The University of New South Wales

School of Electrical Engineering and Computer Science and Engineering

Supervisor:

Assessor:

Table de matières

1 Rappels et Etude de l'opérateur $\rho\Delta u$ **1**

1.1 Introduction 1

1.2 Quelques rappels 3

1.2.1 Transformation de Mellin 3

1.2.2 Etude du laplacien : 4

1.2.3 Dualité 15

1.3 Comparaison des espaces $\mathbb{H}^s_{x,y}$ **et** $\mathbb{H}^s_{\rho,\eta}$ 17

2 Etude de l'opérateur $\rho^2\Delta^2$dans l'éspace $\mathbb{F}$ **20**

2.1 Position du problème initial 20

2.1.1 Etude du problème transformé 21

2.1.2 Expression du Laplacien 23

2.1.3 Expression du bilaplacien 24

2.2 Etude de l'espace $\mathbb{F}$ 27

2.3 Etude de l'opérateur $\rho^2\Delta^2$ dans $\mathbb{F}$ 30

2.4 Inégalité à priori pour $\rho^2\Delta^2$ 31

2.5 Etude du noyau de l'opérateur $\rho^2\Delta^2$ 65

3 Etude de l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)^*$et conséquences **68**

3.1 Etude de l'espace $\mathbb{F}^*$ 68

3.1.1 Autre méthode 72
3.2 Formule de Green pour $\rho^2\Delta^2$ 73
3.3 Etude du noyau de $(\rho^2\Delta^2)^*$ 81
3.3.1 Rôle des opérateurs $\left(\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right)$ et $\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right)$ dans la dualité 82
3.4 Problème adjoint 85
3.4.1 Etude des zéros de D_σ 89
3.4.2 Rôle des pôles positifs du noyau de Poisson 91
3.4.3 Autre méthode (dualité) 92
3.4.4 Développement limité des solutions 94
3.4.5 Conclusion générale (tentative pour un opérateur A d'ordre 2n) 95
3.4.6 Inégalité à priori pour un opérateur A d'ordre $2n$ 95
3.4.7 Formule de Green pour l'adjoint $(\mathbf{A}^{2n})^*$ 98

List of Figures

List of Tables

Chapitre 1

Rappels et Etude de l'opérateur $\rho\Delta u$

1.1 Introduction

Les problèmes elliptiques dans les domaines réguliers ont fait l'objet de nombreuse études et l'on connait bien la théorie correspondante.Lions et Magenes font le point dans un ouvrage réference en 1967.Quand le bord du domaine n'est plus régulier, les résultats sont plus récents.En dehors de l'étude de cas particuliers, il faut attendre les problèmes posés par Magenes aprés la destruction des digues de l'Arno pour obtenir des résultats plus généraux ce que j'appelerai " l'école de Nice".

Mérigot [13] publie en 1974 la première étude systématique de la régularité dans les espaces $\mathbb{L}^p(\Omega)$ .Il utilise le noyau de Poisson de l'opérateur ainsi que la transformation de Mellin pour mettre en place des inégalités à priori afin d'étudier l'existence et l'unicité de la solution

Grisvard [8] de son côté s'intéresse plus particulièrement à l'utilisation de l'alternative de Freedholm.Ces auteurs auront de nombreux disciples (Ben M'barek, Jawahri, Lelierre, Moussaoui, Merouani,...,)

Kondratiev [9], il s'interesse aux problèmes elliptiques aux limites dans des domaines avec "coins"(polygônes dans $\mathbb{R}^2$, polyèdres dans $\mathbb{R}^3$).Il utilise, pour éviter les points anguleux, la transformation $\rho = e^{-t}$, ce qui ramène l'étude au cas classique dans une bande mais introduit, par contre, des espaces avec poids à l'origine.

M.Dauge [4] elle s'appuie sur la résolvante de l'opérateur qu'elle décompose en deux parties l'une régulière, l'autre singulière pour obtenir les mêmes résultats.

Enfin, récemment **(1993)**, dans leurs thèses de Magister, **M. Djebarni** et **M.S.Said** reprennent le travail de Grisvard dans des espaces avec poids afin de rendre plus aisée la mise en place des inégalités à priori sans toute fois utiliser la transformation $\rho = e^{-t}$ comme Kondratiev [9] .

1999 M.Djebarni, M.Karrad et M.Reghioua publient un article intitulé "*Etude de la régularité de la solution du laplacien dans des espaces avec poids*" . [5]

Dans ce travail, Nous nous sommes interéssés au bilaplacien dans un polygone plan non régulier.**Il s'agit ici d'une démarche nouvelle pour trouver :**

▷ *le poids optimal afin d'obtenir aisement les inégalités à priori sans masquer les singularités aux sommets.Cette méthode peut se généraliser en simplifiant la mise en place des inégalités à priori.*

▷ *un espace dans lequel il est possible d'obtenir, pour le bilaplacien, l'existence et l'unicité de la solution.*

▷ *un noyau de Poisson qui permettra d'établir la régularité et le développement limité des solutions au voisinage des sommets.*

Les problèmes elliptiques homogènes à coéfficients constants, dans un secteur plan, servant de modèle. La transformation de Mellin, particulièrement bien adaptée au domaine, permet une solution rapide du problème adjoint.Ces résultats connus en norme $\mathbb{L}^2$; dans certains cas particuliers, on déduit certains résultats dans $\mathbb{H}^s$.Les espaces avec poids cachent, en fait les singularités qui peuvent apparaitre aux sommets.Ce problème a fait l'objet de plusieurs études, entre autres, celle de Grisvard-Geymonat [8] qui utilisent la méthode de la résolvante.L'utilisation des espaces avec poids permet d'obtenir aisement

- la mise en place d'une formule de Green

- les inégalités à priori

mais masque les singularités à l'infini, d'où la nécessité de préciser la régularité de la solution au voisinage de chacun des sommets (on retrouve là une démarche qui a été utilisée sous une forme différente par Kondratiev) pour aboutir au résultat: **"que l'opérateur est à indice"**

Ensuite nous donnons l'expression explcite de l'opérateur adjoint consideré $(\rho^2\Delta^2)^*$. **Cette méthode est originale et sa généralisation reste ouverte.**

Cette liste des auteurs et les méthodes utilisées ne sauraient être exhaustives et les lacunes constatées ne sont dues qu'à l'ignorance de l'auteur.

1.2 Quelques rappels

1.2.1 Transformation de Mellin

La transformation de Mellin a l'avantage de bien s'adapter aux domaines qui présentent des angles : polygones plans, cônes ou polyhèdres.Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformation de Fourier pour les cas classiques. En revanche, elle débouche sur des espaces avec poids.D'autre part l'utilisation des coordonnées polaires (sphériques ou cylindriques pour les cônes et les polyhèdres) allège les calculs.

Définition 1 *Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$.On appelle transformation de Mellin de la fonction f la fonction notée $\widetilde{f}$, définie par :*

$$\widetilde{f}(\sigma) = \int_0^\infty f(x)\, x^{\sigma-1}dx = \int\limits_0^{+\infty} f(x)\, x^{\sigma}\frac{dx}{x}.,\ \sigma \in \mathbb{C}$$

ceci lorsque l'intégrale existe

Remarque 2

$$\widetilde{f}'(\sigma) = -(\sigma - 1)\widetilde{f}(\sigma - 1) \Rightarrow \widetilde{f}''(\sigma) = (\sigma - 2)(\sigma - 1)\widetilde{f}(\sigma - 2)$$

$$\widetilde{(xf)}(\sigma) = -\sigma\widetilde{f}(\sigma)$$

$$Si\ n \in \mathbb{N}^* \left[\frac{\partial^n \tilde{f}}{\partial x^n}\right] = (-1)^n (\sigma - 1)(\sigma - 2)(\sigma - 3)...(\sigma - n)\widetilde{f}(\sigma - n)$$

Remarque 3 • *La transformée de Mellin inverse est donnée par la fonction f, avec $\tilde{f}(\sigma)$ qui est définie pour $\alpha_1 < R_e\sigma < \alpha_2$ et*

$$f(x) = \lim_{\gamma\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-i\nu}^{\mu+i\nu}\widetilde{f}(\sigma)\,x^{-\sigma}dx,\ \ ,\alpha_1 < \mu < \alpha_2,$$

1.2.2 Etude du laplacien :

Soit le modèle

$$\begin{cases} \Delta u = & f \\ u\mid_\Gamma = & 0 \end{cases} \qquad f \in \mathbb{L}^2(\Omega). \tag{1.1}$$

où Ω est un polygône plan. Ce problème, déjà étudié par Grisvard admet :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{une solution unique dans } \mathbb{H}^2(\Omega) \text{ lorsque } \varphi < \pi \\ \text{une solution } u = u_0 + \alpha\rho^{\frac{\pi}{\varphi}}\sin\frac{\pi\theta}{\varphi} \text{ lorsque } \varphi > \pi \end{array}\right. \quad \text{où } u_0 \in \mathbb{H}^2(\Omega).$$

Remarque 4 *la mise en place de la formule de Green et la définition du problème adjoint ne se font pas simplement .*

Afin de faciliter les calculs nous considérons l'opérateur $\xi(\rho)\Delta$, $\xi \in C^\infty(\Omega)$ au lieu de Δ et tel que $\xi(\rho) = \rho$ au voisinage de chaque sommet du polygône.Le problème (1.1), devient

$$\begin{cases} \rho\Delta u = \rho f = g \\ u \mid_\Gamma = 0 \end{cases} \quad g \in \mathbb{L}^2 \left[V(0) \cap \Omega_\varphi \right] \tag{1.2}$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ où ρ désigne la distance d'un point (x, y) de Ω à l'origine, au voisinage de chaque sommet du polygône.L'étude de ce problème sera locale (il est bien connu qu'une partition de l'unité ramène l'étude du problème dans un polygône à l'étude du problème dans un secteur d'ouverture φ).

Ω_φ étant le secteur d'angle φ et de frontieres $\theta = 0$ **et** $\theta = \varphi$, obtenu en prolongeant les côtés issus du sommet S_i et tel que Ω_φ placé à l'origine des coordonnées.

En remarquant que $\rho \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ mais $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$ **n'appartient pas toujours à** $\mathbb{L}^2(\Omega)$ d'où l'idée de choisir :

1°) *à l'espace de travail*

$$\mathbb{E} = \left\{ u \in \mathbb{H}^1(\Omega_\varphi) \mid \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \right\} \tag{1.3}$$

avec u à support compact dans l'ouvert:

$$\Omega_\varphi = \{(\rho, \theta) \mid \rho > 0 \text{ et } 0 < \theta < \varphi < 2\pi\}$$

et de frontiere $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec

$$\Gamma_1 = \{(\rho, 0) \mid \rho > 0\} \text{ et } \Gamma_2 = \{(\rho, \varphi) \mid \rho > 0\}$$

L'espace $\mathbb{E}$ sera muni de la norme du graphe :

$$\|u\|_{\mathbb{E}}^2 = \|u\|_{\mathbb{H}^1_{x,y}}^2 + \left\| \rho \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|_{\mathbb{L}^2_{x,y}}^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\|_{\mathbb{L}^2_{x,y}}^2 + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \right\|_{\mathbb{L}^2_{x,y}}^2 \tag{1.4}$$

2eme) *à la mise en place d'une formule de Green adaptée au problème:*

$$\begin{cases} \rho\Delta u = \rho f & = g \quad \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\ u \mid_{\Gamma_1} = & 0 \text{ pour } \theta = 0 \\ u \mid_{\Gamma_2} = & 0 \text{ pour } \theta = \varphi \end{cases} \tag{1.5}$$

Proposition 5 *$\forall u, v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}_\varphi)$ on a:*

$$\langle \rho\Delta u, v\rangle_{L^2} - \langle u, (\rho\Delta)^* v\rangle_{\mathbb{L}^2} = \int\limits_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}\rho v d\rho - \int\limits_\Gamma u\frac{\partial}{\partial \eta}(\rho v) d\rho \tag{1.6}$$

où

$$(\rho\Delta)^* = (\frac{1}{\rho} + 3\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}). \tag{1.7}$$

Démonstration

En utilisant la remarque que:
$\rho^2\Delta = \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ et en écrivant :
$\langle \rho\Delta u, v\rangle_{\mathbb{L}^2} - \langle u, (\rho\Delta)^* v\rangle_{\mathbb{L}^2} = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\varphi \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right] uv d\rho d\theta + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v d\rho d\theta$
en intégrant par parties et en et en utilisant la remarque :

Remarque 6 $\int\limits_0^\varphi \rho^j D^i u(\rho,\theta) \mid_0^\infty d\theta = 0$, $\forall j \geq 1, \forall i \geq 0$

(du fait que $u, v \in C^\infty\left(\overline{\Omega}_\varphi\right)$ et que la présence du facteur ρ au voisinage de zéro), on trouve :

$$\langle \rho^2\Delta u, v\rangle_{\mathbb{L}^2(\rho,\theta)} = \left\{ \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\varphi u\left(\frac{1}{\rho} + 3\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) v d\rho d\theta + \int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial\theta}(\rho,\varphi) v(\rho,\varphi) d\right.$$
$$- \int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial\theta}(\rho,0) v(\rho,0) d\rho + \int\limits_0^\infty u(\rho,0)\frac{\partial v}{\partial\theta}(\rho,0) d\rho - \int\limits_0^\infty u(\rho,\varphi)\frac{\partial v}{\partial\theta}(\rho,\varphi) c$$

ce qui donne la formule de Green :

$$\langle \rho\Delta u, v\rangle_{\mathbb{L}^2(x,y)} - \langle u, (\rho\Delta)^* v\rangle_{\mathbb{L}^2(x,y)} = \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial\eta}\rho v(\rho,\varphi) d\rho - \int\limits_0^\infty \frac{\partial u}{\partial\eta}\rho v(\rho,0) d\rho \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^\infty u\frac{\partial}{\partial\eta}(\rho v)(\rho,0) d\rho - + \int\limits_0^\infty u\frac{\partial}{\partial\eta}(\rho v)(\rho,\varphi) d\rho \right\}$$

$\Rightarrow (\rho\Delta)^* = (\frac{1}{\rho} + 3\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2})$

3eme) *à la mise en place d'une inégalité à priori du type*:(lemme de Peetre)

Avant de commencer l'établissement de l'inégalité à priori du priori, il est utile de faire la remarque suivante :

$\oplus$ tout consiste à montrer que l'opérateur $(\rho\Delta)$ est un opérateur à indice: c'est à dire que $\dim\ker(\rho\Delta)$ est finie et que $\operatorname{Im}(\rho\Delta)$ est fermée et que $\operatorname{Codim}[\operatorname{Im}(\rho\Delta)]$ est finie.Dans ce cas l'indice de l'opérateur, que l'on note par

Ind $(\rho\Delta)$, est égal à :

$$\operatorname{Ind}(\rho\Delta) = \dim(\rho\Delta) - \operatorname{Codim}[\operatorname{Im}(\rho\Delta)] \tag{1.8}$$

$\operatorname{Ind}(\rho\Delta) = \dim\ker(\rho\Delta) - \dim\ker(\rho\Delta)^*$ [12]

Maintenant, on s'intéresse à montrer l'existence de la solution du problème

$$\begin{cases} \rho\Delta u = \rho f = g \\ u\,|_{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad g \in \mathbb{L}^2[V(0) \cap \Omega_\varphi] \tag{1.9}$$

en se basant sur le lemme de Peetre et dans ce cas il suffit de montrer cette inégalité :

$$\exists C > 0 : \|u\|_{\mathbb{E}} \leq C\{\|\rho\Delta\|_{\mathbb{L}^2} + \|u\|_{\mathbb{H}^1}\} \tag{1.10}$$

avec $\mathbb{E}(\Omega_\varphi)$, $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ et $\mathbb{H}^1(\Omega_\varphi)$ espaces de Banach reflexifs [3] et que l'injection de $\mathbb{E}(\Omega_\varphi)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega_\varphi)$est compacte

Proposition 7 *Si une suite d'éléments de* $\mathbb{E}(\Omega_\varphi)$ *tendant vers zéro faiblement, alors cette suite est bornée* [3]

Pour démontrer que " l'injection de $\mathbb{E}(\Omega_\varphi)$ dans $\mathbb{H}^1(\Omega_\varphi)$est compacte ", on s'appuit sur la proposition 2

En effet, on a : une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0} \to 0$ faiblement dans $\mathbb{E}(\Omega_\varphi)$, elle tend fortement dans $\mathbb{H}^1(\Omega_\varphi)$ ce qui revient à démontrer que :

$\|f_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}, \left\|\frac{\partial}{\partial\theta}f_n\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$ et $\left\|\frac{\partial}{\partial\rho}f_n\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \to 0.$

Pour celà, on prend la fonction φ définie sur $\mathbb{E}(\Omega_\varphi)$ par :

$$\varphi : f_n \to \varphi(f_n) = \int\limits_{\Omega_\varphi} f_n(\rho,\theta)\,\zeta(\rho,\theta)\,\rho d\rho d\theta \tag{1.11}$$

$$\text{Comme } \mathbb{E}(\Omega_\varphi) \subset \mathbb{H}^1(\Omega_\varphi) \Rightarrow \mathbb{E}(\Omega_\varphi) \text{ s'injecte compactement dans } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \quad [12] \tag{1.12}$$

$$\text{donc} \quad \|f_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow \infty$$

.

Soit (ζ_k) une suite bornée dans $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ alors

$$|\varphi_k(f_n)| \leq \|f_n\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \cdot \|\zeta_k\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{1.13}$$

ce qui donne en particulier $\varphi_k(f_n) \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ .Dans notre cas, il suffit de prendre $\zeta_n = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f_n$

$$\varphi_n(f_n) = \int\limits_{\Omega_\varphi} f_n\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f_n\rho d\rho d\theta = \int\limits_{\Omega_\varphi} \rho^2 f_n\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}f_n d\rho d\theta$$

$$\varphi_n(f_n) = \int\limits_0^\varphi \rho^2 f_n\frac{\partial f_n}{\partial\rho}\,|_0^\infty\, d\theta - \int\limits_{\Omega_\varphi}\left(2\rho f_n + \rho^2\frac{\partial f_n}{\partial\rho}\right)\frac{\partial f_n}{\partial\rho}d\rho d\theta$$

$$\varphi_n(f_n) = -2\int\limits_{\Omega_\varphi} f_n\frac{\partial f_n}{\partial\rho}\rho d\rho d\theta - \int\limits_{\Omega_\varphi}\left(\sqrt{\rho}\frac{\partial f_n}{\partial\rho}\right)^2\rho d\rho d\theta \text{ qui tend vers zéro}$$

Etude de l'opérateur adjoint

Proposition 8 *Le noyau de l'opérateur* $(\rho\Delta)^*$ *dans* $\mathbb{H}^{-s}(\Omega_\varphi)\,(s \geq 0)$ *dépend de* s *et de l'ouverture* φ *du secteur* Ω_φ

Démonstration

Il suffit de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} (\rho\Delta)^* v & = 0 \quad \text{dans} \qquad \Omega_\varphi \\ v \mid_\Gamma & = 0 \quad v \in \mathbb{H}^{-s}(\Omega_\varphi) \end{cases} \tag{1.14}$$

On pose $v = \dfrac{w}{\rho} \Leftrightarrow w = \rho v \Longrightarrow \Delta w = \Delta(\rho v) \Longleftrightarrow$
$\dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho v) + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho v) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\rho v)$

Aprés calcul, on trouve :

$\Delta w = \Delta(\rho v) = (\dfrac{1}{\rho} + 3\dfrac{\partial}{\partial \rho} + \rho\dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}) = (\rho\Delta)^* v$, avec $w = \dfrac{v}{\rho}$

De cette façon, on obtient (1.3) $\Leftrightarrow$ (1.4)

$$\begin{cases} (\rho\Delta)^* v & = \Delta w = 0 \qquad \text{dans} \qquad \Omega_\varphi \\ w \mid_\Gamma & = 0 \qquad \text{t.q } \dfrac{w}{\rho} \in \mathbb{H}^{-s}(\Omega_\varphi) \end{cases} \tag{1.15}$$

Pour tout $\rho \in]0, \rho_0[$, on prolonge la fonction w qui est $C^\infty(\Omega_\varphi)$ en tant que fonction de la variable θ sur $[-\varphi, \varphi]$ et ceci par symétrie car $\dfrac{w}{\rho} \mid_\Gamma = 0$ et on la prolonge par translation $2n\varphi$, avec $n \in \mathbb{Z}$, sur $\mathbb{R}$.On obtient une fonction continue, périodique (période 2φ), donc la fonction $w(\rho, \theta)$ admet un développement en série de sinus (à cause de la symétrie) et cette série est converge uniformément vers $w/w(\rho, \theta) = \sum a_n(\rho) \sin \dfrac{n\pi\theta}{\varphi}$

On calcule

$$\Delta w(\rho, \theta) = \sum \left[a_n''(\rho) + \frac{1}{\rho} a_n'(\rho) - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 a_n(\rho) \right] \times \sin \frac{n\pi\theta}{\varphi} = 0 \tag{1.16}$$

et comme $\left(\sin \dfrac{n\pi\theta}{\varphi}\right)_{n \geq 1}$ est un système total :

$$a_n''(\rho) + \frac{1}{\rho} a_n'(\rho) - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2 a_n(\rho) = 0, \forall n \geq 1 \tag{1.17}$$

Cette équation différentielle possède comme système fondamental de solutions :
$\left\{\rho^{\frac{n\pi}{\varphi}}, \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}\right\} \Longrightarrow a_n(\rho) = \alpha_n \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}} + \beta_n \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}$, ce qui donne :

$$w(\rho,\theta)=\sum \alpha_n \rho^{\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}+\sum \beta_n \rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}$$

Solution du problème

Pour celà, on fait tendre ρ vers zéro et tel que

$\frac{w}{\rho}\in\mathbb{H}^{-s}(\Omega_\varphi)\Longrightarrow \beta_n=0,\forall n\geq n_0(s)$

Par exemple : s = 2

Soit la fonction $\rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}-1}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}\in\mathbb{H}^{-2}$.On la multiplie par une fonction $f(\rho,\theta)\in\mathbb{H}^2$.On obtient

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0}\rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}-1}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}f(\rho,\theta)\,\rho d\rho d\theta=\left\{k_1\int_0^{\varphi}f(\rho_0,\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}d\theta+\right.$$
$$\left.k_2\int_0^{\varphi}f'(\rho_0,\theta)\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}d\theta+k_3\int_0^{\varphi}\int_0^{\rho_0}\rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}+1}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}f''(\rho,\theta)\,\rho d\rho d\theta\right\}$$

les deux premières intégrales sont convergentes car :

$f(\rho_0,\theta)\in\mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\Gamma)\,;f'(\rho_0,\theta)\in\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et pour que l'expression soit finie, il faut que $\rho^{-\frac{n\pi}{\varphi}+1}\sin\frac{n\pi\theta}{\varphi}$ soit dans $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ car $f''(\rho,\theta)$ est dans $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$.

