

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT D'ETAT EN MATHEMATIQUES

option

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

TENIOU BOUDJEMAA

ETUDE FONCTIONNELLE DES PROBLEMES

ELASTO-VISCO-PLASTIQUES DE CONTACT

Soutenue le 30 / 01 / 2000

Devant le jury :

Président :	K. Lemrabet	Prof. Univ. U.S.T.H.B	Alger
Directeur de thèse :	M. Sofonea	Prof. Univ. Perpignan	France
Rapporteur :	B. Merouani	Prof. Univ. Ferhat Abbes	Sétif
Examineurs :	D. Teniou	Prof. Univ. U.S.T.H.B	Alger
	S. Djabi	M.C. Univ. Ferhat Abbes	Sétif

A la mémoire de mon père.
A ma mère.
A ma femme et mes enfants.
A ma famille et mes amis.

REMERCIEMENTS

Je ne peux commencer la rédaction de ma thèse sans penser à Monsieur Mircea SOFONEA qui m'a initié avec beaucoup de savoir faire et de patience à la recherche dans le domaine de la mécanique des milieux continus et plus précisément aux problèmes de contact.

Je lui exprime ici toute ma gratitude pour toute l'aide, la sollicitude et le soutien qu'il n'a cessé de manifester à mon égard, tout au long des années de travail sous sa direction, tant sur le plan mathématique que sur le plan humain.

Que Messieurs Djamel TENIOU et Kaddour LEMRABET trouvent ici l'expression de mon entière reconnaissance pour tout l'effort qu'ils ont fourni et tout le temps qu'ils ont consacré à examiner ce travail. Je les remercie profondément pour les remarques et les suggestions importantes qu'ils m'ont faites.

Mes sincères remerciements vont aussi à Messieurs Boubakeur MEROUANI et Seddik DJABI pour avoir bien voulu accepter de faire partie du Jury auquel est soumis cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire de théorie des systèmes de l'université de Perpignan et notamment son responsable Monsieur A. EL-JAI, qui ont contribué à rendre mon séjour agréable et fructueux.

B. Teniou

Table des matières

Introduction	IV	
Notations	VIII	
Chapitre 1	Formulation mathématiques des problèmes aux limites	1
1.1. Rappel de la mécanique des milieux continus.		2
1.1.1. Géométrie de la déformation		2
1.1.2. Tenseur des contraintes		5
1.2. Lois de comportement		7
1.2.1. Essais classiques sur les solides		8
1.2.2. Lois de comportement élastique dans le cas unidimensionnel		13
1.2.3. Lois de comportement élastique en dimension N		20
1.2.4. Lois de comportement viscoplastique		29
1.3. Conditions aux limites		39
1.3.1. Conditions aux limites de déplacement-traction		39
1.3.2. Conditions aux limites de contact sans frottement		41
1.3.3. Conditions aux limites de contact avec frottement		43
1.4. Formulation des problèmes		44

1.4.1.	Problème élastique de contact sans frottement	45
1.4.2.	Problème élastique de contact avec frottement	45
1.4.3.	Problème viscoplastique de contact sans frottement	46
Chapitre 2	Problème élastique de contact sans frottement	49
2.1.	Résultats d'existence et d'unicité.	50
2.1.1.	Formulation du problème mécanique et hypothèses	50
2.1.2.	Formulations variationnelles	54
2.1.3.	Premier résultat d'existence et d'unicité	56
2.1.4.	Second résultat d'existence et d'unicité	58
2.2.	Propriétés de la solution	58
2.2.1.	Un résultat d'équivalence	58
2.2.2.	Dépendance de la solution par rapport au paramètre	64
2.2.3.	Un résultat de pénalisation	66
Chapitre 3	Problème élastique de contact avec frottement	79
3.1.	Résultats d'existence et d'unicité.	80
3.1.1.	Formulation du problème mécanique et hypothèses	80
3.1.2.	Formulations variationnelles	83
3.1.3.	Premier résultat d'existence et d'unicité	85
3.1.4.	Second résultat d'existence et d'unicité	86
3.2.	Propriétés de la solution	87
3.2.1.	Un résultat d'équivalence	88
3.2.2.	Dépendance de la solution par rapport au paramètre	93
3.2.3.	Un résultat de pénalisation	94

Chapitre 4	Problème viscoplastique de contact sans frottement	105
4.1	Résultats d'existence et d'unicité.	106
4.1.1.	Formulation du problème mécanique et hypothèses	106
4.1.2.	Formulations variationnelles	110
4.1.3.	Premier résultat d'existence et d'unicité	114
4.1.4.	Second résultat d'existence et d'unicité	119
4.2	Propriétés de la solution	125
4.2.1.	Un résultat d'équivalence	125
4.2.2.	Dépendance de la solution par rapport au paramètre	129
4.2.3.	Un résultat de pénalisation	131
Annexe		145
5.1.	Eléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	146
5.1.1.	Propriétés élémentaires	146
5.1.2.	Fonctions convexes et sous-différentiabilité	149
5.1.3.	Opérateurs fortement monotones et inéquations variationnelles	153
5.2.	Espaces fonctionnels	156
5.2.1.	Espaces de distributions	156
5.2.2.	Espaces liés aux opérateurs déformation et divergence	159
5.2.3.	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles	167
Bibliographie		170

Introduction

La théorie de l'élasticité fut la première théorie des milieux continus élaborée pour décrire le comportement des milieux déformables que l'on qualifie de "solides" dans le langage courant. Ces bases en furent posées au cours de la première moitié du XIX-ème siècle notamment par CAUCHY, NAVIER, POISSON. Aujourd'hui encore, cette théorie demeure la discipline de base de la mécanique des solides déformables et elle ne cesse de se développer, tant son domaine d'application est vaste. Comme étapes récentes dans ce développement, on peut citer l'établissement des formulations variationnelles en contraintes et déplacements. L'utilisation de l'analyse convexe dans l'étude des lois de comportement et l'analyse des problèmes initiaux et aux limites en contraintes et déplacements via les méthodes constructives de la théorie des équations aux dérivées partielles. Dans les dernières décennies, un grand intérêt a été porté à l'étude des problèmes de contact pour les matériaux élastiques ou anélastiques. Ceci est justifié vu les applications possibles dans différents secteurs d'activité, notamment dans l'industrie. La littérature concernant la modélisation, l'analyse et l'approximation numérique des problèmes de contact est extensive. Citons ici les travaux de Fichera [1], Hlaváček et Nečas [1], Kikuchi et Oden [1] ainsi Sofonea [3] concernant les problèmes de contact unilatéral sans frottement. Les problèmes de contact avec frottement de Coulomb ont été étudiés par de nombreux auteurs comme : Duvaut [1], Cocu [1], Cocu, Pratt et Raous [1] dans le cas de l'élasticité linéaire et Ionescu et Sofonea [2] dans le cas du fluide de Bingham.

L'analyse mathématique des problèmes de contact devient encore plus délicate si on considère la non-linéarité de la loi constitutive. Des matériaux rigide-visco-plastiques avec des lois de frottement spécifiques ont été étudiés par Ionescu [2] et Ionescu et Sofonea [2]. Des formulations variationnelles, des résultats d'existence et d'unicité ont

été obtenus par Amassad et Sofonea [1] dans le cas élastique-visco-plastique et par Amassad, Shillor et Sofonea [1] dans le cas anélastique parfaitement plastique. Les matériaux modélisés par une loi visco-élastique non-linéaire avec divers types de frottement ont été considérés par Rochdi, Shillor et Sofonea [1] et Amassad, Shillor et Sofonea [2]. Bien évidemment, cette énumération n'est pas exhaustive.

Le but de cette thèse est d'apporter une contribution à l'étude mathématique de quelques problèmes de contact avec ou sans frottement. Nous considérons des lois de comportement non-linéaires pour des matériaux élastiques ou viscoplastiques avec paramètre (qui peut être la température ou l'humidité). Les conditions aux limites de contact considérées sont celles de Signorini (le cas sans frottement) ou Tresca (le cas avec frottement). Les résultats obtenus sont des résultats d'existence et d'unicité de la solution, dépendance de la solution par rapport au paramètre suivi par des résultats sur le comportement de la solution du problème pénalisé. Dans l'étude de ces problèmes on utilise des méthodes standards des inéquations variationnelles elliptiques, des résultats de monotonie, de convexité, de compacité et une technique de point fixe dans les espaces de Banach.

L'analyse variationnelle des problèmes mécaniques étudiés, nous permet de mettre en évidence le lien entre les différentes conditions aux limites de contact. Ainsi, le problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une fondation rigide est obtenu comme un cas limite du problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une fondation déformable lorsque le seuil d'effondrement de celle-ci tend vers l'infini. Cette analyse nous permet aussi de faire le lien entre les différentes formulations variationnelles du même problème mécanique, en démontrant que la solution de la formulation variationnelle en déplacements est liée à la solution de la formulation variationnelle en contraintes par la loi de comportement.

Cette thèse se subdivise en quatre chapitres et une annexe. Elle est structurée de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principes et les résultats essentiels de la théorie des milieux continus. Nous présentons trois types de conditions aux limites de contact avec ou sans frottement qui conduisent à trois problèmes mécaniques : problème élastique de contact sans frottement, problème de contact avec frottement de Tresca et le problème viscoplastique de contact sans frottement.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une base rigide. Les conditions aux limites de contact sont celles de Signorini. Nous donnons, après avoir posé le problème mécanique, deux formulations variationnelles. En suite nous établissons un résultat d'existence et d'unicité pour chacune des deux formulations variationnelles. On poursuit avec un résultat d'équivalence entre les deux précédentes formulations variationnelles et on étudie ensuite la dépendance de la solution par rapport au paramètre. Finalement, on introduit une pénalisation sur les conditions aux limites de contact dans le problème mécanique de départ et on établit un résultat de convergence forte de la solution du problème pénalisé vers la solution faible du problème initial.

Dans le troisième chapitre nous étudions le problème de contact bilatéral, avec frottement, d'un corps élastique avec une fondation rigide, la loi de frottement considérée est celle de Tresca. D'une manière analogue avec le chapitre 2, on propose deux formulations variationnelles pour le problème mécanique, on poursuit avec un résultat d'existence et d'unicité pour chacune des deux formulations variationnelles. On présente aussi l'équivalence de ces deux formulations variationnelles, on étudie ensuite la dépendance de la solution par rapport au paramètre et on termine par l'étude de la convergence forte du problème pénalisé vers la solution faible du problème initial.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à l'étude quasi-statique d'un problème de contact sans frottement d'un corps viscoplastique avec une fondation rigide. Le contact est modélisé par les conditions de Signorini. Dans l'étude de ce problème, on suit les mêmes étapes énoncées dans les deux chapitres précédents.

Dans l'annexe on présente quelques résultats classiques sur l'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert ainsi que des rappels sur les espaces fonctionnels, qui ont servi de près ou de loin pour établir les résultats présentés dans ce travail.

Notations

Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$), on note par :

$\bar{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la frontière de Ω supposée souvent régulière.
Γ_i ($i = \overline{1, 3}$)	une partie de la frontière Γ .
$mes \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue ($N - 1$) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
ν_ν, ν_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel ν défini sur $\bar{\Omega}$.
$C^1(\bar{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\bar{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
$D = \mathcal{D}(\Omega)^N$.	
$D' = \mathcal{D}'(\Omega)^N$.	
$D = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N \times N}$.	
$D' = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N \times N}$.	
$H = L^2(\Omega)^N$.	
$\mathcal{H} = L^2(\Omega)_s^{N \times N}$.	
$H_1 = H^1(\Omega)^N$.	
$\mathcal{H}_1 = \{ \sigma \in \mathcal{H} \mid Div \sigma \in H \}$.	
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
$H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$.	
$H_\tau = \{ \xi \in H_\Gamma \mid \xi_\nu = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma \}$.	
\mathcal{R}	l'ensemble des déplacements rigides.

$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$.
H'_τ	l'espace dual de H_τ .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.
$z : H_\Gamma \rightarrow H_1$	l'inverse à droite de l'application trace γ .
$\bar{\gamma} : \mathcal{H}_1 \rightarrow H'_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions tensorielles.
$\bar{z} : H'_\Gamma \rightarrow \mathcal{H}_1$	l'inverse à droite de l'application trace $\bar{\gamma}$.

Si H est un espace de Hilbert et $N \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes :

H^N	l'espace défini par $H^N = \{x = (x_i) \mid x_i \in H, i = \overline{1, N}\}$.
$H_s^{N \times N}$	l'espace défini par $H_s^{N \times N} = \{x = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, N}\}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	le produit scalaire de H .
$ \cdot _H$	la norme de H .
2^H	l'ensemble de toutes les parties de H .
H'	l'espace dual de H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H' et H .
φ_K	la fonction indicatrice de $K \subset H$.
K^\perp	le sous-espace orthogonal de K .
$x_n \longrightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H .
$\mathcal{L}(H)$	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$\mathcal{C}([0, T], H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .
$\mathcal{C}^1([0, T], H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .
$L^p([0, T], H)$	l'espace des fonctions f fortement mesurables de $]0, T[$ dans H telles que $\int_0^T f(t) _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.

- $|\cdot|_{0,p,H}$ la norme de $L^p([0, T], H)$.
 $W^{k,p}([0, T], H)$ l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
 $|\cdot|_{k,p,H}$ la norme de $W^{k,p}([0, T], H)$.

Pour une fonction f , on note par

- $\text{dom } f$ le domaine de f .
 \dot{f}, \ddot{f} les dérivées première et seconde de f par rapport au temps.
 $\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i .
 ∇f le gradient de f .
 $\varepsilon(f)$ la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.
 $\text{Div } f$ la divergence de f .
 ∂f le sous-différentiel (classique) de f .

Si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

- $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ l'espace des applications linéaires et continues de H_1 dans H_2 .
 $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)}$ la norme de $\mathcal{L}(H_1, H_2)$.

Autres notations :

- \liminf la limite inférieure.
 \mathcal{S}_N l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^N .
 I_N le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^N .
 \cdot le produit scalaire sur \mathbb{R}^N et \mathcal{S}_N .
 0_N le zéro de \mathbb{R}^N et celui de \mathcal{S}_N .
 C une constante générique strictement positive.

 $|\cdot|$ la norm sur \mathbb{R}^N et \mathcal{S}_N .
 $\text{tr } A$ la trace du tenseur A .

Chapter 1

FORMULATION

MATHEMATIQUES DES

PROBLEMES AUX LIMITES

Dans cette partie nous rappelons les principes et les résultats essentiels de la théorie des milieux continus dont nous aurons besoin et nous fixons les notations qui seront utilisées, en donnant une idée de leur signification physique. Ces rappels porteront sur le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations, les équations de mouvement et les lois de comportement. De même nous présentons ici les différents types de conditions aux limites et notamment les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement. Ceci nous permettra de formuler, à la fin de ce chapitre, les problèmes mécaniques qui feront l'objet de notre étude.

Pour plus de détails sur ces notions nous indiquons les travaux de Ciarlet [1], Germain

et Muller [1], Cristescu [1], Cristescu et Suliciu [1], Ionescu et Sofonea [2], Sofonea [2], [3].

1.1 Rappel de la mécanique des milieux continus

L'objet de la mécanique est l'étude du mouvement des corps. Si ces corps sont assimilés à des points il s'agit de mouvement de points matériels. Si les distances relatives entre les points d'un même corps sont constantes, il s'agit de mouvement de corps rigides. Si ces distances varient, il s'agit de mouvement de corps déformables: c'est l'objet de la mécanique des milieux continus. Dans la suite par milieu continu nous comprendrons un corps qui occupe à chaque instant t un ouvert borné connexe Ω de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$), en respectant la continuité de la matière (ni interpénétration ni formation de cavités) dont les propriétés sont décrites par des fonctions continues. Un milieu continu est composé de particules.

1.1.1 Géométrie de la déformation

Soit un corps déformable qui occupe à l'instant $t = 0$, l'ouvert borné Ω de \mathbb{R}^N ($N=1,2,3$), dont la frontière Γ est Lipchitzienne et à l'instant $t > 0$, l'ouvert Ω_t de \mathbb{R}^N . Ω s'appelle configuration de référence ou configuration non déformée du corps. Soit P une particule matérielle du corps et soit $X = (X_i)$ les composantes de la position à l'instant $t = 0$ de P et $x = (x_i)$ les composantes de la position à l'instant $t > 0$ de P . Le mouvement du milieu continu est déterminé par la position courante x de chaque particule matérielle comme fonction de la position de référence X et du

temps t . C'est donc une famille de fonctions $\chi(., t) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$), qui vérifie :

$$x(X, t) = \chi(X, t) = X + u(X, t) \quad \forall X \in \Omega, t > 0. \quad (1.1)$$

Le champ u défini par (1.1) s'appelle champ des déplacements.

Nous supposons que pour chaque instant $t > 0$, l'application $\chi(., t)$ est une application continue, bijective et soit $\chi^{-1}(., t) : \Omega_t \longrightarrow \Omega$ son application réciproque donnée par

$$X = \chi^{-1}(x, t). \quad (1.2)$$

Au mouvement χ on associe le champ des vitesses et le champ des accélérations définis respectivement par :

$$v = \dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt}(X, t) \quad (1.3)$$

$$a = \dot{v} = \ddot{\chi} = \frac{d^2\chi}{dt^2}(X, t). \quad (1.4)$$

Nous introduisons alors les notations suivantes :

$$F = \nabla_X \chi = I_N + H,$$

$$C = FF^T = (I_N + H + H^T + HH^T),$$

$$G = \frac{1}{2}(C - I_N),$$

où

$\nabla_X \chi$ désigne le gradient de χ par rapport aux coordonnées de la variable X ,

$$H = \nabla_X u,$$

H^T désigne la transposée de H .

F^T désigne la transposée de F ,

I_N est la matrice unité d'ordre N .

Les tenseurs F , C et G définis précédemment s'appellent respectivement tenseur gradient de la déformation, tenseur des dilatations (ou tenseur des déformations de Cauchy) et tenseur des déformations. En composantes, on a :

$$G_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right).$$

On voit que le tenseur des déformations G s'exprime de façon non-linéaire par rapport aux composantes du vecteur de déplacement u .

Nous nous intéressons aux mouvements caractérisés par un vecteur de déplacement $u(X, t)$ qui varie lentement avec X et par conséquent les dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ sont considérées petites c'est l'objet: de l'hypothèse des petites transformations (H.P.T).

Dans ce cas les termes $\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial X_i}$ sont négligés et l'expression de G se linéarise en ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (H + H^T). \quad (1.5)$$

En composantes on a :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right).$$

Le tenseur ε s'appelle le tenseur des déformations linéarisé. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u on va le noter $\varepsilon(u)$.

1.1.2 Tenseur des contraintes

Soit le système matériel soumis à des forces appliquées de volume $f(., t) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^N$ et de surface $h : \Gamma_t \rightarrow \mathbb{R}^N$ de la configuration déformée Ω_t et soit le champ de vecteurs $\tau(., t) : \Omega_t \times \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\text{où } \Sigma_1 = \{u \in \mathbb{R}^N / |u| = 1\}.$$

Introduisons alors les notations suivantes.

Pour tout sous-domaine ω_t de Ω_t , de frontière $\partial\omega_t$ et pour tout $x \in \partial\omega_t$, le vecteur $\nu(x, t)$ désigne la normale extérieure unitaire à ω_t en x ; $\tau(x, \nu, t) da$ est la force élémentaire de surface appliquée sur l'élément d'aire da ; si $x \in \Gamma_t$ on a

$$\tau(x, \nu, t) da = h(x, t) da.$$

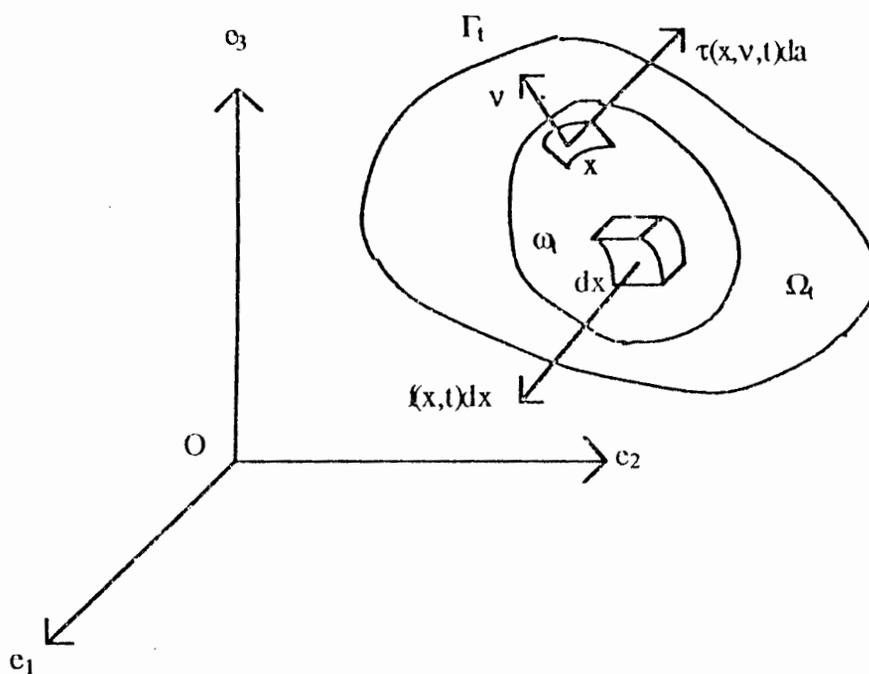


Fig.2.1. Système de forces .

Le vecteur $\tau(x, \nu, t)$ est appelé *vecteur contrainte* de Cauchy au point x . D'après le théorème de Cauchy (cf. Ciarlet [1], ch.1) il vient que ce vecteur est linéaire par rapport à $\nu \in \Sigma_1$; donc il existe un champ de tenseurs $\sigma(\cdot, t) : \Omega_t \longrightarrow M_N$ régulier tel que

$$\tau(x, \nu, t) = \sigma^T(x, t) \nu \quad \forall x \in \Omega_t, \quad t > 0$$

où M_N est l'espace des matrices carrées d'ordre $N \times N$.

En outre σ est un champ symétrique :

$$\sigma(x, t) = \sigma^T(x, t) \quad \forall x \in \Omega_t, \nu \in \Sigma_1, t > 0.$$

Le tenseur symétrique $\sigma(x, t)$ est appelé *tenseur des contraintes* de Cauchy au point $x \in \Omega_t$. La loi fondamentale de la mécanique, exprimant l'équivalence du torseur des forces extérieures et du torseur des accélérations pour un système quelconque conduit aux équations de mouvement suivantes.

$$Div \sigma + f = \rho \ddot{u} \quad \text{dans } \Omega_t, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

où $\rho(\cdot, t) : \Omega_t \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la densité de masse dans la configuration déformée Ω_t et

Div désigne l'opérateur divergence c'est-à-dire $Div \sigma = \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right)$, pour tout $i, j=1,2,3$.

Les équations (1.6) sont valables dans la configuration déformée Ω_t qui est elle même inconnue. Donc, les équations (1.6) ne peuvent pas être utilisées telles quelles; d'où la nécessité de leur réécriture dans la configuration de référence Ω .

On prouve que dans certaines hypothèses et avec un changement de notation (cf. Ciarlet [1] ch.1) l'équation (1.6) devient

$$\text{Div}\sigma + f = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (1.7)$$

où cette fois-ci σ , f et u sont des fonctions définies sur Ω et $[0, T]$ est un intervalle de temps. Dans le cas statique, c'est-à-dire $\ddot{u} = 0$, ou quasistatique (c'est-à-dire $\rho\ddot{u}$ est négligeable), les équations (1.7) deviennent

$$\text{Div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.8)$$

Dans la suite, on va appeler simplement (1.7) équation de mouvement et (1.8) équation d'équilibre. En conclusion, dans la théorie linéaire les inconnues du problème sont les fonctions u et σ qui satisfont à (1.7) dans le cas des processus dynamiques et (1.8) dans le cas des processus statiques ou quasistatiques.

1.2 Lois de comportement

Soit $N = 3$. les équations (1.7) (dans le cas dynamique) ou (1.8) (dans le cas statique ou quasistatique) constituent au total trois relations scalaires. Les fonctions inconnues sont au nombre de neuf: les trois composantes (u_i) du champ de déplacement et les six composantes (σ_{ij}) du tenseur des contraintes. Il est évident, à partir de cette énumération, que du point de vue mathématiques, il est bien improbable qu'avec trois équations on puisse déterminer neuf fonctions. Du point de vue physique, il faut remarquer que les lois de conservation énoncées sont des lois universelles, valables pour tous les solides. Si donc les équations (1.7) ou (1.8) obtenues à partir de ces lois suffisaient à déterminer toutes les inconnues, cela signifierait que soumis à des conditions

identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Les lois de conservation étant insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on désigne sous le vocable *de lois de comportement*. Elles caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Une brève présentation de ces expériences sera faite dans la section 1.2.1. Il est à rappeler d'une manière générale que les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations ε et leur dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

1.2.1 Essais classiques sur les solides

Considérons une barre de section S , de longueur l_0 à laquelle on peut appliquer une force $F = F(t)$ à une extrémité tandis que l'autre extrémité est fixe. On mesure l'allongement $l = l(t)$ de la barre et on définit la contrainte σ et la déformation ε par les égalités :

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{S}, \quad \varepsilon(t) = \frac{l(t)}{l_0}.$$

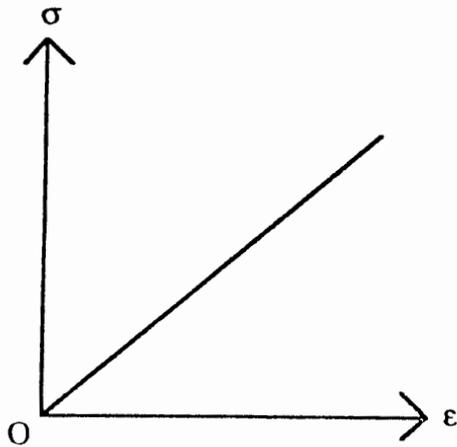
On peut réaliser les essais suivants :

1) Essai de chargement monotone (fig.3.1).

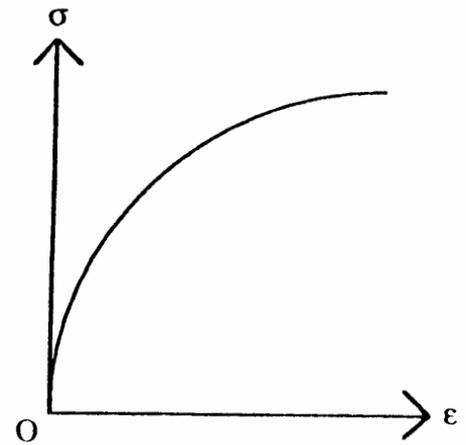
On augmente progressivement la force F et on mesure l ; on calcule σ , ε et on trace la courbe de variation $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; cet essai permet de mettre en évidence les phénomènes

suivants:

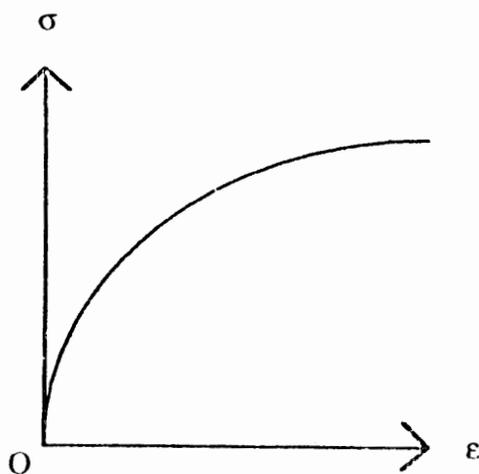
- a) La non-linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$.
- b) L'adoucissement éventuelle (la non-monotonie de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$).
- c) La viscosité (en prenant $\dot{\varepsilon} = c$), on peut obtenir des courbes $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ différentes, ce qui met en évidence le rôle de l'échelle temps.



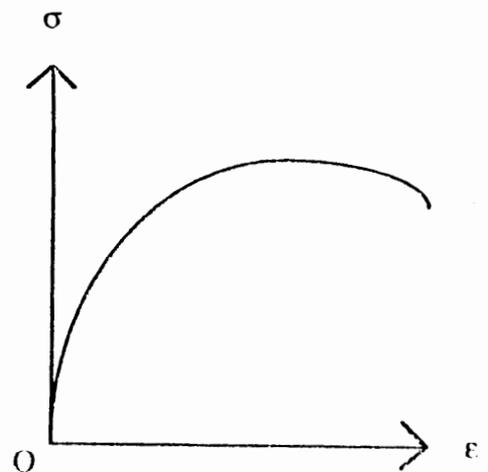
a) linéaire



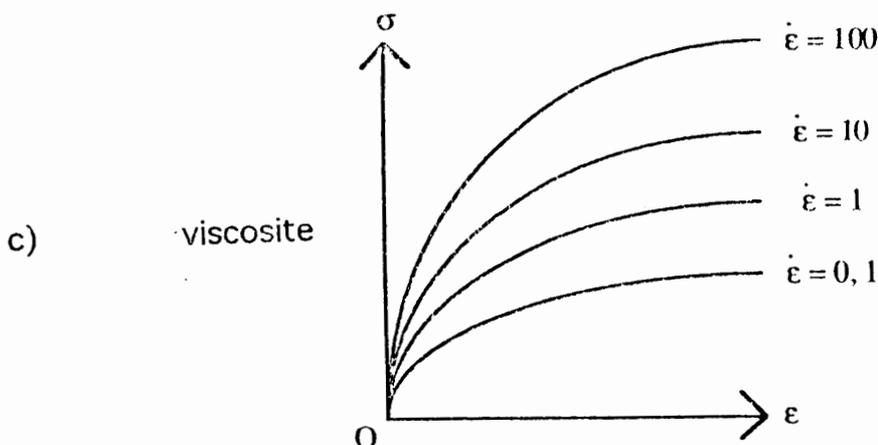
non - linéaire



b) durcissement



adoucissement



c) viscosite

Fig.3.1. Essai de chargement monotone.

2) Essai de fluage (fig.3.2).

On commence par un essai de chargement monotone tel qu'à un instant t (considéré désormais l'instant $t = 0$) on a : $\sigma(0) = \sigma_0$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $F(0) = F_0$.

On maintient la force F constante au cours du temps. La contrainte σ reste donc constante pour $t > 0$.

Généralement la déformation augmente avec le temps: *c'est le fluage*. Si cette déformation reste limitée lorsque $t \rightarrow \infty$, on a coutume de dire que le milieu étudié a un comportement de *type solide*. Par contre, si cette déformation n'est pas limitée lorsque $t \rightarrow \infty$, on a la coutume de dire que le milieu étudié a un comportement de *type fluide*.

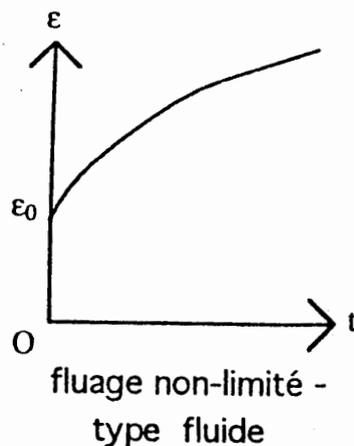
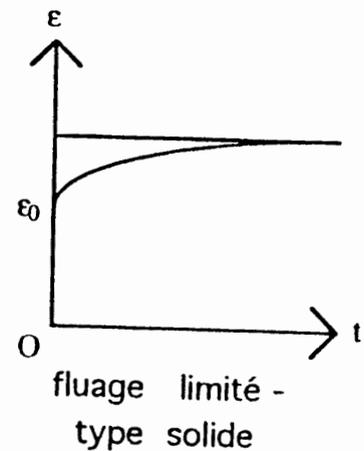
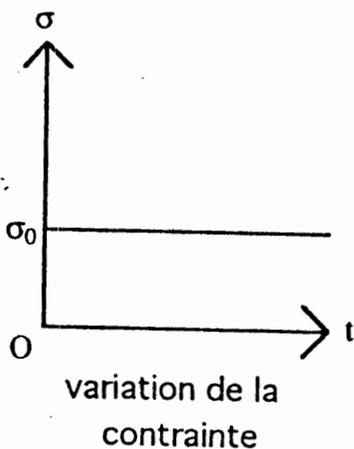


Fig.3.2. Essai de fluage.

3) Essai de relaxation (fig.3.3).

C'est l'essai dual du précédent .

On suppose qu'à l'instant $t = 0$ on a $\sigma(0) = \sigma_0, \varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et on maintient la déformation ε constante dans le temps. On constate généralement que les contraintes σ se relâchent au cours du temps: *c'est la relaxation*.

Si la relaxation est totale (c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 0$) on a coutume de dire que le matériau étudié a un comportement de *type fluide*. Si par contre la relaxation n'est pas totale (c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) > 0$), alors dans le corps restent en permanence des *contraintes résiduelles*; on a coutume de dire que le matériau étudié a un comportement de *type solide*.

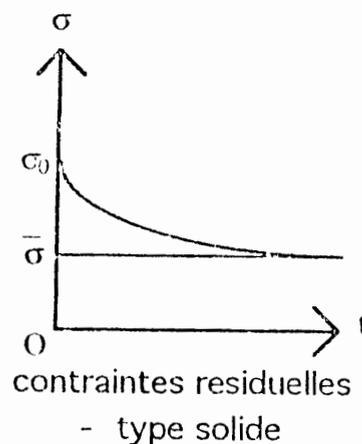
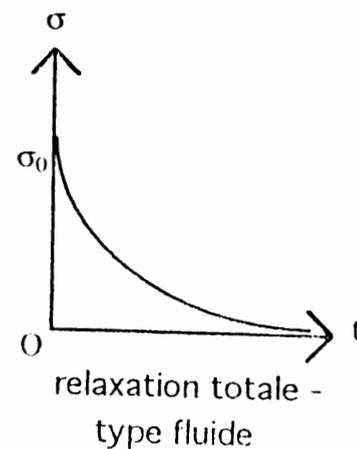
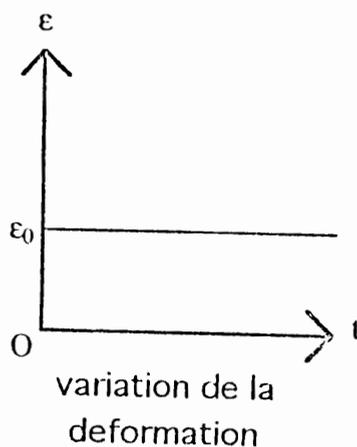


Fig.3.3. Essai de relaxation.

4) Essai de charge-décharge (fig.3.4).

