REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE -

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :.............................
Série :......................................

MEMOIRE

Présenté Pour Obtenir Le Diplôme De Magister
En Mathématiques

THEME

Sur Quelques Problèmes Inverses Pour des Equations d'Evolution

Option :
Analyse

PAR :

Mme TABRHA Ouarda

Devant le jury :

Président :	M Denche	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	C .Saidouni	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs :	AL Marhoune	Prof	Univ. Mentouri Constantine
	A.Hameida	M.C.	Univ. Mentouri Constantine
	A Hebbeche	M.C.	Univ. Mentouri Constantine

REMERCIEMENTS

Je remercie avant tout **ALLAH** le tout puissant de m’avoir donné la force et le courage de réaliser ce travail.

Je remercie le professeur Deneche d’avoir bien voulu présider le jury.Je remercie beaucoup mon encadreur Mr C.Saidouni qui m’ont initié la recherche.
Je les remercient et je tiens à leur exprimer mes plus vives reconnaissances pour leur gentillesse et leur totale disponibilité à mon égard tout au long de ce travail.

Je remercie aussi bien MM A.Hmeida , A.Hebbeche et le Professeur Marhoune , qui m’ont honoré en acceptant d’examiner mon travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à tous ceux qui furent, de prés ou de loin, mes guides dans l’aboutissement de ce travail.

DEDICACE

J’offre ce travail

A la source du savoir de mon père.

A ma très chère mère à celle qui ne cesse de
Prier Dieu pour moi.

A la source du bonheur de mes frères et de mes
sœurs.

A mon compagnon de vie, mon mari.

A la lumière de mon cœur
ma fille adoré sarra.

Et à tous mes amis ainsi que mes proches.

Table des matières

+-

Introduction

Les problèmes directs sont caractérisés par l'existence d'une solution unique qui est stable aux perturbations par rapport aux conditions initiales ou aux limites. Il est usuel d'appeler de tels problèmes directs des problèmes bien posés. La notion d'un problème bien posé est formulée dans un article célèbre publié par Jacques Hadamard en 1902 ; Il a cru que les modèles mathématiques des phénomènes physiques devraient avoir les propriétés suivantes :

- L'existence d'une solution.
- L'unicité de la solution.
- La dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Un tel problème est dit bien posé. Un problème qui n'est pas bien posé est dit probème mal posé.

Le présent travail est consacré à l'étude de certaines classes de problèmes mal posés. Il est composé d'une introduction et de quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on présente quelques notions fondamentales sur les problèmes mal posés et certaines méthodes de leur régularisation. Le second chapitre est consacré à l'étude du problème de la chaleur rétrograde homogéne et non homogène ainsi qu'à l'équation de la chaleur homogène complète. Au troisième chapitre on étudie un problème inverse pour l'équation de la chaleur complète par la méthode de Fourier d'une part et par la méthode de Tikhonov simplifiée d'autre part. Au quatrième chapitre on étudie un problème mal posé du type de la chaleur rétrograde homogène avec condition initiale bornée.

Plus exactement on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\ . \quad \text{tq} : x \in \mathbb{R}, t \in (0,T) \\ \text{et} \qquad \|u(.,T) - \varphi(.)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

$$\|u(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E$$

Ce problème n'est pas bien posé au sens d'Hadamard, c'est-à-dire que même s'il existe une solution unique dans $(0,T)$, elle ne dépend pas continûment des données. On régularise ce problème par la famille de problèmes suivants :

$$\begin{cases} u_t^v = u_{xx}^v\ ;\ x \in \mathbb{R}\ \ ,\ t \in (0,T) \\ \qquad u^v(x,T) = s_v(\varphi)(x) \end{cases}$$

Cette méthode s'appelle méthode de mollification. On montre que les problèmes approchés sont bien posés et que leur solution u^v converge si et seulement si on fait un bon choix du paramètre v. Enfin on présente une comparaison entre les trois méthodes de régularisation.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels et définitions des problèmes mal posés et à la présentation de certaines méthodes de leurs régularisations.

1.1 Problèmes mal posés

On dit que le problème

$$Ax = y \tag{1.1}$$

est bien-posé au sens de Hadamard si l'opérateur A a un inverse continu de Y sur X, où X et Y sont des sous-ensembles ouverts des espaces classiques $C^K\left(\overline{\Omega}\right)$, ou de leurs sous-espaces de condimension finie. Plus exactement :

1) Pour tout $y \in Y$; il existe une solution $x \in X$ (existence de la solution).

2) Pour tout $y \in Y$; il n'ya pas plus d'un $x \in X$ satisfaisant (1.1) (unicité de la solution).

3) $\|x - x^\star\|_X$ tend vers 0 quand $\|y - y^\star\|_Y$ tend vers 0 (stabilité de la solution).

La condition que X et Y deux sous-espaces des espaces fonctionnels classiques est due au fait que ces espaces sont tout à fait pratiques pour l'étude des équations différentielles aux dérivées partielles et de la physique mathématique. Elles reflètent la réalité physique et servent comme base pour des algorithmes numériques stables. Si l'une des conditions 1)-3) n'est pas satisfaite, le problème (1.1) est dit mal-posé au sens de Hadamard.

Definition 1 *: Soit $A : U \subset X \to V \subset Y$. un opérateur d'un sous-ensemble U d'un espace de Hilbert X dans un sous-ensemble V d'un espace de Hilbert Y .*

Le problème est de trouver $u \in U$ tel que : $Au = g$; où $g \in V$ est bien-posé

Si $A : U \to V$ est bijectif et l'opérateur inverse $A^{-1} : V \to U$ est continu, autrement le problème est mal-posé.

En fait le manque de continuité implique des problèmes de stabilité pour les méthodes numériques.

Example 1 *: On considère l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \ sur \ (0,1)\times[0,T]\,. \\ u=0\,;\ sur\ \partial\Omega\times[0,T]\,. \\ u\,(x,T)=u_T\,(x)\,;x\in[0,1] \end{cases}$$

Ainsi : $\begin{cases} u_k\,(x,t)=e^{-\pi^2K^2t}\sin(\pi kx) \\ u_k\,(x,0)=\sin(\pi kx) \end{cases}$

$u_k\,(x,0)$ *; état initial donc :* $\|u_0\|_X>\frac{1}{2}$ *, mais* $\|u_T\|_Y\to 0$*, exponentiellement alors la solution est instable dans les espaces* $C^\infty(\Omega)$ *,* L_2 *,* H_m*.*

Ainsi l'opérateur A *est continu de :* $L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$*, et il existe une base orthonormée* a_k *, alors :* $Ax=\sum(a_k,x)\,\lambda_k a_k$ *, et la solution est de la forme*

$$u\,(x,t)=\sum a_k\,(x)\,u_k\,(x,t)=\sum a_k\,(x)\,e^{-\pi^2k^2t}u_k\,(x,0)=\sum u_{0k}e^{-\pi^2k^2t}a_k\,(x)$$

où u_{0k} *sont les coefficients de Fourier de l' état initial.*

1.1.1 Régularisation

L'équation (1.1) est dite conditionnellement correcte dans la classe d'exactitude $X_M\subset X$ si elle satisfait les conditions suivantes :

1) Une solution x est unique dans X_M ;c-à-d, $x=x^0$ dès que $Ax=Ax^0$ et x , $x^0\in X_M$ (unicité d'une solution dans X_M) .

2) Une solution $x\in X_M$ est stable; c-à-d.$\|x-x^0\|_X$ tend vers 0 quand $\|y-y^0\|_Y$ tend vers 0 (stabilité conditionnelle).

Definition 2 *: Soit* ω *une fonction telle que :* $\|x-x^0\|\le\omega\left(\|Ax-Ax^0\|_Y\right)$ *Cette relation s'appelle estimation de stabilité , en effet si :*

$$\left\|Ax-Ax^0\right\|\longrightarrow 0\Longrightarrow\omega\left(\left\|Ax-Ax^0\right\|_Y\right)\longrightarrow 0\Longrightarrow\left\|x-x^0\right\|_X\longrightarrow 0$$

Proposition :

Si X_M est compact et la solution unique alors cette solution est stable.

Demonstration. Supposons que la solution est unique. Comme X_M est compact : $A:X\longrightarrow Y$ est un opérateur continu et $X_M\subset X$. donc : (A :$X_M\longrightarrow A(X_M)$ et X_M compact) $\Longrightarrow A(X_M)$ compact. Comme la solution est unique $\Longrightarrow$ A injectif. Comme A :$X_M\longrightarrow A(X_M)$, est un opérateur surjectif. Donc A bijectif.

$$\begin{cases} \quad X_M \quad \text{compact.} \\ \text{et} \quad .A:X_M\longrightarrow A(X_M) \quad \text{continu} \\ \quad \text{et} \quad A \quad \text{bijectif} \end{cases} \Longrightarrow A^{-1} \ \text{continu} \ \text{(c-à-d :bicontinu)}$$

$$\exists c>0, tq : \left\| x-x^0 \right\| \leq c \underbrace{\left\| Ax-Ax^0 \right\|}_{\searrow 0} \Longrightarrow \left\| x-x^0 \right\| \longrightarrow 0$$

Donc :la solution est stable sur X_M. ■

Comme le problème (1.1) est mal posé, pour trouver la solution de l'équation (1.1) on fait une régularisation (c-à-d pour trouver la solution de l'équation (1.1) on trouve la solution d'une autre famille d'équations dépendantes d'un paramètre α telles que leurs solutions convergent vers la solution de l'équation (1.1), lorsque $\alpha \longrightarrow 0$).

Definition 3 *Soit $U(X)$ l'ensemble de tous les sous-espaces fermés dans X. R est continu en y^0 si : $\|y^0 - y\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow d(Ry^0, Ry) \longrightarrow 0$. La famille des opérateurs continus R_α est dans la voisinage de AX_M. $R_\alpha : AX_M \longrightarrow U(X)$. R_α la régularisation de l'équation (1.1) dans X_M alors :*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} R_\alpha Ax = x$$

pour $x \in X_M$; où α est le paramètre de régularisation

1.1.2 Estimation optimale

Afin de stabiliser la solution du problème, on doit le régulariser. Il y a beaucoup de méthodes de régularisation connues dans la littérature mathématique pour un traitement complet des méthodes de régularisation pour des problèmes inverses mal-posés.

Le BHCP (The backward heat conduction problem) est un type de problème mal-posé, même si la solution existe elle ne dépend pas continûment de l'état final. Dans le contexte des méthodes de régularisation pour ce problème beaucoup d'approches ont été faites .

Des auteurs tels que Lattes et Lions [9], Showalter [15] , Ames et al [1], Miller[12] ont approché le BHCP par la méthode de quasi-reversibilité. Tautenhahm et Schroter ont établi l'estimation de l'erreur optimale pour un BHCP spécial. [23] . Seidman a établi la méthode optimale filtre [24]. Mera et al.[11]. Jourhmane et Mera [6] utilisent beaucoup une méthode numérique avec une certaine technique de régularisation pour approcher le problème. Une autre méthode dite de mollification est développée par Hào [5] . Recemment Liu [10] a utilisé un plan de groupe conservé pour résoudre le problème inverse pour l'équation de la chaleur. Kirkup et Wadswoth ont utilisé une autre méthode dite méthode operateur-splitting [8].

Il y a beaucoup de travaux sur l'équation de la chaleur rétrograde homogène; mais la théorie de l'estimation d'erreur est axée sur des inégalités du type Hölder, c-à-d : la solution approchée v et la solution exacte u vérifient : $\|u(.,t) - v(.,t)\| \leq 2E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}}$ où E est une constante telle que : $\|u(x,0)\| \leq E$,et δ est le niveau de bruit sur l'état final $u(x,T)$.

Chapitre 2

La méthode de régularisation de Fourier

Dans le présent chapitre on utilise la régularisation de Fourier pour les problèmes mal-posés suivants :

1) Le problème de la chaleur rétrograde homogène.

2) Le problème de la chaleur rétrograde non homogène.

En général la solution de ces problèmes existe avec des conditions restrictives sur l'état final. On trouve la solution exacte et on recherche la solution approchée par la méthode de régularisation de Fourier, et on donne une estimation de l'erreur, et sous certaines conditions on obtient une estimation du type Hölder.

2.1 Problème de la chaleur rétrograde homogène sur l'intervalle infini

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , & -\infty\ <\ x\ <\ \infty,\quad 0 \leq t < T \\ u\left(x, T\right) = \varphi_T\left(x\right) & ,\quad -\infty <\ x\ < \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Il est facile de voir que la solution u de ce problème est donnée par la transformation de Fourier

$$u\left(x, t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2 (T-t)} \widehat{\varphi}_T\left(\xi\right) d\xi, \tag{2.2}$$

où $\widehat{\varphi}_T$ désigne la transformée de Fourier de φ_T.

Demonstration.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u\left(x, T\right) = \varphi_T\left(x\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}\left(x, t\right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(x, t\right) = 0 \\ u\left(x, T\right) = \varphi_T\left(x\right) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = \mathcal{F}(0)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}(u(x,T))_{(\xi)} = \mathcal{F}(\varphi_T(x))_{(\xi)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)} \quad - \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}(u(x,T))_{(\xi)} = \mathcal{F}(\varphi_T(x))_{(\xi)} \end{cases}$$

On a :

$$\mathcal{F}(u(x,t))_{\ (\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\ u(x,t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\ u(x,t)\,dx$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx. = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\xi x}\ u(x,t)\right)dx.$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\ \mathcal{F}(u(x,t))_{\ (\xi)}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)} = \frac{\partial}{\partial t}\ \mathcal{F}(u(x,t))_{\ (\xi)} \tag{2.3}$$

Dans la transformation de Fourier on choisit supp $u \Subset \mathbb{R} \Longrightarrow \exists\ R > 0$,supp $u \subset [-R, R]$. Donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-i\xi x}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,dx$$

En intégrant par parties on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-i\xi x}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-i\xi x}u(x,t)\right]_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} -i\xi\ e^{-i\xi x}u(x,t)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left[e^{-i\xi x}u(x,t)\right]_{-R}^{R} + i\xi \int_{-R}^{R} e^{-i\xi x}u(x,t)\,dx\right]$$

Comme

$$u(R,t) = u(-R,t) = 0 \Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-i\xi x}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi \int_{-R}^{R} e^{-i\xi x}u(x,t)\,dx$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)_{(\xi)} = i\xi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-i\xi x}u(x,t)\,dx\right)$$

$$\Longrightarrow\ \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)_{(\xi)} = i\xi\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = -\xi^2\mathcal{F}(u(x,t))_{\ (\xi)} \tag{2.4}$$

Soit le problème

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)_{(\xi)} - \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}(u(x,T))_{(\xi)} = \mathcal{F}\left(\varphi_T(x)\right)_{(\xi)} \end{cases}$$

De (2.3) et (2.4) on a

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u(x,t))_{(\xi)} + \xi^2\mathcal{F}(u(x,t))_{(\xi)} = 0 \\ \mathcal{F}(u(x,T))_{(\xi)} = \mathcal{F}\left(\varphi_T(x)\right)_{(\xi)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \partial_t\hat{u}(\xi,t) + \xi^2\hat{u}(\xi,t) = 0 \\ \hat{u}(\xi,T) = \widehat{\varphi}_T(\xi) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow (\hat{u}(\xi,t))^{/} + \xi^2\hat{u}(\xi,t) = 0 \Longrightarrow \frac{(\hat{u}(\xi,t))^{/}}{\hat{u}(\xi,t)} = -\xi^2 \Longrightarrow (\ln\hat{u}(\xi,t))^{/} = -\xi^2$$

$$\Longrightarrow \ln\hat{u}(\xi,t) = \int -\xi^2 dt$$

Donc

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2 t}c(\xi) \Longrightarrow \begin{cases} \hat{u}(\xi,T) = e^{-\xi^2 T}c(\xi) \\ \text{et } \ \hat{u}(\xi,T) = \widehat{\varphi}_T(\xi) \end{cases} \Longrightarrow c(\xi) = e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi),$$

D'où on obtient

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi),$$

où $\hat{u}(\xi,t)$ est la transformation de Fourier de $u(x,t)$ et $\hat{u}(\xi,0) = e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi)$, ainsi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\hat{u}(\xi,t)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)\,d\xi$$

Alors : $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)\,d\xi$ est la solution du probléme. ■

2.1.1 Régularisation Fourier et estimation de l'erreur

Pour $t = T$ on prend $\varphi_T(x)$ la solution exacte et $\varphi_T^\delta(x)$ la solution approchée de $\varphi_T(x)$, Il existe une constante $\delta > 0$ telle que :

$$\|\varphi_T - \varphi_T^\delta\| \leq \delta. \tag{2.5}$$

On note : $\varphi_0(x) = u(x,0)$ et E une constante telle que :

$$\|\varphi_0\|_{H^s} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}_0(\xi)|^2\left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq E, \forall s \geq 0. \tag{2.6}$$

On a$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$.où $u(x,t)$ est donnée par (2.2) est une solution exacte, et

$$u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\,\chi_{\max}d\xi, \tag{2.7}$$

est une solution approchée de la solution exacte u où $\xi_{\max}$ est une constante positive. L'intervalle $[-\xi_{\max},\xi_{\max}]$ compact est tel que $u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)$ existe et est unique et stable, $\chi_{\max}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\xi_{\max},\xi_{\max}]$.

Lemme 1 *On a*

$$\left\|u(x,t)-u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|\leq$$

$$E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-(T-t)s}{2T}}\left[1+\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}\right], \tag{2.8}$$

où $u(x,t)$ et $u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)$ sont donnés par (2.2) et (2.7) où

$$\xi_{\max}=\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Demonstration. On a $\left\|u(x,t)-u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}=\left\|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$

$$=\left\|e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)-e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)\chi_{\max}+e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)\chi_{\max}-e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\chi_{\max}\right\|$$

$$\leq\left\|e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)-e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)\chi_{\max}\right\|+\left\|e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)\chi_{\max}-e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\chi_{\max}\right\|$$

$$=\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2(T-t)}\left(\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2(T-t)}e^{-\xi^2T}\widehat{\varphi}_0(\xi)\right|^2\frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2(T-t)}\left(\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque

$$\begin{cases}\widehat{\varphi}_T(\xi)=e^{-\xi^2T}\hat{u}(\xi,0)=e^{-\xi^2T}\widehat{\varphi}_0(\xi).\\ \quad\text{et}\quad\widehat{\varphi}_0(\xi)=\hat{u}(\xi,0)\\ \widehat{\varphi}_T(\xi)\chi_{\max}=\begin{cases}\widehat{\varphi}_T(\xi) & ;|\xi|\leq\xi_{\max}\\ 0 & ;|\xi|>\xi_{\max}\end{cases}\end{cases}$$

Alors

$$\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2(T-t)}e^{-\xi^2T}\widehat{\varphi}_0(\xi)\right|^2\frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2(T-t)}\left(\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{-\xi^2t}\widehat{\varphi}_0(\xi)\right|^2\frac{(1+\xi^2)^s}{(1+\xi^2)^s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2(T-t)}\left(\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left(\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{\left(e^{-\xi^2 t}\right)^2}{\left(1+\xi^2\right)^s}\right) \left|\widehat{\varphi}_0\left(\xi\right)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \left(\sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)2}\right) \left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)-\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{\left(e^{-\xi^2 t}\right)^2}{\left(1+\xi^2\right)^s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left|\widehat{\varphi}_0\left(\xi\right)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)}\right) \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)-\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s} \left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}} \left|\widehat{\varphi}_0\left(\xi\right)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}} \left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)-\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque

$$\begin{cases} \|\varphi_0\|_{H^s} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{\varphi}_0\left(\xi\right)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ \quad\text{et} \qquad \|\varphi_0\|_{H^s} \leq E. \end{cases}$$

Donc

$$\sup_{|\xi|\ >\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s} \left(\int_{|\xi|>\ \xi_{\max}} \left|\widehat{\varphi}_0\left(\xi\right)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\sup_{|\xi|\ \leq\ \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \left(\int_{|\xi|\ \leq\ \xi_{\max}} \left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)-\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \sup_{|\xi|\ >\ \xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s} \|\varphi_0\|_{H^s} + \sup_{|\xi|\ \leq\ \xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)} \|\varphi_T-\varphi_T^{\delta}\|.$$

Comme

$$\begin{cases} \qquad \|\varphi_0\|_{H^s} \leq E \\ \text{et} \quad \left\|\widehat{\varphi}_T-\widehat{\varphi}_T^{\delta}\right\| = \|\varphi_T-\varphi_T^{\delta}\| \leq \delta \end{cases}$$

Alors

$$\sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s}\|\varphi_0\|_{H^S} + \sup_{|\xi|\le\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)}\|\varphi_T-\varphi_T^\delta\| \le \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s}E + \sup_{|\xi|\le\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)}\delta.$$

$$\le \frac{e^{-t\xi_{\max}^2}}{|\xi_{\max}|^s}E + e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\delta.$$

$$= \frac{e^{-t\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)}}{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{s}{2}}}E + e^{(T-t)\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)}\delta.$$

$$\text{tq} : \xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{e^{\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{ts}{2T}}\right)}}{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{s}{2}}}E + e^{\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S(T-t)}{2T}}\right)}\delta$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{st}{2T}} E\left(\frac{1}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{(T-t)s}{2T}}\delta$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{st}{2T}} E\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^{\frac{-s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{(T-t)s}{2T}}$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}} E\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{(T-t)s}{2T}}.$$

Puisque $\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}} = 1$.et : $\frac{st}{2T}-\frac{sT}{2T} = \frac{-s(T-t)}{2T}$ et : $\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{T-t}{T}}\delta = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1-\frac{t}{T}}\delta = \delta^{\frac{t}{T}}$. Donc

$$\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}} E\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}} E\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}$$

$$= E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}$$

$$= E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{-s(T-t)}{2T}}\left[\left(\frac{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}+1\right].$$

Ainsi (2.8) est démontrée. ∎

2.1.2 Le choix de $\xi_{\max}$

Pour trouver une estimation de stabilité de type Hölder, on choisit $\xi_{\max}$ par la formule (2.9), c'est à dire :

$$\xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \text{où } \ln\frac{E}{\delta} > 1; \forall s > 0$$

.