Ceci implique : $2-\frac{2n\pi}{\varphi}+1>-1\Longrightarrow n<\frac{2\pi}{\varphi}$

Il y a trois cas

▷ si $\varphi\leq\frac{\pi}{2}$, il n'y a pas de solutions singulières

▷ si $\frac{\pi}{2}<\varphi\leq\pi$, il y a une seule solution singulière

▷ si $\pi<\varphi<2\pi$, il y a deux solutions singulières

Par exemple : s = 1

Il faut que $n<\frac{\pi}{\varphi}$

▷ si $\varphi\leq\pi$, il n'y a pas de solutions singulières

▷ si $\varphi>\pi$, il y a une seule solution singulière

Par exemple : s = 0

C'est à dire $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$, il faut que l'on ait $\frac{-n\pi}{\varphi}-1>-1$ ce qui est impossible $\Longrightarrow$ il n'y a pas de solutions singulières.On en déduit que les (β_n) sont tous nuls.Ce qui implique que la série est identiquement nulle.Alors $v=0$ est solution du problème

(1.3).Ce qui donne $\ker(\rho\Delta)^* = \{0\}$

Comme $\mathrm{Im}(\rho\Delta)$ est fermée et $Ker(\rho\Delta)^* = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Im}(\rho\Delta) = \mathbb{L}^2$ ce qui affirme la surjectivité de l'opérateur $\Rightarrow$ l'existence de la solution

Théorème 9 *Soient $E = \{u/u \in \mathbb{H}_0^1$ et $\rho D^2 u \in \mathbb{L}^2\}$ et $E_1 = \{u/\rho u \in \mathbb{H}_0^2\}$, la fonction u est à support compact.Les ensembles E et E_1 sont identiques.*

Démonstration

$$\mathbb{E} \equiv \mathbb{E}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{E} \subset \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_1 \subset \mathbb{E} \end{cases}$$

$\mathbb{E} \subset \mathbb{E}_1$ facile à faire

Démonstration de $\mathbb{E}_1 \subset \mathbb{E}$

$$\text{Soit } u \in \mathbb{E}_1 \Rightarrow \begin{cases} \rho u & \in & \mathbb{L}^2 \\ u + & \rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho} & \in \mathbb{L}^2 \\ 2\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + & \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} & \in \mathbb{L}^2 \end{cases}$$

Démonstration de $u \in \mathbb{L}^2$

On considère le produit scalaire : $\left\langle \rho u, u + \rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho} \right\rangle \in \mathbb{L}^2$

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \rho u \left(u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho d\rho d\theta = \int_0^\infty \int_0^\varphi \left(\rho u^2 + \rho^2 u \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \rho u \left(u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho d\rho d\theta = \int_0^\infty \int_0^\varphi \rho u^2 \rho d\rho d\theta + \int_0^\infty \int_0^\varphi \left(\rho^2 u \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho d\rho d\theta$$

La première intégrale donne $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\varphi \rho u^2 \rho d\rho d\theta = \left\| \sqrt{\rho} u \right\|_{\mathbb{L}^2}^2$

Pour la deuxième intégrale, on fait une intégration par parties par rapport à ρ :

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \left(\rho^3 u \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) d\rho d\theta = \underbrace{\int_0^\varphi \frac{\rho^3 u^2}{2} |_0^\infty \partial\theta}_{=0} - \tfrac{3}{2} \int_0^\infty \int_0^\varphi \rho^2 u^2 d\rho d\theta = -\tfrac{3}{2} \left\| \sqrt{\rho} u \right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

$$\left\langle \rho u, u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\rangle = -\tfrac{1}{2} \left\| \sqrt{\rho} u \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow \sqrt{\rho} u \in \mathbb{L}^2$$

On considère de nouveau un produit scalaire : $\left\langle \sqrt{\rho} u, u + \rho\dfrac{\partial u}{\partial \rho} \right\rangle \in \mathbb{L}^2$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \sqrt{\rho}u\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi\sqrt{\rho}u^2\rho d\rho d\theta.+\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho^{\frac{5}{2}}u\frac{\partial u}{\partial\rho}d\rho d\theta$$

La première intégrale donne $\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(\rho^{\frac{1}{4}}\right)^2u^2\rho d\rho d\theta=\left\|\rho^{\frac{1}{4}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$

Pour la deuxième intégrale, on fait une intégration par parties par rapport à ρ :

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(\rho^{\frac{5}{2}}u\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)d\rho d\theta=\underbrace{\int_0^\varphi\frac{\rho^{\frac{5}{2}}u^2}{2}\,|_0^\infty\,\partial\theta}_{=0}-\tfrac{5}{4}\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho^{\frac{3}{2}}u^2d\rho d\theta=-\tfrac{5}{4}\left\|\rho^{\frac{1}{4}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

$$\left\langle\rho u,u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\rangle=-\tfrac{5}{4}\left\|\rho^{\frac{1}{4}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2+\left\|\rho^{\frac{1}{4}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2=-\tfrac{1}{4}\left\|\rho^{\frac{1}{4}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\in\mathbb{L}^2$$

$\Rightarrow\left(\rho^{\frac{1}{4}}u\right)\in\mathbb{L}^2$.On remarque que $\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^1}u\in\mathbb{L}^2$ et $\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}u\in\mathbb{L}^2$ ce qui va donner le lemme suivant :

Lemme 10 *Soit u une fonction à support compact.Si $\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}u\in\mathbb{L}^2$ et $\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\in\mathbb{L}^2$ alors $\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}u\in\mathbb{L}^2$*

Démonstration

On considère le produit scalaire

$$\left\langle\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right),\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}u\right\rangle=\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}u\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}u\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi(u^2)\,\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\rho\partial\rho\partial\theta+\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(u\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}d\rho d\theta$$

La première intégrale donne :

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi(u^2)\,\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\rho d\rho d\theta=\left\|\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2=\left\|\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{2}}\right)u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2=\left\|\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

Pour la deuxième intégrale, on fait une intégration par parties par rapport à ρ

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(u\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}d\rho d\theta=\underbrace{\int_0^\varphi\frac{\rho^{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{2}u^2\,|_0^\infty\,d\theta}_{=0}-\frac{\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho^{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}u^2d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(u\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}d\rho d\theta=-\frac{\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}u^2\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(u\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}d\rho d\theta=-\tfrac{\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi\left[\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2u^2\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(u\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho^{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}d\rho d\theta=-\tfrac{\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi\left[\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2}}\right)\right]^2u^2\rho d\rho d\theta$$

$$-\tfrac{\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi\left[\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)\right]^2u^2\rho d\rho d\theta=-\tfrac{\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2}\left\|\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

$$\left\langle\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right),\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}u\right\rangle=\left\|\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2-\tfrac{\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2}\left\|\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

$$\left\langle\left(u+\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right),\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}u\right\rangle=-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\left\|\left(\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right)u\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

$$\Rightarrow\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}u\in\mathbb{L}^2$$

et pour n assez grand $\Rightarrow u\in\mathbb{L}^2$

Démonstration de $\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\in\mathbb{L}^2$

Soit $u\in\mathbb{E}_1\Rightarrow\begin{cases}\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho} & \in\mathbb{L}^2\\ \rho\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial\rho} & \in\mathbb{L}^2\end{cases}$

On considère le produit scalaire $\left\langle\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho},\rho\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+2\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right\rangle\in\mathbb{L}^2$

$$\left\langle\rho\frac{\partial u}{\partial\rho},\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\rangle=\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho d\rho d\theta$$

$$\left\langle\rho\frac{\partial u}{\partial\rho},\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\rangle=2\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2d\rho d\theta+\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho^3\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}d\rho d\theta$$

La première intégrale donne: $2\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2d\rho d\theta=2\left\|\rho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$

Pour la deuxième intégrale, on fait une intégration par parties :

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho^3\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}d\rho d\theta=\underbrace{\int_0^\varphi\frac{\rho^3}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2|_0^\infty d\theta}_{=0}-\tfrac{3}{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi\rho^2\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2d\rho d\theta=-\tfrac{3}{2}\left\|\rho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2$$

$$\left\langle\rho\frac{\partial u}{\partial\rho},\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\rangle=\tfrac{1}{2}\left\|\rho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|_{\mathbb{L}^2}^2\Rightarrow\rho^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial\rho}\in\mathbb{L}^2$$

Comme précédemment, on démontre que $\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\in\mathbb{L}^2\Rightarrow\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\in\mathbb{L}^2$

Comme $u \in \mathbb{E}_1 \Rightarrow \left(\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right) \in \mathbb{L}^2$ et $\dfrac{\partial u}{\partial\rho} \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} \in \mathbb{L}^2$ et de la même façon $\rho^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} \in \mathbb{L}^2$

Démonstration pour les autres dérivées

Pour celà on a le lemme suivant

Lemme 11 *Soit u une fonction à support compact telle que :*$\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}$ *et* $\rho\left(\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)$ *soient dans* $\mathbb{L}^2$ *alors* $\rho\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right)$ *est dans* $\mathbb{L}^2$

Démonstration

$u \in \mathbb{E}_1 \Rightarrow \rho u \in \mathbb{H}_0^2$.

On a $\rho\Delta\ :\ \ E \longrightarrow \mathbb{L}^2$ implique que :$\left(\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)$ est dans $\mathbb{L}^2$. Comme $\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}$et $\dfrac{\partial u}{\partial\rho}$ sont dans $\mathbb{L}^2$ alors $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$ est dans $\mathbb{L}^2$.Il reste à démontrer que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}$ appartient à $\mathbb{L}^2$

Pour celà, on utilise la transformation de Mellin de :

$$\widetilde{\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right)}(\sigma) = \sigma(\sigma-1)\,\widetilde{u}(\sigma-1,\theta).$$

$$\widetilde{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)} = \widetilde{u''}(\sigma-1,\theta)$$

$$\widetilde{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right)}(\sigma) = -(\sigma-1)\,\widetilde{u'}(\sigma-1,\theta)$$

Les transformées de Mellin sont définies sur le même domaine et d'autre part il existe un isomorphisme entre $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+)$ et $\mathbb{L}^2\left(\operatorname{Re}\sigma = \frac{1}{2}\right)$ .On pose $v'(\sigma-1,\theta) = -(\sigma-1)\,\widetilde{u'}(\sigma-1,\theta)$

Toutes ces fonctions sont développables en séries de Fourier

$$v(\sigma-1,\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\sigma-1)\,\alpha_n(\sigma)\,e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}} = C$$

$$v'(\sigma-1,\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\sigma-1)\left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)\alpha_n(\sigma)\,e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}} = B$$

$$v"\left(\sigma-1,\theta\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}}=A$$

On considére le produit scalaire

$$\left\langle B,B\right\rangle=\left\langle\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}},\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}}\right\rangle$$

$$\left\langle B,B\right\rangle=\left\langle-\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}},\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}}\right\rangle$$

$$\left\langle B,B\right\rangle=-\left\langle A,C\right\rangle$$

$$\left\|B\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\left\|A\right\|_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}.\left\|C\right\|_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\left\|A\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|C\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\right)\tag{1.18}$$

En remplaçant par leurs valeurs, on obtient

$$\left\|\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}\right)^{\sim}\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\left\|\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right)^{\sim}\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\left(\rho\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\right)\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\right)\tag{1.19}$$

Toutes les dérivées d'ordre trois où intervient θ sont majorées par des dérivées d'ordre plus grand

Donc la conclusion est que l'espace dual de

$$\mathbb{E}\equiv\mathbb{E}_1\text{est }\ \mathbb{E}^*=\left\{v/\frac{v}{\rho}\in\mathbb{H}^{-2}\right\}\tag{1.20}$$

1.2.3 Dualité

Pour mettre en évidence les différentes formules de dualité, les calculs seront effectués soit à partir de $dxdy$ ou $d\rho d\theta$ en incluant alors le facteur ρ dans les fonctions à intégrer.

Proposition 12 *Le dual de l'opérateur $\rho\Delta$ en coordonnées polaires est égal à l'opérateur lui même c'est à dire que*

$$(\rho\Delta)^* = \rho\Delta \tag{1.21}$$

Dèmonstration

$\langle \rho\Delta u, v\rangle = \int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty} \rho\Delta u.v\rho d\rho d\theta$ Sachant que $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$

$\langle \rho\Delta u, v\rangle = \int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty} \left(\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \dfrac{\partial u}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right).v\rho d\rho d\theta$ des intégrations par partie donne le résultat

$\int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty} \rho\Delta u.v\rho d\rho d\theta = \int\limits_0^{\varphi}\int\limits_0^{\infty} u\left[\dfrac{\partial v}{\partial\rho} + \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right]\rho d\rho d\theta$

$\langle \rho\Delta u, v\rangle = \langle u, (\rho\Delta)^* v\rangle$

On a donc

$$(\rho\Delta)^* = \rho\Delta$$

Remarque 13 *Compte tenu des espaces utilisés la convergece des intégrales ne se popse pas.*

D'autre part, on a d'aprés la proposition 1 que :

$(\rho\Delta)^* = \left(\dfrac{1}{\rho} + 3\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \rho\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$ en coordonnées cartésiennes.La transformée de Mellin de $(\rho\Delta)^*$:

$\widetilde{(\rho\Delta)}^*_{dxdy}\, v = (\sigma-2)^2\,\widetilde{v}(\sigma-1,\theta) + \widetilde{v}''_\theta(\sigma-1,\theta) = 0$ et les solutions élémentaires sont de la forme :

$a\sin(\sigma-1)\theta + b\cos(\sigma-1)\theta$

Le problème

$$\begin{cases} \widetilde{(\rho\Delta)^*}\, v & = 0 \\ \widetilde{v}(\sigma,0) & = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_\varphi \\ \widetilde{v}(\sigma,\varphi) & = 1 \end{cases} \tag{1.22}$$

admet comme solution

$$\widetilde{v}(\sigma,\theta) = \frac{\sin(\sigma-1)\theta}{\sin(\sigma-1)\varphi} \tag{1.23}$$

Les zéros positifs du dénominateur sont de la forme $\left(1+\dfrac{k\pi}{\varphi}\right)$

Les fonctions du noyau présente une singularité au sommet qui correspond aux résidus de la transformée de Mellin inverse des solutions de (1.5)

$\trianglerighteq$ Si $0<\varphi<\pi$ l'ensemble de pôle $S_\rho = \left\{1, \left(1+\dfrac{\pi}{\varphi}\right), \left(1+\dfrac{2\pi}{\varphi}\right), ...\right\}$

$\trianglerighteq$ Si $\pi<\varphi<2\pi$ l'ensemble de pôle $S_\rho = \left\{\left(1-\dfrac{\pi}{\varphi}\right), 1, \left(1+\dfrac{\pi}{\varphi}\right), ...\right\}$

Sur tout polygône Ω , chaque fonction singulière de $\mathbb{H}^{-s}(\Omega)$, $s>0$ donne naissance à une fonction singulière de $\ker(\rho\Delta)^* \cap \mathbb{H}^{-s}(\Omega)$.

En effet si g est la trace de u sur le bord de Ω, le problème:

$$\left\{\begin{array}{rl} (\rho\Delta)^* u = & f \\ u\,|_\Gamma = & g \end{array}\right. \tag{1.24}$$

Si $f\in\mathbb{L}^2$, $f-g=0$ car le problème initial est variationnel et admet une solution unique.

Les seuls pôles qui interviennent vérifient $\left(1+\dfrac{k\pi}{\varphi}\right) \geq 1$; aucune singularité n'appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega)$

1.3 Comparaison des espaces $\mathbb{H}^s_{x,y}$ et $\mathbb{H}^s_{\rho,\eta}$

Cas $s=1$

Proposition 14 *Les espaces* $\mathbb{H}^1_{x,y}$ *et* $\mathbb{H}^1_{\rho,\eta}$ *sont identiques.C'est à dire:*

$$\mathbb{H}^1_{x,y} \equiv \mathbb{H}^1_{\rho,\eta} \tag{1.25}$$

Démonstration

Il s'agit de démontrer que si :

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in \mathbb{L}^2_{xy} \Longleftrightarrow u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \in \mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right)$$

En effet on a :

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\sin\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} \in \mathbb{L}^2_{xy}$ alors il est évident que $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ et $\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \in \mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right)$

Inversement on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} - \sin\theta \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial u}{\partial \rho} + \cos \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ et $\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \in \mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right)$ alors $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} \in \mathbb{L}^2_{xy}$

Donc $\mathbb{H}^1_{x,y} \equiv \mathbb{H}^1_{\rho,\eta}$

Cas $s = 2$

Proposition 15 *L'espace* $\mathbb{H}^2_{x,y}$ *est inclus dans l'espace* $\mathbb{H}^2_{\rho,\eta}$

$$\mathbb{H}^2_{x,y} \subset \mathbb{H}^2_{\rho,\eta} \tag{1.26}$$

Démonstration

Il s'agit de démontrer que si:

$$u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \in \mathbb{L}^2_{xy} \Rightarrow u, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \rho}, \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \in \mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right)$$

En effet on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\sin 2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\theta$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \rho} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin 2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin 2\theta$$

$$\text{Comme} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in \mathbb{L}^2_{xy} \ \text{ alors } \ \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \text{ et } \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \rho} \in \mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right)$$

$$\text{Donc} \quad \mathbb{H}^2_{x,y} \subset \mathbb{H}^2_{\rho,\eta}$$

Inversement on a :

Contre exemple $u(\rho,\theta) = \rho = \sqrt{x^2+y^2} = u(x,y)$

u n'est pas dérivable en $(x,y) = (0,0)$ mais elle est indéfiniment dérivable en ρ

Chapitre 2

Etude de l'opérateur $\rho^2\Delta^2$dans l'éspace $\mathbb{F}$

2.1 Position du problème initial

Soit le problème :

$$\begin{cases} \Delta^2 u = & g \\ u_{|\Gamma} = & 0 \quad f \in \mathbb{L}^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \, |_{\Gamma} = & 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

défini dans le polygône (Ω)

La mise en place de la formule de Green pour le problème (2.1)est délicate .En relevant que $\dfrac{\partial^4 u}{\partial \rho^4}$ n'appartient pas toujours à $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ et que $\psi(\rho)\dfrac{\partial^4 u}{\partial \rho^4} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$.D'où l'idée de transformer le problème initial :

2.1.1 Etude du problème transformé

$$\begin{cases} \rho^{\alpha}\Delta^2 u = & \rho^{\alpha} g = f \\ u_{|\Gamma} = & 0 \qquad f \in \mathbb{L}^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,|_{\Gamma} = & 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où Ω est un polygône plan et Γ sa frontière .Cette étude sera locale, elle se fera au voisinage de chaque sommet S_i.Pour celà on considère une partition C^{∞} de l'unité $\overline{\Omega}$ isolant chaque sommet.

Remarque 16 *Une partition de l'unité ramène le problème sur un polygône à des domaines de trois types:*

1) demi-espace

2) ouvert de $\mathbb{R}^2$

3) secteur angulaire

Seul le troisième pose problème

Ce domaine est choisi pour avoir une présentation simple de l'inégalité à priori qui s'étend sans difficultés à un polygône par partition de l'unité.

Soit $\{\mathbf{B}_i\}_{i=\overline{1,N}}$ une suite d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ disjoints deux à deux et $S_i \in \mathbf{B}_i$, $\forall i = \overline{1,N}$, $\exists h_i \in C^{\infty}_{[0,1]}\left(\overline{\Omega}\right)$ tel que

$$h_i = \begin{cases} 1 \text{ sur } \mathbf{B}_i'' \\ \hat{h}_i \text{sur } \mathbf{B}_i' \backslash \mathbf{B}_i'' \\ 0 \text{ sur le complémentaire de } \mathbf{B}_i' \end{cases} \tag{2.3}$$

et tel que $\mathbf{B}_i'' \subsetneq \mathbf{B}_i' \subsetneq \mathbf{B}_i$ (les inclusions sont strictes) et $C^{\infty}_{[0,1]}\left(\overline{\Omega}\right)$ désigne les fonctions indéfiniment différentiables sur $\overline{\Omega}$ et à valeurs dans $[0,1]$.

Soit la fonction

$$h_0(x,y) = 1 - \sum_{i=1}^{N} h_i(x,y), \forall (x,y) \in \overline{\Omega} \tag{2.4}$$

et soit la fonction poids :

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \rho^2 & \text{sur } \mathbf{B}_i' \\ q(\rho) & \text{sur le complémentaire de } \mathbf{B}_i' \end{cases} \tag{2.5}$$

avec

$$\rho = d\left[S_i, (x,y)\right], (x,y) \in \mathbf{B}_i' \tag{2.6}$$

et tel que $q(\rho)$ ne s'annule pas (la fonction $\hat{h}_i$ est une fonction de raccordement qui assure l'appartenance de h_i à $C^\infty_{[0,1]}\overline{(\Omega)}$).

