REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

Faculté des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

N° d'ordre : ………………
N° de série : ………………

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER en MATHEMATIQUE

Option : Topologie algébrique et systèmes dynamiques

Thème

Invariants topologiques pour une classe de morphismes

Présenté par

SEGHIRI SARAH

Devant le jury :

Mr Rahmani F.L	*Président*	*Maitre de conférences*	*U.M Constantine*
Mr Benkafadar N.M	*Rapporteur*	*Professeur*	*U.M Constantine*
Melle Boughaba S	*Examinateur*	*Maitre de conférences*	*U.M Constantine*
Mr Bouzit M	*Examinateur*	*Maitre de conférences*	*U.Oum El Bouagui*

Après décision du CSD/CSF **Soutenu le :** 11/03/2010

REMERCIEMENT

Avant tout, mes vifs remerciements ; je les exprime à Dieux tout puissant.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le professeur : Benkafadar M.N. pour m'avoir dirigé et orienté, pour l'aide compétente qui ma apportée, pour son soutien qui m'ont permis d'achever ce travail

Je présente mes plus sincères remerciement à monsieur le Maître de conférences : Rahmani F.L. qui ma honoré en acceptant de présider le jury de soutenance.

J'exprime une profonde gratitude à Monsieur Bouzit M. et Mademoiselle Boughaba S. Maître de conférences pour leurs participations au jury.

A tous mes proches et mes amies.

En fin je remercie tout particulièrement mes parents pour leurs soutien, et dont la patience et l'encouragement m'ont été très précieux durant mes années d'études, mon marie Amer qui ma encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

DEDICACE

Je dédie mon mémoire à tous ceux qui m'ont soutenue dans la réalisation de mon travail

En particulier à :

Mes parents Mehmoud et Amina,

Mon marie amer,

Mes sœurs : Nedjoua, Rahil, Amira, Batoul,

Mon frère : Zakaria,

Mes copines Amina Esma Houda Ibtissem khadidja mimi et tous ceux qui fait de la recherche,

Mes oncles, mes tantes et mes cousins sans exception,

Mes collègues au technicome Mostafa Kateb.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

En mathématique, à chaque fois qu'on définit une classe d'objets mathématiques on définit également la classe de morphismes ou de relations entres les objets. A titre d'exemples les groupes ont pour morphismes associés les homomorphismes de groupes, les espaces topologiques sont associés aux morphismes qui sont les applications continues. En formalisant cette constatation on aboutit à l'idée de catégorie. Celle ci peut être conçue comme un domaine mathématique. La notion de catégorie été définie dans les travaux de Steenrod et Eilenberg [1], dans la moitié du 20ème siècle.

Le premier chapitre est consacré à la catégorie notée hTop qui joue un rôle très important afin de construire des invariants topologiques. A cet effet, nous sommes conduit à définir la notion d'homotopie introduite dans les travaux de Poincaré ce qui permet de définir la catégorie hTop:

Au second chapitre, pour des classes de morphismes de la catégorie Top des espaces topologiques et des applications continues on exhibe différents invariants topologiques pour les morphismes suivants:

f $\in MOR_{Top}(\mathcal{S}^n, \mathcal{R}^{n+1} \setminus\{\theta\})$

f $\in MOR_{Top}(\mathcal{R}^{n+1} \setminus\{\theta\}), \mathcal{R}^{n+1} \setminus\{\theta\})$

f $\in MOR_{Top}(\mathcal{R}^{n+1} \setminus\{\theta\}), \mathcal{S}^n)$

Enfin on définit un rotationnel pour une paire de morphismes (f,g) où f; g $MOR_{Top}(\mathcal{S}^n, \mathcal{R}^{n+1} \setminus\{\theta\})$

Ces invariants topologiques sont appliqués à la théorie des théorèmes d'existence.

Chapitre1

Notions sur la théorie d’homotopie

1.1 Catégorie *hTop*

Définition 1 *Une catégorie C est définie par la donnée des éléments suivants:*

1. une classe d'objets notés *Obj(C)*,

2. une classe de morphismes notée *HomC*,

3. si X et Y sont deux objets de C il existe une famille de morphismes noté $Hom(X, Y)$ constitué de flèches $f : X \longrightarrow Y$,

4. Il existe une loi de composition "o " $: Hom_c(X, Y) \times Hom_c(Y, Z)$ $\longrightarrow Hom_c(X, Z)$ définie pour X, Y et Z objets de C et qui fait correspondre à un couple de morphismes $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ le morphisme $g \circ f : X \longrightarrow Z$ de plus cette loi doit vérifier les propriétés suivantes:

4. a- tout objet X de C admet un morphisme identité noté $Id_x : X \longrightarrow X$ tel que pour tout objet y de C on ait $f \circ Id_x = f$ et $Id_x \circ g = g$ pour tout $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$.
4. b- si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ et $h : Z \longrightarrow T$ sont trois morphismes de C alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : X \longrightarrow T$.

Proposition 2 Le *morphisme identité associé à chaque objet d'une catégorie C est unique.*

Preuve:

En effet si on suppose qu'il existe un autre morphisme identité de X qu'on notera id_X alors on a $Id_x \circ id_x = Id_x = id_x$.

Définition 3 *Deux objets X et Y d'une catégorie C sont équivalent s'ils existent $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ tel que $f \circ g = Id_Y : Y \longrightarrow Y$ et $g \circ f = Id_X : X \longrightarrow X$. Dans ce cas f et g sont appelés des morphismes équivalents.*

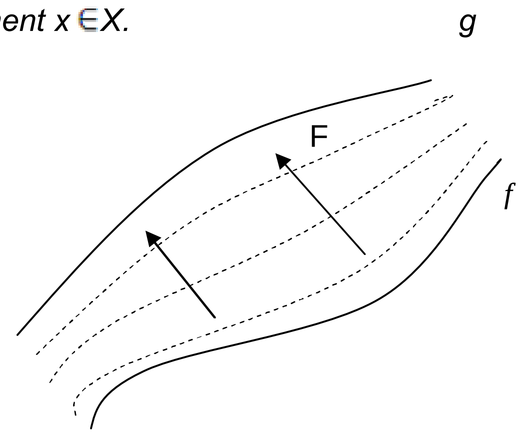
Nous allons définir la catégorie *hTop* des espaces topologiques où les morphismes sont des classes d'homotopie.

Ainsi *Obj(hTop)* sont les espaces topologiques. Afin de définir les morphismes de *hTop* nous allons définir la notion d'homotopie dans l'ensemble des morphismes de la catégorie *Top* des espaces topologiques et des applications continues.

Définition 4 *Deux morphismes f et g de l'ensemble des morphismes $Hom_{Top}(X, Y)$ sont homotypes s'il existe un morphisme $F \in Hom_{Top}(X x [0,1], Y)$ tel que:*

$$\begin{cases} F(x, 0) = f(x); \\ \quad\quad et \\ F(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

Pour tout élément $x \in X$.



Proposition 5 *La relation d'homotopie ci dessus définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des morphismes HomTop(X, Y).*

Preuve:

En effet si f est une application continue de X dans Y, l'application continue $F \in Hom_{Top}(X\ x\ [0,1], Y)$ donnée par $F(x, t) = f(x)$ pour tout $(x, t) \in X\, x\, [0,1]$ prouve que f est homotope à lui même.

D'autre part si f et g sont deux morphismes de HomTop(X,Y) homotopes et si F ∈ HomTop(X x [0,1], Y) réalise l'homotopie c'est à dire F(x,0) = f(x) et $F(x, 1) = g(x)$ pour tout élément $x \in X$ alors $G : X\, x\, [0,1] \longrightarrow Y$ où $G(x, t) = F(x, 1-t)$ pour tout élément $x \in X$ est continue et $G(x,0) = F(x, 1) = g(x)$ alors que $G(x, 1) = f(x)$ ce qui prouve que g est homotope à f.