Demonstration. D'après le Lemme 1, on a

$$\left\|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\| \leq \sup_{|\xi|>\xi_{\max}} \frac{e^{-\xi^2 t}}{|\xi|^s}E + \sup_{|\xi|\leq\xi_{\max}} e^{\xi^2(T-t)}\delta$$

$$\leq \frac{e^{-t\xi_{\max}^2}}{|\xi_{\max}|^s}E + e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\delta = e^{-t\xi_{\max}^2}\left(\frac{E}{\xi_{\max}^S} + e^{T\xi_{\max}^2}\delta.\right)$$

$$\leq \frac{E}{\xi_{\max}^s} + e^{T\xi_{\max}^2}\delta.\text{puisque } e^{-t\xi_{\max}^2} < 1.$$

Donc

$$\left\|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\| \leq \frac{E}{\xi_{\max}^s} + e^{T\xi_{\max}^2}\delta \tag{2.10}$$

et par Hölder on a

$$\left\|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\| \leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{2.11}$$

Par (2.10) et (2.11) on trouve que

$$\frac{E}{\xi_{\max}^s} + e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} + E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}.$$

Donc

$$\frac{E}{\xi_{\max}^s} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{et} \quad e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

On pose $M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta$

$$M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^2} = \frac{M}{\delta} \Longrightarrow T\xi_{\max}^2 = \ln\left(\frac{M}{\delta}\right)$$

$$\Longrightarrow \xi_{\max}^2 = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{M}{\delta}\right) \Longrightarrow \xi_{\max} = \left(\ln\left(\frac{M}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

1)

$$\frac{E}{\xi_{\max}^s} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \frac{1}{\xi_{\max}^s} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \xi_{\max}^s \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \xi_{\max} \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{sT}}.$$

$$\Longrightarrow T\xi_{\max}^2 \geq T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}} \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^2} \geq e^{T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}} \Longrightarrow M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \geq \delta e^{T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}}$$

$$\Longrightarrow M \geq \delta e^{T\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}} \geq \delta e^{T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{sT}}} = \delta\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} = E\left(\frac{\delta}{E}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^2.$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}.$$

$$\text{tq}: \frac{\delta}{E} \geq \ln\frac{\delta}{E} \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^2 \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2$$

Puisque

$$\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = [\ln\delta - \ln E]^2 = [-(\ln E - \ln\delta)]^2 = [\ln E - \ln\delta]^2 = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

Donc

$$M \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}}$$

Comme

$$\frac{E}{\delta} \geq \ln\frac{E}{\delta} \Longrightarrow \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}}$$

On a

$$M \geq E\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{s}+2}$$

Puisque

$$2\left(\frac{t}{s}+1\right) > 0 > -\frac{s}{2} \Longrightarrow \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{s}+1\right)} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{S}+1\right)} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

Donc

$$M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} etM = e^{T\xi_{\max}^2}\delta$$

$$\Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^2}\delta \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{2.13}$$

2)

$$e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \quad \text{tq :} \quad M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta$$

Puisque

$$\frac{\delta}{E} \geq \ln\frac{\delta}{E} \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s} \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2s} \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} \geq 1$$

Donc

$$M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} 1 \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right]$$

$$\text{tq :} \quad \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}.$$

Puisque

$$\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = [\ln\delta - \ln E]^2 = [-(\ln\delta - \ln E)]^2 = [\ln E - \ln\delta]^2 = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
M &\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}\right] \\
&= E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\right] \\
&\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\right]
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
\left\{\begin{array}{ccc} \frac{t}{T} & > & 0 > -2s \\ \text{et} & \frac{\delta}{E} & < 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}
$$

Alors

$$
\left\{\begin{array}{l} M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \\ \text{et} : M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \end{array}\right. \Longrightarrow M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \tag{2.14}
$$

En utilisant (2.13) et (2.14), on a

$$
M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}
$$

$$
\text{par (2.12) on a } \Longrightarrow \xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\Longrightarrow \xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \text{pour } \ln\frac{E}{\delta} > 1\,.\left(\text{donc : } \frac{E}{\delta} > 1\right)\ ;\ \forall\ s > 0.
$$

■

Remarque 1 *: Il y a plusieurs solutions qui approchent la solution exacte mais pour trouver la solution qui est très proche il faut choisir $\xi_{\max}$ qui donne l'estimation de type Hölder pour laquelle on a la stabilité.*

2.2 Problème de la chaleur rétrograde non homogène

Soit le problème suivant :

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + f(x,t)\ ;\ -\infty < x < \infty,\ \ 0 \leq t < T \\
u(x,T) &= \varphi_T(x)
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Il est facile de voir que la solution u de ce problème est donnée par

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\left(e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi)+\int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\widehat{f}(s)\,ds\right)d\xi. \tag{2.16}$$

En effet

Demonstration. En utilisant la transformation de Fourier on a

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\quad-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-f(x,t)\right)_{(\xi)}=0\\ \mathcal{F}(u(x,T))_{(\xi)}=\mathcal{F}(\varphi_T(x))_{(\xi)}\end{array}\right.\Longrightarrow$$

Donc : par (2.3) et (2.4) on a

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_t\hat{u}(\xi,t)+\xi^2\hat{u}(\xi,t)=\widehat{f}(x,t)\\ \text{et :}\quad\hat{u}(\xi,T)=\widehat{\varphi}_T(\xi).\end{array}\right. \tag{2.17}$$

On pose : $\quad y(t)=\hat{u}(\xi,t)$, donc

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_t\hat{u}(\xi,t)+\xi^2\hat{u}(\xi,t)=\widehat{f}(x,t)\\ \text{et :}\quad\hat{u}(\xi,T)=\widehat{\varphi}_T(\xi).\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}y'(t)+\xi^2y(t)=\widehat{f}(t)\\ y(T)=\widehat{\varphi}_T(\xi)\end{array}\right.$$

On recherche la solution de l'équation par la méthode de variation des constantes :

$$y'(t)+\xi^2y(t)=\widehat{f}(t)$$

On pose : $\quad y(t)=W(t)V(t)$

$$y(t)=W(t)V(t)\Longrightarrow y'(t)=W\frac{dV}{dt}+V\frac{dW}{dt}$$

Alors

$$y'(t)+\xi^2y(t)=\widehat{f}(t)\Longrightarrow\left(W\frac{dV}{dt}+V\frac{dW}{dt}\right)+\xi^2W(t)V(t)=\widehat{f}(t)$$

$$\Longrightarrow W(t)\left(\frac{dV}{dt}+\xi^2V(t)\right)+V(t)\frac{dW}{dt}-\widehat{f}(t)=0$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{c}\frac{dV}{dt}+\xi^2V(t)=0.\\ V(t)\frac{dW}{dt}=\widehat{f}(t)\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow\frac{dV}{dt}+\xi^2V(t)=0\Longrightarrow\frac{dV}{dt}=-\xi^2V(t)\Longrightarrow\frac{dV}{V}=-\xi^2dt\Longrightarrow V(t)=e^{-\xi^2t}, \tag{2.18}$$

$$\text{et : }V(t)\frac{dW}{dt}=\widehat{f}(t)\Longrightarrow\frac{dW}{dt}=\frac{\widehat{f}(t)}{V(t)}\Longrightarrow dW=\frac{\widehat{f}(t)}{V(t)}dt=e^{\xi^2t}\widehat{f}(t)\,dt$$

$$\Longrightarrow \quad dW = e^{\xi^2 t}\widehat{f}(t)\,dt \Longrightarrow W(t) = C + \int e^{\xi^2 t}\widehat{f}(t)\,dt. \tag{2.19}$$

Donc

$$y(t) = e^{-\xi^2 t}\left(C + \int e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right) \Longrightarrow y(t) = e^{-\xi^2 t}\left(C + \int_t^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \ y(T) &= e^{-\xi^2 T}\left(C + \int_T^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right) \\ &= \widehat{\varphi}_T(\xi) \Longrightarrow C = e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi) \\ \Longrightarrow \quad y(t) &= e^{-\xi^2 t}\left(e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right) \\ &\Longrightarrow y(t) = e^{\xi^2 (T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)}\widehat{f}(s)\,ds \end{aligned}$$

On aura :

$$\begin{aligned} y(t) \quad &= \quad \hat{u}(\xi,t) \Longrightarrow \hat{u}(\xi,t) = e^{\xi^2 (T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)}\widehat{f}(s)\,ds \\ &\Longrightarrow \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\left(e^{\xi^2 (T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)}\widehat{f}(s)\,ds\right) d\xi \ . \end{aligned}$$

■

2.2.1 Régularisation Fourier et estimation de l'erreur

Comme

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\left(e^{\xi^2 (T-t)}\widehat{\varphi}_T(\xi) + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)}\widehat{f}(s)\,ds\right) d\xi, \text{ et } \ u(x,T) = \varphi_T(x).$$

$$u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\left(e^{\xi^2 (T-t)}\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)\,\chi_{\max} + \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)}\widehat{f}(s)\,\chi_{\max} ds\right) d\xi.$$

$$\text{Soit } \left\|\hat{g} - \hat{g}^{\delta}\right\| \le \beta \text{ où } \hat{g}(\xi,t) = \int_t^T e^{\xi^2 (s-t)}\widehat{f}(s)\,ds. \tag{2.20}$$

Lemme 2 *Si on choisit* $\xi_{\max}$ *par la formule (2.9), et (2.20) et* $\left\|\hat{g} - \hat{g}^{\delta}\right\| \le \beta$ *alors :*

$$\left\|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|_2$$

$$\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\left[\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}+1+\frac{\beta}{E}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{S}{2}}\right]. \qquad (2.21)$$

Demonstration.

$$\left\|u\left(x,t\right)-u_{\delta,\xi_{\max}}\left(x,t\right)\right\|=\left\|\hat{u}\left(x,t\right)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}\left(x,t\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$=\left\|e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)+\int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\widehat{f}\left(s\right)ds-e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)\chi_{\max}-\int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\widehat{f^{\delta}}\left(s\right)\chi_{\max}ds\right\|$$

$$=\begin{array}{c}\left\|e^{-\xi^2t}\left(e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)+\int_t^T e^{\xi^2s}\widehat{f}\left(s\right)ds\right)-e^{-\xi^2t}\left(e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\chi_{\max}-\int_t^T e^{\xi^2s}\widehat{f}\left(s\right)\chi_{\max}ds\right)\right.\\ +e^{-\xi^2t}\left(e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\chi_{\max}-\int_t^T e^{\xi^2s}\widehat{f}\left(s\right)\chi_{\max}ds\right)\\ \left.-e^{-\xi^2t}\left(e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)\chi_{\max}-\int_t^T e^{\xi^2s}\widehat{f^{\delta}}\left(s\right)\chi_{\max}ds\right)\right\|\end{array}$$

$$\begin{aligned}\leq\ &\left\|e^{-\xi^2t}\left(e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)-e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\chi_{\max}\right)+e^{-\xi^2t}\left(\int_t^T e^{\xi^2s}\left(\widehat{f}\left(s\right)-\widehat{f}\left(s\right)\chi_{\max}\right)ds\right)\right\|\\ &+\left\|e^{\xi^2(T-t)}\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)\chi_{\max}-e^{-\xi^2t}e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\chi_{\max}+e^{-\xi^2t}\int_t^T e^{\xi^2s}\left(\widehat{f}\left(s\right)\chi_{\max}-\widehat{f^{\delta}}\left(s\right)\chi_{\max}\right)ds\right\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leq\ &\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{-\xi^2t}\left(e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)+\int_t^T e^{\xi^2s}\widehat{f}\left(s\right)ds\right)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\ &+\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{-\xi^2t}e^{\xi^2T}\left(\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)-\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\right)+e^{-\xi^2t}\int_t^T e^{\xi^2s}\left(\widehat{f}\left(s\right)-\widehat{f^{\delta}}\left(s\right)\right)ds\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\leq\ &e^{-\xi_{\max}^2t}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2T}\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)+\int_t^T e^{\xi^2s}\widehat{f}\left(s\right)ds\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\ &+e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}\left(\xi\right)-\widehat{\varphi}_T\left(\xi\right)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\\ &+\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{-\xi^2t}\int_t^T e^{\xi^2s}\left(\widehat{f}\left(s\right)-\widehat{f^{\delta}}\left(s\right)\right)ds\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} l_1 &= e^{-\xi_{\max}^2 t}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi)+\int_t^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ l_2 &= e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{et } l_3 &= \left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{-\xi^2 t}\int_t^T e^{\xi^2 s}\left(\widehat{f}(s)-\widehat{f^{\delta}}(s)\right)ds\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

1) $l_1 = e^{-\xi_{\max}^2 t}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi)+\int_t^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$

$$l_1 = e^{-\xi_{\max}^2 t}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi)+\int_t^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$\leq e^{-\xi_{\max}^2 t}\left(\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi)+\int_0^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{puisque : } \int_0^T = \int_0^T + \int_t^T \Longrightarrow \int_t^T \leq \int_0^T .$$

$$\leq e^{-\xi_{\max}^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(0,\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \text{ tq : } \quad \hat{u}(\xi,0) = e^{\xi^2 T}\widehat{\varphi}_T(\xi)+\int_0^T e^{\xi^2 s}\widehat{f}(s)\,ds$$

$$\leq e^{-\xi_{\max}^2 t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(0,\xi)|^2\frac{\left(1+\xi^2\right)^S}{\left(1+\xi^2\right)^S}d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{e^{-\xi_{\max}^2 t}}{\left(1+\xi_{\max}^2\right)^{\frac{S}{2}}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(0,\xi)|^2\left(1+\xi^2\right)^S d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow I_1 \leq \frac{e^{-\xi_{\max}^2 t}}{\xi_{\max}^s}\|\hat{u}(0,\xi)\|_{H^S} \leq \frac{e^{-\xi_{\max}^2 t}}{\xi_{\max}^s}E. \text{ Ainsi on a}$$

$$\Longrightarrow \; l_1 \leq \frac{e^{-\xi_{\max}^2 t}}{\xi_{\max}^s}E. \tag{2.22}$$

2) $l_2 = e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$

$$l_2 = e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{\varphi}_T^{\delta}(\xi)-\widehat{\varphi}_T(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\|\varphi_T-\varphi_T^{\delta}\| \text{ puisque : } \quad \|\varphi_T-\varphi_T^{\delta}\|\leq\delta$$

$$\Longrightarrow I_2 \leq e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\delta. \tag{2.23}$$

3) $l_3=\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|e^{-\xi^2 t}\int_t^T e^{\xi^2 s}\left(\widehat{f}(s)-\widehat{f^{\delta}}(s)\right)ds\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$

$$=\left(\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|\int_t^T e^{\xi^2(s-t)}\widehat{f}(s)-e^{\xi^2(s-t)}\widehat{f^{\delta}}(s)\,ds\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{g}(\xi,t)-\hat{g}^{\delta}(\xi,t)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\hat{g}-\hat{g}^{\delta}\right\|\leq\beta. \text{ puisque : } \left\|\hat{g}-\hat{g}^{\delta}\right\|\leq\beta$$

$$l_3\leq\beta. \tag{2.24}$$

Par (2.22), (2.23),(2.24), on a

$$\left\|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq\frac{e^{-\xi_{\max}^2 t}}{\xi_{\max}^s}E+e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\delta+\beta=e^{-\xi_{\max}^2 t}\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta+e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\delta$$

$$=e^{-\xi_{\max}^2 t}\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta+e^{\xi_{\max}^2(T-t)}\delta\leq\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta+e^{\xi_{\max}^2 T}\delta$$

$$\left\|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta+e^{\xi_{\max}^2 T}\delta. \tag{2.25}$$

De (2.9), on a

$$\left\|u(x,t)-u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|$$

$$\leq\frac{E}{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}\right)\right)^{\frac{s}{2}}}+e^{\left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)T}\delta+\beta$$

$$=E\left[\frac{1}{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right]^{\frac{s}{2}}+\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{T}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{sT}{2T}}\delta+\beta$$

$$\left\|\hat{u}(x,t)-\hat{u}_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq$$

$$E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\left[\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right]^{\frac{s}{2}}+\left(\frac{E}{\delta}\right)\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\delta+\beta$$

$$=E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}\left[\left[\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}}\right]^{\frac{s}{2}}+\frac{\beta}{E}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}+\frac{1}{\delta}\delta\right].$$

Ainsi (2.21) est démontrée. ■

2.2.2 Choix de $\xi_{\max}$

Pour trouver une estimation de stabilité du type Hölder. On choisit :

$$0<\beta\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}. \tag{2.26}$$

Demonstration. Par le lemme2 et l'estimation de (2.25)et par l'estimation de Hölder : (2.11). On a

$$\left(\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta\right)+e^{\xi_{\max}^2 T}\delta\leq 2E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}=E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}+E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Alors

$$\frac{E}{\xi_{\max}^s}+\beta\leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \tag{2.27}$$

et

$$e^{\xi_{\max}^2 T}\delta\leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}. \tag{2.28}$$

1) Comme

$$0<\beta\leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}, \text{ On a} \tag{2.29}$$

$$\frac{\delta}{E}<1\Longrightarrow\frac{\delta}{E}\geq\left(\frac{\delta}{E}\right)^2\Longrightarrow\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\geq\frac{\delta}{E}\geq\left(\frac{\delta}{E}\right)^2\geq\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2=\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

$$\Longrightarrow\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\geq\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2\geq\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}};2>0>-\frac{s}{2}$$

$$\Longrightarrow\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\geq\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

Donc

$$\beta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}} \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \beta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} = E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

$$\Longrightarrow E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} - \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Et on a

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} + \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \frac{E}{\xi_{\max}^{s}} \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} - \beta \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}}$$

Alors

$$\frac{E}{\xi_{\max}^{s}} \leq E^{1-\frac{t}{T}}\delta^{\frac{t}{T}} = E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \frac{1}{\xi_{\max}^{s}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \Longrightarrow \xi_{\max}^{s} \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$T\xi_{\max}^{2} \geq T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}} \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^{2}} \geq e^{T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}}}$$

On pose

$$M = e^{T\xi_{\max}^{2}}\delta \;\Longrightarrow M = e^{T\xi_{\max}^{2}}\delta \geq \delta e^{T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}}} = \delta\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} \tag{2.30}$$

$$\Longrightarrow M \geq \delta e^{T\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{ST}}} = E\left(\frac{\delta}{E}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}}$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} .\text{puisque } \; \frac{\delta}{E} \geq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2}$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} \geq E\left(\ln\;\frac{\delta}{E}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}}$$

$$\text{Puisque } \quad \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{2} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2}$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}}$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2t}{S}+2} = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{s}+1\right)}$$

$$\Longrightarrow M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{s}+1\right)} \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\text{Puisque } \quad \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(\frac{t}{s}+1\right)} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

On a

$$\begin{cases} M \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \\ \text{et} \ \ M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \end{cases} \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^2}\delta \geq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}. \tag{2.31}$$

2) Par (2.28) on a

$$M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} 1 \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right) \ \text{puisque} \ \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} \geq 1$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right)$$

$$= E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right)$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} \ \text{tq :} \ \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{s}{2}}$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}\right).$$

$$\Longrightarrow M \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{2s}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}\right)$$

$$= E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2s}\right)$$

$$\text{tq :} \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{-2s} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2s}$$

Puisque

$$\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{t}{T}} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{-2s}$$

$$\Longrightarrow M = e^{T\xi_{\max}^2}\delta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}. \tag{2.32}$$

Donc par (2.31) et (2.32) on a

$$e^{T\xi_{\max}^2}\delta = E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \Longrightarrow e^{T\xi_{\max}^2} = \frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}$$

$$\Longrightarrow T\xi_{\max}^2 = \ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)$$

$$\Longrightarrow \xi_{\max}^2 = \frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)$$

d'où

$$\Longrightarrow \quad \xi_{\max} = \left(\ln\left(\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{pour} \qquad \ln\frac{E}{\delta} > 1\,;\,\forall s > 0.$$

Ainsi le choix de $\xi_{\max}$ est prouvé. ■

Remarque 2 *:1) Pour trouver l'estimation de type Hölder il faut choisir β tel que :*

$$0 < \beta \leq E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2}}. \tag{2.33}$$

sous les conditions du lemme 2.

2) Si : $s = 0$ alors d'après l'estimation (2.21), on a

$$\Longrightarrow \left\|u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t)\right\|_2 \leq E\left[2 + \frac{\beta}{E}\right]$$

$$\Longrightarrow \left\|u(x,0) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,0)\right\|_2 \leq E\left[2 + \frac{\beta}{E}\right] = 2E + \beta$$

Donc : l'estimation d'erreur est bornée par : $2E + \beta$.

3) Soit : $t = 0$ et $\delta \to 0^+$ et $s > 0$. Alors

$$\delta \to 0^+ \Longrightarrow \frac{E}{\delta} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \ln\frac{E}{\delta} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}} \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{\delta \longrightarrow 0^+}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}} = T^{\frac{s}{2}}$$

$$E\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(1 + \left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\delta}\right) + \ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{S}{2T}}}\right)^{\frac{s}{2}}\right) \longrightarrow 0$$

$$\delta \longrightarrow 0^+ \quad \text{et} \quad s > 0.$$

Donc la solution est stable pour $t = 0$ et $\delta \longrightarrow 0^+$, $s > 0$.

Chapitre 3

Problème inverse pour l'équation de la chaleur homogène complète à coefficients variables

3.1 Régularisation Fourier et estimation de l'erreur

Soit le problème :

$$\begin{cases} u_t = a(x)\,u_{xx} + b(x)\,u_x + c(x)\,u; x > 0, t > 0 \\ \text{et :} \quad u(1,t) = g(t)\,; t \geq 0 \\ \text{et :} \quad u(x.0) = 0; x \geq 0 \end{cases} . \tag{3.1}$$

tel que: a,b,c sont des fonctions vérifiant

$$\begin{cases} a(x) \in C^2(\mathbb{R}^+)\,, \ \leftthreetimes \ \leq \ a(x) \ \leq \ \curlywedge \\ b(x) \in C^1(\mathbb{R}^+) \quad \text{tel que :} \quad \leftthreetimes, \ \curlywedge > \ 0 \\ c(x) \in C(\mathbb{R}^+)\,.\text{tel que :}\ c(x) \leq 0 \ \ , x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

$$f(t) = u(0,t) \neq 0; t \geq 0$$

$\|f\|_p \leq E$ et E est une constante telle que $p \geq 0$ et

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\xi^2\right)^P \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq E \tag{3.2}$$

Notation 3 *Dans cette partie on travaille sur l'intervalle* $[0.1]$ *par rapport à* x.

