République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mentouri - Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de mathématique

N° d'ordre :
Série :

THESE

Présentée pour l'obtention du Diplôme de Doctorat en sciences
Option : Equations Différentielles

Thème

L'étude d'une classe de problèmes mal posés

Par

Teniou Nihed

Devant le jury :

Président :	**A.Ayadi**	**Prof,à Université Larbi Ben M'hidi-Oum El-Bouaghi.**
Rapporteur :	**S.Djezzar**	**Prof,à Université Mentouri-Constantine.**
Examinateurs :	**A.L.Marhoune**	**Prof,à Université Mentouri-Constantine.**
	A.Aliouche	**M.C,à Université Larbi Ben M'hidi-Oum El-Bouaghi.**
	M.Bouzit	**M.C,à Université Larbi Ben M'hidi-Oum El-Bouaghi.**

Soutenue le :3 juillet 2012

Table des matières

0.1 NOTATIONS

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

A : opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert.

$D(A)$: le domaine de définition de l'opérateur A.

A^* : l'opérateur adjoint de l'opérateur A.

$KerA$: le noyau de l'opérateur A.

$\operatorname{Im} A$: l'image de l'opérateur A.

$A_{\alpha:}$ l'approximation de Yosida de l'opérateur A.

H : espace de Hilbert.

$F^{\perp}$: l'ensemble orthogonal de l'ensemble F.

$\overline{F}$: l'ensemble fermeture de l'ensemble F.

$\delta(H)$: l'ensemble des opérateurs auto-adjoint définis sur l'espace de Hilbert.

$S(t)$: semi-groupe.

$\rho(A)$: l'ensemble résolvant de A.

$\sigma(A)$: spectre de A.

λ : valeur propre de l'opérateur A.

$(.,.)$: produit scalaire.

$\|.\|$: une norme.

$L(H)$: l'ensemble des opérateurs linéaire définis sur H.

u' : la dérivée de u par rapport à t.

0.2 INTRODUCTION

0.2.1 Le concept des problèmes mal-posés

La notion d'un problème mathématique mal-posé a apparut dans les discussions du mathématicien français J. Hadamard dans son ouvrage "Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations" [27], après avoir introduit, une vingtaine d'années avant, la notion d'un problème bien-posé qui doit satisfaire, d'après lui, à trois propriétés : l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution. La perte d'une des propriétés définisse un problème dit mal-posé. C'était une étape pour la classification des models mathématiques de problèmes de physique associés à des équations différentielles.

Les méthodes générales de l'analyse mathématique ont bien était adaptés pour les solutions des problèmes bien-posés, cependant, ce n'était pas clair dans quel sens les problèmes mal-posés peuvent avoir solutions. Plusieurs mathématiciens comme Tikhonov, John, Lavrent'ev, Ivanov et d'autres ont travaillé pour développer la théorie et les méthodes pour résoudre les problèmes mal-posés. Ils ont pu donner une définition mathématique précise "des solutions approchées" pour des classes générales de ces problèmes. Aujourd'hui, ces problèmes sont un cadre de recherche très riche. Pour plus de détails du traitement des problèmes mal-posés, on réfère à deux excelents livres de D. Colton, H.W. Engel, A.K. Louis [15] et de H. W. Engl, M. Hanke et A. Neubauer [23].

Dans la littérature mathématique, plusieurs méthodes ont était proposer pour résoudre le problème mal-posé de Cauchy, on cite "la métode de quasi-solution" de

Tikhonov 1977 [57], "la méthode de quasi-réversibilité" par lattès et Lions en 1967 [39], [40], "la méthode de la convexité logarithmique" développer par John (1960) Agmon, Nirenberg (1963), Miller (1973), Payne (1973), Carraso (1999) [2], [12], [32] [37], [36], "les procedures itératives" par Kozlov et Maz'ya 1990 [35], [10] "la méthode quasi-valeur aux limites" par Clark et Oppenheimer 1995 [4], [14], [16], [17], [31], [43] [56] ; et "la technique des semi-groupes C-régularisés" par Mel'nikova, 2002 [5], [45] [46], [47], [48], [54].

0.2.2 Plan de la thèse

Cette thèse est un développement de l'étude d'une classe de prblèmes de Cauchy rétrogrades. Elle est composée de quatres chapitres.

Dans le Chapitre 1, on rappelle quelques résultats connus d'analyse fonctionnelle (les espaces de Hilbert, éléments de la théorie des opérateurs et les semigroupes).