Enfin si F ∈ HomTop (X x [0,1], y) et G ∈ HomTop (X x [0,1],Y) sont des homotopies qui lient f à g et g à h respectivement alors $H : X\, x\, [0,1] \longrightarrow Y$ donnée par:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$$

$G(x, 2t\text{-}1)$ si $1/2 \leq t$
≤ 1

est évidement continue et $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ et $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$. Ce qui confirme que les deux morphismes *f et h* de la catégorie *Top* sont deux morphismes homotopes.

Définition 6 *L'ensemble $Hom_{Top}(X, Y)$ quotionné par la relation d'homotopie définie un ensemble quotient noté $[X, Y]$.*

Ainsi à chaque classe de morphismes $Hom_{Top}(X,Y)$ on peut associer le quotient

$$[X, Y] = \{[f] \mid f \in Hom_{Top}(X, Y)\}.$$

Les morphismes de hTop sont alors les éléments des quotients [X, Y] où X et Y sont deux espaces topologiques.

Autrement dit $Hom_{hTop}(X,Y) = Mor_{hTop}(X,Y) = [X,Y]$.

Afin d'élaborer hTop il faut définir une loi de composition des morphismes.

Définition 7 Si $[f] \in [X, Y]$ et $[g] \in [Y, Z]$ sont deux classes quotients alors leurs composée $[g] \circ [f]$ est $[g \circ f] \in [X, Z]$.

Proposition 8 *La composition est une relation indépendante des représentants des classes d'homotopies.*

Preuve:

Soient $f' \in [f]$ et $g' \in [g]$ et supposons que F et G sont des

homotopies qui lient f *à* f' *et* g *à* g' respectivement.

Alors $H : X \times [0,1] \longrightarrow Z$ donné par:

$H(x, t) = G(F(x, t), t)$, pour tout (x, t) G $X \times [0,1]$

est un morphisme de *Top* de plus:

$$\begin{cases} H(x, 0) = G(F(x, 0),\ 0) = g(F(x, 0)) = g \circ f(x); \\ \qquad\qquad\qquad\qquad et \\ H(x, 1) = G(F(x, 1), 1) = g'(F(x, 1)) = g' \circ f'(x). \end{cases}$$

Ce qui justifie l'égalité $[g \circ f] = [g' \circ f']$.

Proposition 9 *La composition ci dessus définie est associative de plus si X est un espace topologique $[Id_X] \in [X, X]$ est un élément identité.*

Preuve:

Soient $[f] \in [X, Y]$, $[g] \in [Y, Z]$ *et* $[h] \in [Z, T]$ trois classes

d'homotopie alors $([h] \circ [g]) \circ [f] = [h \circ g] \circ [f] =$

$[(h \circ g) \circ f] = [h \circ (g \circ f)] = [h] \circ [g \circ f] = [h] \circ ([g] \circ [f])$.

D'autre part $[f] \circ [Id_x] = [f \circ Id_x] = [f]$ et $[Id_x] \circ [q] =$

$[Id_x \circ q] = [q]$ pout tout $[q] \in [Y, X]$.

Définition 10 *On note par hTop la catégorie des espaces topologiques et des morphismes les classes d'homotopie des applications continues où la composition est donnée par* $[g] \circ$

$[f] = [g \circ f]$ *pour tout* $[f] \in [X, Y]$ *et* $[g] \in [Y, Z]$.

Proposition 11 *Deux espaces topologiques* X *et* Y *sont équivalents dans la catégorie hTop si et seulement s'ils sont homotopiquement équivalent.*

Preuve:

En effet, Si X et Y sont équivalents ceci est équivalent à

dire qu'ils existent $[f] \in [X, Y]$ et $[g] \in [Y, X]$ tel que $[f] \circ [g] =$

$[Id_Y]$ et $[g] \circ [f] = [Idx]$ qui est équivalent au fait que $f \circ g$ *et* Id_Y ainsi que $g \circ f$ *et* Id_x sont homotopes.

Proposition 12 *La sphère unité* $S^n \subset R^{n+1}$ *et* $R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *sont* *deux objets équivalents dans la catégorie hTop.*

Preuve:

En effet, considérons:

$$i : S'' \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{ \theta \}$$

L'injection canonique et

$$r : R^{n+1} \setminus \{ \theta \} \longrightarrow S^n$$

La projection radiale donnée par:

$\mathbf{r\ (x)} = \frac{x}{\|x\|}$ pour tout élément $x \in \mathrm{R}^{n+1} \setminus \{\theta\}$.

Alors r o $i : S^n \longrightarrow S^n$ est le morphisme identité $Id_{S^n} : S^n \longrightarrow S^n$ ainsi [roi] = $[Id_{S^n}]$ d'autre part i o r : $\mathrm{R}^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow \mathrm{R}^{n+1} \setminus \{\theta\}$ vérifie [i o r] = $Id_{R^{n+1} \setminus \{\theta\}}]$ où l'homotopie qui lie les morphismes *ior* et $Id_{R^{n+1}}$ peut être donnée par le morphisme F : _$\mathrm{R}^{n+1} \setminus \{\theta\}$ X [0,1] $\longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ avec:

$$F(x , t)= (1-t).x + t . \frac{x}{\|x\|}$$

pour tout élément $x \in \mathrm{R}^{n+1} \setminus \{\theta\}$ et t $\in$ [0,1].

Nous allons énoncer un théorème qui fait un lien entre la théorie de l'homotopie et l'existence de prolongée d'applications continues.

Proposition 13 *Une application continue $\tilde{f} : S^n \longrightarrow Y$ où Y est un objet de la catégorie Top admet une prolongée continue $f : \bar{B}^{n+1} \longrightarrow Y$ si et seulement si $\tilde{f}$ est homotope à une application constante.*

Preuve:

Supposons que $\tilde{f}$ soit homotope à une application constante $C : S^n \longrightarrow Y$ avec $C(x) = k \in Y$. Considérons alors une homotopie

$$F : S^n \times [0,1] \longrightarrow Y$$

Qui lie f et C, nous pouvons alors prolongée continuement $\tilde{f}$ de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} k, & 0 \leq \|x\| \leq 1/2 \\ F\left(\frac{x}{\|x\|}, 2-2\|x\|\right) & 1/2 \leq \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Inversement supposons que $f : \bar{B}^{n+1} \longrightarrow Y$ soit une prolongée continue de l'application continue $\tilde{f}$ **:** $S^n \longrightarrow$ **y.** Considérons alors un point $k \in S^n$ et définissons:

$$F : S^n \times [o, 1] \longrightarrow Y$$

Donnée par:

$$F(x, t) = f((1 - t) . x + t . k))$$

pour tout (x,t) $\in S^n$ X [0,1]. Celle ci réalise une homotopie entre *f*

et une application constante.

1.2 Groupes de Poincaré

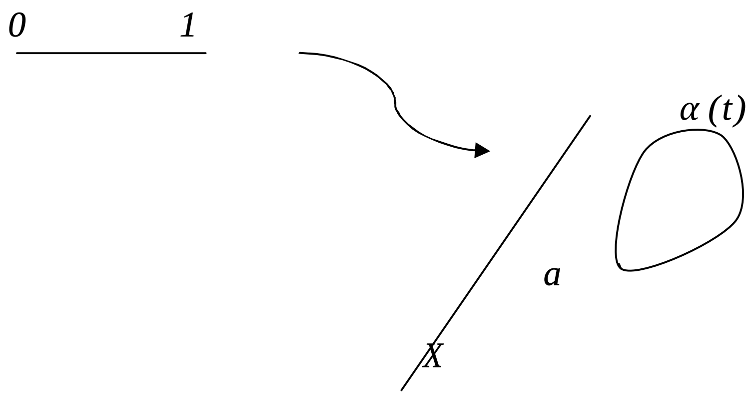
1.2.1 Homotopie des lacets

Nous allons mettre en exergue l'homotopie des lacets qui conduit à la notion de groupes.

Définition 14 *Un espace topologique pointé est un couple de*

type (X, a) où X est un espace topologique et $a \in X$.