Lemme 3 *: On a*

$$i\xi v(x,\xi) = a(x)\,v_{xx} + b(x)\,v_x + c(x)\,v, \ \ x \ > \ 0 \ , \ \xi \in \mathbb{R}$$

où $v(x,\xi)$ la solution de ce problème.

$$\lim_{x\to\infty} v(x,\xi) = 0, \xi \neq 0, \tag{3.3}$$

$$v(0,\xi) = 1,. \lim_{x\to\infty} v(x,0) \quad est \quad bornée.$$

On suppose que le problème (3.1) admet une solution

$$\begin{array}{c} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi, x > 0 \\ et : \hat{u}(x,t) = v(x,\xi) \widehat{f}(\xi) \end{array} \tag{3.4}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v_{xx}(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi, \\ et : u_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v_x(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow i\xi u(x,\xi) = a(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v_{xx}(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi$$

$$+b(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v_x(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi + +c(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v(x,\xi) d\xi$$

$$i\xi u(x,\xi) \ = i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Alors

$$i\xi v(x,\xi) = a(x) v_{xx}(x,\xi) + b(x) v_x(x,\xi) + c(x) v(x,\xi)$$

$$\Longrightarrow v \quad est \quad une \quad solution \quad du \quad problème \ (3.1)$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} v(x,\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \\ et : u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \hat{u}(x,\xi) d\xi \end{array} \right. \Longrightarrow v(x,\xi) \widehat{f}(\xi) = \hat{u}(x,\xi)$$

Aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(1,\xi) = g(\xi), \xi \geq 0 \\ \hat{u}(x,\xi) = v(x,\xi) \widehat{f}(\xi) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(1,\xi) = \hat{g}(\xi) \\ et \ \ \hat{u}(1,\xi) = v(1,\xi) \widehat{f}(\xi) \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow v(1,\xi) \widehat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) \Longrightarrow \widehat{f}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{v(1,\xi)}. \tag{3.5}$$

Donc :

$$\hat{u}(x,\xi) = \frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)} \hat{g}(\xi). \tag{3.6}$$

Lemme 4 *: Il existe des constantes c_1, c_2 pour $x \in [0,1]$ et $|\xi| \geq \xi_0$. Donc*

$$c_1 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(x,\xi)| \leq c_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}. \tag{3.7}$$

Où $\xi \in \mathbb{R}$ *et* $A\left(x\right)=\int_0^x\left(\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\right)ds$

Demonstration. Pour montrer :

$$c_1 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq \left|v\left(x,\xi\right)\right| \leq c_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \text{tq : } c_1, c_2 \text{ constantes}$$

On montre que :

$$c_1 \leq \left|v\left(x,\xi\right)\right| e^{A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq c_2$$

On a :

$$\begin{cases} \leftthreetimes \leq a\left(s\right) \leq \rightthreetimes \\ \text{tq : } \leftthreetimes, \rightthreetimes > 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\leftthreetimes}} \geq \frac{1}{\sqrt{a\left(s\right)}} \geq \frac{1}{\sqrt{\rightthreetimes}}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} v\left(x,\xi\right) &= 0 \text{ , } \xi \neq 0 \Longrightarrow v\left(x,\xi\right) \text{ converge} \Longrightarrow v\left(x,\xi\right) \text{ borné} \\ &\Longrightarrow \exists\ k_{1,}\ k_2 > 0 \text{ tq , } k_1 \leq \left|v\left(x,\xi\right)\right| \leq k_2 \end{aligned}$$

1) Soit : $\left|v\left(x,\xi\right)\right| \leq k_2$

$$\begin{aligned} \left|v\left(x,\xi\right)\right| \leq k_2 \Longrightarrow \left|v\left(x,\xi\right)\right| e^{A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} &\leq k_2 e^{\left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a(s)}} ds\right)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \\ &\leq k_2 e^{\frac{1}{\sqrt{\leftthreetimes}} x \sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \quad \text{tq} \quad \frac{1}{\sqrt{\leftthreetimes}} \geq \frac{1}{\sqrt{a\left(s\right)}} \\ &\leq k_2 e^{\frac{1}{\sqrt{\leftthreetimes}}\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq c_2. \text{ tq } \quad x \leq 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\left|v\left(x,\xi\right)\right| e^{A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq c_2 \Longrightarrow \left|v\left(x,\xi\right)\right| \leq c_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \tag{3.8}$$

2) $k_1 \leq \left|v\left(x,\xi\right)\right|$

$$\begin{aligned} k_1 \leq \left|v\left(x,\xi\right)\right| \Longrightarrow \left|v\left(x,\xi\right)\right| e^{A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \geq k_1 e^{A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} = k_1 e^{\left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a(s)}} ds\right)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \\ \Longrightarrow k_1 e^{\left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a(s)}} ds\right)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \geq k_1 e^{\frac{1}{\sqrt{\rightthreetimes}} x \sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \geq k_1 e^0 \geq c_1 \\ tq : \frac{1}{\sqrt{a\left(s\right)}} \geq \frac{1}{\sqrt{\rightthreetimes}} \end{aligned}$$

Donc

$$\left|v\left(x,\xi\right)\right| e^{A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \geq c_1 \Longrightarrow \left|v\left(x,\xi\right)\right| \geq c_1 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} . \tag{3.9}$$

Par : (3.8) et (3.9) on obtient

$$c_1 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(x,\xi)| \leq c_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}, \xi \in \mathbb{R}.$$

■

Lemme 5 *:*

$$a(x)\, v_{xx} + b(x)\, v_x + c(x)\, v = 0,\ \ x > 0\ . \tag{3.10}$$

$$v(0) = 1\ \ ;\ v(x)_{x\longrightarrow\infty}\ \ \textit{borne},$$

admet une solution unique alors : il existe c_1', c_2' tel que

$$c_1' e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(1,\xi)| \leq c_2' e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}, \forall\xi \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Demonstration. *La démonstration est similaire à la démonstration du lemme 4.* ■

Par le Lemme 4 et le Lemme 5 on a

$$\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right| \geq \frac{c_1}{c_2'} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}},\ \text{pour :}\ \ |\xi| \geq \xi_0$$

avec

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)} \hat{g}(\xi)\, d\xi\, ; |\xi|\ \ < \xi_{\max}\ , \tag{3.12}$$

où δ est une constante positive telle que $\|g - g_\delta\| \leq \delta$, et

$$u_\delta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)} \hat{g}_\delta(\xi)\, \chi_{\max} d\xi. \tag{3.13}$$

Théorème 4 *: Supposons que le problème (3.10) admet une solution unique, et soit $g_\delta(t)$ la solution approchée de la solution $g(t)$ si $x = 1$ telle que : $g(t) = u(1,t)$ la solution si $x = 1$; $\|g - g_\delta\| \leq \delta$ et $\|f\|_p \leq E$, $p \geq 0$. où $f(t) = u(0,t)$ est la solution si $x = 0$. On pose $u_\delta(x,t)$ la solution approchée par la régularisation de Fourier définie par (3.13). Si*

$$\xi_{\max} = 2\left(\frac{1}{A(1)} \ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)^2. \tag{3.14}$$

Alors l'estimation d'erreur est

$$\|u(x,.) - u_\delta(x,.)\| \leq C E^{\left(1-\frac{A(X)}{A(1)}\right)} \delta^{\frac{A(X)}{A(1)}} \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p\left(1-\frac{A(X)}{A(1)}\right)} (1 + 0\,(1))\ ;\ \textit{pour} : \delta \longrightarrow 0. \tag{3.15}$$

Où C , δ et E sont des constantes positives.

Demonstration.

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|^2=\|\hat{u}(x,\xi)-\hat{u}_\delta(x,\xi)\|^2=\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)-\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}_\delta(\xi)\chi_{\max}\right\|^2$$

$$=\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)-\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)\chi_{\max}+\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)\chi_{\max}-\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}_\delta(\xi)\chi_{\max}\right\|^2$$

$$\leq\left[\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi)\chi_{\max}\right)\right\|+\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)\chi_{\max}-\hat{g}_\delta(\xi)\chi_{\max}\right)\right\|\right]^2$$

$$\leq 2\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi)\chi_{\max}\right)\right\|^2+2\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)\chi_{\max}-\hat{g}_\delta(\xi)\chi_{\max}\right)\right\|^2$$

Puisque

$$\begin{cases}(a-b)^2=a^2+b^2-2ab\geq 0\Longrightarrow a^2+b^2\geq 2ab\\(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leq a^2+b^2+a^2+b^2=2a^2+2b^2.\end{cases}$$

Donc

$$2\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)-\hat{g}(\xi)\chi_{\max}\right)\right\|^2+2\left\|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)\chi_{\max}-\hat{g}_\delta(\xi)\chi_{\max}\right)\right\|^2$$

$$=2\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)\right|^2d\xi+2\int_{|\xi|\leq\xi_{\max}}\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right)\right|^2d\xi$$

$$=2\int_{|\xi|\,>\,\xi_{\max}}\left|v(x,\xi)\,\widehat{f}(\xi)\right|^2d\xi+2\int_{|\xi|\,\leq\,\xi_{\max}}\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right)\right|^2d\xi;\ \text{tq}\ :\widehat{f}(\xi)=\frac{\hat{g}(\xi)}{v(1,\xi)}$$

$$=2\int_{|\xi|\,>\,\xi_{\max}}\left|v(x,\xi)\left(1+\xi^2\right)^{-\frac{P}{2}}\left(1+\xi^2\right)^{\frac{P}{2}}\widehat{f}(\xi)\right|^2d\xi+2\int_{|\xi|\,\leq\,\xi_{\max}}\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right)\right|^2d\xi.$$

$$=2\int_{|\xi|>\,\xi_{\max}}|v(x,\xi)|^2\left(1+\xi^2\right)^{-p}\left(1+\xi^2\right)^{p}\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2d\xi+2\int_{|\xi|\,\leq\,\xi_{\max}}\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2\left|\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right|^2d\xi.$$

on a d'après (3.7) alors :

$$|v(x,\xi)|^2\leq c_2^2e^{-2A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}=c_2^2e^{-A(x)\sqrt{2|\xi|}}$$

on a

$$|\xi|\geq\xi_{\max}\Longrightarrow 2|\xi|\geq 2\xi_{\max}$$

$$\Longrightarrow\sqrt{2|\xi|}\geq\sqrt{2\xi_{\max}}\Longrightarrow -A(x)\sqrt{2|\xi|}\leq -A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}$$

donc

$$|v(x,\xi)|^2\leq c_2^2e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\tag{3.16}$$

soit

$$\left(1+\xi^2\right) \geq \left(1+\xi_{\max}^2\right) \geq \xi_{\max}^2 \Longrightarrow \left(1+\xi^2\right)^p \geq \xi_{\max}^{2p} \Longrightarrow \left(1+\xi^2\right)^{-p} \leq \xi_{\max}^{-2p}. \qquad (3.17)$$

on a

$$\left\{\begin{array}{c} \|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{et : } \|f\|_p \leq E \ , \ p \ \geq \ 0. \end{array}\right. \Longrightarrow \|f\|_p^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \qquad (3.18)$$

donc

$$\begin{aligned} & 2\int_{|\xi|\,>\,\xi_{\max}} |v(x,\xi)|^2 \left(1+\xi^2\right)^{-p}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ \leq\ & 2\int_{|\xi|>\,\xi_{\max}} c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \end{aligned}$$

$$= 2c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}\int_{|\xi|>\xi_{\max}}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = 2c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi$$

par (3.18) on a

$$2c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = 2c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}\|f\|_p^2 .\text{tq } \|f\|_p \leq E.$$

donc

$$2\int_{|\xi|>\,\xi_{\max}} |v(x,\xi)|^2 \left(1+\xi^2\right)^{-p}\left(1+\xi^2\right)^p \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \leq 2c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}E^2 \qquad (3.19)$$

on a par (3.7) et (3.11)

$$\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2 \leq \frac{c_2^2 e^{-2A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}}{c_1'^2 e^{-2A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}} = \frac{c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2|\xi|}}}{c_1'^2 e^{-A(1)\sqrt{2|\xi|}}} = \frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}$$

on a

$$\left\{\begin{array}{c} |\xi| \leq \xi_{\max} \Longrightarrow \sqrt{2|\xi|} \leq \sqrt{2\xi_{\max}} \\ \text{et} \quad A(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{a(s)}}\right) ds.tq : 0 < \ \lambda \ \leq a(s) \\ et : 0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow A(1) \geq A(x) \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow (A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|} \leq (A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi_{\max}|}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2 \leq \frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi_{\max}|}} \qquad (3.20)$$

et on a :

$$\|g-g_\delta\| \leq \delta \Longrightarrow \|\hat{g}-\hat{g}_\delta\|^2 \leq \delta^2 \tag{3.21}$$

donc

$$2\int_{|\xi|\ \leq\ \xi_{\max}} \left|\frac{v\left(x,\xi\right)}{v\left(1,\xi\right)}\right|^2 \left|\hat{g}\left(\xi\right)-\hat{g}_\delta\left(\xi\right)\right|^2 d\xi \leq 2\int_{|\xi|\ \leq\ \xi_{\max}} \frac{c_2^2}{c_1^{/2}} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}} \left|\hat{g}\left(\xi\right)-\hat{g}_\delta\left(\xi\right)\right|^2 d\xi$$

$$= 2\frac{c_2^2}{c_1'^2}e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}}\int_{|\xi|\ \leq\ \xi_{\max}} \left|\hat{g}\left(\xi\right)-\hat{g}_\delta\left(\xi\right)\right|^2 d\xi = 2\frac{c_2^2}{c_1'^2}e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}}\left\|\hat{g}-\hat{g}_\delta\right\|^2$$

$$\leq 2\frac{c_2^2}{c_1'^2}e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}}\delta^2,\ \text{tq}\ :\|\hat{g}-\hat{g}_\delta\|^2 \leq \delta^2.$$

donc

$$2\int_{|\xi|\ \leq\ \xi_{\max}} \left|\frac{v\left(x,\xi\right)}{v\left(1,\xi\right)}\right|^2 \left|\hat{g}\left(\xi\right)-\hat{g}_\delta\left(\xi\right)\right|^2 d\xi \leq 2\frac{c_2^2}{c_1^{/2}}e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}}\delta^2 \tag{3.22}$$

par (3.19) et (3.22), on a

$$\|u\left(x,.\right)-u_\delta\left(x,.\right)\|^2 \leq 2c_2^2e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}E^2 + 2\frac{c_2^2}{c_1^{/2}}e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}}\delta^2 = I_1+I_2$$

on pose $I_1 = 2c_2^2e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}}\xi_{\max}^{-2p}E^2$, et: $I_2 = 2\frac{c_2^2}{c_1'^2}e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}}\delta^2$. On choisit $\xi_{\max}$ par la formule (3.14)

$$\Longrightarrow 2\xi_{\max} = 4\left(\frac{1}{A\left(1\right)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)^2 = \left(\frac{2}{A\left(1\right)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2\xi_{\max}} = \frac{2}{A\left(1\right)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)$$

donc

$$I_1 = 2c_2^2e^{-A(x)\left(\frac{2}{A(1)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)}\left(2\left(\frac{1}{A\left(1\right)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)^2\right)^{-2p}E^2$$

$$= 2c_2^2e^{-\frac{2A(x)}{A(1)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)}2^{-2p}\left(\frac{1}{A\left(1\right)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)^{-4p}E^2$$

$$= 2c_2^2 e^{\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{-\frac{2A(x)}{A(1)}}} E^2 2^{-2p}\left(A(1)^{4p}\left(\frac{1}{\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)}\right)^{4p}\right)$$

$$= 2c_2^2\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{-\frac{2A(x)}{A(1)}} E^2 2^{-2p} A(1)^{4p}\left(\frac{1}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p}$$

$$= 2c_2^2\left(\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p\frac{A(x)}{A(1)}} E^2 2^{-2p} A(1)^{4p}\left(\frac{1}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p}$$

$$= 2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p\frac{A(x)}{A(1)}}\left(\frac{1}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p}$$

$$= 2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p\frac{A(x)}{A(1)}-4p}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p}$$

donc

$$I_1 = 2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p} \tag{3.23}$$

soit

$$I_2 = 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}}\delta^2 = 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{(A(1)-A(x))\left(\frac{2}{A(1)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)}\delta^2$$

$$= 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{2\left(\frac{(A(1)-A(x))}{A(1)}\right)\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)}\delta^2 = 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{2\left(\frac{(A(1)-A(x))}{A(1)}\right)}}\delta^2$$

$$= 2\frac{c_2^2}{c_1'^2}\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^2 = 2\frac{c_2^2}{c_1'^2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^2$$

$$= 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{-2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)+2}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}$$

alors

$$I_2 = 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)} \tag{3.24}$$

par (3.23) et (3.24), on a

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|^2 \leq 2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p}$$

$$+2\frac{c_2^2}{c_1'^2}E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}.$$

Donc

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|^2$$

$$\leq E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\left[2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p}+2\frac{c_2^2}{c_1'^2}\right]. \tag{3.25}$$

Par la notation2, l'estimation d'erreur (3.25) donne l'estimation (3.15). Puisque

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)=1$$

tel que $C=\left(2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p}+2\frac{c_2^2}{c_1'^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ■

Notation 5 *Quand*

$$\lim_{\delta\longrightarrow 0}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)=1$$

Alors on a l'estimation (3.15) ; pour $\delta\longrightarrow 0$ *.*

Demonstration. Si

$$\delta\longrightarrow 0\Longrightarrow\frac{E}{\delta}\longrightarrow\infty\Longrightarrow\ln\frac{E}{\delta}\longrightarrow\infty$$

$$\Longrightarrow\lim_{\delta\longrightarrow 0}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)=\lim_{X\longrightarrow\infty}\left(\frac{X}{X+\ln(X)^{-2p}}\right)=\lim_{X\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{\ln(X)^{-2p}}{X}}\right)$$

$$\Longrightarrow\lim_{X\longrightarrow\infty}\left(\frac{\ln(X)^{-2p}}{X}\right)=-2p\lim_{X\longrightarrow\infty}\left(\frac{\ln X}{X}\right)=0.\ \text{ tel que : }\lim_{X\longrightarrow\infty}\left(\frac{\ln X}{X}\right)=0\text{ ;où :}X=\ln\frac{E}{\delta}$$

$$\Longrightarrow\lim_{X\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{\ln(X)^{-2p}}{X}}\right)=1\Longrightarrow\lim_{\delta\longrightarrow 0}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)=1$$

On a :

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|^2$$

$$\leq E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\left[2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p}\left(\frac{\ln\frac{E}{\delta}}{\ln\frac{E}{\delta}+\ln\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}}\right)^{4p}+2\frac{c_2^2}{c_1'^2}\right]$$

$$\leq\left(2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p}(1+0(1))+2\frac{c_2^2}{c_1'^2}\right)E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}$$

$$=\left(2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p}(1+0(1))+2\frac{c_2^2}{c_1'^2}(1+0(1))\right)E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}$$

$$=\left(2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p}+2\frac{c_2^2}{c_1^{/2}}\right)E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}(1+0(1))$$

Donc

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|\leq CE^{\left(1-\frac{A(X)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{A(X)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p\left(1-\frac{A(X)}{A(1)}\right)}(1+0(1))$$

tel que

$$C=\left(2c_2^2\left(\frac{A(1)}{\sqrt{2}}\right)^{4p}+2\frac{c_2^2}{c_1^{/2}}\right)^{\frac{1}{2}}\ ;\ \delta\longrightarrow 0$$

Ainsi (3.15) démontrée. ■

Remarque 6 *1) Si : $p=0\Longrightarrow$l'estimation d'erreur (3.15) est donnée par la forme suivante :*

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|\leq CE^{\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{A(x)}{A(1)}}(1+0(1)).$$

et dans l'estimation de type Hölder on a

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|\leq C\delta^{\frac{A(x)}{A(1)}}E^{\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\ ;\ 0\ <\ x\ <1$$

Donc si $p=0\Longrightarrow$l'estimation d'erreur (3.15)$\Longrightarrow$la même estimation de type Hölder .
2)

$$\|u(0,t)-u_\delta(0,t)\|=\|f(t)-u_\delta(0,t)\|$$

$$\leq CE\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}(1+0(1))\to 0,\ \textit{pour}\ \delta\longrightarrow 0\ \textit{et}\ p>0.$$

Donc si $x=0$, l'estimation du type Hölder et l'estimation (3.15) est bornée par CE pour

$\delta \longrightarrow 0$ *et* $p > 0$.

3.1.1 Choix de $\xi_{\max}$

On a l'estimation de type Hölder

$$\|u(x,.) - u_\delta(x,.)\|^2 \leq C^2 E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)} \delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}} = 2c_2^2\left(1+\frac{1}{c_1'^2}\right) E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)} \delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}}$$

Et par le théorème 4 on a

$$\|u(x,.) - u_\delta(x,.)\|^2 \leq 2c_2^2 e^{-A(x)\sqrt{2\xi_{\max}}} \xi_{\max}^{-2p} E^2 + 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2\xi_{\max}}} \delta^2$$

$$\leq 2c_2^2 \xi_{\max}^{-2p} E^2 + 2\frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \delta^2$$

Donc

$$2c_2^2 \xi_{\max}^{-2p} E^2 \leq \frac{1}{2}\left(2c_2^2\left(1+\frac{1}{c_1'^2}\right)\right) E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)} \delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}} \tag{3.26}$$

$$2\frac{c_2^2}{c_1'^2} e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \delta^2 \leq \frac{1}{2}\left(2c_2^2\left(1+\frac{1}{c_1'^2}\right)\right) E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)} \delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}} \tag{3.27}$$

1) De (3.26) on obtient

$$\Longrightarrow \xi_{\max}^{-2p} E^2 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{c_1'^2}\right) E^2 \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}$$

$$\Longrightarrow \xi_{\max}^{-2p} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{c_1'^2}\right)\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}} \Longrightarrow \xi_{\max}^{2p} \geq \left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}$$

$$\Longrightarrow \xi_{\max} \geq \left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{pA(1)}}$$

$$\Longrightarrow 2\xi_{\max} \geq 2\left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{pA(1)}} \geq \left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)^{\frac{1}{2p}} \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{pA(1)}}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2\xi_{\max}} \geq \left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)^{\frac{1}{4p}} \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2pA(1)}} \geq \ln\left[\left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)^{\frac{1}{4p}} \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2pA(1)}}\right]$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2\xi_{\max}} \geq \ln\left[\left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)^{\frac{1}{4p}} \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2pA(1)}}\right]$$

$$= \ln\left(\frac{2c_1'^2}{c_1'^2+1}\right)^{\frac{1}{4p}} + \ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2pA(1)}} \geq \ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2pA(1)}}$$

$$\Longrightarrow A(1)\sqrt{2\xi_{\max}} \geq A(1)\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2pA(1)}} \Longrightarrow A(1)\sqrt{2\xi_{\max}} \geq \ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2p}}$$

$$\Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2p}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2p}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p-2}$$

Puisque

$$\begin{cases} \frac{A(x)}{2p} > 0 > -(4p+2) \\ \quad \text{et} \quad \ln\frac{E}{\delta} > 1 \end{cases}$$

Alors

$$e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{A(x)}{2p}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p-2} \Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p-2}$$

On a

$$\frac{\delta}{E} \geq \ln\frac{\delta}{E} \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^2 \geq \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 \Longrightarrow 1 \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = \left(\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

Où

$$\left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^2 = \left(\ln\left(\frac{E}{\delta}\right)^{-1}\right)^2 = \left(-\ln\frac{E}{\delta}\right)^2 = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2 \Longrightarrow 1 \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

Donc

$$e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p-2}\left(\frac{E}{\delta}\right)^2\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^2$$

$$\Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p}\left(\frac{E}{\delta}\right)^2 \tag{3.28}$$

2) De (3.27), on a

$$2\frac{c_2^2}{c_1'^2}e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}}\delta^2$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(2c_2^2\left(1+\frac{1}{c_1'^2}\right)\right)E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}\delta^{\frac{2A(x)}{A(1)}} = \frac{1}{2}\left(2c_2^2\left(1+\frac{1}{c_1'^2}\right)\right)E^2\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}$$

$$\Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}}\delta^2 \leq \frac{1}{2}\left(1+c_1'^2\right)E^2\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}$$

$$\Longrightarrow e^{-A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\frac{2}{1+c_1'^2}\right)\left(\frac{\delta}{E}\right)^{-\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{-2}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\frac{2}{1+c_1'^2}\right)\left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2}$$

$$\geq \quad \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2} \text{; si } c_1' > 1.\text{puisque } c_1' > 1 \Longrightarrow \frac{2}{1+c_1'^2} \geq 1$$

$$\Longrightarrow e^{-A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \geq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\frac{\delta}{E}\right)^{2} \Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}}$$

$$\leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{2} = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p}$$

$$= \left(\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p}\right] \text{ où : } \left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}} = \left(\frac{E}{\delta}\right)^{-\frac{2A(x)}{A(1)}} \leq 1$$

Puisque

$$\begin{cases} \frac{E}{\delta} > 1 \\ \text{et} \quad \left(-2\frac{A(x)}{A(1)}\right) \leq 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{E}{\delta}\right)^{-2\frac{A(x)}{A(1)}} \leq 1$$

On a

$$\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p} = \left(\ln\left(\frac{\delta}{E}\right)^{-1}\right)^{4p} = \left(-\ln\left(\frac{\delta}{E}\right)\right)^{4p} = \left(\ln\frac{\delta}{E}\right)^{4p} \leq \left(\frac{\delta}{E}\right)^{4p}$$

$$\text{où : }\frac{\delta}{E} < 1 \Longrightarrow \left(\frac{\delta}{E}\right)^{4p} < 1 \Longrightarrow \left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p}\right] \leq 1$$

Donc

$$e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \leq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p}\left[\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2A(x)}{A(1)}}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{4p}\right] \leq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p}$$

$$\Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} \leq \left(\frac{E}{\delta}\right)^{2}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p} \tag{3.29}$$

Alors par (3.28) et (3.29), on a

$$e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} = \left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-4p}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{2} = \left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{2}, \forall p$$

$$\Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} = \left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{2} \Longrightarrow e^{A(1)\sqrt{2\xi_{\max}}} = e^{\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{2}}$$

$$\Longrightarrow A\left(1\right)\sqrt{2\xi_{\max}} = \ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)^{2} = 2\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)$$

$$\Longrightarrow \sqrt{2\xi_{\max}} = \frac{2}{A\left(1\right)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right) \Longrightarrow 2\xi_{\max} = 4\left(\frac{1}{A\left(1\right)}\ln\left(\frac{E}{\delta}\left(\ln\frac{E}{\delta}\right)^{-2p}\right)\right)^{2}$$

Ainsi (3.14) démontrée.