De même la fonction poids $\psi(\rho)$ est aussi une fonction de raccordement entre les fonctions ρ définies sur les voisinages de chaque sommet et qui assure en même temps l'appartenance de δ à $C^\infty(\Omega)$. Nous aurons par ailleurs :

$$u(x,y) = \sum_{i=0}^{N} h_i . u(x,y) = \sum_{i=0}^{N} u_i(x,y). \tag{2.7}$$

Le problème :

$$\begin{cases} \psi(\rho)\Delta^2 u = & \psi(\rho) f \\ u \mid_\Gamma = & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \mid_\Gamma = & 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

est équivalent au problème :

$$\begin{cases} \psi(\rho)\sum\limits_{i=0}^{N}\Delta^2 u_i = & \psi(\rho) f \\ \sum\limits_{i=0}^{N} u_i \mid_\Gamma = & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{N} \dfrac{\partial u_i}{\partial \eta} \mid_\Gamma = & 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Nous avons $\Delta^2 u_i$ à support compact, appartient à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et supp $u_i \subset (\mathbf{B}_i' \cap \Omega)$. Nous sommes donc amenés à étudier les problèmes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi(\rho)\,\Delta^2 u_0 = & f_0 \text{ dans } \mathbf{B}_0 \;= \text{supp } h_0 \subset \left(\Omega \backslash \overset{N}{\underset{i=1}{\cup}} \mathbf{B}_i''\right) \\ u_0 \mid_{\partial \mathbf{B}_0} = & \quad 0 \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \eta} \mid_{\partial \mathbf{B}_0} = & \quad 0 \end{array}\right. \qquad (P_0)$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \psi(\rho)\,\Delta^2 u_i = & f_i \text{ dans } \mathbf{\Omega}_\psi & \\ u_i \mid_{\Gamma_\varphi} = & 0 & \text{supp } f_i \subset \mathbf{B}_i' \; i = \overline{1, N} \\ \dfrac{\partial u_i}{\partial \eta} \mid_{\Gamma_\varphi} = & 0 & \end{array}\right. \qquad (P_i)$$

Ω_φ étant le secteur d'angle φ et de frontieres $\theta = 0$ et $\theta = \varphi$, obtenu en prolongeant les côtés issus du sommet S_i et tel que Ω_φ placé à l'origine des coordonnées. Le problème (P_0) étant classique (B_0 est à frontière régulière), sa résolution est basée sur l'inegalité à priori

$$\|u_0\|_{\mathbb{H}^2} \leq C \left\|\Delta^2 u_0\right\|_{\mathbb{L}^2}, \qquad u_0 \in H^2(\mathbf{B}_0) \cap \mathbb{H}_0^1(\mathbf{B}_0).$$

Quant aux problèmes (P_i), ils se ramenent sous la forme globale suivante:

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi(\rho)\,\Delta^2 u = & \psi(\rho)\, f = g \\ u(\rho; 0) = & u(\rho; \varphi) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho; 0) = & \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(\rho; \varphi) = 0 \end{array}\right. \qquad (2.10)$$

L'étude du problème (2.1) se fera localement sur Ω_φ

Avant d'entammer l'étude de l'opérateur $\rho^2\Delta^2$, nous allons calculer les expressions en coordonnées polaires des opérateurs Δ et Δ^2

2.1.2 Expression du Laplacien

l'opérateur $\boldsymbol{\rho\Delta}$ est elliptique dans Ω_φ et il dégénère à l'origine .Son polynôme caractéristique est $\rho(x^2 + y^2) \neq 0$, $\forall(x, y) \neq (0, 0)$

Sachant que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2})$, $\rho\Delta$ s'écrit en coordonnées polaires comme

$$\rho\Delta = \rho(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2})$$

Théorème 17 *L'opérateur* Δ *peut se mettre sous la forme*

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\left[(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] \tag{2.11}$$

Démonstration

On a :

$$(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = (\rho\frac{\partial}{\partial\rho})\left[(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})\right] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

et

$$(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})\left[(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})\right] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \rho(\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

On vient de voir (Thm 6) que le laplacien, en coordonnées polaires, a pour expression :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

et il se met sous la forme

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]$$

2.1.3 Expression du bilaplacien

Théorème 18 *L'opérateur* Δ^2 *peut se mettre sous la forme*

$$\Delta^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\cdot\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] \tag{2.12}$$

Démonstration

$$\Delta^2 = \frac{1}{\rho^2}\left\{\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\right\}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \frac{1}{\rho^4}\left\{\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^4 - 4\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3 + 4\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\right. \\ &\left. -4\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Il est aisé de voir comment ce résultat a été obtenu .En effet pour calculer:

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] \tag{2.14}$$

il suffit de dériver, deux fois par rapport à ρ,

Dérivée première par rapport à la variable ρ.

On a

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] \Longrightarrow \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Delta = \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left\{\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\right\}$$

On obtient

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\Delta = -\frac{2}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3 - \frac{2}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

Derivée seconde par rapport à la variable ρ.

Nous avons

$$\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\Delta = \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left[-\frac{2}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3 - \frac{2}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}^2\Delta &= \left\{\frac{4}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 - \frac{4}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3 + \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^4 + \frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right. \\ &\left. -\frac{4}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour calculer

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]$$

il suffit de calculer une dérivée seconde par rapport à θ

Dérivée seconde par rapport à la variable θ

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left\{\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta = \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} \tag{2.16}$$

Finalement, en additionnant (2.6) et (2.7) on obtient le résultat cherché

Expression developpée du bilaplacien

En effet sachant que $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$

$$\Delta^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] \circ \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]$$

$$\Delta^2 = \left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} \circ \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} \circ \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \circ \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\right\}$$

Aprés calcul on a

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial\rho^4} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial^3}{\partial\rho^3} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^3}{\partial\rho\partial\theta^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial\rho^2\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^4}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + \frac{4}{\rho^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial}{\partial\rho} \tag{2.17}$$

Si l'on désigne par D l'opérateur differentiel :

$$\Delta^2 = D^4_{\rho^4} + \frac{2}{\rho}D^3_{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2}D^2_{\rho^2} - \frac{2}{\rho^3}D^3_{\rho,\theta^2} + \frac{2}{\rho^2}D^4_{\rho^2,\theta^2} + \frac{1}{\rho^4}D^4_{\theta^4} + \frac{4}{\rho^4}D^2_{\theta^2} + \frac{1}{\rho^3}D_\rho$$

Détermination du poids $\psi(\rho)$

Pour l'étude de l'opérateur Δ [5] d'ordre deux que l'on note (β), le poids qui convenait était, soit $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ ou $\alpha = \beta - 1$.Pour le bilaplacien on peut penser à deux types de poids :

$$\begin{cases} \psi(\rho) = 4 - 1 = 3 \\ \psi(\rho) \ = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases} \tag{2.18}$$

Pour le premier type $\psi(\rho) = 3$, nous constatons qu'il "cache les singularités"

Quant au deuxième $\psi(\rho) = 2$, les calculs se font bien .Dans notre cas, on retiendra $\psi(\rho) = \rho^2$

Ce qui fait que $\psi(\rho)\Delta^2$ devient :

$\rho^2\Delta^2 = \rho^2\dfrac{\partial^4}{\partial\rho^4} + 2\rho\dfrac{\partial^3}{\partial\rho^3} - \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} - \dfrac{2}{\rho}\dfrac{\partial^3}{\partial\rho\partial\theta^2} + 2\dfrac{\partial^4}{\partial\rho^2\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^4}{\partial\theta^4} + \dfrac{4}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$

D'où la conséquence sur le problème (2.2)

$$\begin{cases} \rho^2\Delta^2 u = & f \\ u_{|\Gamma} = & 0 \quad f \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\ \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\ |_\Gamma = & 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ désigne la distance d'un point (x, y) de Ω à l'origine.Il s'agit d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.19) dans un secteur Ω_φ infini d'ouverture φ.

Conclusion 19 *La solution du problème* (2.8)*, quand elle existe dans l'espace de travail* $\mathbb{F}$ *, elle est unique*

2.2 Etude de l'espace $\mathbb{F}$

Soit l'espace $\mathbb{F}$

$$\mathbb{F} = \left\{ u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega_\varphi)/\rho^{\alpha_1 - 2}\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}u}{\partial\rho^{\alpha_1}\partial\theta^{\alpha_2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi); \forall\alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \text{ ou } 4 \right\} \tag{2.20}$$

qui vérifie l'inclusion algébrique : $\mathbb{H}_{xy}^4(\Omega_\varphi) \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{H}_{xy}^2(\Omega_\varphi)$ et il sera muni de la norme du graphe :

$$\|u\|_{\mathbb{F}}^2 = \left\{ \|u\|_{\mathbb{H}^2}^2 + \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 + \left\|\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 \right.$$
$$+ \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 + \left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2$$
$$\left. + \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 + \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 + \left\|\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}^2 \right\}$$

Pour montrer que $\mathbb{F}$ est un espace de Banach reflexif il suffit de montrer que $\mathbb{F}$est fermé dans $\mathbb{H}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$.

Proposition 20 *L'espace $\mathbb{F}$ est fermé dans $\mathbb{H}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$*

Demonstration

Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{F}$ qui converge vers u dans $\mathbb{H}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$

Montrons que u est dans $\mathbb{F}$.On a par hypothèse que

$(u_n) \longrightarrow u \in \mathbb{H}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$

alors

$$\begin{cases} u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy} \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial\rho} \longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial\rho} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_n}{\partial\theta} \longrightarrow \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy} \\ \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial\rho^2} \longrightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy} \\ \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial\rho\partial\theta} \longrightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy} \\ \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial\theta^2} \longrightarrow \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy} \end{cases} \tag{2.21}$$

Comme $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ s'injecte continument dans $\mathcal{D}'(\Omega_\varphi)$ (espace de distributions), ce qui implique [sachant que l'opérateur de dérivation est continu sur $\mathcal{D}'$]

$$\begin{aligned}
&u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } \mathcal{D}' \\
&\frac{\partial u_n}{\partial \rho} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad \text{dans } \mathcal{D}' \\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial \theta} \longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{dans } \mathcal{D}' \\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \quad \text{dans } \mathcal{D}' \\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho \partial \theta} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \quad \text{dans } \mathcal{D}' \\
&\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} \longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \text{ dans } \mathcal{D}'
\end{aligned}$$

Comme $(u_n) \subset \mathbb{F}$et $\mathbb{L}^2_{xy}$ est un espace de Banach

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \\
&\frac{\partial u_n}{\partial \rho} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial \theta} \longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho \partial \theta} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \\
&\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} \longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\
&\frac{\partial u_n}{\partial \rho} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\
&\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial \theta} \longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\
&\frac{\partial^2 u_n}{\partial \rho \partial \theta} \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \quad \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\
&\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial \theta^2} \longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \text{ dans } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)
\end{aligned}$$

donc $u \in \mathbb{F}$d'où la ferméture de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{H}^2_{xy}$ .Ce qui nous donne la reflexivité de l'espace $\mathbb{F}$ qui est un espace intermédiaire, dans le sens des ensembles, $\mathbb{H}^4 \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{H}^2$,

Plus généralement, on a :

$$\mathbb{F}_m(\Omega_\varphi) = \left\{ u \in \mathbb{H}_0^2(\Omega_\varphi)/\rho^{\alpha_1-2}\tfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}u}{\partial\rho^{\alpha_1}\partial\theta^{\alpha_2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\,;\forall\alpha_1,\alpha_2:\alpha_1+\alpha_2=m \right\}$$

2.3 Etude de l'opérateur $\rho^2\Delta^2$ dans $\mathbb{F}$

Proposition 21 *L'opérateur $\rho^2\Delta^2$ est linéaire continu de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$*

Démonstration

Dire que $\rho^2\Delta^2$ est linéaire continu de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\rho^2\Delta^2 & \textbf{est dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \\ \rho^2\Delta^2 & \textbf{est linéaire} \\ \rho^2\Delta^2 & \textbf{est continu dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \end{cases} \tag{2.22}$$

a) $\operatorname{Im}\rho^2\Delta^2$ **est dans** $\mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$

En effet soit $u \in \mathbb{F} \Longrightarrow$

$$\rho^2\Delta^2 u = \rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4} + 2\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2} + \frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} \tag{2.23}$$

Tout ces termes appartiennent à $\mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \Longrightarrow (\rho^2\Delta^2)(\mathbb{F}) \subset \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$

b) $\rho^2\Delta^2$ **est linéaire**

c) $\rho^2\Delta^2$ **est continu dans** $\mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$

Pour montrer la continuité $(\rho^2\Delta^2)$ il suffit de prendre une suite $(u_n)_{\ n\geq 0}$ qui converge vers u dans $\mathbb{F}$ et montrer que $[(\rho^2\Delta^2)(u_n)]$ converge vers $(\rho^2\Delta^2)u$ dans $\mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$ .En effet soit $(u_n)_{\ n\geq 0}$ une suite qui converge vers u dans $\mathbb{F}$

$$\Longrightarrow \rho^2\frac{\partial^4 u_n}{\partial\rho^4} \overset{converge}{\longrightarrow} \rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$$

$$\Longrightarrow 2\rho\frac{\partial^3 u_n}{\partial\rho^3} \overset{converge}{\longrightarrow} 2\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$$

$$\Longrightarrow -\frac{\partial^2 u_n}{\partial\rho^2} \overset{converge}{\longrightarrow} -\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}(\Omega_\varphi)$$

$$\Longrightarrow -\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 u_n}{\partial\rho\partial\theta^2} \overset{converge}{\longrightarrow} -\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\theta^2} \overset{converge}{\longrightarrow} \frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{2\partial^4 u_n}{\partial\rho^2\partial\theta^2} \overset{converge}{\longrightarrow} \frac{2\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u_n}{\partial\theta^4} \overset{converge}{\longrightarrow} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial\rho} \overset{converge}{\longrightarrow} \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} \text{ dans } \mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$$

ce qui implique que

$$\left(\rho^2\frac{\partial^4 u_n}{\partial\rho^4} + 2\rho\frac{\partial^3 u_n}{\partial\rho^3} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial\rho^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 u_n}{\partial\rho\partial\theta^2} + \frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^4 u_n}{\partial\rho^2\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u_n}{\partial\theta^4} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_n}{\partial\rho}\right)$$

converge vers

$$\left(\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4} + 2\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2} + \frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)$$

dans $\mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$ implique que $\left[\left(\rho^2\Delta^2\right)\left(u_n\right)\right]$ converge vers $\left(\rho^2\Delta^2\right)u$ dans $\mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$ donc l'opérateur $\left(\rho^2\Delta^2\right)$ est continu dans $\mathbb{L}^2_{xy}\left(\Omega_\varphi\right)$

Il nous reste à démontrer que le problème abordé a une solution.

2.4 Inégalité à priori pour $\rho^2\Delta^2$

Soit le problème:

$$\begin{cases} \rho^2\Delta^2 u = & f \\ u_{|\Gamma} = & 0 \quad f \in \mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right) \\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\,|_\Gamma = & 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Le but essentiel est de montrer que l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)$ est un opérateur à indice.

Rappelons que $(\rho^2\Delta^2)$ est un opérateur à indice si :

$$\begin{cases} \dim\ker\left(\rho^2\Delta^2\right) \ \textbf{est finie} \\ \operatorname{Im}\left(\rho^2\Delta^2\right) \ \textbf{est fermée} \\ \operatorname{codim}\left(\rho^2\Delta^2\right) \ \textbf{est finie} \end{cases} \tag{2.25}$$

Dans cette partie de notre recherche, on va démontrer l'éxistence de la solution du problème (2.9)

Conséquence : l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)$ est surjectif ce qui nous assure l'éxistence de la solution de notre problème

Pour celà on s'appuira sur

Lemme 22 *(Peetre) Soient $\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{G}$ trois espaces de Banach réflexifs : $\mathbb{E}\subset\mathbb{F}$ avec injection compacte et soit P un opérateur linéaire continu de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{G}$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) L'image de P dans $\mathbb{G}$ est fermée et le noyau de P est de dimension finie

(ii)Il existe une constante positive C telle que :

$$\|u\|_{\mathbb{E}} \leq C\left\{\|\rho\Delta\|_{\mathbb{G}} + \|u\|_{\mathbb{F}}\right\} \tag{2.26}$$

Pour montrer que l'image de $(\rho^2\Delta^2)$ est fermée il suffit de montrer l'inégalité suivante:

$$\|u\|_{\mathbb{F}} \leq C(\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|_{\mathbb{L}^2(x,y)} + \|u\|_{\mathbb{H}^2(x,y)}), \forall u\in\mathbb{F}. \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{F} \ = \ & \left\{u\in\mathbb{H}^2/\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4},\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3},\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2},\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2},\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right. \\ & \left.,\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3},\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta},\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3},\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\in\mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ce qui impose la vérification des conditions du lemme de Peetre.Pour celà on considère les trois espaces suivants

$$\mathbb{F}, \qquad \mathbb{H}^2_{xy}(\Omega_\varphi), \qquad \mathbb{L}^2_{xy}$$

Les espaces $\mathbb{H}^2$, $\mathbb{L}^2_{xy}$ sont des espaces de Banach reflexifs. [3]

$$\text{L'espace } \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \text{ est un espace de Banach reflexif [3]} \tag{2.29}$$

$$\text{L'espace } \mathbb{H}^2_{xy}(\Omega_\varphi) \text{ est un espace de Banach reflexif [3]} \tag{2.30}$$

Tout sous-espace vectoriel fermé dans un espace de Banach réflexif est réflexif.Comme $\mathbb{F}$ est un sous espace de $\mathbb{H}^2$donc

$$\text{L'espace } \mathbb{F} \text{ est un space de Banach reflexif [3]} \tag{2.31}$$

Les conditions du lemme de Peetre étant remplies, on peut appliquer l'inégalité à priori

L'espace $\mathbb{F}$ est un espace intermédiaire, dans le sens des ensembles, $\mathbb{H}^4 \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{H}^2$,il sera muni de la norme du graphe

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\mathbb{F}} = \Bigg\{ \|u\|^2_{\mathbb{H}^2} &+ \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \\ &+ \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \\ &+ \left\|\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \Bigg\}\end{aligned}$$

Le problème se pose dans le calcul de la norme de l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)$

Cette norme est :

$$\|\rho^2\Delta^2 u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \left\{ \left\|\frac{\rho^2\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|2\frac{\rho\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{2\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \right.$$
$$\left. \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \sum_{i=1}^{28}\mathbf{I}_i \right\} \tag{2.32}$$

où les $\mathbf{I}_i$ sont des intégrales qui ont l'une des six formes suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \int_{\Omega_{X,Y}} \rho^k \frac{\partial^j}{\partial\rho^j}\frac{\partial^m}{\partial\rho^m} d\Omega_{X,Y} \;\; (\mathbf{I}_1,\mathbf{I}_2,\mathbf{I}_7,\mathbf{I}_{22},\mathbf{I}_{23},\mathbf{I}_{24}) \qquad (2.33)\\
\mathbf{B} &= \int_{\Omega_{X,Y}} \rho^k \frac{\partial^j}{\partial\rho^j}\frac{\partial^m}{\partial\theta^m} d\Omega_{X,Y} \;\; (\mathbf{I}_4,\mathbf{I}_6,\mathbf{I}_9,\mathbf{I}_{11},\mathbf{I}_{13},\mathbf{I}_{15},\mathbf{I}_{25},\mathbf{I}_{26})\\
\mathbf{C} &= \int_{\Omega_{X,Y}} \rho^k \frac{\partial^j}{\partial\theta^j}\frac{\partial^m}{\partial\theta^m} d\Omega_{X,Y} \;\; (\mathbf{I}_{20})\\
\mathbf{D} &= \int_{\Omega_{X,Y}} \rho^k \frac{\partial^j}{\partial\theta^j}\frac{\partial^m}{\partial\rho^s\partial\theta^t} d\Omega_{X,Y} \;\; (I_{16},\mathbf{I}_{18},\mathbf{I}_{19},\mathbf{I}_{21})\\
\mathbf{E} &= \int_{\Omega_{X,Y}} \rho^k \frac{\partial^j}{\partial\rho^w\partial\rho^v}\frac{\partial^m}{\partial\rho^s\partial\theta^t} d\Omega_{X,Y} \;\; (\mathbf{I}_{17})\\
\mathbf{F} &= \int_{\Omega_{X,Y}} \rho^k \frac{\partial^j}{\partial\rho^j}\frac{\partial^m}{\partial\rho^s\partial\theta^t} d\Omega_{X,Y} (\mathbf{I}_3,\mathbf{I}_5,\mathbf{I}_8,\mathbf{I}_{10},\mathbf{I}_{12},\mathbf{I}_{14}\mathbf{I}_{27},\mathbf{I}_{28})
\end{aligned}$$

Expressions de ces intégrales

Forme A :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \mathbf{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi \boldsymbol{\rho}^4 \frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}; \quad \mathbf{I}_2 = \int_0^\infty\int_0^\varphi \boldsymbol{\rho}^3 \frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\\
\mathbf{I}_7 &= -\mathbf{2}\int_0^\infty\int_0^\varphi \boldsymbol{\rho}^2 \frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}; \mathbf{I}_{22} = \int_0^\infty\int_0^\varphi \boldsymbol{\rho}^2 \frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{I}_{23}=\mathbf{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\boldsymbol{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\ \ ;\mathbf{I}_{24}=-\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

Forme B :

$$\mathbf{I}_4=\mathbf{4}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\boldsymbol{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\qquad \mathbf{I}_6=\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\boldsymbol{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{I}_{11}=\mathbf{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\quad \mathbf{I}_{13}=-\mathbf{4}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{I}_9=\mathbf{8}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\qquad \mathbf{I}_{15}=-\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{I}_{25}=\mathbf{4}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\ ;\ \mathbf{I}_{26}=\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

Forme C :

$$\mathbf{I}_{20}=\ \mathbf{4}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

Forme D :

$$I_{16}=-8\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta\quad I_{18}=-2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

$$I_{19}=8\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta\qquad I_{21}=2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

Forme E :

$$\mathbf{I}_{17}=-\mathbf{4}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

Forme F :

$$\mathbf{I}_3=-\mathbf{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\boldsymbol{\rho}^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\quad \mathbf{I}_5=\mathbf{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\boldsymbol{\rho}^3\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{I}_8=-\mathbf{4}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\boldsymbol{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\quad \mathbf{I}_{10}=\mathbf{4}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\boldsymbol{\rho}^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{I}_{12}=\mathbf{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}\quad \mathbf{I}_{14}=-\mathbf{2}\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathbf{I}_{27}= -\mathbf{2} \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta} \;\; ; \;\; \mathbf{I}_{28}= \mathbf{2} \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial^4 u}{\partial \rho^2 \partial \theta^2}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

Pour facilter le calcule de toutes ces intégrales, on met en place le théorème suivant :

Théorème 23 *Soit u une fonction de $C^\infty(\Omega)$. Si u est à support compact, alors on a*

$$\int_{\Omega_\varphi} \boldsymbol{\rho}^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta} = \begin{cases} -\dfrac{k}{2}\left\| \rho^{\frac{k-2}{2}} \dfrac{\partial^i u}{\partial \rho^i}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}, \; pour\; k>0 \\ \displaystyle\int_{\Omega_\varphi} \boldsymbol{\rho}^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}\mathbf{d}\boldsymbol{\rho}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta} = 0, \; pour\; k=0 \end{cases} \tag{2.34}$$

Démonstration

ρ étant défini par $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, alors pour :

1^{er} cas $k>0$

$$\int_{\Omega_\varphi} \rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}d\Omega_\varphi = . \int_0^\infty \int_0^\varphi \rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties par rapport à ρ

$$\int_{\Omega_\varphi} \rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}d\rho d\theta = \begin{cases} \underbrace{\displaystyle\int_0^\varphi \rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}\,|_0^\infty d\theta}_{=0} \\ \qquad -\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\varphi \left(k\rho^{k-1}\frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} + \rho^k \frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}\right)\frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}d\rho d\theta \end{cases}$$

u est à support compact donc u est nulle au $V(\infty)$ c'est à dire que $\rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} = 0$ au $V(\infty)$.