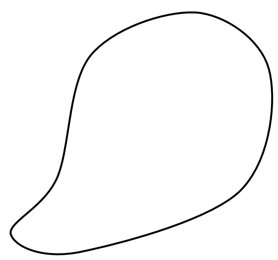
Définition 15 *Un lacet de base a défini dans un espace topologique X est une application continue $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = a$. L'ensemble des lacets de base a de X est noté $L_a(X)$.*

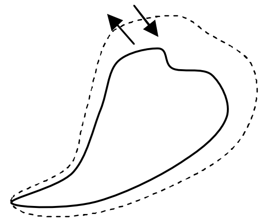


Définition 16 *Deux lacets α et β de $L_a(X)$ sont homotopes si*

$[\alpha] = [\beta] \in [I, X]$ et si F est une homotopie qui lie α et β forcément

$F(0, t) = F(1,t)$ pour tout $t \in I = [0,1]$.





Proposition 17 *La relation d'homotopie sur les lacets est une relation d'équivalence.*

Preuve:

Réflexivité:

Tout lacet $\gamma_0 \in C_a(X)$ est en relation avec lui-même. En effet

il suffit de considérer l'application F :$[0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$

donnée par: $F(t, x) = \gamma_0(t)$; pour tout couple $(t, x) \in [0,1] \times [0,1]$.

Symétrie:

Soient γ_0, γ_1 deux éléments de $L_a(X)$ et supposons qu'ils sont homotopes. Il existe alors une homotopie $F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ tel que:

$$\begin{cases} F(t, 0) = \gamma_0 (t) \\ F(t, 1) = \gamma_1 (t) \\ F(0, \tau) = F(1, \tau) = a. \end{cases}$$

L'application $G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ donnée par $G(t, \tau) = F(t, 1- \tau)$ est continue et vérifie $G(t, 0) = F(t, 1) = \gamma_1 (t)$; $G(t, 1) = F(t, 0) = \gamma_0 (t)$et $G(0, \tau) = G(1, \tau) = a$ par conséquent le lacet $\gamma_1$est homotope au lacet γ_0 dés que γ_0 est homotope à γ_1.

Transitivité:

Considérons γ_0, γ_1; γ_2 trois éléments de $L_a(X)$ et supposons que γ_0 et $\gamma_1$ainsi que γ_1 et γ_2 soient des lacets homotopes deux

$\longrightarrow$

à deux. Ils existent donc deux applications F et G : [0,1] X [0,1] X telles que:

$$\begin{cases} F(t,0) = \gamma_0\,(t); \\ F(t,1) = \gamma_1\,(t); \\ F(0,\tau) = F(1,\tau) = a \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} G(t,0) = \gamma_1\,(t); \\ G(t,1) = \gamma_2(t)\,; \\ G(0,\tau) = G(1,\tau) = a \end{cases}$$

Considérons alors l'application continue: H :
[0,1] X [0,1] $\longrightarrow X$ définie par:

$$H(t,\tau) = \begin{cases} F(t,2\tau) & 0 \leq \tau \leq 1/2 \\ G(t,2\tau-1) & 1/2 \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

Celle ci est continue et prouve que les lacets γ_0 et γ_2 sont homotopes.

Ainsi la relation d'homotopie des lacets sur $L_a(X)$ définit des classes d'équivalence. Le quotient de $L_a(X)$ par l'homotopie qui conserve le point de base a est noté $[I, X]_a$.

1.2.2 Opération de recollement

Dans l'ensemble $L_a(X)$ des lacets de X de base a, on peut définir une loi de composition interne appelée recollement des lacets celle ci est définie de la manière suivante:

si (γ_0, γ_1) G $L_a^2(X)$ on lui associe le lacet γ définit par:

$$\begin{cases} \gamma_0\,(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ & \end{cases}$$

$\gamma\,(t)=$

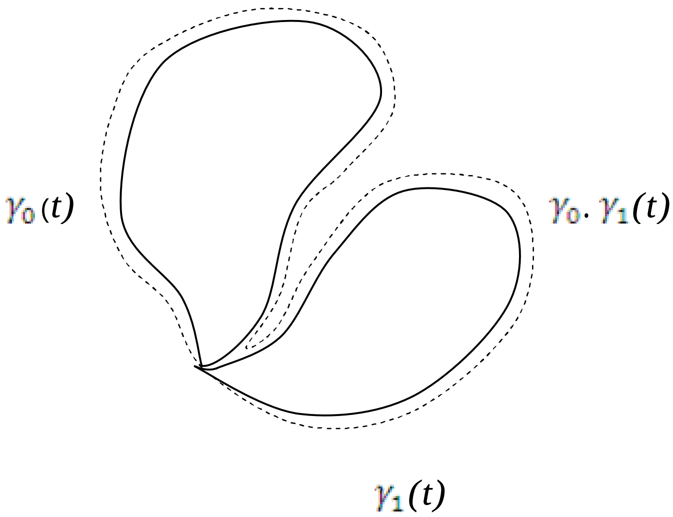
$$\gamma_1(2t\text{-}1) \qquad 1/2 \leq t \leq 1$$

γ est bien une application continue de [0,1] dans X et vérifie:

$$\gamma(0)=\gamma_0\,(0)=a$$
$$\gamma(1)=\gamma_1(1)=a$$

Par conséquent, $\gamma \in L_a(X)$.

Le recollement de γ_0 et γ_1 est noté $\gamma = \gamma_0 . \gamma_1$ qu'on appelle également composé ou produit des lacets γ_0 et γ_1



Proposition 18 *La composé des lacets induit une loi de composition interne dans l'espace quotient $[I, X]_a$ définit par:*

$$[\gamma_0] \,.\, [\gamma_1] = [\gamma_0 . \gamma_1] \text{ pour}$$

tout $([\gamma_0], [\gamma_1]) \in [I, X]_a \times [I, X]_a$

Preuve

En effet soient γ_0, γ_0' et γ_1, γ_1' des éléments de $L_a(X)$ homotopes deux à deux. Ils existent donc deux applications continues:

$$\begin{cases} F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \\ F(t, 0) = \gamma_0(t) \\ F(t, 1) = \gamma_0'(t) \\ F(0, \tau) = F(1, \tau) = a \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X \\ G(t, 0) = \gamma_1(t) \\ G(t, 1) = \gamma_1'(t) \\ G(0, \tau) = G(l, \tau) = a \end{cases}$$

Considérons les chemins produits $\gamma_2 = \gamma_0 . \gamma_1$ et $\gamma_2' = \gamma_0' . \gamma_1'$ Définis respectivement par:

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_1(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

et

$$\gamma_2'(t) = \begin{cases} \gamma_0'(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \gamma_1'(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Prouvons qu'il existe une homotopie qui lie γ_2 et γ_2'

Considérons l'application $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ définie par:

$$H(t, \tau) = \begin{cases} F(2t, \tau) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ G(2t-1, \tau) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Elle est continue est réalise l'homotopie entre γ_2 et γ_2'.

Proposition 19 *L'ensemble quotient $[I, X]_a$ des classes d'homotopie muni de la relation:*

$$"." : [I, X]_a \times [I, X] \longrightarrow [I, X]_a$$

telle que

$$[\alpha] . [\beta] = [\alpha . \beta]$$

pour tout $([\alpha], [\beta]) \in [I, X]_a \times [I, X]_a$ admet une

structure de groupe.

Preuve:

Associativité:

Soient $[\gamma_0]$; $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ trois éléments de $[I, X]_a$.

Alors: $([\gamma_0] . [\gamma_1]) . [\gamma_2] = [\mu]$ avec:

$$\mu(t) = \begin{cases} \gamma_0(4t) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ \gamma_1(4t-1) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t+1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Et $[\gamma_0] . ([\gamma_1] . [\gamma_2]) = [\mu']$ avec:

$$\begin{cases} \gamma_0(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \\ \end{cases}$$

$$\mu'(t)= \begin{matrix} \gamma_1\,(4t\text{-}2) & \quad 1/2\leq t\leq 3/4 \\ \gamma_2(4t\text{-}3) & \quad 3/4\leq t\leq 1 \end{matrix}$$

Considérons l'application $F : [0,1]$ X $[0,1] \longrightarrow$ X donnée par

$$F\,(t,\,\tau)= \begin{cases} \gamma_0\,(\frac{4t}{1+\tau}) & 0\leq t\leq \frac{1+\tau}{4} \\ \gamma_1\,(4t-\tau-1\ ) & \frac{1+\tau}{4}\leq t\leq \frac{2+\tau}{4} \\ \gamma_2\,(\frac{4t-\tau\_2}{2-\tau}) & \frac{2+\tau}{4}\leq t\leq\ 1 \end{cases}$$

Une telle application est une homotopie qui lie μ et μ'

Existence d'un élément neutre:

Considérons

$$\varepsilon_{x_0} : [0,1] \longrightarrow X$$

Le lacet définit par $\varepsilon_{x_0}\,(t) = x_0$ pour tout élément $t \in [0,1]$.

