \leq d}$ vérifiant $|l_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, d$.

5.5.4 Applications

Pour valider les résultats théoriques dérivés ci-dessus, on considère le système de Lorenz discret comme un système maître et le système contrôlé de Wang comme un système esclave. Le système maître peut être décrit comme :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1 + \alpha\beta)x_1(k) - \beta x_1(k)x_2(k), \\ x_2(k+1) = (1 - \beta)x_2(k) + \beta x_1^2(k), \end{cases} \quad (5.92)$$

d'où $(\alpha, \beta) = (1.25, 0.75)$. Le système esclave est décrit comme :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = a_3\delta y_2(k) + (a_4\delta + 1)y_1(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = a_1\delta y_1(k) + y_2(k) + a_2\delta y_3(k) + u_2, \\ y_3(k+1) = (a_7\delta + 1)y_3(k) + a_6\delta y_2(k)y_3(k) + a_5\delta + u_3, \end{cases} \quad (5.93)$$

d'où $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \delta) = (-1.9, 0.2, 0.5, -2.3, 2, -0.6, -1.9, 1)$ et $U = (u_1, u_2, u_3)^T$ est le vecteur de contrôle.

Synchronisation entre le système de Lorenz discret et le système de Wang dans 3D

Dans ce cas, les quantités B, g sont données, respectivement, par :

$$B = \begin{pmatrix} a_4\delta + 1 & a_3\delta & 0 \\ a_1\delta & 1 & a_2\delta \\ 0 & 0 & a_7\delta + 1 \end{pmatrix}, \quad g(Y(k)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_6\delta y_2(k)y_3(k) + a_5\delta \end{pmatrix}.$$

Selon notre approche présentée dans le paragraphe 5.5.2, la fonction ϕ , la matrice Λ et la matrice de contrôle L sont choisies, respectivement, comme suit :

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_1(k) + x_2(k) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & -0.1 \\ 1 & 1 & -0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_4\delta + 0.5 & a_3\delta & 0 \\ a_1\delta & 0.5 & a_2\delta \\ 0 & 0 & a_7\delta + 0.5 \end{pmatrix}.$$

Alors, le vecteur de contrôle est construit comme suit :

$$U = -\Lambda^{-1} \times (R_1, R_2, R_3)^T, \quad (5.94)$$

$$\text{d'où } \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\begin{cases} R_1 &= \sum_{j=1}^3 \eta_{1j} y_j(k) + \sum_{j=1}^2 \theta_{1j} x_j(k) - 0.1 a_6 \delta y_2(k) y_3(k) - 0.1 a_5 \delta + \beta x_1(k) x_2(k), \\ R_2 &= \sum_{j=1}^3 \eta_{2j} y_j(k) + \sum_{j=1}^2 \theta_{2j} x_j(k) - 0.1 a_6 \delta y_2(k) y_3(k) - 0.1 a_5 \delta - \beta x_1^2(k), \\ R_3 &= \sum_{j=1}^3 \eta_{3j} y_j(k) + \sum_{j=1}^2 \theta_{3j} x_j(k) a_6 \delta y_2(k) y_3(k) + a_5 \delta - \beta x_1(k) x_2(k) + \beta x_1^2(k), \end{cases} \quad (5.95)$$

d'où $\eta_{11} = (\delta - 0.1 a_1) \delta + 1.5$, $\eta_{12} = (a_3 \delta - 0.015)$, $\eta_{13} = -(0.1 \delta (a_2 + a_7) + 0.15)$, $\eta_{21} = (a_4 + a_1) \delta + 0.15$, $\eta_{22} = (1.5 + 1 + a_3 \delta)$, $\eta_{23} = (a_2 - 0.1 a_7) \delta - 0.015$, $\eta_{31} = (a_4 + a_1) \delta + 1.5$, $\eta_{32} = (a_3 \delta + 105)$, $\eta_{33} = (a_2 + a_7) \delta + 1.5$, $\theta_{11} = -(1.5 + \alpha \beta)$, $\theta_{21} = (-1.5 + \beta)$, $\theta_{31} = (0.5 + \alpha \beta)$, $\theta_{32} = (-1.5 + \beta)$, et $\theta_{12} = \theta_{21} = 0$.

Simplement, nous pouvons montrer que $(B - L)^T(B - L) - I$ est définie négative. Enfin, toutes les conditions du Théorème (5.7) sont satisfaites. Par conséquent, les systèmes (5.92) et (5.93) globalement synchronisés par rapport à la fonction ϕ et la matrice Λ . Nous obtenons, à l'aide des

simulations numériques, les résultats de synchronisation qui sont présentés dans la figure 5.6.

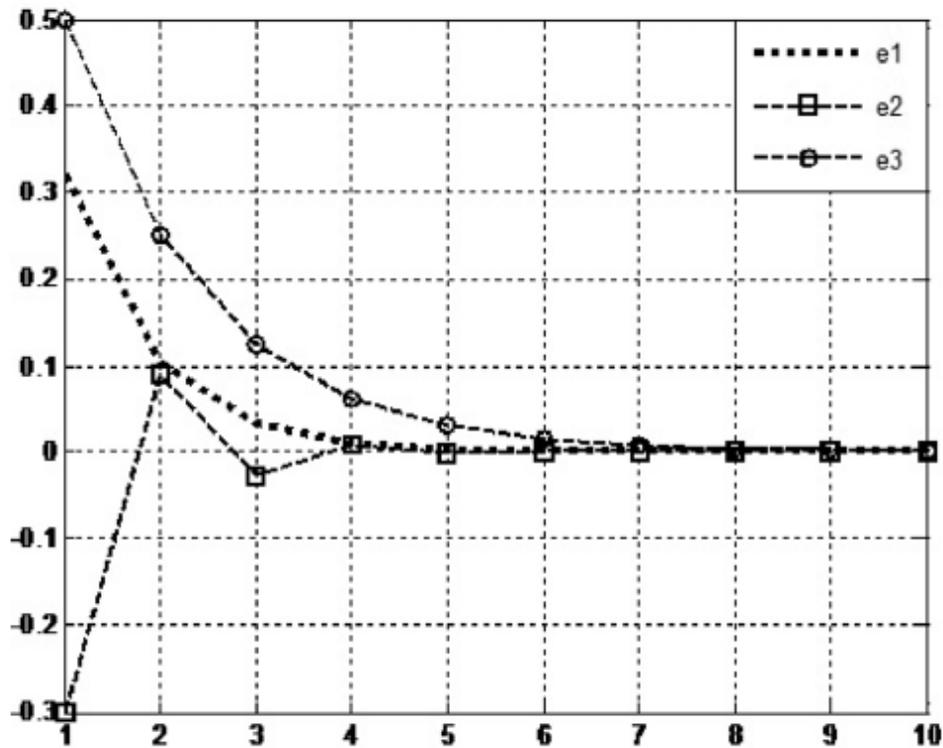


Figure 5.6 - Évolution des erreurs de la synchronisation $\Lambda - \phi$ généralisée entre le système de Lorenz discret et le système de Wang dans 3D.