On augmente la force F puis on la ramène à zéro. Cet essai permet de mettre en évidence le comportement élastique ou anélastique (plastique) du corps. Si les courbes de charge-décharge $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ coïncident, le milieu est *élastique*; dans le cas contraire il est *anélastique* (plastique) et après décharge complète, il subsiste une déformation résiduelle. Il est possible que l'anélasticité du matériau ne se manifeste que lorsque la force F (donc la contrainte σ) atteint un certain seuil; si ce seuil est fixe (indépendant de l'histoire de chargement), le milieu est plastique parfait; si ce seuil varie, il y a écrouissage: durcissement (ou écrouissage positif) si le seuil augmente et radoucissement (ou écrouissage négatif) si le seuil diminue

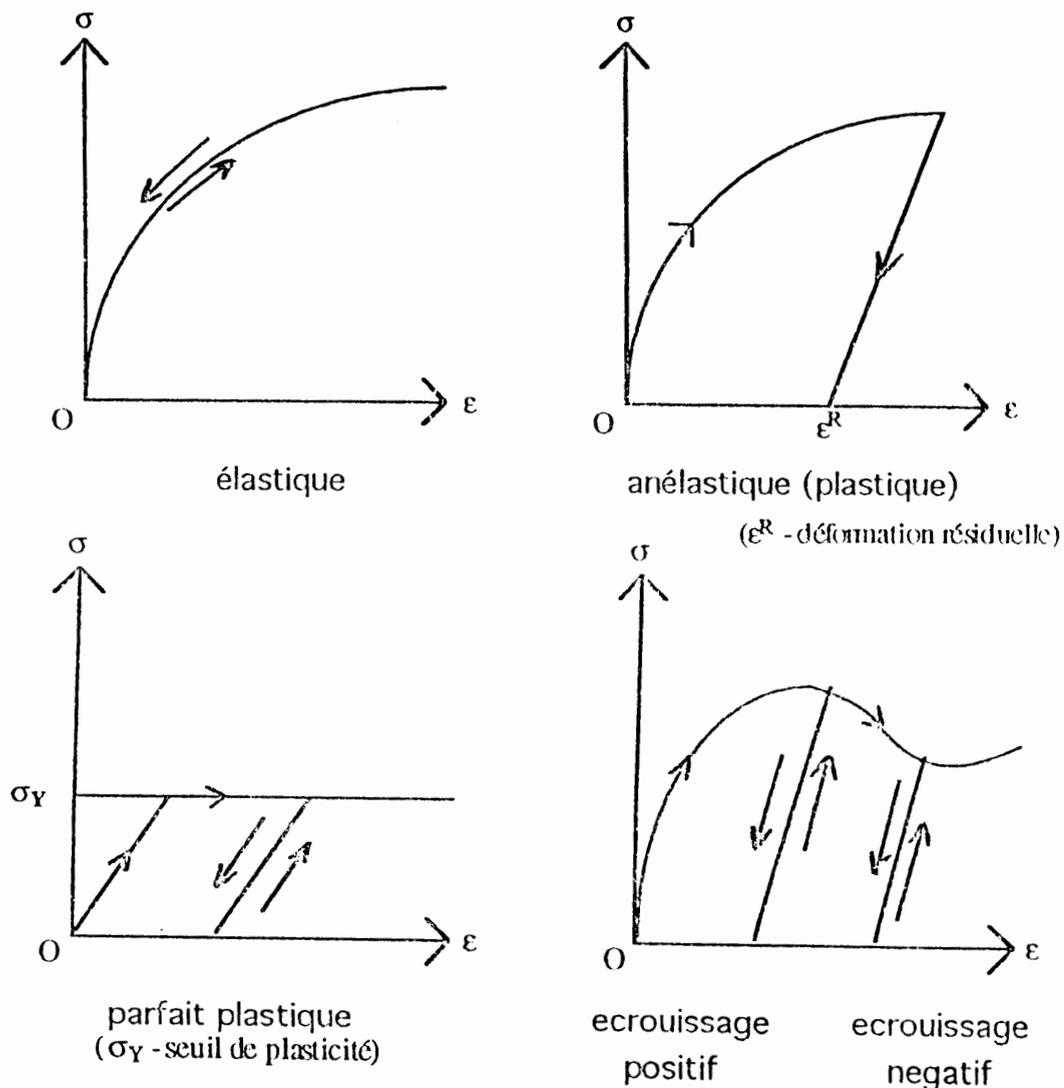


Fig.3.4. Essai de charge-décharge.

1.2.2 Lois de comportement élastique dans le cas unidimensionnel

Reprenons plus en détail l'expérience de chargement monotone décrite dans la section précédente et considérons pour cela une tige métallique (acier doux par exemple) soumise à une force de traction σ et qui subit de ce fait un allongement relatif ε . Dans un système de deux axes orthogonaux, portons ε en abscisse et σ en ordonnée et traçons le graphe de la relation (ε, σ) . Pour la plupart des métaux lorsque ε augmente à partir de zéro, σ augmente et les points (ε, σ) décrivent un segment de droite d'origine 0. Si on continue à augmenter ε , la courbe décrite par les points (ε, σ) s'incurve à partir du point M . Le graphe de la relation (ε, σ) lorsque ε augmente est donc constitué d'un segment de droite OM et d'un arc de courbe MZ (voir fig.1.2).

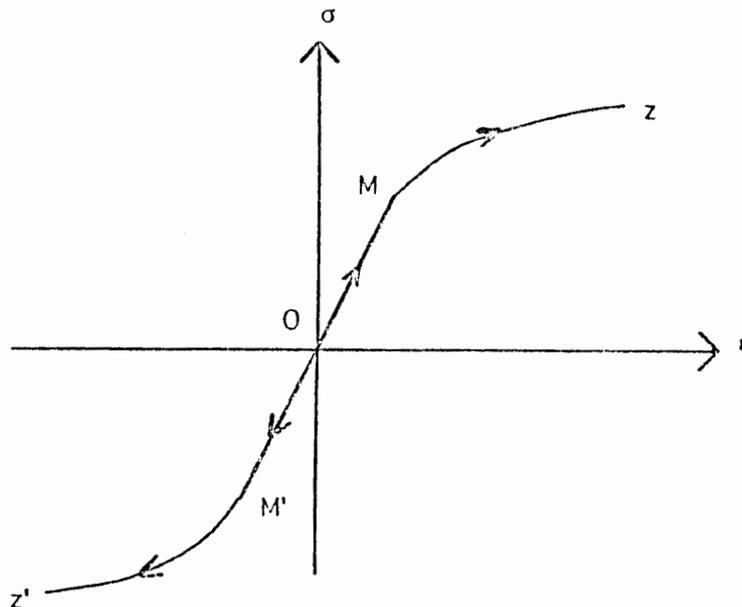


Fig. 1.2. Comportement d'une barre métallique en traction et en compression.

Imaginons maintenant une expérience similaire en compression (c'est-à-dire pour $\sigma < 0$). Pour la plupart des métaux lorsque ε , décroît à partir de zéro les points (ε, σ) , décrivent un segment de droite qui prolonge le segment OM . Si on continue à diminuer ε , la courbe décrite par les points (ε, σ) s'incurve à partir du point M' . Le graphe de la relation (ε, σ) en compression est donc constitué d'un segment de droite OM' et d'un arc de courbe $M'Z'$ (voir fig. 1.2).

Ces expériences physiques constituent le point de départ pour obtenir des lois de comportement élastique dans le cas unidimensionnel, car toute loi de comportement doit modéliser le comportement des matériaux issu de ces essais.

a) Loi de comportement linéaire.

C'est la loi de comportement donnée par

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.9)$$

qui exprime une dépendance linéaire dans la relation contrainte-déformation. La constante $E > 0$ s'appelle *module de Young*. Le diagramme (ε, σ) dans ce cas est représenté dans la figure 1.3.

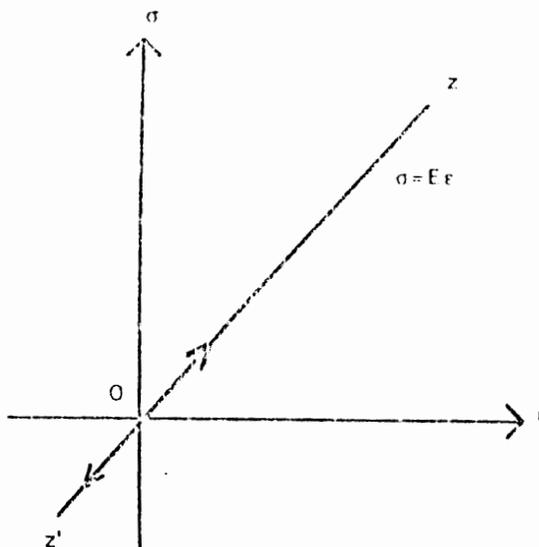


Fig. 1.3. Loi de comportement linéaire.

b) Loi de comportement linéaire par morceaux.

Supposons que la courbe (ε, σ) présentée dans la figure 1.2. soit symétrique par rapport à l'origine et que les arcs MZ et $M'Z'$ soient des demi-droites. Dans ce cas la relation contrainte-déformation est donnée par l'une des deux égalités suivantes.

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon + \beta(\varepsilon + \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon < -\varepsilon_0 \\ E\varepsilon & \text{si } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ E\varepsilon + \beta(\varepsilon - \varepsilon_0) & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} A\sigma + \frac{1}{\mu}(\sigma + \sigma_0) & \text{si } \sigma < -\sigma_0 \\ A\sigma & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_0 \\ A\sigma + \frac{1}{\mu}(\sigma - \sigma_0) & \text{si } \sigma > \sigma_0 \end{cases} \quad (1.11)$$

où $E > 0$, $\beta \neq 0$, $\sigma_0 = E\varepsilon_0$, $A = \frac{1}{E}$, $\mu = -\frac{E(E+\beta)}{\beta}$.

Soit maintenant l'intervalle $K = \{\varepsilon \in R / |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$ et $P_K : R \rightarrow K$ l'opérateur de projection sur K . On a

$$P_K(\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon_0 & \text{si } \varepsilon < -\varepsilon_0 \\ \varepsilon & \text{si } |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ \varepsilon_0 & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_0 \end{cases}$$

et par conséquent la loi de comportement (1.10) prend la forme

$$\sigma = E\varepsilon + \beta(\varepsilon - P_K\varepsilon) \quad (1.12)$$

Il en est de même pour la loi de comportement (1.11) qui prend la forme

$$\varepsilon = A\sigma + \frac{1}{\mu}(\sigma - P_K\sigma) \quad (1.13)$$

où K cette fois-ci est le convexe défini par $K = \{\sigma \in R / |\sigma| \leq \sigma_0\}$ et P_K est l'opérateur de projection sur K :

$$P_K(\sigma) = \begin{cases} -\sigma_0 & \text{si } \sigma < -\sigma_0 \\ \sigma & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_0 \\ \sigma_0 & \text{si } \sigma > \sigma_0 \end{cases}$$

Les diagrammes (ε, σ) et (σ, ε) dans ce cas sont présentés dans la figure 1.4.

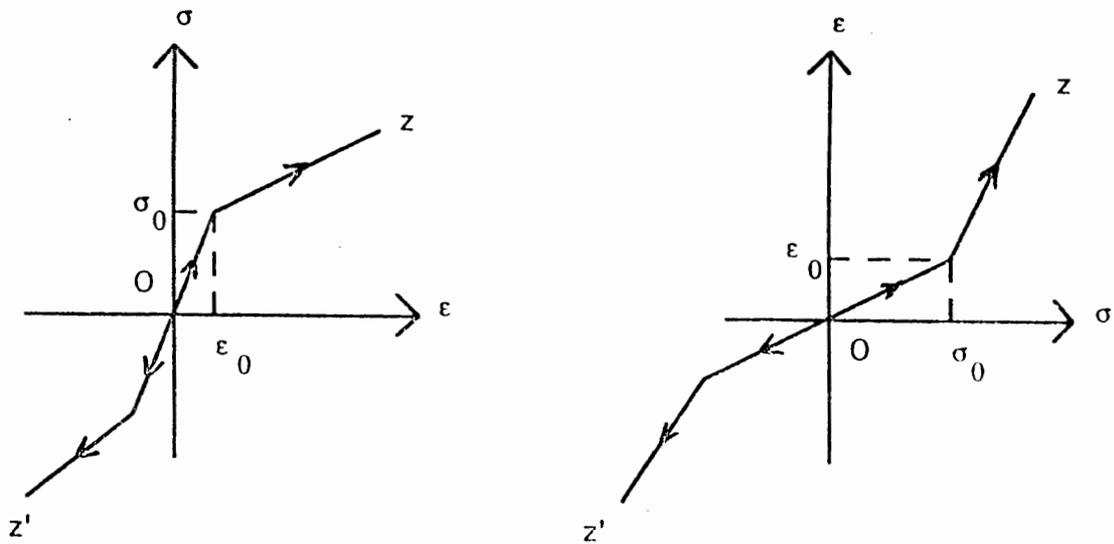


Fig. 1.4. Loi de comportement linéaire par morceaux.

c) Matériau à blocage.

Le type de "matériau à blocage" a été introduit par Prager [1], qui en a formulé une loi de comportement graphique. Intuitivement ce matériau a un comportement linéaire tant que la déformation n'atteint pas un certain seuil. Lorsque ce seuil est atteint, les contraintes peuvent augmenter sans engendrer de plus grandes déformations. Cette

propriété se traduit par le fait que les arcs MZ et $M'Z'$ de la figure 1.2. sont des demi-droites verticales. En supposant une symétrie par rapport à l'origine la relation contrainte-déformation pour un matériau à blocage se présente par la figure 1.5

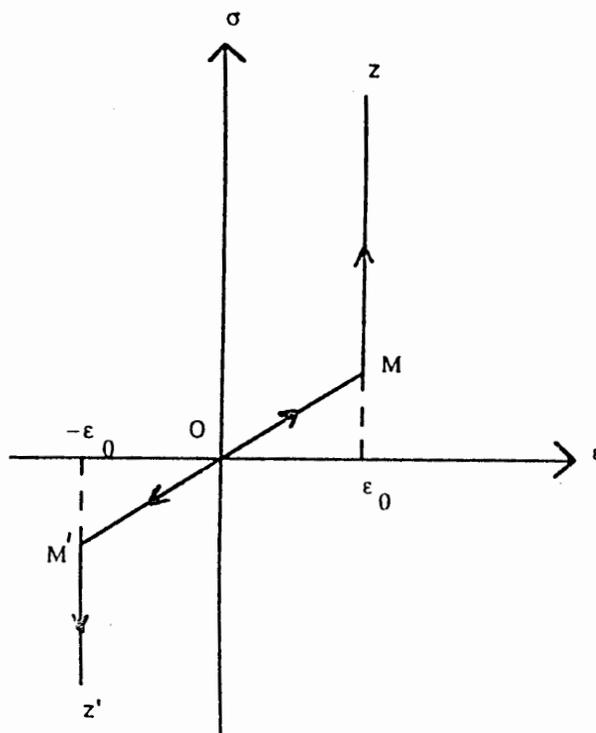


Fig. 1.5. Matériau à blocage.

Formulons dans la suite la loi de comportement d'un matériau à blocage. Puisque le graphe ci-dessus possède des segments parallèles à l'axe $O\sigma$, il est impossible de décrire la dépendance contrainte-déformation par une loi de la forme $\sigma = F(\varepsilon)$. Afin d'exprimer la contrainte σ en fonction de la déformation ε , remarquons que sur l'intervalle $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ cette dépendance est linéaire

$$\sigma = E\varepsilon \quad , \lambda > 0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \quad (1.14)$$

Sur la demi-droite MZ la contrainte croît indéfiniment tandis que la déformation conserve la valeur constante $\varepsilon = \varepsilon_0$; il vient

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda \quad , \lambda > 0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0. \quad (1.15)$$

Sur la demi-droite $M'Z'$ la contrainte décroît indéfiniment tandis que la déformation conserve la valeur constante $\varepsilon = -\varepsilon_0$; il résulte :

$$\sigma = E\varepsilon + \lambda \quad , \lambda < 0 \Rightarrow \varepsilon = -\varepsilon_0 \quad (1.16)$$

On remarque facilement que les relations (1.14)-(1.16) peuvent être écrites sous la forme condensée

$$\begin{cases} |\varepsilon| \leq \varepsilon_0 \\ \sigma = E\varepsilon + \lambda \\ \lambda(\tau - \varepsilon) \leq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad |\tau| \leq \varepsilon_0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Soit maintenant le convexe $K = \{\varepsilon \in \mathbb{R} / |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\}$. Il résulte que

$$|\varepsilon| \leq \varepsilon_0, \quad \lambda(\tau - \varepsilon) \leq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad |\tau| \leq \varepsilon_0 \Leftrightarrow \lambda \in \partial\psi_K(\varepsilon).$$

où $\partial\psi_K$ représente le sous-différentiel de la fonction indicatrice ψ_K (voir Annexe (5.11)). Ceci nous permet de réécrire la loi de comportement d'un matériau à blocage (1.17) sous une autre forme équivalente.

$$\sigma \in E\varepsilon + \partial\psi_K(\varepsilon). \quad (1.18)$$

d) Loi de Hencky.

Considérons maintenant un matériau qui a un comportement élastique linéaire tant

que la contrainte σ n'atteint pas un certain seuil (σ_0 en traction et $-\sigma_0$ en compression). Lorsque le seuil σ_0 est atteint, la déformation ε augmente indéfiniment et lorsque le seuil $-\sigma_0$ est atteint, le corps se comprime indéfiniment. Cette propriété se traduit par le fait que les arcs MZ et $M'Z'$ de la figure 1.2. sont des demi-droites horizontales. La relation contrainte-déformation pour un matériau de ce type se représente par le graphique de la figure 1.6. Des considérations similaires aux considérations faites au point (c) nous amènent à écrire la loi de comportement d'un tel matériau sous l'une des deux formes équivalentes suivantes:

$$\begin{cases} |\sigma| \leq \sigma_0 \\ \varepsilon = A\sigma + \lambda \\ \lambda(\tau - \sigma) \leq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad |\tau| \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\varepsilon \in A\sigma + \partial\psi_K(\sigma) \quad (1.20)$$

où $K = \{\sigma \in \mathbb{R} / |\sigma| \leq \sigma_0\}$ et $\partial\psi_K$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice du

convexe K . La loi de comportement (1.20) ainsi obtenue s'appelle loi de Hencky.

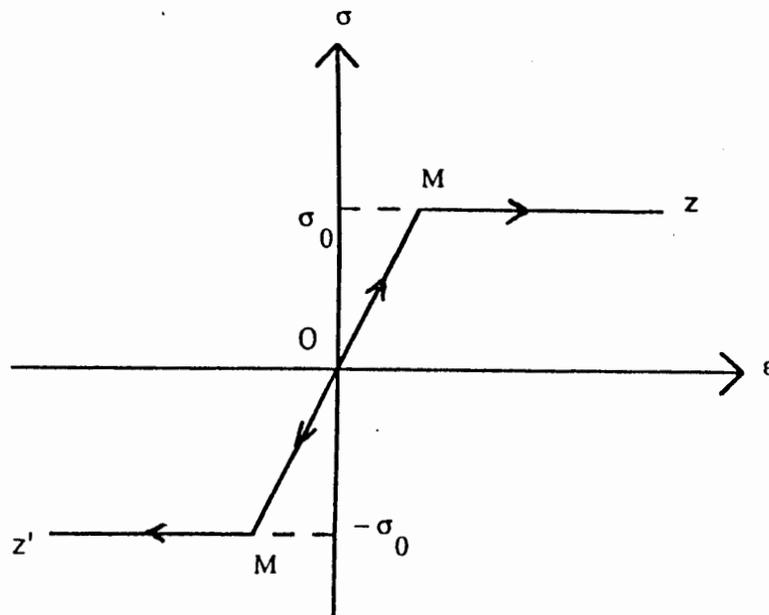


Fig. 1.6. Loi de Hencky.

1.2.3 Lois de comportement élastique en dimension N

Les lois de comportement pour les matériaux unidimensionnels présentées dans la section précédente, peuvent se généraliser dans le cas bidimensionnel ou tridimensionnel. Soit dans la suite un corps matériel occupant l'ouvert borné connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) et soient σ et ε respectivement le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations en un point $x \in \Omega$. En outre on peut considérer les lois suivantes, valables partout dans Ω :

a) Loi de comportement linéaire.

C'est la loi de comportement de la forme

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon \quad (\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh}\varepsilon_{kh}) \quad (1.21)$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkh})$ est un tenseur d'ordre quatre. Ses composantes \mathcal{E}_{ijkh} , s'appellent *coefficients d'élasticité*, elles sont indépendantes du tenseur des déformations ε . Dans le cas non-homogène les coefficients \mathcal{E}_{ijkh} , dépendent du point $x \in \Omega$ et dans le cas homogène \mathcal{E}_{ijkh} , sont des constantes.

Plaçons-nous dans la suite dans le cas homogène. Dans la théorie d'élasticité linéaire \mathcal{E} est un tenseur symétrique et positivement défini c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \mathcal{E}\tau_1\tau_2 = \tau_1\mathcal{E}\tau_2 \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in S_N \\ \text{(b)} \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \mathcal{E}\tau\tau \geq \alpha |\tau|^2 \quad \forall \tau \in S_N \end{array} \right. \quad (1.22)$$

La condition de symétrie (1.22.a) est équivalente aux égalités suivantes.

$$\mathcal{E}_{ijkh} = \mathcal{E}_{khij} = \mathcal{E}_{ijhk}$$

ce qui, dans le cas $N = 3$, réduit à 21 le nombre de coefficients d'élasticité indépendants qui définissent le tenseur \mathcal{E} . La condition (1.22.b) est dite également condition d'ellipticité et elle entraîne l'inversibilité du tenseur \mathcal{E} par conséquent (1.21) est équivalente à

$$\varepsilon = \mathcal{E}^{-1}\sigma \quad (1.23)$$

où \mathcal{E}^{-1} est l'inverse du tenseur \mathcal{E} .

Remarquons enfin que les propriétés (1.22) sur le tenseur \mathcal{E} entraînent des propriétés similaires sur le tenseur \mathcal{E}^{-1} .

Plaçons-nous maintenant dans le cas tridimensionnel ($N = 3$). Dans la théorie classique d'élasticité on n'envisage pas les matériaux élastiques linéaires en toute généralité mais on considère des cas avec différentes symétries matérielles qui réduisent le nombre des coefficients distincts intervenants dans la loi de comportement (1.21). Ainsi on peut prouver que dans le cas homogène et isotrope (c'est-à-dire le cas où "toutes les directions autour d'un point sont matériellement équivalentes") les coefficients \mathcal{E}_{ijkh} sont donnés par (voir Germain et Muler [1] p 108 ou Ciarlet [1] p 95)

$$\mathcal{E}_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}) \quad (1.24)$$

où les scalaires λ, μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les formules (1.24) s'obtiennent en imposant que la loi de comportement (1.21) ait la même expression dans tout repère orthonormé ou, en termes plus précis, que le tenseur \mathcal{E} ait les mêmes composantes dans tout repère orthonormé. En ce sens, toutes les directions autour d'un point sont bien matériellement équivalentes. En utilisant (1.24) la relation (1.21) devient

$$\sigma = \lambda (tr \varepsilon) I_3 + 2\mu \varepsilon \quad (1.25)$$

d'où, par passage à la trace il résulte

$$tr \sigma = (3\lambda + 2\mu) tr \varepsilon \quad (1.26)$$

de sorte que la relation inverse de (1.25) est

$$\varepsilon = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}(\text{tr}\sigma)I_3 \quad (1.27)$$

où $\text{tr}\sigma$ et $\text{tr}\varepsilon$ désignent respectivement la trace du tenseur σ et du tenseur ε . On pose fréquemment :

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}, \quad E = \frac{\mu(3\mu + 2\lambda)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (1.28)$$

Les constantes K , E et ν s'appellent respectivement module de rigidité à la compression, module de *Young* et coefficient de *Poisson*. On obtient :

$$\frac{1 + \nu}{E} = \frac{1}{2\mu}, \quad \frac{\nu}{E} = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Donc (1.27) devient :

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}(\text{tr}\sigma)I_3$$

En faisant appel à l'intuition physique la plus immédiate, on peut "limiter" les valeurs numériques possibles pour les coefficients de tout matériau élastique, homogène et isotrope "réel". Ainsi en imaginant trois expériences "idéales", on peut prouver que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ (voir Ciarlet [1] p. 54-62) et d'après (1.28) il vient $K > 0$, $E > 0$ et $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

b) Loi de comportement linéaire par morceaux.

C'est la loi de comportement qui généralise (1.10) et (1.11). Pour la présenter, considérons les hypothèses suivantes.

$$\mathcal{E} : S_N \longrightarrow S_N \text{ est un tenseur symétrique et positivement défini.} \quad (1.29)$$

$$K \text{ est un convexe fermé de } S_N \text{ tel que } 0_N \in K, \quad (1.30)$$

$$\beta > 0. \quad (1.31)$$

La variante en dimension N de la loi de comportement (1.12) ou (1.10) est

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon + \beta(\varepsilon - P_K\varepsilon) \quad (1.32)$$

où $P_K : S_N \rightarrow S_N$ désigne l'opérateur de projection sur K .

Puisque $\varepsilon = P_K\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \in K$, on remarque que pour les déformations $\varepsilon \in K$, (1.32) se réduit à la loi de comportement linéaire $\sigma = \mathcal{E}\varepsilon$; par contre lorsque $\varepsilon \notin K$, (1.32) exprime une dépendance non-linéaire entre le tenseur des déformations ε et le tenseur des contraintes σ .

Le convexe K peut être défini par l'égalité

$$K = \{\varepsilon \in S_N / F(\varepsilon) \leq 0\} \quad (1.33)$$

où F est une fonction numérique, définie sur S_N , continue, convexe et telle que $F(0_N) < 0$. Des exemples classiques peuvent être obtenus en prenant :

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^D \cdot \varepsilon^D - k^2, \quad (1.34)$$

$$F(\varepsilon) = \max_{i,j=1,N} |\varepsilon_i - \varepsilon_j| - k^2, \quad (1.35)$$

$$F(\varepsilon) = -(\text{tr}\varepsilon + k^2), \quad (1.36)$$

$$F(\varepsilon) = \inf_{i=1,N} (\varepsilon_i - k^2). \quad (1.37)$$

où ε^D désigne le déviateur de ε , ε_i désignent les valeurs propres du tenseur symétrique ε , $\text{tr}\varepsilon$ est la trace du tenseur ε et $k > 0$ est une constante donnée.

En ce qui concerne la loi de comportement (1.11), en utilisant (1.13), elle peut être généralisée au cas N -dimensionnel par :

$$\varepsilon = \mathcal{A}\sigma + \frac{1}{\mu}(\sigma - P_K\sigma) \quad (1.38)$$

où

$$\mathcal{A} : S_N \longrightarrow S_N \text{ est un tenseur symétrique positivement défini.} \quad (1.39)$$

$$K \text{ est un convexe fermé de } S_N \text{ tel que } 0 \in K. \quad (1.40)$$

$$\mu > 0. \quad (1.41)$$

Dans (1.38) P_K désigne l'opérateur de projection sur K . Pour définir K on peut utiliser (1.33) où la fonction F est définie par l'une des formules (1.34)-(1.37), en remplaçant ε par σ . D'après (1.38) on remarque que pour les contraintes $\sigma \in K$ on a $\varepsilon = \mathcal{A}\sigma$ c'est-à-dire une dépendance linéaire entre la déformation ε et la contrainte σ :

par contre pour $\sigma \notin K$, (1.38) exprime une dépendance non-linéaire entre les tenseurs σ et ε .

Remarquons enfin que, sous les hypothèses (1.31) et (1.41), les modèles (1.32) et (1.38) ne sont pas équivalents. En effet plaçons-nous pour simplifier dans le cas unidimensionnel (1.10) et (1.11) avec $\beta \in]-E, 0[\cup]0, +\infty[$. Si $\beta > 0$ on obtient $\mu < 0$ et si $-E < \beta < 0$ on obtient: $\mu > 0$. Par conséquent, les deux conditions (1.31) et (1.41) sont complémentaires l'une de l'autre.

c) Matériau à blocage.

La loi de comportement (1.18) peut être généralisée de la manière suivante.

Soit $\mathcal{E} : S_N \longrightarrow S_N$ un tenseur symétrique et positivement défini et K un convexe fermé de S_N tel que $0_N \in K$; soit également ψ_K la fonction indicatrice du convexe K et $\partial\psi_K$ son sous-différentiel; on prend

$$\sigma \in \mathcal{E}\varepsilon + \partial\psi_K(\varepsilon). \quad (1.42)$$

C'est la loi de comportement d'un matériau à blocage en dimension N . La loi de comportement (1.42) entraîne que $\varepsilon \in K$ c'est-à-dire la déformation ε se trouve toujours dans le convexe K . Si ε se trouve à l'intérieur de K , il résulte $\partial\psi_K(\varepsilon) = \{0_N\}$ donc (1.42) exprime une dépendance linéaire entre la contrainte σ et la déformation ε ; par contre, si ε est sur la frontière de K , des contraintes supplémentaires peuvent apparaître dans le corps :

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon + \lambda$$

où

$$\lambda \in \partial\psi_K(\varepsilon)$$

c'est-à-dire

$$\lambda \cdot (\tau - \varepsilon) \leq 0 \quad \forall \tau \in K .$$

d) Loi de Hencky.

D'une manière analogue, la loi unidimensionnelle de Hencky (1.20) se généralise en plusieurs dimensions sous la forme suivante.

$$\varepsilon \in \mathcal{A}\varepsilon + \partial\psi_K(\sigma) \tag{1.43}$$

où $\mathcal{A} : S_N \rightarrow S_N$ est un tenseur symétrique et positivement défini et ψ_K est la fonction indicatrice d'un convexe fermé K tel que $0_N \in K$.

Comme dans le cas d'un matériau à blocage on a les commentaires suivants.

puisque ψ_K est sous-différentiable en σ , il vient $\sigma \in K$ c'est-à-dire la contrainte se trouve toujours dans le convexe K . Si σ se trouve à l'intérieur de K , il résulte $\partial\psi_K(\sigma) = \{0_N\}$ donc (1.43) exprime une dépendance linéaire entre la contrainte et la déformation: par contre si σ est sur la frontière de K , des déformations supplémentaires peuvent apparaître dans le corps :

$$\varepsilon = \mathcal{A}\sigma + \lambda$$

où

$$\lambda \in \partial\psi_K(\sigma)$$

c'est-à-dire

$$\lambda \cdot (\tau - \sigma) \leq 0 \quad \forall \tau \in K.$$

Remarque 1.1. Dans le deuxième et troisième chapitre de cette thèse nous allons considérer des lois de comportement élastiques de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon, \theta)$$

où F est une fonction constitutive non-linéaire et θ est un paramètre donné.

Du point de vue physique θ peut représenter la température, l'humidité mais aussi l'intensité du champ magnétique, la densité des distortions, l'état d'endommagement du matériau ou tout autre paramètre qui peut influencer sur les propriétés mécaniques du matériau.

Du point de vue mathématique et par souci de généraliser nous considérons θ une fonction à valeurs vectorielles, c'est-à-dire $\theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$ où $M \in \mathbb{N}$.

Il est clair que la loi de comportement linéaire (1.21) est de la forme $\sigma = F(\varepsilon, \theta)$ si le tenseur d'élasticité \mathcal{E} dépend du paramètre θ . Il en est de même pour la loi de comportement linéaire par morceaux (1.32) si \mathcal{E} , β et K dépendent de θ . Par conséquent les résultats que nous allons obtenir dans ces deux chapitres s'appliquent au moins pour ces deux exemples.

La présence de la température dans les lois de comportement en tant que paramètre est une hypothèse simplificatrice, utilisée par plusieurs auteurs : Sofonea [1], Ionescu et Sofonea [2] p92-93 et la liste peut continuer. Certains auteurs (Cristescu et Suliciu [1] p84) mettent en évidence la dépendance de certains coefficients dans la loi de

comportement par rapport à la température. Cette dépendance est évoquée aussi dans Duvaut et Lions [1] p11.

La considération des lois de comportement élastique (1.42) (matériau à blocage) et (1.43) (loi de Hencky) soulève des difficultés supplémentaires, vu le fait que ces lois ne sont pas univoques. L'étude des problèmes aux limites liés à ces lois de comportement ne fera pas l'objet de cette présentation. Pour plus de détails sur ce sujet voir par exemple Panagiotopoulos [1], Sofonea [3] et Burguera [1].

1.2.4 Lois de comportement viscoplastique

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que pour certains matériaux élastiques la loi de comportement est de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon) \tag{1.44}$$

où F est une application linéaire ou non-linéaire. Cette loi peut modéliser les propriétés de chargement monotone: linéarité ou non-linéarité de la courbe $\sigma = F(\varepsilon)$ (suivant que F est linéaire ou non), durcissement ou adoucissement de la courbe $\sigma = F(\varepsilon)$ (suivant que F est monotone ou non). Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi de comportement (1.44) comme le montre les considérations ci-dessous.

Soit à $t = 0, \sigma(0) = \sigma_0, \varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et soit également $\varepsilon(t) = \varepsilon_0, \forall t > 0$. Alors la loi (1.44) entraîne que $\sigma(t) = F(\varepsilon) = F(\varepsilon_0) = \sigma_0$; par conséquent, le phénomène de relaxation n'est pas décrit par cette loi. D'où la nécessité d'introduire d'autres lois

de comportement; par exemple les lois de comportement viscoplastique de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon). \quad (1.45)$$

où $\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$, $\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ et \mathcal{E} est un tenseur d'ordre quatre et G est une fonction constitutive donnée. On peut aussi prendre en considération les lois de comportement de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}(\dot{\varepsilon}) + G(\sigma, \varepsilon). \quad (1.46)$$

où \mathcal{E} est une fonction non-linéaire.

Dans certaines situations, on peut prendre en considération la dépendance des fonctions \mathcal{E} et G d'un paramètre k (la température ou une variable d'état); on peut donc considérer au lieu de (1.45), le cas suivant.

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}(k)\varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon, k). \quad (1.47)$$

où k est un paramètre de \mathbb{R}^M ($M \in \mathbb{N}$).

Si k est une variable interne d'état, on complète (1.47) par une équation d'évolution de la forme

$$\dot{k} = \varphi(\sigma, \varepsilon, k). \quad (1.48)$$

On suppose toujours que \mathcal{E} est un tenseur inversible donc $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$ jouent des rôles symétriques dans l'équation (1.45); plus précisément (1.45) équivaut à

$$\dot{\varepsilon} = \tilde{\mathcal{E}}\dot{\sigma} + \tilde{G}(\sigma, \varepsilon) \quad (1.49)$$

où $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{-1}$ est l'inverse de \mathcal{E} et $\tilde{G} = -\mathcal{E}^{-1}G(\sigma, \varepsilon)$.

L'équation mathématique (1.49) met en évidence une décomposition additive du tenseur $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^E + \dot{\varepsilon}^{AN} \quad (1.50)$$

où

$$\dot{\varepsilon}^E = \tilde{\mathcal{E}}\dot{\sigma}, \quad \dot{\varepsilon}^{AN} = \tilde{G}(\sigma, \varepsilon). \quad (1.51)$$

La partie $\dot{\varepsilon}^E$ s'appelle la partie *élastique* (reversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$ tandis que $\dot{\varepsilon}^{AN}$ la partie *anelastique* (irréversible) du tenseur $\dot{\varepsilon}$.

Dans le cas où la fonction G est de la forme

$$G(\sigma, \varepsilon) = -k(\sigma - F(\varepsilon)) \quad (1.52)$$

où $k > 0$ est le coefficient de viscosité et F une fonction constitutive, alors la loi de comportement (1.45) est dite *viscoélastique*.

Supposons maintenant que $G \equiv 0$ et à l'instant $t = 0$ on a: $\sigma(0) = \varepsilon(0) = 0$: alors la relation (1.45) devient après intégration $\sigma = \mathcal{E}\varepsilon$, donc la loi constitutive de l'élasticité linéaire présentée dans le paragraphe précédent. De ce point de vue, la loi viscoplastique (1.45) se présente comme une "perturbation" de la loi élastique (1.21), perturbation réalisée par le terme non-linéaire $G(\sigma, \varepsilon)$.

Nous présentons maintenant quelques exemples de lois viscoplastiques de la forme (1.45), dans le cas unidimensionnel, c'est-à-dire

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon). \quad (1.53)$$

où E est le module de Young et $\sigma, \varepsilon : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Exemple 1 (modèle de Maxwell).