On a alors pour tout $[\gamma]\in[I, X]_a$ les égalités suivantes:

$$[\varepsilon_{x_0}]\,.\,[\gamma] = [\gamma]\,.[\varepsilon_{x_0}] =[\,\gamma]$$

En effet, $[\gamma]\,.\,[\varepsilon_{x_0}]= [\omega]$ où

$$\omega\ (t) = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ x_0 & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

L'application F : [0,1] X [0,1] $\longrightarrow$ X donnée par:

$$F(t, \tau) = \begin{cases} \gamma(\frac{2t}{1+\tau}) & 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2} \\ x_0 & \frac{1+\tau}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Et une homotopie qui lie γ et $\varepsilon_{x_0}.\ \gamma$.

Idem pour $[\varepsilon_{x_0}]\ .\ [\gamma] = [\gamma]$.

Existence de symétrique :

Enfin, soit $[\gamma] \in [I, X]_a$ et considérons $\gamma^- \in L_a(X)$ définit par

$$\gamma^-(t) = \gamma(1 - t)$$

Pour tout élément $t \in [0,1]$. Alors $[\gamma] . [\gamma^-] = [\varepsilon_{x_0}]$.

Pour cela il suffit de considérer une homotopie
$F : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ donnée par:

$$F(t, \tau) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \gamma(2t - \tau) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ \gamma(2 - 2t - \tau) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2-\tau}{2} \\ x_0 & \frac{2-\tau}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Par analogie on montre que $[\gamma] . [\gamma^-] = [\varepsilon_{x_0}]$.

Définition 20 *On appelle groupe fondamental d'ordre* 1 *associé à un espace pointé (X, a) le groupe $[I, X]_a$ muni du produit des classes d'homotopie des lacets ce groupe est noté π_1 (X,x_0) qu'on appelle également group de Poincaré.*

1.3 Morphismes de groupes fondamentaux

Définition 21 *On appelle application continue f définie d'un espace topologique pointé (X, x) dans un autre espace topologique*

$\longrightarrow$

pointé (Y, y) toute application $f : X \longrightarrow Y$ continue telle que $f(x) = y$.
Soient $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ une application continue d'espaces topologiques pointés. Alors on peut définir une application:

$$\hat{f} : L_x(X) \longrightarrow L_y(Y)$$

Donné par :

$$\hat{f}(\gamma) = f \circ \gamma$$

pout tout lacet $\gamma \in L_x(X)$.
plus:

$$\begin{cases} f \circ \gamma(0) = f(x) = y \\ \quad et \\ f \circ \gamma(1) = f(x) = y \end{cases}$$

donc $\hat{f}(\gamma) = f \circ \gamma \in L_y(Y)$

Définition 22 On appelle relation induite *par f : $(X, x) \longrightarrow (Y, y)$ dans les groupes fondamentaux respectifs la relation:*

$$f_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$$

Définit par :

$$f_*([\gamma]) = [\hat{f}(\gamma)] = [f \circ \gamma]$$

Pour tout élément $[\gamma]$ de $\pi_1(X, x)$.

Proposition 23 *L'application $f_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est un homomorphisme de groupes.*

Preuve:

Considérons: $f_*([\gamma_1].[\gamma_2]) = f_*[\gamma_1.\gamma_2] = [f\, o\, (\gamma_1.\gamma_2)]$ *Or:*

$$f\, o\, (\gamma_1.\gamma_2)(t) = \begin{cases} f\, o\, \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f\, o\, \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

D'où $[f\, o\, (\gamma_1.\gamma_2)] = [f\, o\, \gamma_1 . f\, o\, \gamma_2] = [f\, o\, \gamma_1].[f\, o\, \gamma_2] = f_*[\gamma_1].f_*[\gamma_2]$.

Proposition 24 *Deux espaces topologiques X et Y homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Preuve:

En effet soient f l'homéomorphisme entre X et Y avec $f(x) = y$. Alors et $f^{-1} o\, f = Id_X$ et $f\, o\, f^{-1} = Id_Y$ Ainsi nous obtenons $(f^{-1})_* o\, f_* = Id_{\pi_1(X,x)}$ et $f_* o\, (f^{-1})_* = Id_{\pi_1(Y,y)}$

Proposition 25 Deux *applications continues et homotopes induisent le même homomorphisme dans les groupes fondamentaux*

Preuve:

Soient

$$F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

une homotopie qui lie f et g et $\gamma \in L_a(X)$. L'application continue

$$G : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow Y$$

définie par:

$$G(t, \tau) = F(\gamma(t), \tau)$$

pour tout couple $(t,\tau) \in [0,1] \times [0,1]$, réalise l'homotopie

recherchée qui lie $f \circ \gamma$ et $g \circ \gamma$.

Définition 26 *Soit* $f\ X \longrightarrow Y$, on dit que *f est une homéotopie s'il existe une application continue* $g : Y \longrightarrow X$ *tel que:* $f \circ g \sim Id_Y$ *et* $g \circ f \sim Id_X$.

Dans ce cas g est aussi une homéotopie et g est appelé l'inverse homotopique de *f* et inversement. Les espaces topologiques *X* et *Y* son dit homéotopes.

Proposition 27 *Si X et Y ont le même type d'homotopie alors elles ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Preuve:

En appliquant la propriété ci-dessus, on a les égalités: $f_* \circ g_* = Id_{(X,x)}$ et $g_* \circ f_* = Id_{(Y,y)}$.

Proposition 28 *Si* x_0 *et* y_0 *sont deux éléments de X qui sont dans la même composante connexe par arcs alors les groupes fondamentaux sont isomorphes.*

Preuve:

Il nous faut définir un isomorphisme $I : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, y_0)$.

Soit f le chemin de X qui joint x à y, considérons le chemin

$$f^{-}(t) = f(1-t);$$

pour tout élément t $\in [0,1]$. A chaque lacet $\gamma \in L_x(X)$ on peut

associer un lacet $\gamma' \in L_y(X)$ défini par:

$$\gamma'(t) = \begin{cases} f^{-}(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma\ (4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ f(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Définissons alors I par $I([\gamma]) = [f^{-}.\gamma\ .\ f]$. Considérons γ' un lacet homotope à 7, alors l'application:

$$F' : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

donné par:

$$F'(t,\tau) = \begin{cases} f^{-}\ (2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F\ (4t-2, \tau) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ f(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Où $F(t, \tau)$ est l'homotopie qui lie γ et γ'. Ceci prouve que le lacet $[f^{-}.\gamma\ .\ f]$ et homotope au lacet $[f^{-}.\gamma\ .\ f]$ dans $L_y(X)$.