Synchronisation entre le système de Lorenz discret et le système Wang dans 2D

Dans ce cas, la matrice de couplage Λ , la fonction ϕ et la matrice de contrôle L , respectivement, sont données par

$$\begin{pmatrix} x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k) - x_1(k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Selon le schéma de contrôle proposé dans le paragraphe 5.5.3, le contrôleur $U = (u_1, u_2, u_3)^T$ est construit comme suit :

$$\begin{cases} (u_1, u_2)^T = -\tilde{\Lambda}^{-1} (R_1, R_2)^T, \\ u_3 = 0, \end{cases} \quad (5.96)$$

d'où $\tilde{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et

$$\begin{cases} R_1 = \sum_{j=1}^3 \lambda_{1j} y_j(k) + \sum_{j=1}^2 \mu_{1j} x_j(k) + 3a_6 \delta y_2(k) y_3(k) + 3a_5 \delta + \beta x_1(k) x_2(k) - \beta x_1^2(k), \\ R_2 = \sum_{j=1}^3 \lambda_{2j} y_j(k) + \sum_{j=1}^2 \mu_{2j} x_j(k) + 2a_2 \delta y_3(k) + \beta x_1(k) x_2(k) + \beta x_1^2(k), \end{cases} \quad (5.97)$$

d'où $\lambda_{11} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + a_4 \delta \right)$, $\lambda_{12} = 2a_3 \delta$, $\lambda_{13} = 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + a_7 \delta \right)$, $\lambda_{21} = \left(a_4 \delta + 2a_1 \delta + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $\lambda_{22} = \left(a_3 \delta + 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$, $\lambda_{23} = 0$, $\mu_{11} = - \left(\alpha \beta + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $\mu_{12} = \left(\beta - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $\mu_{21} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \alpha \beta \right)$, $\mu_{22} = \left(\beta - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Il est clair que toutes les conditions du Théorème (5.8) sont satisfaites. Par conséquent, les systèmes (5.92) et (5.93) sont globalement synchronisés par rapport à la fonction ϕ et la matrice Λ dans 2D. Nous obtenons, à l'aide des simulations numériques, les résultats de synchronisation qui sont présentés dans la figure 5.7.

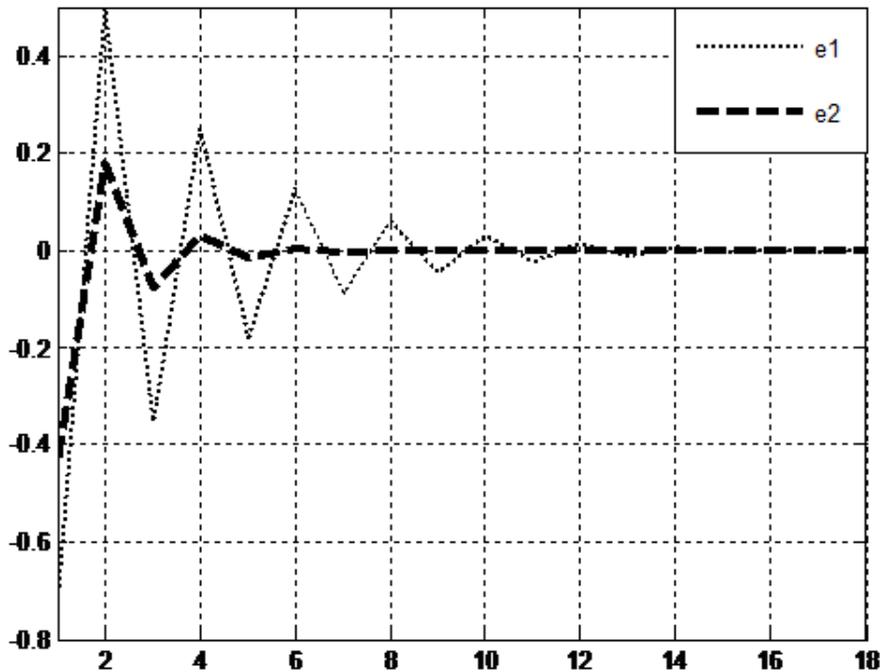


Figure 5.7 - L'évolution des erreurs de la synchronisation $\Lambda - \phi$ généralisée entre le système de Lorenz discret et le système de Wang dans 2D.

5.6 Nouveau critère pour de synchronisation pour les systèmes chaotiques discrets

Dans la plupart des méthodes de synchronisation, la synchronisation est obtenue en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov pour garantir la zéro-stabilité des erreurs entre le système maître et le système esclave. Dans cette section, sur la base d'un lemme dérivé de l'inégalité d'Halanay, nous introduisons un nouveau critère de stabilité pour synchroniser les systèmes dynamiques chaotiques discrets. Dans [147, 148], les auteurs dérivent un résultat important via l'inégalité d'Halanay discrète. Le lemme est donné comme suit :

Lemme 5.1 *Supposons que $0 < \alpha \leq 1$ et il existe une constante positive $\beta < \alpha$ tel que*

$$|h(n, z_n, \dots, z_{n-r})| \leq \beta \|(|z_n|, \dots, |z_{n-r}|)\|_\infty, \quad \forall (z_n, \dots, z_{n-r}) \in \mathbb{R}^{r+1}. \quad (5.98)$$

Alors, il existe $\lambda_0 \in (0, 1)$ tel que

$$|z_n| \leq \left(\max_{-r \leq i \leq 0} \{|z_i|\} \right) \lambda_0^n, \quad n \geq 0, \quad (5.99)$$

pour toute solution $\{z_n\}$ de

$$\Delta z_n = -\alpha z_n + h(n, z_n, \dots, z_{n-r}). \quad (5.100)$$

Ce lemme nous permet d'obtenir la synchronisation sans l'aide de la théorie de stabilité de Lyapunov. Le contenu de cette section a fait l'objet d'une publication : **A New Chaos Synchronization Criterion for Discrete Dynamical Systems**, *Applied Mathematical Sciences*, 8(41) 2014, 2025-2034 [149].

5.6.1 Cas des systèmes différents

Considérons les systèmes chaotiques discrets (maître et esclave) de dimension d sous les formes suivantes

$$X(k+1) = AX(k) + f(X(k)), \quad (5.101)$$

et

$$Y(k+1) = BY(k) + g(Y(k)) + U, \quad (5.102)$$

d'où

$$\begin{aligned} X(k) &= (x_1(k), \dots, x_d(k))^T, \\ Y(k) &= (y_1(k), \dots, y_d(k))^T, \end{aligned} \quad (5.103)$$

sont les vecteurs d'état du système maître (5.101) et du système esclave (5.102), respectivement, f et g sont des fonctions non linéaires. Les matrices A et B sont données par : $A = (a_{nm})$, $B = (b_{nm}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ et U est un contrôleur. Le système d'erreur entre le système maître (5.101) et le système esclave (5.102), peut être dérivé de la manière suivante :

$$e(k+1) = Be(k) + (B - A)X(k) + g(Y(k)) - f(X(k)) + U. \quad (5.104)$$

Pour réaliser la synchronisation, entre le système maître (5.101) et le système esclave (5.102), nous pouvons choisir le contrôleur U comme suit :

$$U = Ce(k) + \sum_{p=0}^r L^{(p)} e(k-p) + f(X(k)) - g(Y(k)) + (A - B)X(k), \quad (5.105)$$

d'où $C = (c_{nm}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ tels que

$$c_{nm} = \begin{cases} -b_{nm} & \text{if } n \neq m, \\ 0 & \text{if } n = m, \end{cases} \quad (5.106)$$

et $L^{(p)} = \text{diag}(l_1^{(p)}, l_2^{(p)}, \dots, l_d^{(p)})$, ($p = 0, 1, 2, \dots, r$), sont des matrices diagonales inconnues. En substituant l'équation (5.105) dans l'équation (5.104), l'erreur de synchronisation peut être écrite comme suit :

$$e(k+1) = (B + C)e(k) + \sum_{p=0}^r L^{(p)} e(k-p). \quad (5.107)$$

Théorème 5.9 Si les constantes de contrôle $\{l_n^{(p)}\}$, ($1 \leq n \leq d$, $0 \leq p \leq r$), sont choisies de telle sorte que

$$\max \{|b_{nn}|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}|\} < \frac{1}{r+2}, \quad 1 \leq n \leq d, \quad (5.108)$$

alors le système maître (5.101) et le système esclave (5.102) sont globalement synchronisés.