3.2 Méthode de régularisation de Tikhonov simplifiée

Considérons le problème

$$Ax = y \tag{3.30}$$

L'idée précédente pour trouver la solution de l'équation (3.30), était de faire la régularisation (c-à-d : pour trouver la solution de l'équation (3.30), on trouve la solution d'une autre équation avec paramètre α telle que la limite de 2^{eme}équation est une solution de l'équation (3.30) et α petit où : $\alpha \longrightarrow 0$.

On note que : $U(X)$ est un ensemble de tous les sous-espaces fermés dans X. R est continu vers y si :

$$\left\|y^0 - y\right\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow d\left(Ry^0, Ry\right) \longrightarrow 0.$$

La famille des opérateurs continus R_α est dans la voisinage de AX_M.

$$R_\alpha : AX_M \longrightarrow U(X).$$

R_α : la régularisation de l'équation (3.30) dans X_M alors :

$$\lim_{\alpha \longrightarrow 0} R_\alpha Ax = x \text{ pour } x \in X_M \tag{3.31}$$

Où α :est un paramètre positif.

3.2.1 Conditions de régularisation

On choisit un sous-ensemble $X_M \subset X$. X_M s'appelle "classe correctrice" s'il ya les deux conditions suivantes :

1)La solution est unique dans X_M. (c-à-d : $Ax = Ax^0 \Longrightarrow x = x^0$)

2)La solution $x \in X_M$ est stable. (c-à-d : $\|Ax - Ax^0\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|x - x^0\| \longrightarrow 0$)

Definition 4 *ω est une fonction telle que : $\|x - x^0\| \leq \omega \|Ax - Ax^0\|_Y$; Cette relation s'appelle "estimation de stabilité"*

Si : $\|Ax - Ax^0\|_X \longrightarrow 0 \Longrightarrow \omega \|Ax - Ax^0\|_Y \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|x - x^0\| \longrightarrow 0$. Donc : on a la stabilité.

Proposition 1 *: X_M compact et la solution est unique alors : la solution est stable.*

Demonstration. on l'a démontré. ■

3.2.2 Construction de la régularisation

Nous décrivons en général la méthode qui s'appelle "la stabilisation fonctionnelle" définie par TiKhonov. On considère que μ est la stabilisation fonctionnelle pour la classe correctrice X_M s'il y a les deux conditions suivantes :

(3.3.1) μ semi-continu inférieurement sur X.
(3.3.2) La partie $X_{M,\tau} = \{x \in X_M \ , \mu(x) \leq \tau\}$est bornée dans X , $\forall \tau$.
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\left(\|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)\right). \\ v \in X_M. \end{cases} \tag{3.32}$$

Lemme 6 *Si $X_{M,\tau}$ est compact dans X , $\forall \tau$. $R_\alpha(y)$ solution du problème (3.32) existe et R_α est la régularisation .*

Demonstration. On pose

$$\begin{cases} x_0 \in X_M. \\ \text{et } \ \tau = \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(x_0). \end{cases}$$

On a

$$X_0 = \left\{\mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha}\right\} \cap X_M = \left\{v \in X_M, \ \ \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha}\right\} = X_{M,\frac{\tau}{\alpha}}.$$

et $X_{M,\tau}$ compact. Donc $X_{M,\frac{\tau}{\alpha}}$compact.
Soit $\phi(v, y) = \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)$; $\phi(v, y)$ semi-continu inférieurement dans X_0 et X_0 compact. Donc ϕ admet au moins un v_0 dans X_0, tq : $\phi(v, y) \geq \phi(v_0, y)$;$\forall \ v_0 \in X_0$, $\phi(v, y)$ a un point minimum dans X_M. On pose $x(\alpha) = R_\alpha(y)$ un ensemble des suites minimisantes de ϕ. L'ensemble de tous les points minimum est un ensemble fermé.

(I) On montre que $R_\alpha(y)$ est un ensemble fermé. Soit $v_n \in R_\alpha(y)$ tq : $\lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = v_0$. Pour montrer que $R_\alpha(y)$ est fermé on montre que $v_0 \in R_\alpha(y)$. $v_n \in R_\alpha(y) \Longrightarrow v_n$ un point minimum où une solution du problème (3.32). Donc

$$\|Av_n - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v_n) \leq \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v).$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\|Av_n - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v_n)\right] \leq \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)$$

Et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} v_n = v_0$$

Alors

$$\|Av_0 - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v_0) \leq \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \Longrightarrow v_0 \in R_\alpha y.$$

Donc $R_\alpha y$ est un ensemble fermé.

(II) On montre que R_α est continu par contradiction. Soit

$$\begin{cases} y_k \longrightarrow y \\ \text{et } d(R_\alpha y_k, R_\alpha y) > \varepsilon \end{cases}$$

On a

$$d(R_\alpha y_k, R_\alpha y) > \varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} d(x_k, x) > \varepsilon \\ \forall x_k \in R_\alpha y_k \ \text{ et } \ \forall x \in R_\alpha y \end{cases}$$

Et

$$\left\{\begin{array}{c} x_k \in X_0 \\ \text{et } X_0 \text{ compact} \end{array}\right. \Longrightarrow \{\text{il existe une sous-suite extraite qui converge (vers } x_\infty)\}$$

$$\Longrightarrow x_k \longrightarrow x_\infty \Longrightarrow \|x_k - x_\infty\| < \varepsilon \tag{3.33}$$

Ainsi que

$$\left\{\begin{array}{c} \phi \text{ continu par rapport à } y_k \\ \text{et } \phi \text{ sci par rapport à } x_k \end{array}\right. \Longrightarrow \phi(x_\infty, y) \leq \liminf \phi(x_k, y_k)$$

$$\Longrightarrow \phi(x_\infty, y) \leq \liminf \phi(x_k, y_k) \leq \liminf \phi(v, y_k) = \phi(v, y)$$

$$\Longrightarrow \phi(x_\infty, y) \leq \phi(v, y), \forall v \in X_0 \Longrightarrow x_\infty \in R_\alpha y$$

Donc

$$\|x_k - x_\infty\| > \varepsilon,\ \forall x_k \in R_\alpha y_k \text{ et } x_\infty \in R_\alpha y \tag{3.34}$$

Alors : par (3.33) et (3.34), on a la contradiction $\Longrightarrow R_\alpha$ continu.

(III) On montre que $x(\alpha)$ convergente vers x quand $\alpha \longrightarrow 0$.c-à-d $R_\alpha y \longrightarrow x$. avec : $\alpha_k < \frac{1}{k}$, $y = Ax$, $\alpha \longrightarrow 0$. Par contradiction On pose $x_k \in x(\alpha_k)$ tq :$\|x_k - x\| > \varepsilon$.et on a :$y = Ax$.

$$x_k \in R_\alpha y_k \Longrightarrow \phi(x_\infty, y) \leq \phi(x, y), \forall x \in X_0$$

$$\|Ax_k - y\|_Y^2 + \alpha_k \mu(x_k) \leq \|Ax - y\|_Y^2 + \alpha_k \mu(x) \Longrightarrow$$

$$\|Ax_k - y\|_Y^2 \leq \|Ax_k - y\|_Y^2 + \alpha_k \mu(x_k) \leq \alpha_k \mu(x)$$

$$\Longrightarrow \|Ax_k - y\|_Y^2 \leq \alpha_k \mu(x) < \frac{1}{k}\mu(x)$$

Soit : $X_* = \{v, v \in X_M, \mu(v) \leq \mu(x)\}$ compact. On a l'ensemble

$$X_{M,\tau} = \{v \in X_M, \mu(x) \leq \tau\} \text{ compact}$$

$$\Longrightarrow X_{M,\mu(x)} = \{v \in X_M, \mu(v) \leq \mu(x)\} \text{ compact}$$

Donc :$X_* = X_{M,\mu(x)}$ compact. X_* compact donc on peut extraire une suite x_k converge vers x_*.donc

$$\|x_k - x_*\| < \varepsilon \Longrightarrow x_k \longrightarrow x_*$$

$x_k \in R_\alpha y_k \Longrightarrow \|x_k - x\| > \varepsilon \Longrightarrow \liminf \|x_k - x\| > \varepsilon \Longrightarrow \|x_* - x\| > \varepsilon \Longrightarrow x_* \neq x$
Et on a :$\|Ax_k - Ax\|_Y^2 \leq \alpha_k \mu(x) \leq \frac{1}{k}\mu(x)$. Alors :$0 \leq \liminf_{k\longrightarrow\infty} \|Ax_k - Ax\|_Y^2 \leq 0$ donc :$\|Ax_* - Ax\|_Y^2 = 0$, A continu. On aura

$$\left\{\begin{array}{c} x_* \neq x \\ \text{et } x_* = x \end{array}\right. \Longrightarrow \text{contradiction.}$$

Donc : $\lim_{\alpha \longrightarrow 0} R_\alpha y = x \Longrightarrow R_\alpha$ la régularisation. Alors par $(I), (II), (III)$ on a

$$\left\{ \begin{array}{c} x(\alpha) = R_\alpha(y) \text{ existe et } R_\alpha \text{ continu.} \\ \text{et } R_\alpha \text{ régularisation.} \end{array} \right.$$

■

Proposition 2 *: Soit* $\phi(v, y) = \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v)$ *est semi-continu inférieurement.*

Demonstration. On note semi-continu inférieurement par sci. Soit $f(v) = \|Av - y\|_Y^2$ continu par rapport à v donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_0, \forall v \in V_{v_0} \Longrightarrow |f(v) - f(v_0)| \leq \varepsilon$$

$$|f(v) - f(v_0)| \leq \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon \leq f(v) - f(v_0) \leq \varepsilon \Longrightarrow f(v_0) - \varepsilon \leq f(v) \leq \varepsilon + f(v_0)$$

donc

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists v_0, \forall v \in V_{v_0} \Longrightarrow f(v_0) - \varepsilon \leq f(v)] \Longrightarrow f \quad \text{sci}$$

Alors f est sci par rapport à v. f et μ sci $\Longrightarrow f + \mu$ sci ?

$$f \text{ sci} \Longrightarrow \forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists V'_{v_0}, \forall v \in V'_{v_0} \Longrightarrow f(v_0) - \varepsilon' \leq f(v)$$

et

$$\mu \quad \text{sci} \Longrightarrow \forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists V'_{v_0}, \forall v \in V'_{v_0} \Longrightarrow \mu(v_0) - \varepsilon' \leq \mu(v)$$

donc

$$(f + \mu)(v_0) - \varepsilon = f(v_0) + \mu(v_0) - \varepsilon \quad \text{tq} \quad \varepsilon' + \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \left(f(v_0) - \varepsilon'\right) + \left(\mu(v_0) - \varepsilon'\right) \leq f(v) + \mu(v)$$

On aura

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V_{v_0} = V'_{v_0} \cup V'_{v_0}, \forall v \in V_{v_0} \Longrightarrow (f + \mu)(v_0) - \varepsilon \leq (f + \mu)(v)$$

$$\Longrightarrow f + \mu = \phi \text{ sci par rapport à } v \in X_M$$

$$\Longrightarrow \phi \text{ sci par rapport à } v \in X_0, X_0 \subset X_M$$

■

Proposition 3 *: On montre que*

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi(v, y) \textit{ semi-continu inférieurement dans } X_0 \\ \textit{et } X_0 \textit{ compact} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \phi \textit{ admet au moins un } v_0 \textit{ dans } X_0 \\ \textit{tq} : \phi(v, y) \geq \phi(v_0, y), \forall\ v \in X_0. \end{array} \right. ,$$

Demonstration. Pour montrer cette proposition on montre la théorème suivant : Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$. verifiant

$$\left\{\begin{array}{c} 1)\ X \quad \text{compact} \\ 2)\ f \quad \text{semi-continu inférieurement} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{il } \exists x_0 \in X \text{ tq :} \\ f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x). \end{array}\right.$$

On note $d = \inf_{x\in X} f(x)$,soit

$$\alpha_n = \frac{1}{n} + d \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = d,]-\infty, \alpha_n[\subset \mathbb{R}.$$

Et

$$X_n = f^{-1}(]-\infty, \alpha_n[) \subset X \Longrightarrow X_{n+1} \subset X_n \Longrightarrow \overline{X_{n+1}} \subset \overline{X_n}.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{c} f \text{ est semi-continu inférieurement} \\ \text{et }]-\infty, \alpha_n[\text{ ouvert} \end{array}\right. \Longrightarrow f^{-1}(]-\infty, \alpha_n[) = X_n \text{ ouvert} \Longrightarrow \overline{X_n} \text{ fermé.}$$

Et

$$\left\{\begin{array}{c} \overline{X_n} \text{ fermé}, \forall n \geq 1 \\ \text{et } X \quad \text{compact} \end{array}\right. \Longrightarrow \bigcap_{n\geq 1} \overline{X_n} \neq \varnothing \Longrightarrow \exists x_0 \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{X_n}. \left(i.e : x_0 \in \overline{X_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.\right)$$

Alors

$$x_0 \in \overline{X_n} \Longrightarrow f(x_0) \leq \alpha_n = \frac{1}{n} + d; \forall n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow f(x_0) \leq d \Longrightarrow f(x_0) = d$$

$$\Longrightarrow x_0 \text{ est optimum } \Longrightarrow \text{il existe } f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x).$$

Donc

$$\phi(v_0, y) = \inf_{v\in X_0} \phi(v, y) = R_\alpha(y).$$

Alors : il existe $R_\alpha(y)$ solution de problème (3.32). ∎

Proposition 4

$$\left\{\begin{array}{c} \phi(v) \leq \phi(x_0) \\ x_0 \in X_M \end{array}\right. \Longrightarrow v \in X_0? \tag{3.35}$$

Demonstration.

$$\phi(v) \leq \phi(x_0) \Longrightarrow \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \leq \|Ax_0 - y\|_Y^2 + \alpha\mu(x_0) = \tau.$$

Donc

$$\|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \leq \tau \Longrightarrow \alpha\mu(v) \leq \|Av - y\|_Y^2 + \alpha\mu(v) \leq \tau$$

$$\Longrightarrow \alpha\mu(v) \leq \tau \Longrightarrow \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha}$$

Et on a $v \in X_M$ *donc*

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha} \\ et \\ v \in X_M \end{array} \right. \Longrightarrow v \in \left\{ \mu(v) \leq \frac{\tau}{\alpha} \right\} \cap X_M = X_0 \Longrightarrow v \in X_0$$

■

Proposition 5 *:* x_* *minimum dans* $X_0 \subset X_M \Longrightarrow x_*$ *minimum dans* X_M*? par (3.35).*

Demonstration. Soit x_* minimum dans $X_0 \Longrightarrow \forall x \in X_0, \phi(x_*) \leq \phi(x)$. Mais n'est pas minimum dans $X_M \Longrightarrow$

$$\exists v \in X_M, \phi(v) \leq \phi(x_*)$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi(x_*) \leq \phi(x) \\ \text{et} \quad \phi(v) \leq \phi(x_*) \end{array} \right. \Longrightarrow \phi(v) \leq \phi(x_*) \leq \phi(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \phi(v) \leq \phi(x_*) \\ x_* \in X_M \end{array} \right. \Longrightarrow v \in X_0 \text{ par (3.35).}$$

$$v \in X_0 \Longrightarrow \phi(x_*) \leq \phi(v). \tag{3.36}$$

puisque $\phi(v) \leq \phi(x_*)$ Donc il y a contradiction avec (3.36) alors : x_* minimum dans X_M. ■

Lemme 7 *: soit* X *,* Y *deux espaces de Hilbert,* $x^0 \in X$ *et* $\mu(v) = \|v - x^0\|_X^2$ *.donc : le problème :* $\min\left(\|Av - x\|_Y^2 + \alpha\mu(v)\right)$ *admet un minimum unique* $R_\alpha(y)$*, qui est une solution unique de ces problèmes tq.* R_α *soit la régularisation.*

Demonstration. x_m est une suite minimisante donc : $\phi(x_m) \longrightarrow \inf_{x\in X} \phi(x_m) = \phi_*$

$$\phi(x_m) \longrightarrow \inf_{x\in X} \phi(x_m) = \phi_* \Longrightarrow \lim_{m\longrightarrow\infty} \phi(x_m) = \lim_{m\longrightarrow\infty} \inf_{x\in X} \phi(x) = \phi_*$$

ϕ_*.la limite existe ,donc la suite $(\phi(x_m))_m$ convergente $\Longrightarrow \phi(x_m)$ borné$\Longrightarrow x_m$ borné. Donc toutes les suites x_m minimisantes forment une suite bornée.

(I) On recherche la solution . Comme X est un espace de Hilbert il est donc réflexif. On a la théorème suivant :

Dans l'espace de Banach réflexif, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite de x_k convergente faiblement vers x.donc :$x_m \rightharpoonup x$ converge faiblement

$$\{\phi \text{ convexe et } \phi \text{ sci}\} \Longrightarrow \phi \text{ sci faiblement}$$

Et on a

$$\left\{ \begin{array}{c} x_m \rightharpoonup x \\ \text{et } \phi \text{ sci faiblement} \end{array} \right. \Longrightarrow \phi(x) \leq \lim_{m\longrightarrow\infty} \inf_{x\in X} \phi(x_m) = \phi_* \Longrightarrow \phi(x) \leq \phi_*. \tag{3.37}$$

Et on a ϕ_* est inf de ϕ sur $X \Longrightarrow \phi_* \leq \phi(x)$. Par (3.37) on a :$\phi(x) = \phi_*, x \in X \Longrightarrow \exists\phi_*$ solution de problème (3.32)

(II) On montre que la solution est unique.

Pour montrer l'unicité de la solution du problème (3.32) on montre l'unicité de problème (3.38) dans l'exemple 2. Donc la solution du problème (3.32)est unique. Donc le problème admet un minimum unique qui est une solution $R_\alpha(y)$; R_α est la régularisation par le lemme 6. ■

Example 2 *Soit X et Y deux espaces de Hilbert et A compact et linéaire $A : X \longrightarrow Y$; $\mu(x) = \|x - x^0\|_X^2$.*

On pose : $X = X_M$.

Les conditions nécessaires pour que $x(\alpha)$ soit un point minimisant de la fonction sont

$$\begin{aligned} q(v) &= (Av - y, Av - y) + \alpha\left(v - x^0, v - x^0\right)_X \\ \text{et} \quad \frac{d}{dt}(q(x(\alpha) + tu)) = 0 & \quad , t = 0, \forall u \in X \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} q(x(\alpha) + tu) &= (A(x(\alpha) + tu) - y, A(x(\alpha) + tu) - y)_Y \\ &\quad + \alpha\left((x(\alpha) + tu) - x^0, (x(\alpha) + tu) - x^0\right)_X . \end{aligned}$$

$$= (Ax(\alpha) + tAu - y, Ax(\alpha) + tAu - y)_Y + \alpha\left(x(\alpha) + tu - x^0, x(\alpha) + tu - x^0\right)_X$$

$$\begin{aligned} = \quad & (Ax(\alpha) - y, Ax(\alpha) - y)_Y + t(Ax(\alpha) - y, Au)_Y + t(Au, Ax(\alpha) - y)_Y \\ & + t^2(Au, Au)_Y + \alpha\left(x(\alpha) - x^0, x(\alpha) - x^0\right)_X + \alpha t\left(x(\alpha) - x^0, u\right)_X + \alpha t\left(u, x(\alpha) - x^0\right)_X \\ & + \alpha t^2(u, u)_X \end{aligned}$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{d}{dt}(q(x(\alpha) + tu)) = 0, \\ t = 0 \end{array} \right. .$$

$$\Longrightarrow (Ax(\alpha) - y, Au)_Y + (Au, Ax(\alpha) - y)_Y + \alpha\left(x(\alpha) - x^0, u\right)_X + \alpha\left(u, x(\alpha) - x^0\right)_X$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad 2(Ax(\alpha) - y, Au)_Y + 2\alpha\left(x(\alpha) - x^0, u\right)_X = 0. \\ &\Longrightarrow \quad 2(A^*Ax(\alpha) - A^*y, u)_Y + 2\alpha\left(u, x(\alpha) - x^0\right)_X = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad 2(u, A^*Ax(\alpha) - A^*y)_X + 2\alpha\left(u, x(\alpha) - x^0\right)_X = 0. \\ &\Longrightarrow \quad 2\left(u, A^*Ax(\alpha) - A^*y + \alpha\left(x(\alpha) - x^0\right)\right)_X = 0. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left(u, A^*Ax(\alpha) - A^*y + \alpha\left(x(\alpha) - x^0\right)\right)_X = 0, \forall u \in X = H$$
$$\Longrightarrow A^*Ax(\alpha) - A^*y + \alpha\left(x(\alpha) - x^0\right) = 0$$

$$\Longrightarrow (A^*A + \alpha)\, x(\alpha) = A^*y + \alpha x^0 \tag{3.38}$$

$x(\alpha)$ est une solution du problème : $\min\left(\|Av - y\|^2 + \alpha\mu(v)\right)$ *.et aussi solution du problème (3.38). Donc pour montrer l'unicité de la solution du probleme (3.32) on montre l'unicite de la solution du problème (3.38). On suppose que ce problème (3.38) admet deux solutions $x(\alpha)$ et $\acute{x}(\alpha)$. Donc*

$$\left\{\begin{array}{c} (A^*A + \alpha)\, x(\alpha) = A^*y + \alpha x^0 \\ et\ \ (A^*A + \alpha)\, \acute{x}(\alpha) = A^*y + \alpha x^0 \end{array}\right. \Longrightarrow (A^*A + \alpha)\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha)\right) = 0.$$

On remarque que A^*A est positif et auto-adjoint dans X.