<u>Prouvons que I est un homomorphisme :</u>

Soient $[\gamma_1]$;$[\gamma_2]$ deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$. Considérons

$I([\gamma_1] ;[\gamma_2])=I([\gamma_1.\gamma_2])=([f^-.(\gamma_1.\gamma_2).f])$ *sachant que* $f.f^- \sim \varepsilon_x$

donc $\gamma_1.(f.f^-) \sim \gamma_1 . \varepsilon_x = \gamma_1$ *d'où* $\gamma_1. f.f^-. \gamma_2 \sim \gamma_1. \gamma_2$ *ainsi*

$f^-.\gamma_1. f. f^-. \gamma_2.f \sim f^-. \gamma_1. \gamma_2.f.$

<u>Montrons que *I* est un isomorphisme :</u>

Soit $[\gamma] \in \pi_1(X, y_0)$, considérons alors le chemin $f.\gamma.f^- \in$

$L_x(X)$ *alors :*

$I([f.\gamma.f^-])=[f^-.f.\gamma.f^-.f]=[\varepsilon_y].[\gamma].[\varepsilon_y]=[\gamma].$

D'autre part, si $[\gamma_1]$;$[\gamma_2]$ sont deux éléments de $\pi_1(X, y_0)$ avec

$$f^{-}.\gamma_1 . f \sim f^{-}.\gamma_2 . f$$

Alors grâce à la compatibilité du produit avec l'homotopie on déduit que :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2$$

1.4 Groupes d'homotopies d'ordres supérieurs

Les groupes d'homotopie d'ordres supérieurs s'obtiennent en opérant sur les n-sphéroïdes de la façon suivante:

Soit X un espace topologique et $x_0 \in X$, on note par $C[([0, 1]^n, \partial[0, 1]^n); (X,x_0)] = b[([0, l]^n, d[0, 1]^n); (X, A)]$, l'ensemble des applications continues du cube n - dimensionnel $[0, 1]^n$ dans X telles que $f(\partial [0, l]^n) = \{x_0\}$ où $d[0, 1]^n$ est la frontière du cube $[0, 1]^n$.

Les applications

$$\vartheta : ([0,1l]^n, d[0, l]^n) \longrightarrow (X, x_0)$$

S'appellent des n-sphéroïdes.

L'ensemble des classes d'homotopies des n- sphéroïdes est noté $\pi\,[([0, 1]^n, \partial\,[0, 1]^n); (X, x_0)]$ ou plus simplement $\pi_n(X, x_0)$.

Définition 29 *On appelle somme de deux n-sphéroïdes ϑ et ψ la n-sphéroïde définie par:*

$$(\vartheta+\psi)(t)=\begin{cases} \vartheta(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2t_1-1, t_2, \ldots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Définition 30 *On appelle groupe homotopique d'ordre n d'un espace topologique pointé (X, x_0) l'ensemble $\pi_n(X, x_0)$ muni du produit des classes d'homotopie des n-sphéroïdes.*

Proposition 31 *Les groupes d'homotopie d'ordre n, $n > 1$ sont abéliens.*

Preuve:

Rappelons que:

$$\begin{cases} \vartheta(2t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ & \end{cases}$$

$(\vartheta + \psi)(t)=$

$$\psi(2t_1\text{-}1, t_2, t_3, \ldots, t_n) \quad \tfrac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$$

$$(\psi + \vartheta)(t)= \begin{cases} \psi(2t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \vartheta(2t\text{-}1_1, t_2, t_3, \ldots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

Montrons que ces deux applications sont homotopes à une même troisième:

Soient:

(a)

$$\Phi_1(t, \tau)= \begin{cases} x_0 & 0 \leq t_2 \leq \frac{\tau}{2} \\ \vartheta\left(2t_1, \frac{2t_2-\tau}{2-\tau}, t_3, \ldots, t_n\right) & \frac{\tau}{2} \leq t_2 \leq 1 \quad 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \psi\left(2t_1\text{-}1, \frac{2t_2}{2-\tau}, t_3, \ldots, t_n\right) & 0 \leq t_2 \leq 1\text{-}\frac{\tau}{2} \quad \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \\ x_0 & 1\text{-}\frac{\tau}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

On a alors $\Phi_1(t, 0)= \vartheta + \psi$ et

$$\Phi_1(t, 1)= \begin{cases} x_0 & 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \\ \vartheta(2t_1, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \quad 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2t_1\text{-}1, 2t_2, t_3, \ldots, t_n) & 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

$x_0 \qquad \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1$

(b)

$$\Phi_2(t,s) = \begin{cases} \vartheta\left(\frac{2t_1}{1+s}, 2t_2-1, t_3, \dots, t_n\right) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1+s}{2} \\ x_0 & \frac{1+s}{2} \leq t_1 \leq 1 \ ; \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ x_0 & 0 \leq t_1 \leq \frac{1-s}{2} \ ; 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\psi\left(\frac{2t_1-1+s}{1+s}, 2t_2, t_3, \dots, t_n\right) \quad \frac{1-s}{2} \leq t_1 \leq 1$$

On a $\Phi_2(t,0) = \Phi_1(t,1)$ et

$$\Phi_2(t,1) = \begin{cases} \vartheta(t_1, 2t_2-1, t_3, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq 1 ; \ \frac{1}{2} \leq t_2 \leq 1 \\ \psi(t_1, 2t_2, t_3, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq 1 ; \ 0 \leq t_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors $\vartheta + \psi \sim \Phi_1(t,1) = \Phi_2(t,0) \sim \Phi_2(t,1)$.

D'une façon identique on a : pour $\psi + \vartheta$:

$$\psi_1(t,\tau) = \begin{cases} \psi\left(2t_1, \frac{2t_2}{2-\tau}, t_3, \dots, t_n\right) & 0 \leq t_2 \leq 1 - \frac{\tau}{2} \\ x_0 & 1 - \frac{\tau}{2} \leq t_2 \leq 1 \quad 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ x_0 & 0 \leq t_2 \leq \frac{\tau}{2} \quad \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \\ \vartheta\left(2t_1-1, \frac{2t_2-\tau}{2-\tau}, t_3, \dots, t_n\right) & \frac{\tau}{2} \leq t_2 \leq 1 \end{cases}$$

On a $\psi_1(t,0) = \psi + \vartheta$ et

$$\psi_1(t,1)=\begin{cases}\psi(2t_1,2t_2,t_3,\ldots,t_n) & 0\leq t_2\leq\frac{1}{2}\\ x_0 & \frac{1}{2}\leq t_2\leq 1 \qquad 0\leq t_1\leq\frac{1}{2}\\ x_0 & 0\leq t_2\leq\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\leq t_1\leq 1\\ \vartheta(2t_1-1,2t_2-1,t_3,\ldots,t_n) & \frac{1}{2}\leq t_2\leq 1\end{cases}$$

Et considérons enfin l'homotopie :

$$\psi_2(t\,,s)=\begin{cases}\vartheta(\frac{2t_1-1+s}{1+s},2t_2-1,t_3,\ldots,t_n) & \frac{1-s}{2}\leq t_1\leq 1\\ x_0 & 0\leq t_1\leq\frac{1-s}{2} \qquad 0\leq t_2\leq\frac{1}{2}\\ x_0 & \frac{1+s}{2}\leq t_1\leq 1 \qquad \frac{1}{2}\leq t_2\leq 1\\ \psi(\frac{2t_1}{1+s},2t_2,t_3,\ldots,t_n) & 0\leq t_2\leq\frac{1-s}{2}\end{cases}$$

Ainsi $\psi_2(t,0)=\psi_1(t,1)$ et $\psi_2(t,1)=\Phi_2(t,1)$ d'où
$\psi+\vartheta\sim\psi_1(t,1)=\psi_2(t,0)\sim\psi_2(t,1)=\Phi_2(t,1)$.
Ainsi $\vartheta+\psi\sim\Phi_2(t,1)\sim\psi+\vartheta$.

Généralement les groupes de Poincaré ne sont pas commutatifs cependant les groupes homotopique de groupes topologiques sont tous abélien.

Chapitre 2

Invariants topologiques

2.1 Rotationnel par rapport à la sphère S^n

Nous allons dans cette section mettre en exergue un invariant topologique qui sera défini pour la classe des applications continues ayant pour source la sphère $S^n \subset R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ et de but $R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ c'est donc un invariant topologique pour les morphismes:

$$f \in Mor_{Top}(S^n, R^{n+1} \setminus \{\theta\}).$$

Définition 32 *On appelle rotationnel d'une application continue* $f : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *noté* $\chi_{S^n}(f)$ *le degré de l'application continue* $r \circ f : S^n \longrightarrow S^n$ *où* $r : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *est la projection radiale.*

Ainsi, $\chi_{S^n}(f)$ est un entier relatif qui vérifie l'égalité suivante:

$$\chi_{S^n}(f) = deg\,(r \circ f)$$

Etudions les propriétés du rotationnel par rapport à S^n.

Proposition 33 *Si* $f = i : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *est l'injection canonique alors* $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(i) = 1$.