Preuve. L'équation de différence suivante :

$$\Delta e(k) = -e(k) + (B + C)e(k) + \sum_{p=0}^r L^{(p)} e(k-p), \quad (5.109)$$

implique les équations scalaires suivantes :

$$\Delta e_n(k) = -e_n(k) + b_{nn}e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)} e_n(k-p), \quad 1 \leq n \leq d. \quad (5.110)$$

Alors, nous pouvons voir que l'équation (5.110) est la même que l'équation (5.100) de Lemme 5.1 avec $z_n = e_n(k)$, $\alpha = 1$ et

$$h(n, z_n, \dots, z_{n-r}) = b_{nn}e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)}e_n(k-p), \quad 1 \leq n \leq d. \quad (5.111)$$

Ainsi, nous appliquons le Lemme 5.1 à l'équation (5.100), nous obtenons

$$\begin{aligned} |h(n, z_n, \dots, z_{n-r})| &= \left| b_{nn}e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)}e_n(k-p) \right| \\ &\leq \left(|b_{nn}| + \sum_{p=0}^r |l_n^{(p)}| \right) \|(|e_n(k)|, \dots, |e_n(k-r)|)\|_\infty \\ &\leq (r+2) \max \left\{ |b_{nn}|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}| \right\} \|(|e_n(k)|, \dots, |e_n(k-r)|)\|_\infty, \end{aligned}$$

alors β du lemme 5.1 est donné par

$$(r+2) \max \left\{ |b_{nn}|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}| \right\}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (5.112)$$

en utilisant le théorème 5.6, on obtient $\beta < \alpha = 1$, alors

$$\max \left\{ |b_{nn}|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}| \right\} < \frac{1}{r+2}, \quad 1 \leq n \leq d, \quad (5.113)$$

d'où $\lim_{k \rightarrow \infty} |e_n(k)| = 0$, $1 \leq n \leq d$, et du fait $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0$, ce qui implique que le système maître (5.101) et le système esclave (5.102) sont globalement synchronisés. ■

Proposition 5.1 *Le critère de stabilité du théorème 5.6, implique la stabilité en fonction de Lyapunov.*

Preuve. Supposons que les systèmes (5.101) et (5.102), sont globalement synchronisés sous le critère ci-dessus. Maintenant, nous considérons la fonction de Lyapunov suivante : $V(e(k)) = \sum_{n=1}^d e_n(k)^2$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= V(e(k+1)) - V(e(k)) \\ &= \sum_{n=1}^d e_n(k+1)^2 - \sum_{n=1}^d e_n(k)^2 \\ &= \sum_{n=1}^d \left[\left(b_{nn}e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)}e_n(k-p) \right)^2 - e_n(k)^2 \right] \\ &= \sum_{n=1}^d \left(b_{nn}e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)}e_n(k-p) + e_n(k) \right) \times \left(b_{nn}e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)}e_n(k-p) - e_n(k) \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^d \left(b_{nn} + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)} + 1 \right) \left(b_{nn} + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)} - 1 \right) \times \left(\|(|e_n(k)|, \dots, |e_n(k-r)|)\|_\infty \right)^2, \end{aligned}$$

et par le théorème 5.6, nous avons

$$0 < b_{nn} + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)} + 1 < 2, \quad 1 \leq n \leq d, \quad (5.114)$$

alors $\Delta V(e(k)) < 0$, et l'implication est vérifiée. ■

5.6.2 Cas des systèmes identiques

Maintenant, nous considérons le système maître et le système esclave sont donnés par

$$X(k+1) = AX(k) + f(X(k)), \quad (5.115)$$

$$Y(k+1) = AY(k) + f(Y(k)) + U, \quad (5.116)$$

d'où $X(k) = (x_1(k), \dots, x_d(k))^T$, $Y(k) = (y_1(k), \dots, y_d(k))^T \in \mathbb{R}^d$ sont les vecteurs d'état du système maître (5.115) et du système esclave (5.116), respectivement, $f = (f_n) \in \mathbb{R}^d$ est la partie non linéaire, f_n , ($n = 1, 2, \dots, d$), sont des fonctions scalaires tels que

$$|f_n(Y(k)) - f_n(X(k))| \leq \rho_n |y_n(k) - x_n(k)|, \quad 1 \leq n \leq d, \quad (5.117)$$

et U est le vecteur de contrôle. Le système d'erreur entre le système maître (5.115) et le système et esclave (5.116), peut être dérivé de la manière suivante :

$$e(k+1) = Ae(k) + f(Y(k)) - f(X(k)) + U. \quad (5.118)$$

Pour réaliser la synchronisation, entre les systèmes (5.101) et (5.102), le contrôleur U est choisi comme suit :

$$U = Ce(k) + \sum_{p=0}^r L^{(p)}e(k-p), \quad (5.119)$$

où $C = (c_{nm}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ tels que

$$c_{nm} = \begin{cases} -a_{nm} & \text{if } n \neq m, \\ 0 & \text{if } n = m, \end{cases} \quad (5.120)$$

et $L^{(p)} = \text{diag}(l_1^{(p)}, l_2^{(p)}, \dots, l_d^{(p)})$, ($p = 0, 1, 2, \dots, r$), sont des matrices diagonales inconnues. En substituant l'équation (5.119) dans l'équation (5.118), on peut obtenir la formule suivante pour le système d'erreur :

$$e(k+1) = (A + C)e(k) + \sum_{p=0}^r L^{(p)}e(k-p) + f(Y(k)) - f(X(k)). \quad (5.121)$$

Théorème 5.10 Si les constantes $\{l_n^{(p)}\}$, ($1 \leq n \leq d$, $0 \leq p \leq r$), sont choisies de telle sorte que

$$\max \{|a_{nn}|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}|, \rho_n\} < \frac{1}{r+3}, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (5.122)$$

alors le système maître (5.115) et le système esclave (5.116) sont globalement synchronisés.