La présence du facteur ρ^k rend nulle l'expression $\rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}$ au voisinage de zéro.

$$\int_{\Omega_\varphi} \rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}d\rho d\theta = \left\{-k.\int_0^\infty \int_0^\varphi \rho^{k-1}\frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}d\rho d\theta - \int_0^\infty \int_0^\varphi \rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i}.\frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}}d\rho d\theta\right.$$

$$\int_{\Omega_\varphi} \rho^k \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \cdot \frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}} d\rho d\theta = -\frac{k}{2} \left\| \rho^{\frac{k-2}{2}} \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \right\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)}$$

2^{éme} cas $k = 0$

$$\int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \cdot \frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}} d\rho d\theta = \underbrace{\int_0^\varphi \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \cdot \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \mid_0^\infty d\theta} - \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \cdot \frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}} d\rho d\theta$$

$$\underbrace{\int_0^\varphi \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \cdot \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \mid_0^\infty} d\theta = 0, \text{ par hypothèse}$$

$$2 \int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \cdot \frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}} d\rho d\theta = 0, \text{ d'où } \int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial^i u}{\partial \rho^i} \cdot \frac{\partial^{i+1} u}{\partial \rho^{i+1}} d\rho d\theta = 0.$$

Calcul des intégrales $\mathbf{I}_i$

Le cacul de certaines des intégrales $\mathbf{I}_i$ s'appuie sur le théorème 23

Calcul des intégrales de la forme A

Calcul de $\mathbf{I}_1$

$$\mathbf{I}_1 = 2 \int_0^{+\infty} \int_0^\varphi \rho^4 \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} d\rho d\theta$$

En appliquant le théorème 22, on obtient:

$$\mathbf{I}_1 = -4 \left\| \rho \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.35}$$

Calcul de $\mathbf{I}_2$

$$\mathbf{I}_2 = \int_0^{+\infty} \int_0^\varphi \rho^3 \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} d\rho d\theta$$

Une intégration par parties, par rapport à ρ ,nous donne en tenant compte de la remarque1:

$$\mathbf{I}_2 = \underbrace{\int_0^{\varphi} \rho^3 \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} |_0^{\infty} \, d\theta}_{=0} - \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\left(3\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho^3\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\right) d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_2 = -\left[\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} 3\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} d\rho d\theta + \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \rho^3\left(\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\right)^2 d\rho d\theta\right]$$

D'aprés le théorème 23

on a :

$$\mathbf{I}_2 = 3\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - \left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.36}$$

Calcul de $\mathbf{I}_7$

$$\mathbf{I}_7 = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \rho^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} d\rho d\theta = 2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \text{[th 22]} \tag{2.37}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{22}$

$\mathbf{I}_{22} = \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \rho^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4}\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta$. Une intégration par parties, par rapport à ρ, nous donne

$$\mathbf{I}_{22} = \underbrace{\int_0^{\varphi} \rho^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\frac{\partial u}{\partial \rho} |_0^{\infty} \, d\theta}_{=0} - \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\left[2\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right] d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{22} = -2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta - \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} d\rho d\theta =$$

$$\mathbf{I}_{22} = -2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta - \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

On considère l'intégrale $\mathbf{I}'_{22} = -2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta$.Une intégration par parties, par rapport à ρ, donne

$$\mathbf{I}'_{22} = \underbrace{-2\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} |_0^{\infty} d\theta}_{=0} + 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho}\right] d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{22} = 2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

(l'intégrale $2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta = 0$) [th 23]

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_{22} = -\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

$$\mathbf{I}_{22} = \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.38}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{23}$

$\mathbf{I}_{23} = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \rho\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta$ .Une intégration par parties, par rapport à ρ, donne

$$\mathbf{I}_{23} = \underbrace{2\int_0^{\varphi} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial u}{\partial \rho} |_0^{\infty} d\theta}_{=0} - 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\left[\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right] d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{23} = -2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - \underbrace{2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta}_{=0}$$

$$\mathbf{I}_{23} = -2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.39}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{24}$

$$\mathbf{I}_{24} = \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\frac{\partial u}{\partial \rho} d\rho d\theta = 0 \ \text{[th 23]} \tag{2.40}$$

Calcul des intégrales de la forme B

Calcul de $\mathbf{I}_4$

$$\mathbf{I}_4 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

En intégrant par parties, par rapport à θ, on obtient:

$$\mathbf{I}_4 = 4\left[\underbrace{\int_0^{\infty}\rho\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\mid_0^{\varphi}d\rho}_{=0} - \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^5 u}{\partial\theta\partial\rho^4}d\rho d\theta\right]$$

On intégre une deuxième fois par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_4 = -4\left[\underbrace{\int_0^{\varphi}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\rho\frac{\partial u}{\partial\theta}\mid_0^{\infty}d\theta}_{=0} - \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right)d\rho d\theta\right]$$

La trosième intégration par parties (par rapport à ρ) donne :

$$\mathbf{I}_4 = 4\left\{\underbrace{\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\mid_0^{\infty}d\theta}_{=0} - \underbrace{\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right)d\rho d\theta}_{=0} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\mid_0^{\infty}d\theta}_{=0} - \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}+\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right)d\rho d\theta\right\}$$

Finalement

$$\mathbf{I}_4 = -4\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.41}$$

Calcul de $\mathbf{I}_6$

$\mathbf{I}_6 = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}d\rho d\theta$ .On fait une intégration par parties, par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_6 = 2\underbrace{\int_0^{\infty} \rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} \mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \rho\frac{\partial^5 u}{\partial\theta\partial\rho^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} d\rho d\theta$$

.La deuxième intégration par parties se fera par rapport à ρ et donne :

$$\mathbf{I}_6 = -2\underbrace{\int_0^{\varphi} \rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} \mid_0^{\infty} d\theta}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} - \rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^3\partial\rho}\right) d\rho d\theta$$

On intégre une troisième fois par parties, par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_6 = \left\{\begin{array}{l} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^5 u}{\partial\theta^2\partial\rho^3} d\rho d\theta \\ -2\underbrace{\int_0^{\infty} \rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2} \mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\rho\frac{\partial^5 u}{\partial\theta^2\partial\rho^3} d\rho d\theta \end{array}\right\}$$

On intégre une quatrième fois par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_6 = \left\{\begin{array}{l} -2\underbrace{\int_0^{\varphi} \rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho} \mid_0^{\infty} d\theta}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\left[\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right] d\rho d\theta \\ -2\underbrace{\int_0^{\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \mid_0^{\infty} d\theta}_{=0} + 2\underbrace{\int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho} d\rho d\theta}_{=0} \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{I}_6 = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\left[\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right] d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_6 = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\right)^2 \rho d\rho d\theta + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho} d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_6 = 2\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.42}$$

Sachant que $2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}d\rho d\theta = 0$ [th 23]

Calcul de $\mathbf{I}_9$

$$\mathbf{I}_9 = 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

La première intégration par parties se fera par rapport à $\theta \Rightarrow$

$$\mathbf{I}_9 = \underbrace{8\int_0^{\infty}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\theta}\mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} - 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\theta}d\rho d\theta$$

La deuxième intégration par parties sera par rapport à $\rho \Rightarrow$

$$\mathbf{I}_9 = \underbrace{-8\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\mid_0^{\infty} d\theta}_{=0} + \underbrace{8\int_{\Omega_\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}d\rho d\theta}_{=0} = 0$$

$$\Longrightarrow \mathbf{I}_9 = 0 \tag{2.43}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{11}$

$$\mathbf{I}_{11} = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}d\rho d\theta$$

La première intégration par parties sera par rapport à θ

$$\mathbf{I}_{11} = 2\left[\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} - \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}d\rho d\theta\right]$$

Ladeuxième intégration par parties sera par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_{11} = \underbrace{-2\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} |_0^{\infty} d\theta}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3} d\rho d\theta$$

La dernière intégration sera par rapport à θ

$$\mathbf{I}_{11} = \underbrace{2\int_0^{\infty} \frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta} |_0^{\varphi} d\rho}_{=0} - \underbrace{2\int_{\Omega_\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2} d\rho d\theta}_{=0} = 0. \tag{2.44}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{13}$

$$\mathbf{I}_{13} = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} d\rho d\theta$$

La première intégration par parties sera par rapport à θ

$$\mathbf{I}_{13} = \underbrace{4\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} |_0^{\varphi} d\rho}_{=0} - 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta} d\rho d\theta$$

.La deuxième intégration par parties sera par rapport à $\rho \Rightarrow$

$$\mathbf{I}_{13} = \underbrace{-4\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta} |_0^{\infty} d\theta}_{=0} + 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{13} = 4\int_{\Omega_\varphi} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right)^2 d\rho d\theta - 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} d\rho d\theta$$

On pose :

$$\mathbf{I}'_{13} = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{13} = \underbrace{-4\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} |_0^{\infty} d\theta}_{=0} + 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) d\rho d\theta$$

(par intégration par parties par rapport à ρ) on a :

$$\mathbf{I}'_{13} = -8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\frac{1}{\rho^3}d\rho d\theta + 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{13} = -8\int_{\Omega_\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\frac{1}{\rho^3}d\rho d\theta - I'_{13} \text{ d'où } 2\ \mathbf{I}'_{13} = -8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\frac{1}{\rho^3}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{13} = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\frac{1}{\rho^3}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{13} = -4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

Finalement la valeur de l'intégrale est :

$$\mathbf{I}_{13} = 4\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.45}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{15}$

$$\mathbf{I}_{15} = 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties par rapport à θ

$$\mathbf{I}_{15} = 8\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\ |_0^{\varphi}\ d\rho - 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}d\rho d\theta$$

Remarque 24 *On a par hypothèse $u(\rho,0)=0$ et $u(\rho,\varphi)=0$*

$$\text{alors on a : } \frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho,0)=0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial\rho}(\rho,\varphi)=0 \tag{2.46}$$

et il en est de même pour les dérivées d'ordre supérieur.

Donc

$$8\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\ |_0^{\varphi}\ d\rho = 0$$

$$\mathbf{I}_{15}=-8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}d\rho d\theta$$

On fait une deuxième intégration par parties par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_{15}=\underbrace{-8\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\mid_0^{\varphi}d\rho}_{=0}+8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{15}=8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^2\partial\rho^2}d\rho d\theta$$

Une troisième intégration par parties sera par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_{15}=\underbrace{8\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\mid_0^{\infty}d\theta}_{=0}-8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right)d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{15}=-8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right)d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{15}=8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}d\rho d\theta-8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right)^2d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{15}=-8\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right\|^2_{L^2_{(\Omega_\varphi)}}+8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}d\rho d\theta$$

On pose :

$$\mathbf{I}'_{15}=8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}d\rho d\theta$$

On intègre par rapport à ρ

$$\mathbf{I}'_{15}=\underbrace{8\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\mid_0^{\infty}d\theta}-8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\left(-\frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right)d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{15} = 16\int_{\Omega_\varphi}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)^2\frac{1}{\rho^3}d\rho d\theta - 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{15} = 8\left\|\tfrac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - \mathbf{I}'_{15}$$

$$\mathbf{I}'_{15} = 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

Finalement la valeur de l'intégrale

$$\mathbf{I}_{15} = -8\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^2\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.47}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{25}$

$\mathbf{I}_{25} = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}d\rho d\theta$. On intégre par parties par rapport à θ

$\mathbf{I}_{25} = \underbrace{4\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial u}{\partial\theta}\mid_0^{\varphi}d\rho}_{=0} - 4\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}d\rho d\theta$ .On pose

$\mathbf{I}'_{25} = -4\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}d\rho d\theta$ La deuxième intégration se fera par rapport à ρ

$$\mathbf{I}'_{25} = \underbrace{-4\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}\mid_0^{\infty}d\theta}_{=0} + 4\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial u}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho} - \frac{2}{\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_{25} = -8\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^3}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 d\rho d\theta - \mathbf{I}'_{25} \Longrightarrow 2\mathbf{I}'_{25} = -8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

$$\mathbf{I}'_{25} = -4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \mathbf{I}_{25} \tag{2.48}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{26}$

$$\mathbf{I}_{26} = \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}d\rho d\theta$$

On intégre par parties par rapport à θ

$\mathbf{I}_{26} = \underbrace{\int\limits_0^\infty \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \mid_0^\varphi d\rho}_{=0} - \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} d\rho d\theta$ .On intégre une deuxième fois par parties par rapport à θ

$\mathbf{I}_{26} = \underbrace{-\int\limits_0^\infty \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \mid_0^\varphi d\rho}_{=0} + \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} d\rho d\theta$.

On pose $\mathbf{I}'_{26} = \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} d\rho d\theta$

On intégre par parties cette fois par rapport à ρ

$\mathbf{I}'_{26} = \underbrace{\int\limits_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \mid_0^\infty d\theta}_{=0} - \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2} - \frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right] d\rho d\theta$

$\mathbf{I}'_{26} = 2\int_0^\infty \int_0^\varphi \left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)^2 \rho d\rho d\theta - \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}\right] d\rho d\theta$

$\mathbf{I}'_{26} = 2\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - \mathbf{I}'_{26} \Longrightarrow \mathbf{I}'_{26} = \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$

donc

$$\mathbf{I}_{26} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} d\rho d\theta = \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.49}$$

Calcul des intégrales de la forme C

Calcul de $\mathbf{I}_{20}$

$$\mathbf{I}_{20} = 4\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^\varphi \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} d\rho d\theta$$

Une intégration par parties, par rapport à θ donne :

$$\mathbf{I}_{20} = \underbrace{4\int\limits_0^\infty \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \mid_0^\varphi d\rho}_{=0} - 4\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_0^\varphi \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{20} = -4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.50}$$

Calcul des intégrales de la forme D

Calcul de $\mathbf{I}_{16}$

$$\mathbf{I}_{16} = -8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta = -4\mathbf{I}'_{15} = -32\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.51}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{18}$

$$\mathbf{I}_{18} = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

Une intégration par parties, par rapport à θ donne :

$$\mathbf{I}_{18} = \underbrace{-2\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\mid_0^{\varphi}d\rho}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{18} = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}d\rho d\theta$$

Une intégration par parties, par rapport à ρ donne:

$$\mathbf{I}_{18} = \underbrace{2\int_0^{\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\mid_0^{\infty}d\theta}_{=0} - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\left[-\frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right]d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{18} = 4\int_{\Omega_\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}d\rho d\theta - 2\int_{\Omega_\varphi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}d\rho d\theta$$

$$I_{18} = 4\int_{\Omega_\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}d\rho d\theta - \mathbf{I}_{18}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{I}_{18} &= 4\int_{\Omega_\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}d\rho d\theta = 4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \qquad (2.52)\\ \mathbf{I}_{18} &= 2\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \end{aligned}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{19}$

$$\mathbf{I}_{19} = 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_{19} = \underbrace{8\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\rho\partial\rho\partial\theta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\mid_0^{\infty} d\theta}_{=0} - 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right)d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{19} = -8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right)^2 d\rho d\theta + 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)d\rho d\theta$$

On note par

$$\mathbf{I}'_{19} = -8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right)^2 d\rho d\theta = -8\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

et par

$$\mathbf{I}''_{19} = 8\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)d\rho d\theta. = \mathbf{I}'_{15}$$

Comme

$$\mathbf{I}'_{15} = 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \text{ d'où } \mathbf{I}''_{19} = 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

Donc

$$\mathbf{I}_{19} = 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 8\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.53}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{21}$

$$\mathbf{I}_{21} = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

Pour calculer l' intégrale,on fait une intégration par parties, par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_{21} = \underbrace{2\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2} \mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^5 u}{\partial\rho^2\partial\theta^3} d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{21} = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^5 u}{\partial\rho^2\partial\theta^3} d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_{21} = \underbrace{-2\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3} \mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right] d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{21} = \ 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right)^2 d\rho d\theta - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3} d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{21} = 2\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3} d\rho d\theta$$

On pose

$$\mathbf{I}'_{21} = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3} d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à θ

$$\mathbf{I}'_{21} = \underbrace{-2\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2} \mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2} d\rho d\theta$$

On remarque

$$2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2} d\rho d\theta = -\mathbf{I}_{18}$$

ce qui donne

$$\mathbf{I}_{21} = 2\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 2\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.54}$$

Calcul des intégrales de la forme E

Calcul de $\mathbf{I}_{17}$

$$\mathbf{I}_{17} = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right)d\rho d\theta = 0\,[\text{th }23] \tag{2.55}$$

Calcul des intégrales de la forme F

Calcul de $\mathbf{I}_3$

$$\mathbf{I}_3 = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_3 = \underbrace{-2\int_0^{\varphi}\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\,|_0^{\infty}\,d\theta}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\left[2\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}+\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right]d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_3 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}d\rho d\theta + \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_3 = \left\{\begin{array}{l} \underbrace{4\int_0^{\infty}\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\,|_0^{\varphi}\,d\rho}_{=0} - 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}d\rho d\theta \\ + \underbrace{\int_0^{\infty}\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\,|_0^{\varphi}\,d\rho}_{=0} - \int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}d\rho d\theta \end{array}\right\}.$$

Finalement on a :

$$\mathbf{I}_3 = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right]\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta - 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_3 = 4\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - \mathbf{I}'_3$$

avec

$$\mathbf{I}'_3 = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}'_3 = \underbrace{-4\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\mid_0^\infty d\theta}_{=0} + 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} + \rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right]d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}'_3 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta \text{ car } 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}d\rho d\theta = 0\,[\text{th } 23]$$

$$\mathbf{I}'_3 = 4\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \Rightarrow \mathbf{I}_3 = 0 \tag{2.56}$$

Calcul de $\mathbf{I}_5$

$$\mathbf{I}_5 = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^3\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_5 = \underbrace{2\int_0^{\infty}\rho^3\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\mid_0^\varphi d\rho}_{=0} - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\rho^3\frac{\partial^5 u}{\partial\theta\partial\rho^4}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_5 = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\rho^3\frac{\partial^5 u}{\partial\theta\partial\rho^4}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à ρ

$$\mathbf{I}_5 = \underbrace{-2\int_0^{\varphi}\rho^3\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\mid_0^\infty d\theta}_{=0(} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\left[3\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta} + \rho^3\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\right]d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_5 = 6\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^3\left[\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\right]^2 d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_5 = 2\left\|\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 6\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.57}$$

Calcul de $\mathbf{I}_8$

$$\mathbf{I}_8 = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à θ :

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_8 &= \underbrace{-4\int_0^{\infty}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\mid_0^{\varphi} d\rho}_{=0} + 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}d\rho d\theta \\ \mathbf{I}_8 &= 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\theta\partial\rho^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}d\rho d\theta\end{aligned}$$

Ensuite on fait une intégration par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{I}_8 = \underbrace{4\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\mid_0^{\infty} d\theta}_{=0} - 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\left[\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right]d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_8 = -4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right)^2\rho d\rho d\theta - \underbrace{4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}d\rho d\theta}_{=0} = -\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

$$\mathbf{I}_8 = -\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.58}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{10}$

$$\mathbf{I}_{10} = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_{10} = \underbrace{4\int_0^{\infty}\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\mid_0^{\varphi}d\rho}_{=0} - 4\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho^2\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}d\Omega_{\varphi} = 4\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_{\varphi})} \tag{2.59}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{12}$

$$\mathbf{I}_{12} = 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à θ :

$$\mathbf{I}_{12} = \underbrace{2\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\mid_0^{\varphi}d\rho}_{=0} - 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{12} = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}d\rho d\theta = 0 \tag{2.60}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{14}$

$$\mathbf{I}_{14} = -2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On fait une intégration par parties, par rapport à θ

$$\mathbf{I}_{14} = \underbrace{-2\int_0^{\infty}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\mid_0^{\varphi}d\rho}_{=0} + 2\int_0^{+\infty}\int_0^{\varphi}\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{I}_{14} = 2\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.61}$$

Calcul de$\mathbf{I}_{27}$

$$\mathbf{I}_{27} = -2 \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On intègre, par parties, par rapport à θ

$$\mathbf{I}_{27} = \underbrace{-2 \int_0^\infty \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta} |_0^\varphi \, d\rho}_{=0} + 2 \int_0^\infty\int_0^\varphi \tfrac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta = 2\left\|\tfrac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

$$\mathbf{I}_{27} = 2\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.62}$$