Preuve:

En effet, par définition $\chi_{S^n}(i) = deg(r \circ i)$. Or, l'application continue $r \circ i$ est égale à l'identité canonique Id_{S^n} donc $\chi_{S^n}(i) = deg\,(Id_{S^n}) = 1$.

Proposition 34 *Si* $f : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ est une *application constante alors* $\chi_{S^n}(f) = 0$.

Preuve:

Si on suppose que f est une application constante alors forcément l'application r o $f : S^n \longrightarrow S^n$ est également une application constante et donc son degré est nul, d'où l'on déduit que $\chi_{S^n}(f) = deg(r \circ f) = 0$.

Proposition 35 *Si $g : S^n \longrightarrow S^n$ et $f : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$* sont deux *applications continues alors le rotationnel de leur composée f* o *g : $S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ est donné par l'égalité $\chi_{S^n}(f \circ g) = \chi_{S^n}(f).deg(g)$.*

Preuve:

On a les égalités suivantes: $\chi_{S^n}(f \circ g) = deg(r \circ (f \circ g)) = deg((r \circ f) \circ g) = deg(r \circ f).\ deg(g) = \chi_{S^n}(f)\ .\ deg\ (g)$.

Proposition 36 *Le rotationnel est invariant par rapport aux classes d'homotopies.*

Preuve:

Considérons la classe d'homotopie $[f] \in [S^n, R^{n+1} \setminus \{\theta\}]$ et soit $g \in [f]$ on déduit alors que r o g $\in [r \circ f] \in [S^n, S^n]$ donc $deg(r \circ g) = deg(r \circ f)$ autrement dit $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(f)$.

Ainsi, tous les éléments d'une même classe d'homotopie ont même rotationnel.

Proposition 37 *Soit $f : S^n \longrightarrow S^n$ une application continue et $i : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ l'injection canonique alors $\chi_{S^n}(i \circ f) = deg(f)$.*

Preuve:

En effet, $\chi_{S^n}(i\ o\ f)$ = *deg(r o (i o f)) = deg((r o i) o f) = deg(r o i) .deg(f) = 1 . deg (f) = deg (f).*

La proposition 36 admet une réciproque :

Proposition 38 *Soient g : $S^n \longrightarrow R^{n+1}\setminus\{\theta\}$ et f : $S^n \longrightarrow R^{n+1}\setminus\{\theta\}$ deux applications continues alors si $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(g)$ forcément on a l'égalité de leur classe d'homotopie [g] = [f].*

Preuve:

Supposons que $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(g)$ donc *deg(r o g) = deg(r o f)* par conséquent grâce au théorème de classification de Hopf des applications continues sur la sphère on déduit que *[r o g] = [r o f].* Par conséquent *[i o (r o g)] = [i o (r o f)]* donc *[(i o r) o g] = [(i o r) o f]* autrement dit *[i o r] o [g] = [i o r] o [f]* ainsi $[Id_{R^{n+1}\{\theta\}}]$ *o [g] =* $[Id_{R^{n+1}\{\theta\}}]$ *o [f]* donc *[g] = [f]* qui exprime que *g et f* sont homotopes.

Nous allons maintenant énoncer un théorème d'existence pour la classe des applications continues ayant pour source la boule fermée unité $\bar{B}^{n+1}$ de R^{n+1} et pour but l'espace vectoriel réel R^{n+1}.

Proposition 39 *Soit f :* $\bar{B}^{n+1} \longrightarrow R^{n+1}$ *une application continue qui n'admet pas de zéro sur la frontière de* $\bar{B}^{n+1}$*. Alors si la*

$\longrightarrow$

restriction $\widehat{f}: S^n \quad R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ *de l'application f sur* S^n*, n'est pas homotope à une application constante, l'équation* $f(x) = \theta$ *admet une solution dans l'intérieur de la boule* $\bar{B}^{n+1}$.

Preuve:

Si on suppose que l'équation $f(x) = \theta$ n'admet pas de solution alors $f: \bar{B}^{n+1} \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ et on a alors légalité $\widehat{f} = f \circ j$ où $j: S^n \longrightarrow \bar{B}^{n+1}$ est l' injection canonique définie de la frontière de la boule dans elle même. Par conséquent $\chi_{S^n}(\widehat{f}) = \chi_{S^n}(f \circ j) = deg(r \circ (f \circ j))$.

D'autre part, $(r \circ (f \circ j))_*(1_{S^n}) = deg(r \circ (f \circ j)).\ 1_{S^n}$. et donc $deg(r \circ (f \circ j)).\ 1_{S^n} = (r \circ f)_* \circ j_*(1_{S^n})$ où j_* est un homomorphisme trivial. Donc $deg(r \circ (f \circ j)) = 0$ ainsi $\chi_{S^n}(\widehat{f}) = 0$ donc $\widehat{f}$ est homotope à une application constante.

2.2 Rotationnel par rapport à $R^{n+1} \backslash \{\theta\}$

Dans cette section nous définissons un invariant topologique pour la classe des applications continues ayant pour source et but $R^{n+1} \backslash \{\theta\}$, c'est donc un invariant topologique pour les morphismes:

$$f \in Mor_{Top}(R^{n+1} \backslash \{\theta\}, R^{n+1} \backslash \{\theta\}).$$

Définition 40 *On appelle rotationnel sur* $R^{n+1}\setminus\{\theta\}$ *d'une application continue* $f : R^{n+1}\setminus\{\theta\} \longrightarrow R^{n+1}\setminus\{\theta\}$ *noté* $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}$ *le degré de l'application continue* $r \circ f \circ i : S^n \longrightarrow S^n$ *où* $r : R^{n+1}\setminus\{\theta\} \longrightarrow S^n$ *est la projection radiale et* $i : S^n \longrightarrow R^{n+1}\setminus\{\theta\}$ *est l'injection canonique.*

Ainsi:

$$\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) = deg(r \circ f \circ i)$$

Etudions les propriétés du rotationnel par rapport à $R^{n+1}\setminus\{\theta\}$

Proposition 41 *Si* $f = Id_{R^{n+1}\{\theta\}} : R^{n+1}\setminus\{\theta\} \longrightarrow R^{n+1}\setminus\{\theta\}$ *est L'application identique alors* $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(Id_{R^{n+1}\{\theta\}}) = 1$.

Preuve:

En effet, par définition $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(Id_{R^{n+1}\{\theta\}}) = deg(r \circ Id_{R^{n+1}\{\theta\}} \circ i) = deg(roi)$.Or, l'application continue *roi* est l'identité canonique Id_{S^n} et $deg(Id_{S^n}) = 1$.

Proposition 42 *Si* $f : R^{n+1}\setminus\{\theta\} \longrightarrow R^{n+1}\setminus\{\theta\}$ *est une application constante alors* $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) = 0$.

Preuve:

Si on suppose que *f* est une application constante alors forcément l'application $r \circ f \circ i : S^n \quad S^n$ est également une application constante et donc son degré est nul, d'où l'on déduit que $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) = \deg(r \circ f \circ i) = 0$.

Proposition 43 *Si* $g : f : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *et* $f : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *sont deux applications continues alors le rotationnel de leur composée* $f \circ g \quad f : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *est donné par l'égalité* $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f \circ g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) \cdot \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g)$.

Preuve:

On a les égalités suivantes: $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f \circ g) = \deg(r \circ f \circ g \circ i)$.

D'autre part, $r \circ (f \circ g) \circ i$ *et* homotope à l'application $(r \circ f \circ i) \circ (r \circ g \circ i)$ et donc $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f \circ g) = \deg((r \circ f \circ i) \circ (r \circ g \circ i))$ $= \deg(r \circ f \circ i) . \deg(r \circ g \circ i) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) . \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g)$.

Conséquence 44 Si $g : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ et $f : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *sont deux applications continues alors les composées de f et g ont même rotationnel sur* $R^{n+1} \setminus \{\theta\}$: $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f \circ g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g \circ f)$

Preuve :

En effet, $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f \circ g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) \cdot \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g) . \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g \circ f)$

Proposition 45 *Si* $g : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *et* $f : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *sont deux applications continues alors leur composée* $f \circ g : S^n$

$R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *admet pour rotationnel sur* S^n *l'entier relatif* $\chi_{S^n}(f\ o\ g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f)\ .\ \chi_{S^n}(g)$.