On considère l'exemple 3

$$(A^*A + \alpha)\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha)\right) = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left((A^*A + \alpha)\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha)\right), a_k\right) = 0 \\ \forall a_k \neq 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left((A^*A + \alpha)\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha)\right), a_k\right) = \left(A^*A\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha)\right), a_k\right) + \left(\alpha\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha)\right), a_k\right)$$

$$= \left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), (A^*A)^* a_k\right) + \alpha\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), a_k\right)$$

$$= \left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), A^*Aa_k\right) + \alpha\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), a_k\right)$$
$$= \left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), \lambda_k^2 a_k\right) + \alpha\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), a_k\right)$$

$$= \lambda_k^2\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), a_k\right) + \alpha\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), a_k\right) \qquad tq\ \ A^*Aa_k = \lambda_k^2 a_k$$

$$= \left(\lambda_k^2 + \alpha\right)\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha), a_k\right) = 0\ ;\forall a_k \neq 0$$
$$\Longrightarrow \left(\lambda_k^2 + \alpha\right)\left(x(\alpha) - \acute{x}(\alpha)\right) = 0$$

A positif $\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \lambda_k > 0 \Longrightarrow \lambda_k^2 \neq 0 \\ 0 < \alpha \Longrightarrow \alpha \neq 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda_k^2 + \alpha \neq 0 \Longrightarrow x(\alpha) - \acute{x}(\alpha) = 0 \Longrightarrow$ *la solution est unique.*

Example 3 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1} > 0 \Longrightarrow \lambda_k \in \mathbb{R}_0^+$.

A est compact $\Longrightarrow A^*$ et compact donc :A^*A est compact. A est linéaire d' un espace de Hilbert vers un espace de Hilbert . Comme $A^*A = (A^*A)^* \Longrightarrow A^*A$ auto-adjoint.

A^*A positif et A^*A auto-adjoint on aura donc , d'après ***le théorème de Hilbert-Schmidt*** *: il existe une base orthonormée des vecteurs propres a_k . Soit $b_k = \|Aa_k\|_Y^{-1} Aa_k$. Alors on trouve.*

(1) $A^*Aa_k = \lambda_k^2 a_k$? *On a*

$$A^*Aa_k = A^*\lambda_k a_k = \lambda_k A^* a_k = \lambda_k^2 a_k \Longrightarrow A^*Aa_k = \lambda_k^2 a_k.$$

(2) $AA^*b_k = \lambda_k^2 b_k$?
Soit

$$AA^*b_k = AA^* \|Aa_k\|_Y^{-1} Aa_k = \|Aa_k\|_Y^{-1} AA^*Aa_k$$
$$= \|Aa_k\|_Y^{-1} A\lambda_k^2 a_k = \lambda_k^2 \|Aa_k\|_Y^{-1} Aa_k = \lambda_k^2 b_k \Longrightarrow AA^*b_k = \lambda_k^2 b_k$$

(3) $A^*b_k = \lambda_k a_k$?

$$A^*b_k = A^* \|Aa_k\|_Y^{-1} Aa_k = \|Aa_k\|_Y^{-1} A^*Aa_k = \|Aa_k\|_Y^{-1} \lambda_k^2 a_k$$

$$= \|\lambda_k a_k\|_Y^{-1} \lambda_k^2 a_k = \lambda_k \|a_k\|_Y^{-1} a_k = \lambda_k a_k \ , \ \|a_k\| = 1$$
puisque a_k *est une base*

(4) $Aa_k = \lambda_k b_k$?

$$\lambda_k b_k = \lambda_k \|Aa_k\|_Y^{-1} Aa_k = \lambda_k \|\lambda_k a_k\|_Y^{-1} Aa_k = \lambda_k \lambda_k^{-1} \|a_k\|_Y^{-1} Aa_k$$
$$= A \|a_k\|_Y^{-1} a_k = Aa_k \Longrightarrow \lambda_k b_k = Aa_k$$

(b_k) *est aussi une base orthonomale puisque :*

$$(b_k, b_m)_y = \left(\|Aa_k\|_Y^{-1} Aa_k, \|Aa_k\|_Y^{-1} Aa_k\right) = \|Aa_k\|_Y^{-1} \|Aa_m\|_Y^{-1} (Aa_k, Aa_m)_y$$
$$= \lambda_k^{-2} \|a_k\|_Y^{-1} \|a_m\|_Y^{-1} (A^*Aa_k, a_m)_y$$
$$= \lambda_k^{-2}\lambda_k^2 (a_k, a_m)_X = (a_k, a_m)_X = \begin{cases} 0\,;\ si\ k \neq m \\ 1\ ,\ si\ k = m \end{cases}$$
$$\Longrightarrow (b_k, b_m)_Y = \begin{cases} 0\,;\ si\ k \neq m \\ 1\ ,\ si\ k = m \end{cases}$$

Lemme 8 *: Test de Picard :*
La solution de l'équation originale $Ax = y$ *existe* $\Longleftrightarrow$

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \left|(y, \lambda_k)_Y\right|^2 < +\infty\right] \tag{3.39}$$

Demonstration. ($\Longrightarrow$) Si x est la solution de l'équation $Ax = y$.
Alors

$$Ax = y \Longrightarrow A^*Ax = A^*y.$$

Et le produit scalaire :

$(A^*Ax, a_k)_X = (A^*y, a_k)_X = (y, Aa_k)_Y = (y, \lambda_k a_k)_Y$. tq : $Aa_k = \lambda_k a_k. = \lambda_k (y, a_k)_Y$. tq : $\lambda_k \in \mathbb{R}$

Puisque $\{a_k\}$ est une base orthonormale dans X on peut donc écrire x sous forme de série convergente (d'après le théoreme de Cauchy-Schmidt).

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, a_k)\, a_k.\text{convergente.}$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, a_k)\, a_k \Longrightarrow \|x\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, a_k)_X|^2 .$$

$$\|x\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, a_k)_X|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(x, \lambda_k^{-2} A^*Aa_k\right)_X\right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-4} |(x, A^*Aa_k)_X|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-4} |(x, A^*(Aa_k))_X|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-4} |(x, A^*\lambda_k b_k)_X|^2 . \text{ tq : } Aa_k = \lambda_k b_k.$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-4} |(x, \lambda_k A^* b_k)_X|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-4} |(Ax, \lambda_k b_k)_X|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} |(Ax, b_k)_X|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} |(y, b_k)_Y|^2 .$$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, a_k)\, a_k.\text{convergente} \Longrightarrow \|x\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} |(y, b_k)_Y|^2 .\text{convergente.}$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} |(y, b_k)_X|^2 < \infty. \tag{3.40}$$

Réciproquement : On pose

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \|Aa_k\|^{-1} (y, b_k)_Y\, a_k \Longrightarrow \|x\|_X^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Aa_k\|^{-2} |(y, b_k)_Y|^2 \|a_k\|^2 .$$

$$\Longrightarrow \|x\|_X^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} |(y, b_k)_Y|^2 \|a_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} |(y, b_k)_Y|^2 < \infty \Longrightarrow \|x\|_X^2 < +\infty.$$

Alors x existe $\Longrightarrow x \in H$. On montre que x est la solution de l'équation $Ax = y$.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} (y, b_k)_Y\, a_k \Longrightarrow Ax = \sum_{k=1}^{\infty} A\lambda_k^{-1} (y, b_k)_Y\, a_k \Longrightarrow Ax = \sum_{k=1}^{\infty} A \|Aa_k\|^{-1} (y, b_k)_Y\, a_k.$$

$$\Longrightarrow Ax=\sum_{k=1}^{\infty}A\left\Vert Aa_k\right\Vert^{-1}\left(y,\lambda_k^{-1}Aa_k\right)_Y a_k=\sum_{k=1}^{\infty}A\left\Vert Aa_k\right\Vert^{-2}\left(y,Aa_k\right)_Y a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\Vert Aa_k\right\Vert^{-2}A\left(y,Aa_k\right)_Y a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\left\Vert Aa_k\right\Vert^{-2}\left(Ay,Aa_k\right)_Y a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\Vert Aa_k\right\Vert^{-2}\left(y,A^*Aa_k\right)_Y a_k=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\left(y,\lambda_k^2a_k\right)_Y a_k=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(y,a_k\right)_Y a_k=y \quad \text{tq : } a_k \text{ une base}$$

Donc : $Ax=y$. Alors :$\left\{\begin{array}{c} x\in H \\ \text{et } Ax=y\end{array}\right. \Longrightarrow x$ la solution de l'équation $Ax=y$ ■

3.2.3 Etude de l'équation homogène complète

Soit le problème (3.1) où

$$f(t)=\quad u(0,t)\neq 0,\qquad t\geq 0,\text{et}\qquad f(t)=\quad u(0,t)=0\ ,t<0$$

$\left\Vert f\right\Vert_p\leq E$; où E :est une constante tel que : $p\geq 0$. Et $\left\Vert f\right\Vert_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\xi^2\right)^P\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$.
On utilise dans cette partie les : lemmes 3, 4, 5.

Definition 5 *On pose :* $g(t)=u(1,t)$ *la solution exacte du problème (3.1)*

$$\left\{\begin{array}{c} u_t=a(x)u_{xx}+b(x)u_x+c(x)u;x>0,t>0 \\ \text{et : } u(0,t)=f(t)\,;f\in L^2(\mathbb{R})\,,t\geq 0 \\ \text{et } u(x.0)\,;x\geq 0\end{array}\right.$$

Et comme

$$\hat{u}(x,\xi)=\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)\,,$$

alors

$$\hat{g}(\xi)=\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\ \hat{u}(x,\xi)\,. \tag{3.41}$$

On définit l'opérateur suivant : $K(x)$: $u(x,.)\longrightarrow g(.)$. *Par (3.41) et pour* $0\leq x<1$ *alors le problème :*

$$\left\{\begin{array}{l} g(t)=u(1,t)\,,t\geq 0 \\ \text{et } \ u(x.0)=0;x\geq 0\end{array}\right. \tag{3.42}$$

S'écrit sous forme d'équation opératorielle suivante :

$$K(x)\,u(1,t) \;=\; g(t)\,, 0 \leq x < 1 \tag{3.43}$$

$K(x):\; u(x,.) \longrightarrow g(.)$. *pour :* $0 \leq x < 1$, $\xi \longrightarrow g(t)$. *Donc*:

$$K(x)\,u(x,\xi) = g(\xi)\,, 0 \leq x \;<\; 1$$

$$\widehat{K(x)\,u(x},\xi) = \hat{g}(\xi)\,,$$

Ainsi en utilisant (3.41) on obtient

$$\widehat{K(x)\,u(x},\xi) = \hat{g}(\xi) = \frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\;\hat{u}(x,\xi) \Longrightarrow \widehat{K(x)\,u(x},\xi) = \frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\;\hat{u}(x,\xi)\,; 0 \leq x < 1. \tag{3.44}$$

On a :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{v(1,\xi)}.$$

Soit :

$$\begin{cases} \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(\xi)|^2 \frac{1}{|v(1,\xi)|^2} d\xi < +\infty, \\ et : c_1^{/} e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(1,\xi)| \leq c_2^{/} e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}, \forall \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a : $g_\delta(t)$ *est la transformée de Fourier pour la perturbation* $g_\delta(t)$ *en* $x = 1$, *et* $\|g - g_\delta\| \leq \delta$. *La solution approchée de* $u(x,t)$ *pour* $0 \leq x < 1$, *est une fonction* $h(x,t)$ *: (la solution régularisée de Tikhonov),qui minimise la quantité suivante :*

$$\|K(x)\,h - g_\delta\|^2 + \left(\frac{\delta}{E}\right)^2 \|h\|^2 \tag{3.45}$$

Lemme 9 *:*

Il existe une unique solution $h(x,t)$ *qui minimise le problème (3.45) ayant la forme*

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}}{1 + \alpha^2 \left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2} \hat{g}_\delta(\xi)\, d\xi, \;\; \textit{tel que :} \alpha = \frac{\delta}{E} \tag{3.46}$$

Demonstration. I : l'opérateur identité dans $L^2(\mathbb{R})\,, I : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}, I(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |I(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$. $K^*(x)$ est adjoint de $K(x)$. Par la théorème 2.11 dans [7] l' unique solution qui minimise le problème (3.45)est donnée par

$$h = \left[K^*(x)\,K(x) + \alpha^2 I\right]^{-1} K^*(x)\,g_\delta. \tag{3.47}$$

Dans l'espace de Hilbert, on a

$$\left(\widehat{K(x)\,u}, \widehat{v}\right) = (K(x)\,u, v) = (u, K^*(x)\,v) = \left(\hat{u}, \widehat{K^*(x)\,v}\right).$$

Et en utilisant (3.44), on obtient

$$\left(\widehat{K(x)u},\widehat{v}\right)=\left(\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\ \hat{u},\widehat{v}\right)=\left(\ \hat{u},\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{v}\right)\ \text{et}\left(\widehat{K(x)u},\widehat{v}\right)=\left(\hat{u},\widehat{K^{*}(x)v}\right)$$

$$\Longrightarrow\left(\ \hat{u},\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{v}\right)=\left(\hat{u},\widehat{K^{*}(x)v}\right)$$

$$\Longrightarrow\widehat{K^{*}(x)v}=\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{v}. \tag{3.48}$$

Alors

$$\begin{cases}(K^{*}\widehat{(x)K}(x)u=\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{K(x)u}\\ \text{et }\widehat{K(x)u}=\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\ \hat{u}\end{cases}\Longrightarrow K^{*}\widehat{(x)K}(x)u=\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\ \hat{u}=\left|\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\right|^{2}\ \hat{u}$$

$$\Longrightarrow K^{*}\widehat{(x)K}(x)u=\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{K(x)u}=\left|\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\right|^{2}\ \hat{u}. \tag{3.49}$$

On a

$$h=\left[K^{*}(x)K(x)+\alpha^{2}I\right]^{-1}K^{*}(x)g_{\delta}\Longrightarrow\left[K^{*}(x)K(x)+\alpha^{2}I\right]h=K^{*}(x)g_{\delta}.$$

$$\Longrightarrow K^{*}(x)K(x)h+\alpha^{2}h=K^{*}(x)g_{\delta}\Longrightarrow K^{*}\widehat{(x)K}(x)h+\alpha^{2}\widehat{h}=\widehat{K^{*}(x)}g_{\delta}$$

Puisque

$$K^{*}\widehat{(x)K}(x)u=\left|\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\right|^{2}\ \hat{u}\ \text{et}\ \widehat{K^{*}(x)}v=\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{v}$$

Donc

$$h=\left[K^{*}(x)K(x)+\alpha^{2}I\right]^{-1}K^{*}(x)g_{\delta}\Longrightarrow\left|\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\right|^{2}\widehat{h}+\alpha^{2}\widehat{h}=\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{g}_{\delta}$$

$$\Longrightarrow\left(\left|\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\right|^{2}+\alpha^{2}\right)\widehat{h}=\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{g}_{\delta}$$

$$\Longrightarrow\widehat{h}(x,\xi)=\frac{\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{g}_{\delta}(\xi)}{\left|\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\right|^{2}+\alpha^{2}}=\frac{\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^{2}\overline{\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}}\widehat{g}_{\delta}(\xi)}{\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^{2}\left|\frac{v(1,\xi)}{v(x,\xi)}\right|^{2}+\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^{2}\alpha^{2}}$$

On aura $\begin{cases} \widehat{h}(x,\xi) = \frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\widehat{g}_\delta(\xi)}{1+\alpha^2\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2} \\ \text{et on a } h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\widehat{h}(x,\xi)\,d\xi \end{cases}$ Alors

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\widehat{g}_\delta(\xi)}{1+\alpha^2\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}d\xi,$$

est appelée approximation de Tikhonov. En utilisant (3.41), on a donc la solution exacte du problème (3.42)

$$\begin{cases} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\ \hat{u}(x,\xi)\,d\xi. \\ \text{et : } \hat{u}(x,\xi) = \frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi) \end{cases} \Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\ \frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)\,d\xi, \tag{3.50}$$

$u(x,t)$ est la solution exacte et la solution ■

Definition 6 $u_\delta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\ \frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}}{1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2}\hat{g}_\delta(\xi)\,d\xi$ *est dite approximation simplifiée de Tikhonov pour la solution* $u(x,t)$ *du problème (3.42).*

Lemme 10 *:*

(I)

$$\sup_{s\geq 0}\frac{e^{(A(1)-A(x))s}}{1+\alpha^2 e^{2A(1)s}} \leq \alpha^{\frac{(A(x)-A(1))}{A(1)}} \tag{3.51}$$

(II)

$$\sup_{s\geq 0}\frac{e^{(2A(1)-A(x))s}}{1+\alpha^2 e^{2A(1)s}} \leq \alpha^{\frac{(A(x)-2A(1))}{A(1)}} \tag{3.52}$$

Demonstration. (I) Soit

$$\begin{aligned} p(s) &= \frac{e^{(A(1)-A(x))s}}{1+\alpha^2 e^{2A(1)s}} \\ &\Longrightarrow\ p(s)' = \frac{(A(1)-A(x))\,e^{(A(1)-A(x))s}\left(1+\alpha^2 e^{2A(1)s}\right) - 2\alpha^2 A(1)\,e^{2A(1)s}e^{(A(1)-A(x))s}}{\left(1+\alpha^2 e^{2A(1)s}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow p(s^*)' = 0 \Longrightarrow \frac{e^{(A(1)-A(x))s^*}\left((A(1)-A(x))\left(1+\alpha^2 e^{2A(1)s^*}\right) - 2\alpha^2 A(1)\,e^{2A(1)s^*}\right)}{\left(1+\alpha^2 e^{2A(1)s*}\right)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow (A(1)-A(x))\left(1+\alpha^2 e^{2A(1)s^*}\right) = 2\alpha^2 A(1)\,e^{2A(1)s^*}$$

$$\Longrightarrow (A(1)-A(x)) + (A(1)-A(x))\,\alpha^2 e^{2A(1)s^*} - 2\alpha^2 A(1)\,e^{2A(1)s^*} = 0$$

$$\Longrightarrow (A(1)-A(x)) - (A(1)+A(x))\,\alpha^2 e^{2A(1)s^*} = 0 \Longrightarrow \alpha^2 e^{2A(1)s^*} = \frac{A(1)-A(x)}{A(1)+A(x)}$$

$$\Longrightarrow \alpha^2 e^{2A(1)s^*} = \frac{A(1) - A(x)}{A(1) + A(x)}. \tag{3.53}$$

$$A(1) + A(x) > A(1) - A(x) \Longrightarrow \frac{A(1) - A(x)}{A(1) + A(x)} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \alpha^2 e^{2A(1)s^*} = \frac{A(1) - A(x)}{A(1) + A(x)} \leq 1.\text{tq} : A(1) > 0, A(1) \geq A(x) \geq 0, 0 \leq x \leq 1$$

Donc

$$e^{2A(1)s^*} \leq \alpha^{-2} \Longrightarrow \left(e^{2A(1)s^*}\right)^{\frac{A(1)-A(x)}{2A(1)}} \leq \left(\alpha^{-2}\right)^{\frac{A(1)-A(x)}{2A(1)}} \Longrightarrow e^{(A(1)-A(x))s^*} \leq \alpha^{-\frac{A(1)-A(x)}{A(1)}} \tag{3.54}$$

Comme

$$\alpha^2 e^{2A(1)s^*} = \frac{A(1) - A(x)}{A(1) + A(x)} \leq 1 \Longrightarrow 1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*} = 1 + \frac{A(1) - A(x)}{A(1) + A(x)} = \frac{2A(1)}{A(1) + A(x)}$$

Alors

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}} = \frac{A(1) + A(x)}{2A(1)} = \frac{A(1) + A(x)}{A(1) + A(1)} \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}} \leq 1. \tag{3.55}$$

Par (3.54) et (3.55) on aura

$$\frac{e^{(A(1)-A(x))s^*}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}} \leq \alpha^{\frac{(A(x)-A(1))}{A(1)}}$$

Ainsi (3.51) démontrée

(II) Soit

$$p(s) = \frac{e^{(2A(1)-A(x))s}}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s}}$$

$$\Longrightarrow p(s^*)^{/} = \frac{e^{(2A(1)-A(x))s^*}\left((2A(1) - A(x))\left(1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}\right) - 2\alpha^2 A(1) e^{2A(1)s^*}\right)}{\left(1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}\right)^2}$$

$$p(s^*)^{/} = 0 \Longrightarrow e^{(2A(1)-A(x))s^*}\left((2A(1) - A(x))\left(1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}\right) - 2\alpha^2 A(1) e^{2A(1)s^*}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow (2A(1) - A(x))\left(1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}\right) = 2\alpha^2 A(1) e^{2A(1)s^*}$$

$$\Longrightarrow 2A(1) - A(x) + 2\alpha^2 A(1) e^{2A(1)s^*} - A(x)\alpha^2 e^{2A(1)s^*} = 2\alpha^2 A(1) e^{2A(1)s^*}$$

$$\Longrightarrow 2A(1) = A(x)\left(1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}\right) \Longrightarrow 1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*} = \frac{2A(1)}{A(x)}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{1 + \alpha^2 e^{2A(1)s^*}} = \frac{A(x)}{2A(1)} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} 1+\alpha^2 e^{2A(1)s^*} &= \frac{2A(1)}{A(x)} \Longrightarrow \alpha^2 e^{2A(1)s^*} \leq \left(\frac{2A(1)}{A(x)}-1\right) \\ &\Longrightarrow e^{2A(1)s^*} \leq \alpha^{-2}\left(\frac{2A(1)-A(x)}{A(x)}\right) \leq \alpha^{-2}\left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$e^{2A(1)s^*} \leq \alpha^{-2}\left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right) \Longrightarrow \left(e^{2A(1)s^*}\right)^{\left(\frac{2A(1)-A(x)}{2A(1)}\right)} \leq \alpha^{-2\left(\frac{2A(1)-A(x)}{2A(1)}\right)}\left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right)^{\left(\frac{2A(1)-A(x)}{2A(1)}\right)}$$

Puisque

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{2A(1)}{2A(1)} \geq \frac{2A(1)-A(x)}{2A(1)} \\ \text{et} \quad \frac{2A(1)}{A(x)} \geq 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right)^{\left(\frac{2A(1)-A(x)}{2A(1)}\right)} \leq \left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right)^{\left(\frac{2A(1)}{2A(1)}\right)} = \frac{2A(1)}{A(x)}$$

Alors

$$\begin{aligned} e^{(2A(1)-A(x))s^*} &\leq \alpha^{\frac{A(x)-2A(1)}{A(1)}}\left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right)^{\left(\frac{2A(1)-A(x)}{2A(1)}\right)} \leq \alpha^{\frac{A(x)-2A(1)}{A(1)}}\left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right)^{\left(\frac{2A(1)}{A(1)}\right)} \\ &\Longrightarrow e^{(2A(1)-A(x))s^*} \leq \alpha^{\frac{A(x)-2A(1)}{A(1)}}\left(\frac{2A(1)}{A(x)}\right) \\ &\Longrightarrow \frac{A(x)}{2A(1)} e^{(2A(1)-A(x))s^*} \leq \alpha^{\frac{A(x)-2A(1)}{A(1)}} \end{aligned} \tag{3.57}$$

Par (3.56) et (3.57) et on a

$$\frac{e^{(2A(1)-A(x))s^*}}{1+\alpha^2 e^{2A(1)s^*}} \leq \alpha^{\frac{A(x)-2A(1)}{A(1)}}$$