Calcul de $\mathbf{I}_{28}$

$$\mathbf{I}_{28} = 2 \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

On intègre, par parties, par rapport à θ

$$\mathbf{I}_{28} = \underbrace{2 \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta} |_0^\varphi \, d\rho}_{=0} - 2 \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta \,.$$

On pose $\mathbf{I}'_{28} = -2 \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta$

$\mathbf{I}'_{28} = -2 \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}d\rho d\theta = -2 \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right]d\rho d\theta =$ 0 [th 23]

$$\mathbf{I}'_{28} = \mathbf{I}_{28} = 0 \tag{2.63}$$

Calcul de la norme de l'opérateur

$$\|\rho^2\Delta^2 u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \left\{\left\|\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|4\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \right.$$
$$\left. + \left\|\frac{4}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \sum_{i=1}^{28}\mathbf{I}_i\right\}$$

Après calcul on trouve

$$\sum_{i=1}^{28}\mathbf{I}_i = \left\{ 2\left\|\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 2\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^3\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 2\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \right.$$
$$4\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 6\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 5\left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 5\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$
$$\left. -16\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 15\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \right\}$$

En remplaçant dans l'expression de la norme de l'opérateur

$$\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \left\{ \left\|\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 11\left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 5\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \right.$$
$$+6\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 5\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$
$$-4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 6\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 4\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^3\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

Pour arriver à l'expression voulue, on a besoin de faire les majorations de plusieurs termes.Pour cela on a :

Lemme 25 *si* $u \in \mathbb{H}^2_0$, *alors* $\dfrac{u(\rho,\theta)}{\rho^2}$, $\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$, $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}$ *appartiennent à* $\mathbb{L}^2$ *et leurs normes respectives sont majorées par des normes* $\mathbb{H}^2$*de la fonction* u

Démonstration pour $\dfrac{u(\rho,\theta)}{\rho^2}$

$$\frac{u}{\rho^2}(\rho,\theta) = \frac{1}{\rho^2}\int_\rho^\infty \frac{\partial u}{\partial t}(t,\theta)\,dt$$

Une intégration par parties donne:

$$\frac{u}{\rho^2}(\rho,\theta) = \frac{1}{\rho^2}\left[\left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,\theta).(t-\rho)\right]_\rho^\infty - \int_\rho^\infty (t-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\theta)\,dt\right]$$

$$\frac{u}{\rho^2}(\rho,\theta) = -\int_\rho^\infty \frac{t}{\rho^2}(t-\rho)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\theta)\frac{dt}{t}$$

c'est une convolution multiplicative donc :

$$\frac{u}{\rho^2}(\rho,\theta)=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}(\rho,\theta)*\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\right]$$

En passant aux normes, on obtient

$$\left\|\frac{u(\rho,\theta)}{\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_\rho(\Omega)}\leq\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_{\rho(\Omega_\varphi)}}\left\|\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\right\|^2_{\mathbb{L}^1_\rho(\Omega)} \tag{2.64}$$

Démonstration pour $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{1}{\rho^2}\int_\rho^\infty\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial t}(t,\theta)\,dt=\int_\rho^\infty\frac{1}{t}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial t}\frac{t^2}{\rho^2}(t,\theta)\frac{dt}{t}$$

produit de convolution multiplicative, donc d'après la définition

$$\int_\rho^\infty\frac{1}{t}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial t}\frac{t^2}{\rho^2}(t,\theta)\frac{dt}{t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}(\rho,\theta)*\frac{1}{\rho^2}$$

pour $\rho\in[1,\infty[$ ce qui implique

$$\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\cdot\left\|()\,\frac{1}{\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}$$

avec $g(\rho)=\frac{1}{\rho}$ sur l'intervalle $]0,1]$ dans le cas où la primitive est prise sur $[\rho,\infty[$ et $g(\rho)=\frac{1}{\rho}$ sur l'intervalle $[1,\infty[$ dans le cas où la primitive est prise sur $[0,\rho[$, ce qui implique:

$$\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_\rho(\Omega)}\leq\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_{\rho(\Omega_\varphi)}}c.\left\|g(\rho)\right\|^2_{\mathbb{L}^1_\rho(\Omega)}$$

où c est constante et de plus g est chosie de telle maniére que de convolution multiplicative reste dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

$$\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\quad\text{et}\quad\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_\rho(\Omega)}$$

s'expriment en fonction de la norme $\mathbb{H}^2$ de la fonction u, sachant que $u\in\mathbb{H}^2_0$

Démonstration pour $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho}$

On considère la fonction

$$m(\rho,\theta)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\int_{\rho}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}(t,\theta)\,dt=-\int_{\rho}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\theta)\,\frac{t}{\rho}\frac{dt}{t}$$

c'est une convolution multiplicative

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}=-\int_{\rho}^{+\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,\theta)\,\frac{t}{\rho}\frac{dt}{t}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}(\rho,\theta)*g(\rho)$$

En passant aux normes, on obtient

$$\left\|\frac{u(\rho,\theta)}{\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_\rho(\Omega)}\leq\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2_{\rho(\Omega_\varphi)}}\left\|\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho}-1\right)\right\|^2_{\mathbb{L}^1_\rho(\Omega)}$$

Lemme 26 *Pour u dans $\mathbb{F}$, on a :*

$$\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\leq\xi\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\frac{1}{\xi}\left\|\frac{u}{\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.65}$$

Démonstration

Soit $u\in\mathbb{F}$ et on suppose que toutes les dérivées d'ordre 4 de u existent et que $u\in\mathbb{H}^2(\Omega_\varphi)$ .On peut supposer que les fonctions sont à support compact au voisinage de $(0,0)$.

$v=\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\ \in\mathbb{F}\implies\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\in\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ et $\dfrac{u}{\rho^2}\in\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$

Les fonctions v et $\dfrac{u}{\rho^2}$ sont développables en séries de Fourier :

$$v(\rho,\theta)=\sum\frac{1}{\rho^2}a_n e^{in\frac{\pi\theta}{\varphi}}\left[in\frac{\pi}{\varphi}\right]^4$$

$$u(\rho,\theta)=\sum\frac{1}{\rho^2}a_n e^{in\frac{\pi\theta}{\varphi}}$$

ou bien si l'on utilise$W = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2$ que l'on peut écrire $W = \sum b_n e^{in\dfrac{\pi\theta}{\varphi}}$ et $V = \sum \left(in\frac{\pi}{\varphi}\right) b_n e^{in\dfrac{\pi\theta}{\varphi}}$

En utilisant Cauchy-Schwartz, on a: $\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ et on déduit l'inégalité :

$$\left\| \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \leq \xi \left\| \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \frac{1}{\xi}\left\| \frac{u}{\rho^2} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

Lemme 27 *Pour u dans $\mathbb{F}$, on a*

$$\left\| \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}\right)^{\sim} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \leq \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 \left\| \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial \rho \partial \theta^3}\right)^{\sim} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\| \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\right) \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \right) \tag{2.66}$$

En réalité, les dérivées que regroupe ce cas sont

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^2 \partial \theta}$$

Démonstration

L'idée est de borner la dérivée $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}$ entre les dérivées $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^4 u}{\partial \rho \partial \theta^3}$ et $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}$

Pour celà on calcule la transformée de Mellin de ces trois dérivées

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}\right)^{\sim} = -(\sigma - 2)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \theta^2}(\sigma - 2, \theta)$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial \rho \partial \theta^3}\right)^{\sim} = -(\sigma - 2)\frac{\partial^3 \widetilde{u}}{\partial \theta^3}(\sigma - 2, \theta)$$

$$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta}\right)^{\sim} = -(\sigma - 2)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta}(\sigma - 2, \theta)$$

On pose $$v\left(\sigma-2,\theta\right)=-\left(\sigma-2\right)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\theta}\left(\sigma-2,\theta\right)$$

$$\Longrightarrow v\left(\sigma-2,\theta\right),v'\left(\sigma-2,\theta\right),v''\left(\sigma-2,\theta\right)$$

Toutes ces fonctions sont développables en séries de Fourier

$$v\left(\sigma-2,\theta\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}-\left(\sigma-2\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}}=C$$

$$v'\left(\sigma-2,\theta\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}-\left(\sigma-2\right)\left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}}=B$$

$$v"\left(\sigma-2,\theta\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\sigma-2\right)\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\frac{\theta\pi}{\varphi}}=A$$

On considére le produit scalaire

$$\langle B,B\rangle=-\langle A,C\rangle$$

$$\|B\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\|A\|_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}.\|C\|_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\|A\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\|C\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\right)\tag{2.67}$$

En remplaçant par leurs valeurs, on obtient

$$\left\|\left(\widetilde{\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3u}{\partial\rho\partial\theta^2}}\right)\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\left\|\left(\widetilde{\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4u}{\partial\rho\partial\theta^3}}\right)\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\left(\widetilde{\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\theta}}\right)\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\right)\tag{2.68}$$

Toutes les dérivées d'ordre trois où intervient θ sont majorées par des dérivées d'ordre plus grand

Concernant les dérivées en ρ deux cas de figures se présentent :

b$_1$) Dérivée d'ordre quatre en ρ

Lemme 28 *Pour u dans $\mathbb{F}$, on a*

$$\left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \varepsilon^2\left\|\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\right) \tag{2.69}$$

Démonstration

Pour celà on considère les trois dérivées et leurs transformée de Mellin

$$\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}, \rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}$$

$$\widetilde{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right)} = (\sigma-1)(\sigma-2)\,\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) = g_2(\sigma,\theta)$$

$$\widetilde{\left(\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right)} = -\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\,\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) = g_3(\sigma,\theta)$$

$$\widetilde{\left(\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right)} = (\sigma+1)\,\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)\,\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) = g_4(\sigma,\theta)$$

$$\left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \int_0^\varphi\int_0^\infty \rho^3\left[\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right]\partial\rho\partial\theta = \int_0^\varphi\left\|\rho\sqrt{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{L^2_{(\mathbb{R})}}\partial\theta$$

or $$\left\|\rho\sqrt{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{L^2_{(\mathbb{R})}} = \|g_3(\sigma,\theta)\|^2_{L^2_{[1+i\mathbb{R}]}}.$$

On considère le produit scalaire associé

$$\left\langle g_4(\sigma,\theta), \overline{g_2(\sigma,\theta)}\right\rangle = \int_{1+i\mathbb{R}} g_4(\sigma,\theta)\,.\overline{g_2(\sigma,\theta)}\partial\sigma$$

$$g_4(\sigma,\theta)\,.\overline{g_2(\sigma,\theta)} = \sigma(\sigma+1)\|\sigma-1\|^2\|\sigma-2\|^2\|\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)\|^2$$

et d'autre part

$$g_3(\sigma,\theta)\,.\overline{g_3(\sigma,\theta)} = \|g_3(\sigma,\theta)\|^2_{L^2_{[1+i\mathbb{R}]}} = \|\sigma\|^2\|\sigma-1\|^2\|\sigma-2\|^2\|\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)\|^2$$

$$\left\| g_4(\sigma,\theta)\,.\overline{g_2(\sigma,\theta)} \right\| = \|\sigma\| \, \|\sigma+1\| \, \|\sigma-1\|^2 \, \|\sigma-2\|^2 \, \|\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)\|^2$$

$$\|g_3(\sigma,\theta)\|^2_{L^2_{[1+i\mathbb{R}]}} = \frac{\left\| g_4(\sigma,\theta)\,.\overline{g_2(\sigma,\theta)} \right\| \|\sigma\|}{\|\sigma+1\|}$$

Comme $$\sup_{\sigma+iy} \left\| \frac{\sigma}{\sigma+1} \right\| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \|g_3(\sigma,\theta)\|^2_{L^2_{[1+i\mathbb{R}]}} \leq \left\| g_4(\sigma,\theta)\,.\overline{g_2(\sigma,\theta)} \right\|$$

$$\|g_3(\sigma,\theta)\|^2_{L^2_{[1+i\mathbb{R}]}} \leq \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 \|g_4(\sigma,\theta)\|^2_{L^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \|g_2(\sigma,\theta)\|^2_{L^2} \right)$$

$\mathbf{b}_2$) Dérivée d'ordre n en ρ

Lemme 29 *Soit $u \in \mathbb{F}$.Alors on a :*

$$\left\| \rho \frac{\partial^n u}{\partial \rho^n} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \geq \left\| \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \rho^{n-1}} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \tag{2.70}$$

Démonstration

En effet, on a $\left\| \rho \frac{\partial^n u}{\partial \rho^n} + \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \rho^{n-1}} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} \geq 0$, d'où

$$\left\| \rho \frac{\partial^n u}{\partial \rho^n} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\| \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \rho^{n-1}} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 2 \int_{\Omega_\varphi} \rho \frac{\partial^n u}{\partial \rho^n} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \rho^{n-1}} d\Omega_\varphi . \geq 0$$

Comme cette derniére intégrale est égale

$$2 \int_{\Omega_\varphi} \rho \frac{\partial^n u}{\partial \rho^n} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \rho^{n-1}} d\Omega_\varphi = -2 \left\| \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \rho^{n-1}} \right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)},$$

(d'aprés thm 23). Finalement

$$\left\|\rho\frac{\partial^n u}{\partial\rho^n}+\frac{\partial^{n-1}u}{\partial\rho^{n-1}}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \left\|\rho\frac{\partial^n u}{\partial\rho^n}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\left\|\frac{\partial^{n-1}u}{\partial\rho^{n-1}}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+2\int_{\Omega_\varphi}\rho\frac{\partial^n u}{\partial\rho^n}\frac{\partial^{n-1}u}{\partial\rho^{n-1}}d\Omega_\varphi\geq 0$$

$$\left\|\rho\frac{\partial^n u}{\partial\rho^n}+\frac{\partial^{n-1}u}{\partial\rho^{n-1}}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \left\|\rho\frac{\partial^n u}{\partial\rho^n}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}-\left\|\frac{\partial^{n-1}u}{\partial\rho^{n-1}}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\geq 0$$

d'où

$$\left\|\rho\frac{\partial^n u}{\partial\rho^n}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\geq\left\|\frac{\partial^{n-1}u}{\partial\rho^{n-1}}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$

Théorème 30 *Pour tout u dans $\mathbb{F}$ alors on a*

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}}\leq\frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+K''\|u\|^2_{\mathbb{H}^2} \tag{2.71}$$

où K" est une constante

Démonstration

On a à établir l'inégalité :

$$\|u\|_{\mathbb{F}}\leq C(\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|_{\mathbb{H}^2}),\forall u\in F.$$

Sachant que la norme de la fonction u dans l'espace de travail

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}}=\left\{\left\|\rho^2\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\left\|\tfrac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\right.$$
$$+\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\left\|\rho\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^3\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^2\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$$
$$\left.+\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}+\|u\|^2_{\mathbb{H}^2}\right\}$$

$\|u\|^2_{\mathbb{F}}=$ toutes les dérivées d'ordre 4 + toutes les dérivées d'ordre 3 + $\|u\|^2_{\mathbb{H}^2}$

En utilisant les résultats précedants, toutes les dérivées d'ordre < à quatre peuvent être majorées

La présence de ε au numérateur diminue la quantité $\left[\varepsilon\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\right]$ et elle augmente la quantité $\frac{1}{4\epsilon}\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$ quand il est au dénominateur.

Dans ces conditions :

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}} = \varepsilon\left[\text{dérivées d'ordre 4}\right] + \frac{1}{4\epsilon}\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}\right\|^2_{L^2(\Omega_\varphi)} + \left[\text{dérivées d'ordre 4}\right] + \|u\|^2_{\mathbb{H}^2}$$

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}} = (1+\varepsilon)\left[\text{dérivées d'ordre 4}\right] + K\|u\|^2_{\mathbb{H}^2} \tag{2.72}$$

D'autre part

$$\|\rho^2\Delta^2 u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} = \left\{\left\|\rho^2\frac{\partial^4}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 6\left\|\frac{\partial^4}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 4\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^3\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \varphi(u)\right\}$$

$\varphi(u)$ =Termes d'ordre inférieur

$$\varphi(u) = \left\{11\left\|\rho\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 5\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 6\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 5\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - 4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\right\}$$

D'où

$$\|\rho^2\Delta^2 u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - \varphi(u) = \left\{\left\|\rho^2\frac{\partial^4}{\partial\rho^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 6\left\|\frac{\partial^4}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 4\left\|\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^3\partial\rho}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\right\}$$

Les termes de droite de l'égalité sont supérieurs aux dérivées d'ordre 4 de $\|u\|^2_{\mathbb{F}}$ .D'où

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}} \leq (1+\varepsilon)\left[\|\rho^2\Delta^2 u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - \varphi(u)\right] + K\|u\|^2_{\mathbb{H}^2} \tag{2.73}$$

$-\varphi(u)$ comporte des termes négatifs$+8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 5\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$ (2.74)

Le terme $8\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}$ rentre dans la norme $\|u\|^2_{\mathbb{H}^2}$

$\|u\|^2_{\mathbb{F}} \leq (1+\varepsilon)\|\rho^2\Delta^2 u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} - (1+\varepsilon)\varphi(u) + K\|u\|^2_{\mathbb{H}^2}$

⊙On majore en enlevant les termes négatifs ; il reste

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}} \leq (1+\varepsilon)\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + (1+\varepsilon)\left[5\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\theta\partial\rho^2}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + 4\left\|\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)}\right] + K'\|u\|^2_{\mathbb{H}^2} \tag{2.75}$$

pour les dérivées d'ordre trois donne deux termes l'un qui augmente la norme de $\|u\|^2_{\mathbb{H}^2}$ l'autre qui diminue légèrement $\|u\|^2_{\mathbb{F}}$ d'où

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}} \leq (1+\varepsilon)\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + \varepsilon'\|u\|^2_{\mathbb{F}} + K''\|u\|^2_{\mathbb{H}^2}$$

$$\Longrightarrow (1-\varepsilon)\|u\|^2_{\mathbb{F}} \leq (1+\varepsilon)\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + K''\|u\|^2_{\mathbb{H}^2}$$

$$\|u\|^2_{\mathbb{F}} \leq \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + K''\|u\|^2_{H^2} \tag{2.76}$$

$$\Longrightarrow \|u\|^2_{\mathbb{F}} \leq C\left\|\rho^2\Delta^2 u\right\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)} + k\|u\|^2_{\mathbb{H}^2} \tag{2.77}$$

Conclusion 31 *Nous avons obtenu l'inégalité à priori pour l'opérateur* $(\rho^2\Delta^2)$ *conséquence* $\mathrm{Im}(\rho^2\Delta^2)$ ***est fermée dans*** $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ ***. Nous aurons à faire la même démonstration pour l'opérateur adjoint.***

Passons à la démonstration de l'unicité de la solution de notre problème.Pour celà nous nous intéressons l'étude du noyau de l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)$

2.5 Etude du noyau de l'opérateur $\rho^2\Delta^2$

Lemme 32 *Le noyau de l'opérateur* $(\rho^2\Delta^2)$ *du problème*

$$\begin{cases} \left(\rho^2\Delta^2\right)u = 0 \\ u\mid_{\Gamma} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)\mid_{\Gamma} = 0 \end{cases} \tag{2.78}$$

est réduit à zéro

Démonstration

De l'étude du laplacien [5], on a $\ker(\Delta) = \{0\}$ d'une part et d'autre part les conditions aux bords $\left(\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right)\mid_{\Gamma} = 0$ et $\left(\frac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)\mid_{\Gamma} = 0$ impliqent que la quantité $S(\rho,\theta) = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^2\Delta^2 u.\dfrac{u}{\rho^2}\rho d\rho d\theta = 0$ Le calcul qui va suivre met en relation (Δ) et (Δ^2) .

$$S(\rho,\theta) = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho^2\Delta^2 u.\frac{u}{\rho^2}\rho d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\Delta u.ud\rho d\theta$$

ce qui donne:

$$S(\rho,\theta) = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Delta u.ud\rho d\theta + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta u.ud\rho d\theta + \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta u.ud\rho d\theta$$

Prenons la premiére intégrale de S

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Delta u.ud\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Delta u.\left(\rho u\right)d\rho d\theta$$

On intègre par partie,par rapport à ρ

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Delta u.ud\rho d\theta = -\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\rho}\Delta u\left(u + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)d\rho d\theta$$

et une deuxième intégration par rapport à ρ nous donne :

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\Delta u.ud\rho d\theta=\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\Delta u\left[2\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right]d\rho d\theta$$

la deuxième intégrale de S (par une intègration par partie par rapport à ρ) donne

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta u.ud\rho d\theta=-\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\Delta u.\frac{\partial u}{\partial\rho}d\rho d\theta$$

la troisième intégrale de S (par une intègration par partie par rapport à θ) donne

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Delta u.ud\rho d\theta\quad=\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\rho}\Delta u.\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

Finalement on a le résultat suivant :

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^2\Delta^2 u.\frac{u}{\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\Delta u\left[2\frac{\partial u}{\partial\rho}+\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]d\rho d\theta$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\Delta^2 u.\frac{u}{\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\Delta u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^2\Delta^2 u.\frac{u}{\rho^2}\rho d\rho d\theta=\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}(\Delta u)^2.\rho d\rho d\theta$$

Si u est dans le noyau de$(\rho^2\Delta^2)$ alors il est dans le noyau de Δ ce qui implique que $u=0$ c'est à dire que $\ker(\rho^2\Delta^2)=\{0\}$

Conclusion 33 ***donc*** $\ker(\rho^2\Delta^2)=\{0\}$***d'où l'Unicité de la solution dans l'espace de travail*** $\mathbb{F}$

Il faut se dire une chose jusqu'à présent nous avons démontré d'une part que $(\rho^2\Delta^2)$ est un opérateur à indice, et d'autre part que notre problème admettait une solution unique.Reste à mettre en place l'expression explicite de l'opérateur adjoint $(\rho^2\Delta^2)^*$ pour pouvoir étudier la régularité de la solution préconisée en associant le noyau de Poisson de notre opérateur.