Preuve. En utilisant la même procédure de la preuve du théorème 5.6, nous pouvons voir que

$$\Delta e_n(k) = (a_{nn} - 1) e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)} e_n(k-p) + f_n(Y(k)) - f_n(X(k)), \quad 1 \leq n \leq d. \quad (5.123)$$

Alors, nous pouvons voir que l'équation (5.123) est la même que l'équation (5.100) de Lemme 5.1 avec $z_n = e_n(k)$, $\alpha = 1$ et

$$h(n, z_n, \dots, z_{n-r}) = a_{nn} e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)} e_n(k-p) + f_n(Y(k)) - f_n(X(k)), \quad 1 \leq n \leq d. \quad (5.124)$$

Maintenant, nous pouvons vérifier les conditions du Lemme 5.1 à l'équation (5.123)

$$\begin{aligned} |h(n, z_n, \dots, z_{n-r})| &= \left| a_{nn} e_n(k) + \sum_{p=0}^r l_n^{(p)} e_n(k-p) + f_n(Y(k)) - f_n(X(k)) \right| \\ &\leq \left(|a_{nn}| + \sum_{p=0}^r |l_n^{(p)}| + \rho_n \right) \|(|e_n(k)|, \dots, |e_n(k-r)|)\|_{\infty} \\ &\leq (r+3) \max \left\{ |a_{nn}|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}|, \rho_n \right\} \|(|e_n(k)|, \dots, |e_n(k-r)|)\|_{\infty}, \end{aligned}$$

alors β du lemme 5.1 est donné par

$$(r+3) \max \left\{ |a_n|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}|, \rho_n \right\}, \quad 1 \leq n \leq d, \quad (5.125)$$

et

$$\max \left\{ |a_{nn}|, |l_n^{(0)}|, |l_n^{(1)}|, \dots, |l_n^{(r)}|, \rho_n \right\} < \frac{1}{r+3}, \quad 1 \leq n \leq d, \quad (5.126)$$

par conséquent, nous obtenons $\lim_{k \rightarrow \infty} |e_n(k)| = 0$, $1 \leq n \leq d$, ce qui implique $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0$, i.e., (5.115) et (5.116) sont globalement synchronisés. ■

Remarque 5.3 Nous remarquons que dans le premier cas, lorsque les systèmes chaotiques sont différents, le contrôleur est pris sous une forme non linéaire, mais dans le cas des systèmes identiques le contrôleur est linéaire.

5.6.3 Simulation numérique

Pour valider le critère de synchronisation chaotique proposé dans cette section, un exemple numérique est donné. Le système d'Hitzl-Zele et le système contrôlé de Baier-Klein sont considérés comme système maître et système esclave, respectivement, comme suit :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.3x_2(k), \\ x_2(k+1) = 1 + x_3(k) - 1.07x_2^2(k), \\ x_3(k+1) = 0.3x_2(k) + x_1(k), \end{cases} \quad (5.127)$$

et

$$\begin{cases} y_1(k+1) = -0.1y_3(k) - y_2^2(k) + 1.76 + u_1, \\ y_2(k+1) = y_1(k) + u_2, \\ y_3(k+1) = y_2(k) + u_3, \end{cases} \quad (5.128)$$

d'où u_1, u_2 et u_3 sont les contrôleurs de la synchronisation. Ainsi, les quantités A, B, f et g sont, respectivement, données par :

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - 1.07x_2^2(k) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_2^2(k) + 1.76 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, nous choisissons $r = 0$ et $L_0 = \text{diag}(l_1, l_2, l_3)$.

Corollaire 5.4 Si les constantes de contrôle $\{l_n\}_{1 \leq n \leq 3}$ sont choisies tel que :

$$|l_n| < \frac{1}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (5.129)$$

alors les systèmes (5.127) et (5.128) sont globalement synchronisés.

Les résultats numériques sont présentés dans les figures 5.8, 5.9 et 5.10.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques nouveaux résultats concernant la synchronisation des systèmes chaotiques discrets sont présentés. Basés sur la théorie de Lyapunov et des méthodes de contrôle non-linéaires, de nouveaux critères de synchronisation chaotique dans pour les systèmes discrets sont dérivés. En outre, quelques types de synchronisation sont développés telles que la synchronisation FSHP inverse, la synchronisation généralisée inverse et la synchronisation généralisée $\Lambda - \phi$. Des simulations numériques sont utilisées pour valider les résultats proposés.

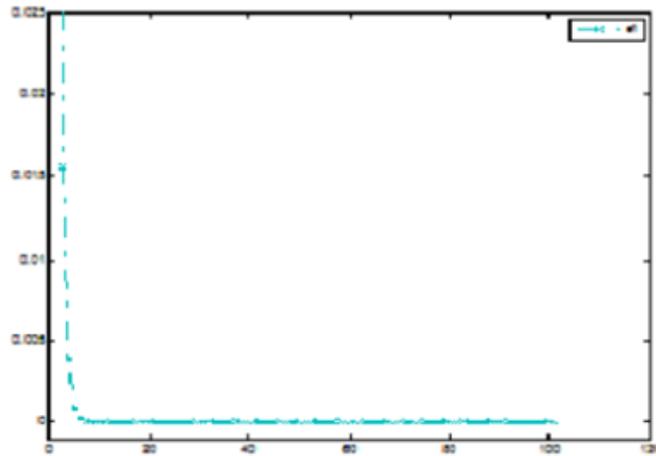


Figure 5.6 - L'erreur e_1 de la synchronisation entre les systèmes (5.127) et (5.128).

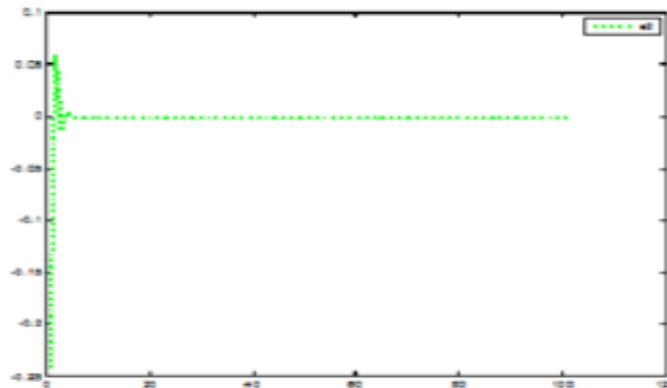


Figure 5.9 - L'erreur e_2 de la synchronisation entre les systèmes (5.127) et (5.128).

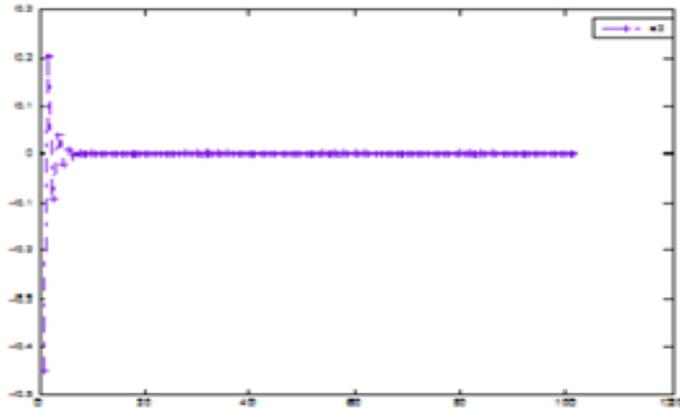


Figure 5.10 - L'erreur e_3 de la synchronisation entre les systèmes (5.127) et (5.128).

Conclusion générale et perspectives

Pour arriver aux résultats visés, nous avons commencé par présenter des chapitres préliminaires sur les systèmes dynamiques non-linéaires discrets et une vue panoramique sur la théorie du chaos et les célèbres systèmes chaotiques discrets en 2D et 3D, puis nous sommes passés à la théorie de synchronisation en évoquant les grands axes tels que : les types et les méthodes de la synchronisation chaotique. D'après la présentation de nos résultats, nous sommes parvenus à :

- Le critère dérivé de la synchronisation complète pour les systèmes quadratiques peut également s'appliquer à une classe large des systèmes chaotiques discrets.
- La synchronisation FSHP inverse est basée sur la matrice inverse de la matrice de l'échelle.
- La synchronisation généralisée a été garantie via le contrôle de la partie linéaire du système esclave. Le schéma de la synchronisation généralisée inverse a été proposé en se basant sur le contrôle de la partie linéaire du système maître.
- La synchronisation généralisée $\Lambda - \phi$ nous donne une possibilité de synchroniser des systèmes discrets avec des dimensions différentes.
- Une simple méthode efficace de synchronisation chaotique pour les systèmes discrets a été proposée basée sur un nouveau critère de stabilité sans l'aide de la théorie de stabilité de Lyapunov.