Preuve:

En effet, $\chi_{S^n}(f\ o\ g) = deg(r\ o\ f\ o\ g)$. Et du fait que $r\ o\ f\ o\ g$ est homotope à $(r\ o\ f\ o\ i)\ o\ (r\ o\ g)$ on déduit que $\chi_{S^n}(f\ o\ g) = deg\ ((r\ o\ f\ o\ i)\ o\ (r\ o\ g)) = deg\ (r\ o\ f\ o\ i)\ .\ deg\ (r\ o\ g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f)\ .\ \chi_{S^n}(g)$.

Proposition 46 Le *rotationnel est invariant par rapport aux classes d'homotopies.*

Preuve:

Considérons la classe d'homotopie $[f] \in [R^{n+1} \setminus \{\theta\}, R^{n+1} \setminus \{\theta\}]$ et soit $g \in [f]$ on déduit alors que $r\ o\ g\ o\ i \in [r\ o\ f\ o\ i] \in [S^n, S^n]$ donc $deg(r\ o\ g\ o\ i) = deg(r\ o\ f\ o\ i)$ autrement dit $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(f)$

Ainsi, tous les éléments d'une même classe d'homotopie ont même rotationnel par rapport à $R^{n+1} \setminus \{\theta\}$.

<u>La proposition ci-dessus admet une réciproque:</u>

Proposition 47 *Si deux applications continues* $g : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *et* $f : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *ont même rotationnel par rapport à* $R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *alors* $[g] = [f]$.

Preuve:

Supposons que $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}$ (g) = $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}$ (f) donc *deg(r o g o i)* = *deg(r o f o i)* par conséquent grâce au théorème de classification de Hopf des applications continues sur la sphère on déduit que *[r o g o i] = [r o f o i]*. Par conséquent *[i o r o g o i o r] = [i o r o f o i o r]* . Or *[i* o r o *g* o *i* o *r*] = *[i o r]* o *[g] o [i o r] = [g]* et *[i o r o f o i o r] = [f]*. On conclut l'égalité *[g] = [f]*.

2.3 Rotationnel

Dans cette section nous définissons un invariant topologique pour la classe des applications continues ayant pour source $R^{n+1}\backslash\{\theta\}$ et pour but la sphère S^n, c'est donc un invariant topologique pour les morphismes:

$f \in Mor_{Top}(R^{n+1}\backslash\{\theta\}, S^n)$.

Définition 48 *Soit une application continue* $f : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *son rotationnel est notée* $\chi(f)$ *où* $\chi(f) = deg(f \circ i)$.

Etudions les propriétés du rotationnel.

Proposition 49 *Soit une application continue* $f : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *alors son rotationnel vérifie l'égalité:*

$$\chi(f) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(i \circ f)$$

où $i : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ *est l'injection canonique.*

Preuve:

On a les égalités suivantes: $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(i \circ f) = deg(r \circ (i \circ f) \circ i) = deg((r \circ i) \circ (f \circ i)) = deg(r \circ i) \,.\, deg(f \circ i)$. Or l'application continue $r \circ i$ est homotope à l'application identique Id_{S^n} par

conséquent $deg(r \circ i) = 1$ d'où l'on conclut que $\chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(i \circ f) = deg(f \circ i) = \chi(f)$.

Proposition 50 *Si* $f = r : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *est la projection radiale alors* $\chi(f) = \chi(r) = 1$.

Preuve:

On a $\chi(r) = deg(r \circ i) = deg(Id_{S^n}) = 1$.

Proposition 51 *Si* $f : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *est une application* *constante alors* $\chi(f) = 0$.

Preuve:

Si on suppose que f est une application constante alors forcément l'application $f \circ i : S^n \longrightarrow S^n$ est également une application constante et donc son degré est nul, d'où l'on déduit que $\chi(f) = deg(f \circ i) = 0$.

Proposition 52 *Si* $g : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *et* $f : S^n \longrightarrow S^n$ *sont deux applications continues alors le rotationnel de leur composée* $f \circ g : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *est donné par l'égalité* $\chi(f \circ g) = \chi(g) . deg(f)$.

Preuve:

Effectivement, $\chi(f \circ g) = deg((f \circ g) \circ i) = deg(f \circ [g \circ i)) = deg(f) . deg(g \circ i) = deg(f) . \chi(g)$.

Proposition 53 Si $g : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ *et* $f : R^{n+1} \backslash \{\theta\} \longrightarrow S^n$ *sont deux applications continues alors leur composée vérifient* $\chi(f \circ g) = \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g) . \chi(f)$.

Preuve :

En effet, $\chi(f \circ g) = deg((f \circ g) \circ i) = deg(f \circ (g \circ i)) = deg(f \circ (i \circ r) \circ (g \circ i)) = deg((f \circ i) \circ (r \circ g \circ i)) = deg(f \circ i) . deg(r \circ g \circ i) = \chi(f) . \chi_{R^{n+1}\{\theta\}}(g)$.

Proposition 54 *Le rotationnel est invariant par rapport aux* *classes d'homotopies.*

Preuve:

Considérons la classe d'homotopie $[f] \in [R^{n+1} \setminus \{\theta\}, S^n]$ et soit $g \in [f]$ on déduit alors que $g \circ i \in [f \circ i] \in [S^n, S^n]$ donc $deg(g \circ i) = deg(f \circ i)$ autrement dit $\chi(g) = \chi(f)$.

Ainsi, tous les éléments d'une même classe d'homotopie ont même rotationnel.

La proposition ci-dessus admet également une réciproque:

Proposition 55 *Si deux applications continues $g : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow S^n$ et $f : R^{n+1} \setminus \{\theta\} \longrightarrow S^n$ ont même rotationnel alors $[g] = [f]$.*

Preuve:

Supposons que $\chi(g) = \chi(f)$ donc $deg(g \circ i) = deg(f \circ i)$ par conséquent grâce au théorème de classification de **Hopf** des applications continues sur la sphère on déduit que $[g \circ i] = [f \circ i]$. Par conséquent $[g \circ i \circ r] = [f \circ i \circ r]$. D'où on conclut l'égalité $[g] = [f]$.

Chapitre 3

Rotationnel d’une paire de morphismes définies sur la sphère

Soient $f : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{ \theta \}$ et $g : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{ \theta \}$ deux applications continues définies de la sphère unité S^n d’un espace vectoriel euclidien orienté R^{n+1} On notera alors:

$$(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{ \theta \}.$$

Définition 56 *Soit* $(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{ \theta \}$ *on appelle rotation de* (f, g) *noté* $\chi_{S^n}(f, g)$ *l’entier relatif:*

$$\chi_{S^n}(f, g) = \chi_{S^n}(f) . \chi_{S^n}(g)$$

Etudions les propriétés de cet invariant topologique.

Proposition 57 *Soient* f, $g : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *et* $k : S^n \longrightarrow S^n$ *une application continue alors* $\chi_{S^n}(f \circ k, g) = deg(k) \,.\, \chi_{S^n}(f, g)$.

Preuve:

$\chi_{S^n}(f \circ k, g) = \chi_{S^n}(f \circ k).\ \chi_{S^n}(g) = deg(k).\ \chi_{S^n}(f).\ \chi_{S^n}(g) = deg(k) \,.\, \chi_{S^n} f, g)$.

Conséquence 58 *Soit* $(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *et* $Id_{S^n}\ S^n \longrightarrow S^n$ *est l'application identique alors* $\chi_{S^n}(f \circ Id_{S^n}, g \circ Id_{S^n}) = \chi_{S^n}(f, g)$.

Preuve:

En effet, $deg(Id_{S^n}) = 1$.

Proposition 59 Soit $g : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *et* $i : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *est l'injection canonique alors* $\chi_{S^n}(i, g) = \chi_{S^n}(g)$.