Chapitre 3

Etude de l'opérateur $\left(\rho^2\Delta^2\right)^*$et conséquences

3.1 Etude de l'espace $\mathbb{F}^*$

Pour la définition de l'espace dual de $\mathbb{F}$, on a besoin de :

Soient les espaces

$$\mathbb{F} = \left\{u/u \in \mathbb{H}_0^2\left(\Omega_\varphi\right) \text{ et } \rho D^3 u, \rho^2 D^4 \in \mathbb{L}^2\left(\Omega_\varphi\right)\right\} \tag{3.1}$$

$$\mathbb{F}_1 = \left\{u/\rho^2 u \in \mathbb{H}_0^4\left(\Omega_\varphi\right)\right\} \tag{3.2}$$

et une fonction u à support compact.

Théorème 34 *Les espaces* $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{F}_1$ *sont identiques*

$$\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}_1 \tag{3.3}$$

Démonstration de $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F} \Leftrightarrow \quad (u \in \mathbb{F}_1 \Rightarrow u \in \mathbb{F})$

$u\in\mathbb{F}_1\Rightarrow\rho^2u\in\mathbb{H}_0^4$ .On pose $\rho u=v\ \Rightarrow\rho v=\rho^2u\in\mathbb{H}_0^4$ et en particulier $\rho v\in\mathbb{H}_0^2$

$$\rho v\in\mathbb{H}_0^2\Rightarrow\begin{cases}\rho v & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\Rightarrow v\in\mathbb{L}^2\Rightarrow\rho u\in\mathbb{L}^2\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho v) & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\\ \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}(\rho v) & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\end{cases}$$

Etape 1 : les dérivées par rapport à ρ

Comme pour le laplacien on fait le même type de calcul :

$$\rho v\in\mathbb{H}_0^2\Rightarrow\begin{cases}v & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}(v) & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\\ \rho\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}(v) & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\end{cases}\tag{3.4}$$

$v=\rho u\in\mathbb{L}^2$ La dérivée par rapport à ρ reste dans $\mathbb{L}^2$ c'est à dire : $\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+u\right)\in\mathbb{L}^2$.On dérive une deuxième fois, par rapport à ρ : $\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+u\right)=\left(2\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\rho\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}\right)$ reste dans $\mathbb{L}^2\Rightarrow u\in\mathbb{H}_0^1$ et toutes les dérivées d'ordre deux multipliées par ρ sont dans $\mathbb{L}^2$

$\rho^2u\in\mathbb{H}_0^4\Rightarrow\dfrac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2u)=\left(2\rho u+\rho^2\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)\in\mathbb{H}^3$ qui peut s'écrire : $\rho\left(2u+\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=\rho w\in\mathbb{H}_0^3\Rightarrow\rho w\in\mathbb{H}_0^2$

on est dans la même situation que le théorème (1)

$$w\in\mathbb{H}_0^2\Rightarrow\begin{cases}w & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho}(w) & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\\ \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}(w) & \in\ \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\end{cases}\tag{3.5}$$

On dérive, la fonction $w=2u+\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}$, par rapport à ρ :

$\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(2u+\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=3\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\rho\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}$. et la dérivée seconde par rapport à ρ donne $\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(2u+\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=4\dfrac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\rho\dfrac{\partial^3u}{\partial\rho^3}$

$w = \left(2u + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) \in \mathbb{L}^2$ comme $u \in \mathbb{L}^2$

$\Rightarrow \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2$

$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\left(2u + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \left(4\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\right) \in \mathbb{L}^2$ comme $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2$

$\Rightarrow \rho\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow \rho\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} \in \mathbb{L}^2$ ainsi que toutes les dérivées d'ordre trois.On peut déjà avoir une conclusion partielle : $u \in \mathbb{H}_0^2$

De nouveau, on considère $\rho^2 u \in \mathbb{H}_0^4$ En dérivant par rapport à ρ :

$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 u) = \left(2\rho u + \rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)$

$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}(\rho^2 u) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(2\rho u + \rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \left(2u + 4\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right) \in \mathbb{H}_0^2$.

Comme $u \in \mathbb{H}_0^2 \Rightarrow \left(4\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right) \in \mathbb{H}_0^2$ .On pose $z = \left(4\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right) \Rightarrow$

$$\rho z \in \mathbb{H}_0^2 \Rightarrow \begin{cases} z \in \mathbb{H}_0^1 \\ \rho\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2 \end{cases}$$

On est bien dans les conditions du théorème.

$z = \left(4\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(4\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right) \in \mathbb{L}^2$ comme $5\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2$ alors nécessairement $\rho\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} \in \mathbb{L}^2$.On dérive une seconde fois $z = \left(4\frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\right)$ par rapport à ρ :

$\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\left(5\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\right) = \left(6\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} + \rho\frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4}\right)$. On sait que $\rho\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow$ $\rho\left(6\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} + \rho\frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4}\right) \in \mathbb{L}^2$

comme $\rho\frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} \in \mathbb{L}^2 \Rightarrow \rho\frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4} \in \mathbb{L}^2$

Etape 2: les autres dérivées mixtes (ρ, θ) ou par rapport à θ

Démonstration de $\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \in \mathbb{L}^2$

On a : $\rho\Delta : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{L}^2 \Rightarrow \left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \in \mathbb{L}^2$

comme$\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) \in \mathbb{L}^2$ donc $\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \in \mathbb{L}^2$

Démonstration de $\frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \theta} \in \mathbb{L}^2$

Pour celà, on utilise les transformées de Mellin de :

$\widetilde{\left(\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right)}(\sigma)=\sigma\left(\sigma-1\right)\widetilde{u}\left(\sigma-1,\theta\right)$.

$\widetilde{\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)}(\sigma)=\widetilde{u}''\left(\sigma-1,\theta\right)$

$\widetilde{\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right)}=-\left(\sigma-1\right)\widetilde{u}\left(\sigma-1,\theta\right)$

Sachant qu'il existe un isomorphisme entre $\mathbb{L}^2\left(\mathbb{R}^+\right)$ et $\mathbb{L}^2\left(\operatorname{Re}\sigma=\frac{1}{2}\right)$

Les séries de Fourier de ces fonctions sont

$$v\left(\sigma-1,\theta\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}}=C$$

$$v'\left(\sigma-1,\theta\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}}=B$$

$$v"\left(\sigma-1,\theta\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}}=A$$

On considére le produit scalaire

$$\langle B,B\rangle=\left\langle\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}},\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{in\pi}{\varphi}\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}}\right\rangle$$

$$\langle B,B\rangle=\left\langle-\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\left(\frac{n\pi}{\varphi}\right)^2\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}},\sum_{-\infty}^{+\infty}\sigma\left(\sigma-1\right)\alpha_n\left(\sigma\right)e^{in\dfrac{\theta\pi}{\varphi}}\right\rangle$$

$$\langle B,B\rangle=-\langle A,C\rangle$$

$$\|B\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\|A\|_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}.\|C\|_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\|A\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\|C\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\right)\tag{3.6}$$

En remplaçant par leurs valeurs, on obtient

$$\left\|\widetilde{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\theta}\right)}\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\left\|\widetilde{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)}\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}+\frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\right)\right\|^2_{L^2_{\theta(\Omega_\varphi)}}\right)\tag{3.7}$$

Toutes les dérivées d'ordre trois où intervient θ sont majorées par des dérivées d'ordre plus grand

L'espace dual de $\mathbb{F}$ est:

$$\mathbb{F}^* = \left\{ v / \frac{v}{\rho^2} \in \mathbb{H}^{-4} \right\} \tag{3.8}$$

3.1.1 Autre méthode

Lors de l'étude du problème [2.8], l'éspace de travail $\mathbb{F}$ étant défini par

$$\mathbb{F} = \left\{ u \in \mathbb{H}^2 / \rho^{\alpha_1 - 2} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} u}{\partial \rho^{\alpha_1} \partial \theta^{\alpha_2}} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) ; \forall \alpha_1, \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \text{ ou } 4 \right\} \tag{3.9}$$

Cet espace être prolongé tenant compte de la condition au bord : $u \mid_\Gamma = 0$

On munit $\mathbb{F}$de la norme du graphe suivante:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{F}}^2 = \Bigg\{ & \|u\|_{\mathbb{H}^2}^2 + \left\| \rho^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ & + \left\| \rho \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ & + \left\| \frac{1}{\rho} \frac{\partial^4 u}{\partial \rho \partial \theta^3} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \rho \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^3 \partial \theta} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^2 \partial \theta} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \Bigg\} \end{aligned}$$

qui en fait un espace de Banach.Les conditions au bord permettent de prolonger l'espace $\mathbb{F}$ en un espace $\mathbb{F}_0$ afin d'appliquer la formule suivante

$$[\mathbb{H}_0^s(\Omega_\varphi)]' = \mathbb{H}^{-s}(\Omega_\varphi)$$

$s > 0$ .Donc l'espace dual de $\mathbb{F}$ est défini par :

$$\mathbb{F}_0 = \begin{array}{l} \left\{ u \in \mathbb{F} \cap \mathbb{H}_0^2 / \rho^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4}, \rho \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^2 \partial \theta^2}, \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right. \\ \left. , \frac{1}{\rho} \frac{\partial^4 u}{\partial \rho \partial \theta^3}, \rho \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^3 \partial \theta}, \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^2 \partial \theta} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \right\} \end{array} \tag{3.10}$$

et avec les conditions aux bords, on a $\mathbb{F}_0 \equiv \mathbb{F}$. D'autre part on a la double inclusion

$$\mathbb{H}^4 \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{H}^2 \Rightarrow \mathbb{H}_0^4 \subset \mathbb{F}_0 \subset \mathbb{H}_0^2$$

et comme le dual de

$$\left[\mathbb{H}_0^2(\Omega_\varphi)\right]' = \mathbb{H}^{-2}(\Omega_\varphi)$$

et celui de

$$\left[\mathbb{H}_0^4(\Omega_\varphi)\right]' = \mathbb{H}^{-4}(\Omega_\varphi) \Rightarrow \mathbb{H}^{-2}(\Omega_\varphi) \subset \mathbb{F}^\star \subset \mathbb{H}^{-4}(\Omega_\varphi)$$

où l'espace $\mathbb{F}^\star$est l'espace dual de $\mathbb{F}_0 \equiv \mathbb{F}$.Il est donné par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^\star \quad = \quad & \left\{ u \in \mathbb{H}^{-2}(\Omega_\varphi) / \rho^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4}, \rho \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} \right. \\ & \left. , \frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^2 \partial \theta^2}, \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \right\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$\mathbb{F}^\star$ est muni de la norme naturelle du graphe:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{F}^*}^2 = & \left\{ \|u\|_{\mathbb{H}^{-2}}^2 + \left\| \rho^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^4} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho \partial \theta^2} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right. \\ & + \left\| \rho \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \\ & \left. + \left\| \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right\|_{\mathbb{L}^2}^2 \right\} \end{aligned}$$

3.2 Formule de Green pour $\rho^2\Delta^2$

La formule de Green joue un rôle important :

elle constitue une véritable relation entre le problème et son adjoint et permet de donner explicitement :

- **L'expression de l'opérateur adjoint**
- **Le problème adjoint.**

Dans ce paragraphe, on sintéresse à établir **la formule de Green adaptée au modèle** (2.8) :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \rho^2 \Delta^2 u = & f \\ u_{|\Gamma} = & 0 \quad f \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \,|_\Gamma = & 0 \end{array} \right. \tag{3.12}$$

où Ω_φ est un secteur plan infini d'ouverture φ et de frontière

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{3.13}$$

$$\Gamma_1 = \{(\rho,\theta)\,;\theta = 0\} \tag{3.14}$$

$$\Gamma_2 = \{(\rho,\theta)\,;\theta = \varphi\} \tag{3.15}$$

Le facteur (ρ) joue un rôle essentiel pour la mise en place de la de formule de Green dont plusieurs termes de son second membre vont s'annuler au voisinage de zéro. **Le choix des fonctions à support compact assure la nullité au voisinage de l'infini .**

Proposition 35 *Soient les fonctions u, v de l'espace $C_0^\infty\left(\overline{\Omega}_\varphi\right)$ .Alors on a le résultat suivant $\forall u, v \in C_0^\infty\left(\overline{\Omega}_\varphi\right)$:*

$$\langle \rho^2\Delta^2 u, v\rangle - \langle u, \left(\rho^2\Delta^2\right)^* v\rangle = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}(v)\,\rho d\rho - \int_\Gamma u\frac{\partial}{\partial \eta} v\rho d\rho = 0 \tag{3.16}$$

$$\langle \rho^2\Delta^2 u, v\rangle = \langle u, \left(\rho^2\Delta^2\right)^* v\rangle = \sum_{i=1}^{8} J_i \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \left(\rho^2\Delta^2\right)^* &= \left\{\rho^2\frac{\partial^4}{\partial\rho^4} + 13\rho\frac{\partial^3}{\partial\rho^3} + 43\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{31}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right. \\ &\left. + \frac{6}{\rho}\frac{\partial^3}{\partial\rho\partial\theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\rho^2\partial\theta^2} + \frac{4}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{8} J_i &= \left\{\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\rho^3 v d\rho d\theta - 4\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\rho^2 v d\rho d\theta + 4\int_0^\infty\int_0^\varphi \rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}.v d\rho d\theta\right. \\ &-4\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} d\rho d\theta + \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v d\rho d\theta + \\ &\left. 2\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} d\rho d + \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{1}{\rho} v d\rho d\theta + \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} v d\rho d\theta\right\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Démonstration

La démonstration s'appuie essentiellement sur la remarque suivante:

Remarque 36 *$\forall u \in C_0^\infty\left(\overline{\Omega}_\varphi\right)$, l'intégrale $\int_0^\infty \int_0^\varphi \rho^j D^i u(\rho,\theta)\, d\rho d\theta$, nous donne, aprés une intégration par parties des intégrales du type:*

Par rapport à ρ :

$$\int_0^\varphi \rho^j D^i u(\rho,\theta) \mid_0^\infty d\theta = 0, \forall j \geq 1 \ \ et\ \forall i \geq 0 \tag{3.20}$$

Par rapport à θ :

$$\int_0^\infty \rho^j D^i u(\rho,\theta) \mid_0^\varphi d\rho = 0, \forall j \in \mathbb{Z} \ \ et\ \forall i \geq 0 \tag{3.21}$$

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition. En fait, la somme des intégrales au bord se résume au calcul des intégrales suivantes.

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_1$

$$\mathbf{J}_1 = \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^4 u.v\rho d\rho d\theta = \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}\rho^3 v d\rho d\theta$$

Aprés plusieurs intégrations par parties par rapport à ρ , on obtient:

$$\mathbf{J}_1 = \underbrace{\int_0^\varphi \frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\rho^3 \mid_0^\infty d\theta}_{=0} - \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}\left[3\rho^2 + \rho^3\frac{\partial v}{\partial\rho}\right] d\rho d\theta$$

$$\mathbf{J}_1 = \left\{\begin{array}{l} \underbrace{-\int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\left[3\rho^2 + \rho^3\frac{\partial v}{\partial\rho}\right] \mid_0^\infty d\theta +}_{=0} \\ \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\left[6\rho v + 3\rho^2\frac{\partial v}{\partial\rho} + 3\rho^2\frac{\partial v}{\partial\rho} + \rho^3\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}\right] d\rho d\theta \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{J}_1 = \left\{ \underbrace{\int_0^{\varphi} \frac{\partial v}{\partial \rho}\left[6\rho v + 3\rho^2\frac{\partial v}{\partial \rho} + 3\rho^2\frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^3\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\right] |_0^{\infty}\, d\theta}_{=0} \right.$$
$$\left. - \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \rho}\left[6v + 18\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} + 9\rho^2\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \rho^3\frac{\partial^3 v}{\partial \rho^3}\right] d\rho d\theta \right\}$$

La dernière intégration par parties, par rapport à ρ termine le calcul de cette première intégrale:

Finalement

$$\mathbf{J}_1 = \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} u\left[24\frac{\partial v}{\partial \rho} + 36\rho\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + 12\rho^2\frac{\partial^3 v}{\partial \rho^3} + \rho^3\frac{\partial^4 v}{\partial \rho^4}\right] d\rho d\theta \tag{3.22}$$

On a également $\mathbf{J}_1 = \int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} u\cdot\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^4\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_2$

$$\mathbf{J}_2 = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^3 u.v\rho d\rho d\theta = 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^3 u}{\partial \rho^3}\rho^2 v d\rho d\theta$$

Plusieurs intégrations par parties par rapport à ρ

$$\mathbf{J}_2 = \underbrace{2\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\rho^2 v\, |_0^{\infty}\, d\theta}_{=0} - 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\left[2\rho v + \rho^2\frac{\partial v}{\partial \rho}\right] d\rho d\theta$$

$$\mathbf{J}_2 = \underbrace{-2\int_0^{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \rho}\left[2\rho v + \rho^2\frac{\partial v}{\partial \rho}\right] |_0^{\infty}\, d\theta}_{=0} + 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \rho}\left[2v + 4\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\right] d\rho d\theta$$

La dernière intégration par rapport à ρ aboutit à :

$$\mathbf{J}_2 = \underbrace{2\int_0^{\varphi} u\left[2v + 4\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^2\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}\right] |_0^{\infty}\, d\theta}_{=0} - 2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} u\left[6\frac{\partial v}{\partial \rho} + 6\rho\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \rho^2\frac{\partial^3 v}{\partial \rho^3}\right] d\rho d\theta$$

Donnent le résultat suivant

$$\mathbf{J}_2 = -2\int_0^{\infty}\int_0^{\varphi} u\left[6\frac{\partial v}{\partial \rho} + 6\rho\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \rho^2\frac{\partial^3 v}{\partial \rho^3}\right] d\rho d\theta \tag{3.23}$$

On peut également $\mathbf{J}_2 = 2\int_0^\infty\int_0^\varphi u\cdot\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_3$

$$\mathbf{J}_3 = -\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 u.v\rho d\rho d\theta = -\int_0^\infty\int_0^\varphi \rho\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}.v d\rho d\theta$$

Une intégration par parties, par rapport à ρ, nous donne :

$$\mathbf{J}_3 = \underbrace{-\int_0^\varphi \frac{\partial v}{\partial\rho}\left[\rho v\right]\Big|_0^\infty d\theta}_{=0} + \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\left[v + \rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right]d\rho d\theta$$

La deuxième intégration par parties, par rapport à ρ, débouche sur le résultat :

$$\mathbf{J}_3 = \underbrace{\int_0^\varphi u\left[v + \rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right]\Big|_0^\infty d\theta}_{=0} - \int_0^\infty\int_0^\varphi u\left[2\frac{\partial v}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}\right]d\rho d\theta$$

Finalement

$$\mathbf{J}_3 = -\int_0^\infty\int_0^\varphi u\left[2\frac{\partial v}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}\right]d\rho d\theta \tag{3.24}$$

On a également $\mathbf{J}_3 = -\int_0^\infty\int_0^\varphi u\cdot\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_4$

$$\mathbf{J}_4 = -2\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}d\rho d\theta = \underbrace{-2\int_0^\varphi u\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\Big|_0^\infty d\theta}_{=0} + 2\int_0^\infty\int_0^\varphi u\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta$$

Finalement

$$\mathbf{J}_4 = 2\int_0^\infty\int_0^\varphi u\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2}d\rho d\theta \tag{3.25}$$

On a également $\mathbf{J}_4 = -2\int_0^\infty\int_0^\varphi u\cdot\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_5$

$$\mathbf{J}_5 = \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{4}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} v d\rho d\theta \tag{3.26}$$

On a également $\mathbf{J}_5 = -2\int_0^\infty \int_0^\varphi u\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_6$

$$\mathbf{J}_6 = 2\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} d\rho d\theta$$

La première intègration par parties, par rapport à ρ :

$$\mathbf{J}_6 = \underbrace{2\int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\rho\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\Big|_0^\infty d\theta}_{=0} - 2\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2}\right] d\rho d\theta$$

La deuxième intégration par parties, par rapport à ρ donne:

$$\mathbf{J}_6 = \underbrace{-2\int_0^\varphi u\left[\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2}\right]\Big|_0^\infty d\theta}_{=0} + 2\int_0^\infty \int_0^\varphi u\left[2\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial^4 v}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right] d\rho d\theta$$

Finalement

$$\mathbf{J}_6 = 2\int_0^\infty \int_0^\varphi u\left[2\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2} + \rho\frac{\partial^4 v}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right] d\rho d\theta \tag{3.27}$$

On a également $\mathbf{J}_6 = 2\int_0^\infty \int_0^\varphi u\cdot\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_7$

$$\mathbf{J}_7 = \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\frac{1}{\rho} v d\rho d\theta$$

Aprés plusieurs intégrations par parties, par rapport à θ, on obtient :

$$\mathbf{J}_7 = \underbrace{\int_0^\infty \frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{1}{\rho}v \mid_0^\varphi d\rho}_{=0} - \int_{\Omega_{X,Y}} \frac{\partial^3 u}{\partial\theta^3}\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\theta}d\rho d\theta$$

$$\mathbf{J}_7 = \underbrace{-\int_0^\infty \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} \mid_0^\varphi d\rho}_{=0} + \int_{\Omega_{X,Y}} \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}d\rho d\theta.$$

Finalement

$$\mathbf{J}_7 = \int_0^\infty\int_0^\varphi u\frac{1}{\rho}\frac{\partial^4 v}{\partial\theta^4}d\rho d\theta \tag{3.28}$$

On a également $\mathbf{J}_7 = \int_0^\infty\int_0^\varphi u\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^4\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

Calcul de l'intégrale $\mathbf{J}_8$

$\mathbf{J}_8 = \int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}v\rho d\rho d\theta = \int_0^\varphi uv \mid_0^\infty d\theta - \int_0^\infty\int_0^\varphi u\frac{\partial v}{\partial\rho}d\rho d\theta = -\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left[\frac{\partial v}{\partial\rho}\right]\rho d\rho d\theta$

Finalement

$$\mathbf{J}_8 = -\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left[\frac{\partial v}{\partial\rho}\right]\rho d\rho d\theta \tag{3.29}$$