Si on prend $G(\sigma, \varepsilon) = -\sigma$, dans (1.53) alors on obtient :

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - \sigma. \quad (1.54)$$

C'est un modèle viscoélastique ($k = 1$ et $F = 0$ dans (1.52)). Il est capable de décrire des phénomènes de fluage et de relaxation. En effet; si on prend $\sigma(t) = \sigma_0, \forall t \geq 0$ dans (1.54) on obtient:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{E}$$

donc $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}t + \varepsilon_0$ où $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$. C'est-à-dire on a l'accroissement en temps de la déformation (fluage). Egalement si on prend $\varepsilon(t) = \varepsilon_0, \forall t \geq 0$ dans (1.54) on obtient

:

$$\dot{\sigma} = -\sigma$$

d'où $\sigma(t) = \sigma_0 \exp^{-t}$ où $\sigma_0 = \sigma(0)$. On obtient la décroissance en temps de la contrainte (relaxation). Les deux expériences décrites ci-dessous sont présentées en figure 3.5. Suite à la terminologie au paragraphe 1.2.1 le milieu continu décrit par l'équation de Maxwell (1.54) est du type fluide (les déformations ne sont pas limitées dans le fluage, la relaxation de la contrainte est totale).

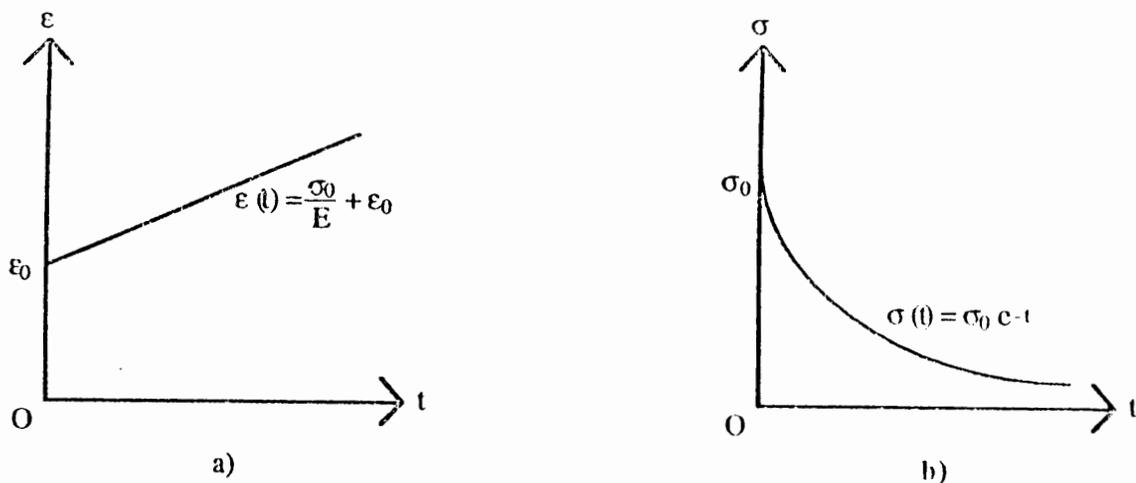


Fig. 3.5. Modèle de Maxwell .
a) fluage b) relaxation

Exemple 2 (modèle de Sokolowski).

On prend dans (1.53) :

$$G(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma| \leq \sigma_y \\ -(\operatorname{sgn} \sigma) F(|\sigma| - \sigma_y) & \text{si } |\sigma| > \sigma_y \end{cases} \quad (1.55)$$

où σ_y est une constante strictement positive appelée seuil de plasticité, $\operatorname{sgn} \sigma$ est le signe de σ ($\operatorname{sgn} \sigma = 1$ si $\sigma > 0$ et $\operatorname{sgn} \sigma = -1$ si $\sigma < 0$) et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière satisfaisant à $F(0) = 0$, $F(r) > 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}_+$. D'habitude on considère $F(r) = kEr$ où $k > 0$ est un coefficient de viscosité et $E > 0$ est le module de Young. Le modèle de Sokolowski peut décrire des phénomènes de fluage, de relaxation et également d'anélasticité comme on peut voir dans ce qui suit:

(i) Si à l'instant $t = 0$ on a $\sigma(0) = \sigma_0 > \sigma_y$, $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$ et $\sigma(t) = \sigma_0$ pour tout $t > 0$ alors (1.53) (où G est donnée par (1.55)) implique

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{G(\sigma_0, \varepsilon(t))}{E} = \frac{1}{E} F(\sigma_0 - \sigma_y)$$

donc $\varepsilon(t) = \frac{1}{E} F(\sigma_0 - \sigma_y)t + \varepsilon_0, \forall t \geq 0$.

On obtient un accroissement en temps de la déformation (fluage). Les déformations ne sont pas limitées en temps (voir fig.3.6.a).

(ii) Si à l'instant $t = 0$ on a

$$\sigma(t) = \sigma_0 > \sigma_y, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \text{ et } \dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 \quad \forall t > 0.$$

alors (1.53) (où G est donnée par (1.55)) implique

$$\dot{\sigma}(t) = G(\sigma(t), \varepsilon_0) = -F(\sigma(t) - \sigma_y) < 0,$$

donc σ est décroissante en temps (relaxation); on obtient facilement que $\sigma(t) > \sigma_y$.

pour tout $t > 0$. Donc la relaxation n'est pas totale (voir fig.3.6.b).

(iii) Dans le domaine $|\sigma| \leq \sigma_y$ la loi de comportement (1.53) (où G est donnée par (1.55)) est élastique ($\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$).

Par conséquent la courbe $\sigma = F(\varepsilon)$, pour un essai de charge-décharge dans lequel σ dépasse la valeur σ_y et qui commence à l'état $\sigma(0) = \varepsilon(0) = 0$ a la forme de la figure 3.6.c, qui met en évidence la déformation résiduelle ε^R (anélastique).

On remarque également que le modèle de Sokolowski décrit une plasticité parfaite car les déformations anélastiques ne se manifestent que lorsque la contrainte σ atteint le seuil fixe σ_y (ou $-\sigma_y$, lorsqu'il s'agit d'une compression).

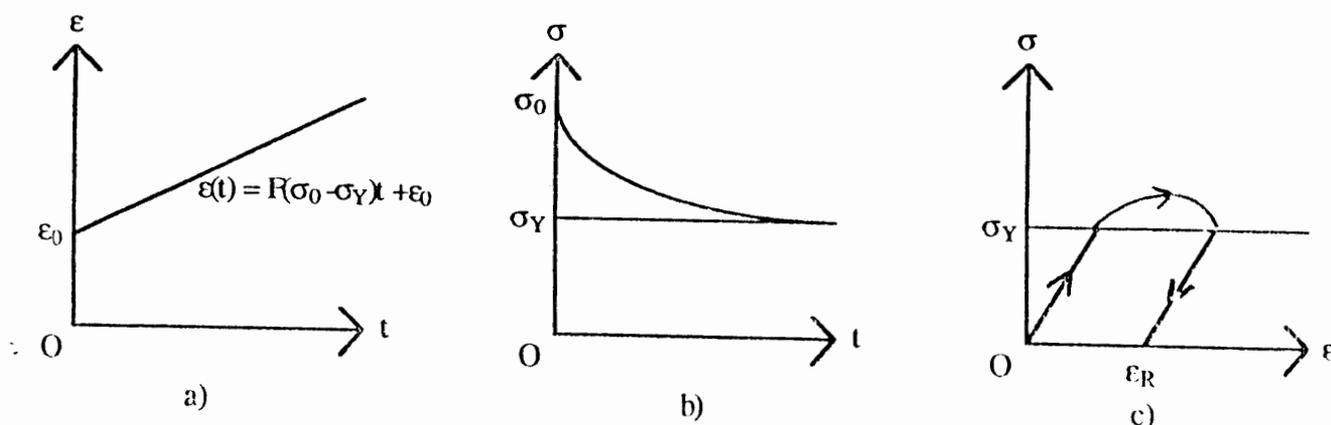


Fig. 3.6. *Modèle de Sokolowski.*

a) *fluage* b) *relaxation* c) *anélasticité*

Remarquons enfin que les notions "type fluide" et "type solide" ne sont pas d'intersection vide comme le montre l'exemple de Sokolowski ci-dessus: le modèle est de type solide puisque dans un essai de relaxation il n'y a pas relaxation totale des contraintes et il est également du type fluide puisque dans un essai de fluage les déformations ne sont pas bornées.

Exemple 3 (voir Cristescu et Suliciu [1], p 34).

On prend dans (1.53):

$$G(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} -k_1 F_1(\sigma - f(\varepsilon)) & \text{si } \sigma > f(\varepsilon) \\ 0 & \text{si } g(\varepsilon) \leq \sigma \leq f(\varepsilon) \\ k_2 F_2(g(\varepsilon) - \sigma) & \text{si } \sigma < g(\varepsilon) \end{cases} \quad (1.56)$$

où k_1, k_2 sont des coefficients de viscosité, $F_1, F_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières satisfaisant à

$F_1(r), F_2(r) > 0$, $F_1'(r), F_2'(r) > 0 \quad \forall r > 0$ et $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions régulières telles que

$f(\varepsilon) > g(\varepsilon)$, $f(0) > 0 > g(0)$ et $f'(\varepsilon) \leq 0$, $E > g'(\varepsilon) \geq 0$ et $f''(\varepsilon) \leq 0$, $g''(\varepsilon) \geq 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$. (voir fig.3.7).

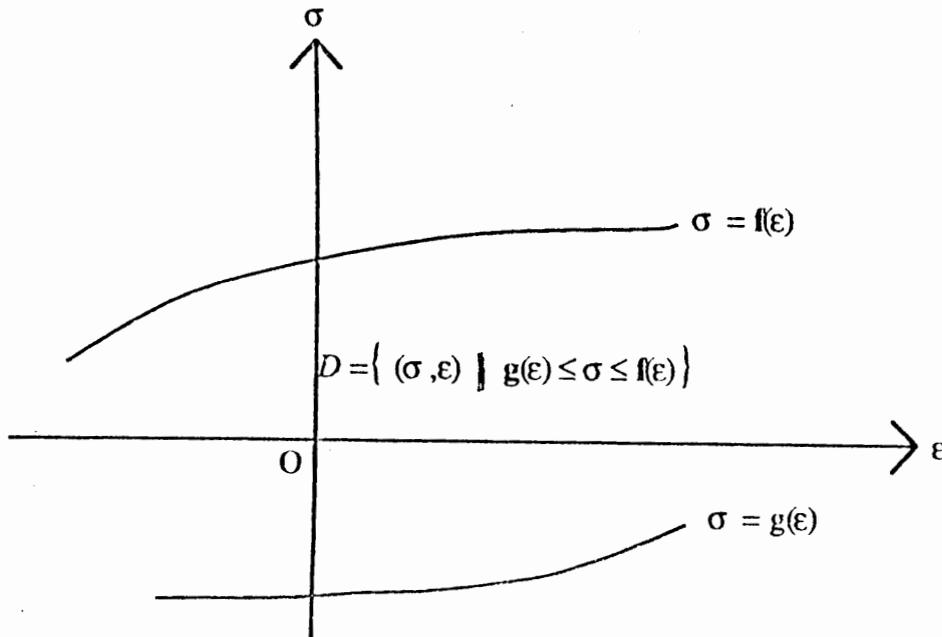


Fig. 3.7. Modèle de l'exemple 3. $D =$ ensemble des états élastiques.

En utilisant la même méthode que dans l'exemple 1 on peut voir que le modèle (1.53) (où G est donnée par (1.56)) peut aussi décrire les phénomènes de fluage, de

relaxation et d'anélasticité.

Les états $(\sigma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(\varepsilon) < \sigma < f(\varepsilon)$ sont des états de comportement élastique c'est-à-dire des états autour desquels la loi de comportement (1.53) (où G est donnée par (1.56)) prend la forme $\sigma = E\varepsilon + c$ où c est une constante. Par contre les états $(\sigma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\sigma > f(\varepsilon)$ ou $g(\varepsilon) > \sigma$ sont des états de comportement plastique, car tout processus de charge-décharge passant par ces points amène des déformations résiduelles (plastiques).

Remarquons aussi que le seuil en contrainte pour lequel l'anélasticité du matériau se manifeste est variable ($\sigma = f(\varepsilon)$ ou $\sigma = g(\varepsilon)$), donc il s'agit d'un modèle de plasticité avec *écrouissage*.

Enfin signalons aussi le fait que l'exemple 3 généralise aussi l'exemple 2 : pour $k_1 = k_2$, $F_1 = F_2 = F$, $f(\varepsilon) = \sigma_y$, $g(\varepsilon) = -\sigma_y \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ la relation (1.56) se réduit à (1.55).

Exemple 4 (viscoplasticité de type Perzyna (voir aussi Duvaut-Lions [1] p 233)).

On prend dans (1.49) :

$$\tilde{G}(\sigma, \varepsilon) = \tilde{G}(\sigma) = \frac{1}{2\mu} (\sigma - P_K \sigma)$$

où $\mu > 0$ est un coefficient de viscosité, K est un convexe fermé tel que $0_3 \in K$ et $P_K : S_3 \rightarrow K$ est l'opérateur de projection sur K . En utilisant (1.51) on obtient

$$\dot{\varepsilon}^{AN} = \frac{1}{2\mu} (\sigma - P_K \sigma). \quad (1.57)$$

et comme $\sigma = P_K \sigma$ si et seulement si $\sigma \in P_K$, il résulte que les déformations anélastiques ne se manifestent que pour les états de contraintes qui n'appartiennent pas au convexe K . Ce convexe est d'habitude défini par l'égalité

$$K = \{\sigma \in S_3 / F(\sigma) \leq 0\} \quad (1.58)$$

où $F : S_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, continue, telle que $F(0_3) < 0$. L'équation $F(\sigma) = 0$ définit le critère de plasticité car d'après (1.57) et (1.58) la surface définie dans l'espace des contraintes par cette équation sépare la région de comportement élastique de la région de comportement plastique ($\dot{\varepsilon}^{AN} = 0 \iff F(\sigma) = 0$).

Des exemples classiques des critères de plasticité peuvent être obtenus en prenant :

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^D \sigma^D - k^2, \quad (1.59)$$

$$F(\sigma) = \max_{i,j=1,2,3} \{\sigma_i - \sigma_j\} - k^2, \quad (1.60)$$

$$F(\sigma) = \max \{|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|, |2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3|, |2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|\} - k^2. \quad (1.61)$$

où

$\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3} (\text{tr} \sigma) I_3$ est le déviateur de σ ,

σ_i sont les valeurs propres de σ ,

k est une constante strictement positive (limite de plasticité).

Remarque 1.2. Dans le quatrième chapitre de cette thèse nous nous intéressons aux matériaux viscoplastiques, ayant une loi de comportement de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E} \dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon, \theta)$$

où \mathcal{E} et G sont des fonctions constitutives données et θ est un paramètre donné qui peut être la température, l'humidité, la densité des distortions, l'état d'endommagement du matériau ou tout autre paramètre qui peut influencer sur les propriétés mécaniques du matériau.

1.3 Conditions aux limites

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un milieu continu, donné par l'équation de mouvement (1.7) (ou bien par l'équation d'équilibre (1.8)) et la loi de comportement, il faut encore préciser les conditions aux limites. Les principaux types de conditions aux limites étudiées dans cette thèse sont les conditions aux limites de déplacement-traction, les conditions aux limites de contact sans frottement et les conditions aux limites de contact avec frottement.

1.3.1 Conditions aux limites de déplacement-traction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) le domaine régulier occupé par le corps, Γ la frontière de Ω et ν le vecteur normale unitaire extérieur à Γ . Soit également $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$.

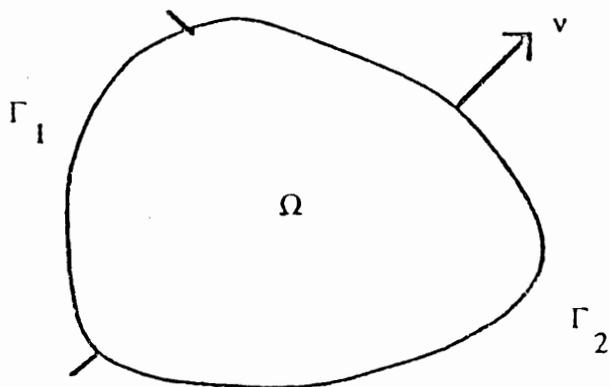


Fig. 2.1. Partition de la frontière Γ

Nous considérons les conditions aux limites suivantes.

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.62)$$

$$\sigma\nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (1.63)$$

La condition (1.62) est appelée condition aux limites de déplacement; sa signification consiste en ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de sa frontière Γ , la fonction g étant une donnée du problème (par exemple, si $g = 0$ le solide est encastré sur la portion Γ_1 de sa frontière Γ). La condition (1.63) est appelée condition aux limites de traction; sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière Γ et h représente la densité des forces appliquées de surface et constituent une donnée du problème.

Si $\Gamma_1 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de traction pure et si $\Gamma_2 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de déplacement pur. Si les parties Γ_1 et Γ_2 de la frontière Γ sont toutes les deux de mesure de Lebesgue $(N - 1)$ dimensionnelle strictement positive, le problème considéré est un problème mixte déplacement-traction.

Le problème de déplacement pur ne correspond pas à une situation très courante puisque, lorsque le déplacement est imposé sur la totalité de la frontière, le solide étudié est entièrement encastré dans une structure plus grande. Les problèmes de traction pure correspondent à des situations réelles (considérer par exemple un ballon, ou un sous-marin plongé dans la mer). Les problèmes mixtes déplacement-traction

sont rencontrés plus fréquemment dans les applications pratiques bien qu'ils soient loin de couvrir toutes les situations réelles.

1.3.2 Conditions aux limites de contact sans frottement

Considérons maintenant un autre type de conditions aux limites.

Supposons que la frontière Γ de Ω soit partagée en trois morceaux disjoints deux à deux :

$$\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3}$$

Sur les portions Γ_1 et Γ_2 nous imposons les conditions aux limites de déplacement-traction (1.62)-(1.63) c'est-à-dire le champ des déplacements u est connu sur Γ_1 et le vecteur de contrainte de Cauchy $\sigma\nu$ est connu sur Γ_2 . Pour simplifier nous prenons $g = 0$ dans (1.62) c'est-à-dire la frontière Γ_1 est fixée. Nous supposons que le corps élastique Ω est en contact avec une base rigide S sur la partie Γ_3 de sa frontière. Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de Γ_3 est restreint par la présence de cet obstacle.

Soit $u_\nu = u \cdot \nu$ la composante du déplacement u dans la direction de ν . Nous supposons que le contact entre le corps élastique Ω et la base rigide S se produit sans frottement c'est-à-dire que les mouvements tangentiels sont libres.

Puisque S est une base rigide, elle ne subira pas de déformations, donc le corps Ω ne pourra pas la pénétrer; cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité suivante.

$$u_\nu = u \cdot \nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.64)$$

Pour les points de Γ_3 tels que $u_\nu < 0$, il n'existe pas de contact entre le corps Ω et la base rigide S , donc le vecteur de contrainte de Cauchy $\sigma\nu$ s'annule. Par conséquent en dénotant par σ_ν et σ_τ les composantes normales et tangentielles de ce vecteur on a :

$$u_\nu < 0 \implies \sigma_\nu = 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.65)$$

Pour les points de Γ_3 tels que $u_\nu = 0$, le contact entre Ω et S se produit, la base rigide S exerce une pression $-\sigma_\nu$ suivant la direction de la normale ν et orientée vers Ω ; on a :

$$u_\nu = 0 \implies \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.66)$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.64)-(1.66) s'écrivent d'une manière condensée de la façon suivante.

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.67)$$

Les problèmes élastiques comprenant des conditions aux limites de la forme (1.67) sont appelés problèmes de Signorini.

1.3.3 Conditions aux limites de contact avec frottement

Nous considérons un corps élastique dont les particules matérielles remplissent un domaine Ω borné de \mathbb{R}^N ($N=1,2,3$) et dont la frontière Γ , supposée être régulière est divisée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 . Nous supposons que le champ des déplacements u s'annule sur Γ_1 , que des tractions données h agissent sur Γ_2 et que sur Γ_3 le solide est en contact bilatéral avec une fondation rigide S et que le contact a lieu avec frottement.

Nous modelisons le frottement avec la variante statique de la loi de Tresca. Sous ces hypothèses les conditions aux limites s'écrivent de la manière suivante.

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.68)$$

$$\sigma\nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.69)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu = 0, \quad |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right\} \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.70)$$

Dans (1.70), u_ν dénote le déplacement normal, u_τ le déplacement tangentiel, σ_τ représente la force de frottement tandis que g est le seuil de glissement.

La condition $u_\nu = 0$ traduit le fait que le contact est bilatéral et donc le corps ne décolle pas de la fondation.

L'inégalité $|\sigma_\tau| \leq g$ montre que la force de frottement σ_τ est bornée par une valeur

g fixe. Quand on a l'inégalité stricte $|\sigma_\tau| < g$ le glissement n'est pas possible et par conséquent les déplacements tangentiels sont nulles. Dans ces points le corps adhère à la fondation. Lorsque $|\sigma_\tau| = g$ le glissement est possible. Dans ces points le corps peut glisser sur la fondation et la force de frottement s'oppose au glissement.

La loi de frottement présentée dans (1.70) est une loi statique. Bien que limitée du point de vue physique, cette loi constitue une première approximation pour d'autres lois plus réalistes, où on remplace le déplacement tangentiel par la vitesse tangentielle. Sous la forme (1.70) la loi de Tresca a été considérée dans plusieurs publications, voir par exemple Duvaut et Lions [1], Panagiotopoulos [1], Han [1].

Nous remarquons aussi bien que la loi (1.70) est caractérisée par un seuil de glissement fixe. D'autres lois de frottement, plus réalistes, prennent en considération un seuil de frottement variable. C'est le cas de la loi de Coulomb, considérée par exemple en Cocu [1], Rochdi, Shillor et Sofonea [1], Drabla et Sofonea [1].

1.4 Formulation des problèmes

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine Ω de \mathbb{R}^N ($N=1,2,3$). Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

On se donne un corps élastique ou viscoplastique occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N=1,2,3$) et dont la frontière Γ , supposée suffisamment régulière, est divisée en trois

parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mesure } \Gamma_1 > 0$.

Dans cette thèse on va étudier les trois problèmes aux limites suivants.

1.4.1 Problème élastique de contact sans frottement

Ce problème peut se formuler de la façon suivante.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes

$\sigma : \Omega \longrightarrow S_N$ tels que

$$(P_i) \left\{ \begin{array}{l} \sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \\ \text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \end{array} \right.$$

où $F : \Omega \times S_N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow S_N$ est une fonction constitutive et $\theta \in \mathbb{R}^M$ est un paramètre qui peut-être la température ou l'humidité. Ce problème décrit l'équilibre d'un corps élastique soumis à des conditions de déplacement-traction sur les parties Γ_1 et Γ_2 de sa frontière Γ , à des conditions de contact unilatéral sans frottement (conditions de Signorini) avec une base rigide sur la partie Γ_3 de sa frontière Γ et à des forces volumiques de densité f dans Ω .

L'étude de ce problème fera l'objet du chapitre 2 de cette thèse.

1.4.2 Problème élastique de contact avec frottement

Ce problème peut se formuler de la façon suivante.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes

$\sigma : \Omega \longrightarrow S_N$ tels que

$$(P_{ii}) \left\{ \begin{array}{l} \sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \\ \text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \\ \left. \begin{array}{l} u_\nu = 0, \quad |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \implies u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Ce problème décrit l'équilibre d'un corps élastique soumis à des conditions de déplacement-traction sur Γ_1 et Γ_2 , à des forces de frottement sur Γ_3 et à des forces volumiques de densité f dans Ω . La loi de frottement retenue dans ce problème est la loi de Tresca en sa version statique.

L'étude de ce problème fera l'objet du chapitre 3 de cette thèse.

1.4.3 Problème viscoplastique de contact sans frottement

Ce problème se formule de la manière suivante.

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes

$\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow S_N$ tels que

$$(P_{iii}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}) + G(\sigma, \varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \text{Div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\\ \sigma\nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[\\ u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\\ u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

où \mathcal{E} est un tenseur d'ordre quatre, G est une fonction constitutive et θ est un paramètre qui peut être la température ou l'humidité. Ce problème modélise l'équilibre d'un corps ayant une loi de comportement viscoplastique, soumis à des conditions de déplacement-traction sur les parties Γ_1 et Γ_2 de la frontière Γ et à des conditions de contact unilatéral sans frottement avec une base rigide S , sur la partie Γ_3 de la frontière Γ .

L'étude de ce problème fera l'objet du chapitre 4 de cette thèse.

Chapter 2

PROBLEME ELASTIQUE DE CONTACT SANS FROTTEMENT

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une fondation rigide. Ce problème connu sous le nom de "problème de Signorini", a été étudié dans Fichera [1], [2], Burguera [1], Burgura et Viaño [1], Haslinger et Hlavaček [1], [2], Hlavaček et Nečas [1] pour les matériaux ayant une loi de comportement élastique et dans Sofonea [1], [4], Rochdi [1], pour les matériaux viscoplastiques.

Notre but ici est l'étude statique de ce même problème pour des matériaux élastiques ayant une loi de comportement de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

où θ est un paramètre (la température ou l'humidité).

La première section de ce chapitre est consacrée aux formulations variationnelles et

aux résultats d'existence et d'unicité. Dans cette section, on donne après avoir posé notre problème, deux formulations variationnelles et on y établit ensuite un résultat d'existence et d'unicité pour chacune de ces deux formulations variationnelles.

La seconde section est destinée à l'étude de quelques propriétés de la solution. On commence par y donner un résultat d'équivalence entre ces deux formulations variationnelles, on y démontre ensuite un résultat de dépendance de la solution par rapport au paramètre θ . Finalement, on s'intéresse à l'étude du problème mécanique de départ en introduisant une pénalisation portant sur les conditions aux limites de contact.

Les résultats présentés dans ce chapitre constituent une forme améliorée des résultats obtenus dans Drabla, Sofonea et Teniou [1].

2.1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie, on va formuler le problème statique de contact sans frottement d'un corps déformable avec une base rigide, pour lequel on établira deux formulations variationnelles, ainsi que deux résultats d'existence et d'unicité.

2.1.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses

On considère un corps élastique dont les particules matérielles occupent un domaine Ω de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$) et dont la frontière Γ , supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mesure } \Gamma_1 > 0$. On suppose que le champ des déplacements u s'annule sur Γ_1 , que des tractions superficielles h s'exercent sur Γ_2 et que des forces volumiques f agissent sur Ω . On suppose que le

corps Ω repose sur une fondation rigide, par la partie Γ_3 de sa frontière Γ et que ce contact s'effectue sans frottement c'est-à-dire que les mouvements tangentiels sont complètement libres. Sous ces conditions, le problème mécanique qu'on va étudier peut se formuler de la façon suivante.

Problème P. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \longrightarrow S_N$ tels que

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$\text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.3)$$

$$\sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (2.4)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.5)$$

Dans l'étude du problème mécanique (P), on fait les hypothèses suivantes.

$$\left\{ \begin{array}{l}
F : \Omega \times S_N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow S_N \text{ est une application telle que} \\
\text{(a) } \exists m > 0 \text{ tel que } (F(x, \varepsilon_1, \theta) - F(x, \varepsilon_2, \theta)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\
\text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^M \\
\text{(b) } \exists L_1, L_2 > 0 \text{ telles que } |F(x, \varepsilon_1, \theta_1) - F(x, \varepsilon_2, \theta_2)| \leq L_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + L_2 |\theta_1 - \theta_2| \\
\text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^M \\
\text{(c) La fonction } x \longrightarrow F(x, \varepsilon, \theta) \text{ est mesurable Lebesgue} \\
\text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in S_N \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^M \\
\text{(d) } F(x, 0_N, 0_M) = 0_N .
\end{array} \right. \tag{2.6}$$

$$f \in H, \quad h \in L^2(\Gamma_2)^N \tag{2.7}$$

$$\theta \in L^2(\Omega)^M . \tag{2.8}$$

Remarque 2.1. Les hypothèses (2.6)–(2.8), nous permettent de considérer l'opérateur

$\tilde{F} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ défini par :

$$\tilde{F}(\varepsilon, \theta)(x) = F(x, \varepsilon(x), \theta(x)) \quad \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{H}$$

Par simplicité on note dans la suite cet opérateur par F . On a :

$$\langle F(\varepsilon_1, \theta) - F(\varepsilon_2, \theta), \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \rangle_{\mathcal{H}} \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}}^2 . \tag{2.9}$$

$$|F(\varepsilon_1, \theta_1) - F(\varepsilon_2, \theta_2)|_{\mathcal{H}} \leq L_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}} + L_2 |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M} . \tag{2.10}$$

Il résulte donc que $F(., \theta)$ est inversible et son inverse $F^{-1}(., \theta) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

On définit maintenant le sous-espace V de H_1 par :

$$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (2.11)$$

et on le munit du produit scalaire suivant

$$\langle u, v \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.12)$$

On note aussi $|\cdot|_V$ la norme associée à ce produit scalaire.

Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier que les normes $|\cdot|_V$ et $|\cdot|_{H_1}$ sont équivalentes sur V . On déduit alors que V muni du produit scalaire défini par (2.12) est un espace de Hilbert.

La fonctionnelle $v \mapsto \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur V : il résulte grâce au théorème de représentation de Riesz-Fréchet l'existence d'un élément $q \in V$ tel que :

$$\langle q, v \rangle_V = \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V. \quad (2.13)$$

En outre, on définit respectivement l'ensemble des "déplacements admissibles" et l'ensemble des "contraintes admissibles" suivant.

$$U_{ad} = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (2.14)$$

$$\Sigma_{ad} = \{ \tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \}. \quad (2.15)$$

2.1.2 Formulations variationnelles

Dans cette partie, on va donner deux formulations variationnelles du problème mécanique (P). Dans la première formulation l'inconnue principale est le champ des déplacements u , alors que dans la seconde formulation, l'inconnue principale est le champ des contraintes σ . Le résultat conduisant à ces deux formulations est le suivant.

Lemme 1 *Sous les hypothèses (2.6)–(2.8) si (u, σ) est un couple de solution régulière du problème mécanique (P), alors on a*

$$u \in U_{ad}, \quad \langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.16)$$

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle \varepsilon(u), \tau - \sigma \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (2.17)$$

Démonstration. Soit $v \in U_{ad}$. En utilisant le théorème A.2.5 et (2.2) on obtient

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \bar{\gamma}\sigma, \gamma(v - u) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} - \langle \text{Div}\sigma, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H_1$$

$$= \int_{\Gamma} \sigma \nu (v - u) ds + \langle f, v - u \rangle_H$$

$$= \int_{\Gamma_1} \sigma \nu (v - u) ds + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu (v - u) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu (v - u) ds + \langle f, v - u \rangle_H.$$

Puisque : $\sigma \nu (v - u) = \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau (v_\tau - u_\tau)$ on a :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Gamma_2} \sigma \nu (v - u) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu - u_\nu) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (v_\tau - u_\tau) ds$$

$$+ \langle f, v - u \rangle_H.$$

en utilisant (2.3) – (2.5) et (2.13) on obtient :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu ds + \int_{\Gamma_2} h (v - u) ds + \langle f, v - u \rangle_H =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu v_\nu ds + \langle h, \gamma(v-u) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} + \langle f, v-u \rangle_H \geq \\
&\langle h, \gamma(v-u) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} + \langle f, v-u \rangle_H = \langle q, v-u \rangle_V.
\end{aligned}$$

d'où

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v-u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.18)$$

De (2.3) et (2.5) on déduit :

$$u \in U_{ad}. \quad (2.19)$$

L'inégalité (2.16) résulte maintenant de (2.18) et (2.19).

En prenant $v = 2u \in U_{ad}$, puis $v = 0 \in U_{ad}$ dans (2.16) on obtient :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle q, u \rangle_V \quad (2.20)$$

Soit $\tau \in \Sigma_{ad}$. Par définition on a :

$$\langle \tau, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, u \rangle_V \quad (2.21)$$

De (2.20) et (2.21) il résulte :

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (2.22)$$

Pour l'appartenance de σ à Σ_{ad} on a :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle q, u \rangle_V \quad (\text{d'après (2.20)}) \text{ et}$$

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v-u \rangle_V \quad (\text{d'après (2.16)}).$$

Par addition on obtient :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \text{ C'est-à-dire}$$

$$\sigma \in \Sigma_{ad}. \quad (2.23)$$

L'inégalité (2.17) résulte maintenant de (2.22) et (2.23).

Compte tenu de (2.1) le lemme précédent nous permet donc de donner les deux formulations variationnelles suivantes pour le problème mécanique (P).

Problème P_1 . Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow H_1$ tel que

$$u \in U_{ad}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.24)$$

Problème P_2 . Trouver le champ des contraintes $\sigma : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}_1$ tel que

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (2.25)$$

2.1.3 Premier résultat d'existence et d'unicité

Pour l'étude du problème variationnel (P_1) nous avons le résultat suivant.

Théorème 1 *Soit mesure $\Gamma_1 > 0$. Sous les hypothèses (2.6) – (2.8) le problème variationnel (P_1), admet une solution unique $u \in H_1$.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est basée sur le théorème

A.1.10. Comme $0 \in U_{ad}$, alors $U_{ad} \neq \emptyset$, donc on a :

$$U_{ad} \text{ est un ensemble convexe fermé et non-vide de } H_1. \quad (2.26)$$

Pour tout w fixé dans V et pour tout θ fixé dans $L^2(\Omega)^M$, la fonctionnelle définie sur V par :

$$v \mapsto \langle F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$$

est une fonctionnelle linéaire et continue sur V .

Donc d'après le théorème de Riesz-Fréchet il existe un élément $A_\theta w \in V$ tel que

$$\langle A_\theta w, v \rangle_V = \langle F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V.$$

En utilisant l'hypothèse (2.9), et l'inégalité de Korn on obtient :

$$\begin{aligned} \langle A_\theta w_1 - A_\theta w_2, w_1 - w_2 \rangle_V &= \langle F(\varepsilon(w_1), \theta) - F(\varepsilon(w_2), \theta), \varepsilon(w_1) - \varepsilon(w_2) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \\ m |\varepsilon(w_1) - \varepsilon(w_2)|_{\mathcal{H}}^2 &\geq mc^2 |w_1 - w_2|_V^2 \geq mc^2 |w_1 - w_2|_V^2. \end{aligned}$$

d'où

$$\langle A_\theta w_1 - A_\theta w_2, w_1 - w_2 \rangle_V \geq c |w_1 - w_2|_V^2 \quad \forall w_1, w_2 \in V. \quad (2.27)$$

D'autre part en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et (2.10) on obtient :

$$\begin{aligned} |A_\theta w_1(v) - A_\theta w_2(v)| &= |\langle F(\varepsilon(w_1), \theta) - F(\varepsilon(w_2), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \\ |F(\varepsilon(w_1), \theta) - F(\varepsilon(w_2), \theta)|_{\mathcal{H}} \cdot |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} &\leq L_1 |w_1 - w_2|_{H_1} \cdot |v|_{H_1} \leq \\ cL_1 |w_1 - w_2|_V \cdot |v|_V &= L |w_1 - w_2|_V \cdot |v|_V. \end{aligned}$$

d'où

$$|A_\theta w_1 - A_\theta w_2|_V \leq L |w_1 - w_2|_V \quad \forall w_1, w_2 \in V. \quad (2.28)$$

Les relations (2.26), (2.27), (2.28) et le théorème A.1.10 entraînent l'existence d'un élément unique u tel que

$$u \in U_{ad}, \quad \langle A_\theta u, v - u \rangle_V \geq \langle q, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}.$$

c'est-à-dire

$$u \in U_{ad}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}.$$

D'où le théorème 1.