Preuve:

On a les égalités suivantes: $\chi_{S^n}(i, g) = \chi_{S^n}(g) \,.\, \chi_{S^n}(i) = \chi_{S^n}(g)$

Proposition 60 *Si* $f, g : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *est telle que* $f(g)$ *est une application constante alors* $\chi_{S^n}(f, g) = 0$

Preuve:

Supposons que f constante alors nous avons par définition $\chi_{S^n}(f, g) = \chi_{S^n}(f) \,.\, \chi_{S^n}(g) = 0.\ \chi_{S^n}(g) = 0$

Conséquence 61 *Si* $(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *est une paire* *d'applications constantes alors* χ_{S^n} $(f, g) = 0$

Preuve:

En effet, *si f et g* sont deux applications constantes alors $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(g) = 0$.

Proposition 62 *Si* $(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1}\backslash\{\theta\}$ *est une paire d'applications continues homotopes alors :*

$$\chi_{S^n}(f, g) = (\chi_{S^n}(f))^2 = (\chi_{S^n}(f, g))^2$$

Preuve:

Si f et g sont homotopes alors $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(g)$ d'où l'on déduit le résultat.

Proposition 63 *Si* $(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1}\backslash\{\theta\}$ *et* $(f', g') : S^n \longrightarrow R^{n+1}\backslash\{\theta\}$ *sont deux paires homotopes alors* $\chi_{S^n}(f, g) = \chi_{S^n}(f', g')$.

Preuve:

Puisque f est homotope à f' et que g est homotope à g' alors $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(f')$ *et* $\chi_{S^n}(g) = \chi_{S^n}(g')$ par conséquent $\chi_{S^n}(f, g) = \chi_{S^n}(f, g)$.

Proposition 64 *Si* $(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ *et* $(f', g') : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ *sont deux paires telle que* $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(f')$ *et* $\chi_{S^n}(g) = \chi_{S^n}(g')$ *alors les deux paires sont homotopes.*

Preuve:

Du fait que $\chi_{S^n}(f) = \chi_{S^n}(f')$ = et $\chi_{S^n}(f)$ on déduit que *f* est homotope à *f'* et que *g* est homotope à *g' et* donc les deux paires *(f, g)* et *(f',g')* sont homotopes **.**

Notons que la réciproque n'est pas forcément vraie. Deux paires peuvent avoir le même rotation sans être homotopes.

Proposition 65 *Si* $f, g : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ *est une paire de morphismes continues et si* $\chi_{S^n}(f, g)$ *est un nombre premier p alors* $[f] = [\pm i]$ *sinon* $[g] = [\pm i]$.

Preuve:

En effet, si $\chi_{S^n}(f, g) = P$ donc *p* admet une décomposition $p = |\chi_{S^n}(f).\chi_{S^n}(g)| = |\chi_{S^n}(f)|.|\chi_{S^n}(g)|$, or *P est* un nombre premier donc l'un des facteurs est 1 et par conséquent le morphisme correspondant est homotope à $\pm i$ où $i : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ est l'injection canonique.

Proposition 66 *Si* $(f, g) : S^n \longrightarrow R^{n+1} \backslash \{\theta\}$ *est une paire de morphismes continues et si* $\chi_{S^n}(f, g) = 1$ *alors* $[f] = [g] = [\pm i]$.

Preuve:

En effet, si $\chi_{S^n}(f, g) = 1$ donc $\chi_{S^n}(f) . \chi_{S^n}(g) = 1$ puisque χ_{S^n}

(f) et χ_{S^n} *(g)* sont des entiers relatifs donc χ_{S^n} *(f)* et χ_{S^n} *(f)* sont égaux de même signe et de valeurs absolue 1. Par conséquent, *[f]* = *[g]* = *[i]* sinon *[f]* = *[g]* = *[* $-i$ *]*

Proposition 67 *Si* (f, *g)* : $S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *est une paire de morphismes continues et si* χ_{S^n} *(f, g) est négatif alors* *[f]* $\neq$*[g]* .

Preuve:

En effet, le carré d'un nombre entier n'est jamais négatif.

Proposition 68 *Si (f, g)* : $S^n \longrightarrow R^{n+1} \setminus \{\theta\}$ *est une paire de morphismes continues et si* χ_{S^n} *(f, g) n'est pas le carré d'un nombre entier alors f et g ne sont pas homotopes.*

Preuve:

Si *f* et *g* sont homotopes alors ils ont même rotationnel donc χ_{S^n} *(f, g)* est forcément le carré d'un entier.

Proposition 69 *Si (f, g)* : $\bar{B}^{n+1} \longrightarrow R^{n+1}$ *est une paire d'applications continues telle que:*

1. *f et g n'admettent pas de zéro sur* S^n*,*
2. χ_{S^n} *(f, g) est non nul,*

Alors f et g admet une solution à l'intérieur de la boule B^{n+1}.

Preuve:

En effet si χ_{S^n} *(f, g)* est non nul alors χ_{S^n} *(f)* et χ_{S^n} *(g)* sont non nuls, ils existent alors *(x, y)* $\in B^{n+1}$ tel que *f(x)* = θ = *g (y)*.

CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons étudié les différents invariants topologiques et leurs propriétés qui nous permettent de savoir l'existence de la solution des équations pour plusieurs types de morphismes :

Les morphismes définis sur la sphère $\mathcal{S}^n$ dans $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$.

Les morphismes définis sur $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ dans$\mathcal{S}^n$.

Les morphismes définis sur $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ dans $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$

Les coules de morphismes définies sur $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$ dans $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$.

Les recherches actuelles en topologie algébrique sont sous-tendues par leurs applications nombreuses dans différents domaines. Ainsi:

En physique quantique: l'homotopie, les invariants topologique (1),... sont des concepts topologiques ayant permis de réaliser les idées originales pour établir le modèle de Skyrme

En cryptographie et en théorie du chaos: en 2001 les mathématiciens de l'université de Caen et des ingénieurs de France télécom ont déposé un brevet pour utiliser les groupes de tresses en cryptographie (2).

INVARIANTS TOPOLOGIQUES POUR UNE CLASSE DE MORPHISME

Résumé :

Dans cette étude, nous avons étudié les différents invariants topologiques et leurs propriétés qui nous permettent de savoir l'existence de la solution des équations pour plusieurs types de morphismes :

Les morphismes définis sur la sphère $\mathcal{S}^n$ dans $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$.

Les morphismes définis sur $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ dans$\mathcal{S}^n$.

Les morphismes définis sur $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ dans $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$

Les coules de morphismes définies sur $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$ dans $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$.

اللامتغيرات الطبولوجية من اجل صنف من المرفيزمات

ملخص:

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة عدة لامتغيرات الطبولوجية و خصائصها التي تسمح بمعرفة وجود حلول للمعادلات من اجل عدة أنواع من المرفيزمات:

المرفيزمات المعرفة على السطح $\mathcal{S}^n$ في $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$

المرفيزمات المعرفة على $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ في $\mathcal{S}^n$

المرفيزمات المعرفة على $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ في $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$

أزواج المرفيزمات المعرفة على $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$ في $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$.

TOPOLOGICAL INVARIANT FOR A CLASS OF MORPHISMES

Abstract:

In This study, we have studied different topological invariant and their properties that can allow us to know the existence of solution to equation of many types of morphisms

The morphisms defined on the sphere $\mathcal{S}^n$.

The morphisms defined on $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ in $\mathcal{S}^n$.

The morphisms defined on $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$ in $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$.

The couples of morphisms defined on $\mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n$ in $\mathcal{R}^{n+1}\backslash\{\theta\}$.

BIBLIOGRAPHIE

1- S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952.

2- A.Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

3- M.A. Krasnosel'skii, P.P. Zabreiko, Geometrical Methods of Nonlinear Analysis, Springer, Berlin, 1984.

4- K. Kuratowski, Topology, Vol. I, II, Academic Press New York And London, 1966

5- E. H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, 1966

6- History of topology, ed. I. m; James, Elsevier, Amesterdam, 1999

7- R. Gilmore. Topological analysis of chaotic dynamical systems. REV, Mod,phys, 70:1455-1530, 1998

8- R. Gilmore and M. Lefranc. The topologie of chaos. Wiley, New York, 2003