Comme perspectives, il serait intéressant de continuer dans le cadre de la synchronisation chaotique dans le sens :

- 1- Trouver d'autres critères de synchronisation plus efficaces que les critères classiques qui sont utilisés dans le cas des systèmes continus.
- 2- Observer et développer de nouveaux types de synchronisation généralisée qui nous aident mieux à synchroniser des différentes classes de systèmes chaotiques discrets.
- 3- Parmi les axes de recherches dans le domaine de la synchronisation chaotique discrète, développer des classes plus larges des systèmes chaotiques discrets.
- 4- Modifier et appliquer les méthodes utilisées dans la synchronisation chaotique continue d'une façon efficace dans le cas des systèmes discrets.

.

Bibliographie

- [1] **Guckenheimer, J. Holmes, P.** *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer verlag édition, 1983.
- [2] **Hale, J.K., Kocak, H.** *Dynamics and Bifurcations*. Applied Mathematics, Publisher Springer-Verlag New York, 1991.
- [3] **Dang-Vu, H., Delcarte, C.** *Bifurcations et Chaos*. Paris, Ellipses, 2000.
- [4] **Kuznetsov, Y.** *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, 2004.
- [5] **Yoshizawa, T.** *Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*. Applied Mathematical Sciences Series, Publisher Springer-Verlag New York, 1975.
- [6] **Lakshmanan, M., Rajaseekar, S.** *Nonlinear Dynamics Integrability, Chaos and Patterns*. Advanced Texts in Physics, Publisher Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003
- [7] **Wiggins, S.** *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag New York, 2003.
- [8] **Devaney, R.L.** *An introduction to chaotic dynamical systems*. In Addison-wisley, Redwood City, CA 37.
- [9] **Mira, C., Gardini, L., Bugola, A., Cathala, J-C.** *Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps*. World Scienific, 1996.
- [10] **Alligood, K.T., Sauer, T.D. et Yorke, J.A.** *Chaos : an Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag édition, 1996.
- [11] **Rosenstein, M., Collins, J., Deluca, C.** (1993), "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets," *Physica*, Vol. 65, pp. 117-134.
- [12] **Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., Vastano, J.** (1985), "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica*, Vol. 16, pp. 285-317.

-
- [13] **Parker, T.S., Chua, L.O.** *Practical Numerical Algorithms For Chaotic Systems*. Edition Springer-Verlay, 1989.
- [14] **Chorin, A.J.** (1981), "Estimates of intermittency, Spectra and blow-up in developed turbulence," *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 4, pp. 853.
- [15] **Li, T-Y., York, J.A.** (1975), "Period three implies chaos," *Amer. Math. Mon.*, Vol. 82, pp. 985-992.
- [16] **Guckenheimer, J., Holmes, P.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [17] **Sparow, C.** (1981), "Chaos in three dimensional single loop feedback systems with a piecewise linear feedback function," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 83.
- [18] **Grebogi, C., Ott, E., Pelikan, S., Yorke, J.A.** (1984), "Strange attractors that are not chaotic," *Physica D*, Vol. 13, pp. 261-268.
- [19] **Mindlin, G.B., Hou, X-J., Solari, H.G., Gilmore, R., Tufilaro, N.B.** (1990), "Classification of strange attractors by integers", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64, pp. 2350.
- [20] **Farmer, J.D., Sidorowich, J.J.** (1987) "Predicting chaotic time series," *Phys. Rev. Lett.* Vol. 59, pp. 845.
- [21] **Kaplan, D., Glass, L.** *Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics*. New-York : Springer-Verlag, 1995, pp. 1-53.
- [22] **Hilborn, R.** *Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford Student Edition, 1994.
- [23] **Pomeau, Y., Manneville, P.** (1980), "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," *Commun. Math. Phys.*, Vol. 74(2), pp. 189-197.
- [24] **Eckmann, J.P.** (1981), "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems," *Rev. Mod. Phys.* Vol. 53, pp. 643-5.
- [25] **Ruelle, D., Takens, F.** (1971), "On the nature of turbulence," *Commun. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 167-192.
- [26] **Hénon, M.** (1976), "A Two Dimensional Mapping with a Strange Attractor," *Comm. Math. Phys.* Vol. 50, pp.69-76.
- [27] **Lozi, R.**, (1978), "Un Attracteur étrange du Type Attracteur de Hénon," *Journal de Physique*, Vol. 39, pp.9-10.
- [28] **Itoh, M., Yang, T., Chua, L.O.** (2001), "Conditions for impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic systems," *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, Vol. 11, pp. 551-8.

- [29] **Zeraoulia, E., Sprott, J. C.** (2009), "The discrete hyperchaotic double scroll," *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 19, pp. 1023-1027.
- [30] **Hitzl, D.L., Zele, F.** (1985), "An exploration of the Hénon quadratic map," *Physica D*, Vol. 14(3), pp. 305–326.
- [31] **K. Stefanski**, (1998), "Modelling chaos and hyperchaos with 3D maps," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 9(1-2), pp. 83-93.
- [32] **Grassi, G., Miller, D.A.** (2002), "Theory and experimental realization of observer-baesd discrete-time hyperchaos synchronization," *IEEE. Trans. Contr. Syst.*, Vol. 49 (3), pp. 373-378.
- [33] **Baier, G., Klein, M.** (1990), "Maximum hyperchaos in generalized Hénon maps," *Phys. Lett. A*, Vol. 51, pp. 281-284.
- [34] **Baier, G., Sahle, S.** (1995), "Design of hyperchaotic flows," *Phys. Rev. E*, 51, pp. 2712-2714.
- [35] **Yan, Z.Y.** (2006), "Q-S (Complete or Anticipated) Synchronization Backstepping Scheme in a Class of Discrete-Time Chaotic (Hyperchaotic) Systems : A Symbolic-Numeric Computation Approach," *Chaos*, Vol. 16, pp. 013119-11.
- [36] **Wang, X.Y.** *Chaos in Complex Nonlinear Systems*, Publishing House of Electronics Industry, Beijing, 2003.
- [37] **Boccaletti, S., Kurthsc, J., Osipovd, G., Valladaresb, D.L., Zhouc, C.S.** (2002), "The synchronization of chaotic systems," *Phys. Repor.* Vol. 366, pp.1–101.
- [38] **Boccaletti, S.** *The Synchronized Dynamics of Complex Systems*, Published Elsevier, 2008.
- [39] **Pikovsky, A., Roseblum, M., Kurths, J.** *Synchronization : A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, 2001.
- [40] **González-Miranda, J. M.** *Synchronization and Control of Chaos. An introduction for scientists and engineers*, Imperial College Press, 2004.
- [41] **Fujisaka, H., Yamada, T.** (1983), "Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems," *Prog. Theor. Phys.* Vol. 69 (1), pp. 32-47.
- [42] **Afraimovich, V.S., Verichev, N.N., Rabinovich, M.I.** (1986), "Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems," *Radiophysics and Quantum Electronics*, Vol. 29 (9), pp. 1050-6
- [43] **Pecora, L.M., Carroll, T.L.** (1990), "Synchronization in chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64(8), pp. 821-824.