2.1.4 Second résultat d'existence et d'unicité

Pour l'étude du problème variationnel (P_2) nous avons le résultat suivant.

Théorème 2 *Soit mesure $\Gamma_1 > 0$. Sous les hypothèses (2.6) – (2.8), le problème variationnel (P_2) admet une solution unique $\sigma \in \mathcal{H}_1$.*

Démonstration. (i) Σ_{ad} est un convexe fermé non-vide de \mathcal{H} .

En effet, les relations (2.12) et (2.13) entraînent l'existence d'au moins un élément $\varepsilon(q) \in \Sigma_{ad}$. Donc $\Sigma_{ad} \neq \emptyset$.

(ii) Pour θ fixé, l'opérateur $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est fortement monotone et de Lipschitz donc l'opérateur $F^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ l'est aussi. Alors le théorème A.1.10 entraîne l'existence d'un élément unique $\sigma \in \mathcal{H}_1$ tel que

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

Ce qui prouve le théorème 2.

2.2 Propriétés de la solution

2.2.1 Un résultat d'équivalence

Dans cette section on étudie le lien entre la solution u du problème (P_1) et la solution σ du problème (P_2) . Le principal résultat obtenu ici est le suivant.

Théorème 3 *Sous les hypothèses (2.6) – (2.8) soit (u, σ) un couple de fonctions telles que $u \in V$ et $\sigma \in \mathcal{H}_1$.*

On considère les affirmations suivantes :

(i) u est la solution du problème (P_1) donnée par le théorème 1.

(ii) σ est la solution du problème (P_2) donnée par le théorème 2.

(iii) σ et u sont liées par la loi de comportement élastique

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \in \mathcal{H}.$$

Alors, la vérification de deux parmi les trois assertions ci-dessus entraîne la troisième.

Démonstration. (i) \wedge (iii) \implies (ii)

Soient u solution du problème (P_1) et σ telles que

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

D'après le problème (P_1) on a :

$$u \in U_{ad}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

Il vient :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.29)$$

En posant: $v = 2u$ puis $v = 0 \in U_{ad}$ dans (2.29), on aura :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle q, u \rangle_V \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (2.30)$$

Les relations (2.29) – (2.30) impliquent

$$\sigma \in \Sigma_{ad} \quad (2.31)$$

Soit $\tau \in \Sigma_{ad}$. On a :

$$\begin{aligned} & \prec F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \succ_{\mathcal{H}} = \prec \varepsilon(u), \tau - \sigma \succ_{\mathcal{H}} = \prec \varepsilon(u), \tau \succ_{\mathcal{H}} - \prec \varepsilon(u), \sigma \succ_{\mathcal{H}} = \\ & \prec \tau, \varepsilon(u) \succ_{\mathcal{H}} - \prec \sigma, \varepsilon(u) \succ_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Les relations (2.15) et (2.30) entraînent que

$$\prec F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec q, u \succ_V - \prec q, u \succ_V = 0 \text{ d'où}$$

$$\prec F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \succ_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad} \quad (2.32)$$

De (2.31) et (2.32) on déduit que σ est solution du problème (P_2) .

$$(i) \wedge (ii) \implies (iii)$$

Soient u solution de (P_1) et σ solution de (P_2) . On pose :

$$\tilde{\sigma} = F(\varepsilon(u), \theta) \in \mathcal{H}.$$

D'après l'étape précédente $\tilde{\sigma}$ est solution du problème (P_2) ; mais d'après le théorème

2 le problème (P_2) admet une solution unique, donc $\sigma = \tilde{\sigma}$.

D'où $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \in \mathcal{H}$.

$$(ii) \wedge (iii) \implies (i)$$

Soit σ solution du problème (P_2) et σ, u vérifient :

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta).$$

D'après le théorème 2, la solution $\sigma \in \mathcal{H}_1$ est unique et vérifie :

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \prec F^{-1}(\sigma, \theta), \tau - \sigma \succ_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

Avant de continuer la démonstration, on introduit les notations :

$$\Sigma_0 = \{ \tau \in \mathcal{H} / \prec \tau, \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad} \}, \quad (2.33)$$

$$\tilde{\sigma} = \varepsilon(q), \quad (2.34)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - \tilde{\sigma}. \quad (2.35)$$

On remarque alors que

$$\Sigma_{ad} = \tilde{\sigma} + \Sigma_0. \quad (2.36)$$

Maintenant on va montrer que $u \in U_{ad}$; pour cela on va procéder par l'absurde.

Supposons donc $u \notin U_{ad}$ et notons Pu , la projection de u sur le convexe fermé $U_{ad} \subset V$. Ceci se traduit, compte tenu de la caractérisation de la projection sur une partie fermée, convexe non-vide d'un Hilbert par

$$\langle Pu, v - Pu \rangle_V \geq \langle u, v - Pu \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}$$

c'est-à-dire

$$\langle Pu - u, v \rangle_V \geq \langle Pu - u, Pu \rangle_V > \langle Pu - u, u \rangle_V.$$

A partir de cette inégalité, on peut déduire l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle Pu - u, v \rangle_V > \alpha > \langle Pu - u, u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.37)$$

On introduit maintenant la fonction $\tilde{\tau}$ définie par

$$\tilde{\tau} = \varepsilon(Pu - u) \in \mathcal{H}. \quad (2.38)$$

En utilisant (2.12), (2.37) et (2.38) on obtient :

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varepsilon(Pu - u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle Pu - u, v \rangle_V > \alpha >$$

$$\langle Pu - u, u \rangle_V = \langle \varepsilon(Pu - u), \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}}$$

c'est-à-dire

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha > \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.39)$$

En prenant $v = 0$ dans (2.39), il vient :

$$\alpha < 0.$$

Supposons à présent qu'il existe $v \in U_{ad}$ tel que

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} < 0. \quad (2.40)$$

En utilisant (2.39), puisque $\lambda v \in U_{ad}$ pour tout $\lambda \geq 0$ (voir la définition de U_{ad}), il résulte

$$\lambda \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha \quad \forall \lambda \geq 0.$$

En passant à la limite quand $\lambda \rightarrow \infty$ (sachant (2.40)), on obtient :

$$\alpha \leq -\infty \quad (2.41)$$

Ce qui contredit le fait que $\alpha \in \mathbb{R}$. On en déduit alors :

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}.$$

Ce qui signifie moyennant (2.33), que $\tilde{\tau} \in \Sigma_0$.

Il vient alors en tenant compte de (2.36) que

$$\tilde{\sigma} + \tilde{\tau} \in \Sigma_{ad}$$

où $\tilde{\sigma}$ est donnée par (2.34). En appliquant (2.25) pour $\tau = \tilde{\sigma} + \tilde{\tau} \in \Sigma_{ad}$, on obtient :

$$\langle \varepsilon(u), \tilde{\tau} \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle \varepsilon(u), \sigma - \tilde{\sigma} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Ce qui entraînent compte tenu de (2.39) et (2.40) que

$$\langle \varepsilon(u), \sigma - \tilde{\sigma} \rangle_{\mathcal{H}} < 0. \quad (2.42)$$

En outre du fait que $\sigma - \tilde{\sigma} \in \Sigma_0$, il vient :

$$\langle \varepsilon(u), \sigma - \tilde{\sigma} \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0. \quad (2.43)$$

On remarque ainsi que (2.42) et (2.43) sont en contradiction; ce qui implique :

$$u \in U_{ad}. \quad (2.44)$$

En tenant compte maintenant des définitions (2.12) et (2.34), il vient :

$$\langle \tilde{\sigma}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle q, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.45)$$

ce qui implique que $\tilde{\sigma} \in \Sigma_{ad}$.

Il résulte alors de l'inégalité (2.25), appliquée pour $\tau = \tilde{\sigma}$ et de (2.12) et (2.34) :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle q, u \rangle_V. \quad (2.46)$$

Sachant d'autre part que $\sigma \in \Sigma_{ad}$ et $u \in U_{ad}$ on obtient grâce à (2.16) :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, u \rangle_V. \quad (2.47)$$

De (2.46) et (2.47), on conclut l'égalité :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle q, u \rangle_V. \quad (2.48)$$

De plus sachant que $\sigma \in \Sigma_{ad}$, il résulte de (2.15) :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.49)$$

De (2.48) et (2.49) on déduit :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}, \quad (2.50)$$

(2.44) et (2.50) entraînent que u est solution du problème (P_1) . D'où le théorème.

Remarques

Les interprétations de ce théorème sont les suivantes.

1) Si le champ des déplacements u est solution du problème variationnel (P_1) , alors le champ des contraintes σ associé à u par la loi de comportement élastique

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

est solution du problème (P_2)

2) Si le champ des contraintes σ est solution du problème variationnel (P_2) , alors le champ des déplacements u associé à σ par la loi de comportement élastique

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

est solution du problème (P_1) .

3) Si le champ des déplacements u est solution du problème (P_1) et le champ des contraintes σ est solution du problème (P_2) , alors u et σ sont liés par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$.

Vu ces interprétations, nous considérons le couple (u, σ) obtenu dans les théorèmes 1 et 2 comme étant la solution (faible) du problème mécanique (P) .

2.2.2 Dépendance de la solution par rapport au paramètre

Dans cette section nous nous intéressons à l'étude de la dépendance de la solution du problème (P) par rapport au paramètre θ . Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4 *Sous les hypothèses (2.6) – (2.7) soit (u_i, σ_i) la solution variationnelle du problème (P) associée au paramètre θ_i ($i = 1, 2$) telle que (2.8) soit vérifiée. Alors il existe une constante positive c qui ne dépend que de Ω , Γ_1 et F telle que*

$$|u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq c |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M} \quad (2.51)$$

Démonstration. Soient (u_i, σ_i) solution du problème (P) et $\theta_i \in L^2(\Omega)^M$ ($i = 1, 2$).

D'après (2.24) on a :

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta_1), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u_1 \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.52)$$

$$\langle F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - u_2 \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.53)$$

En prenant $v = u_2$ dans (2.52) et $v = u_1$ dans (2.53), il vient :

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Donc

$$\begin{cases} \langle F(\varepsilon(u_1), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_1), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} + \\ \langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \end{cases}$$

De l'inégalité précédente il résulte :

$$\begin{cases} |\langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - F(\varepsilon(u_1), \theta_1), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \\ |\langle F(\varepsilon(u_2), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}}| \end{cases}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et (2.10) dans le membre droit de cette dernière inégalité puis (2.9) et l'inégalité de Korn dans son membre gauche on obtient

$$cm |u_1 - u_2|_{H_1} \leq L_2 |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M}$$

D'où

$$|u_1 - u_2|_{H_1} \leq c |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M} \quad (2.54)$$

D'autre part on a :

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} = |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} = |F(\varepsilon(u_1), \theta_1) - F(\varepsilon(u_2), \theta_2)|_{\mathcal{H}}$$

En appliquant (2.10) et (2.54) il résulte :

$$|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq c |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M} \quad (2.55)$$

L'inégalité cherchée est maintenant une conséquence de (2.54) et (2.55).

Le résultat du théorème 4 est important du point de vue mécanique, car il montre que des petites perturbations dans le paramètre θ n'entraînent que des petites perturbations dans la solution (u, σ) du problème de contact sans frottement.

2.2.3 Un résultat de pénalisation

Dans cette section, on va étudier le problème pénalisé du problème (P) c'est-à-dire on va remplacer les conditions aux limites de Signorini (2.5), par les conditions aux limites suivantes, valable sur Γ_3 .

$$\begin{cases} \sigma_\nu^\beta = 0 & \text{si } u_\nu^\beta < 0 \\ -\beta < \sigma_\nu^\beta < 0, \sigma_\tau^\beta = 0 & \text{si } u_\nu^\beta = 0 \\ \sigma_\nu^\beta = -\beta & \text{si } u_\nu^\beta > 0. \end{cases}$$

où β est un paramètre destiné à tendre vers ∞ . Nous considérons le problème mécanique suivant.

Problème P^β . Trouver $u^\beta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et $\sigma^\beta : \Omega \longrightarrow S_N$ tels que

$$\sigma^\beta = F(\varepsilon(u^\beta), \theta) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.56)$$

$$\text{Div} \sigma^\beta + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.57)$$

$$u^\beta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.58)$$

$$\sigma^\beta \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (2.59)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_\nu^\beta = 0 \quad \text{si } u_\nu^\beta < 0 \\ -\beta < \sigma_\nu^\beta < 0, \sigma_\tau^\beta = 0 \quad \text{si } u_\nu^\beta = 0 \\ \sigma_\nu^\beta = -\beta \quad \text{si } u_\nu^\beta > 0. \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.60)$$

Du point de vue mécanique, les conditions aux limites (2.60) (c'est-à-dire les conditions aux limites sur Γ_3), peuvent être interprétées comme des conditions de contact sans frottement d'un corps élastique avec une base déformable, alors que pour les conditions de Signorini (2.5), il s'agit d'un contact sans frottement d'un corps élastique avec une base rigide. Plus précisément, l'interprétation mécanique des conditions aux limites (2.60), est la suivante.

Le corps élastique occupant le domaine Ω , ne peut pénétrer la base que lorsqu'un seuil β est atteint par la réaction normale. Le paramètre β peut être interprété comme "seuil d'effondrement", de la base déformable.

Il s'agit donc ici d'étudier le comportement de la solution du problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une base déformable quand son seuil

d'effondrement β tend vers ∞ .

D'autre part, la solution de ce problème (P^β) , dépend du paramètre $\beta > 0$ et on va la noter par la suite (u^β, σ^β) .

Pour l'étude du problème (P^β) , on suppose que les hypothèses (2.6) – (2.8) sont satisfaites et on considère les deux fonctions

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $j : H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} \varphi(v_\nu) ds \quad \forall v \in H_1. \quad (2.62)$$

On définit aussi l'ensemble Σ_{ad}^β par

$$\Sigma_{ad}^\beta = \{ \tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \beta j(v) \geq \langle q, v \rangle_V \quad \forall v \in V \}. \quad (2.63)$$

Avant de commencer l'étude du problème pénalisé (P^β) , on va donner quelques résultats préliminaires.

Remarque 2.2. La fonctionnelle j définie par (2.62) est une semi-norme continue sur H_1 .

D'une manière analogue au lemme 1, on peut énoncer le lemme suivant.

Lemme 2 *Sous les hypothèses (2.6) – (2.8), si le couple (u^β, σ^β) est une solution régulière du problème (P^β) , alors :*

$$u^\beta \in V, \quad \langle \sigma^\beta, \varepsilon(v) - \varepsilon(u^\beta) \rangle_{\mathcal{H}} + \beta j(v) - \beta j(u^\beta) \geq \langle q, v - u^\beta \rangle_V \quad \forall v \in V \quad (2.64)$$

$$\sigma^\beta \in \Sigma_{ad}^\beta, \quad \langle \tau - \sigma^\beta, F^{-1}(\sigma^\beta, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}^\beta \quad (2.65)$$

Démonstration. Soit $v \in V$. En utilisant (2.2), (5.41) et (5.42) on obtient

$$\langle \sigma^\beta, \varepsilon(v) - \varepsilon(u^\beta) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, v - u^\beta \rangle_H + \int_{\Gamma} \sigma^\beta \cdot \nu (v - u^\beta) ds$$

d'où

$$\langle \sigma^\beta, \varepsilon(v) - \varepsilon(u^\beta) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle q, v - u^\beta \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu^\beta (v_\nu - u_\nu^\beta) ds. \quad (2.66)$$

De plus, il résulte de (2.60) et (2.61) :

$$\sigma_\nu^\beta (v_\nu - u_\nu^\beta) \geq \beta \varphi(u_\nu^\beta) - \beta \varphi(v_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.67)$$

L'inégalité (2.64) est à présent une conséquence de (2.66), (2.67) et (2.62).

En prenant maintenant $v = 2u^\beta \in V$, puis $v = 0 \in V$ dans (2.64) on obtient, sachant que j est une semi-norme sur H_1 :

$$\langle \sigma^\beta, \varepsilon(u^\beta) \rangle_{\mathcal{H}} + \beta j(u^\beta) = \langle q, u^\beta \rangle_V. \quad (2.68)$$

Mais d'après (2.64), on a $u^\beta \in V$. Donc $\sigma^\beta \in \Sigma_{ad}^\beta$.

L'inégalité (2.65) est à présent une conséquence de (2.63) et (2.68).

Le lemme précédent nous permet donc de donner deux formulations variationnelles pour le problème pénalisé (P^β) :

Problème P_1^β . Trouver le champ des déplacements $u^\beta : \Omega \rightarrow H_1$ tel que

$$u^\beta \in V, \quad \langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u^\beta) \rangle_{\mathcal{H}} + \beta j(v) - j(u^\beta) \geq \langle q, v - u^\beta \rangle_V \quad \forall v \in V. \quad (2.69)$$

Problème P_2^β . Trouver le champ des contraintes $\sigma^\beta : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}_1$ tel que

$$\sigma^\beta \in \Sigma_{ad}^\beta, \quad \langle \tau - \sigma^\beta, F^{-1}(\sigma^\beta, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}^\beta. \quad (2.70)$$

De la même manière que pour le problème (P) , on va établir pour le problème (P^β) deux résultats d'existence et d'unicité relatifs aux deux formulations variationnelles (P_1^β) et (P_2^β) .

Théorème 5 *Sous les hypothèses (2.6) – (2.8), le problème variationnel (P_1^β) admet une solution unique $u^\beta \in V$.*

Démonstration. La démonstration de ce théorème est une conséquence directe du théorème A.1.9. sur les inéquations variationnelles elliptiques de seconde espèce. En effet, l'opérateur $A_\theta : V \longrightarrow V$ défini par

$$\langle A_\theta w, v \rangle_V = \langle F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V$$

est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz sur V .

En outre la fonctionnelle $j : H_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} \varphi(v_\nu) ds$$

est une fonction convexe, propre et s.c.i. Alors le théorème A.1.9. entraîne l'existence d'un élément unique $u^\beta \in V$ tel que

$$\langle A_\theta u^\beta, v - u^\beta \rangle_V + \beta j(v) - \beta j(u^\beta) \geq \langle q, v - u^\beta \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

ceci achève la démonstration du théorème.

Théorème 6 *Sous les hypothèses (2.6) – (2.8), le problème variationnel (P_2^β) admet une solution unique $\sigma^\beta \in \mathcal{H}_1$.*

Démonstration. Σ_{ad}^β est un convexe fermé non-vide de \mathcal{H} .

En effet; d'après (2.12) et (2.13) on a :

$$\langle q, v \rangle_V = \langle \varepsilon(q), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Comme $\beta > 0$ et $j \geq 0$, alors on a :

$$\langle \varepsilon(q), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + \beta j(v) \geq \langle q, v \rangle_V \quad \forall v \in V.$$

Ceci entraîne que $\varepsilon(q) \in \Sigma_{ad}^\beta$, donc $\Sigma_{ad}^\beta \neq \emptyset$.

La suite de la démonstration de ce théorème est basée sur le théorème 2.

De même, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du théorème 3, on a :

Théorème 7 *Sous les hypothèses (2.6) – (2.8), soit (u^β, σ^β) un couple de fonctions telles que $u^\beta \in V$ et $\sigma^\beta \in \mathcal{H}_1$.*

On considère les affirmations suivantes.

(i) u^β est solution du problème (P_1^β) , donnée par le théorème 5.

(ii) σ^β est solution du problème (P_2^β) , donnée par le théorème 6.

(iii) σ^β et u^β vérifient la loi de comportement élastique $\sigma^\beta = F(\varepsilon(u^\beta), 0) \in \mathcal{H}$.

Alors la vérification de deux parmi les trois assertions ci-dessus entraîne la troisième.

Nous présentons dans la suite un résultat de convergence, qui représente le principal résultat de cette section.

Théorème 8 *Supposons que les hypothèses (2.6) – (2.8), sont vérifiées et que pour tout $\beta > 0$, u^β et σ^β vérifient :*

$$\sigma^\beta = F(\varepsilon(u^\beta), \theta) \in \mathcal{H}.$$

Si pour tout $\beta > 0$, u^β est solution du problème (P_1^β) , (respectivement σ^β est solution du problème (P_2^β)), alors u^β converge vers la solution u de (P_1) dans H_1 (respectivement σ^β converge vers la solution σ de (P_2) dans \mathcal{H}_1), quand β tend vers ∞ .

La démonstration de ce théorème est une conséquence des trois lemmes suivants

Lemme 3 *La suite (u^β) est bornée dans V .*

Démonstration. En prenant $v = 0$ dans (2.69) et en utilisant l'hypothèse (2.9) et l'inégalité de Korn, on obtient :

$$c|u^\beta|_V^2 + \beta j(u^\beta) \leq \langle q, u^\beta \rangle_V. \quad (2.71)$$

Mais d'après (2.61) et (2.62), la fonctionnelle j est positive, donc il résulte de (2.71) et de l'inégalité de Cauchy-Schwartz que

$$|u^\beta|_V \leq c.$$

c'est-à-dire la suite (u^β) est bornée dans V .

Lemme 4 *La suite (u^β) converge faiblement vers la solution u de (P_1) .*

Démonstration. D'après le lemme 3, la suite (u^β) est bornée dans V . Alors le théorème A.1.2 entraîne l'existence d'une sous-suite notée encore (u^β) et d'un élément $\tilde{u} \in V$ tel que

$$u^\beta \rightharpoonup \tilde{u} \quad \text{dans } H_1 \quad \text{quand } \beta \rightarrow \infty. \quad (2.72)$$

D'autre part, du fait que (u^β) est bornée dans V , il résulte à partir de (2.71) l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$j(u^\beta) \leq \frac{1}{\beta} c \quad \forall \beta > 0.$$

Ceci implique, sachant que j est une fonctionnelle positive

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} j(u^\beta) = 0. \quad (2.73)$$

Comme j est une semi-norme continue et convexe sur H_1 , de (2.72) et (2.73) il résulte $j(\tilde{u}) = 0$ et en utilisant (2.61) et (2.62) on en déduit

$$\tilde{u} \in U_{ad}. \quad (2.74)$$

En prenant $v = \tilde{u}$ dans (2.69) on obtient :

$$\langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u^\beta) \rangle_{\mathcal{H}} - \beta j(u^\beta) \geq \langle q, \tilde{u} - u^\beta \rangle_V.$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} \langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} &\leq -\beta j(u^\beta) - \langle q, \tilde{u} - u^\beta \rangle_V \leq \\ &\leq - \langle q, \tilde{u} - u^\beta \rangle_V \end{aligned}$$

D'où

$$\limsup_{\beta \rightarrow \infty} \langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0 \quad (2.75)$$

Mais d'après (2.9) on a :

$$\langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta) - F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.$$

Ceci entraîne que

$$\langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}}$$

et comme $u^\beta \rightarrow \tilde{u}$ et $\varepsilon(u^\beta) \rightarrow \varepsilon(\tilde{u})$ alors on a :

$$\begin{cases} \liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \geq \\ \liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad (2.76)$$

Les relations (2.75) et (2.76) entraînent que

$$\begin{cases} \limsup_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \leq 0 \leq \\ \liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \leq \\ \limsup_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 0 = \limsup_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} = \\ = \liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}}. \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} = 0. \quad (2.77)$$

Soient $v \in V, \lambda \in]0, 1[$ et $w = (1 - \lambda)\tilde{u} + \lambda v \in V$. De (2.9) on a

$$\prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta) - F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(w) \succ_{\mathcal{H}} \geq 0$$

Comme $u^\beta - w = u^\beta - \tilde{u} + \lambda(\tilde{u} - v)$ et $\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(w) = \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) + \lambda(\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v))$

alors on a : $\prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta) - F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) + \lambda(\varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v)) \succ_{\mathcal{H}} \geq 0$.

C'est-à-dire

$$\prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} - \lambda \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \geq$$

$$\prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} - \lambda \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}}.$$

En passant à la limite inférieure dans cette dernière inégalité on aura :

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \quad (2.78)$$

Puisque

$$\begin{aligned} & \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} = \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} + \\ & \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

en appliquant (2.77) et (2.78) dans cette dernière inégalité on obtient :

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}}. \quad (2.79)$$

Alors en passant à la limite dans (2.79) quand $\lambda \rightarrow 0$, on aura :

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V. \quad (2.80)$$

En prenant $v = 0$ dans (2.80), on obtient :

$$\liminf_{\beta \rightarrow \infty} \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) \succ_{\mathcal{H}} \geq \prec F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}}. \quad (2.81)$$

Mais d'après (2.69) on a :

$$\beta j(v) \geq \beta j(\tilde{u}) + \prec q, v - u^\beta \succ_V + \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}}$$

Comme $j(v) = 0$, pour $v \in U_{ad}$ et $\beta j(\tilde{u}) \geq 0$, alors on a :

$$0 \geq \prec q, v - \tilde{u} \succ_V + \prec F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V.$$

En passant à la limite dans cette dernière inégalité et en utilisant (2.80) on obtient :

$$0 \geq \prec q, v - \tilde{u} \succ_V + \prec F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in V.$$

C'est-à-dire

$$\langle F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle q, v - \tilde{u} \rangle_V \quad \forall v \in V. \quad (2.82)$$

De (2.74) et (2.82) on déduit que \tilde{u} est aussi solution du problème elliptique (P_1) .

Comme (P_1) admet une solution unique (voir le théorème 1), il résulte que $\tilde{u} = u$.

On déduit aussi que u est l'unique limite faible de toute la suite (u^β) ; ceci permet de

conclure grâce au théorème A.1.3, la convergence faible de la suite (u^β) vers u dans

H_1 quand $\beta \rightarrow \infty$.

Lemme 5 (i) La suite (u^β) converge fortement vers la solution u de (P_1) .

(ii) la suite (σ^β) converge fortement vers la solution σ de (P_2) .

Démonstration. (i) En utilisant (2.9) et l'inégalité de Korn on obtient :

$$c \|u^\beta - u\|_{H_1}^2 \leq \langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (2.83)$$

En prenant $v = u$ dans (2.69) il vient :

$$\langle F(\varepsilon(u^\beta), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle q, u^\beta - u \rangle_V + \beta j(u^\beta). \quad (2.84)$$

De (2.83) et (2.84) on obtient :

$$0 \leq c \|u^\beta - u\|_{H_1}^2 \leq \langle q, u^\beta - u \rangle_V + \beta j(u^\beta) - \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (2.85)$$

En passant à la limite dans (2.85) quand $\beta \rightarrow \infty$, on aura :

$$0 \leq \lim_{\beta \rightarrow \infty} \|u^\beta - u\|_{H_1} \leq 0.$$

C'est-à-dire $u^\beta \rightarrow u$ dans H_1 , quand $\beta \rightarrow \infty$.

(ii) Puisque $\sigma^\beta = F(\varepsilon(u^\beta), \theta)$ et $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$ on a :

$$|\sigma^\beta - \sigma|_{\mathcal{H}} \leq c |\varepsilon(u^\beta) - \varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq c |u^\beta - u|_{H_1}. \quad (2.86)$$

et puisque $\text{Div}\sigma^\beta = \text{Div}\sigma = -f \in H$, il vient

$$|\sigma^\beta - \sigma|_{\mathcal{H}_1} \leq c |u^\beta - u|_{H_1}. \quad (2.87)$$

Comme $u^\beta \rightarrow u$ dans H_1 lorsque $\beta \rightarrow \infty$, nous obtenons $\sigma^\beta \rightarrow \sigma$ dans \mathcal{H}_1 lorsque $\beta \rightarrow \infty$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 2.3. L'interprétation mécanique du résultat de convergence donné par le théorème 8 est la suivante : On peut approcher la solution du problème de contact sans frottement d'un corps élastique avec une base rigide par la solution du problème de contact sans frottement selon les conditions (2.60) de ce même corps avec une base déformable quand son seuil d'effondrement β tend vers l'infini.

Résultats le cas $\Gamma_1 = \emptyset$.

Les théorèmes d'existence et d'unicité 1 et 2 ont été établis dans le cas mesure $\Gamma_1 > 0$. Dans cette situation l'inégalité de Korn (5.37) est vérifiée et elle est utilisée pour démontrer l'unicité de ces deux théorèmes. On peut aussi considérer le cas mesure $\Gamma_1 = 0$, dans ce cas on passe à l'ensemble quotient $V^* = H_1 | \mathcal{R}$ où \mathcal{R} est l'ensemble des déplacements rigides défini par (5.35) et le problème (P_1) peut se formuler comme suit :

Trouver $u \in V = H_1$ tel que

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma(v) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V \quad (2.88)$$

Comme ε est nulle sur \mathcal{R} , donc le problème (P_1) n'admet de solution que si :

$$\int_{\Omega} f \rho dx + \int_{\Gamma_2} h \rho ds \leq 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R} \quad (2.89)$$

Du point de vue mécanique (2.89) exprime que le torseur des forces f et h (qui sont les seules données du problème) est inférieure à zéro.

Maintenant on pose :

$$L(v) = \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma(v) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad (2.90)$$

et pour $u^*, v^* \in V^*$ on définit

$$L^*(v^*) = L(v), \quad \langle F(\varepsilon(u^*), \theta), \varepsilon(v^*) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.91)$$

Le problème (P_1) est donc équivalent à

Trouver $u^* \in V^*$ tel que :

$$\langle F(\varepsilon(u^*), \theta), \varepsilon(v^*) \rangle_{\mathcal{H}} \geq L^*(v^*) \quad \forall v^* \in V^* \quad (2.92)$$

Ce problème admet une solution unique. Donc si mesure $\Gamma_1 = 0$ et les forces f et h satisfont à (2.89), alors le problème (P_1) admet une solution u , définie à un déplacement rigide quelconque près (c'est-à-dire si u est une solution, alors tout autre élément de la forme $u + \rho$, avec ρ déplacement rigide est aussi solution). Les champs de contraintes σ et de déformations ε sont uniques.

Chapter 3

PROBLEME ELASTIQUE DE CONTACT AVEC

FROTTEMENT EN ELASTICITE

Dans ce chapitre on étudie le contact avec frottement d'un corps élastique avec une fondation rigide. La loi de frottement considérée est celle de Tresca. La formulation de ce problème mécanique est donnée par le problème (P) . Pour ce problème (P) , nous proposons deux formulations variationnelles (P_1) et (P_2) . Le problème (P_1) est obtenu à partir du problème (P) , en utilisant la formule de Green ainsi que la loi de comportement. Dans ce problème (P_1) , les contraintes σ sont éliminées, la seule inconnue est donc le champ des déplacements u . Le problème (P_2) est obtenu à partir du problème (P) , en utilisant une méthode similaire. Dans ce cas le champ des déplacements u est éliminé et le problème (P_2) est formulé uniquement à l'aide du

champ des contraintes σ . Nous étudions séparément les problèmes variationnels (P_1) et (P_2) et nous démontrons des résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Nous étudions ensuite, quelques propriétés de la solution et le lien entre les solutions des problèmes (P_1) et (P_2) . De même, nous étudions un problème pénalisé et nous établissons la convergence de la solution du problème pénalisé vers la solution faible du problème mécanique (P) . Les résultats obtenus dans ce chapitre constituent une variante des résultats obtenus dans Rochdi et Teniou [1].

3.1 Résultats d'existence et d'unicité

3.1.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses

Nous considérons un corps élastique dont les particules matérielles occupent un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2, 3$) et dont la frontière Γ , supposée être régulière, est divisée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telle que $\text{mesure } \Gamma_1 > 0$. Nous supposons que le champ des déplacements u s'annule sur Γ_1 , que des tractions h agissent sur Γ_2 et que des forces volumiques de densité f agissent dans Ω . Sur Γ_3 le corps est en contact bilatéral avec une fondation rigide, le contact est avec frottement et modélisé par la loi de Tresca. Avec ces hypothèses, le problème (P) peut donc se formuler de la manière suivante.

Problème P. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \longrightarrow S_N$ tels que

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \quad \text{dans } \Omega \quad (3.1)$$

$$\text{Div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (3.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (3.3)$$

$$\sigma \nu = h \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_\nu = 0, \quad |\sigma_\tau| \leq g \\ |\sigma_\tau| < g \Rightarrow u_\tau = 0 \\ |\sigma_\tau| = g \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda u_\tau \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.5)$$

Dans l'étude du problème (P), on considère les hypothèses suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} F : \Omega \times S_N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow S_N \text{ est telle que} \\ \text{(a) } \exists m > 0 \text{ tel que } (F(x, \varepsilon_1, \theta) - F(x, \varepsilon_2, \theta)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N, \quad \theta \in \mathbb{R}^M \\ \text{(b) } \exists L_1, L_2 > 0 \text{ tels que } |F(x, \varepsilon_1, \theta_1) - F(x, \varepsilon_2, \theta_2)| \leq L_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + L_2 |\theta_1 - \theta_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N, \quad \theta \in \mathbb{R}^M \\ \text{(c) La fonction } x \mapsto F(x, \varepsilon, \theta) \text{ est mesurable Lebesgue} \\ \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon \in S_N, \quad \theta \in \mathbb{R}^M \\ \text{(d) } F(x, 0_N, 0_M) = 0_N . \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

$$f \in H, \quad h \in L^2(\Gamma_2)^N \quad (3.7)$$

$$\theta \in L^2(\Omega)^M \quad (3.8)$$

$$g \geq 0. \quad (3.9)$$

On définit le sous-espace fermé \tilde{V} de H_1 par :

$$\tilde{V} = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \quad (3.10)$$

et on le munit du produit scalaire suivant.

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{V}} = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in \tilde{V}. \quad (3.11)$$

On note aussi $|\cdot|_{\tilde{V}}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier facilement que les deux normes $|\cdot|_{\tilde{V}}$ et $|\cdot|_{H_1}$ sont équivalentes sur \tilde{V} et donc $(\tilde{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{V}})$ est un espace de Hilbert.

La fonctionnelle $v \mapsto \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}$ est linéaire et continue sur \tilde{V} : il résulte grâce au théorème Riesz-Fréchet l'existence d'un élément $\eta \in \tilde{V}$ tel que

$$\langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} = \langle f, v \rangle_H + \langle h, \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}. \quad (3.12)$$

On définit aussi la fonctionnelle $j : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$j(v) = g \int_{\Gamma_3} |v_\tau| ds \quad \forall v \in \tilde{V} \quad (3.13)$$

et l'ensemble des "contraintes admissibles" par :

$$\Sigma_{ad} = \left\{ \tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V} \right\}. \quad (3.14)$$

3.1.2 Formulations variationnelles

Dans cette section, on va donner deux formulations variationnelles du problème mécanique (P). Dans la première formulation (P_1), l'inconnue est le champ des déplacements u , alors que dans la seconde formulation (P_2), l'inconnue est le champ des contraintes σ . Le résultat conduisant à ces deux formulations est le suivant.