Ainsi (3.52) démontrée. ■

Théorème 7 : *On suppose que le problème*

$$\left\{\begin{array}{c} a(x)v_{xx}+b(x)v_x+c(x)v=0 \quad, x>0 \\ \text{et} \quad v(0)=1, v(x)_{x\longrightarrow\infty} \text{ borné.} \end{array}\right. \tag{3.58}$$

admet une solution unique. On pose $u(x,t)$ une solution exacte telle que :

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t}\,\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)\,d\xi.$$

Et $u_\delta(x,t)$ *une approximation simplifiée de Tikhonov de* $u(x,t)$ *donnée par (3.59) :*

$$u_\delta(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi t}\,\frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}}{1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2}\hat{g}_\delta(\xi)\,d\xi \tag{3.59}$$

et on a : $\|g-g_\delta\|\leq\delta$ *tel que :* $g(t)$ *: la mesure de température à* $x=1$*,et on a :* $\|f\|\leq E$ *tq :* E *constante. Alors*

$$\|u(x,.)-u_\delta(x,.)\|\leq C\delta^{\frac{A(x)}{A(1)}}E^{\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)},\ 0\ <\ x\ <\ 1. \tag{3.60}$$

tel que : C *et* δ *et* E *sont des constantes positives.*

Demonstration. On a

$$\hat{g}(\xi)=v(1,\xi)\,\widehat{f}(\xi)\,. \tag{3.61}$$

soit

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(x,\xi)-\hat{u}_\delta(x,\xi)|^2 &= \left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)-\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}_\delta(\xi)\,\frac{1}{1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2}\right|^2\\
&=\left|\frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}(\xi)\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)-\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\hat{g}_\delta(\xi)}{1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2}\right|^2\\
&=\left|\frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\left(\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right)+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\hat{g}(\xi)\,\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}}{1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2}\right|^2\\
&\leq 2\left|\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right|^2\frac{\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2}+2\alpha^4\frac{\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^4|v(x,\xi)|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2}.\\
&\leq 2\left|\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right|^2\frac{\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2}+2\alpha^4\frac{\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2}.
\end{aligned}$$

donc

$$|\hat{u}(x,\xi)-\hat{u}_\delta(x,\xi)|^2\leq 2\left|\hat{g}(\xi)-\hat{g}_\delta(\xi)\right|^2 I_1+2\alpha^4\left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 I_2. \tag{3.62}$$

on pose

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2}. \\ \text{et : } I_2 = \frac{\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2} \end{cases}$$

on a

$$I_1 = \frac{\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2} \leq \frac{\left(\frac{C_2}{C_1^{/}}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1+\alpha^2\left(\frac{1}{C_2^{/2}}\right)e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2}$$

et

$$c_1 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(x,\xi)| \leq c_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}. \tag{3.63}$$

$$\text{et : } c_1^{/} e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}} \leq |v(1,\xi)| \leq c_2^{/} e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}. \tag{3.64}$$

alors

$$\begin{cases} \left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2 \leq \left(\frac{c_2 e^{-A(x)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}}{c_1^{/} e^{-A(1)\sqrt{\frac{|\xi|}{2}}}}\right)^2 = \left(\frac{c_2}{c_1^{/}}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}} \\ \text{et : } \left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2 \geq \frac{1}{C_2^{/2}} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}} = \frac{1}{C_2^{/2} e^{-2A(1)\sqrt{2|\xi|}}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_1 \leq \left(\frac{c_2}{c_1^{/}}\right)^2 \frac{1}{\min\left\{1, \frac{1}{C_2^{/2}}\right\}^2} \frac{e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1+\alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2} \leq C_1^2 \frac{e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1+\alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2}$$

$$C_1^2 \frac{e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1+\alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2} = C_1^2 \left(\frac{e^{(A(1)-A(x))s}}{1+\alpha^2 e^{A(1)s}}\right)^2 tq : \sqrt{2|\xi|} = 2s.$$

tq $C_1^2 = \frac{\left(\frac{c_2}{c_1^{/}}\right)^2}{\min\left\{1, \frac{1}{C_2^{/2}}\right\}^2}$. Par (3.51) on a

$$I_1 \leq C_1^2 \alpha^{\frac{2(A(x)-A(1))}{A(1)}} \tag{3.65}$$

D'autre part

$$I_2 = \frac{\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2 \left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2}{\left(1+\alpha^2\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2\right)^2} \leq \frac{\frac{1}{c_1^{/2}} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}} \left(\frac{c_2}{c_1^{/}}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1+\alpha^2 \frac{1}{c_2^{/2}} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2}$$

de (3.64) on a

$$\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2 \leq \frac{1}{c_1^{/2}} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}$$

et de (3.63) et (3.64) on a

$$\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2 \leq \left(\frac{c_2}{c_1^{/}}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}$$

Enfin de (3.64) on a

$$\left|\frac{1}{v(1,\xi)}\right|^2 \geq \frac{1}{c_2^{/2}} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad I_2 &\leq \frac{\frac{1}{c_1^{/2}} e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}} \left(\frac{c_2}{c_1^{/}}\right)^2 e^{(A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\min\left\{1, \frac{1}{c_2^2}\right\}^2 \left(1+\alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2} \\
&\leq \quad C_2^2 \frac{e^{(2A(1)-A(x))\sqrt{2|\xi|}}}{\left(1+\alpha^2 e^{A(1)\sqrt{2|\xi|}}\right)^2} = C_2^2 \left(\frac{e^{(2A(1)-A(x))s}}{1+\alpha^2 e^{A(1)s}}\right)^2 \\
&\leq \quad C_2^2 \alpha^{2\frac{(A(x)-2A(1))}{A(1)}}
\end{aligned}$$

tq :

$$C_2^2 = \frac{c_2^2}{C_1^4 \min\left\{1, \frac{1}{C_2^{/2}}\right\}^2}, \text{ et : } 2s = \sqrt{2|\xi|} \tag{3.66}$$

donc par (2.25) on a :

$$I_2 \leq C_2^2 \alpha^{2\frac{(A(x)-2A(1))}{A(1)}}, \tag{3.67}$$

Par combinaison entre (3.62) et (3.65) et (3.67) on a :

$$|u(x,\xi) - u_\delta(x,\xi)|^2 \leq 2\left|\widehat{g}(\xi) - \widehat{g_\delta}(\xi)\right|^2 C_1^2 \alpha^{\frac{2(A(x)-A(1))}{A(1)}} + 2\alpha^4 |f(\xi)|^2 C_2^2 \alpha^{2\frac{(A(x)-2A(1))}{A(1)}}$$

comme $\|g - g_\delta\| \leq \delta$ et $\|f\| \leq E$, on a

$$\|u(x,.) - u_\delta(x,.)\|^2 = \|\hat{u}(x,.) - \hat{u}_\delta(x,.)\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |u(x,\xi) - .u_\delta(x,\xi)|^2 d\xi \leq 2C_1^2 \alpha^{\frac{2(A(x)-A(1))}{A(1)}} \delta^2 + 2\alpha^4 E^2 C_2^2 \alpha^{2\frac{(A(x)-2A(1))}{A(1)}}$$

$$= 2C_1^2 \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2\left(\frac{A(x)}{A(1)}-1\right)} \delta^2 + 2\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\left(2\frac{A(x)}{A(1)}-4+4\right)} E^2 C_2^2$$

$$= 2C_1^2 \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2\left(\frac{A(x)}{A(1)}-1\right)} \delta^2 + 2C_2^2 E^2 \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2\frac{A(x)}{A(1)}} ; \alpha = \frac{\delta}{E}$$

donc

$$\|u(x,.) - u_\delta(x,.)\|^2 \leq 2C_1^2 \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} E^{-2\frac{A(x)}{A(1)}+2} + 2C_2^2 E^{\left(2-2\frac{A(x)}{A(1)}\right)} \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}}$$

$$= \left(2C_1^2 + 2C_2^2\right) \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)} = C^2 \delta^{2\frac{A(x)}{A(1)}} E^{2\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}, \text{tq} : C^2 = 2\left(C_1^2 + C_2^2\right).$$

Ainsi (3.60) démontrée. ■

Remarque 8 *:*

L'inégalité (3.60) est une estimation stable qui s'appelle stabilité Hölder dans la L^2*-norme. si :* $a(x)$ *dans le problème (3.42) est une constante positive donc l'estimation*

(3.60)$\Longrightarrow \|u(x,.) - u_\delta(x,.)\| \leq C\delta^x E^{(1-x)}$

Chapitre 4

Etude du problème de la chaleur rétrograde homogène par la méthode de mollification

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de la chaleur rétrograde par la méthode de mollification. Soit $p \in (1, \infty)$, $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$, et ε, E deux constantes telles que : $0 < \varepsilon < E < \infty$.

On considère le problème de la chaleur rétrograde homogène suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} \ . & \text{tq} : x \in \mathbb{R}, t \in (0, T) \\ \text{et} & \|u(.,T) - \varphi(.)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq \varepsilon. \end{array} \right. . \tag{4.1}$$

$$\|u(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E. \tag{4.2}$$

Ce problème est un problème mal posé. La méthode d'étude est celle de mollification. On associe au problème (4.1)-(4.2), le problème de mollification suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t^v = u_{xx}^v \, ; \, x \in \mathbb{R} \ \ , \, t \in (0, T) \\ \quad u^v(x, T) = s_v(\varphi)(x) \end{array} \right. . \tag{4.3}$$

C'est un problème bien-posé. Par un choix adéquat du paramètre de mollification on établit une estimation d'erreur du type Hölder. En realité pour $p = 2$ la méthode de mollification n'est autre que la méthode de la transformée de Fourier à support compact.

4.1 Résultats auxiliaires

Pour la méthode de mollification on utilise les résultats auxiliaires suivants :

a) On rappelle que la transformation de Fourier de $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ est définie par

$$F[\varphi](\xi)=\widehat{\varphi}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-i\xi x}dx.$$

b) $\forall K\in L_1(\mathbb{R})$ et $f\in L_p(\mathbb{R})$; $1\leq p\leq\infty$ on a :

$$K*f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}K(y)f(y-x)dy.$$

$$K\in L_1(\mathbb{R})\quad \text{et}\qquad f\in L_p(\mathbb{R})\Longrightarrow K*f\in L_p(\mathbb{R})\,et\,\|K*f\|_p\leq\|K\|_1\|f\|_p$$

On note :$\|.\|_{L_p(\mathbb{R})}$ par $\|.\|_p$.

Definition 7 *La fonction $g(z)$, $z\in\mathbb{C}$, est une fonction entière exponentielle de type v, si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) C'est une fonction entière c'est à dire $g(z)=\sum\limits_{k\geq0}a_kz^k$, à coefficients a_k , et la série converge absolument, $\forall z\in\mathbb{C}$.

(ii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_\varepsilon$ un nombre positif ,$\forall z\in\mathbb{C}$, tel que : $|g(z)|\leq A_\varepsilon\exp((v+\varepsilon)|z|)$.

Definition 8 *On note $m_{v,p}:=m_{v,p}(\mathbb{R})$, $(1\leq p\leq\infty)$, l'ensemble de fonctions entières exponentielles de type v, de la variable réelle $x\in\mathbb{R}$, à valeurs dans $L_p(\mathbb{R})$.*

Théorème 9 *Si $f\in m_{v,p}\Longrightarrow\widehat{f}$ est a un support dans $[-v,v]$.*

Théorème 10 [***L'inégalité de Bernstein-NiKol'sKii***]

$$si\ f\in m_{v,p}\Longrightarrow\left\|f^{(n)}\right\|_p\leq v^n\|f\|_p\,,n=1,2,.......$$

Théorème 11 ***Le Noyau de Dirichlet.***

$D_v(x)=\frac{\sin(vx)}{x}$ *dit noyau de Dirichlet verifie les conditions suivantes :*

1) c'est une fonction entière exponentielle de type v, dans l'espace $L_2(\mathbb{R})$ .telle que : $D_v(x)\in m_{v,2}\subset L_2(\mathbb{R})$.

2)

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\widehat{D}_v(x)=\begin{cases}1 & ;\ sur\ \ [-v,v]\\ 0 & ;\ \text{à l'extérieur de}\ \ [-v,v]\end{cases}$$

3) $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{D}_v(x)\,dx=1.\quad(v>0)$.

4) Pour $f\in L_p(\mathbb{R})$; $p\in(1,\infty)$; la convolution

$$s_v(f)(x)=\frac{1}{\pi}D_v*f=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}D_v(y)*f(x-y)\,dy.$$

vers $m_{v,p}$ et $\left\|\frac{1}{\pi}D_v*f\right\|\leq c_p\|f\|_p$, où : c_p est une constante dépendante seulement de p.

5) Si : $\omega \in m_{v,p} \Longrightarrow s_v(\omega) = \omega.$

6) $F[D_v * f] = \widehat{f}$ *sur* $[-v, v]$.

7) $\|f - s_v(f)\|_p \leq (1 + c_p) E_v(f)_p$.

Ici : $E_v(f)_p = \inf_{g \in m_{v,p}} \|f - g\|_p$ *est une bonne approximation de* f *dans* $m_{v,p}$.

Théorème 12 ***Noyau de de La Vallée Poussin***

La fonction : $V_v(x) = \frac{1}{v} \frac{\cos(vx) - \cos(2vx)}{x^2}$, *où* v *est un nombre positif;*

est dit noyau de de La Vallée Poussin et vérifie les conditions suivantes :

(i) Elle est une fonction entière du type exponentiel du type $2v$ *dans l'espace des fonctions bornées et sommables sur* $\mathbb{R}$.

(ii) $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V_v(x)| \, dx < 2\sqrt{3}$.

(iii) Pour $f \in L_p(\mathbb{R})$, *la convolution* $M_v^1(f)(x) = \frac{1}{\pi} V_v * f = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V_v(y) f(x - y) \, dy$, *appartient à* $m_{2v,p}$

4.2 Méthode de mollification et stabilité

Soit φ^v une mollification de φ par convolution avec un noyau du type Dirichlet

$$\varphi^v = s_v(\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} D_v * \varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D_v(y) * \varphi(x - y) \, dy.$$

Si $\varphi \in L_p(\mathbb{R}) \Longrightarrow \varphi^v = s_v(\varphi)(x) \in m_{v,p}$. Soit le problème de mollification suivant :

$$\begin{cases} u_t^v = u_{xx}^v \, ; \, x \in \mathbb{R} \quad , t \in (0, T) \\ \qquad u^v(x, T) = s_v(\varphi)(x) \end{cases} \tag{4.4}$$

Théorème 13 *:*

Soit $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ *avec* $p \in (1, \infty)$ *; alors le problème (4.4) admet une solution unique et* $\forall t \in [0, T]$, *la fonction* $u^v(., t) \in m_{v,p}$ *et on a* $\|u^v(., t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} e^{(T-t)v^2} \|\varphi\|_p$. *Si on choisit :* $v = \sqrt{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$ *dans le problème (4.4), alors*

$$\|u^v(., t) - u(., t)\|_p \leq \left(\frac{c_p}{\pi} + \widetilde{c}_p \right) \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1 - \frac{t}{T}}, \forall t \in [0, T] \tag{4.5}$$

où : $\widetilde{c}_p = (1 + c_p)\left(1 + 2\sqrt{3}\right) e^{\frac{3}{2}}$, *avec* u *solution du problème (4.1)-(4.2) et* $u^v(., t) = e^{(t-T)d^2/dx^2} s_v(\varphi)(x)$.

Demonstration. puisque $\varphi \in L_p(\mathbb{R})$ donc $s_v(\varphi) \in m_{v,p}$, alors le problème de Cauchy dans $m_{v,p}$ a une solution unique [18], et $u^v(x, t) = e^{(t-T)d^2/dx^2} s_v(\varphi)(x)$. Par l'inégalité de Bernstein-Nikolski on aura

$$\|u^v(x, t)\|_p = \left\| e^{(t-T)d^2/dx^2} s_v(\varphi) \right\|_p = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T - t)^n}{n!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} s_v(\varphi) \right\|_p$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} \left\| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} s_v(\varphi) \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} v^{2n} \|s_v(\varphi)\|_p$$

On a d'après le théorème 10 : $\left\|f^{(n)}\right\|_p \leq v^n \|f\|_p$, si $f \in m_{v,p}$. D'où on a :

$$s_v(\varphi) \in m_{v,p} \Longrightarrow \left\| \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} s_v(\varphi) \right\|_p \leq v^{2n} \|s_v(\varphi)\|_p .$$

Donc, en prenant $s_v(\varphi) = \frac{1}{\pi} D_v * \varphi$ dans cette inégalité, on obtient

$$\|u^v(.,t)\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T-t)^n}{n!} v^{2n} \left\| \frac{1}{\pi} D_v * \varphi \right\|_p$$

$$= \left\| \frac{1}{\pi} D_v * \varphi \right\|_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((T-t)\, v^2\right)^n}{n!} ,$$

Comme d'après le théorème 11, on a $\|D_v * \varphi\|_p \leq c_p \|\varphi\|_p$, alors

$$\leq \frac{c_p}{\pi} \|\varphi\|_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((T-t)\, v^2\right)^n}{n!} = \frac{c_p}{\pi} \|\varphi\|_p \, e^{(T-t)v^2}$$

$$\|u^v(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} \|\varphi\|_p \, e^{(T-t)v^2} \tag{4.6}$$

Considérons maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} w_t^v = w_{xx}^v, x \in \mathbb{R}, t \in (0,T) \\ w^v(x,T) = s_v(u(.,T))(x) \in m_{v,p} \end{cases} \tag{4.7}$$

Il est clair que ce problème est bien-posé.

$$\|u^v(.,t) - u(.,t)\|_p \leq \|u^v(.,t) - w^v(.,t)\|_p + \|w^v(.,t) - u(.,t)\|_p . \tag{4.8}$$

Comme $w^v(x,t) - u^v(x,t)$ est une solution de problème (4.4) où $s_v(\varphi)$, est remplacée par $s_v(u(.,T) - \varphi(.))$, vu que : $\|u(.,T) - \varphi(.)\|_p \leq \varepsilon$.Donc par (4.6), on obtient :

$$\| \; w^v(.,t) - u^v(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} e^{(T-t)v^2} \|u(.,T) - \varphi(.)\|_p$$

$$\leq \frac{c_p}{\pi} e^{(T-t)v^2} \varepsilon \forall t \in [0,T] \;\text{ où : } \|u(.,T) - \varphi(.)\|_p \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{cases} \| \; w^v(.,t) - u^v(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} e^{(T-t)v^2} \varepsilon \\ \forall t \in [0,T] \end{cases} . \tag{4.9}$$

Il reste à prouver l'estimation $\| \, w^v(.,t) - u(.,t)\|_p$, pour cela on pose :

$$K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \forall t > 0 \tag{4.10}$$

Si $u(x,t)$ est solution de l'équation de chaleur et $u(.,0) \in L_P(\mathbb{R}), 1 < p \leq \infty$,on a [19]

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)\, u(y,0)\, dy, \forall t \in [0,T] \tag{4.11}$$

Puisque : $u(.,t) \in L_P(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.et : $w^v(x,t) = s_v(u(x,t))$. Par la condition (7) du noyau de Dirichlet on trouve

$$\|u(.,t) - w^v(.,t)\|_p = \|u(.,t) - s_v(u(.,t))\|_p \leq (1 + c_p)\, E_v(u(x,t))_p$$

car : $\|f - s_v(f)\|_p \leq (1 + c_p)\, E_v(f)_p$. Estimons $E_v(u(x,t))_p$. On note que h est une fonction arbitraire dans $m_{v,1}$. Alors pour toutes les fonctions $\Psi \in L_P(\mathbb{R}), 1 \leq p \leq \infty$; la fonction $h * \Psi \in m_{v,p}$ (voir (13, theorem 3.6.2.p 136)). Donc :

$$\forall h \in m_{v,1} \Longrightarrow E_v(u(x,t))_p = \inf_{g \in m_{v,p}} \|u(.,t) - g\|_p \text{. puisque : } h * u(.,0) \in m_{v,p}$$

$$E_v(u(x,t))_p = \inf_{g \in m_{v,p}} \|u(.,t) - g\|_p \leq \|K(.,t) * u(.,0) - h * u(.,0)\|_p$$

$$\leq \|K(.,t) - h\|_1 \|u_0\|_p \leq E_v(K(.,t))_1\, E, \text{ car } \|u_0\|_p \leq E.$$
$$\Longrightarrow E_v(u(x,t))_p \leq E_v(K(.,t))_1\, E.$$

D'autre part par la proposition 6 on a

$$E_v(K(.,t))_1 \leq \left(1 + 2\sqrt{3}\right) e^{\frac{3}{2}} e^{-v^2 t}.$$

Alors

$$\|u(.,t) - w^v(.,t)\|_p \leq (1 + c_p)\, E_v(u(.,t))_p$$
$$\leq (1 + c_p)\, E_v(K(.,t))_1\, E \leq \underbrace{\left((1 + c_p)\left(1 + 2\sqrt{3}\right) e^{\frac{3}{2}}\right)} e^{-v^2 t} E.$$

$$\Longrightarrow \|u(.,t) - w^v(.,t)\|_p \leq \widetilde{c}_p e^{-v^2 t} E, \text{ avec :} \widetilde{c}_p = \left((1 + c_p)\left(1 + 2\sqrt{3}\right) e^{\frac{3}{2}}\right). \tag{4.12}$$

Ainsi à partir de (4.8) (4.9) et (4.12) on déduit

$$\|u^v(.,t) - u(.,t)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} e^{(T-t)v^2} \varepsilon + \widetilde{c}_p e^{-v^2 t} E, \forall t \in [0,T].$$

Si $v=\sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$

$$v=\sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}\Longrightarrow v^2=\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\Longrightarrow Tv^2=\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\Longrightarrow e^{Tv^2}=\frac{E}{\varepsilon}.$$

$$\text{et } tv^2=\frac{t}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\Longrightarrow -tv^2=-\frac{t}{T}\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)\Longrightarrow e^{-tv^2}=\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}.$$

Alors

$$\left\|u^v(.,t)-u(.,t)\right\|_p\leq\frac{c_p}{\pi}\frac{E}{\varepsilon}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}\varepsilon+\widetilde{c}_p\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}E=\left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)E\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}.$$

Ainsi (4.5) démontrée. ■

Proposition 6 *: Si* $0<v<\sqrt{\frac{3}{2t}}$ *alors* $E_v(K(.,t))_1\leq\left(1+2\sqrt{3}\right)e^{\frac{3}{2}}e^{-v^2t}$ *,*v *: est un nombre positif .*

Demonstration.