On a également $\mathbf{J}_8 = \int_0^\infty\int_0^\varphi u\cdot\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{v}{\rho^2}\right)\rho d\rho d\theta$

La formule de Green est donc

$$\begin{aligned}\langle\rho^2\Delta^2 u, v\rangle - \langle u, (\rho^2\Delta^2)^* v\rangle = \Bigg\{ &\int_0^\infty\int_0^\varphi u\left[\frac{24}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} + 36\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + 12\rho\frac{\partial^3 v}{\partial\rho^3} + \rho^2\frac{\partial^4 v}{\partial\rho^4}\right]\rho d\rho d\theta \\ &+4\int_0^\infty\int_0^\varphi u\left[\frac{6}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} + 6\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial^3 v}{\partial\rho^3}\right]\rho d\rho d\theta + 4\int_0^\infty\int_0^\varphi u\left[\frac{2}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}\right]\rho d\rho d\theta \\ &+4\int_0^\infty\int_0^\varphi u\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2}\right)\rho d\rho d\theta + \int_{\Omega_{X,Y}} u\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}\right)\rho d\rho d\theta \\ &+\int_0^\infty\int_0^\varphi u\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 v}{\partial\theta^4}\right)\rho d\rho d\theta + 2\int_0^\infty\int_0^\varphi u\left[\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 v}{\partial\rho\partial\theta^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial\rho^2\partial\theta^2}\right]\rho d\rho d\theta \Bigg\}\end{aligned}$$

On a également :

$$\langle \rho^2\Delta^2 u, v\rangle - \langle u, (\rho^2\Delta^2)^* v\rangle = \left\{ \int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^4 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta \right.$$

$$+2\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta - \int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta$$

$$-2\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta - 2\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta$$

$$+2\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta$$

$$\left. + \int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^4 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta + \int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta \right\}$$

$$\langle \rho^2\Delta^2 u, v\rangle - \langle u, (\rho^2\Delta^2)^* v\rangle = \left\{ \int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^4 + 2\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3\right] \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta + \right.$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left[-\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 - 2\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\right] \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta$$

$$\left. +\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left[+2\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^4 + \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right] \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta \right\}$$

$$\langle \rho^2\Delta^2 u, v\rangle - \langle u, (\rho^2\Delta^2)^* v\rangle = \left\{ \int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left[\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\right]^2 \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta + \right.$$

$$+\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left[-\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 - 2\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\right] \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta$$

$$\left. +\int_0^\infty \int_0^\varphi u \cdot \left[2\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3 + \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\right] \left(\frac{v}{\rho^2}\right) \rho d\rho d\theta \right\}$$

Proposition 37 *Cette formule est encore valable pour les fonction de l'espace* $\mathbb{F}$ *car* $C_0^\infty\left(\bar{\Omega}_\varphi\right)$*est dense dans* $\mathbb{F}$

Conclusion 38 ***Conclusion 39*** *dans l'espace* $\mathbb{F}$*, le problème initial admet une solution unique*

3.3 Etude du noyau de $(\rho^2\Delta^2)^*$

Lemme 40 *Le noyau de l'opérateur du problème adjoint*

$$\begin{cases} (\rho^2\Delta^2)^* v = 0 \\ v \mid_\Gamma = 0 \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial \eta}\right) \mid_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

est réduit à zéro

Démonstration

Pour simplifier les calculs on pose:

$w = \rho^2 v \Longrightarrow v = \dfrac{w}{\rho^2} \Longrightarrow (\rho^2\Delta^2)^* v = \Delta^2 w$

En effet il est facile de voir que

$\langle(\rho^2\Delta^2)^* v, u\rangle = \langle v, (\rho^2\Delta^2)u\rangle = \left\langle \dfrac{w}{\rho^2}, (\rho^2\Delta^2)u \right\rangle$

$\langle(\rho^2\Delta^2)^* v, u\rangle = \left\langle w, (\rho^2\Delta^2)\frac{u}{\rho^2} \right\rangle = \langle w, \Delta^2 u\rangle = \langle \Delta^2 w, u\rangle$

ce qui donne le résultat.

Du problème adjoint $\left[(\rho^2\Delta^2)^* v = 0, \quad v \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\right]$, on peut écrire

$$\left\langle u, \Delta^2 w \right\rangle = 0 \quad , \quad \forall u \in \mathbb{F} \tag{3.31}$$

donc

$$\langle \Delta u, \Delta w\rangle = 0 \quad , \quad \forall u \in \mathbb{F} \tag{3.32}$$

ce qui implique que:

$$\Delta w \in \ker \Delta^* \qquad \text{sachant que } \Delta \text{ est défini sur } \mathbb{H}_0^2(\Omega_\varphi) \tag{3.33}$$

$\bullet$Si Ω est convexe alors $\ker \Delta^* = \{0\}$ donc $\Delta w = 0$ et alors $v = 0$ (3.34)

$$\bullet \text{Si} \quad \Omega \quad \text{n'est pas convexe ce qui implique} \quad \ker \Delta^* \neq \{0\} \tag{3.35}$$

Soit f une fonction de $\ker \Delta^* \Longrightarrow \Delta w = f$ ce qui implique que w comporte un développement au sommet de la forme:

$$\rho^{\frac{\pi}{\varphi}} \sin \frac{\pi\theta}{\varphi}, \quad \text{si} \quad \varphi > \pi \tag{3.36}$$

ce qui implique que:

$$v = \frac{w}{\rho^2} \qquad \text{n'est pas dans} \quad \mathbb{L}^2 (\Omega_\varphi) \tag{3.37}$$

ce qui implique que:

$$\Delta w = 0 \Longrightarrow v = 0 \Longrightarrow \ker(\rho^2\Delta^2)^* = \{0\} \tag{3.38}$$

3.3.1 Rôle des opérateurs $\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ dans la dualité

Théorème 41 *Soit u une fonction à support compact et $u \in \mathbb{H}^m$ alors on a:*

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{u}{\rho} \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^k \left(\frac{v}{\rho}\right) \rho d\rho d\theta = (-1)^k \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{u}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^k \left(\frac{v}{\rho}\right) \rho d\rho d\theta \tag{3.39}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^n u}{\partial\theta^n} . v\rho d\rho d\theta = \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{\partial^n v}{\partial\theta^n} . u\rho d\rho d\theta \tag{3.40}$$

Démonstration

Le problème de dualité ne se pose pas pour l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ car, on a en effet $\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} \cdot v\rho\partial\rho\partial\theta = -\int_0^\infty \int_0^\varphi u\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} \cdot \rho d\rho d\theta$

Pour l'opérateur $\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)$, on démontre par réccurence que c'est vraie

pour $k = 1 \Rightarrow \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2} \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) u \cdot v\rho d\rho d\theta \overset{?}{=} -\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{u}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right) \left(\frac{v}{\rho}\right) \rho d\rho d\theta$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)u\cdot v\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\cdot v d\rho d\theta=\underbrace{\int_0^\varphi uv\mid_0^\infty d\theta}_{=0}-\int_0^\infty\int_0^\varphi u.\frac{\partial v}{\partial\rho}d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\cdot v\rho d\rho d\theta=-\int_0^\infty\int_0^\varphi u.\frac{\partial v}{\partial\rho}d\rho d\theta=-\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}.\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta$$

Sachant que $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{v}{\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\left(\frac{v}{\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho}(v)$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\cdot v\rho d\rho d\theta=-\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta$$

pour $k=2$ $\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 u\cdot v\rho d\rho d\theta\overset{?}{=}\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^2\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta$

$$\Rightarrow\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 u\cdot v\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)uv\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\cdot v\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)uv d\rho d\theta=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)v\rho d\rho d\theta=-\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2 v\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)v\rho\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)d\rho d\theta$$

On pose $w=v\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\Longrightarrow\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2 v\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)w\rho d\rho d\theta$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)w\rho d\rho d\theta=-\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\frac{w}{\rho}\rho d\rho d\theta$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)v\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\rho d\rho d\theta=-\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)t\rho d\rho d\theta$$

avec $t=u\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)v\Longrightarrow-\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)t\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\frac{v}{\rho}$

une intégration par parties donne $\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)v\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{\partial u}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right.$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)v\rho d\rho d\theta=\underbrace{\int_0^\varphi\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)v\mid_0^\infty\partial\theta}_{=0}-\int_0^\infty\int_0^\varphi\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{v}{\rho}\right)d$$

une deuxième intégration par parties donne

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\cdot v\rho d\rho d\theta=-\underbrace{\int_0^\varphi(u)\rho\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{v}{\rho}\right)\mid_0^\infty\partial\theta}_{=0}+\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right.$$

$$\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2\cdot v\rho d\rho d\theta=\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^2\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta \quad \text{c'est également}$$

vérifié pour $k = 2$

On suppose que la formule est vraie pour $(k-1)$ et on démontre qu'elle rest vraie pour k

$\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-1} u\cdot v\rho d\rho d\theta = (-1)^{k-1}\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^{k-1}\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta$ est vraie

$$\Rightarrow \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k} u\cdot v\rho d\rho d\theta \overset{?}{=} (-1)^{k}\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^{k}\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta,$$

Nous avons:

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k} u\cdot v\rho d\rho d\theta = \int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-1} u\cdot v\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-1} u\cdot v\rho d\rho d\theta = \underbrace{\int_0^\varphi \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-1} uv\,|_0^\infty\, \partial\theta}_{=0} - \int_0^\infty\int_0^\varphi \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-}$$

comme par hypothèse

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-1} u\frac{\partial}{\partial\rho}v\rho d\rho d\theta = (-1)^{k-1}\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta$$

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-1} u\cdot v\rho d\rho d\theta = (-1)(-1)^{k-1}\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^{k-1} u\cdot v\rho d\rho d\theta = (-1)^{k}\int_0^\infty\int_0^\varphi \frac{u}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^{k}\left(\frac{v}{\rho}\right)\rho d\rho d\theta$$

Ce théorème nous permet de donner une expression de l'opérateur adjoint donc

:

Sachant que l'expression de $\rho^2\Delta^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\circ\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]$ qui peut s'ecrire

$$\rho^2\Delta^2 = \left\{\frac{1}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^4 - \frac{4}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^3 + \frac{4}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{4}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{2}{\rho^2}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^4\right\}$$

et cette écriture nous permet d'avoir facilement l'expression de $(\rho^2\Delta^2)^*$

$$(\rho^2\Delta^2)^* v = \left\{\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^4 + 4\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^3 + 4\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\rho}\left[4\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^4\right]\right\}\frac{v}{\rho}$$

3.4 Problème adjoint

Le problème adjoint du problème initial [2.8] est :

$$\begin{cases} (\rho^2\Delta^2)^* v = h, \quad h \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi) \\ v\mid_\Gamma = 0 \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial \eta}\right)\mid_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3.41}$$

Comme pour l'étude du problème "initial" noté (2.8), le but essentiel est de montrer que l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)^*$ est un opérateur à indice $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\,(\rho^2\Delta^2)^*$ est fermée et que $\dim\ker(\rho^2\Delta^2)^*$ est finie.

En appliquant le lemme de Peetre pour les espaces $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)\,, \mathbb{H}^{-2}(\Omega_\varphi)$ et $\mathbb{F}^\star$,l'inégalité à priori se met en place de la même manière que pour le problème direct (intial).

On prolonge les fonctions de $\mathbb{F}(\Omega_\varphi)$ par zéro hors de Ω_φ pour avoir des fonctions de $\mathbb{F}(\mathbb{R}^2)$. Ce prolongement existe et il est continu [12]

donc

$$\langle \Delta u, \Delta w\rangle = 0 \quad , \quad \forall u \in \mathbb{F} \tag{3.42}$$

ce qui implique que:

Proposition 42 *Le noyau de l'opérateur* $(\rho^2\Delta^2)^*$ *dans* $\mathbb{H}^{-s}_{(\Omega_\varphi)}$ $(s \geq 0)$ *dépend de* s *et de l'ouverture* φ *du secteur* Ω_φ.

Démonstration

Chercher le noyau de $(\rho^2\Delta^2)^*$ est equivalent a résoudre le probléme suivant:

$$\begin{cases} (\rho^2\Delta^2)^* v = 0, \text{ dans } \Omega_\varphi \\ v\mid_\Gamma = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\mid_{\theta=0} = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\mid_{\theta=\varphi} = 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

Pour simplifier les calculs, on fait le changement de variable suivant :

$w = \rho^2 v$ ce qui donne

$$(\rho^2\Delta^2)^* v = \Delta^2 w$$

de cette façon, on obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} (\rho^2\Delta^2)^* v = \Delta^2 w = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varphi \\ w\mid_\Gamma = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\mid_{\theta=0} = 0 \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\mid_{\theta=0} = 0 \end{cases} \tag{3.44}$$

On cherche à construire une solution du

$$\begin{cases} \rho^2\Delta^2 u = & 0 \quad \text{dans } \Omega_\varphi \\ u\mid_\Gamma = & f \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\mid_\Gamma = & g \end{cases} \tag{3.45}$$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ On prendra f et g nulles sur Γ_2

En utilisant la transformation de Mellin on obtient le problème associé suivant :

$$\begin{cases} (\sigma-2)^2(\sigma-4)^2\,\widetilde{u} + \left[(\sigma-2)^2 + (\sigma-4)^2\right]\widetilde{u}_\theta'' + \widetilde{u}_\theta^4 = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varphi \\ \widetilde{u}(\sigma,0) = 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \widetilde{u}(\sigma,\varphi) = \quad 1 \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \theta}(\sigma,0) = \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(\sigma,\varphi) = \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{cases} \tag{3.46}$$

La fonction $\widetilde{u}$ ainsi que toutes ses dérivées sont prises au point $(\sigma-4,\theta)$

Equation, pour σ fixé, à coéfficients constants dont les racines à l'évidence sont : $e^{i(\sigma-2)\theta}, e^{-i(\sigma-2)\theta}, e^{i(\sigma-4)\theta}$et $e^{-i(\sigma-4)\theta}$

Le problème

$$\left\{\begin{array}{rl} (\rho^2\Delta^2)u & \rho^2 f \\ u\mid_\Gamma = & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\mid_\Gamma = & 0 \\ \text{dans } \Omega\ , & \rho^2 f \quad \in \mathbb{L}^2(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.47}$$

admet une solution unique dans $E(\Omega_\varphi)$ .La méthode du relèvement permet de se ramener à un problème sur le bord et plus particulièrement on obtient au sommet, si $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$

$$\left\{\begin{array}{l} (\rho^2\Delta^2)u = 0 \\ u(\rho,0) = g_1(\rho) \\ u(\rho,\varphi) = g_2(\rho) \qquad g_1, g_2 \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}_+) \quad \text{et } g_3, g_4 \in \mathbb{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(\rho,0) = \rho g_3(\rho) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \theta}(\rho,\varphi) = \rho g_4(\rho) \end{array}\right. \tag{3.48}$$

Le facteur ρ^2 de l'opérateur décale les pôles du noyau de Poisson de deux unités ce qui correspond à la définition de l'espace $E(\Omega_\varphi)$ .On rappelle que :

$$\widetilde{(\Delta u)} = (\sigma-2)^2\,\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) \tag{3.49}$$

d'où :

$$\widetilde{(\rho^2\Delta^2 u)} = \sigma^2(\sigma-2)^2\,\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) + \left[\sigma^2+(\sigma-2)^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) + \frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) \tag{3.50}$$

$$\left\{\begin{array}{lr} \sigma^2(\sigma-2)^2\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)+\left[\sigma^2+(\sigma-2)^2\right]\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)+\dfrac{\partial^4}{\partial\theta^4}\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) & =0 \\ \widetilde{u}(\sigma,0) \qquad = & \widetilde{g_1}(\sigma) \\ \widetilde{u}(\sigma,\varphi) \qquad = & \widetilde{g_2}(\sigma) \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\widetilde{u}(\sigma,0) \qquad = & \widetilde{g_3}(\sigma) \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta}\widetilde{u}(\sigma,\varphi) \qquad = & \widetilde{g_4}(\sigma) \end{array}\right. \tag{3.51}$$

Sous cette forme, les données aux bords sont toutes définies au point σ.On s'interessera au cas particulier :

$\widetilde{g_2}(\sigma)=\widetilde{g_3}(\sigma)=\widetilde{g_4}(\sigma)=0$ d'où le problème précedent s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{lr} \sigma^2(\sigma-2)^2\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)+\left[\sigma^2+(\sigma-2)^2\right]\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)+\dfrac{\partial^4}{\partial\theta^4}\widetilde{u}(\sigma-2,\theta) & =0 \\ \widetilde{u}(\sigma,0) \qquad = & \widetilde{g_1}(\sigma) \\ \widetilde{u}(\sigma,\varphi)=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\widetilde{u}(\sigma,0)=\dfrac{\partial}{\partial\theta}\widetilde{u}(\sigma,\varphi) & =0 \end{array}\right. \tag{3.52}$$

La solution générale de ce problème est :

$$\widetilde{u}(\sigma-2,\theta)=\sum_{k=1}^{4}A_k\exp(r_k\theta) \tag{3.53}$$

où r_k est la solution de l'équation caractéristique associée à ce problème. Les fonctions $\cos\sigma\theta,\sin\sigma\theta,\cos(\sigma-2)\theta,\sin(\sigma-2)\theta$ sont donc solutions réelles du même problème et on a la solution :

$$\widetilde{u}(\rho,\theta)=\widetilde{N_1}*\widetilde{g_1} \tag{3.54}$$

avec $\widetilde{g_1} \in \mathbb{H}^{\frac{3}{2}}$ La régularité de $\widetilde{u}$ est limitée par les pôles à partie réelle négative de $\widetilde{N_1}$

Le déterminant principal du système s'écrit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & \sigma-2 \\ \cos\sigma\varphi & \sin\sigma\varphi & \cos(\sigma-2)\varphi & \sin(\sigma-2)\varphi \\ -\sigma\sin\sigma\varphi & \sigma\cos\sigma\varphi & -(\sigma-2)\sin(\sigma-2)\varphi & (\sigma-2)\cos(\sigma-2)\varphi \end{vmatrix} \tag{3.55}$$

3.4.1 Etude des zéros de D_σ

$$\sigma(\sigma-2)\sin^2\varphi - \sin\sigma\varphi\sin(\sigma-2)\varphi = 0 \tag{3.56}$$

.Il peut se mettre sous une forme simplifiée:

$$D_\sigma = (\sigma-1)^2\sin^2\varphi - \sin^2(\sigma-1)\varphi \tag{3.57}$$

$$\bullet\sigma = 0, 1, 2 \text{ sontdes zéros de } D_\sigma,\ \forall\varphi \tag{3.58}$$

$$\bullet\text{Pour } \ \varphi = \pi \Rightarrow D_\sigma(\sigma,\pi) = 0 \Leftrightarrow \sigma\in\mathbb{Z} \tag{3.59}$$

pôle double ce qui correspond aux conditions de raccord des traces.

$$\bullet\text{Pour } \varphi = 2\pi \Rightarrow D_\sigma(\sigma,2\pi) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\in\mathbb{Z} \tag{3.60}$$

Aprés transformation

$$D_\sigma = (\sigma-1)^2\sin^2\varphi - \sin^2(\sigma-1)\varphi \tag{3.61}$$

On pose

$$x = \sigma - 1 \Rightarrow \sigma = x + 1 \qquad\qquad x < -1 \tag{3.62}$$

$$D_\sigma = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x\sin\varphi - \sin x\varphi = & 0 \\ \text{ou} & \\ x\sin\varphi + \sin x\varphi = & 0 \end{cases} \tag{3.63}$$

Lemme 43 *Chaque prolongement par continuité de $\widetilde{N_1}$ va donner une condition de raccord*

Démonstration

$u(\rho,\theta) = \int_0^\infty N_1(t,\theta) f\left(\frac{\rho}{t}\right)\frac{dt}{t}$ quand $\rho \to 0$

$$\Rightarrow u(0,\theta) = f(0)\widetilde{N_1}(1,\theta) \tag{3.64}$$

Remarque

$$\lambda_0 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, si D_\sigma(\lambda_0) = 0 \text{ alors } D_\sigma\left(\overline{\lambda_0}\right) = 0 \tag{3.65}$$

ce qui permet de donner une forme réelle aux élements singuliers

En posant $\sigma = a + ib$, il vient :

$$\begin{cases} 4ab - \sin 2a\varphi \operatorname{sh} 2b\varphi = & 0 \\ (a^2+b^2)\sin^2\varphi - \sin^2 a\varphi - \operatorname{sh}^2 b\varphi = & 0 \end{cases} \tag{3.66}$$

Ce système, composé d'équations transcendentes, admet seulement des solution numérique.On peut utiliser l'algoritme de Newton pour les caculer on posera :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \tag{3.67}$$

où

$$f(X) = \operatorname{sh}^2 X\varphi + X^2\sin^2\varphi \tag{3.68}$$

solution du système d'équations précédent.On peut raisonnablement penser que si Ω est convexe

$$u \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{F} \tag{3.69}$$

et que l'on ne peut pas obtenir mieux.Pour connaitre précisément la régularité de u en fonction de l'ouverture des angles il faut connaitre les zéros de D_σ

Il est, d'autre part, intéressant de retrouver l'alternative de Freedohlm mise en place par Grisvard.

En effet, on a :

si $f \in \mathbb{H}^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, le problème [3.1] admet une solution unique u dans $\mathbb{F}(\Omega\varphi)$.A chacun des sommets la fonction u se décompose en une partie régulière et une partie singulière comportant un nombre fini de termes sauf dans le cas particulier précisé dans la remarque.Pour que $u \in \mathbb{H}^{s+4}(\Omega)$, il faut que la fonction f satisfasse à un nombre fini de conditions.L'opérateur Δ^2 est donc un opérateur à indice $\Delta^2 : \mathbb{H}^{s+4}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}^s(\Omega)$ et les inégalités à priori sont des conséqences de ce résultat.