Lemme 6 *Sous les hypothèses (3.6)–(3.9) si (u, σ) est solution régulière du problème mécanique (P), alors on a :*

$$u \in \tilde{V}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V} \quad (3.15)$$

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle \tau - \sigma, F^{-1}(\sigma, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (3.16)$$

Démonstration. (i) Soit $v \in \tilde{V}$. En utilisant la formule de Green on a :

$$\langle \sigma \nu, \gamma(v - u) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, v - u \rangle_{\Pi} \quad (3.17)$$

et puisque

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \sigma \nu, \gamma(v - u) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_{\Gamma} \sigma \nu (v - u) ds = \\ \int_{\Gamma_1} \sigma \nu (v - u) ds + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu (v - u) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu (v - u) ds \end{array} \right.$$

il vient

$$\langle \sigma\nu, \gamma(v-u) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_{\Gamma_2} h(v-u) ds + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu(v-u) ds \quad (3.18)$$

Sur Γ_3 on a :

$$\sigma\nu(v-u) = \sigma_\nu(v_\nu - u_\nu) + \sigma_\tau(v_\tau - u_\tau) = \sigma_\tau v_\tau - \sigma_\tau u_\tau. \quad (3.19)$$

De l'inégalité de Schwartz et de (3.5), il résulte que sur Γ_3 on a :

$$\sigma\nu(v-u) \geq g|u_\tau| - g|v_\tau|. \quad (3.20)$$

Donc de (3.17), (3.18) et (3.20) il résulte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div}\sigma, v-u \rangle_H \geq \int_{\Gamma_2} h(v-u) ds + \\ \quad g \int_{\Gamma_3} |u_\tau| ds - g \int_{\Gamma_3} |v_\tau| ds \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle -\text{Div}\sigma, v-u \rangle_H + \\ \quad \langle h, \gamma(v-u) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}. \end{array} \right.$$

Comme $-\text{Div}\sigma = f$ et $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$, alors on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle f, v-u \rangle_H + \\ \quad \langle h, \gamma(v-u) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}. \end{array} \right.$$

D'où (3.15).

(ii) On pose $v = 2u \in \tilde{V}$ puis $v = 0 \in \tilde{V}$ dans (3.15), on obtient :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u) = \langle \eta, u \rangle_{\tilde{V}}. \quad (3.21)$$

Soit $\tau \in \Sigma_{ad}$. D'après la définition (3.14) on a :

$$\langle \tau, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u) \geq \langle \eta, u \rangle_{\tilde{V}} \quad (3.22)$$

De (3.21) et (3.22), il résulte :

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad .$$

Comme $\varepsilon(u) = F^{-1}(\sigma, \theta)$, alors on a :

$$\langle \tau - \sigma, F^{-1}(\sigma, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

Pour l'appartenance de σ à Σ_{ad} de (3.21) et (3.15) il résulte :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

C'est-à-dire $\sigma \in \Sigma_{ad}$ d'où (3.16).

Le lemme 6, nous permet donc de donner les deux formulations variationnelles suivantes pour le problème mécanique (P).

Problème P₁. Trouver le champs des déplacements $u \in H_1$ tel que

$$u \in \tilde{V}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

Problème P₂. Trouver le champs des contraintes $\sigma \in \mathcal{H}_1$ tel que

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle \tau - \sigma, F^{-1}(\sigma, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

3.1.3 Premier résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 9 Soit mesure $\Gamma_1 > 0$. Sous les hypothèses (3.6) – (3.9), le problème (P₁)

admet une solution unique $u \in \tilde{V}$.

Démonstration. Pour tout θ fixé dans $L^2(\Omega)^M$, l'opérateur $A_\theta : \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V}$ défini par :

$$\langle A_\theta u, v \rangle_{\tilde{V}} = \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$$

est fortement monotone et de Lipschitz. Pour plus de détails, voir par exemple la démonstration du théorème 1. En outre la fonctionnelle j définie par (3.13) est une semi-norme continue sur \tilde{V} .

En utilisant le théorème A.1.9 sur les inéquations variationnelles elliptiques de deuxième espèce, il résulte qu'il existe un élément unique u tel que:

$$u \in \tilde{V}, \quad \langle A_\theta u, v - u \rangle_{\tilde{V}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}$$

c'est-à-dire

$$u \in \tilde{V}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 9.

3.1.4 Second résultat d'existence et d'unicité

Pour l'étude du problème variationnel (P_2) nous avons le résultat suivant.

Théorème 10 Soit mesure $\Gamma_1 > 0$. Sous les hypothèses (3.6) – (3.9), le problème (P_2) admet une solution unique $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Démonstration. Comme la fonctionnelle j est positive, en utilisant (3.11) on a

$$\langle \varepsilon(\eta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \varepsilon(\eta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V},$$

c'est-à-dire $\varepsilon(\eta) \in \Sigma_{ad}$, donc Σ_{ad} est non-vide de \mathcal{H} . Il est facile de voir que Σ_{ad} est un convexe fermé de \mathcal{H} .

En outre, F^{-1} est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz (parce que F l'est aussi) alors le théorème A.1.10 sur les inéquations variationnelles de première espèce entraîne l'existence d'un élément unique σ tel que

$$\sigma \in \Sigma_{ad}, \quad \langle \tau - \sigma, F^{-1}(\sigma, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}.$$

Reste à montrer que $\sigma \in \mathcal{H}_1$. Nous avons déjà $\sigma \in \Sigma_{ad} \subset \mathcal{H}$ et

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}$$

En posant: $v = \pm\varphi$ et $\varphi \in \mathcal{D} = D(\Omega)^N$ dans cette dernière inégalité et en utilisant (3.12), il résulte que :

$$\langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \eta, \varphi \rangle_{\tilde{V}} = \langle f, \varphi \rangle_H + \langle h, \gamma\varphi \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (3.23)$$

d'où $\text{Div } \sigma = -f \in H$. Puisque $\sigma \in \mathcal{H}$ il résulte $\sigma \in \mathcal{H}_1$ ce qui achève la démonstration.

3.2 Propriétés de la solution

Dans la suite nous étudions les propriétés des solutions u et σ données par les théorèmes 9 et 10.

De (3.25) et (3.26), il résulte que σ est solution du problème (P_2) .

(i) \wedge (ii) \implies (iii)

Soient u solution de (P_1) et σ solution de (P_2) . On pose: $\tilde{\sigma} = F(\varepsilon(u), \theta)$.

u étant la solution de (P_1) d'après le pas précédent, on déduit que $\tilde{\sigma}$ est aussi solution de (P_2) .

Comme le problème (P_2) admet une solution unique, il résulte $\tilde{\sigma} = \sigma \in \mathcal{H}$. D'où (iii).

(ii) \wedge (iii) \implies (i)

Soient σ solution de (P_2) et $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \in \mathcal{H}$.

On introduit maintenant les espaces suivants.

$$W = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \supset \tilde{V}$$

$$\mathcal{W} = \{z \in \mathcal{H} / \text{Div } z = 0 \text{ dans } \Omega, \quad z\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3\}.$$

On munit W du produit scalaire (3.11). Pour chaque $z \in \mathcal{W}$, on a : $\sigma \pm z \in \Sigma_{ad}$.

En effet, on a :

$$\langle \sigma \pm z, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) = \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \pm \langle z, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (3.27)$$

En utilisant la formule de Green pour $\langle z, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}}$ et le fait que $\sigma \in \Sigma_{ad}$, il résulte de (3.27) :

$$\langle \sigma \pm z, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) = \langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V} \quad (3.28)$$

c'est-à-dire $\sigma \pm z \in \Sigma_{ad}$ pour tout $z \in \mathcal{W}$.

En prenant $\tau = \sigma \pm z$ dans (3.16) on obtient :

$$\langle z, F^{-1}(\sigma, \theta) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{W}.$$

Mais d'après le théorème A.2.6 le complément orthogonal dans \mathcal{H} de \mathcal{W} est $\varepsilon(W)$, il résulte donc que :

$$F^{-1}(\sigma, \theta) \in \varepsilon(W)$$

c'est-à-dire

$$\exists \tilde{u} \in W \text{ tel que } F^{-1}(\sigma, \theta) = \varepsilon(\tilde{u}). \quad (3.29)$$

On va maintenant montrer que $\tilde{u} \in \tilde{V}$.

Comme \tilde{V} est un sous-espace fermé de W , si $\tilde{u} \notin \tilde{V}$, il existe alors $\tilde{\tau} \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall v \in \tilde{V} \quad (3.30)$$

$$\langle \tilde{\tau}, \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} < 0. \quad (3.31)$$

Comme la fonctionnelle j est positive, alors de (3.11) et (3.30), il résulte que :

$$\langle \tilde{\tau} + \varepsilon(\eta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

Donc $\tilde{\tau} + \varepsilon(\eta) \in \Sigma_{ad}$. De plus pour tout $\lambda \geq 0$; on a : $\lambda \tilde{\tau} + \varepsilon(\eta) \in \Sigma_{ad}$.

De (3.29) et (3.16) on a :

$$\langle \tau - \sigma, \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}. \quad (3.32)$$

En posant: $\tau = \lambda \tilde{\tau} + \varepsilon(\eta)$ dans (3.32), on obtient :

$$\lambda \langle \tilde{\tau}, \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle \sigma - \varepsilon(\eta), \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (3.33)$$

En passant à la limite quand $\lambda \rightarrow \infty$ dans (3.33), on obtient :

$$\langle \sigma - \varepsilon(\eta), \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \leq -\infty$$

Ce qui est absurde, donc $\tilde{u} \in \tilde{V}$.

La relation (3.29) est équivalente à $\sigma = F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta)$ et comme $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$ par hypothèse, alors on a :

$$\begin{cases} 0 = \langle F(\varepsilon(u), \theta) - F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(u) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \geq c \|\varepsilon(u) - \varepsilon(\tilde{u})\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \\ c \|u - \tilde{u}\|_{H_1}^2 \end{cases}$$

Donc $u - \tilde{u} = 0$ c'est-à-dire

$$\tilde{u} = u \in \tilde{V}. \quad (3.34)$$

Comme la fonctionnelle j est sous-différentiable sur \tilde{V} , alors il existe $\bar{\tau} \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\langle \bar{\tau}, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (3.35)$$

En posant $v = 2u \in \tilde{V}$ puis $v = 0 \in \tilde{V}$ dans (3.35) on obtient :

$$\langle \bar{\tau}, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u) = \langle \eta, u \rangle_{\tilde{V}}. \quad (3.36)$$

De (3.35) et (3.36), il résulte :

$$\langle \bar{\tau}, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) = \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}}.$$

C'est-à-dire $\bar{\tau} \in \Sigma_{ad}$.

En posant : $\tau = \bar{\tau}$ dans (3.16) on obtient :

$$\langle \bar{\tau}, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (3.37)$$

De (3.36) et (3.37) on déduit :

$$\langle \eta, u \rangle_{\tilde{V}} = \langle \bar{\tau}, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u) \geq \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u). \quad (3.38)$$

Comme $\sigma \in \Sigma_{ad}$ et $u \in \tilde{V}$, alors on a :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u) \geq \langle \eta, u \rangle_{\tilde{V}}. \quad (3.39)$$

De (3.38) et (3.39) résulte l'égalité :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u) = \langle \eta, u \rangle_{\tilde{V}} \quad (3.40)$$

$\sigma \in \Sigma_{ad}$ entraîne :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (3.41)$$

De (3.40) et (3.41), il résulte :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (3.42)$$

Enfin de (3.34) et (3.42), on déduit :

$$u \in \tilde{V}, \quad \langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

L'inégalité précédente implique l'affirmation (i). Ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.1.

Les interprétations de ce théorème sont les suivantes.

1- Si le champ des déplacements u est solution du problème variationnel (P_1), alors le champ des contraintes σ associé à u par la loi de comportement élastique

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

est solution du problème (P_2).

2- Si le champ des contraintes σ est solution du problème variationnel (P_2), alors le champ des déplacements u associé à σ par la loi de comportement élastique

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$$

est solution du problème (P_1) .

3- Si le champ des déplacements u est solution du problème (P_1) et le champ des contraintes σ est solution du problème (P_2) , alors u et σ sont liés par la loi de comportement élastique $\sigma = F(\varepsilon(u), \theta)$.

3.2.2 Dépendance de la solution par rapport au paramètre

Dans cette partie on étudie la dépendance de la solution par rapport au paramètre. En utilisant les mêmes techniques utilisés dans la démonstration du théorème 4. on peut facilement démontrer le théorème suivant.

Théorème 12 *Sous les hypothèses (3.6) – (3.7) et (3.9) soit (u_i, σ_i) la solution variationnelle du problème (P) associée au paramètre θ_i ($i = 1, 2$) telle que (3.8) soit vérifiée. Alors il existe une constante positive c qui ne dépend que de Ω , Γ_1 et F telle que*

$$|u_1 - u_2|_{H_1} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}_1} \leq c |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M} . \quad (3.43)$$

Ce théorème montre bien la dépendance de la solution par rapport au paramètre θ et le résultat de ce théorème est important du point de vue mécanique car il montre que des petites perturbations dans le paramètre θ n'entraînent que des petites perturbations dans la solution (u, σ) du problème de contact avec frottement.

3.2.3 Un résultat de pénalisation

A cause de la non-différentiabilité de la fonctionnelle j définie par (3.13), nous introduisons le problème pénalisé (P_1^μ) du problème (P_1) dont la solution u_μ dépend du paramètre positif μ . Nous démontrerons l'existence et l'unicité de la solution u_μ du problème pénalisé (P_1^μ) et nous obtiendrons un résultat de convergence de u_μ vers la solution u du problème variationnel (P_1) quand μ tend vers 0.

En effet, pour chaque paramètre μ tel que $0 \leq \mu < 1$, on définit la fonctionnelle différentiable $j_\mu : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$j_\mu(v) = \frac{g}{1+\mu} \int_{\Gamma_3} |v_\tau|^{1+\mu} ds \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (3.44)$$

En remplaçant la fonctionnelle j par j_μ dans le problème (P_1) on obtient le problème pénalisé suivant.

Problème P_1^μ . Trouver le champ des déplacements $u_\mu \in H_1$ tel que

$$u_\mu \in \tilde{V}, \quad \langle F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}} + j_\mu(v) - j_\mu(u_\mu) \geq \langle \eta, v - u_\mu \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (3.45)$$

Puisque j_μ est propre, convexe et semi-continue inférieurement, en utilisant les mêmes arguments que ceux déjà utilisés dans la démonstration du théorème 9, on obtient le résultat :

Théorème 13 *On suppose que les hypothèses (3.6) – (3.9) sont satisfaites. Alors le problème pénalisé (P_1^μ) admet une solution unique u_μ .*

Maintenant on s'intéresse au comportement de la solution du problème (P_1^μ) quand μ tend vers 0. Ceci est l'objet du résultat suivant.

Théorème 14 *On suppose que les hypothèses (3.6) – (3.9) sont satisfaites. Alors la solution u_μ du problème (P_1^μ) converge dans \tilde{V} vers la solution u du problème (P_1) , quand μ tend vers 0, c'est-à-dire*

$$u_\mu \rightarrow u \text{ dans } \tilde{V} \text{ quand } \mu \rightarrow 0 \quad (3.46)$$

Démonstration. On pose $v = 0$ dans (3.45) et en utilisant (3.6), (3.11) et le fait que la fonctionnelle j_μ est positive, on déduit que la suite (u_μ) est bornée dans \tilde{V} . Donc il existe une sous-suite notée aussi (u_μ) et un élément $\tilde{u} \in \tilde{V}$ tels que

$$u_\mu \rightarrow \tilde{u} \quad \text{dans } \tilde{V} \quad \text{quand } \mu \rightarrow 0. \quad (3.47)$$

Pour passer à la limite dans (3.45) quand μ tend vers 0 on remarque qu'en utilisant (3.47), (3.44) et (3.13) on aura :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \langle \eta, v - u_\mu \rangle_{\tilde{V}} = \langle \eta, v - \tilde{u} \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (3.48)$$

et

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} j_\mu(v) = j(v) \quad \forall v \in \tilde{V}. \quad (3.49)$$

Nous démontrons maintenant que

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} j_\mu(u_\mu) \geq j(\tilde{u}) \quad (3.50)$$

Grâce à la différentiabilité et à la convexité de la fonctionnelle j_μ définie par (3.44) il résulte que

$$j_\mu(u_\mu) - j_\mu(\tilde{u}) \geq g \int_{\Gamma_3} |\tilde{u}_\tau|^\mu (u_\mu - \tilde{u}) ds. \quad (3.51)$$

En conséquence, pour établir (3.50) il suffit de prouver que

$$g \int_{\Gamma_3} |\tilde{u}_\tau|^\mu (u_\mu - \tilde{u}) ds \rightarrow 0 \text{ quand } \mu \rightarrow 0 \quad (3.52)$$

En effet; puisque l'application trace est linéaire et continue de H_1 dans $L^2(\Gamma)^N$, on déduit facilement de (3.47) que

$$u_\mu \rightarrow \tilde{u} \text{ dans } L^2(\Gamma_3)^N \text{ quand } \mu \rightarrow 0. \quad (3.53)$$

En plus, d'après le théorème de Lebesgue nous obtenons:

$$|\tilde{u}_\tau|^\mu \rightarrow 1 \text{ dans } L^2(\Gamma_3)^N \text{ quand } \mu \rightarrow 0 \quad (3.54)$$

Donc, en utilisant (3.53) et (3.54) nous établissons (3.52) et par conséquent (3.50).

Pour passer à la limite dans (3.45) quand $\mu \rightarrow 0$, il faut montrer :

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} \langle F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in \tilde{V} \quad (3.55)$$

Pour ceci, en prenant d'une part $v = \tilde{u}$ dans (3.45) et en utilisant la monotonie de l'opérateur F (voir (3.6)) d'autre part, on obtient :

$$\langle F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}} \geq j_\mu(u_\mu) - j_\mu(\tilde{u}) + \langle \eta, \tilde{u} - u_\mu \rangle_{\tilde{V}}$$

et

$$\langle F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle F(\varepsilon(\tilde{u}), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

En passant à la limite dans ces deux inégalités quand $\mu \rightarrow 0$ et d'après (3.47) – (3.50)

on voit que

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} \langle F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

et

$$\limsup_{\mu \rightarrow 0} \prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \succ_{\mathcal{H}} \leq 0$$

D'où

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \succ_{\mathcal{H}} = 0. \quad (3.56)$$

Soit $v \in \tilde{V}$ et $\lambda \in]0, 1[$. En appliquant l'hypothèse de monotonie (3.6) pour l'élément u_μ et l'élément w donné par :

$$w = (1 - \lambda)\tilde{u} + \lambda v \quad (3.57)$$

on aura :

$$\left. \begin{aligned} &\prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \succ_{\mathcal{H}} + \lambda \prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \leq \\ &\prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \succ_{\mathcal{H}} + \lambda \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \end{aligned} \right\}$$

En utilisant maintenant (3.56) et (3.47) dans cette dernière inégalité, on obtient :

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} \prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \leq \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \quad (3.58)$$

En outre, puisque

$$\left. \begin{aligned} &\prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} = \prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(\tilde{u}) - \varepsilon(u_\mu) \succ_{\mathcal{H}} + \\ &\prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \end{aligned} \right\}$$

de (3.56) et (3.58), il s'ensuit que :

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} \prec F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}} \leq \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}) \succ_{\mathcal{H}}. \quad (3.59)$$

L'inégalité (3.55) peut être déduite en substituant (3.57) dans (3.59) et en passant à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$.

En utilisant maintenant (3.48)-(3.50) et (3.55) on peut passer à la limite dans (3.45)

quand $\mu \rightarrow 0$ et on déduit que \tilde{u} est solution du problème variationnel (P_1) . Donc d'après l'unicité de la solution de ce problème (voir le théorème 9), on déduit que $\tilde{u} = u$.

Ainsi u est l'unique limite faible de toute la suite (u_μ) . Par conséquent la suite (u_μ) converge faiblement vers u dans \tilde{V} c'est-à-dire

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{dans } \tilde{V} \quad \text{quand } \mu \rightarrow 0 \quad (3.60)$$

Pour obtenir la convergence forte de cette suite, nous remarquons que d'après l'inégalité de Korn et (3.6) il résulte:

$$c|u_\mu - u|_{\tilde{V}}^2 \leq |\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(u) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle F(\varepsilon(u_\mu), \theta), \varepsilon(u) - \varepsilon(u_\mu) \rangle_{\mathcal{H}}|. \quad (3.61)$$

où c est une constante positive indépendante de μ . La convergence forte de la suite (u_μ) est maintenant une conséquence de (3.60) et (3.56) car $u = \tilde{u}$.

Remarque 3.2. soient u et u_μ les solutions respectives des problèmes (P_1) et (P_1^μ) données par les théorèmes 9 et 13. A ces solutions on associe respectivement les champs des contraintes σ et σ_μ définis par :

$$\sigma = F(\varepsilon(u), \theta) \quad (3.62)$$

et

$$\sigma_\mu = F(\varepsilon(u_\mu), \theta) \quad (3.63)$$

Alors on a :

$$\sigma_\mu \rightarrow \sigma \quad \text{dans } \mathcal{H}_1 \quad \text{quand } \mu \rightarrow 0. \quad (3.64)$$

En effet, en posant $v = \pm\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ dans (P_1) et en appliquant la formule de Green et (3.62) il s'ensuit que

$$\text{Div}\sigma + \eta = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (3.65)$$

Les mêmes arguments entraînent que

$$\text{Div}\sigma_\mu + \eta = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega \quad (3.66)$$

Donc, de (3.62) – (3.63) et (3.65) – (3.66) on conclut que

$$|\sigma_\mu - \sigma|_{\mathcal{H}_1} = |\sigma_\mu - \sigma|_{\mathcal{H}} = |F(\varepsilon(u_\mu), \theta) - F(\varepsilon(u), \theta)|_{\mathcal{H}} \quad (3.67)$$

La convergence forte (3.64) est finalement une conséquence de (3.67), (3.6) et (3.46).

Remarque 3.3. Nous considérons maintenant les conditions suivantes de contact avec frottement.

$$u_\nu = 0, \quad |\sigma_\tau| = -g |u_\tau|^{\mu-1} u_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.68)$$

Nous considérons ensuite le problème mécanique (3.1)–(3.4) et (3.68) appelé problème (I^μ) .

En utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la démonstration du lemme 6, on peut considérer que la solution u_μ du problème (I^μ) et le champs des contraintes associé σ_μ défini par (3.63) représentent la solution faible (au sens du lemme 6) du

problème problème (P^μ) .

Remarque 3.4. Les convergences fortes (3.46) et (3.64) peuvent être interprétées comme suit:

La solution faible (u, σ) du problème (P) de contact avec frottement entre un corps élastique et une fondation rigide peut-être approchée par la solution faible (u_μ, σ_μ) du problème (P^μ) . Vu la différentiabilité de la fonctionnelle j_μ la pénalisation utilisée ici présente un grand intérêt pour l'étude numérique des problèmes de contact de ce type.

Résultats le cas $\Gamma_1 = \emptyset$. Les théorèmes d'existence et d'unicité 9 et 10 ont été établis dans le cas mesure $\Gamma_1 > 0$. Dans cette situation l'inégalité de Korn (5.37) est vérifiée et elle est utilisée pour démontrer l'unicité de ces deux théorèmes. On peut aussi considérer le cas mesure $\Gamma_1 = 0$. dans ce cas le problème (P_1) peut se formuler de la façon suivante :

Trouver $u \in \tilde{V} = \{v \in H_1 / v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}$ tel que

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) - \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) - j(u) \geq \langle \eta, v - u \rangle_{\tilde{V}} \quad \forall v \in \tilde{V} \quad (3.69)$$

Faisant $v = 0 \in \tilde{V}$ puis $v = 2u \in \tilde{V}$ dans (3.69) on obtient :

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u) = \langle \eta, u \rangle_{\tilde{V}} \quad (3.70)$$

De sorte que (3.69) équivaut à (3.70) et

$$\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + j(v) \geq \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}} \quad (3.71)$$

La fonctionnelle j étant positive, alors en remplaçant v par $-v$ on déduit que (3.69) est équivalente à

$$|\langle F(\varepsilon(u), \theta), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \eta, v \rangle_{\tilde{V}}| \leq j(v) \quad \forall v \in \tilde{V} \quad (3.72)$$

Comme ε est nulle sur l'ensemble des déplacements rigides \mathcal{R} défini par (5.35) on voit bien que ce problème ne peut admettre de solution que si :

$$|\langle \eta, \rho \rangle_{\tilde{V}}| \leq j(\rho) \quad \forall \rho \in \mathcal{R}$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_{\Omega} f \rho dx + \int_{\Gamma_2} h \rho ds \right| \leq g \int_{\Gamma_3} |\rho_{\tau}| ds \quad \forall \rho \in \mathcal{R} \quad (3.73)$$

Nous allons dans la suite résoudre le problème sous l'hypothèse forte où l'inégalité (3.73) est stricte :

$$g \int_{\Gamma_3} |\rho_{\tau}| ds - \left| \int_{\Omega} f \rho dx + \int_{\Gamma_2} h \rho ds \right| > 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{R}, \quad \rho \neq 0 \quad (3.74)$$

Ce qui équivaut, l'espace \mathcal{R} étant de dimension finie à l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$g \int_{\Gamma_3} |\rho_{\tau}| ds - \left| \int_{\Omega} f \rho dx + \int_{\Gamma_2} h \rho ds \right| \geq c |\rho|_H \quad (3.75)$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition : on suppose que $\Gamma_1 = \emptyset$ et que (3.75) a lieu. Il existe alors $u \in \tilde{V}$ solution de (3.69), ou ce qui revient au même, minimisant la fonctionnelle :

$$l(v) = \frac{1}{2} \prec F(\varepsilon(v), \theta), \varepsilon(v) \succ_{\mathcal{H}} + j(v) - \prec \eta, v \succ_{\tilde{V}}$$

Démonstration : la fonctionnelle $v \mapsto l(v)$ est continue et convexe sur \tilde{V} , il suffit de montrer que $l(v)$ tend vers ∞ quand $|v|_{\tilde{V}}$ tend vers ∞ .

Si on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = v - Pv, \quad Pv \text{ est la projection orthogonale dans } H \\ \text{et} \\ v = w + \rho, \quad \rho \in \mathcal{R} \end{array} \right.$$

Alors on a :

$$l(v) = l(w + \rho) = \frac{1}{2} \prec F(\varepsilon(w + \rho), \theta), \varepsilon(w + \rho) \succ_{\mathcal{H}} + j(w + \rho) - \prec \eta, w + \rho \succ_{\tilde{V}}$$

$$l(v) = \frac{1}{2} \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(w) \succ_{\mathcal{H}} - \left(\int_{\Omega} f \rho dx + \int_{\Gamma_2} h \rho ds \right) + j(w + \rho) - \prec \eta, w \succ_{\tilde{V}}$$

En utilisant (3.75) on obtient :

$$l(v) \geq \frac{1}{2} \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(w) \succ_{\mathcal{H}} + c |\rho|_H - j(\rho) + j(w + \rho) - \prec \eta, w \succ_{\tilde{V}}$$

$$l(v) \geq \frac{1}{2} \prec F(\varepsilon(w), \theta), \varepsilon(w) \succ_{\mathcal{H}} + c |\rho|_H \geq \frac{m}{2} |w|_{\tilde{V}}^2 + c |\rho|_H \geq c' (|w|_{\tilde{V}}^2 + |\rho|_H)$$

comme $|v|_{H_1}^2 = |v|_H^2 + |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}^2$ et $v = w + \rho$, $\rho \in \mathcal{R}$ et comme les normes $|\cdot|_{\tilde{V}}$ et

$|\cdot|_{H_1}$ sont équivalentes sur \tilde{V} alors on a :

$$|v|_{\tilde{V}} \leq c' (|w|_{\tilde{V}} + |\rho|_H)$$

Donc $|v|_{\tilde{V}} \leq c' (|w|_{\tilde{V}} + |\rho|_H) \rightarrow \infty$ quand $|v|_{\tilde{V}} \rightarrow \infty$ et par conséquent $l(v) \rightarrow \infty$ quand $|v|_{\tilde{V}} \rightarrow \infty$.

D'où le résultat.

Remarque 3.5. si u_1 et u_2 sont deux solutions de l'inéquation variationnelle (3.69)

alors faisant $v = u_2$ (respectivement $v = u_1$) dans cette inéquation relative à u_1 (resp. u_2) on obtient :

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta), \varepsilon(u_2) - \varepsilon(u_1) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u_2) - j(u_1) \geq \langle \eta, u_2 - u_1 \rangle_{\hat{V}}$$

$$\langle F(\varepsilon(u_2), \theta), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} + j(u_1) - j(u_2) \geq \langle \eta, u_1 - u_2 \rangle_{\hat{V}}$$

En additionnant ces deux inégalités il vient :

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta) - F(\varepsilon(u_2), \theta), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$$

Mais par hypothèse on a :

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta) - F(\varepsilon(u_2), \theta), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$$

D'où

$$\langle F(\varepsilon(u_1), \theta) - F(\varepsilon(u_2), \theta), \varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2) \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

Cette dernière égalité entraîne que

$$\varepsilon(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathcal{R}.$$

Donc on a pas l'unicité du champ des déplacements mais il y a unicité des champs des contraintes et des champs de déformations.

Chapter 4

PROBLEME VISCOPLASTIQUE DE CONTACT SANS FROTTEMENT

Le but de ce chapitre est l'étude quasistatique d'un problème de contact sans frottement d'un corps viscoplastique avec une base rigide. L'étude de ce problème est faite pour des matériaux ayant une loi de comportement de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon, \theta).$$

où \mathcal{E} est un tenseur d'ordre quatre, G est une fonction constitutive et θ est un paramètre (la température ou l'humidité). Dans la première partie de ce chapitre on donne, après avoir posé le problème mécanique, deux formulations variationnelles et on démontre l'existence et l'unicité pour chacune de ces formulations en utilisant une technique de point fixe.

Dans la deuxième partie de ce chapitre on étudie quelques propriétés de la solution, on démontre l'équivalence des deux formulations variationnelles, la dépendance de la solution par rapport au paramètre θ et on termine par l'étude du problème mécanique de départ en introduisant une pénalisation portant sur les conditions aux limites de contact.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont inspirés de Sofonea [1] et Rochdi [1], la différence consiste ici dans l'introduction du paramètre θ dans la loi de comportement viscoplastique et la dépendance de la solution par rapport à ce paramètre.

4.1 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette partie, on va formuler le problème quasistatique de contact unilatéral sans frottement d'un corps viscoplastique avec une base rigide et établir deux formulations variationnelles pour ce problème ainsi que deux résultats d'existence et d'unicité.

4.1.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses

On considère un corps viscoplastique dont les particules matérielles occupent un domaine Ω de \mathbb{R}^N ($N = 1, 2, 3$) et dont la frontière Γ , supposée régulière est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\text{mesure } \Gamma_1 > 0$.

Soit $[0, T]$ un intervalle de temps. On suppose que le champ des déplacements u s'annule sur Γ_1 , que des tractions superficielles g s'appliquent sur Γ_2 et que des forces volumiques f agissent sur Ω . On suppose aussi que le corps Ω repose sur une fondation rigide par la partie Γ_3 et que ce contact s'effectue sans frottement c'est-à-dire

que les mouvements tangentiels sont complètement libres. On précise en outre qu'on étudie le cas quasistatique et que le corps Ω a une loi de comportement de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon, \theta).$$

Sous ces considérations, le problème mécanique, qu'on va étudier peut se formuler de la manière suivante.

Problème P. Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow S_N$ tels que

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + G(\sigma, \varepsilon, \theta) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (4.1)$$

$$\text{Div}\sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (4.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\quad (4.3)$$

$$\sigma\nu = g \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[\quad (4.4)$$

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\tau = 0, \quad \sigma_\nu u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[. \quad (4.5)$$

$$u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{dans } \Omega . \quad (4.6)$$

L'équation (4.1), représente la loi de comportement viscoplastique. La relation (4.2) représente l'équation d'équilibre où f est la densité des forces volumiques agissant sur

le corps déformable Ω . Les relations (4.3) et (4.4) sont les conditions de déplacement-traction. Les conditions aux limites (4.5) représentent les conditions de contact sans frottement de Signorini sur la partie Γ_3 de la frontière de Ω . Finalement, la relation (4.6) représente les conditions initiales.

Pour l'étude du problème mécanique (P), on considère les hypothèses suivantes.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E} : \Omega \times S_N \longrightarrow S_N \text{ est un tenseur symétrique et défini positif :} \\ \text{(a) } \mathcal{E}_{ijkh} \in L^\infty(\Omega) \quad \forall i, j, k, h = \overline{1, N} \\ \text{(b) } \mathcal{E}\sigma\tau = \sigma\mathcal{E}\tau \quad \forall \sigma, \tau \in S_N \\ \text{(c) } \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \mathcal{E}\sigma\sigma \geq \alpha |\sigma|^2 \quad \forall \sigma \in S_N \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} G : \Omega \times S_N \times S_N \times \mathbb{R}^M \longrightarrow S_N \text{ et} \\ \text{(a) } \exists L > 0 \text{ telle que } |G(\cdot, \sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1) - G(\cdot, \sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2)| \leq \\ L(|\sigma_1 - \sigma_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \text{pour tout } \sigma_i, \varepsilon_i \in S_N \text{ et } \theta_i \in \mathbb{R}^M \text{ (} i = 1, 2 \text{).} \\ \text{(b) } G(\cdot, \sigma, \varepsilon, \theta) \text{ est une fonction mesurable Lebesgue sur } \Omega \\ \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in S_N \text{ et } \theta \in \mathbb{R}^M \\ \text{(c) } G(\cdot, 0_N, 0_N, 0_M) \in \mathcal{H} \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

$$f \in W^{1,\infty}(0, T, H) \quad , \quad g \in W^{1,\infty}(0, T, L^2(\Gamma_2)^N) \quad (4.9)$$

$$\theta \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)^M) \quad (4.10)$$

On définit le sous-espace fermé V de H_1 par :

$$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (4.11)$$

et on le munit du produit scalaire suivant.

$$\langle u, w \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(w) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, w \in V. \quad (4.12)$$

V munit de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.

La fonctionnelle $v \rightarrow \langle f(t), v \rangle_H + \langle g(t), \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}$ est une fonctionnelle linéaire et continue sur V .

Il résulte grâce au théorème de Riesz-Fréchet l'existence d'un élément $F(t) \in V$ tel que

$$\langle F(t), v \rangle_V = \langle f(t), v \rangle_H + \langle g(t), \gamma v \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in V, \quad t \in [0, T]. \quad (4.13)$$

En utilisant (4.9), (4.10) et (4.13), il résulte :

$$F \in W^{1,\infty}(0, T, V). \quad (4.14)$$

En outre on définit respectivement "l'ensemble des déplacements admissibles" et "l'ensemble des contraintes admissibles" suivants.

$$U_{ad} = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \quad v_\nu \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3\}. \quad (4.15)$$

$$\Sigma_{ad}(t) = \{\tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t), v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}\}. \quad (4.16)$$

Finalement, on fait l'hypothèse suivante sur les données initiales.

$$u_0 \in U_{ad}, \quad \sigma_0 \in \Sigma_{ad}(0), \quad \langle \sigma_0, \varepsilon(u_0) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(0), u_0 \rangle_V. \quad (4.17)$$

Remarque 4.1. Du point de vue mathématique, les hypothèses (4.7), (4.8) et (4.10) nous permettent de définir deux opérateurs notés encore \mathcal{E} et G de la façon suivante.

$$\mathcal{E} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad \mathcal{E}\sigma(\cdot) = \mathcal{E}_{ijkh}(\cdot)\sigma_{kh}(\cdot) \quad \forall \sigma \in \mathcal{H} \text{ p.p. dans } \Omega$$

$$G : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \times L^2(\Omega)^M \longrightarrow \mathcal{H} \text{ et } G(\sigma, \varepsilon, \theta) = G(\cdot, \sigma(\cdot), \varepsilon(\cdot), \theta(\cdot)) \quad \forall \sigma, \varepsilon \in \mathcal{H}$$

p.p. dans Ω .