Le Chapitre 2, est consacré pour la définition d'un problème mal-posé et certaines méthodes de résolutions. On présente brièvement le principe de trois métodes : la méthode de Tikhonov, le "discrepancy principle" de Morozov et la méthode de Landweber.

Dans les deux chapitres 3 et 4, on étudie un problème inverse de Cauchy qui modélise un certain nombre de phénomènes physiques par une équation parabolique avec condition finale.

Le problème étudié est le suivant :

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = 0, 0 \leq t < T \\ u(T) = \phi \end{cases}$$

$\phi \in H$ un espace de Hilbert. Dans ces deux chapitres, on perturbe l'opérateur A en utilisant l'approximation de Yosida $A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1}$.

Dans le Chapitre 3, on remplace la valeur finale par $u_\sigma(T) - \beta u_\sigma^{'}(0) = \phi$, $\alpha > 0$ $\beta > 0$ et $\sigma = (\alpha, \beta)$. On a obtenue des résultas de convergence et des estimations de l'erreur.

• *Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans le proceedings of the Third Conference on Mathematical Sciences* [19].

Dans le Chapitre 4, on utilise la perturbation suivante pour la condition finale : $u_\sigma(T) + \beta\left(u_\sigma(0) - u_\sigma^{'}(0)\right) = \phi$. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\sigma = (\alpha, \beta)$. Ce choix a donné des résultats améliorés.

• *Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans International Journal of Differential Equations* [20].

Chapitre 1

RAPPELS D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Afin de simplifier la lecture de ce travail, cette partie de la thèse est consacrée pour rappeler quelques définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent les espces de Hilbert, les opérateurs et leurs propriétés définis sur les espaces de Hilbert ainsi que les semi-groupes. Pour plus de détails et pour les démonstrations des théorèmes on propose de voir [8], [53], [58].

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions

Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1 Un produit scalaire est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$

symétrique et définie positive, c'est-à-dire

$\bullet \forall (u,v,w) \in H^3, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ (\alpha u + \beta v, w) = \alpha (u,w) + \beta (v,w)$

$\bullet \forall (u,v) \in H^2, (u,v) = (v,u)$

$\bullet \forall u \in H, (u,u) \geq 0$

$\bullet\, (u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$

On note par : $|u| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$, la norme définie sur H associée au produit scalaire.

Example sur $\mathbb{R}^n$, $(u,v) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i$ définit un produit scalaire euclidien usuel.

Définition 1.2 On appele un espace de Hilbert tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire et complet pour la norme associée.

Exemple L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire euclidien usuel, est un espace de Hilbert.

Exemple L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire suivant

$$(u,v) = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx$$

est un espace de Hilbert.

1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert.

Proposition 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Tous les éléments u, v de H, vérifient :

$$|(u,v)|^2 \leq \|u\|_H^2 \cdot \|v\|_H^2$$

cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwartz.

Proposition 1.4 (Identité du Parallélogramme)

Pour tous $(u, v) \in H^2$, on a l'identité :

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\left(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2\right)$$

appelée l'identité du parallélogramme

Théorème 1.5 (de Projection)

Soit K un sous-espace convexe fermé non-vide de H. Pour tout f de H, il existe un élément unique u de K, tel que :

$$|f-u| = \min_{v \in K} |f-v|$$

De plus, u est caractérisé par la propriété suivante

$$u \in K, \ \ (f-u, v-u) \leq 0, \ \ \forall v \in K$$

On appelle u la projection de f sur K, notée par : $u = P_K f$.

Définition 1.6 Les deux éléments u, v de H sont dits orthogonaux et notés $u \perp v$ si $(u, v) = 0$.

On note l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F par :

$$F^{\perp} = \{u \in H, (u, v) = 0, \forall v \in F\}$$

1.1.3 Bases Hilbertiennes

Définition 1.7 On appele base Hilbertienne d'un espace de Hilbert H, toute suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, telle que :

$$\begin{cases} \|e_n\|_H = 1, \forall n. \\ (e_n, e_m) = 0, \forall n \neq m. \end{cases}$$

L'espace vectoriel engendré par cette base est dense dans H. Alors, tout élément u de H, s'écrit :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, e_n)\, e_n$$

et vérifie l'égalité de Bessel-Parseval

$$\|u\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)|^2$$

Un tel développement est unique, c'est-à-dire que si :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e_n$$

avec : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$, alors : $u_n = (u, e_n)$.