- [44] **Rulkov, N.F., Sushchik, M.M., Tsimring, L.S., Abarbanel, H.D.I.** (1995), “Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems,” *Phys. Rev. E.*, Vol. 51, pp. 980-994.
- [45] **Kocarev L., Parlitz U.** (1996), “Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76, pp. 1816–9.
- [46] **Abarbanel, H.D.I., Rulkov, N.F., Sushchik, M.M.** (1996), “Generalized synchronization of chaos : the auxiliary system approach,” *Phys. Rev. E.*, Vol. 53, pp. 4528–35.
- [47] **Pyragas, K.** (1998), “Properties of generalized synchronization of chaos,” *Nonlinear Anal. Model. Control*, pp. 101–29.
- [48] **Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S., Kurths, J.** (1996), “Phase Synchronization of Chaotic Oscillators,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 76 (11), pp. 1804-1807.
- [49] **Osipov, G.V., Pikovsky, A.S., Rosenblum, M. G., Kurths, J.** (1996), “Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators,” *Phys. Rev. E*, Vol. 55 (3), pp. 2353-2361.
- [50] **Pikovsky, A.S., Rosenblum, M.G., Osipov, G.V., Kurths, J.** (1997), “Phase Synchronization of Chaotic Oscillators by External Driving,” *Physica D*, Vol. 104, pp. 219-238.
- [51] **Yang, T., Wu, C.W., Chua, L.O.** (1997), “Cryptography based on chaotic systems,” *IEEE. Trans. on Circ. Syst. I : Regular Papers*, Vol. 44 (5), pp. 469–472.
- [52] **Millérioux, G., Mira, C.** (1998), “Coding scheme based on chaos synchronization from noninvertible maps,” *Int. J. of Bifurcat. and Chaos*, Vol. 8 (10), pp. 2019–2029.
- [53] **Yang, T., Yang, L. B., Yang, C.M.** (1998), “Cryptanalyzing chaotic secure communications using return maps,” *Phys. Lett. A*, Vol. 245, pp. 66–73.
- [54] **Sun, F., Liu, Z.L.S.** (2010), “A new cryptosystem based on spatial chaotic system,” *Optics Communications*, Vol. 283 (10), pp. 2066–2073.
- [55] **Parlitz, U., Chua, L. O., Kocarev, L., Halle, K.S., Shang, A.** (1993), “Transmission of digital signals by chaotic synchronization,” *Int. J. of Bifurcat. Chaos*, Vol. 2, 308–314
- [56] **Wong, K.W., Chen, J.Y., Cheng, L.M.** (2003), “A secure communication scheme based on the phase synchronization of chaotic systems,” *Chaos*, Vol. 13 (2), pp. 508–514.
- [57] **Alvarez, G., Hernandez, L., Munoz, J. E., Montoya, Li, S.** (2005), “Security analysis of communication system based on the synchronization of different order chaotic systems,” *Phys. Lett. A*, Vol. 345(4), pp. 245–250.

- [58] **Lu, J.** (2008), “Generalized (complete, lag, anticipated) synchronization of discrete-time chaotic systems,” *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 13 (9), pp. 1851-1859.
- [59] **Adeli, M., Zarabadipoor, H.** (2011), “Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms,” *International Journal of Electronic Signals and Systems*, pp 143-147.
- [60] **Diao, M., Yu, Y-G., Wang, S., Yu, J-Z.** (2010), “Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders,” *Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu.*, Vol. 11 (7), pp. 503–508.
- [61] **Xin, B., Wu, Z.** (2015), “Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control,” *Entropy*, Vol. 17, pp. 2677-2687.
- [62] **Hu M, Xu Z, Zhang, R.** (2008), “Full state hybrid projective synchronization in continuous-time chaotic (hyperchaotic) systems,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.*, Vol. 13, pp. 456–464.
- [63] **Zhang Q, Lu, J.** (2008), “Full state hybrid lag projective synchronization in chaotic (hyperchaotic) systems,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 372 (9), pp. 1416–1421.
- [64] **Hua M, Xua Z, Zhang R, Hua, A.** (2007), “Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyperchaotic) systems,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 361 (3), pp. 231–237.
- [65] **Hua M, Xua Z, Zhang R, Hua, A.** (2007), “Adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic systems with the same and different order,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 365 (4), pp. 315–327.
- [66] **Chu Y-D, Chang Y-X, Zhang J-G, Li X-F, An, X-L.** (2009), “Full state hybrid projective synchronization in hyperchaotic systems,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 42 (3), pp. 1502–1510.
- [67] **Wang X-Y, Song, J.** (2009), “Adaptive full state hybrid projective synchronization in the unified chaotic system,” *Mod. Phys. Lett. B.*, Vol. 23, pp. 1913–1921.
- [68] **Wang X-Y, Zhu, L-B.** (2011), “Adaptive full state hybrid projective synchronization of unified chaotic systems with unknown parameters,” *Int. J. Mod. Phys. B.*, Vol. 25, pp. 4661–4666.
- [69] **Hua M, Xua Z, Zhang, R.** (2008), “Full state hybrid projective synchronization of a general class of chaotic maps,” *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.*, Vol. 13 (4), pp. 782–789.
- [70] **Ma, Z., Liu, Z., Zhang, G.** (2007), “Generalized synchronization of discrete systems,” *Appl. Math. Mech.*, Vol. 28 (5), pp. 609-614.

-
- [71] **Grassi, G., Miller, D.A.** (2012), "Dead-beat full state hybrid projective synchronization for chaotic maps using a scalar synchronizing signal," *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, Vol. 17 (4), pp. 1824–1830.
- [72] **Manfeng Hu., Xu, Z.A.** (2008), "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems," *Nonlinear Analysis*, Vol. 69 (4), pp. 1091-1099.
- [73] **Bai, E., Lonngren, K.E.** (2008), "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 11, pp. 1041-1044.
- [74] **Yassen, M.T.** (2005), "Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 23 (1), pp. 131–140.
- [75] **Khan, M.A.** (2012), "Synchronization of different 3D chaotic systems by generalized active control," *J. Infor. Comp. Sci.*, Vol. 7 (4), pp. 272-283.
- [76] **Chen, S., Lu, J.** (2002), "Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 14, pp. 643–647.
- [77] **Tan, X., Zhang, J., Yang, Y.** (2003), "Synchronizing chaotic systems using backstepping design," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 16, pp. 37–45.
- [78] **Bowong, S., Kakmen, F.M.** (2004), "Synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping approach," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 21, pp. 999–1011.
- [79] **Feki, M.** (2004), "Synchronization of chaotic systems with parametric uncertainties using sliding observers," *Int. J. of Bifurcat. Chaos*, Vol. 14 (7), pp. 2467-2475.
- [80] **Li, X., Zhao, L., Zhao, G.** (2005), "Sliding mode control for synchronization of chaotic systems with structure or parameters mismatching," *J. Zhejiang University Science*, Vol. 6 (6), pp 571-576.
- [81] **Almeida, D.I.R., Alvarez, J., Barajas, J.G.** (2006), "Robust synchronization of Sprott circuits using sliding mode control," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 30, pp. 11-18.
- [82] **Sundarapandian, V.** (2012), "Sliding controller design for the global chaos synchronization of identical hyperchaotic Yujun systems," *Intern. J. Adv. Info. Tech.*, Vol. 2 (4), pp. 13-22.
- [83] **J. Hung, J., Gao, W.** (1993), "Variable structure control," *IEEE. Trans. Indust. Elect.*, Vol. 40, pp. 2-22.
- [84] **Young, K. D., Utkin, V., Ozgunr, U.** (1999), "A control engineer's guide to sliding mode control," *IEEE. Trans. Contr. Syst.*, Vol. 7, pp. 328-342.