De plus, d'après (4.7) et (4.8) les deux opérateurs \mathcal{E} et G vérifient :

$$\left. \begin{aligned} |\mathcal{E}\sigma|_{\mathcal{H}} &\leq \beta |\sigma|_{\mathcal{H}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H} \\ \langle \mathcal{E}\sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \sigma, \mathcal{E}\tau \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \\ \langle \mathcal{E}\sigma, \sigma \rangle_{\mathcal{H}} &\geq \alpha |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned} |G(\sigma_1, \varepsilon_1, \theta_1) - G(\sigma_2, \varepsilon_2, \theta_2)|_{\mathcal{H}} &\leq \\ L \left(|\sigma_1 - \sigma_2|_{\mathcal{H}} + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|_{\mathcal{H}} + |\theta_1 - \theta_2|_{L^2(\Omega)^M} \right) & \\ \forall \sigma_i, \varepsilon_i \in \mathcal{H}, \quad \theta_i \in L^2(\Omega)^M \quad (i = 1, 2) . & \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

4.1.2 Formulations variationnelles

Dans cette partie, on va donner deux formulations variationnelles du problème (P).

Dans la première formulation (P_1), l'inconnue principale est le champ des déplacements u , alors que dans la deuxième formulation (P_2), l'inconnue principale est le champ des contraintes σ . Le résultat conduisant à ces deux formulations est le suivant.

Lemme 7 Si le couple de fonctions (u, σ) est une solution du problème (P) , alors :

$$u(t) \in U_{ad}, \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t), v - u(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (4.20)$$

$$\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(t), \quad \langle \tau - \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(t) . \quad (4.21)$$

Démonstration. Soient $v \in U_{ad}$ et $t \in [0, T]$.

En utilisant (4.2) et le théorème A.2.5 on obtient :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(t), v - u(t) \rangle_V + \int_{\Gamma} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) ds$$

et moyennant (4.3), (4.4) et (4.13), il en découle :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), v - u(t) \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) ds.$$

En tenant compte maintenant de (4.5), l'égalité précédente donne :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), v - u(t) \rangle_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) v_\nu ds . \quad (4.22)$$

L'inégalité (4.20) est à présent le résultat de (4.22), (4.15) et (4.5). De plus, (4.3), (4.5)

et (4.15) impliquent $u(t) \in U_{ad}$.

En prenant $v = 2u(t) \in U_{ad}$ puis $v = 0 \in U_{ad}$ dans (4.20) on obtient

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), u(t) \rangle_V \quad (4.23)$$

et, moyennant (4.23), (4.20) et (4.16), il résulte $\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(t)$.

L'inégalité (4.21), est à présent une conséquence de (4.16) et (4.23).

Le lemme précédent nous permet donc de donner les deux formulations faibles suivantes, (P_1) et (P_2) pour le problème mécanique (P) :

Problème P₁. Trouver le champ des déplacements $u: [0, T] \rightarrow H_1$ et le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t)) + G(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \theta(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T] \quad (4.24)$$

$$u(t) \in U_{ad}, \quad \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t), v - u(t) \rangle_V \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.25)$$

$$u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0. \quad (4.26)$$

Problème P₂. Trouver le champ des déplacements $u: [0, T] \rightarrow H_1$ et le champ des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}(t)) + G(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \theta(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T] \quad (4.27)$$

$$\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(t), \quad \langle \tau - \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.28)$$

$$u(0) = u_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0. \quad (4.29)$$

Remarque 4.2. Grâce au lemme 7, dire que le problème (P_1) est une formulation faible du problème mécanique (P) signifie que si (u, σ) est une solution régulière du problème mécanique (P) , alors (u, σ) est solution du problème variationnel (P_1) .

En outre, on peut montrer que toute solution du problème variationnel (P_1) , vérifie

formellement le problème (P).

En effet, soient $t \in [0, T]$ et (u, σ) une solution du problème variationnel (P_1) . On va montrer que (u, σ) satisfait (4.2), (4.4) et (4.5).

En prenant $v = u(t) \pm \varphi \in U_{ad}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ dans l'inégalité (4.13) on obtient

$$\text{Div} \sigma(t) + f(t) = 0 \quad \text{dans } H. \quad (4.30)$$

En utilisant le théorème A.2.5, (4.25), (4.15) et (4.13) on obtient:

$$\langle \sigma(t) \nu, \gamma(v - u(t)) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \geq \langle g(t), \gamma(v - u(t)) \rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \quad \forall v \in U_{ad} \quad (4.31)$$

En prenant $v = u(t) \pm w \in U_{ad}$ pour tout $w \in H_1$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ dans (4.31), il résulte grâce à (5.45) :

$$\sigma(t) \nu = g(t) \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (4.32)$$

En prenant maintenant $v = u(t) \pm w \in U_{ad}$ pour tout $w \in H_1$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $w_\nu = 0$ sur Γ_3 dans (4.31), il résulte moyennant (4.32) et (5.47) :

$$\sigma_\tau(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.33)$$

En prenant cette fois-ci, $v = u(t) + w \in U_{ad}$ pour tout $w \in H_1$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $w_\tau = 0, w_\nu \leq 0$ sur Γ_3 dans (4.31) il résulte compte tenu de (4.32), (4.33) et (5.47) :

$$\sigma_\nu(t) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.34)$$

Finalement, en prenant $v = 2u(t) \in U_{ad}$ puis $v = 0 \in U_{ad}$ dans (4.31), il vient compte tenu de (4.32), (4.33), (4.34) ainsi du fait que $u(t) \in U_{ad}$:

$$\sigma_\nu(t) u_\nu(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.35)$$

Des relations (4.30), (4.32) – (4.35) on peut donc affirmer que (u, σ) est aussi solution du problème mécanique (P) .

Remarque 4.3. Avec les mêmes arguments utilisés dans la remarque précédente on peut vérifier facilement que toute solution régulière du problème mécanique (P) est une solution du problème variationnel (P_2) et vérifie formellement (P) .

4.1.3 Premier résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

Théorème 15 *Sous les hypothèses (4.7) – (4.9) et (4.17), le problème variationnel (P_1) admet une solution unique (u, σ) ayant la régularité :*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T, H_1), \quad \sigma \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1).$$

Pour établir ce théorème, nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

On suppose que (4.7) – (4.9) et (4.17) sont satisfaites et pour tout $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ soit $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$, la fonction définie par :

$$Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s) ds + \sigma_0 - \mathcal{E}\mathcal{E}(u_0) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.36)$$

On considère alors le problème elliptique suivant.

Problème $P_{1\eta}$. Trouver $u_\eta : [0, T] \rightarrow H_1$ et $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\sigma_\eta(t) = \mathcal{E}\mathcal{E}(u_\eta(t)) + Z_\eta(t) \quad (4.37)$$

$$u_\eta(t) \in U_{ad}, \quad \langle \sigma_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t), v - u_\eta(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}, t \in [0, T] \quad (4.38)$$

Lemme 8 *Le problème variationnel $(P_{1\eta})$, admet une solution unique (u_η, σ_η) ayant la régularité :*

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, H_1), \quad \sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1).$$

De plus on a :

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \sigma_\eta(0) = \sigma_0. \quad (4.39)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. En utilisant (4.14), (4.15), (4.7) et l'inégalité de Korn on obtient grâce au théorème A.1.10 l'existence et l'unicité d'un élément $u_\eta(t)$ tel que:

$$\left. \begin{aligned} u_\eta(t) \in U_{ad} \text{ et} \\ \langle \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Z_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \\ \geq \langle F(t), v - u_\eta(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

En prenant maintenant $\sigma_\eta(t) \in \mathcal{H}$ définie par (4.37), on obtient (4.38).

On remarque à présent qu'en prenant $v = u_\eta(t) \pm \varphi$ dans (4.38) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ il résulte à partir de (4.13) et (5.37) :

$$\text{Div} \sigma_\eta(t) + f(t) = 0 \quad (4.41)$$

On en déduit alors $\sigma_\eta(t) \in \mathcal{H}_1$.

On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité du couple $(u_\eta(t), \sigma_\eta(t)) \in H_1 \times \mathcal{H}_1$ solution

du problème $(P_{1\eta})$ (l'unicité de $\sigma_\eta(t)$ provient de celle de $u_\eta(t)$ moyennant (4.7)). La condition initiale (4.39) provient directement de (4.17) et de l'unicité de la solution du problème $(P_{1\eta})$ à l'instant $t = 0$.

Soient maintenant t_1 et $t_2 \in [0, T]$.

En appliquant (4.40) pour $\{t = t_1, v = u_\eta(t_2)\}$ et $\{t = t_2, v = u_\eta(t_1)\}$ puis en faisant la somme entre les deux expressions obtenues, il résulte moyennant (4.7) et (5.37)

$$|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)|_{H_1} \leq c \left(|F(t_1) - F(t_2)|_V + |Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}} \right). \quad (4.42)$$

En utilisant à présent (4.37), (4.41) et (4.42), il vient:

$$|\sigma_\eta(t_1) - \sigma_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}_1} \leq c \left(|F(t_1) - F(t_2)|_V + |Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}} \right) \quad (4.43)$$

De (4.42), (4.43), (4.14) et en tenant compte de la régularité $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$, il résulte que $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, H_1)$ et $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$.

Considérons les hypothèses (4.8) et la remarque 4.1, on peut définir l'opérateur

$\Lambda : L^\infty(0, T, \mathcal{H}) \longrightarrow L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ par :

$$\Lambda\eta(t) = G(\sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \theta(t)) \quad \forall \eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H}) \quad (4.44)$$

où, pour tout $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$, (u_η, σ_η) représente la solution du problème variationnel $(P_{1\eta})$ donnée par le lemme 8.

Lemme 9 *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $\eta^* \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$.*

Démonstration. Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$, $t \in [0, T]$.

En utilisant (4.40) pour $\{\eta = \eta_1, v = u_{\eta_2}(t)\}$ et $\{\eta = \eta_2, v = u_{\eta_1}(t)\}$ puis en faisant la somme des deux expressions obtenues, on obtient moyennant (4.7) :

$$|\varepsilon(u_{\eta_1}(t)) - \varepsilon(u_{\eta_2}(t))|_{\mathcal{H}} \leq c |Z_{\eta_1}(t) - Z_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}}. \quad (4.45)$$

D'après (4.37) et (4.45) on a :

$$|\sigma_{\eta_1}(t) - \sigma_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}} \leq c |Z_{\eta_1}(t) - Z_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}} \quad (4.46)$$

En tenant compte maintenant de (4.44), (4.45) et (4.46), il résulte:

$$\begin{aligned} |\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} &= |G(\sigma_{\eta_1}(t), \varepsilon(u_{\eta_1}(t)), \theta(t)) - G(\sigma_{\eta_2}(t), \varepsilon(u_{\eta_2}(t)), \theta(t))|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq L (|\sigma_{\eta_1}(t) - \sigma_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}} + |\varepsilon(u_{\eta_1}(t)) - \varepsilon(u_{\eta_2}(t))|_{\mathcal{H}}) \leq c |Z_{\eta_1}(t) - Z_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

où c est une constante positive. Et moyennant (4.36) on en déduit :

$$|\Lambda\eta_1(t) - \Lambda\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}} ds \quad (4.47)$$

Notant par Λ^p la composée d'ordre p de l'opérateur Λ , il découle de (4.47) :

$$|\Lambda^p\eta_1(t) - \Lambda^p\eta_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq c^p \int_0^t \int_0^v \dots \int_0^q |\eta_1(r) - \eta_2(r)|_{\mathcal{H}} dr \dots ds$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $p \in \mathbb{N}$. Cette inégalité donne alors

$$|\Lambda^p\eta_1 - \Lambda^p\eta_2|_{0, \infty, \mathcal{H}} \leq \frac{c^p}{p!} |\eta_1 - \eta_2|_{0, \infty, \mathcal{H}} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (4.48)$$

et, puisque $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{c^p}{p!} = 0$, (4.48) entraîne, pour p assez grand, que l'opérateur Λ^p est une contraction dans $L^\infty(0, T, \mathcal{H})$. Donc il existe un seul élément $\eta^* \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ tel que

$$\Lambda^p\eta^* = \eta^*$$

Moyennant les égalités

$$\Lambda^p(\Lambda\eta^*) = \Lambda^{p+1}\eta^* = \Lambda(\Lambda^p\eta^*) = \Lambda\eta^*$$

ainsi que l'unicité du point fixe de Λ^p , il vient que η^* est l'unique point fixe de l'opérateur Λ . Nous avons maintenant tous les éléments permettant la démonstration

du théorème 15.

Démonstration du théorème 15.

Existence. Soit $\eta^* \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ le point fixe de Λ et soient $u_{\eta^*} \in W^{1,\infty}(0, T, H_1)$

et $\sigma_{\eta^*} \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$ les fonctions données par le lemme 8 pour $\eta = \eta^*$.

En utilisant (4.36), on obtient en dérivant (4.37) par rapport au temps :

$$\dot{\sigma}_{\eta^*}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*}(t)) + \eta^*(t) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$

et à partir de (4.44), il résulte :

$$\eta^*(t) = \Lambda\eta^*(t) = G(\sigma_{\eta^*}(t), \varepsilon(u_{\eta^*}(t)), \theta(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

On obtient ainsi :

$$\dot{\sigma}_{\eta^*}(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*}(t)) + G(\sigma_{\eta^*}(t), \varepsilon(u_{\eta^*}(t)), \theta(t)) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$

et moyennant le lemme 8, il résulte que le couple $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$ est solution du problème (P_1) .

Unicité. Soit (u, σ) une solution du problème (P_1) ayant la régularité :

$$u \in W^{1,\infty}(0, T, H_1), \quad \sigma \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$$

En notant par $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ la fonction définie par :

$$\eta(t) = G(\sigma(t), \varepsilon(u(t)), \theta(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.49)$$

il vient à partir de (4.36) que le couple (u, σ) est solution de $(P_{1\eta})$. Comme ce problème admet une solution unique (σ_η, u_η) , il résulte :

$$u = u_\eta, \quad \sigma = \sigma_\eta. \quad (4.50)$$

En utilisant (4.44), (4.50), (4.49) il vient :

$$\Lambda\eta = \eta$$

et vu l'unicité du point fixe de Λ , il résulte :

$$\eta = \eta^*. \quad (4.51)$$

L'unicité du théorème 15 est maintenant une conséquence de (4.50) et (4.51).

4.1.4 Second résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

Théorème 16 *Sous les hypothèses (4.7) – (4.9) et (4.17) le problème variationnel (P_2) admet une solution unique (u, σ) ayant la régularité :*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T, V), \quad \sigma \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1).$$

Démonstration. Pour établir ce théorème, remarquons d'abord que (4.28) est équivalente à l'inclusion différentielle :

$$0 \in \varepsilon(u(t)) + \partial\psi_{\Sigma_{ad}}(\sigma(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.52)$$

où $\partial\psi_{\Sigma_{ad}(t)}$ représente le sous-différentielle de la fonction indicatrice $\psi_{\Sigma_{ad}}$.

La difficulté majeure pour l'étude du problème (P_2) provient ainsi de la dépendance de l'ensemble $\Sigma_{ad}(t)$ par rapport au temps: c'est pour cela qu'on va remplacer (4.52) par une autre inclusion différentielle associée à un ensemble convexe fixe par rapport au temps Σ_0 défini par :

$$\Sigma_0 = \{\tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}\}. \quad (4.53)$$

On introduit aussi les notations suivantes.

$$\tilde{\sigma} = \varepsilon(F) \quad (4.54)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - \tilde{\sigma}, \quad \bar{\sigma}_0 = \sigma_0 - \tilde{\sigma}(0). \quad (4.55)$$

On remarque alors que

$$\Sigma_{ad}(t) = \tilde{\sigma}(t) + \Sigma_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.56)$$

Sous ces conditions, on peut énoncer le résultat suivant.

Lemme 10 *Le couple (u, σ) est solution du problème variationnel (P_2) ayant la régularité $u \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\sigma \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$ si et seulement si le couple $(u, \bar{\sigma})$ est solution du problème*

$$\varepsilon(\dot{u}(t)) = \mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\sigma}} - \mathcal{E}^{-1}G(\bar{\sigma} + \tilde{\sigma}, \varepsilon(u), \theta) + \mathcal{E}^{-1}\dot{\tilde{\sigma}} \quad (4.57)$$

$$\bar{\sigma}(t) \in \Sigma_0, \quad \langle \tau - \bar{\sigma}(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_0, \quad t \in [0, T] \quad (4.58)$$

$$u(0) = u_0, \quad \bar{\sigma}(0) = \bar{\sigma}_0 \quad (4.59)$$

ayant la régularité $u \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\bar{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$.

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Remarquons tout d'abord qu'à partir de (4.54)

et (4.12) on obtient :

$$\langle \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (4.60)$$

En prenant alors $v \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, il résulte de (4.60) compte tenu du théorème A.2.5 et (4.13) que

$$\text{Div} \tilde{\sigma}(t) = -f(t) \in \mathcal{H}.$$

La relation (4.9) entraîne alors :

$$\tilde{\sigma} \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1). \quad (4.61)$$

Le lemme 10 est maintenant une conséquence de (4.55), (4.56) et (4.61).

On va maintenant s'intéresser à l'étude du problème (4.57) – (4.59) et on va utiliser une technique de point fixe similaire à celle utilisée pour la résolution du problème (P_1) .

Soit alors pour tout $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$, la fonction $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$ définie par :

$$Z_\eta(t) = \int_0^t \eta(s) ds + \varepsilon(u_0) - \mathcal{E}^{-1}\sigma_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.62)$$

On considère alors le problème variationnel suivant.

Problème $P_{2\eta}$. Trouver $u_\eta : [0, T] \rightarrow H_1$ et $\sigma_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\varepsilon(u_\eta(t)) = \mathcal{E}^{-1}\sigma_\eta(t) + Z_\eta(t) + \mathcal{E}^{-1}\tilde{\sigma}(t) \quad (4.63)$$

$$\sigma_\eta(t) \in \Sigma_0, \quad \langle \tau - \sigma_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_0 \quad (4.64)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Lemme 11 *Le problème variationnel $(P_{2\eta})$ admet une solution unique (u_η, σ_η) ayant la régularité $u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$. De plus on a :*

$$u_\eta(0) = u_0, \quad \sigma_\eta(0) = \bar{\sigma}_0. \quad (4.65)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Sachant que Σ_0 est un convexe fermé non vide (car $0 \in \Sigma_0$) de \mathcal{H} , on obtient grâce à (4.7) et (4.61), moyennant le théorème A.2.8. l'existence et l'unicité de la fonction $\sigma_\eta(t)$ telle que

$$\sigma_\eta(t) \in \Sigma_0, \quad \langle \tau - \sigma_\eta(t), \mathcal{E}^{-1}\sigma_\eta(t) + Z_\eta(t) + \mathcal{E}^{-1}\tilde{\sigma}(t) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_0. \quad (4.66)$$

De plus, en appliquant (4.66) pour $\{t = t_1, \tau = \sigma_\eta(t_2)\}$ et $\{t = t_2, \tau = \sigma_\eta(t_1)\}$ puis en faisant la somme entre les deux expressions obtenues, il résulte compte tenu de l'hypothèse (4.7) :

$$|\sigma_\eta(t_1) - \sigma_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}} \leq c \left(|Z_\eta(t_1) - Z_\eta(t_2)|_{\mathcal{H}} + |\tilde{\sigma}(t_1) - \tilde{\sigma}(t_2)|_{\mathcal{H}} \right) \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T]. \quad (4.67)$$

Remarquons maintenant, puisque $\sigma_\eta(t) \in \Sigma_0$, qu'en prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ dans (4.53), il résulte en utilisant le théorème A.2.5 :

$$\text{Div} \sigma_\eta(t) = 0. \quad (4.68)$$

En tenant compte à présent de la régularité $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$ ainsi que de (4.61), (4.67) et (4.68) on obtient :

$$\sigma_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1). \quad (4.69)$$

On peut donc introduire maintenant la fonction $\varepsilon_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$ donnée par :

$$\varepsilon_\eta(t) = \mathcal{E}^{-1} \sigma_\eta(t) + Z_\eta(t) + \mathcal{E}^{-1} \tilde{\sigma}(t) \quad (4.70)$$

et en reportant cette expression dans (4.66), il résulte :

$$\langle \tau - \sigma_\eta(t), \varepsilon_\eta(t) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_0. \quad (4.71)$$

On définit ainsi le sous-espace \mathcal{V} de \mathcal{H} par :

$$\mathcal{V} = \{ \tau \in \mathcal{H} / \text{Div} \tau = 0 \text{ dans } \Omega, \tau \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \}.$$

Sachant que $\sigma_\eta(t) \in \Sigma_0$, on peut aisément vérifier que $\sigma_\eta(t) \pm Z \in \Sigma_0$ pour tout $Z \in \mathcal{V}$. En appliquant alors (4.71) pour $\tau = \sigma_\eta(t) \pm Z$, il résulte :

$$\langle Z, \varepsilon_\eta(t) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall Z \in \mathcal{V}.$$

Compte tenu du théorème A.2.6, on obtient alors l'existence de $u_\eta(t) \in V$ tel que

$$\varepsilon_\eta(t) = \varepsilon(u_\eta(t)). \quad (4.72)$$

De plus, en utilisant (5.37), on peut établir l'unicité de cet élément $u_\eta(t)$. D'autre part la régularité $\varepsilon_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V)$ entraîne :

$$u_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, V). \quad (4.73)$$

Il résulte donc à partir de (4.70) – (4.72) que (u_η, σ_η) est une solution unique du problème $(P_{2\eta})$. Finalement la condition initiale (4.65) est une conséquence de (4.17), (4.54) et (4.55) et de l'unicité de la solution du problème $(P_{2\eta})$ à l'instant $t = 0$.

Le lemme précédent ainsi que les hypothèses (4.8) et (4.10) nous permettent de définir l'opérateur $\Lambda : L^\infty(0, T, \mathcal{H}) \longrightarrow L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ par :

$$\Lambda\eta = -\mathcal{E}^{-1}G(\sigma_\eta + \tilde{\sigma}, \varepsilon(u_\eta), \theta) \quad (4.74)$$

où pour tout $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$, (u_η, σ_η) désigne la solution du problème $(P_{2\eta})$. De plus on a la propriété suivante.

Lemme 12 *L'opérateur Λ admet un point fixe $\eta^* \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$.*

Démonstration. Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ et $t \in [0, T]$.

En utilisant (4.64) pour $\{\eta = \eta_1, \tau = \sigma_{\eta_2}(t)\}$ et $\{\eta = \eta_2, \tau = \sigma_{\eta_1}(t)\}$ puis en faisant la différence des deux expressions obtenues, on obtient moyennant (4.18):

$$|\sigma_{\eta_1}(t) - \sigma_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}} \leq c |Z_{\eta_1}(t_1) - Z_{\eta_2}(t_2)|_{\mathcal{H}}. \quad (4.75)$$

A partir de (4.63) et l'inégalité précédente, il vient alors :

$$|\varepsilon(u_{\eta_1}(t)) - \varepsilon(u_{\eta_2}(t))|_{\mathcal{H}} \leq c |Z_{\eta_1}(t_1) - Z_{\eta_2}(t_2)|_{\mathcal{H}}. \quad (4.76)$$

En tenant compte de (4.74), (4.18), (4.75) et (4.76) on déduit :

$$|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2|_{\mathcal{H}} \leq c |Z_{\eta_1}(t) - Z_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}} \quad (4.77)$$

et moyennant (4.62), on en déduit :

$$|\Lambda\eta_1 - \Lambda\eta_2|_{\mathcal{H}} \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)| ds. \quad (4.78)$$

On remarque ainsi que les expressions (4.78) et (4.47) sont identiques. Le lemme 12 peut donc être démontré en utilisant les mêmes arguments que ceux de la fin de la démonstration du lemme 9.

Démonstration du théorème 16.

Existence. Soit $\eta^* \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ le point fixe de l'opérateur Λ et soient $u_{\eta^*} \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\sigma_{\eta^*} \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$ les fonctions données par le lemme 11 pour $\eta = \eta^*$. En utilisant (4.62), on obtient en dérivant (4.63) par rapport au temps :

$$\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*}(t)) = \mathcal{E}^{-1}\dot{\sigma}_{\eta^*}(t) + \eta^*(t) + \mathcal{E}^{-1}\tilde{\sigma}(t) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$

et à partir de (4.74), il résulte :

$$\eta^*(t) = \Lambda\eta^*(t) = -\mathcal{E}^{-1}G(\sigma_{\eta^*}(t) + \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(u_{\eta^*}(t)), \theta(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

On obtient ainsi :

$$\varepsilon(\dot{u}_{\eta^*}(t)) = \mathcal{E}^{-1}\dot{\sigma}_{\eta^*}(t) - \mathcal{E}^{-1}G(\sigma_{\eta^*}(t) + \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(u_{\eta^*}(t)), \theta(t)) + \mathcal{E}^{-1}\tilde{\sigma}(t)$$

p.p. $t \in]0, T[$.

Moyennant alors le lemme 11, il résulte que le couple $(u_{\eta^*}, \sigma_{\eta^*})$ est solution du problème (4.57) – (4.59).

Unicité.

Soit (u, σ) une solution du problème (4.57) – (4.59).

En notant par $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ la fonction définie par :

$$\eta(t) = -\mathcal{E}^{-1}G(\sigma(t) + \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(u(t)), \theta(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.79)$$

il vient à partir de (4.62) que le couple (u, σ) est solution de $(P_{2\eta})$. Comme ce problème admet une solution unique (u_η, σ_η) , il résulte :

$$u = u_\eta, \quad \sigma = \sigma_\eta. \quad (4.80)$$

En utilisant maintenant (4.74), (4.80) et (4.79) il vient :

$$\Lambda\eta = \eta$$

et vu l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , on conclut à

$$\eta = \eta^* \quad (4.81)$$

L'unicité du théorème 16 est maintenant une conséquence de (4.80) et (4.81).

4.2 Propriétés de la solution

Dans cette partie nous étudions les propriétés des solutions (u, σ) données par les théorèmes 15 et 16. Nous commençons par un résultat faisant le lien entre les solutions respectives des problèmes variationnels (P_1) et (P_2) .

4.2.1 Un résultat d'équivalence

Théorème 17 *Supposons que les conditions (4.7) – (4.9) et (4.17) sont remplies et soient $u \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\sigma \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$. Alors (u, σ) est solution du*

problème variationnel (P_1) si et seulement si (u, σ) est solution du problème variationnel (P_2) .

Démonstration. Il suffit d'établir l'équivalence entre (4.25) et (4.28).

Soient alors $t \in [0, T]$, $u \in W^{1,\infty}(0, T, V)$ et $\sigma \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$.

Supposons que (u, σ) est solution de (4.25).

En prenant $v = 2u(t) \in U_{ad}$ et $v = 0 \in U_{ad}$ dans (4.25) on obtient :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), u(t) \rangle_V. \quad (4.82)$$

Il résulte alors à partir de (4.25), (4.82) et (4.16) que $\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(t)$. L'inégalité variationnelle (4.28) est maintenant une conséquence de (4.16) et (4.82). On en déduit donc que (u, σ) est solution de (4.28).

Réciproquement, supposons que (u, σ) est solution de (4.28).

On va dans un premier temps montrer que $u(t) \in U_{ad}$; pour cela, on va procéder par l'absurde.

Supposons donc $u(t) \notin U_{ad}$ et notons par $Pu(t)$ la projection de $u(t)$ sur le convexe fermé $U_{ad} \subset V$. Ceci se traduit compte tenu du théorème A.1.5 par :

$$\langle Pu(t) - u(t), v \rangle_V \geq \langle Pu(t) - u(t), Pu(t) \rangle_V > \langle Pu(t) - u(t), u(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}.$$

De cette double inégalité, on peut déduire l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle Pu(t) - u(t), v \rangle_V > \alpha > \langle Pu(t) - u(t), u(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (4.83)$$

On introduit maintenant la fonction $\tilde{\tau}$ définie par :

$$\tilde{\tau}(t) = \varepsilon(Pu(t) - u(t)) \in \mathcal{H}. \quad (4.84)$$

Moyennant (4.12), (4.83) et (4.84), on déduit :

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha > \langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (4.85)$$

En prenant $v = 0$ dans (4.85), il vient :

$$\alpha < 0. \quad (4.86)$$

Supposons à présent qu'il existe $v \in U_{ad}$ tel que

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} < 0. \quad (4.87)$$

En utilisant (4.85), puisque $\lambda v \in U_{ad}$ pour tout $\lambda \geq 0$ il résulte :

$$\lambda \langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} > \alpha \quad \forall \lambda \geq 0$$

et, en passant à la limite quand $\lambda \rightarrow \infty$, on obtient $\alpha \leq -\infty$, ce qui est en contradiction avec le fait que α soit un réel. On en déduit alors que :

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}.$$

moyennant (4.53), cette dernière inégalité signifie que $\tilde{\tau}(t) \in \Sigma_0$.

Il vient alors en tenant compte de (4.56) que $\tilde{\tau}(t) + \tilde{\sigma}(t) \in \Sigma_{ad}(t)$, où $\tilde{\sigma}$ est donnée par (4.54).

En appliquant maintenant (4.28) pour $\tau = \tilde{\tau}(t) + \tilde{\sigma}(t)$, on obtient :

$$\langle \tilde{\tau}(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

cette inégalité implique compte tenu de (4.85), (4.86) :

$$\langle \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} < 0. \quad (4.88)$$

En outre, du fait que $\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t) \in \Sigma_0$, il vient à partir de (4.58) appliquée pour $\tau = 2(\sigma(t) - \tilde{\sigma}(t)) \in \Sigma_0$, sachant (4.55) :

$$\langle \sigma(t) - \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0. \quad (4.89)$$

On remarque ainsi que (4.88) et (4.89) sont en contradiction, ce qui implique que $u(t) \in U_{ad}$.

En tenant compte maintenant des définitions (4.12) et (4.54) il vient :

$$\langle \tilde{\sigma}(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (4.90)$$

D'où on obtient $\tilde{\sigma}(t) \in \Sigma_{ad}(t)$. Il résulte alors de l'inégalité (4.28) appliquée pour $\tau = \tilde{\sigma}(t)$ et de (4.90) :

$$\langle F(t), u(t) \rangle_V \geq \langle \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (4.91)$$

Sachant d'autre part que $\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(t)$ et $u(t) \in U_{ad}$, on obtient grâce à (4.16) :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t), u(t) \rangle_V. \quad (4.92)$$

On conclut alors à partir de (4.91) et (4.92) l'égalité :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(u(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), u(t) \rangle_V. \quad (4.93)$$

De plus, sachant que $\sigma(t) \in \Sigma_{ad}(t)$, il résulte de (4.16) :

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t), v \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (4.94)$$

L'inégalité (4.25) est maintenant une conséquence de (4.93) et (4.94). Ceci nous permet de déduire que (u, σ) est solution de (4.25).

D'où l'équivalence annoncée entre les problèmes variationnels (P_1) et (P_2) .

4.2.2 Dépendance de la solution par rapport au paramètre

La dépendance de la solution (u, σ) par rapport au paramètre θ est donnée par le résultat suivant.

Théorème 18 *Sous les hypothèses (4.7)–(4.9), soit (u_i, σ_i) la solution variationnelle du problème (P), associée au paramètre θ_i telle que (4.10) soit vérifiée. Alors il existe une constante positive c qui ne dépend que de Ω , Γ_1 , \mathcal{E} , G et T telle que*

$$|u_1 - u_2|_{L^\infty(0,T,H_1)} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{L^\infty(0,T,\mathcal{H}_1)} \leq c |\theta_1 - \theta_2|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^M)}.$$

Démonstration. Soient $t \in [0, T]$ et $i \in \{1, 2\}$. En utilisant (4.25) on obtient :

$$u_i(t) \in U_{ad}, \quad \langle \sigma_i(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_i(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \langle F(t), v - u_i(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad} \quad (4.95)$$

D'autre part, à partir de (4.24) et (4.27) il résulte :

$$\sigma_i(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_i(t)) + Z_i(t) \quad (4.96)$$

où Z_i est définie par :

$$Z_i(t) = \int_0^t G(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), \theta_i(s)) ds + \sigma_0 - \mathcal{E}\varepsilon(u_0) \quad (4.97)$$

En utilisant (4.20) pour $\{i = 1, v = u_2(t)\}$ puis $\{i = 2, v = u_1(t)\}$ et en faisant la différence entre les deux expressions obtenues, il vient moyennant (4.96), (4.7) et l'inégalité de Korn :

$$|u_1(t) - u_2(t)|_{H_1} \leq c |Z_1(t) - Z_2(t)|_{\mathcal{H}}.$$

De plus, en tenant compte de (4.96) et (4.7), cette dernière inégalité entraîne :

$$|u_1(t) - u_2(t)|_{H_1} + |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}} \leq c |Z_1(t) - Z_2(t)|_{\mathcal{H}}.$$

D'autre part, (4.95) appliquée pour $v = u_i(t) \pm \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, donne moyennant (4.13) et théorème A.2.5 :

$$\text{Div} \sigma_i(t) + f_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

L'inégalité précédente devient alors :

$$|u_1(t) - u_2(t)|_{H_1} + |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1} \leq c |Z_1(t) - Z_2(t)|_{\mathcal{H}} \quad (4.98)$$

En utilisant maintenant (4.97) on obtient grâce à (4.19) :

$$\left. \begin{aligned} |Z_1(t) - Z_2(t)|_{\mathcal{H}} &\leq L \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1} ds + L \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{H_1} ds \\ &\quad + L \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)^M} ds \end{aligned} \right\} \quad (4.99)$$

De (4.98) et (4.99) on obtient:

$$\left. \begin{aligned} |u_1(t) - u_2(t)|_{H_1} + |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1} &\leq c \int_0^t |\sigma_1(s) - \sigma_2(s)|_{\mathcal{H}_1} ds + \\ &\quad c \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{H_1} ds + c \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)^M} ds \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

En appliquant le lemme A.2.1 de Gronwall on obtient :

$$|u_1(t) - u_2(t)|_{H_1} + |\sigma_1(t) - \sigma_2(t)|_{\mathcal{H}_1} \leq c \int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Omega)^M} ds$$

Il s'en suit alors :

$$|u_1 - u_2|_{L^\infty(0,T,H_1)} + |\sigma_1 - \sigma_2|_{L^\infty(0,T,\mathcal{H}_1)} \leq c |\theta_1 - \theta_2|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^M)},$$

d'où le résultat cherché.

Le résultat du théorème 18 est important du point de vue mécanique. Il montre que des petites perturbations dans le paramètre θ n'entraînent que des petites perturbations dans la solution (u, σ) du problème de contact sans frottement.

4.2.3 Un résultat de pénalisation

Dans cette partie, on va étudier le problème pénalisé du problème (4.1) – (4.6) c'est-à-dire on va remplacer les conditions aux limites de Signorini (4.5), par les conditions aux limites suivantes valables sur Γ_3 .

$$\begin{cases} \sigma_\nu = 0 & \text{si } u_\nu < 0 \\ -h < \sigma_\nu < 0, \sigma_\tau = 0 & \text{si } u_\nu = 0 \\ \sigma_\nu = -h & \text{si } u_\nu > 0 \end{cases}$$

où h est un paramètre destiné à tendre vers ∞ .