$E_v(K(.,t))_1=\inf\limits_{g\in m_{v,1}}\|K(.,t)-g\|_1\leq\left\|K(.,t)-M^1_{\frac{v}{2}}(K(.,t))(.)\right\|_1$, puisque :$M^1_v(f(x))\in m_{2v,p}$

$$=\left\|K(.,t)-\frac{1}{\pi}V_{\frac{v}{2}}*K(.,t)\right\|_1 .tq: M^1_v(f(x))=\frac{1}{\pi}V_v*f$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V_v(y)*f(x-y)\,dy\quad=\frac{1}{\pi}V_{\frac{v}{2}}(y)*f(y)$$

$$\Longrightarrow E_v(K(.,t))_1\leq\left\|K(.,t)-\frac{1}{\pi}V_{\frac{v}{2}}*K(.,t)\right\|_1\leq\left(1+\frac{1}{\pi}\left\|V_{\frac{v}{2}}\right\|_1\right)\|K(.,t)\|_1$$

$$\leq\left(1+2\sqrt{3}\right)\|K(.,t)\|_1,\text{ car }\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|V_v(y)|\,dx\leq2\sqrt{3}\Longrightarrow\frac{1}{\pi}\left\|V_{\frac{v}{2}}\right\|_1 2\sqrt{3}.$$

$$\text{et } K(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\leq\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\leq1\Longrightarrow\|K(x,t)\|_1\leq1.$$

Alors

$$E_v(K(.,t))_1\leq\left(1+2\sqrt{3}\right).$$

On a

$$0<v<\sqrt{\frac{3}{2t}}\Longrightarrow v^2<\frac{3}{2t}\Longrightarrow v^2t<\frac{3}{2}\Longrightarrow e^{v^2t}\leq e^{\frac{3}{2}}\Longrightarrow1\leq e^{-v^2t}e^{\frac{3}{2}}.$$

Donc

$$E_v\left(K\left(.,t\right)\right)_1 \leq \left(1+2\sqrt{3}\right).1 \leq \left(1+2\sqrt{3}\right)e^{-v^2t}e^{\frac{3}{2}}$$

$$\Longrightarrow E_v\left(K\left(.,t\right)\right)_1 \leq \left(1+2\sqrt{3}\right)e^{\frac{3}{2}}e^{-v^2t}.$$

■

Proposition 7 *: pour* $v \geq \sqrt{\frac{3}{2t}} \Longrightarrow E_v\left(K\left(.,t\right)\right)_1 \leq \frac{4}{\pi}e^{-tv^2}$

Demonstration. Résulte du lemme 4.2.1de [2] ■

Remarque 14 *: Le théorème 13 affirme que le problème de mollification est un problème bien-posé. Si on choisit correctement le paramètre de mollification on trouve l'estimation d'erreur de type Hölder.*

Théorème 15 *: Soit* $p \in (1.\infty)$ *et* u_1 *et* u_2 *deux solutions du problème (4.1)-(4.2). Alors*

$$\left\|u_1\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)\right\|_p \leq 2\left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}.\forall t\in[0,T]$$

Demonstration. *Soient u solution de problème (4.1)-(4.2) et* u_1^v *solution du probleme (4.4). D'après le théorème 13*

$$\begin{cases} \left\|u_1^v\left(.,t\right)-u_1\left(.,t\right)\right\|_p \leq \left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}.\forall t\in[0,T] \\ et: \ \left\|u_2^v\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)\right\|_p \leq \left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}.\forall t\in[0,T] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \left\|u_1\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)\right\|_p = \left\|u_1\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)-u_1^v\left(.,t\right)+u_1^v\left(.,t\right)\right\|_p.$$

Puisque le problème (4.4) admet une solution unique donc $u_1^v\left(.,t\right)=u_2^v\left(.,t\right)$*, et on a*

$$\left\|u_1\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)\right\|_p \leq \left\|u_2^v\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)\right\|_p+\left\|u_1^v\left(.,t\right)-u_1\left(.,t\right)\right\|_p.$$

$$\leq \left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}+\left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}$$

$$= 2\left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}.$$

Alors

$$\left\|u_1\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)\right\|_p \leq 2\left(\frac{c_p}{\pi}+\widetilde{c}_p\right)\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}.\forall t\in[0,T].$$

■

Remarque 16 *:Dans* [2] *on utilise la mollification par convolution avec un noyau du type de de la Vallée Poussin. Le théorème 15 est une amélioration importante du résultat suivant : Il existe une constante* c^**, telle que :*

$$\begin{cases} \left\|u_1\left(.,t\right)-u_2\left(.,t\right)\right\|_p \leq 4\sqrt{3}\left(\left(c^*E\right)^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}+\left(c^*E\right)^{1-\frac{t}{4T}}\varepsilon^{\frac{t}{4T}}\right) \\ \forall t\in[0,T]. \end{cases}$$

Remarque 17 *: La stabilité dans les théorèmes 13 et 15 ne donne pas l'information sur la dépendance continue de la solution en $t = o$. Pour cela on prend la condition du théorème 13 où $\widetilde{E}$, γ sont deux constantes finies positives et $\omega(u(.,0),h)_p \leq \widetilde{E}\ h^{\gamma}, \forall h > 0$. Ici $\omega(u(.,0),h)_p$ est le module de continuité de la fonction $u(.,0) \in L_p(\mathbb{R})$, au sens de la metrique de l'espace $L_p(\mathbb{R})$ [13.p.147] .On pose que si $t = 0 \Longrightarrow E_v(u(.,0))_p = \omega(u(.,0),h)_p$, tel que h dépend seulement de v . Le théorème 19 suivant affirme que pour $t = o$ et si on pose*

$$\omega(u(.,0),h)_p \leq \widetilde{E}\ h^{\gamma}, \forall h > 0$$

Et

$$\|u(.,t) - w^v(.,t)\|_p \leq (1 + c_p)\, E_{v.p}(u(.,t))_p$$

Et si on pose : $w^v(x,t) = S_v(u(.,t))(x)$; alors

$$\|u(.,0) - w^v(.,0)\|_p \leq (1 + c_p)\, E_{v,p}(u(.,0))_p \leq \widetilde{c}\,\widetilde{E}\ \frac{1}{v^{\gamma}}$$

Remarque 18 *Et*

$$\|u^v(.,0) - u(.,0)\|_p \leq \left\{ \frac{c_p}{\pi} e^{Tv^2}\varepsilon + \widetilde{c}E_1 \frac{1}{v^{\gamma}} \right\}$$

Si $v = \sqrt{\beta \frac{1}{T} \ln \frac{\widetilde{E}}{\varepsilon}}$, tel que β est nombre dans l'intervalle (0.1) alors :

$$\|u^v(.,0) - u(.,0)\|_p \ \leq \frac{c_p}{\pi} \widetilde{E}^{\beta} \varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}\,\widetilde{E}\ \left(\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^{-\frac{\gamma}{2}}$$

Théorème 19 *: Sous les conditions du théorème 13, et soit $\beta \in (0,1)$.*

1) Si u est une solution de problème (4.1)-(4.2) , et si dans le problème (4.1) on choisit $v = \sqrt{\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$. Alors

$$\|u^v(.,t) - u(.,t)\|_p \ \leq \left(\frac{c_p}{\pi} E^{\beta-1} \varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_p \right) \varepsilon^{\beta \frac{t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}}, t \in [0,T]$$

2) S'il existe deux constantes $\widetilde{E}$, γ telles que

$$\omega(u(.,0),h)_p \leq \widetilde{E}\ h^{\gamma}, \forall h > 0$$

On aura pour $t = 0$:

$$\|u^v(.,0) - u(.,0)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} E^{\beta} \varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c}_p \widetilde{E} \left(\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^{-\frac{\gamma}{2}} .$$

Demonstration. *1) D'après le théorème 13 on a :*

$$\|u^v(.,t)-u(.,t)\|_p \ \leq \frac{c_p}{\pi}e^{(T-t)v^2}\varepsilon+\widetilde{c}_p e^{-tv^2}E=\left(\frac{c_p}{\pi}e^{Tv^2}\frac{\varepsilon}{E}+\widetilde{c}_p\right)e^{-tv^2}E.$$

Si $v=\sqrt{\beta\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$

$$\Longrightarrow v^2=\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\Longrightarrow e^{Tv^2}=e^{\ln\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^\beta}=\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^\beta$$

$$e^{Tv^2}=\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^\beta, et \qquad e^{-tv^2}=\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{T}}$$

$$\Longrightarrow \|u^v(.,t)-u(.,t)\|_p \ \leq \left(\frac{c_p}{\pi}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^\beta\frac{\varepsilon}{E}+\widetilde{c}_p\right)E\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{T}}$$

Donc

$$\|u^v(.,t)-u(.,t)\|_p \ \leq \left(\frac{c_p}{\pi}E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}+\widetilde{c}_p\right)E^{1-\frac{\beta t}{T}}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} \ , \forall t\in[0,T]$$

2) Si

$$t=0\Longrightarrow E_v\left(u(.,0)\right)_p=\omega\left(u(.,0),h\right)_p\leq\widetilde{E}h^\gamma,\quad\forall h>0$$

Par le théorème 13 on a

$$\|u(.,t)-w^v(.,t)\|_p\leq(1+c_p)\,E_v\left(u(.,t)\right)_p$$

Si

$$t=0\Longrightarrow\|u(.,0)-w^v(.,0)\|_p\leq(1+c_p)\,\omega\left(u(.,0),h\right)_p\leq(1+c_p)\,\widetilde{E}h^\gamma$$

Où $\omega\left(u(.,0),h\right)_p\leq\widetilde{E}h^\gamma$ *et on a*

$$\|u^v(.,0)-u(.,0)\|_p\leq\|u^v(.,0)-w^v(.,0)\|_p+\|w^v(.,0)-u(.,0)\|_p$$

$$=\frac{c_p}{\pi}e^{Tv^2}\varepsilon+(1+c_p)\,\widetilde{E}h^\gamma$$

$$=\frac{c_p}{\pi}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^\beta\varepsilon+(1+c_p)\,\widetilde{E}h^\gamma,\ puisque\ v=\sqrt{\beta\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}\Longrightarrow e^{Tv^2}=\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^\beta$$

$$=\frac{c_p}{\pi}E^\beta\varepsilon^{1-\beta}+(1+c_p)\,\widetilde{E}h^\gamma,\ où\ \widetilde{c}_p=(1+c_p)\left(1+2\sqrt{3}\right)e^{\frac{3}{2}}.$$

$$\leq\frac{c_p}{\pi}E^\beta\varepsilon^{1-\beta}+\widetilde{c}_p\widetilde{E}h^\gamma.$$

Si $h=\frac{1}{v}$

$$\Longrightarrow\|u^v(.,0)-u(.,0)\|_p\leq\frac{c_p}{\pi}E^\beta\varepsilon^{1-\beta}+\widetilde{c}_p\widetilde{E}\left(\frac{1}{v}\right)^\gamma.$$

Si $v = \sqrt{\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$

$$\Longrightarrow \|u^v(.,0) - u(.,0)\|_p \leq \frac{c_p}{\pi} E^\beta \varepsilon^{1-\beta} + \widetilde{c_p} \widetilde{E} \left(\beta \frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^{-\frac{\gamma}{2}}.$$

■

Notation 20 *Le cas* $p = 2$ *est simple, on utilise la transformation de Fourier dans* $L_2(\mathbb{R})$*, et on a la stabilité dans ce cas. Le cas* $p \neq 2$ *est très difficile et généralement la transformation de Fourier pour les fonctions dans l'espace* $L_P(\mathbb{R})$ *où* $p > 2$ *est une distribution.*

Théorème 21 : *Si* $p = 2$ *,* u *est une solution du problème (4.1)-(4.2) et* u^v *est une solution du problème (4.4) alors*

(1) Si

$$v = \sqrt{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}. \tag{4.13}$$

Alors

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} 2\varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^{\left(\frac{m+2n}{2}\right)} \text{ ; si } m+2n \leq 2t, \forall t \in [0,T] \\ \left(1 + \left(\frac{m+2n}{2}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right) \left(\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^{\left(\frac{m+2n}{2}\right)} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E^{1-\frac{t}{T}} \text{ ; si } m+2n > 2t, \forall t \in (0,T] \end{cases}$$

tel que : m *,* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\|u(.,0)\|_2 \leq E$.

(2) Pour $s > 0$ *et* $E_s > 0$*, et*

$$\|u(.,0)\|_{H^S} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi,0)|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq E_s. \tag{4.14}$$

Si on choisit

$$v = \sqrt{\ln \left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon} \right)^{-\frac{s}{2T}} \right)}. \tag{4.15}$$

Alors

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon} \right)^{-(T-t)\frac{s}{2T}+n+\frac{m}{2}} \left(1 + T^{\frac{s}{2}} + 0(1)\right) \\ \text{;si } m+2n-s \leq 2t, \forall t \in [0,T] \\ \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon} \right)^{-(T-t)\frac{s}{2T}+n+\frac{m}{2}} \left(1 + T^{\frac{s}{2}} \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\left(\frac{m+2n-S}{2}\right)} + 0(1)\right) \\ \text{;si } m+2n-s > 2t, \forall t \in (0,T] \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème on utilise le lemme11 suivant :

Lemme 11 *:*

Soit $c > 0, p > 0$ *et* $\eta \geq 1$ *on a :*

(1) Si $\frac{p}{c} < 1$ *,alors* $\sup_{y \geq \eta} \left(e^{-cy} y^p\right) \leq e^{-cy} \eta^p$.

(2) Si $\frac{p}{c} \geq 1$ *, alors* $\sup_{y \geq \eta} \left(e^{-cy} y^p\right) \leq \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-c\eta} \eta^p$.

Demonstration. a) On montre que

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq v^{m+2n} e^{(T-t)v^2} \varepsilon \text{ , } \forall n,\, m = 0,1,2...$$

Si la solution est donnée par :$u(x,t) = e^{\xi^2(t-T)} u(x,T)$, alors

$$\hat{u}(x,t) = e^{\xi^2(T-t)} \hat{u}(x,T) = e^{\xi^2(T-t)} F(u(x,T))$$

$$\begin{cases} u^v(x,t) = e^{\xi^2(t-T)} u^v(x,T) \\ w^v(x,t) = e^{\xi^2(t-T)} w^v(x,T) \text{ ; } \xi \in [-v,v] \end{cases}$$

On a

$$F[u^v](\xi) = \begin{cases} F[u](\xi) \text{, pour } \xi \in [-v,v] \\ 0, \text{ pour } \xi \notin [-v,v] \end{cases}$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right)(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^n \partial x^m} \left[e^{\xi^2(t-T)} F[u^v(.,T) - w^v(.,T)](\xi) \right] \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^n}{\partial t^n} (-i\xi)^m e^{(T-t)\xi^2} F[u^v(.,T) - w^v(.,T)](\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| (-i\xi)^m \left(-\xi^2\right)^n e^{(T-t)\xi^2} F[u^v(.,T) - w^v(.,T)](\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\leq \max_{|\xi| \leq v} \left(|\xi|^{m+2n} e^{(T-t)\xi^2} \right) \left\| F[u^v(.,T) - w^v(.,T)](\xi) \right\|_2.$$

$$= v^{m+2n} e^{(T-t)v^2} \left\| F\left[\frac{1}{\pi} D_v * (\varphi - u(.,T)) \right](\xi) \right\|_2.$$

$$= v^{m+2n} e^{(T-t)v^2} \left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(D_v) F[(\varphi - u(.,T))](\xi) \right\|_2.$$

$$= v^{m+2n} e^{(T-t)v^2} \left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \widehat{D}_v F \left[(\varphi - u(.,T)) \right] (\xi) \right\|_2 .$$

$$= v^{m+2n} e^{(T-t)v^2} \left\| \varphi - u(.,T) \right\|_2 , \text{ puisque } \sqrt{\frac{2}{\pi}} \widehat{D}_v = \begin{cases} 1, \text{ sur } [-v,v] \\ 0, \text{ hors } [-v,v] \end{cases}$$

$$\leq v^{m+2n} e^{(T-t)v^2} \varepsilon, \text{ puisque } \left\| \varphi - u(.,T) \right\|_2 \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq v^{m+2n} e^{(T-t)v^2} \varepsilon \text{ },\forall n,m = 0,2,....\text{et } \forall t \in [0,T] . \tag{4.16}$$

b)

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 .$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{\partial^{m+n} u (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right) (\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^n \partial x^m} \left(e^{\xi^2 (T-t)} \widehat{\varphi}_T (\xi) - e^{\xi^2 (T-t)} \widehat{w}^v (x,T) \right) (\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^n \partial x^m} \left(e^{-\xi^2 t} \left(\widehat{u} (\xi,0) - \widehat{w}^v (\xi,0) \right) \right) (\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Puisque

$$\widehat{u} (\xi,t) = e^{\xi^2 (T-t)} \widehat{\varphi}_{_T} (\xi) \Longrightarrow \widehat{u} (\xi,0) = e^{\xi^2 T} \widehat{\varphi}_{_T} (\xi) .$$

Donc

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} w^v (.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial t^n \partial x^m} e^{-\xi^2 t} \left(\widehat{u} (\xi,0) - \widehat{w}^v (\xi,0) \right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| (-i\xi)^m \left(-\xi^2 \right)^n e^{-t\xi^2} \left(\widehat{u} (\xi,0) - \widehat{w}^v (\xi,0) \right) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_{|\xi| \geq v} \left| (-i\xi)^m \left(-\xi^2 \right)^n e^{-t\xi^2} \widehat{u} (\xi,0) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$\text{Puisque} \begin{cases} u(.,0) = w^v (.,0) \text{ ; sur } [-v,v] \\ \text{et } \quad w^v (.,0) = 0 \text{; hors } [-v,v] \end{cases}$$

$$= \left(\int_{|\xi| \geq v} \left| \frac{(-i\xi)^m \left(-\xi^2\right)^n}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}} \widehat{u}(\xi, 0) \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\leq \max_{|\xi| \geq v} \left[\frac{|\xi|^{m+2n} e^{-t\xi^2}}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}} \right] \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi, 0)|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \max_{|\xi| \geq v} \left[\frac{|\xi|^{m+2n} e^{-t\xi^2}}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}} \right] \|u(.,0)\|_{H^S}, \quad \text{puisque } \|u(.,0)\|_{H^S} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi, 0)|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\leq \max_{|\xi| \geq v} \left[\frac{|\xi|^{m+2n}}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}} e^{-t\xi^2} \right] E_s \leq \max_{|\xi| \geq v} \left(|\xi|^{m+2n-s} e^{-t\xi^2} \right) E_s \tag{4.17}$$

Par le lemme11, on pose : $p = \frac{m+2n-s}{2}$ et $y = |\xi|^2$ et $\eta = v^2$ et $c = t$. Si $\frac{p}{c} < 1 \Longrightarrow \sup_{y \geq \eta} \left(e^{-cy} y^p\right) \leq e^{-cy} \eta^p$. Donc

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{m+2n-s}{2t} &\leq 1 \Longrightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2} \left(|\xi|^{2\frac{m+2n-s}{2}} e^{-t\xi^2} \right) \leq v^{2\frac{m+2n-s}{2}} e^{-tv^2} \\ &\Longrightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2} \left(|\xi|^{m+2n-s} e^{-t\xi^2} \right) \leq v^{m+2n-s} e^{-tv^2} \end{aligned}$$

Si $\frac{p}{c} \geq 1 \Longrightarrow \sup_{y \geq \eta} \left(e^{-cy} y^p\right) \leq \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-c\eta} \eta^p$ Donc

$$\begin{aligned} \text{si } \frac{m+2n-s}{2t} &\geq 1 \Longrightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2} \left(|\xi|^{2\frac{m+2n-s}{2}} e^{-t\xi^2} \right) \leq \left(\frac{m+2n-s}{2t} \right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{2\frac{m+2n-s}{2}} e^{-tv^2} \\ &\Longrightarrow \max_{|\xi|^2 \geq v^2} \left(|\xi|^{m+2n-s} e^{-t\xi^2} \right) \leq \left(\frac{m+2n-s}{2t} \right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s} e^{-tv^2} \end{aligned}$$

Alors

$$\max_{|\xi| \geq v} \left[|\xi|^{m+2n-s} e^{-t\xi^2} \right] \leq \left\{ \begin{array}{r} v^{m+2n-s} e^{-tv^2} \text{ ; si } m+2n-s \leq 2t \\ \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s} e^{-tv^2} \text{ ; si } m+2n-s > 2t > 0 \end{array} \right. \tag{4.18}$$

Donc, d'après (4.16) et (4.18), on aura

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} \text{(i)} = v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon + v^{m+2n-s}e^{-tv^2}E_s, \text{ si } \ m+2n-s \leq 2t \\ \text{(ii)} = v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s}e^{-tv^2}E_s, \text{ si } m+2n-s > 2t > 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

1) Si $v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$.et $s = 0$. Donc

$$\text{(i)} = v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon + v^{m+2n}e^{-tv^2}E = \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} \left[\frac{E}{\varepsilon}\varepsilon + E\right].$$

$$= \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} 2E.$$

Puisque

$$\begin{cases} v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}} \Longrightarrow v^{m+2n} = \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}. \\ v^2T = \ln\frac{E}{\varepsilon} \Longrightarrow e^{v^2T} = \frac{E}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad e^{-tv^2} = \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}. \end{cases}$$

Donc

$$\text{(i)} = \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} 2E$$

$$\text{(i)} = 2\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}} \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \quad ;\text{si : } m+2n \leq 2t,\ t \in [0,T]. \tag{4.20}$$

Et

$$\text{(ii)} = v^{m+2n}\left[e^{(T-t)}\varepsilon^{v^2} + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}} e^{-tv^2}E\right], \text{ si } m+2n > 2t > 0.$$

$$= \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left[\frac{E}{\varepsilon}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}}\varepsilon + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} E\right] \text{ où : } v = \sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$$

$$= \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} E\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} \left[1 + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right]$$

$$= \left(1 + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right) \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}$$

Donc

$$\text{(ii)} = \left(1 + \left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right) \left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}} \text{ , si } \ m+2n > 2t \text{ , } \ t \in (0,T] \tag{4.21}$$

Alors par (4.20) et (4.21) et $s=0$, si $v=\sqrt{\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$, on a :

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}\left(.,t\right)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u\left(.,t\right)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}$$
$$\leq\left\{\begin{array}{c}2E^{1-\frac{t}{T}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}},\text{ si } m+2n\leq 2t\ ,\ t\in[0,T]\,.\\ \left(1+\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\right)\left(\frac{1}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}},\text{ si } m+2n>2t,\ t\in[0,T]\,.\end{array}\right.$$

2) On pose : $v=\sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)}$, On a

$$\text{(i)}=v^{m+2n}e^{(T-t)v^{2}}\varepsilon+v^{m+2n-s}e^{-tv^{2}}E_{s}\,;\ \text{ si : }\ m+2n-s\leq 2t.$$

Si $v=\sqrt{\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}}$

$$v^{m+2n}e^{(T-t)v^{2}}\varepsilon=\left[\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon e^{(T-t)v^{2}}$$

et

$$v^{2}\left(T-t\right)=\frac{(T-t)}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\Longrightarrow e^{v^{2}(T-t)}=\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}$$

Donc

$$v^{m+2n}e^{(T-t)v^{2}}\varepsilon=\left[\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}$$

$$=\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}}$$

$$\leq\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}}$$

Puisque

$$\ln\frac{E_s}{\varepsilon}>1\Longrightarrow\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\leq 1\Longrightarrow\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\leq\frac{E_s}{\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\leq\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\Longrightarrow\left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m+2n}{2}}\leq\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}$$

Alors

$$v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{(T-t)}{T}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{st(T-t)}{2T}}$$

$$\Longrightarrow v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s(T-t)}{2T}+n+\frac{m}{2}} \tag{4.22}$$

$$v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)} \Longrightarrow$$

$$v^{m+2n-s}e^{-tv^2}E_s = \left[\frac{1}{T}\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m+2n-s}{2}} \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{-\frac{t}{T}} E_s$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n-\frac{s}{2}} \left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m+2n-s}{2}} \left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{st}{2T}} E_s$$

$$\text{puisque } \left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)\right]^{\frac{m+2n-s}{2}} \leq \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n-\frac{(T-t)s}{2T}} \left[\left(\frac{1}{T}\right)^{-\frac{s}{2}}\right]$$