- [85] **Oppenheim, A.V., Cuomo, K.M., Strogatz, S.H.** (1993), "Synchronization of lorenz-based chaotic circuits with applications to communications," *IEEE Trans. on Circ. Syst. II*, Vol. 40(10), pp. 626–633.
- [86] **Kevin, M.S., Cuomo, Oppenheim, A.V.** (1993), "Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71.
- [87] **Kocarev, L.** (1994), "Chaos-based cryptography : a brief overview," *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, Vol. 1(3).
- [88] **Kevin, M.S.** (1994), "Steps toward unmasking secure communications," *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 4, pp. 959-5.
- [89] **Chai, W., Chua, L.O.** (1993), "A simple way synchroniza chaotic systems with applications to secure communication systems," *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 3, 1619-5.
- [90] **Dedieu, H., Kennedy, M.P, Hasler, M.** (1993), "Chaos shift keying : modulation and demodulation of a chaotic carrier using self-synchronizing chua's circuits," *IEEE Trans. on Circ. Syst. I : Regular Papers*, Vol. 40(10), pp. 634–642.
- [91] **Parlitz, U., Chua, L.O., Kocarev, L., Halle, K. S., Shang, A.** (1993), "Trnasmission of digital signals by chaotic synchronization," *Int. J. of Bifurcat. Chaos*, Vol. 2.
- [92] **Corron, N.J.** (1997), "A new approach to communications using chaotic signals," *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, Vol. 44(5), pp. 373-382.
- [93] **Kevin, M.S.** (1996), "Unmasking a modulated chaotic communications scheme," *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 6, pp. 367-375.
- [94] **Leuciuc, A.** (2000), "Information transmission using chaotic discrete-time filter," *Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, Vol. 47(1), pp. 82-88.
- [95] **Feki, M.** (2003), "An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 18, pp. 141–148.
- [96] **Alvarez, G., Montoya, F, Romera, M., Pastor, G.** (2003), "Breaking parameter modulated chaotic secure communication system," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 21.
- [97] **Feki, M., Robert, B., Gelle, G., Colas, M.** (2003), "Secure digital communication using discrete-time chaos synchronization," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 18, pp. 881–890.
- [98] **Fu, S.H. and Pei, L.J.** (2010), "Synchronization of chaotic systems by the generalized hamiltonian systems approach," *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 10(4), pp. 387–396.

- [99] **Vincent, U.E., Guo, R.** (2013), “Adaptive synchronization for oscillators in 6 potentials,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 13(1), pp. 93–106.
- [100] **Olusola, O.I., Vincent, U.E., Njah, A.N., Idowu, B.A.** (2013), “Global stability and synchronization criteria of linearly coupled gyroscope,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 13(3), pp.258–269.
- [101] **Khan, A., Pal, R.** (2014), “Adaptive hybrid function projective synchronization of Chaotic Space-Tether System,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 14(1), pp. 44–57.
- [102] **Ojo, K.S., Njah, A.N., Ogunjo, S.T., Olusola, O.I.** (2014), “Reduced order function projective combination synchronization of three Josephson functions using backstepping technique,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 14(2), pp. 119–133.
- [103] **Strogatz, S.H.** *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Studies In Nonlinearity, Westview Press, 2001.
- [104] **Matsumoto, T., Chua, L. O., Kobayashi, K.** (1986), “Hyperchaos : laboratory experiment and numerical confirmation,” *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-33 Vol. (11), pp. 1143-1147.
- [105] **Stoop, R., Meier, P. F.** (1988), “Evaluation of Lyapunov exponents and scaling functions from time series,” *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 5(5), pp-1037-5.
- [106] **Stoop, R., Peinke, J., Parisi, J., Röhricht, B., Hübener,** (1989), “R.P A p-Ge semiconductor experiment showing chaos and hyperchaos,” *Physica D*, Vol. 35, pp. 425-435.
- [107] **Eiswirth, M., Kruel, Th.-M., Ertl, G., Schneider, F. W.** (1992), “Hyperchaos in a chemical reaction,” *Chem. Phys. Lett.*, Vol. 193(4), pp. 305.
- [108] **Eduardo, L., Ruiz-Herrera, A.** (2012), “Chaos in discrete structured population models,” *J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 11(4), pp. 1200–1214.
- [109] **Zhang, W.B.** *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations, and Chaos in Economics*. Elsevier, Boston, 2006.
- [110] **Aguilar-Bustos, A. Y., Cruz-Hernández, C.** (2006), “Synchronization of discrete-time hyperchaotic Systems through extended Kalman filtering,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 6(4), pp 319–336.
- [111] **Aguilar Bustos, A. Y., Cruz Hernández, C., López Gutiérrez, R. M., Posadas Castillo, C.** (2008), “Synchronization of different hyperchaotic maps for encryption,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 8(3), pp. 221-236.

- [112] **Aguilar Bustos, A. Y., Cruz Hernández, C.** (2008), “Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems : An application in communications,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 41(3), pp. 1301-1310.
- [113] **C., Cruz Hernández, Lopez Gutierrez, R. M., Aguilar Bustos, A. Y., Posadas Castillo, C.** (2010), “Communicating encrypted information based on synchronized hyperchaotic maps,” *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Vol. 11(5), pp. 337-349.
- [114] **Liu, W., Wang, Z.M., Zhang, W.D.** (2012), “Controlled synchronization of discrete-time chaotic systems under communication constraints,” *Nonlinear Dyn.*, Vol. 69, pp. 223–230.
- [115] **Inzunza González, E., Cruz Hernandez, C.** (2013), “Double hyperchaotic encryption for security in biometric systems,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 13(1), pp. 55-68.
- [116] **Filali, R.L., Benrejeb, M. and Borne, P.** (2014), “On observer-based secure communication design using discrete-time hyperchaotic systems,” *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 19(5), pp. 1424-1432.
- [117] **Ouannas, A.** (2014), “Some synchronization criteria for N-dimensional chaotic dynamical systems in discrete-time,” *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, Vol. 6(4), pp. 1-9.
- [118] **Chai, Y., Lü, L., and Zhao, H.Y.,** (2010), “Lag Synchronization Between Discrete Chaotic Systems with Diverse Structure,” *Appl. Math. Mech-Engl.*, Vol. 31(6), pp. 733-738.
- [119] **Yin, L., and Tianyan, D.,** (2010), “Adaptive Control for Anticipated Function Projective Synchronization of 2D Discrete-time Chaotic Systems with Uncertain Parameters,” *J. Uncertain Syst.*, Vol. 4(3), pp. 195-205.
- [120] **Yanbo. G, Xiaomei. Z, Guoping. L, Yufan Z.** (2011), “Impulsive synchronization of discrete-time chaotic systems under communication constraints,” *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 16, pp. 1580-1588.
- [121] **Filali, R.L., Hammami, S., Benrejeb, M. and Borne, P.** (2012), “On synchronization, anti-synchronization and hybrid synchronization of 3D discrete generalized Hénon map,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 12(1), pp. 81-95.
- [122] **Xin, B., Wu, Z.** (2015), “Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control,” *Entropy*, Vol. 17, pp. 2677-2687.
- [123] **J, Y-L., Xin, L., Yong, C.** (2008), “Function projective synchronization of discrete-time chaotic and hyperchaotic systems Using Backstepping Method,” *Commun. Theor. Phys.*, Vol. 50, pp. 111–116.