Soit donc $h > 0$ et considérons le problème pénalisé du problème (4.1) – (4.6):

Problème P^h . Trouver le champ des déplacements $u^h : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma^h : \Omega \times [0, T] \longrightarrow S_N$ tels que

$$\dot{\sigma}^h = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}^h) + G(\sigma^h, \varepsilon(u^h), \theta) \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (4.101)$$

$$\text{Div}\sigma^h + f = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[\quad (4.102)$$

$$u^h = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\quad (4.103)$$

$$\sigma^h \nu = g \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[\quad (4.104)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_\nu^h = 0 \quad \text{si } u_\nu^h < 0 \\ -h < \sigma_\nu^h < 0, \sigma_\tau^h = 0 \quad \text{si } u_\nu^h = 0 \\ \sigma_\nu^h = -h \quad \text{si } u_\nu^h > 0 \end{array} \right\} \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\quad (4.105)$$

$$u^h(0) = u_0, \quad \sigma^h(0) = \sigma_0. \quad (4.106)$$

Comme dans le chapitre 2, l'interprétation mécanique des conditions aux limites de contact (4.105) est la suivante : le corps viscoplastique occupant le domaine Ω ne peut pénétrer dans la base que lorsqu'un seuil h est atteint par la réaction normale. Le paramètre h peut donc être interprété comme " le seuil d'effondrement " de la base. Il s'agit donc ici d'étudier le comportement de la solution (u^h, σ^h) du problème de contact sans frottement d'un corps viscoplastique avec une base déformable quand son seuil d'effondrement h tend vers ∞ .

Dans l'étude du problème pénalisé (P^h) , on suppose que les hypothèses (4.7) – (4.9) sont réalisées et on considère les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $j : H_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (4.107)$$

$$j(v) = \int_{\Gamma_3} \varphi(v_\nu) ds \quad \forall v \in H_1. \quad (4.108)$$

L'ensemble $\Sigma_{ad}^h(t)$ est défini pour $t \in [0, T]$ par :

$$\Sigma_{ad}^h(t) = \{ \tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + h j(v) \geq \langle F(t), v \rangle_V, \forall v \in V \}. \quad (4.109)$$

Pour étudier le problème (P^h) , on donne quelques résultats préliminaires.

Lemme 13 Si (u^h, σ^h) est une solution du problème (P^h) alors :

$$u^h(t) \in V, \langle \sigma^h(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + hj(v) - hj(u^h(t)) \geq \langle F(t), v - u^h(t) \rangle_V \quad (4.110)$$

$$\sigma^h(t) \in \Sigma_{ad}^h(t), \quad \langle \tau - \sigma^h(t), \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}^h(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.111)$$

Démonstration. Soient $v \in V$ et $t \in [0, T]$. En utilisant (4.102), et théorème A.2.5 on obtient :

$$\langle \sigma^h(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(t), v - u^h(t) \rangle_H + \int_{\Gamma} \sigma^h(t) \nu \cdot (v - u^h(t)) ds$$

et moyennant (4.103) – (4.105) et (4.13), il résulte :

$$\langle \sigma^h(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F(t), v - u^h(t) \rangle_V + \int_{\Gamma} \sigma_{\nu}^h(t) (v_{\nu} - u_{\nu}^h(t)) ds \quad (4.112)$$

De plus, à partir de (4.107) et (4.105) il vient :

$$\sigma_{\nu}^h(v_{\nu} - u_{\nu}^h(t)) \geq h\varphi(u_{\nu}^h(t)) - h\varphi(v_{\nu}) \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.113)$$

L'inégalité (4.110) est à présent une conséquence de (4.112), (4.113) et (4.108). De plus (4.11) et (4.103) entraînent $u^h(t) \in V$.

En prenant maintenant $v = 2u^h(t) \in V$ puis $v = 0 \in V$ dans (4.110) on obtient sachant que j est une semi-norme :

$$\langle \sigma^h(t), \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + hj(u^h(t)) = \langle F(t), u^h(t) \rangle_V. \quad (4.114)$$

En utilisant (4.114), (4.110) et (4.109) il résulte $\sigma^h(t) \in \Sigma_{ad}^h(t)$. L'inégalité (4.111) est à présent une conséquence de (4.114) et (4.109).

Le lemme précédent nous permet donc de donner les deux formulations suivantes pour le problème (P^h) .

Problème P_1^h . Trouver le champ des déplacements $u^h : [0, T] \longrightarrow H_1$ et le champ des contraintes $\sigma^h : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\dot{\sigma}^h(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}^h(t)) + G(\sigma^h(t), \varepsilon(u^h(t), \theta(t))) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[\quad (4.115)$$

$$\left. \begin{aligned} u^h(t) \in V, \quad \langle \sigma^h(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + hj(v) - hj(u^h(t)) \geq \\ \langle F(t), v - u^h(t) \rangle_V \quad \forall v \in V, \quad t \in]0, T[\end{aligned} \right\} \quad (4.116)$$

$$u^h(0) = u_0, \quad \sigma^h(0) = \sigma_0. \quad (4.117)$$

Problème P_2^h . Trouver le champ des déplacements $u^h : [0, T] \longrightarrow H_1$ et le champ des contraintes $\sigma^h : [0, T] \longrightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\dot{\sigma}^h(t) = \mathcal{E}\varepsilon(\dot{u}^h(t)) + G(\sigma^h(t), \varepsilon(u^h(t), \theta(t))) \quad \text{p.p. } t \in]0, T[\quad (4.118)$$

$$\sigma^h(t) \in \Sigma_{ad}^h(t), \quad \langle \tau - \sigma^h(t), \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_{ad}^h \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.119)$$

$$u^h(0) = u_0, \quad \sigma^h(0) = \sigma_0. \quad (4.120)$$

Pour l'étude des problèmes (P_1^h) et (P_2^h) , nous faisons l'hypothèse suivante.

$$u_0 \in V, \quad \sigma_0 \in \Sigma_{ad}^h(0), \quad \langle \sigma_0, \varepsilon(u_0) \rangle_{\mathcal{H}} + hj(u_0) = \langle F(0), u_0 \rangle_V. \quad (4.121)$$

Cette hypothèse qui représente une condition de régularité et de compatibilité entre les données u_0, σ_0, f et g est remplie si (u_0, σ_0) satisfait à (4.102) – (4.105) à l'instant $t = 0$.

Maintenant et de la même manière que pour le problème mécanique (P) , on va établir pour le problème pénalisé (P^h) deux résultats d'existence et d'unicité relatifs aux deux formulations variationnelles (P_1^h) et (P_2^h) .

Théorème 19 *Sous les hypothèses (4.7) – (4.10) et (4.121) le problème (P_1^h) admet une solution unique (u^h, σ^h) ayant la régularité :*

$$u^h \in W^{1,\infty}(0, T, V), \quad \sigma^h \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1).$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 15 et elle peut être établie en trois étapes.

Première étape

Pour tout $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ on considère le problème elliptique suivant.

Problème $P_{1\eta}^h$. Trouver $u_\eta^h : [0, T] \rightarrow H_1$ et $\sigma_\eta^h : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\sigma_\eta^h(t) = \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta^h(t)) + Z_\eta(t) \quad (4.122)$$

$$\left. \begin{aligned} u_\eta^h(t) \in V, \quad \langle \sigma_\eta^h(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\eta^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + hj(v) - hj(u_\eta^h(t)) \geq \\ \langle F(t), v - u_\eta^h(t) \rangle_V \quad \forall v \in V \end{aligned} \right\} \quad (4.123)$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et où Z_η est donnée par (4.36) .

En utilisant le théorème A.1.9, on peut prouver l'existence et l'unicité de la solution $(u_\eta^h, \sigma_\eta^h)$ du problème $(P_{1\eta}^h)$ ayant la régularité $u_\eta^h \in W^{1,\infty}(0, T, H_1)$, $\sigma_\eta^h \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$. De plus on peut vérifier que

$$u_\eta^h(0) = u_0, \quad \sigma_\eta^h(0) = \sigma_0. \quad (4.124)$$

Deuxième étape

Cette dernière régularité ainsi que les hypothèses (4.8)-(4.10) nous permettent de considérer l'opérateur $\Lambda^h : L^\infty(0, T, \mathcal{H}) \longrightarrow L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ défini par:

$$\Lambda^h \eta(t) = G\left(\sigma_\eta^h(t), \varepsilon\left(u_\eta^h(t)\right), \theta(t)\right) \quad (4.125)$$

pour tout $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$, $t \in [0, T]$ et $\theta \in L^2(\Omega)^M$.

De la même manière que pour l'opérateur Λ , on peut montrer que l'opérateur Λ^h admet un point fixe $\eta_h^* \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$.

Troisième étape

Finalement, on vérifie que le couple $(u = u_{\eta_h^*}^h, \sigma = \sigma_{\eta_h^*}^h)$ solution du problème $(P_{1\eta_h^*}^h)$ est l'unique solution du problème (P_1^h) .

Théorème 20 *Sous les hypothèses (4.7) – (4.10) et (4.121) le problème variationnel (P_2^h) admet une solution unique (u^h, σ^h) ayant la régularité :*

$$u^h \in W^{1,\infty}(0, T, V), \quad \sigma^h \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1).$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 16.

En effet, il est facile de vérifier que (u^h, σ^h) est solution du problème variationnel (P_2^h) avec la régularité $u^h \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\sigma^h \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$ si et seulement si le couple $(u^h, \bar{\sigma}^h)$ est solution du problème suivant.

$$\varepsilon(\dot{u}^h) = \mathcal{E}^{-1}\bar{\sigma}^h - \mathcal{E}^{-1}G(\bar{\sigma}^h + \tilde{\sigma}, \varepsilon(u^h), \theta) + \mathcal{E}^{-1}\tilde{\sigma} \quad \text{p.p. } t \in]0, T[\quad (4.126)$$

$$\bar{\sigma}^h(t) \in \Sigma_0^h, \quad \langle \tau - \bar{\sigma}^h(t), \varepsilon(u^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_0^h \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.127)$$

$$u^h(0) = u_0, \quad \bar{\sigma}^h(0) = \bar{\sigma}_0 \quad (4.128)$$

ayant la régularité $u^h \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\bar{\sigma}^h \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$ et où $\tilde{\sigma}$ et $\bar{\sigma}_0$ sont respectivement données par (4.54) et (4.55), alors que $\bar{\sigma}^h = \sigma^h - \tilde{\sigma}$ et l'ensemble Σ_0^h est défini par :

$$\Sigma_0^h = \{ \tau \in \mathcal{H} / \langle \tau, \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} + hj(v) \geq 0 \quad \forall v \in V \}.$$

La démonstration du théorème 20 consiste alors en la résolution du problème (4.126)–(4.128) qui peut être établie aussi en trois étapes.

Première étape

Pour tout $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$, on considère le problème elliptique suivant.

Problème $P_{2\eta}^h$. Trouver $u_\eta^h : [0, T] \rightarrow H_1$ et $\sigma_\eta^h : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}_1$ tels que

$$\varepsilon(u_\eta^h(t)) = \mathcal{E}^{-1}\sigma_\eta^h(t) + Z_\eta(t) + \mathcal{E}^{-1}\tilde{\sigma}(t)$$

$$\sigma_\eta^h(t) \in \Sigma_0^h, \quad \langle \tau - \sigma_\eta^h(t), \varepsilon(u_\eta^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \quad \forall \tau \in \Sigma_0^h$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et où Z_η et $\tilde{\sigma}$ sont respectivement données par (4.62) et (4.54).

En utilisant le théorème A.1.10 ainsi que des arguments d'orthogonalité dans l'espace \mathcal{H} on peut prouver l'existence et l'unicité de la solution $(u_\eta^h, \sigma_\eta^h)$ du problème $(P_{2\eta}^h)$

ayant la régularité $u_\eta^h \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\sigma_\eta^h \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$. De plus, on peut vérifier que

$$u_\eta^h(0) = u_0, \quad \sigma_\eta^h(0) = \sigma_0.$$

Deuxième étape

On vérifie que l'opérateur $\Lambda^h : L^\infty(0, T, \mathcal{H}) \rightarrow L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ défini par :

$$\Lambda^h \eta(t) = -\mathcal{E}^{-1} G(\bar{\sigma}_\eta^h + \tilde{\sigma}, \varepsilon(u_\eta^h), \theta)$$

admet un point fixe unique $\eta_h^* \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$.

Troisième étape

Finalement, on vérifie que le couple $(u = u_{\eta_h^*}^h, \sigma = \sigma_{\eta_h^*}^h)$ solution du problème $(P_{2\eta_h})$ est l'unique solution du problème (P_2^h) .

En adaptant avec quelques ajustements (dûs à la présence dans ce cas de la fonctionnelle j) la démonstration du théorème 17, on peut prouver le résultat d'équivalence suivant entre les deux problèmes variationnels (P_1^h) et (P_2^h) :

Théorème 21 *Supposons que les conditions (4.7) – (4.10) et (4.121) sont vérifiées et soit $u^h \in W^{1,\infty}(0, T, V)$, $\sigma^h \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H}_1)$. Alors (u^h, σ^h) est solution du problème variationnel (P_2^h) .*

La solution du problème (P_1^h) (ou (P_2^h)) dépend du paramètre h et son comportement quand $h \rightarrow \infty$ est donné par le résultat suivant.

Théorème 22 *Supposons que les hypothèses (4.7) – (4.10) et (4.121) sont vérifiées. Soit pour tout $h > 0$, (u^h, σ^h) la solution du problème (P_1^h) (ou (P_2^h)) et soit (u, σ)*

la solution du problème (P_1) (ou (P_2)). Alors pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$u^h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } H_1 \quad \sigma^h(t) \rightarrow \sigma(t) \text{ dans } \mathcal{H}_1 \quad \text{quand } h \rightarrow \infty. \quad (4.129)$$

Pour établir ce théorème, on a besoin de quelques résultats préliminaires. Pour cela on va commencer par un résultat donnant une estimation de la différence entre deux solutions du problème variationnel $(P_{1\eta}^h)$ relatives à deux différentes fonctions $\eta_1, \eta_2 \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$.

Lemme 14 Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ et $h > 0$. Il existe alors une constante $c > 0$ telle que

$$\left| u_{\eta_1}^h(t) - u_{\eta_2}^h(t) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta_1}^h(t) - \sigma_{\eta_2}^h(t) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|_{\mathcal{H}} ds \quad \forall t \in [0, T] \quad (4.130)$$

Démonstration. Soient $t \in [0, T]$ et Z_{η_i} la fonction définie par (4.36) pour $\eta = \eta_i, (i = 1, 2)$.

En utilisant (4.123) pour $\{\eta = \eta_1, v = u_{\eta_2}^h(t)\}$ puis pour $\{\eta = \eta_2, v = u_{\eta_1}^h(t)\}$ et en faisant la différence entre les deux expressions obtenues, il vient moyennant (4.7) ainsi que (5.37) :

$$\left| u_{\eta_1}^h(t) - u_{\eta_2}^h(t) \right|_{H_1} \leq c |Z_{\eta_1}(t) - Z_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}}. \quad (4.131)$$

De plus, en prenant $v = u_{\eta_i}^h(t) \pm \varphi$ dans (4.123) où $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ et $i = 1, 2$ on obtient en tenant compte de (4.122), (4.13) et du théorème A.2.5 :

$$\left| \sigma_{\eta_1}^h(t) - \sigma_{\eta_2}^h(t) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq c |Z_{\eta_1}(t) - Z_{\eta_2}(t)|_{\mathcal{H}}. \quad (4.132)$$

L'estimation (4.130) est à présent une conséquence de (4.131), (4.132) et (4.36).

Lemme 15 Soit $\eta \in L^\infty(0, T, \mathcal{H})$ et soit $Z_\eta \in W^{1,\infty}(0, T, \mathcal{H})$ la fonction définie par (4.36). Soient aussi (u_η, σ_η) et $(u_\eta^h, \sigma_\eta^h)$ les solutions respectives des problèmes (P_1) et (P_1^h) pour tout $h > 0$. On a alors pour tout $t \in [0, T]$:

$$u_\eta^h(t) \rightarrow u_\eta(t) \text{ dans } H_1 \text{ et } \sigma_\eta^h(t) \rightarrow \sigma_\eta(t) \text{ dans } \mathcal{H}_1, \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (4.133)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Il résulte en prenant $v = 0$ dans (4.123) et en utilisant (4.122), (4.7) et (5.37) :

$$c \left| u_\eta^h(t) \right|_{H_1}^2 + h j \left(u_\eta^h(t) \right) \leq \langle F(t), u_\eta^h(t) \rangle_V + \langle Z_\eta(t), \varepsilon \left(u_\eta^h(t) \right) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (4.134)$$

Sachant maintenant, d'après (4.107) et (4.108), que la fonction j est positive, il découle de (4.134) que la suite $\left(u_\eta^h(t) \right)_h$ est bornée dans H_1 . Compte tenu du théorème A.1.2, il existe alors un élément $\tilde{u}(t) \in H_1$ et une sous-suite de $\left(u_\eta^h(t) \right)_h$ notée encore $\left(u_\eta^h(t) \right)_h$ tels que

$$u_\eta^h(t) \rightarrow \tilde{u}_\eta(t) \text{ dans } H_1 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (4.135)$$

D'autre part, du fait que $\left(u_\eta^h(t) \right)_h$ est bornée dans H_1 , il résulte à partir de (4.134) l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $j \left(u_\eta^h(t) \right) \leq c \cdot \frac{1}{h}$ pour tout $h > 0$.

Ceci implique, sachant que j est une fonctionnelle positive :

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} j \left(u_\eta^h(t) \right) = 0. \quad (4.136)$$

En utilisant maintenant le fait que j est une semi-norme continue et convexe sur H_1 , il vient à partir de (4.135) et (4.136) que $j(\tilde{u}_\eta(t)) = 0$ et moyennant (4.107), (4.108) et (4.15) on en déduit :

$$\tilde{u}_\eta(t) \in U_{ad}. \quad (4.137)$$

En passant alors à la limite dans (4.123) quand $h \rightarrow \infty$ et en utilisant les relations (4.108), (4.122), (4.135), (4.136) et le fait que j est une semi-norme continue sur H_1 il résulte moyennant des arguments de semi-continuité inférieure :

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathcal{E}\varepsilon(\tilde{u}_\eta(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Z_\eta(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\tilde{u}_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \geq \\ \langle F(t), v - \tilde{u}_\eta(t) \rangle_V \quad \forall v \in U_{ad}. \end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

On remarque donc à partir de (4.137) et (4.138) que $\tilde{u}_\eta(t)$ est solution du problème elliptique $(P_{1\eta})$ et vu l'unicité de la solution de ce problème, il résulte alors que $\tilde{u}_\eta(t) = u_\eta(t)$. On en déduit ainsi que $u_\eta(t)$ est l'unique limite faible de toute sous-suite de $(u_\eta^h(t))_h$; ceci permet de conclure grâce au théorème A.1.3, que la suite $(u_\eta^h(t))_h$ converge aussi faiblement vers $u_\eta(t)$ dans H_1 :

$$u_\eta^h(t) \rightharpoonup u_\eta(t) \text{ dans } H_1 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (4.139)$$

Il reste maintenant à établir la convergence forte.

Remarquons tout d'abord qu'à partir de (4.7) et (5.37) il vient :

$$\left. \begin{aligned} c \left| u_\eta^h(t) - u_\eta(t) \right|_{H_1}^2 \leq \langle \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta^h(t)), \varepsilon(u_\eta^h(t)) - \varepsilon(u_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} - \\ \langle \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta(t)), \varepsilon(u_\eta^h(t)) - \varepsilon(u_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.140)$$

En prenant d'autre part, $v = u_\eta(t)$ dans (4.123) et en utilisant (4.122) on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \langle \mathcal{E}\varepsilon(u_\eta^h(t)), \varepsilon(u_\eta^h(t)) - \varepsilon(u_\eta(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle F(t), u_\eta^h(t) - u_\eta(t) \rangle_V + \\ \langle Z_\eta(t), \varepsilon(u_\eta(t)) - \varepsilon(u_\eta^h(t)) \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned} \right\} \quad (4.141)$$

La convergence (4.139) ainsi que les majorations (4.140) et (4.141) entraînent alors :

$$u_\eta^h(t) \rightarrow u_\eta(t) \text{ dans } H_1 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (4.142)$$

D'autre part, en prenant $v = u_\eta^h(t) \pm \varphi$ dans (4.123) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, il résulte à partir de (4.13), (4.108) et du théorème A.2.5 :

$$\text{Div} \sigma_\eta^h(t) + f(t) = 0. \quad (4.143)$$

Le lemme 15 est à présent une conséquence de (4.142), (4.37), (4.122), (4.41) et (4.143).

Démonstration du théorème 22. Soit $h > 0$ et $t \in [0, T]$.

D'après les théorèmes 15 et 19 on a :

$$u = u_{\eta^*}, \quad \sigma = \sigma_{\eta^*}, \quad u^h = u_{\eta_h^*}^h \quad \text{et} \quad \sigma^h = \sigma_{\eta_h^*}^h$$

où η^* est le point fixe de l'opérateur Λ défini par (4.44) et η_h^* est le point fixe de l'opérateur Λ^h défini par (4.125). En notant alors par $(u_{\eta^*}^h, \sigma_{\eta^*}^h)$ la solution du problème $(P_{1\eta}^h)$ pour $\eta = \eta^*$, il résulte :

$$\left. \begin{aligned} & \left| u^h(t) - u(t) \right|_{H_1} + \left| \sigma^h(t) - \sigma(t) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq \left| u_{\eta_h^*}^h(t) - u_{\eta^*}^h(t) \right|_{H_1} + \\ & \left| \sigma_{\eta_h^*}^h(t) - \sigma_{\eta^*}^h(t) \right|_{\mathcal{H}_1} + \left| u_{\eta^*}^h(t) - u_{\eta^*}(t) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta^*}^h(t) - \sigma_{\eta^*}(t) \right|_{\mathcal{H}_1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.144)$$

En utilisant d'une part le lemme 14 on obtient :

$$\left| u_{\eta_h^*}^h(t) - u_{\eta^*}^h(t) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta_h^*}^h(t) - \sigma_{\eta^*}^h(t) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq c \int_0^t |\eta_h^*(s) - \eta^*(s)|_{\mathcal{H}} ds$$

et puisque $\eta_h^* = \Lambda^h \eta_h^* = G(\sigma^h, \varepsilon(u^h), \theta)$ et $\eta^* = \Lambda \eta^* = G(\sigma, \varepsilon(u), \theta)$, il vient moyennant l'hypothèse (4.8) :

$$\left| u_{\eta_h^*}^h(t) - u_{\eta^*}^h(t) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta_h^*}^h(t) - \sigma_{\eta^*}^h(t) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq c \int_0^t \left(\left| u^h(s) - u(s) \right|_{H_1} + \left| \sigma^h(s) - \sigma(s) \right|_{\mathcal{H}_1} \right) ds \quad (4.145)$$

Il résulte alors à partir des inégalités (4.144) et (4.145) que

$$\left. \begin{aligned} & \left| u^h(t) - u(t) \right|_{H_1} + \left| \sigma^h(t) - \sigma(t) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq \left| u_{\eta^*}^h(t) - u_{\eta^*}(t) \right|_{H_1} + \\ & \left| \sigma_{\eta^*}^h(t) - \sigma_{\eta^*}(t) \right|_{\mathcal{H}_1} + c \int_0^t \left(\left| u^h(s) - u(s) \right|_{H_1} + \left| \sigma^h(s) - \sigma(s) \right|_{\mathcal{H}_1} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (4.146)$$

En appliquant le lemme A.2.2 de Gronwall on obtient :

$$\left. \begin{aligned} & \left| u^h(t) - u(t) \right|_{H_1} + \left| \sigma^h(t) - \sigma(t) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq \left| u_{\eta^*}^h(t) - u_{\eta^*}(t) \right|_{H_1} + \\ & \left| \sigma_{\eta^*}^h(t) - \sigma_{\eta^*}(t) \right|_{\mathcal{H}_1} + c \int_0^t \left(\left| u_{\eta^*}^h(s) - u_{\eta^*}(s) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta^*}^h(s) - \sigma_{\eta^*}(s) \right|_{\mathcal{H}_1} \right) ds. \end{aligned} \right\} \quad (4.147)$$

De plus, le lemme 15 montre que pour tout $s \in [0, T]$:

$$\left(\left| u_{\eta^*}^h(s) - u_{\eta^*}(s) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta^*}^h(s) - \sigma_{\eta^*}(s) \right|_{\mathcal{H}_1} \right) \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty \quad (4.148)$$

D'autre part, on obtient grâce à (4.140), (4.141), (4.122), (4.37), (4.143) et (4.41) que pour tout $s \in [0, T]$:

$$\left| u_{\eta^*}^h(s) - u_{\eta^*}(s) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta^*}^h(s) - \sigma_{\eta^*}(s) \right|_{\mathcal{H}_1} \leq c \left(|F(s)|_V + |Z_{\eta^*}(s)|_{\mathcal{H}} + |u_{\eta^*}(s)|_{H_1} \right) \quad (4.149)$$

La convergence simple (4.148) et la majoration (4.149) permettent ainsi d'utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui donne :

$$\int_0^t \left(\left| u_{\eta^*}^h(s) - u_{\eta^*}(s) \right|_{H_1} + \left| \sigma_{\eta^*}^h(s) - \sigma_{\eta^*}(s) \right|_{\mathcal{H}_1} \right) ds \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow \infty. \quad (4.150)$$

Finalement les convergences (4.129) découlent directement de (4.147), (4.148), (4.150).

Remarque 4.4. L'interprétation mécanique du résultat de convergence donné par le théorème 22 est la suivante : à tout instant $t \in [0, T]$, on peut approcher la solution du problème de contact sans frottement d'un corps viscoplastique avec une base rigide

par la solution du problème de contact sans frottement selon les conditions (4.105) de ce même corps avec une base déformable quand son seuil d'effondrement h tend vers l'infini.

Conclusion :

Dans l'étude de nos problèmes de contact (avec ou sans frottement) nous avons supposé que le paramètre donné θ peut être la température. Le cas couplé où θ n'est pas un paramètre ne fait pas partie de notre objectif, mais si on introduit la température θ comme une inconnue dans les lois de comportements qui ne sont pas linéaires, alors ces trois problèmes de contact deviennent ouverts et méritent d'être étudiés à part.

Nous signalons que des résultats ont été obtenus pour le problème de contact thermoélastique linéaire dans le cas quasistatique par P. Shi & M. Shillor (1992) et dans le cas dynamique par J.E. Muñoz Rivera & R. Racke (1996).

Les recherches dans ce domaine sont motivées par des possibilités importantes d'application dans l'industrie métallurgiques et l'industrie de l'automobile.

ANNEXE

Le but de cette annexe est de faciliter la lecture de cette thèse. Elle comprend des rappels sur les espaces fonctionnels dans lesquels on étudie des problèmes élastiques et viscoplastiques ainsi que des résultats classiques d'analyse non-linéaire utilisés tout au long de cette thèse. L'annexe est composée de deux parties.

La première partie est consacrée à quelques éléments d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert; on y présente ici quelques propriétés et résultats fondamentaux concernant les fonctions convexes et leur sous-différentiel, les opérateurs fortement monotones et des théorèmes d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles elliptiques. Pour plus de détails sur cette partie nous renvoyons aux ouvrages classiques de Brezis [1], Ekeland et Temam [1], Rockafeller [1], Rudin [1], Yosida [1].

La deuxième partie est consacrée aux espaces fonctionnels. On y présente ici les espaces des distributions, les espaces liés aux opérateurs déformation et divergence et leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace et on termine par les espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de

Hilbert et deux lemmes de Gronwall. Pour plus de détails sur cette partie nous indiquons Adams [1], Brezis [1], Duvaut et Lions [1], Panagiotopoulos [1], Schwartz [1], Ionescu et Sofonea [2], Sofonea [2], [3].

5.1 Éléments d'analyse non-linéaire dans les espaces des Hilbert

Dans la première partie de cette annexe, H désigne un espace de Hilbert réel muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ ainsi que de la norme associée $|\cdot|_H$. On note aussi par H' l'espace dual de H et par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ la dualité entre H' et H .

5.1.1 Propriétés élémentaires

Théorème A.1.1. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet).

Pour tout $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H$$

En outre on a :

$$|\varphi|_{H'} = |f|_H.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\varphi \mapsto f$ est une isométrie qui permet d'identifier H et son dual H' .

Définition A.1.1. On dit que la suite $(x_n) \subset H$ converge faiblement vers $x \in H$ et

on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\langle v, x_n \rangle_H \rightarrow \langle v, x \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

Dans ce cas, x s'appelle limite faible de la suite (x_n) .

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $x_n \rightharpoonup x$ dans H , alors $x_n \rightarrow x$ dans H . La réciproque n'est pas en général vraie. De plus, puisque tout espace de Hilbert est réflexif, on a le résultat suivant:

Théorème A.1.2. Soit (x_n) une suite bornée de H . Il existe alors un élément $x \in H$ et une sous-suite de (x_n) notée encore (x_n) telle que $x_n \rightharpoonup x$.

Un élément $x \in H$ qui est la limite faible d'une sous-suite de la suite (x_n) s'appelle point faiblement adhérent à la suite (x_n) . On prouve que:

Théorème A.1.3. Si la suite $(x_n) \subset H$ possède un unique point faiblement adhérent $x \in H$, alors $x_n \rightharpoonup x$.

Autrement dit, le théorème précédent affirme que si toutes les sous-suites faiblement convergentes d'une suite (x_n) ont la même limite faible x , alors la suite (x_n) converge faiblement vers x .

Soient x et y deux éléments de H . On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle_H = 0$.

Soit M un sous-espace vectoriel de H . On pose :

$$M^\perp = \{y \in H / y \perp x \quad \forall x \in M\}.$$

On dit que M^\perp est l'orthogonal de M dans H et on peut prouver le résultat suivant.

Théorème A.1.4. Soit M un sous-espace fermé de H .

Alors M^\perp est un supplémentaire topologique de M c'est-à-dire

(i) M^\perp est un sous-espace fermé de H .

(ii) $M \cap M^\perp = \{0\}$ et $M \oplus M^\perp = H$.

On va finir ce paragraphe par des résultats concernant la projection sur un sous-espace convexe fermé de H , le lemme de Lax-Milgram et le théorème de point fixe de Banach.

Théorème A.1.5. Soit $K \subset H$ un convexe fermé non-vide. Alors pour tout $f \in H$, il existe $u \in K$ unique tel que

$$\|f - u\|_H = \min_{v \in K} \|f - v\|_H. \quad (5.1)$$

De plus, u est caractérisée par la propriété suivante

$$u \in K, \quad \langle u, v - u \rangle_H \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in K. \quad (5.2)$$

Etant donné un convexe fermé non-vide $K \subset H$, le théorème précédent nous permet d'associer à chaque élément $f \in H$ l'élément u défini par (5.1) ou (5.2).

On note $u = P_K f$. On a mis ainsi en évidence l'opérateur $P_K : H \rightarrow K$, appelé opérateur de projection de H sur K .

Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$.

La forme bilinéaire a est dite :

(i) continue, s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \cdot \|v\|_H \quad \forall u, v \in H;$$

(ii) coercive, s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$

Remarque A.1.1. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_H \quad \forall u, v \in H. \quad (5.3)$$

Alors on a les propriétés suivantes

- (i) a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.
- (ii) a est continue si et seulement si A est continu.
- (iii) a est coercive si et seulement si A est défini positif.

Lemme de Lax Milgram. Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} \quad \forall v \in H \quad (5.4)$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété suivante

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle_{H' \times H} = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} \right\} \quad (5.5)$$

Théorème de point fixe de Banach. Soit $f : H \rightarrow H$ une contraction c'est-à-dire il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\|_H \leq k \|x - y\|_H \quad \forall x, y \in H$$

Alors il existe un seul point $\xi \in H$ tel que $f(\xi) = \xi$.

5.1.2 Fonctions convexes et sous-différentiabilité

Nous commençons ici par quelques préliminaires sur les fonctions convexes et sur les fonctions semi-continues inférieurement, ensuite nous donnons une généralisation de

la notion de gradient aux fonctions convexes.

Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel E et à valeur dans $]-\infty, \infty]$. φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à ∞ , c'est-à-dire s'il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) < \infty$. φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in E, \quad t \in [0, 1].$$

φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in E$ tels que $u \neq v$.

On définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$\text{dom } \varphi = \{x \in E / \varphi(x) < \infty\} \quad (5.6)$$

$$\text{epi } \varphi = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} / \varphi(x) \leq \alpha\}. \quad (5.7)$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants.

- (i) φ est propre si et seulement si $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$.
- (ii) Le domaine de φ est un convexe de E si φ est convexe.
- (iii) φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Une fonction φ définie sur un espace topologique E et à valeur dans $]-\infty, \infty[$ est dite semi continue-inférieurement (s.c.i) si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in E / \varphi(x) \leq \alpha\}$ est fermé.

Nous donnons quelques propriétés des fonctions s.c.i :

Lemme A.1.1. Soit $\varphi : H \longrightarrow]-\infty, \infty]$. Alors on a :

- (i) φ est s.c.i si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est fermé dans $H \times \mathbb{R}$.

(ii) φ est s.c.i si et seulement si pour tout $x \in H$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_x de x dans H tel que $\varphi(u) \geq \varphi(x) - \varepsilon$, pour tout $u \in V_x$.

Il en résulte en particulier que si φ est s.c.i et si $x_n \rightarrow x$, alors on a

$$\liminf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Le lemme précédent conduit au résultat suivant.

Théorème A.1.8. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est s.c.i si et seulement si elle est s.c.i par rapport à la topologie faible de H .

Soit maintenant K un sous-ensemble de H . On appelle fonction indicatrice de K , la fonction $\psi_K : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ définie par :

$$\psi_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ \infty & \text{si } x \notin K \end{cases} \quad (5.8)$$

En utilisant cette définition, on peut facilement prouver le résultat suivant:

Lemme A.1.2. K est un convexe, fermé et non-vide de H si et seulement si ψ_K est convexe, s.c.i et propre.

Une fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ est dite Gâteaux-différentiable au point $u \in H$, s'il existe un élément $\nabla\varphi(u) \in H$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \langle \nabla\varphi(u), v \rangle_H \quad \forall v \in H.$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ s'appelle la différentielle au sens de Gâteaux de φ en u .

La fonction φ est dite Gâteaux-différentiable si elle est Gâteaux-différentiable en tout point de H ; dans ce cas l'opérateur $u \mapsto \nabla\varphi(u) : H \rightarrow H$ s'appelle le gradient de φ .

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante.

Lemme A.1.3. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction Gâteaux-différentiable. Alors φ est convexe si et seulement si

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla \varphi(u), v - u \rangle_H \quad \forall u, v \in H \quad (5.9)$$

L'inégalité (5.9) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes. On dit que la fonction $\varphi : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ est sous-différentiable en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H. \quad (5.10)$$

L'élément f est alors appelé sous-gradient de φ en u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentiel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H / \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H\}. \quad (5.11)$$

On note par $\text{dom}(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$\text{dom}(\partial\varphi) = \{u \in H / \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}. \quad (5.12)$$

En utilisant (5.11), (5.12) et la définition du domaine d'une fonction, il résulte :

$$\text{dom}(\partial\varphi) \subset \text{dom} \varphi. \quad (5.13)$$

L'opérateur multivoque $u \mapsto \partial\varphi(u) : H \rightarrow 2^H$ s'appelle le sous-différentiel de φ .