Donc

$$v^{m+2n}e^{-tv^2}E_s \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}-\frac{(T-t)s}{2T}} \left[\left(\frac{1}{T}\right)^{-\frac{s}{2}}\right] \tag{4.23}$$

Puisque $\frac{m+2n}{2} - \frac{sT}{2T} + \frac{st}{2T} = \frac{m+2n}{2} - \frac{(T-t)s}{2T}$. Par (4.22) et (4.23) on a

$$v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon + v^{m+2n}e^{-tv^2}E_s \leq \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}-\frac{(T-t)s}{2T}} \left[1+\left(\frac{1}{T}\right)^{-\frac{s}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}-\frac{(T-t)s}{2T}} \left[1+T^{\frac{s}{2}}\right] \tag{4.24}$$

$$\text{(ii)} = v^{m+2n}e^{(T-t)v^2}\varepsilon + \left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}} v^{m+2n-s}e^{-tv^2}E_s, \text{si } \ m+2n-s > 2t > 0.$$

$$v=\sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)}\Longrightarrow v^{m+2n}\left[e^{(T-t)v^2}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}}v^{-s}e^{-tv^2}E_s\right]$$

$$=\left[\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{\frac{1}{2}(m+2n)}$$

$$\times\left[\begin{array}{c}\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{\frac{(T-t)}{T}}\varepsilon+\left(\frac{(m+2n-s)}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}}\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right)^{-\frac{t}{T}}\\ \times E_s\left[\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{-\frac{s}{2}}\end{array}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left[\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{\frac{1}{2}(m+2n)}\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{st}{2T}}.$$

$$\times\left[\frac{E_s}{\varepsilon}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\varepsilon+\left(\frac{(m+2n-s)}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}}E_s\left[\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)\right]^{-\frac{s}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}(m+2n)+\frac{ts}{2T}}\varepsilon^{\frac{1}{T}}E_s^{1-\frac{t}{T}}.$$

$$\times\left[\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}+\left(\frac{(m+2n-s)}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}}\left(\frac{1}{T}\right)^{-\frac{s}{2}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{T}}E_s^{1-\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}+\frac{ts}{2t}-\frac{sT}{2T}}\left[1+T^{\frac{s}{2}}\left(\frac{(m+2n-s)}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}}\right]$$

Donc

$$v^{m+2n}\left[e^{(T-t)v^2}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}}v^{-s}e^{-tv^2}E_s\right]$$

$$\leq\left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n}\varepsilon^{\frac{t}{T}}E^{1-\frac{t}{T}}\left(\ln\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{(T-t)}{2T}+\frac{m}{2}+n}\left[1+T^{\frac{s}{2}}\left(\frac{(m+2n-s)}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}}\right]\qquad(4.25)$$

Donc, par (4.24) et (4.25) on a

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^v(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^n\partial x^m}\right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{1}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{(T-t)}{2T}+\frac{m}{2}+n} \left[1 + T^{\frac{s}{2}} + 0\,(1)\right], \\ \text{si } m + 2n - s \leq 2t,\ t \in [0, T] \\ \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{1}{T}} E_s^{1-\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{(T-t)}{2T}+\frac{m}{2}+n} \left[1 + T^{\frac{s}{2}} \left(\frac{(m+2n-s)}{2t}\right)^{\frac{(m+2n-s)}{2}} + 0\,(1)\right], \\ \text{si } m + 2n - s > 2t,\ t \in (0, T] \end{cases} \tag{4.26}$$

pour : $v = \sqrt{\ln\left(\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}\right)}$; $s > 0$ et $E_s > 0$.et

$\|u\,(.,0)\|_{H^S} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}\,(\xi,0)|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq E_s$ et $\varepsilon \longrightarrow 0$ ■

Remarque 22 *: Ici dans le théorème 21 on a des estimations de stabilité pour toutes les dérivées par rapport à x et t .*

(i) Le choix de $v = \sqrt{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$, ne donne pas la continuité de la solution en $t = 0$. Quand $\|u\,(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E$. Puisque si on choisit $v = \sqrt{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$ et si $t = 0$ dans le théorème 21 on a :

$$m + 2n \leq 0 \text{ : contradiction où } n\ ,\ m \in \mathbb{N}$$

Donc : si $v = \sqrt{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$ et , $t = 0$ ces conditions ne donnent pas la stabilité de la solution en $t = 0$ (c-à-d on n'a pas la stabilité en $t = 0$ dans le théorème 21)

(ii) Par contre le choix $v = \sqrt{\ln\left(\frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E_s}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2T}}}$ nous garantit la stabilité dans le théorème 21 en $t = 0$,et $\|u\,(.,0)\|_{H^S} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}\,(\xi,0)|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq E_s$, $s > 0$.

Théorème 23 *: Soit β arbitraire dans l'intervalle $(0, 1)$. Supposons que u est une solution du problème (4.1)-(4.2) et u^v est une solution du problème (4.4) et soit $\|u\,(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq E.$, $s = 0$ donc*

1) Si $v = \sqrt{\frac{\beta}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}}$ on a

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v\,(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u\,(.,t)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2$$

$$\leq \begin{cases} \left(\frac{\beta}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[1 + E^{\beta-1} \varepsilon^{1-\beta}\right] ; \quad \text{si } m + 2n \leq 2t, t \in [0, T]\,. \\ \left(\frac{\beta}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n} \varepsilon^{\frac{\beta t}{T}} E^{1-\frac{\beta t}{T}} \left[\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}} + E^{\beta-1} \varepsilon^{1-\beta}\right] ; \text{ si } m + 2n > 2t, t \in\,]0, T]\,. \end{cases} . \tag{4.27}$$

2) Si s est une constante positive, on a

$$\|u\,(.,0)\|_{H^S} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}\,(\xi,0)|^2 \left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq E_s$$

et $v=\sqrt{\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$ *on a*

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}$$

$$\leq\begin{cases}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]\text{;si } m+2n-s\leq 2t, t\in[0,T].\\ \left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\frac{E_s}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right];\\ \text{si } m+2n-s>2t, t\in]0,T].\end{cases}$$

3) Pour $t=0\Longrightarrow m+2n-s<0$ *le seul cas. Donc*

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}(.,0)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u(.,0)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}\leq\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n-\frac{s}{2}}E_s+\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}E^{\beta}\varepsilon^{1-\beta}$$

Demonstration. Par (4.19), on a

1) On pose : $\|u(.,0)\|_{L_p(\mathbb{R})}\leq E$ alors $s=0$, et on choisit $v=\sqrt{\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$. Alors

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}\leq\begin{cases}v^{m+2n}e^{-tv^2}\left[e^{Tv^2}\varepsilon+E\right],\text{ si } m+2n\leq 2t\\ v^{m+2n}e^{-tv^2}\left[e^{Tv^2}\varepsilon+\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}E\right],\text{ si } m+2n>2t>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}e^{-t\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)}\left[e^{T\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)}\varepsilon+E\right],\text{ si } m+2n\leq 2t\\ \left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}e^{-t\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)}\left[e^{T\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)}\varepsilon+\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}E\right],\text{ si } m+2n>2t>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t\beta}{T}}\left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon+E\right],\text{ si } m+2n\leq 2t\\ \left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{t\beta}{T}}\left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon+\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}E\right],\text{ si } m+2n>2t>0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[1+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right],\text{ si } m+2n\leq 2t.\\ \left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right],\text{ si } m+2n>2t>0.\end{cases}$$

Donc, si $v=\sqrt{\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$. tel que β arbitraire on a

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}$$

$$\leq\begin{cases}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[1+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right],\text{ si } m+2n\leq 2t\\ \left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m+2n}{2}}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{m+2n}{2t}\right)^{\frac{m+2n}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right],\text{ si } m+2n>2t>0\end{cases}$$

2) On pose $\|u(.,0)\|_{H^S}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{u}(\xi,0)|^2\left(1+\xi^2\right)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\leq E_s$ tel que s est un

constante positive et $v=\sqrt{\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$.Donc

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}$$

$$\leq\begin{cases}\text{(i)}=v^{m+2n}e^{(T-t)v^{2}}\varepsilon+v^{m+2n-s}e^{-tv^{2}}E_{s},\text{ si }\ m+2n-s\leq 2t.\\ \text{(ii)}=v^{m+2n}e^{(T-t)v^{2}}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}v^{m+2n-s}e^{-tv^{2}}E_{s},\text{ si }m+2n-s>2t>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\text{(i)}=v^{m+2n}e^{-tv^{2}}\left[e^{Tv^{2}}\varepsilon+v^{-s}E_{s}\right],\text{ si }\ m+2n-s\leq 2t.\\ \text{(ii)}=v^{m+2n}e^{-tv^{2}}\left[e^{Tv^{2}}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}v^{-s}E_{s}\right],\text{ si }m+2n-s>2t>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\text{(i)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}e^{-t\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}\left[e^{T\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}\varepsilon+\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}E_{s}\right]\\ \text{, si }\ m+2n-s\leq 2t.\\ \text{(ii)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}e^{-t\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}\left[e^{T\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}E_{s}\right]\\ \text{, si }m+2n-s>2t>0.\end{cases}$$

Donc

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}$$

$$\leq\begin{cases}\text{(i)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon+\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}E_{s}\right],\text{ si }\ m+2n-s\leq 2t.\\ \text{(ii)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\beta}\varepsilon+\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}E_{s}\right],\\ \text{si }m+2n-s>2t>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\text{(i)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\frac{E_{s}}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]\\ \text{, si }\ m+2n-s\leq 2t\text{ , }t\in[0,T]\\ \text{(ii)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\frac{E_{s}}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right]\\ \text{, si }m+2n-s>2t>0.\end{cases}$$

Donc

$$\left\|\frac{\partial^{m+n}u^{v}(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}-\frac{\partial^{m+n}u(.,t)}{\partial t^{n}\partial x^{m}}\right\|_{2}$$

$$\leq\begin{cases}\text{(i)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\frac{E_{s}}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right],\\ \text{si }\ m+2n-s\leq 2t\text{ , }t\in[0,T]\\ \text{(ii)}=\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{2}+n}\varepsilon^{\frac{\beta t}{T}}E^{1-\frac{\beta t}{T}}\left[\left(\frac{m+2n-s}{2t}\right)^{\frac{m+2n-s}{2}}\frac{E_{s}}{E}\left(\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}\right)^{-\frac{s}{2}}+E^{\beta-1}\varepsilon^{1-\beta}\right],\\ \text{si }m+2n-s>2t>0.\end{cases}\tag{4.28}$$

où $v=\sqrt{\frac{\beta}{T}\ln\frac{E}{\varepsilon}}$ est une constante positive.

3) Par (4.28) ; et pour $t = 0$ on a un seul cas $m + 2n - s \leq 0$. Donc

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u^v (.,0)}{\partial t^n \partial x^m} - \frac{\partial^{m+n} u (.,0)}{\partial t^n \partial x^m} \right\|_2 \leq \left(\frac{\beta}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^{\frac{m+2n-s}{2}} E_s + \left(\frac{\beta}{T} \ln \frac{E}{\varepsilon} \right)^{\frac{m+2n}{2}} \varepsilon^{1-\beta} E^{\beta}$$

■

Remarque 24 *: Dans la remarque 22 et le théorème 23 sont données les estimations d'erreur dans $L_\infty(\mathbb{R})$. Pour la méthode mollification. Ce théorème montre que la méthode de mollification donne une bonne estimation d'erreur de type Hölder pour la solution de l'équation de la chaleur rétrograde homogène et aussi pour toutes ses dérivées par rapport à x et t .*

4.3 Comparaison des trois méthodes

Dans ce travail on utilise trois méthodes de régularisation. A savoir la méthode de régularisation de Fourier ; La méthode de régularisation de Tikhonov et la méthode de mollification. On va faire une comparaison entre ces trois méthodes :

4.3.1 La méthode de régularisation de Fourier

Dans la première méthode on utilise la transformation de Fourier pour l'équation du 2^{eme}ordre . On trouve la solution exacte

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{\xi^2 (T-t)} \widehat{\varphi}_T(\xi)\, d\xi$$

Pour la régularisation on trouve une solution approchée de la solution exacte, pour cela il faut choisir un intervalle fermé par rapport à $\xi_{\max}$, $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}]$, tel que $\xi_{\max}$ est une constante positive choisie d'une manière adéquate, on trouve

$$\left\| u(x,t) - u_{\delta,\xi_{\max}}(x,t) \right\| \leq E^{1-\frac{t}{T}} \delta^{\frac{t}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{\frac{-(T-t)s}{2T}} \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{E}{\delta}}{\frac{1}{T} \ln \frac{E}{\delta} + \ln \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{S}{2T}}} \right)^{\frac{S}{2}} \right].$$

où $\xi_{\max} = \left(\ln \left(\left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{T}} \left(\ln \frac{E}{\delta} \right)^{-\frac{S}{2T}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$.

Remarque 25 *: La convergence de la régularisation de la solution en $t = 0$ n'est pas obtenue pratiquement.*

4.3.2 La méthode de Tikhonov

On considère l'équation $Ax = y$. On choisit un sous-ensemble $X_M \subset X$. X_M qui s'appelle "classe correctrice" s'il ya :

1) la solution est unique dans X_M (c-à-d :$Ax = Ax^0 \Longrightarrow x = x^0$)

2) la solution $x \in X_M$ est stable (c-à-d :$\|Ax - Ax^0\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|x - x^0\| \longrightarrow 0$)

L'idée précédente pour trouver la solution de l'équation $Ax = y$ était de faire la régularisation (c-à-d pour trouver la solution de l'équation $Ax = y$ on trouve la solution d'une autre équation, dépendante d'un paramètre α.) telle que la limite de la 2^{eme}équation est une solution de l'équation $Ax = y$,avec α petit tq $\alpha \longrightarrow 0$

Construction de la régularisation par la méthode de Tikhonov

(i) On considère μ la fonctionnelle de stabilisation sur X_M s'il ya

$$\begin{cases} \mu \text{ semi-continu inférieurement sur } X. \\ \text{La partie } X_{M,\tau} = \{x \in X_M \ , \mu(x) \leq \tau\} \text{ est bornée dans } X \ , \forall \tau \end{cases}$$

La régularisation de Tikhonov devient un problème d'optimisation donc la solution est un point minimal. On a d'après le lemme 6 : Si $X_{M,\tau}$ est compact dans X ,$\forall \tau$; alors : $R_\alpha(y)$ la solution du problème existe et R_α est la régularisation. Et d'après le lemme 7 : Si X , Y sont deux espaces de Hilbert, $x^0 \in X$ et $M(v) = \|v - x^0\|_X^2$., donc le problème : $\min\left(\|Av - y\|_Y^2 + \alpha M(v)\right)$ admet un minimum unique $R_\alpha(y)$ qui est une solution unique de ces problèmes tel que R_α la régularisation. Dans la régularisation de Tikhonov on transforme l'équation de 2^{eme} ordre en un problème d'optimisation. On trouve la solution exacte u par la transformation de Fourier telle que :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)} \hat{g}(\xi)\, d\xi.$$

et la solution approchée est un point minimal du problème d'optimisation.

(ii) On trouve la solution exacte u par la transformation de Fourier telle que :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)} \hat{g}(\xi)\, d\xi.$$

du problème

$$\begin{cases} u_t = a(x)\, u_{xx} + b(x)\, u_x + c(x)\, u; x > 0, t > 0 \\ \text{et :} u(0,t) = f(t)\,; f \in L^2(\mathbb{R})\,, t \geq 0 \\ \text{et } u(x.0)\,; x \geq 0 \end{cases}$$

Mais la solution approchée de ces problèmes par régularisation de Tikhonov est une fonction $h(x,t)$:telle que :

$$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}}{1+\alpha^2 \left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2} \hat{g}_\delta(\xi)\, d\xi, \text{ tel que : } \alpha = \frac{\delta}{E}$$

$h(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} \frac{\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\widehat{g_\delta}(\xi)}{1+\alpha^2\left|\frac{v(x,\xi)}{v(1,\xi)}\right|^2} d\xi$.c'est une solution approchée par la méthode de Tikhonov. L'estimation da stabilité est du type Hölder :

$$\|u(x,.) - u_\delta(x,.)\| \leq C\delta^{\frac{A(x)}{A(1)}} E^{\left(1-\frac{A(x)}{A(1)}\right)}; 0 < x < 1.$$

4.3.3 La méthode de mollification

On utilise la méthode de mollification pour les problèmes de Cauchy, puisque ces problèmes sont très difficiles. Mais en utilisant les résultats auxiliaires :

(i) Pour $p = 2$ la méthode de mollification est une méthode de .transformation de Fourier.

(ii) Le problème de mollification est un problème bien-posé, si on choisit correctement le paramètre de mollification. On trouve que l'estimation d'erreur est du type Hölder.

(iii) Cette méthode donne la stabilité pour toutes les dérivées en x et t.On a de même l'estimation d'erreur dans $L_\infty(\mathbb{R})$.

La méthode mollification donne une assez bonne estimation d'erreur de type Hölder pour la solution de l'équation de la chaleur rétrograde homogène et aussi pour toutes les dérivées en x , t.

Conclusion :

1) Donc, dans la méthode de Fourier on choisit $\xi_{\max}$ pour trouver l'estimation du type Hölder et on trouve la solution de l'équation mais on ne change pas le problème.

2) Dans la méthode de Tikhonov on choisit X_M $\langle$classes correctrices$\rangle$ pour l'estimation du type Hölder (i.e :la stabilité) et on transforme l'équation en un problème de minimisation pour trouver le point minimum qui est une solution du premier problème.

3) Le problème de mollification est un problème bien-posé. Si on choisit correctement le paramètre de mollification on trouve l'estimation d'erreur du type Hölder.

Cette méthode de mollification a donné des estimations d'erreur de type Hölder pour toutes les dérivées en x et t.

Donc la méthode de mollification donne de meilleurs résultats par rapport aux deux autres méthodes (c-à-d : par rapport à la méthode de Fourier et celle de Tikhonov). De plus la méthode mollification donne des estimations d'erreur du type Hölder, pour toutes les dérivées par rapport à x et t.

Bibliographie

[1] Ames K.A., Gordon W.C., Epperson J.F., Oppenhermer S.F, A comparison of regularizations for an ill-posed problem, Math.Comput. 67 (1998) 1451-1471.

[2] Dinh Nho Hào,Amollification method for ill-posed problems.Numer,Math.68(1994) 469-506.

[3] Evans L.C, Partial Differential Equation, American Mathematical Society, Providence, RI,1998.

[4] Hadamard J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations, Yale University Press, New Haven, CT, (1923).

[5] Hào D.N., A mollification method for ill-posed problems, Numer. Math.68 (1994) 469-506.

[6] Jourhmane M.J, Mera N.S., An iterative algorithm for the backward heat conduction problem based on variable relaxation factors, Inverse Problems in Engineering 10 (2002), 293-308.

[7] Kirsch.A,An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse problems, Springe. New York, 1996.

[8] Kirkup S.M., Wadsworth M, Solution of inverse diffusion problems by operator-spiting methods, Appl. Math. Modelling 26 (10) (2002), 1003-1018.

[9] Lattes R., Lions J.L., Methode de Quasi-Reversibility et Applications, Dunod, Paris, 1967 (English translation : R.Bellman, Elsevier, New York, 1969).

[10] Liu C.S., Group preserving scheme for backward heat conduction problems, Internat. J. Heat Mass Transter 47 (2004) 2567-2576.

[11] Mera N.S., Elliott L., Ingham .D.B., Lesnic D., An iterative boundary element method for solving the one-dimensional backward heat conduction problem, Internat. J. Heat Mass Transfer 44 (2001)1937-1946.

[12] Miller K, Stabilized quasireversibility and other nearly best possible methods for non-Well-posed problems, in Symposium on Non-Well-Posed Problems andlogarithmic Convexity, in Lecture Notes in Math., vol.316, Springer-Verlag, Berlin, 1973, pp.161-176.

[13] Nikol'skii S.M, Approximation of Function of Several Variables and Imbedding Theorems, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[14] Seidman T.I., Optimal filtering for the backward heat equation, SIAM J. Numer.Anal.33 (1996), 162-170.

[15] Showalter R.E., The final value poblem for evolution equation, J. Math. Anal. Appl. 47 (1974) 563-572.

[16] Tautenhahn U., Schroter T., On optimal regularization methods for the backward heat equation, Z. Anal. Anwen-dungen 15 (1996), 475-493.

[17] Tikhonov A.. Arsenine V, Méthode de résolution de problèmes mal posés, Mir, Moscou, (1977).

[18] Tran Duc Van, Dinh Nho Hào, Differential Operators of Infinite Order with Real Arguments and Their Application, World Sci, Publ.Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.

[19] Widder D.V.,The Heat Equation, Academic Press, New York, 1975.

[20] Hao D.N., Reinhardt H-J, On a sideways parabolic equation, Inverse Problems, 13 (1997), 297-309.

[21] Carasso A., Determining surface temperature from interior observations, SIAM J. Appl. Math. 42 (1982), 558,574.

[22] Elden L., Berntsson T., Reginska T., Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation, SIAM J. Sci. Comput. 21 (6) (2000), 2187-2205.

[23] Murio D.A., The mollifications method and the numerical solution of ill-posed problems, Wiley, New York, 1993.

[24] Seidman T., Elden L., An optimal filtering method for the sideways heat equation, Inverse Problems 6 (1990), 681-696..

[25] Tautenhahn U., Optimal stable approximation for the sideways heat equation, J. Inv. Ill-Posed Problems 5 (1997), 287-307.

Résumé

Le présent mémoire est consacré à l'étude de certaines classes de problèmes paraboliques rétrogrades pour certaines classes d'équations paraboliques du second ordre par différentes méthodes de régularisation , celle de Fourier, Tikhonov simplifiée et de mollification.

Des résultats de convergence et des estimations de stabilité de type Holder ont été obtenus. Enfin une comparaison entre les différentes méthodes est présentée.

Mots-clé : Estimation de stabilité de type Holder, Méthode de mollification, Méthode de Tikhonov simplifiée, Problème inverse, Problème parabolique rétrograde, Régularisation Fourier.

Abstract

The present work is devoted to the study of certain classes of backward parabolic problems for certain classes of parabolic second order equations by different methods of regularization , Fourier, simplified Tikhonov and mollification.

Results of convergence and stability estimates of Holder type are obtained. Finally, we present a comparison between the different methods.

Key-words : Backward parabolic problem, Fourier regularization, Inverse problems, Mollification method, Simplified Tikhonov Method, Stability estimates of Holder type

ملخص

تعرض هذه المذكرة دراسة بعض المسائل التكافئية الرجعية من أجل بعض أصناف المعادلات التكافئية من الدرجة الثانية بواسطة طرق مختلفة للتعديل وهي

طريقة تعديل فوري، طريقة تعديل تيكونوف وطريقة التلطيف.

وبالتالي الحصول على تقارب النتيجة ومقدار الاستقرار من نوع هولدر.

وأخيرا مقارنة الطرق المختلفة المذكورة سابقا.

الكلمات المفتاحية

المسائل العكسية، المسائل التكافئية الرجعية، طريقة تعديل فوري، طريقة تعديل تيكونوف،طريقة التلطيف، مقدار الاستقرار من نوع هولدر.