- [124] **Li, Y., Chen, Y., and Li, B.**, (2009) “Adaptive control and function projective synchronization in 2D discrete-time chaotic systems,” *Commun. Theor. Phys.*, Vol. 51, pp. 270–278.
- [125] **Li, Y., Chen, Y., and Li, B.**, (2009), “Adaptive function projective synchronization of discrete-Time chaotic Systems,” *Chin. Phys. Lett.*, Vol. 26 (4), pp. 040504-4.
- [126] **Ouannas, A.** (2014), “Synchronization of discrete chaotic systems via double scaling matrix in different dimensions,” *J. Appl. Math. Comput.*, Vol. 3 (7), pp. 1-5.
- [127] **Ouannas, A.** (2014), “On full-state hybrid projective synchronization of general discrete chaotic systems,” *J. Nonlinear Dynamics*, Vol. 2014, Article ID 983293, pp. 1-6.
- [128] **Grassi, G.** (2012), “Arbitrary full-state hybrid projective synchronization for chaotic discrete-time systems via a scalar signal,” *Chinese Phys. B* , Vol. 21, pp. 060504-5.
- [129] **An, H.L., Chen, Y.** (2009), “The function cascade synchronization scheme for discrete-time hyperchaotic systems,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, Vol. 14, pp. 1494–1501.
- [130] **Grassi, G.** (2012), “Generalized synchronization between different chaotic maps via dead-beat control,” *Chinese Phys. B* , Vol. 21 (5), pp. 050505-5
- [131] **Yan, Z.Y.** (2005), “Q-S synchronization in 3D Hénon-like map and generalized Hénon map via a scalar controller,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 342, pp. 309-317.
- [132] **Chai, Y., Chen, L., Wu, R.** (2012), “Inverse Projective Synchronization between Two Different Hyperchaotic Systems with Fractional Order,” *J. Appl. Math.*, Vol. 2012, ID 762807, pp1-18.
- [133] **Ouannas, A., Mahmoud, E.E.**, (2014), “Inverse Matrix Projective Synchronization for Discrete Chaotic Systems with Different Dimensions,” *J. Comput. Intell. Electron. Syst.*, Vol. 3, pp. 188-192.
- [134] **Ouannas, A., Al-sawalha, M.M.** (2015), “On inverse Full State Hybrid Projective Synchronization of Chaotic Dynamical Systems in Discrete-Time,” *Inter. J. Dyn. Control*, 2015.
- [135] **Li, G.H.** (2009), “Inverse lag synchronization in chaotic systems,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 40, pp. 1076–1080.
- [136] **Volos, Ch.K., Kyprianidis, I.M., Stouboulos, I.N.** (2011), “Anti-phase and inverse -lag synchronization in coupled Duffing-type circuits,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, Vol. 21, pp. 2357–2368.
- [137] **Ouannas, A., Odibat, Z.** (2015), “On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems,” *Internat. J. Appl. Comput. Math.*, DOI 10.1007/s40819-015-0040-z.

- [138] **Ouannas, A.** (2015), “A new synchronization scheme for general 3D quadratic chaotic systems in discrete-time,” *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 15 (2), pp. 163–170.
- [139] **Zhang, G., Liu, Z., Ma, Z.** (2007), “Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 32, pp. 773–779.
- [140] **Hunt, B.R., Ott, E., Yorke, J.A.** (1997), “Differentiable generalized synchronization of chaos,” *Phys. Rev. E.*, Vol. 55, pp. 4029–4034.
- [141] **Yang, T., Chua, L.O.** (1999), “Generalized synchronization of chaos via linear transformations,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. 9, pp. 215-219.
- [142] **Wang, Y.W., Guan, Z.H.** (2006), “Generalized synchronization of continuous chaotic systems,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 27, pp. 97-101.
- [143] **Ji, Y., Liu, T., Min, L. Q.** (2008), “Generalized chaos synchronization theorems for bidirectional differential equations and discrete systems with applications,” *Phys. Lett. A*, Vol. 372, pp. 3645-3652.
- [144] **Koronovskii, A.A., Moskalenko, O I., Shurygina, S.A., Hramov, A E.** (2013), “Generalized synchronization in discrete maps. New point of view on weak and strong synchronization,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 46, pp. 12–18.
- [145] **Ouannas, A., Odibat, Z.** (2015), “Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time,” *Nonlinear Dyn.* DOI 10.1007/s11071-015-2026-0.
- [146] **Ouannas, A.** (2015), “A new generalized-type of synchronization for discrete-time chaotic dynamical Systems,” *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, Vol. 10(6), pp. 061019-8.
- [147] **Liz, E., Ivanov, A., Ferriero, j.B.** (2003), “Discrete Halany-type inequalities and application,” *Nonl. Analy.*, Vol. 55, pp. 669-678.
- [148] **Liz, E., Ivanov, A., Ferriero, j.B.** (2002), “A note on the global stability of generalized difference equations,” *App. Math. Lett.*, Vol. 15, pp. 655-659.
- [149] **Ouannas, A.** (2014), “A new chaos synchronization criterion for discrete dynamical systems,” *Appl.Math. Sci.*, Vol. 8 (41), pp. 2025-2034.

ملخص

في هذه الأطروحة تمت دراسة بعض المسائل المتعلقة بالمزامنة الفوضوية في حالة الأنظمة الديناميكية المتقطعة. اعتماداً على نظرية الثبات لليابونوف وطرق مراقبة غير خطية تم إيجاد معايير جديدة لمزامنة الأنظمة الفوضوية المتقطعة. بالإضافة إلى ذلك تم تطوير أنماط جديدة من المزامنة المعممة مثل المزامنة العكسية المعممة و المزامنة المعممة Λ - φ . المحاكاة العددية استعملت لإظهار فعالية النتائج المطروحة.

كلمات دلالية: مزامنة الفوضى؛ الأنظمة المتقطعة؛ معايير جديدة؛ مزامنة معممة؛ مسألة عكسية؛ ثبات ليابونوف.

Résumé

Dans cette thèse quelques problèmes concernant la synchronisation des systèmes chaotique discrets sont étudiés. Basé sur la théorie de Lyapunov et des méthodes de contrôle non-linéaires, des nouveaux critères de synchronisation dans les systèmes chaotiques discrets sont dérivés. En outre, quelque types de la synchronisation généralisée sont développés telles que la synchronisation inverse généralisée et la synchronisation Λ - φ généralisée. Les simulations numériques sont utilisées pour valider les résultats proposés.

Mots clés: Synchronisation chaotique, systèmes discrets, nouveaux critères, synchronisation généralisée, problème inverse, stabilité de Lyapunov.

Abstract

In this thesis, some problems regarding the synchronization of chaotic systems in discrete-time are studied. Based on Lyapunov theory and nonlinear control methods, new synchronization criteria in discrete-time chaotic systems are derived. In addition, several types of generalized synchronization are developed such as inverse generalized synchronization and φ - Λ synchronization generalized. Numerical simulations are used to validate the proposed results.

Key words: Chaos synchronization, discrete-time systems, new criteria, generalized synchronization, inverse problem, Lyapunov stability.