La fonction φ est dite sous-différentiable si elle est sous-différentiable en tout point u de H , c'est-à-dire si

$$\text{dom}(\partial\varphi) = H.$$

Remarque A.1.2. En utilisant (5.13), (5.6) et (5.8), il résulte $\text{dom}(\partial\psi_K) \subset K$ et d'après (5.11), il vient :

$$f \in \partial\psi_K(u) \Leftrightarrow u \in K, \quad \langle f, v - u \rangle_H \leq 0 \quad \forall v \in K. \quad (5.14)$$

Lemme A.1.4. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ convexe, propre et semi-continue inférieurement.

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et le sous-différentiel est donné par

Lemme A.1.5. Soit $\varphi : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et $\partial\varphi(u) = \{\nabla\varphi(u)\}$ pour tout $u \in H$.

5.1.3 Opérateurs fortement monotones et inéquations variationnelles

Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur non-linéaire, $\varphi : H \rightarrow]-\infty, \infty]$ une fonction propre, $f \in H$ et K une partie non-vide de H . Un nombre considérable de problèmes aux limites ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un lien avec les problèmes suivants.

Trouver u tel que

$$u \in H, \quad \langle Au, v - u \rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v - u \rangle_H \quad \forall v \in H \quad (5.15)$$

Le problème (5.15) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce* sur H . D'autres problèmes rencontrés en mécanique ont aussi un rapport avec le problème suivant.

Trouver u tel que

$$u \in K, \quad \langle Au, v \rangle_H \geq \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H \quad (5.16)$$

Le problème (5.16) est appelé *inéquation variationnelle elliptique de première espèce* sur H .

Remarquons que si $\varphi \equiv 0$ dans (5.15) et $K = H$ dans (5.16), alors (5.15) et (5.16) sont équivalents au problème variationnel suivant.

Trouver u tel que

$$u \in H, \quad \langle Au, v - u \rangle_H \geq \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H$$

Ce qui représente une inéquation variationnelle.

L'opérateur A est dit :

(i) fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$\langle Au - Av, v - u \rangle_H \geq m \|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H \quad (5.17)$$

(ii) de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$|Au - Av|_H \leq M |u - v|_H \quad \forall u, v \in H \quad (5.18)$$

En ce qui concerne les problèmes (5.15) et (5.16) on a les résultats d'existence et d'unicité suivants.

Théorème A.1.9. Soit $A : H \rightarrow H$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et φ une fonction convexe et semi-continue inférieurement. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.

Théorème A.1.10. Soit $A : H \rightarrow H$ est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et K est un convexe fermé non-vide de H . Alors l'inéquation variationnelle elliptique de première espèce admet une solution unique.

Les théorèmes précédents représentent les résultats d'existence et d'unicité pour les inéquations variationnelles de première et seconde espèce. Les démonstration de ces deux théorèmes peuvent être trouvées par exemple dans Kikuchi et Oden [1].

En appliquant ces résultats dans le cas des équations variationnelles, on déduit:

Lemme A.1.6. Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

Alors A est inversible et son inverse $A^{-1} : H \rightarrow H$ l'est aussi.

Nous rappelons aussi le résultat suivant utilisé dans les chapitres 1 et 2.

Lemme A.1.7. Soient $K \subset H$ un convexe fermé non-vide, $\mu > 0$ et $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.

Soit également $G : H \rightarrow H$ l'opérateur défini par

$$Gu = Au + \frac{1}{\mu} (u - P_K u) \quad \forall u \in H$$

où P_K désigne le projecteur sur K . Alors G est un opérateur fortement monotone et

de Lipschitz.

5.2 Espaces fonctionnels

Dans cette partie on rappelle les espaces de Sobolev utilisés en mécanique des milieux continus et liés aux opérateurs divergence et déformation et on expose quelques propriétés essentielles. On rappelle aussi les espaces fonctionnels définis sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. On adopte aussi la convention de l'indice muet (c'est-à-dire tout indice littéral répété deux fois dans un monôme implique que ce monôme doit être compris comme la somme de N termes obtenus en donnant successivement à cet indice les valeurs $1, 2, \dots, N$ dans ce monôme).

5.2.1 Espaces de distributions

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N ($N=1,2,3$). On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact inclus dans Ω , et par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω . Nous définissons les espaces suivants.

$$D = \{ \varphi = (\varphi_i) / \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega), \quad i = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D} = \{ \varphi = (\varphi_{ij}) / \varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega), \quad i, j = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N \times N}$$

$$D' = \{ u = (u_i) / u_i \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad i = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$$

$$\mathcal{D}' = \{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad i, j = \overline{1, N} \} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N \times N}.$$

Le produit de dualité entre les espaces D' et D , \mathcal{D}' et \mathcal{D} seront notés respectivement par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D' \times D}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}$. Plus précisément pour tout $u \in D', v \in D, \sigma \in \mathcal{D}', \varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle u_i, v_i \rangle$$

$$\langle \sigma, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \langle \sigma_{ij}, \varphi_{ij} \rangle$$

avec la convention de l'indice muet.

Soit maintenant l'opérateur de dérivation partielle $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Pour toute fonction

$\varphi \in \mathcal{D}$ et toute distribution $u \in \mathcal{D}'$ on a :

$$\langle \partial_i u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \langle u, \partial_i \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall u \in \mathcal{D}' \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (5.19)$$

On peut aussi introduire les opérateurs différentiels du premier ordre définis par :

$$\varepsilon : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}, \quad \varepsilon(\varphi) = (\varepsilon_{ij}(\varphi)), \quad \varepsilon_{ij}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial_j \varphi_i + \partial_i \varphi_j) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad i, j = \overline{1, N} \quad (5.20)$$

$$Div : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}, \quad Div \varphi = (\partial_j \varphi_{ij}) \quad \forall i = \overline{1, N} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (5.21)$$

Nous utilisons les mêmes notations pour les opérateurs correspondants définis sur les espaces de distributions :

$$\varepsilon : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}', \quad \varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall u \in \mathcal{D}', \quad i, j = \overline{1, N} \quad (5.22)$$

$$Div : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}', \quad Div \sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \quad \forall i = \overline{1, N} \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}'. \quad (5.23)$$

En utilisant (5.19) on obtient :

$$\langle \varepsilon(u), \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \langle u, \text{Div} \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall u \in \mathcal{D}', \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (5.24)$$

$$\langle \text{Div} \sigma, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = - \langle \sigma, \varepsilon(\varphi) \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{D}', \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (5.25)$$

L'opérateur ε défini par (5.20) pour les fonctions et par (5.22) pour les distributions s'appelle *opérateur déformation*.

L'opérateur Div défini par (5.21) pour les fonctions et par (5.23) pour les distributions s'appelle *opérateur divergence*.

Dans la suite on va utiliser aussi les espaces suivants.

$$H = \left\{ u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N} \right\} = L^2(\Omega)^N \quad (5.26)$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i, j = \overline{1, N} \right\} = L^2(\Omega)_s^{N \times N}. \quad (5.27)$$

Les espaces H et \mathcal{H} munis respectivement des produits scalaires

$$\langle u, v \rangle_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H$$

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}$$

sont des espaces de Hilbert. Les normes associées à ces produits scalaires seront notées par $|\cdot|_H$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}}$.

Compte tenu de l'identification de $L^2(\Omega)$ à un sous-espace de distribution sur Ω on peut considérer que $H \subset D'$ et $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$. Par conséquent, les opérateurs déformation et divergence peuvent être définis respectivement sur H et \mathcal{H} . Cela nous conduira à étudier dans la section qui suit d'autres espaces fonctionnels liés à ces opérateurs.

Pour l'instant, on rappelle la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. on a:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \partial_i u \in L^2(\Omega), i = \overline{1, N} \right\}.$$

Muni du produit scalaire,

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert réel. On notera la norme associée par $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$. On note aussi par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et on rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

5.2.2 Espaces liés aux opérateurs déformation et divergence

(i) Espace lié à l'opérateur déformation

Pour l'opérateur déformation ε défini par (5.22), il est naturel d'introduire l'espace H_1 défini comme suit

$$H_1 = \{ u \in H / \varepsilon(u) \in \mathcal{H} \}.$$

Sur H_1 on définit le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1$$

et on note la norme associée par $|\cdot|_{H_1}$. On obtient ainsi que l'injection $H_1 \hookrightarrow H$ et l'opérateur déformation $\varepsilon : H_1 \longrightarrow \mathcal{H}$ sont continus. En utilisant (5.24) et compte tenu de l'identification de H et \mathcal{H} à des sous-espaces de \mathcal{D}' et \mathcal{D} il résulte

$$\langle \varepsilon(u), \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} + \langle u, \text{Div} \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H, \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (5.28)$$

$$\langle \varepsilon(u), \varphi \rangle_{\mathcal{H}} + \langle u, \text{Div} \varphi \rangle_H = 0 \quad \forall u \in H_1, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (5.29)$$

Théorème A.2.1. Muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_1}$ l'espace H_1 est un espace de Hilbert.

On munit maintenant l'espace $H^1(\Omega)^N$ du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)^N}$ et de la norme associée $|\cdot|_{H^1(\Omega)^N}$, on a le résultat suivant.

Théorème A.2.2. Les deux normes $|\cdot|_{H_1}, |\cdot|_{H^1(\Omega)^N}$ sont équivalentes sur H_1 et on a l'égalité $H_1 = H^1(\Omega)^N$.

Dans la suite on suppose que la frontière Γ de Ω est de classe $C^{1,1}$.

Compte tenu du théorème précédent, toutes les propriétés de l'espace $H^1(\Omega)$ peuvent être transportées sur H_1 par passage aux espaces produits. Plus précisément, on a les résultats suivants.

$C^1(\overline{\Omega})^N$ est dense dans H_1 .

$H_1 \hookrightarrow H$ avec injection compacte (Théorème de Rellich).

Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité

$$\gamma u = u|_{\Gamma} \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})^N.$$

Cette application est dite application trace. Elle est définie comme le prolongement

par densité de l'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})^N$. L'application trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^N$ n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée $H_{\Gamma} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^N$; c'est un sous-espace de $L^2(\Gamma)^N$ qui est de Hilbert pour la structure transportée par γ . en plus l'injection $H_{\Gamma} \hookrightarrow L^2(\Gamma)^N$ est continue.

Il existe une application linéaire et continue $z : H_{\Gamma} \rightarrow H_1$ vérifiant l'égalité

$$\gamma(z(\xi)) = \xi \quad \forall \xi \in H_{\Gamma} \quad (5.30)$$

Le noyau de l'application trace γ est $\{u \in H_1 / \gamma u = 0\} = H_0^1(\Omega)^N$.

En notant par $\nu = (\nu_i)$ la normale unitaire sortante à Γ , alors pour tout $\xi \in H_{\Gamma}$ on définit respectivement sa composante normale ξ_{ν} et sa composante tangentielle ξ_{τ} par

$$\xi_{\nu} = \xi \cdot \nu \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \xi_{\tau} = \xi - \xi_{\nu} \nu \in H_{\tau} \quad (5.31)$$

où H_{τ} est le sous-espace fermé de H_{Γ} défini par :

$$H_{\tau} = \{\xi \in H_{\Gamma} / \xi_{\nu} = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma\}.$$

On peut prouver de plus que l'application $\xi \mapsto (\xi_{\nu}, \xi_{\tau})$ est un isomorphisme de H_{Γ} dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H_{\tau}$.

On note par H'_{Γ} , $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et H'_{τ} les espaces duals de H_{Γ} , $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et H_{τ} . On notera leurs normes respectives ainsi que leurs produit de dualité par : $|\cdot|_{H'_{\Gamma}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}}$.

$|\cdot|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ et $|\cdot|_{H'_{\tau} \times H_{\tau}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_{\tau} \times H_{\tau}}$.

Pour tout $\xi' \in H'_{\Gamma}$, ses composantes normale et tangentielle sont définies par :

$$\langle \xi'_{\nu}, \xi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle \xi', \xi_{\nu} \rangle_{H'_{\Gamma} \times H_{\Gamma}} \quad \forall \xi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad (5.32)$$

$$\langle \xi'_\tau, \xi \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} = \langle \xi', \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \quad \forall \xi \in H_\tau. \quad (5.33)$$

L'application $\xi' \mapsto (\xi'_\nu, \xi'_\tau)$ est un isomorphisme de H'_Γ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H'_\tau$ et compte tenu de (5.31) - (5.33), il résulte

$$\langle \xi', \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \xi'_\nu, \xi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \xi'_\tau, \xi_\tau \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} \quad \forall \xi' \in H'_\Gamma, \xi \in H_\Gamma. \quad (5.34)$$

Moyennant l'application trace, on définit pour tout $u \in H_1$ les éléments $\gamma_\nu u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\gamma_\tau u \in H_\tau$ par :

$$\gamma_\nu u = (\gamma u)_\nu, \quad \gamma_\tau u = (\gamma u)_\tau.$$

Nous rappelons aussi que si $u \in C^1(\overline{\Omega})^N$, alors on a :

$$\gamma u = u|_\Gamma, \quad \gamma_\nu u = u|_\Gamma \cdot \nu, \quad \gamma_\tau u = u|_\Gamma - (u|_\Gamma \cdot \nu) \nu.$$

En outre, par souci de simplicité, on utilisera les notations u , u_ν et u_τ au lieu de γu , $\gamma_\nu u$ et $\gamma_\tau u$ pour tout $u \in H_1$.

On définit l'ensemble des *déplacements rigides* \mathcal{R} par :

$$\mathcal{R} = \{u \in H_1 / \varepsilon(u) = 0\}. \quad (5.35)$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème A.2.3. Si le sous-espace V fermé de H_1 est tel que

$$V \cap \mathcal{R} = \{0\} \quad (5.36)$$

Alors on a l'inégalité

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq c|u|_{H_1} \quad \forall u \in V. \quad (5.37)$$

où c est une constante strictement positive ne dépendant que de Ω et V . L'inégalité (5.37) est dite inégalité de Korn.

Supposons que Γ_1 et Γ_2 constituent une partition de la frontière Γ de Ω et soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par

$$V = \{u \in H_1 / \gamma u = 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_1\} \quad (5.38)$$

On a le résultat suivant.

Corollaire A.2.1. Si $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, alors l'inégalité de Korn est vérifiée sur le sous-espace V défini par (5.38). Dans ce cas la constante c dépend de Ω et Γ_1 .

Le corollaire précédent nous conduit à :

Remarque A.2.1. Si $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, alors l'application $u \mapsto |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}$ est une norme sur le sous-espace V défini par (5.38) équivalente à la norme $|\cdot|_{H_1}$.

(ii) Espaces liés à l'opérateur divergence

Comme dans le cas de l'opérateur déformation, il est naturel d'introduire l'espace \mathcal{H}_1 lié à l'opérateur divergence défini par :

$$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div} \sigma \in H\}.$$

Sur \mathcal{H}_1 on considère le produit scalaire

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, \text{Div} \tau \rangle_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1$$

et la norme associée définie par :

$$|\sigma|_{\mathcal{H}_1}^2 = |\sigma|_{\mathcal{H}}^2 + |Div\sigma|_H^2.$$

De cette égalité on obtient :

$$|\sigma|_{\mathcal{H}} \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1} \text{ et } |Div\sigma|_H \leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1.$$

Donc l'injection $\mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}$ et l'opérateur $Div\sigma : \mathcal{H}_1 \longrightarrow H$ sont continus. De plus, compte tenu de l'injection de H et \mathcal{H} à des sous-espaces de D' et \mathcal{D}' en utilisant (5.25) il résulte :

$$\langle Div\sigma, \varphi \rangle_{D' \times D} + \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}, \quad \varphi \in D \quad (5.39)$$

$$\langle Div\sigma, \varphi \rangle_H + \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1, \quad \varphi \in D. \quad (5.40)$$

Théorème A.2.4. L'espace $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1})$ est un espace de Hilbert.

On peut aussi prouver que l'espace

$$C^1(\overline{\Omega})_s^{N \times N} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad i, j = \overline{1, N} \right\}$$

est dense dans \mathcal{H} . En outre, pour tout $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})_s^{N \times N}$ on note par $\sigma\nu$ le vecteur de composantes $\sigma_{ij}\nu_j, i = \overline{1, N}$ (où $\nu = (\nu_j)$ est la normale unitaire extérieure à Γ).

Comme dans le cas de l'espace H_1 , on peut définir l'application trace $\bar{\gamma}$ sur l'espace \mathcal{H}_1 à l'aide du résultat suivant.

Théorème A.2.5. Il existe une application linéaire, continue et surjective

$\bar{\gamma} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow H'_\Gamma$ telle que

$$\langle \bar{\gamma}\sigma, \xi \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma \nu \cdot \xi ds \quad \forall \xi \in H_\Gamma \quad \sigma \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N} \quad (5.41)$$

et pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, l'image $\bar{\gamma}\sigma \in H'_\Gamma$ est l'unique élément vérifiant l'égalité :

$$\langle \bar{\gamma}\sigma, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, u \rangle_H \quad \forall u \in H_1. \quad (5.42)$$

De plus, il existe une application linéaire et continue $\bar{z} : H'_\Gamma \longrightarrow \mathcal{H}_1$ telle que

$$\bar{\gamma}(\bar{z}(w)) = w \quad \forall w \in H'_\Gamma. \quad (5.43)$$

Compte tenu de l'application trace, on définit pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$ les éléments $\bar{\gamma}_\nu \sigma \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\bar{\gamma}_\tau \sigma \in H'_\tau$ par :

$$\bar{\gamma}_\nu \sigma = (\bar{\gamma}\sigma)_\nu, \quad \bar{\gamma}_\tau \sigma = (\bar{\gamma}\sigma)_\tau.$$

Rappelons que si $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N}$ alors, à partir de (5.42), (5.32) et (5.33) il résulte

$$\bar{\gamma}\sigma = \sigma|_\Gamma \nu, \quad \bar{\gamma}_\nu \sigma = (\sigma|_\Gamma \nu)_\nu, \quad \bar{\gamma}_\tau \sigma = \sigma|_\Gamma \nu - (\sigma|_\Gamma \nu)_\nu.$$

Afin de rendre plus explicite les notations, on utilisera dans la suite les notations $\sigma \nu$, σ_ν et σ_τ au lieu de $\bar{\gamma}\sigma$, $\bar{\gamma}_\nu \sigma$ et $\bar{\gamma}_\tau \sigma$ pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$. Moyennant (5.34) et (5.42) on a la double égalité suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \sigma \nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma_\nu, u_\nu \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \sigma_\tau, u_\tau \rangle_{H'_\tau \times H_\tau} \\ \qquad \qquad \qquad = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle \text{Div} \sigma, u \rangle_H. \end{array} \right. \quad (5.44)$$

pour tout $u \in H_1$ et $\sigma \in \mathcal{H}_1$.

Soient Γ_1 et Γ_2 une partition de Γ et $\sigma \in \mathcal{H}_1$. On introduit les définitions suivantes.

$$\sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \iff \langle \sigma_\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0, \forall u \in H_1 \text{ tel que } u = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \quad (5.45)$$

$$\sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \iff \langle \sigma_\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0, \forall u \in H_1 \text{ tel que } \begin{cases} u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (5.46)$$

$$\sigma_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1 \iff \langle \sigma_\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} \geq 0, \forall u \in H_1 \text{ tel que } \begin{cases} u_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_1 \\ u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (5.47)$$

$$\sigma_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \iff \langle \sigma_\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = 0, \forall u \in H_1 \text{ tel que } \begin{cases} u_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \\ u_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (5.48)$$

Ces définitions sont motivées par le souci de prolonger les définitions de ces mêmes propriétés de $C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N}$ sur \mathcal{H}_1 .

De plus on dit que $\sigma_\nu = h$ sur Γ_1 si $\sigma_\nu - h = 0$ sur Γ_1 et les propriétés $\sigma_\nu = h$ sur Γ_1 , $\sigma_\nu \leq h$ sur Γ_1 et $\sigma_\tau = h$ sur Γ_1 sont définies de manières analogues.

On considère maintenant le sous-espace fermé \mathcal{V} de \mathcal{H}_1 défini par

$$\mathcal{V} = \{ \sigma \in \mathcal{H}_1 / \text{Div} \sigma = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \sigma_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \}. \quad (5.49)$$

Le lien entre l'espace V défini par (5.38) et l'espace \mathcal{V} est donné par le résultat suivant.

Théorème A.2.6. Soit $mes \Gamma_1 > 0$. Alors $\varepsilon(V)$ est un sous-espace fermé de \mathcal{H} dont l'orthogonal est l'espace \mathcal{V} .

Compte tenu du théorème A.1.4, le théorème A.2.6 conduit au résultat suivant:

Corollaire A.2.2. Soit mes $\Gamma_1 > 0$. Alors pour tout $\tau \in \mathcal{H}$, il existe un unique couple de fonctions $(\tau', v) \in \mathcal{V} \times V$ tel que

$$\tau = \tau' + \varepsilon(v) \quad (5.50)$$

où les espaces V et \mathcal{V} sont respectivement définis par (5.38) et (5.49). En outre, l'application $\tau \mapsto v = L(\tau)$ est linéaire et continue de \mathcal{H} dans V .

5.2.3 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Soit $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k,p}(0, T, H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in \mathcal{D}'(0, T, H)$ telle que $D_j u \in L^p(0, T, H)$ pour $j = \overline{0, k}$ et D_j désigne la dérivée d'ordre j au sens des distributions.

Si $1 \leq p < \infty$, alors $W^{k,p}(0, T, H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par :

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T,H)} = \left(\sum_{j=0}^k \int_0^T |D_j u(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in W^{k,p}(0, T, H). \quad (5.51)$$

En particulier, $W^{k,2}(0, T, H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par :

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}(0,T,H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^T \langle D_j u, D_j v \rangle_H dt \quad \forall u, v \in W^{k,2}(0, T, H). \quad (5.52)$$

D'autre part, $W^{k,\infty}(0, T, H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T,H)} = \sum_{j=0}^k \sup_{ess_{[0,T]}} |D_j u(t)|_H \quad \forall u \in W^{k,\infty}(0, T, H). \quad (5.53)$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que $W^{0,p}(0, T, H) = L^p(0, T, H)$ et on note alors la norme de $L^p(0, T, H)$ par $|\cdot|_{L^p(0,t,H)}$ pour tout $p \geq 1$.

On rappelle aussi le résultat suivant.

Théorème A.2.7. Soit $u : [0, T] \rightarrow H$. Alors on a :

- (i) $u \in W^{1,1}(0, T, H)$ si et seulement si u est absolument continue;
- (ii) $u \in W^{1,\infty}(0, T, H)$ si et seulement si u est Lipschitzienne.

Remarque A.2.2. En utilisant la définition de $W^{k,p}(0, T, H)$, il est facile d'obtenir le résultat suivant : Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert réels et $A : H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire et continue, c'est-à-dire $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$.

Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ et tout $u \in W^{k,p}(0, T, H_1)$ on considère la fonction $A^{k,p}u$ définie sur $[0, T]$ par :

$$\left(A^{k,p}u \right) (t) = Au(t) \quad \forall t \in [0, T], \quad (5.54)$$

alors $A^{k,p}u \in W^{k,p}(0, T, H_2)$ et

$$\left| \frac{d^j A^{k,p}u}{dt^j} (t) \right|_{H_2} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} \cdot \left| \frac{d^j u}{dt^j} (t) \right|_{H_1} \quad \forall t \in [0, T], j = \overline{0, k-1}. \quad (5.55)$$

Par conséquent, l'opérateur $A^{k,p} : W^{k,p}(0, T, H_1) \rightarrow W^{k,p}(0, T, H_2)$ défini par (5.54) est linéaire et continu.

Lemmes de Gronwall

Nous présentons ici deux lemmes de Gronwall, utilisés respectivement dans la démonstrations du théorème 18 et celle du théorème 22. Pour la démonstrations de ces lemmes voir par exemple Ionescu et Sofonea [2], Sofonea [2].

Lemme A.2.1. Soient $m, n \in C(0, T, \mathbb{R}_+)$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

Soit également $\varphi \in C(0, T, \mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(s) \leq a + \int_0^s m(t) dt + \int_0^s n(t) \varphi(t) dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors la fonction φ est majorée de la façon suivante.

$$\varphi(s) \leq \left(a + \int_0^s m(t) dt \right) \exp \int_0^s n(t) dt \quad \forall s \in [0, T]. \quad (5.56)$$

Pour le cas particulier $m \equiv 0$, ce lemme devient :

Corollaire A.2.3. Soient $n \in C(0, T, \mathbb{R}_+)$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

Soit également $\varphi \in C(0, T, \mathbb{R})$ telle que

$$\varphi(s) \leq a + \int_0^s n(t) \varphi(t) dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors la fonction φ est majorée de la façon suivante.

$$\varphi(s) \leq a \exp \int_0^s n(t) dt \quad \forall s \in [0, T]. \quad (5.57)$$

Lemme A.2.2. Soit $m \in W^{1,\infty}(0, T, \mathbb{R}_+)$ telle que $m(0) = 0$ et $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et $a \geq 0, b > 0$.

Si $\varphi \in L^\infty(0, T, \mathbb{R})$ est telle que

$$\varphi(s) \leq a + m(s) + b \int_0^s \varphi(t) dt \quad \forall s \in [0, T] \quad (5.58)$$

Alors la fonction φ est majorée de la façon suivante.

$$\varphi(s) \leq m(s) + \left(a + b \int_0^s m(t) dt \right) \exp bs \quad \forall s \in [0, T] \quad (5.59)$$

BIBLIOGRAPHIE

ADAMS, R. S.

- [1] Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).

AMASSAD, A. et SOFONEA, M.

- [1] *Analysis of a quasistatic viscoplastic problem involving Tresca friction law*, Discrete and Continuous Dynamical Systems (1998), 55–72.

AMASSAD, A., SHILLOR, M. et SOFONEA, M.

- [1] *Quasistatic contact for anelastic perfectly plastic body with Tresca's friction*, Nonlinear Analysis **35** (1999), 95–109.
[2] *A quasistatic contact problem with slip dependent coefficient of friction* ., accepté pour publication in Applied Analysis.

AMASSAD, A., ROCHDI, M. et SOFONEA, M.

- [1] *Análisis variacional de algunos problemas de contact en viscoplasticidad*, Publicacións do Departament de Matemática Aplicada, Universidade Santiago de Compostella, **11** (1997).

BARBU, V.

- [1] Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Editura Academiei, Bucharest-Noordhoff, Leyden (1976).

BREZIS, H.

- [1] Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert, North-Holland, Amsterdam (1973).
[2] Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson, Paris (1987).

BURGUERA, M.

- [1] *Análisis Numérico de una Clase de Problemas de Contacto en Plasticidad perfecta*, Thèse, Université de Santiago de Compostela (1991).

BURGUERA, M. et VIAÑO, J. M.

- [1] *Numerical simulation of unilateral nonfriction contact problem in perfect plasticity*, Mathematical Modelling in Lubrication, Publicacions da Universidade de Vigo, Editeurs : G. Bayada, M. Chambat et J. Durany (1991).

CIARLET, P.

- [1] Elasticité Tridimensionnelle, Masson, Paris (1986).

CHAU, W., HAN, W. et SOFONEA, M.

- [1] *Analysis and approximation of a viscoelastic problem with slip dependent friction*, préprint.

COCU, M.

- [1] *Existence of solution of Signorini problems with friction*, Int. Jour. Engng. Sci. **22** (1984), 567-681.

COCU, M., PRATT, E. et RAOUS, M.

- [1] *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact*, Int. J. Engng. Sci. **22** (1996), 783-798.

CRISTESCU, N. et SULICIU, I.

- [1] *Viscoplasticity*, Martinus Nirjhoff, Editura Tehnica, Bucharest (1982).

CRISTESCU, N.

- [1] *Dynamic plasticity*, North-Holland, Amsterdam (1967).

DJABI, S. et SOFONEA, M.

- [1] *A fixed method in quasistatic rate-type viscoplasticity*, Appl. Math. and Comp. Sci. **3**, 2 (1993), 269-279.

DRABLA, S., SOFONEA, M. et TENIOU, B.

- [1] *Analysis of a frictionless contact problems for elastic bodies*, Annles. Polonci. Math. **LXXI**, 1 (1998), 75-88.

DRABLA, S. et SOFONEA, M.

- [1] *Analysis of a Signorini problems with friction*, à paratre dans JMA. Journal of Applied Mathematics, (1999).

DUVAUT, G.

- [1] *Loi de frottement non-local*, J. Méc. Thé. Appl. Special, issue (1982) . 73-78.

DUVAUT, G. et LIONS, J. L.

- [1] *Les Inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris. (1972).

EKELAND, I. et TEMAM, T.

- [1] *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*, Dunod, Gauthiers-Villars. Paris (1974).

FICHERA, G.

- [1] *Problem elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini ambiguo al contorno*. Atti. Acc. Naz. Lincei. Mem. Sez. I . 7(8), 71-140(1964).
 [2] *Boundary value problem unilaterul constraints*, Encycl. of Physics. Editeur : S. Flügge. Springer-Verlag, Berlin, VI a/2 (1972).

GERMAIN, P. et MULLER, P.

- [1] *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, Paris. Tomes I, II (1976).

GLOWINSKI, R., LIONS, J.-L. et TRÉMOLIÉRES, R.

- [1] *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, Dunod, Paris. Tomes I, II (1976).

HAN, W.

- [1] *On the numerical approximation of a friction contact problem with normal compliance*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **17(3,4)** (1996), 307-321.

HAN, W. et SOFONEA, M.

- [1] *Analysis and numerical approximation of an elastic friction contact problem with normal compliance*, préprint

HASLINGER, H. et HLAVAČEK, I.

- [1] *Contact between elastic bodies. I. Continuous problem*, Aplikace Matematiky, **25** (1980), 324-347.
 [2] *Contact between elastic perfectly plastic bodies*, Aplikace Matematiky, **27** (1982), 27-45.

HLAVAČEK, I. et NEČAS, J.

- [1] *Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies : an introduction*, Elsevier, Amsterdam (1981).
 [2] *Solution of Signorini's contact problem in the deformation theory of plasticity by secant modules method*, Aplikace Matematiky, **28** (1983) 199-214.

IONESCU, I. R.

- [1] *Dynamic processes for a class of elastic-viscoplastic materials*, St. Cerc. Mat. **44**, 12 (1992), 113-125.
 [2] *Boundary value problem with a non-local viscoplastic friction law for Bingham fluid*, St. Cerc. Mat. **37(1)** (1985), 60-65.

IONESCU, I. R. et SOFONEA, M.

- [1] *Quasistatic processes for elastic-visco-plastic materials*, Quart. Appl. Math. **2** (1988), 229-243.
 [2] *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford (1993).

KIKUCHI, N. et ODEN, J. T.

- [1] *Theory of variational inequalities with applications to problems flow through porous media*, International Journal of Engineering Sciences, **18** (1980), 1173-1184.

LABORDE, P.

- [1] *On visco-plasticity with hardening*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **1(3)** (1979), 315-339.

LICHT, C.

- [1] *Un problème d'élasticité avec frottement visqueux non linéaire*, J. Méc. Th. Appl., **4(1)** (1985), 15-26.

LIONS, J.-L.

- [1] *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non linéaires*, Dunod, Gauthiers-Villars (1969).

PANAGIOTOPOULOS, P. D.

- [1] *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser Verlag Basel (1985).

PRAGER, W.

- [1] *On Ideal Locking Materials*, *Transaction of the Society of Rheologie*, 1 (1957), 169–175.

PERZYNA, P.

- [1] *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, *Quart. Appl. Math.* 20(4) (1963), 321–332.

ROCHDI, M. et SOFONEA, M.

- [1] *On frictionless contact between two elastic-viscoplastic bodies*, *Quart. Jour. Mec. Appl. Math.*, 50, 3 (1997), 481–496.
 [2] *On rate-type viscoplastic problems with linear boundary conditions*, *Mathematische Nachrichten*, 193 (1998), 119–135.

ROCHDI, M., SHILLOR, M. et SOFONEA, M.

- [1] *Quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction*, *Journal of Elasticity*, 51 (1998), 105–126.

ROCHDI, M.

- [1] *Analyse Variationnelle de Quelques Problèmes aux Limites en Viscoplasticité*. Thèse de Doctorat, Université de Perpignan (1997).

ROCHDI, M. et TENIOU, B.

- [1] *Frictional contact problem for nonlinear elastic materials*, *App. Math. and Comp. Sci.*, 3 (1998), 491–504.

ROKAFELLER, E. T.

- [1] *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).

RUDIN, W.

- [1] *Functional Analysis*, Mc Graw-Hill, New York (1973).

SCHWARTZ, L.

- [1] *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris (1967).

SHILLOR, M. et SOFONEA, M.

- [1] *Quasistatic viscoelastic contact problem with friction*, (préprint).

SOFONEA, M.

- [1] *Some remarks on the behaviour of the solution in dynamic processes for rate-type models*, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 41 (1990), 656–668.
 [2] *Problèmes Mathématiques en Elasticité et Viscoplasticité*, Cours de D.E.A. de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand (1991).
 [3] *Problèmes Non-linéaires dans la Théorie de l'Elasticité*, Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie (1993).

- [4] *On a contact problem for elastic-viscoplastic bodies*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **29**, 9 (1996), 1037-1050.

YOSIDA, K.

- [1] *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1971).

Résumé

Le but de cette thèse est l'étude de quelques problèmes de contact avec ou sans frottement pour des solides déformables. Les lois de comportement considérées sont élastiques ou viscoplastiques, dépendant d'un paramètre (la température, par exemple). Le contact est modélisé par les conditions de Signorini sans frottement ainsi que par la loi de frottement de Tresca. Dans l'étude des problèmes mécaniques on considère des formulations variationnelles qui représentent la transposition en langage de dualité et de convexité du principe du travail virtuel. Pour ces modèles on établit des résultats d'existence, d'unicité ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport au paramètre, en utilisant des méthodes spécifiques à l'analyse fonctionnelle non-linéaire. Cette thèse est divisée en quatre chapitres et une annexe. Le premier chapitre est destiné à rappeler les principes et les résultats essentiels de la mécanique des milieux continus et à formuler les problèmes mécaniques traités dans la suite. Dans le second chapitre on étudie le problème de Signorini sans frottement pour les matériaux élastiques. Dans le troisième chapitre on étudie un problème élastique de contact avec frottement de Tresca. Dans le quatrième chapitre on étudie un problème quasi-statique de contact sans frottement pour des matériaux viscoplastiques. On termine cette thèse par une annexe contenant les outils mathématiques qui ont servi pour établir les résultats présentés ici.

Mots-Clés : élasticité, viscoplasticité, contact avec ou sans frottement, problème de Signorini, loi de Tresca, solution faible, opérateur fortement monotone, sous-gradient, inéquation variationnelle, point fixe, pénalisation.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of some contact problems with or without friction for deformable bodies. The constitutive laws considered here are elastic and viscoplastic and may involve a parameter, say the temperature. The contact is modeled with Signorini's conditions without friction or with Tresca's friction law. In the study of the mechanical problems we consider variational formulations which represent the restatement of the virtual work principle in terms of duality and convexity. For these models we establish existence, uniqueness and continuously dependence results of the solution with respect to parameters, using arguments of nonlinear functional analysis. This thesis is divided in four chapters and an appendix. The aim of the first chapter is to recall the background of mechanics of continua and to present the problems statements. The second chapter is devoted to the study of the Signorini's problem for elastic materials. In the third chapter we study the frictional contact of an elastic body using Tresca's law. In the fourth chapter we study a quasistatic frictionless problem for a viscoplastic body. We close this thesis an appendix which includes the main mathematical tools used in order to establish the results presented here.

Key Words : elasticity, viscoplasticity, contact with or without friction, Signorini's problem, Tresca's friction law, weak solution, strongly monotone operator, subgradient, variational inequality, fixed point, penalization.