3.4.2 Rôle des pôles positifs du noyau de Poisson

Théorème 44 *Chaque pôle à partie réelle positive permet de construire une fonction du noyau de l'opérateur* $(\rho^2\Delta^2)$ *dans un espace du type* $\mathbb{H}^{-s}$ *avec* $s > 0$

Démonstration

On remarquera que la solution $\rho^2\Delta^2 u = 0$ (avec les données au bord nulles) est une fonction de $C^\infty(\Omega - S)$ où S représente l'ensemble des sommets.Les seules singularités de la solution apparaissent au sommet.

Si λ est un pôle du transformée du noyau de Poisson avec $\operatorname{Re}\lambda > 0$ alors le résidu correspondant est de la forme :

$$\text{Resi} = \rho^{-\lambda} a_\lambda(\theta) \tag{3.70}$$

fonction qui n'appartient pas au noyau dans $\mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$de l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)$ dans le secteur.La trace de cette fonction est C^∞ sur le bord du polygone Ω.Le problème étant variationnel, il éxiste une solution v

$$v \in \mathbb{H}^2(\Omega_\varphi) \quad \text{tel que}: \; v\mid_{\partial\Omega} = \rho^{-\lambda} a_\lambda(\theta) \tag{3.71}$$

alors

$$\left[\rho^{-\lambda} a_\lambda(\theta) - v\right] \in \mathbb{H}^{-s}(\Omega_\varphi) \tag{3.72}$$

et

$$\left[\rho^{-\lambda} a_\lambda(\theta) - v\right] \in \ker\left(\rho^2\Delta^2\right) \tag{3.73}$$

Remarque 45 *Si λ est complexe, la combinaison des fonctions $\rho^{-\lambda}a_\lambda(\theta)$ et $\rho^{-\overline{\lambda}}a_{\overline{\lambda}}(\theta)$ donne deux fonctions réelles du noyau de l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)$*

∘ les zéros entiers vont donner des conditions ponctuelles.Plus précisément, chaque pôle λ non entier de $\widetilde{N_i}$ va donner un élément singulier de la forme $\rho^{-\lambda}k(\theta)\,, \mathrm{Re}\,\lambda < 0$

La régularité de u est limité par le premier zéro λ_0 négatif de $D_\sigma.u \in \mathbb{H}^{1-\mathrm{Re}\,\lambda_0}(\Omega)$ .Chaq zéro non entier va donner une fonction du noyau de $\rho^2\Delta^2$.

Remarque 46 *L'image de l'opérateur n'est pas fermée dans le cas de pôles entiers correspondants à la régularité limite*

Remarque 47 *Ce travail montre que toute résolution numérique faisant appel au bilaplacien doit tenir compte des termes singuliers (éventuels) au voisinage de chacun des sommets éléments finis singuliers, maillage adapté ...Ce qui necéssite en premier la construction de la table des zéros de D_σ*

3.4.3 Autre méthode (dualité)

Soit l'opérateur $(\rho^2\Delta^2)$ dans l'angle Ω_φ .Afin de mettre en évidence les différentes formules de dualité dans Ω_φ, on va donner à cet opérateur une autre écriture.Pour celà, on considère le produit scalaire

$$\left\langle \rho^2\Delta^2 u, v\right\rangle_{dxdy} = \left\langle \rho\Delta\circ\Delta u, \rho^2 v\right\rangle_{\partial\rho\partial\theta} = \left\langle \rho\Delta u, \frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*_{\partial\rho\partial\theta}\rho^3 v\right\rangle \tag{3.74}$$

$$\left\langle \rho\Delta u, \frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*\rho^3 v\right\rangle_{\partial\rho\partial\theta} = \left\langle u, \frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*_{\partial\rho\partial\theta}\circ\frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*_{\partial\rho\partial\theta}\rho^3 v\right\rangle_{dxdy}$$

$$\left\langle \rho^2\Delta^2 u, v\right\rangle_{dxdy} = \left\langle u, \left[\frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*\right]^2_{\partial\rho\partial\theta}\rho^3 v\right\rangle_{dxdy} \tag{3.75}$$

Les solutions doivent vérifier:

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*_{\partial\rho\partial\theta}\rho^3 v = 0 \tag{3.76}$$

et ce sont les fonctions de la forme:

$$\sin\left(\sigma-1\right)\theta, \cos\left(\sigma-1\right)\theta \tag{3.77}$$

On obtient les deux autres solutions élémentaires en résolvant

$$\left[\widetilde{\frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*}\right]\rho^3 v = e^{\pm i(\sigma-1)\theta} \tag{3.78}$$

car

$$\left[\widetilde{\frac{1}{\rho}\left(\rho\Delta\right)^*}\right].e^{\pm i(\sigma-1)\theta} = 0 \tag{3.79}$$

Les solutions sont de la forme :

$$\left(a\sigma+b\right)e^{\pm i(\sigma-1)\theta} \tag{3.80}$$

On retiendra les formes particulières :

$(\sigma-1)\sin(\sigma-1)\theta$ et $(\sigma-1)\cos(\sigma-1)\theta$ qui montre que la régularité est liée aussi aux zéros de D^*_σ

Les autres pôles donnent les termes du développement limité.

On a vu que l'opérateur Δ^2 est un opérateur à indice de : $\mathbb{F}\to\mathbb{L}^2$.Sachant que $(\rho^2\Delta^2)$ est un opérateur à indice en utilisant le noyau de Green et Poisson on obtient un nombre fini de conditions d'où le théorème

Théorème 48 *Si les conditions naturelles de raccordement sont satisfaites.Soit* λ_1 *la partie réelle négative du premier pôle* $\widetilde{N_i}(\sigma,\theta)$ *et si* $u \in \mathbb{L}^2(\Omega_\varphi)$ *alors* $u \in \mathbb{H}^{\inf(4,-\lambda_1+1)}$ $($ $\mathbb{H}^{\inf(4,-\operatorname{Re} x)}$

3.4.4 Développement limité des solutions

Il est maintenant classique d'obtenir un développement limité de la solution du problème en utilisant le noyau de Poisson ainsi que les pôles de la transformée de Mellin du noyau.Ce développement comporte deux parties :

-l'une régulière liée à la régularité du second membre

-l'autre singulière comportant des termes de la forme : $\rho^{-\lambda}a_\lambda(\theta)$ où λ est un pôle non entier du noyau de Poisson .Dans le cas de pôle entier , les espaces qui interviennent ne sont plus fermés [] apparait alors une condition ponctuelle.

Remarque 49 *Si le pôle est complexe,* $\overline{\lambda}$ *est solution de* $D_\sigma = 0$ *ce qui donne une expression réelle au développement limité*

Proposition 50 *Chaque condition de régularité correspond à une fonction du noyau de l'opérateur adjoint (dans les espaces associés correspondants)*

Ce système, composé d'équations transcendentes, admet seulemen
solution du système d'équations précédent.On peut raisonnablement penser que si Ω est convexe $u \in \mathbb{H}^2(\Omega) \cap \mathbb{E}$ et que l'on ne peut pas obtenir mieux.Pour connaitre précisément la régularité de u en fonction de l'ouverture des angles il faut connaitre les zéros de D_σ

Il est, d'autre part, intéressant de retrouver l'alternative de Freedohlm mise en place par Grisvard.

En effet, on a : si $f \in \mathbb{H}^s(\Omega), s \in \mathbb{N}$, le problème [3.1] admet une solution unique u dans $\mathbb{E}(\Omega\varphi)$.A chacun des sommets la fonction u se décompose en une partie régulière et une partie singulière comportant un nombre fini de termes sauf dans le cas particulier précisé dans la remarque.Pour que $u \in \mathbb{H}^{s+4}(\Omega)$, il faut que la fonction f satisfasse à un nombre fini de conditions.L'opérateur Δ^2 est donc un opérateur à indice

$\Delta^2 : \mathbb{H}^{s+4}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{H}^s(\Omega)$ et les inégalités à priori sont des conséqences de ce résultat.

Remarque 51 *L'image de l'opérateur n'est pa fermée dans le cas de pôles entiers crrespondants à la régularité limitée.Si $s \notin \mathbb{N}$, il peut exister des conditions dans des cas particuliers.*

3.4.5 Conclusion générale (tentative pour un opérateur A d'ordre 2n)

Soit A un opérateur elliptique d'ordre $2n$ et Ω un polygône de sommets S_i $(i = 1, m)$

$\mathbb{E} = \{u \in \mathbb{H}^n(\Omega) / \forall i,\ \rho^n \mathbb{H}^{2n} \notin \Omega \cap B(S_i)\}$

ρ distance de M à S_i .On sait que le poids estde la forme ρ^n

3.4.6 Inégalité à priori pour un opérateur A d'ordre $2n$

$\|u\|_{\mathbb{E}}^2 \leq C_1 \|\ \rho^n Au\|_{\mathbb{L}^2}^2 + C_2 \|u\|_{\mathbb{H}^n}^2$

Une partition de l'unité permet de ramener le problème à des modèles de référence :

- Au voisinage des sommets
- Sur un demi-espace
- Sur un domaine ouvert

Seule l'étude au sommet est nouvelle

a) cas d'un opérateur homogène en (ρ, θ) et à coéfficients constants

Vérifions :

$$\left\|\rho^{n-i}\frac{\partial^{2n}u}{\partial\rho^{2n-i}\partial\theta^{i}}\right\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}(\Omega)}\leq K_i\left\|\rho^{n}Au\right\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}(\Omega)} \tag{3.81}$$

En utilisant la transformation de Mellin, il vient :

$$\widetilde{\left\|\rho^{n-i}\frac{\partial^{2n}u}{\partial\rho^{2n-i}\partial\theta^{i}}\right\|}=(\sigma-n)(\sigma-n+1)...(\sigma-n-i-1)\frac{\partial^{i}\widetilde{u}}{\partial\theta^{i}}(\sigma-n,\theta) \tag{3.82}$$

et

$$\widetilde{(\rho^{n}Au)}=\sum_{j=0}a_jP_{2n-j}(\sigma)=\frac{\partial^{i}\widetilde{u}(\sigma-n,\theta)}{\partial\theta^{j}} \tag{3.83}$$

$P_{2n-j}(\sigma)$ polynôme en σ de degré $(2n-j)$ .Il est à noter que les fonctions sont définies dans le même domaine; si de plus on le développe en série de Fourier, on obtient :

$$\widetilde{u}(\sigma-n,\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k(\sigma-n)e^{ik\frac{2\pi\theta}{\varphi}} \tag{3.84}$$

et en passant aux normes :

$$\left\|(\sigma-n)(\sigma-n+1)...(\sigma-n-i-1)\frac{\partial^{i}\widetilde{u}}{\partial\theta^{i}}(\sigma-n,\theta)\right\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}(\theta)}=\left\|Q(\sigma)\right\|^{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|\alpha_k(\sigma-n)\right\|^{2} \tag{3.85}$$

et

$$\left\|\rho^{n}Au\right\|^{2}_{\mathbb{L}^{2}(\theta)}=\sum_{j}\left\|a_j\right\|^{2}\left\|P_{2n-j}(\sigma)\right\|^{2}\times\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\|\alpha_k(\sigma-n)\right\|^{2} \tag{3.86}$$

Si l'on compare les coéfficients des termes en α_k, il vient

$$\frac{\left\|Q(\sigma)\right\|^{2}}{\sum_{j}\left\|a_j\right\|^{2}\left\|P_{2n-j}(\sigma)\right\|^{2}} \tag{3.87}$$

Ces coéfficients sont bornés $\forall\sigma$ tel que $\operatorname{Re}\sigma=\nu$ car le dénominateur ne s'annule pas (ellipticité) et le degré du numérateur est inférieur ou égal au degré du dénominateur puis en intégrant par rapport à ρ on obtient le résultat.Il en est de même si l'ordre de dérivation de u est compris entre $(n+1)$ et $(2n)$

Proposition 52 *Si A est un opérateur elliptique homogène en $\partial x, \partial y$ ou $\partial\rho, \partial\theta$ et si le problème direct admet une solution dans $\mathbb{F}$ elle est unique*

Démonstration

a) A **homogène en** $\partial\rho, \partial\theta$

$$\|u\|_{\mathbb{F}}^2 \leq K\,\|Au\|_{\mathbb{L}^2} \tag{3.88}$$

Si

$$Au = 0 \Rightarrow \|u\|_{\mathbb{F}}^2 = 0 \tag{3.89}$$

b) A **homogène en** $\partial x, \partial y$

Considérons le polynôme en ξ, η correspondant à l'opérateur A obtenu par la transformation de Fourier.En se limitant à l'ordre quatre il vient :

$$P(\xi,\eta) = \eta^4\left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 + a_1\frac{\xi}{\eta} + b_1\right] \times \left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 + a_2\frac{\xi}{\eta} + b_2\right] \tag{3.90}$$

chaque polynôme de degré 2 n'a pas de racine réelle.En écrivant $P(\xi,\eta)$ sous forme canonique, il vient :

$$P(\xi,\eta) = (\xi+\alpha_1\eta)^2 \times (\xi+\alpha_2\eta)^2 + \beta_1(\xi+\alpha_1\eta)^2\eta^2 + \beta_2(\xi+\alpha_2\eta)^2\eta^2 + \nu\eta^4 \tag{3.91}$$

$\beta_1, \beta_2, \nu \geq 0$

Cette décomposition n'est pas unique, il suffit de permuter le rôle de ξ et η.

Cas des racines multiples (bilaplacien)

$$P(\xi,\eta) = \left(\xi^2+\eta^2\right)^2 \tag{3.92}$$

Si l'on s'interesse au noyau de A dans $\mathbb{F}$

$u\mid_\Gamma = 0;\quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\mid_\Gamma = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial y}\mid_\Gamma = 0$

Cette décomposition se traduit par

$$\langle Au, u\rangle = \left\{\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial y}\right)u\right]^2 + \beta_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 \right.$$
$$\left. +\beta_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right\}$$

Aprés intégration par parties on a donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u(x,y) = R_1(x)\,y + R_2(x) \tag{3.93}$$

de plus $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ donc $u(x,y)$ est un polynôme de la forme :

$$axy + bx + cy + d \tag{3.94}$$

et les conditions initiales entraînent $u \equiv 0$

Pus généralement si A est d'ordre $2n$ alors u est un polynôme de degré $(n-1)$ et finalement $u \equiv 0$

3.4.7 Formule de Green pour l'adjoint $\left(\mathbf{A}^{2n}\right)^*$

Soit

$$A = \sum \frac{a_{ij}}{\rho^j}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial\rho^i\partial\theta^j} \qquad i+j \leq 2n \tag{3.95}$$

$$\rho^n A = \sum_{ij} a_{ij}\rho^{n-j}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial\rho^i\partial\theta^j} \tag{3.96}$$

$$(\rho^n A)^* = \frac{1}{\rho}\sum_{ij}(-1)^{i+j}\frac{\partial^{i+j}}{\partial\rho^i\partial\theta^j}\left[\rho^{n+1-j}a_{ij}(\rho,\theta)\,v\right] \tag{3.97}$$

$$\int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\rho^n\frac{\partial^{2n}}{\partial\rho^{2n}}u.v\rho d\rho d\theta = \int_0^{\varphi}\frac{\partial^{2n-1}u}{\partial\rho^{2n-1}}\rho^{n+1}v\mid_0^\infty d\theta - \int_0^{\varphi}\int_0^{\infty}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial\rho^{2n-1}}u.\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n+1}v\right)d\rho d\theta \tag{3.98}$$

la première intégrale est nulle car u et v sont à support compact et de plus elle comporte un terme contenant le facteur ρ.D'où

$$\int\int_{\Omega_\varphi} \rho^n \frac{\partial^{2n}}{\partial \rho^{2n}} u.v\rho d\rho d\theta = (-1)^n \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{\partial^n u}{\partial \rho^n} \cdot \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \left(\rho^{n+1} v\right) d\rho d\theta \tag{3.99}$$

Si l'on veut poursuivre ces intégrations par parties $\forall u, \forall v$, il apparaît alors des termes à l'origne.Pour les éliminer nous aurions du utiliser le poids ρ^{2n-1}.Or $u \in \mathbb{E} \subset \mathbb{H}_0^n$, on peut alors poursuivre ce mode de calcul et :

$$\int\int_{\Omega_\varphi} \rho^n \frac{\partial^{2n}}{\partial \rho^{2n}} u.v\rho d\rho d\theta = \int\int_{\Omega_\varphi} u \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial^{2n}}{\partial \rho^{2n}} \rho^{2n+1} v d\rho d\theta$$

Pour que ces intégrales aient un sens il faut :

$$i) \frac{1}{\rho^{k+1}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^k \rho^{n+1} v \in \mathbb{L}^2 \qquad k \leq n \tag{3.100}$$

et

$$ii) \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{n+k} \rho^{n+1} v \in \mathbb{L}^2 \qquad k \leq n \tag{3.101}$$

Démonstration

Pour ii) il suffit que

$$\rho^{n-k} \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^{n+k} \rho^{n+1} v\right] \in \mathbb{L}^2 \quad \text{si} \quad i \leq n \tag{3.102}$$

car

$$u \in \mathbb{H}_0^n \Rightarrow \frac{1}{\rho^{n-i}} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\right)^i u \in \mathbb{L}^2 \quad \text{si } \ i \leq n \tag{3.103}$$

Considérons maintenant

$$\int\int_{\Omega_\varphi} \rho^n \frac{1}{\rho^{2n}} \frac{\partial^{2n}}{\partial \theta^{2n}} u.v\rho d\rho d\theta = \left\{ \int_0^\varphi \frac{1}{\rho^n} \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial \theta^{2n-1}} \cdot v \,|_0^\infty \, d\theta \right.$$
$$\left. - \int_0^\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\rho^{n-1}} \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial \theta^{2n-1}} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} d\rho d\theta \right\}$$

Bibliographie

[1] R. Adams "*Sobolev spaces*", Acad Press (1975).

[2] N. Bourbaki "*Espaces vectoriels topologiques*" (2 vol.), Hermann (1967).

[3] H. Bresis "*Analyse fonctionnelle, théorie et application*", Masson (1983).

[4] M.Dauge: "Problème de Dirichlet sur un polyédre de $\mathbb{R}^3$ pour un opérateur fortement elliptique" Séminaire d'équations aux dérivées partielles (1982/1983) Nantes

[5] M.Djebarni, M.Karrad et M.Reghioua "Etude de la régularité de la solution du laplacien dans des espaces avec poids"Sciences et Technologie n°11pp 21-25 (juin1999)Université Mentouri Constantine

[6] C. Goudjo "*Problémes aux limites dans les espaces de Sobolev avec poids*" (Thèse de spécialité, Nice 1970).

[7] C.Goulaouic "*Calcul différentiel et Analyse fonctionnelle*", Cours de l'école Polytechnique (1980).

[8] P.Grisvard : Alternative de Fredholm relative au probléme de Dirichlet dans un polygone ou un pôlyèdre BolletinoUMI 5(1972)pp.132-164

[9] V.A.Kondratiev : Problèmes aux limites pour les équations elliptiques dans un domaine avec point conique ou anguleux.Trudy Moskov Mat.Obsc 16 (1957) pp.209-292

[10] Journées "*équations aux dérivées partielles*" du 02juin au 06juin1997-groupement de recherches C.N.R.S n°1151 Saint jean de Monts-Paris

[11] J.L. Lions "*Problémes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*", Dunod (1968).

[12] J.L. Lions et E. Magenes "*Problémes aux limites non homogénes*"(3 vol.), Dunod (1968).

[13] M. Merigot "*Solutions en normes L^P des problémes elliptiques dans des polygones plans*" (These de doctorat d'etat, Nice 1974).

[14] M.Merigot : Régularité des dérivées de la solution du problème de Dirichlet dans un secteur plan C.R.A.S. 273 (1971) pp. 356-359

[15] N.Dunford and J.T.Schwartz "*Linear Operators part1: General Theory*" Interscience Publishers,inc.,New York (1967)

[16] M.Reghioua et M.Karrad " *Some elements on the Laplacian and bilaplacian in co-ordinates polar*"Far East J.Math-Sci (FJMS) Volume 21 N° 1 (2006) pp.41-60

[17] M.Reghioua et M.Karrad " *Regularity of the solution of the bilaplacian in an infinite sector*"Far East J.Math-Sci (FJMS)(accepté le 13/02/2006) (à paraitre)

[18] M.Reghioua et M.Karrad et M.Mérigot" *Application of the core of Green to resolution the Laplacian in a sector*"Far East J.Math-Sci (FJMS)(accepté le 13/02/2006) Volume 21 N° 1 (2006) pp.95-107

[19] P.A. Raviart, J.M.Thomas "*Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*", Masson 1983.

[20] P.A.Raviart, J.M.Thomas "*Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*", $3^{éme}$ tirage 1992.224pages

[21] L. Schwartz "*Théorie des distributions* ", Hermann (Nouvelle edition1973).

[22] Séminaires d' *équations aux dérivées partielles-Centre de mathématiques-Ecole polythechnique U.M.R 7640 du CNRS .Paris (1997-98)-(1998-99)*

[23] G. Stampacchia "*Equations elliptiques du second ordre à coéfficients discontinus*", Presses Univ. Montreal (1966).

[24] M.S.Said et B.Merouani "*Etude du problème adjoint du problème de Dirichlet pour l'équation de laplace perturbée dans un polygone plan",* Rev-roum, Sci.Tech-Mec-Apll, Tome 47, n° 1-6, pp.57-72, Bucarest 2002

[25] M.S.Said et B.Merouani "*Rôle des poids dans l'étude de quelques problèmes aux limites gouvernés par le système de Lamé dans un polygone",* Rev-roum, Sci.Tech-Mec-Apll, Bucarest (à paraitre)

[26] M.S.Said "*Role of the weights in study of the biharmonic and the Stokes problems disturbed in a polygon",* Far East J.Math-Sci (FJMS) 16(1) (2005) pp.121-136

[27] R.Temam "*Navier-Stockes equations*" North Holland ($2^{éme}$ édition, 1979)

[28] E.C. Titchmarsh "*Introduction to the theory of Fourier integrals* " Oxford (1937).

[29] K.Yosida "*Fonctional analysis*", Springer (1965).