Exemple les deux suites de fonctions suivantes

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx\right)_{n\geq 1}, \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx\right)_{n\geq 1}$$

sont des bases Hilbertiennes de $L^2(0, 2\pi)$.

1.2 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

Soient H et G deux espaces de Hilbert.

1.2.1 Continuité, borne et norme d'un opérateur linéaire

Définition 1.8 Un opérateur linéaire et continu A définie de H dans G, est une application linéaire et continue de H dans G, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall u \in H,\ Au \in G \\ \forall (u,v) \in H \times H, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av \\ \exists M > 0, \forall u \in H, \|Au\|_G \leq M \|u\|_H \end{cases}$$

le plus petit nombre M, s'appelle la norme de l'opérateur A :

$$\|A\| = \sup_{u \in H} \frac{\|Au\|_G}{\|u\|_H}$$

Définition 1.9 On dit que l'opérateur $A : H \longrightarrow G$, est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$, un ensemble borné dans l'espace G.

Définition 1.10 Un opérateur linéaire $A : H \longrightarrow G$, défini sur $D(A) = H$ est continu, s'il est continu en $0 \in H$.

Théorème 1.11 Un opérateur linéaire $A : H \longrightarrow G$, tel que $D(A) = H$ est borné si et seulement si pour tout $u \in H$, on a

$$\|Au\| \leq c \|u\|$$

Théorème 1.12 Soit un opérateur linéaire $A : H \longrightarrow G$, tel que $D(A) = H$. A est continu si et seulement s'il est borné.

1.2.2 Opérateurs adjoints

Définition 1.13 L'espace des fonctionnelles linéaires et continues $\mathcal{L}(X, Y)$, où X est un sous-espace vectoriel normé et $Y = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est appelé espace dual de X et noté X^*.

Soit A un opérateur linéaire défini sur $D(A)$ un ensemble dense dans H.

Définition 1.14 Un opérateur A^* défini sur $D(A^*) \subset G^*$ à valeur dans H^*, tel que

$$\forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*) : (Au, v) = (u, Av)$$

est appelé l'adjoint de A et vérifie de plus : $(A^*)^* = A$ et $\|A^*\| = \|A\|$.

Proposition 1.15 Soient A, B deux opérateurs linéaires et α, β deux scalaires. On a :

- $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$.
- $(AB)^* = B^* A^*$.

Proposition 1.16 Soit $A : H \longrightarrow G$, un opérateur linéaire et A^* son adjoint. On a les relations suivantes :

- $Ker A^* = (\operatorname{Im} A)^{\perp}$
- $(Ker A)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} A^*}$

1.2.3 Opérateurs auto-adjoints

Soit H un espace de Hilbert.

Définition 1.17 On dit que l'opérateur A est auto-adjoint si et seulement si $A^* = A$ c'est-à-dire

$$\forall u, v \in H, (Au, v) = (u, A^* v)$$

L'ensemble de tous les opérateurs auto-adjoints sur H est noté par $\delta(H)$.

Théorème 1.18

1) $\forall A, B \in \delta(H), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha A + \beta B \in \delta(H)$

2) $\forall A, B \in \delta(H)$, AB est un opérateur auto-adjoint $\Longleftrightarrow$ $AB = BA$

3) Si l'opérateur $A \in \delta(H)$, alors on a : $\|A\| = \sup\limits_{\|u\| \leq 1} |(Au, u)|$

Définition 1.19 Un opérateur $A \in \delta(H)$ est dit positif et noté $A \geq 0$, si

$$(Au, u) \geq 0, \forall u \in H$$

1.2.4 Opérateurs linéaires compacts

Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert.

Définition 1.20 Un opérateur $A : H_1 \longrightarrow H_2$, est dit compact si toute suite borné (f_n) de $D(A)$ contiennent une sous-suite (f_{n_k}) pour laquelle (Af_{n_k}) est convergente et ça c'est équivalent à : l'image d'un ensemble borné par l'opérateur A est un ensemble relativement compact.

Théorème 1.21 Si A est compact$\Longrightarrow$ $\overline{A}$ est compact

Théorème 1.22 Tout opérateur compact est borné.

1.2.5 Spèctre d'un opérateur linéaire

Soit A un opérateur linéaire défini de H dans G tel que $D(A) = H$.

Définition 1.23 On dit que le point λ est un point régulier de A si l'opérateur $(A - \lambda I)$ est inversible, i.e : $\det(A - \lambda I) \neq 0$.

L'ensemble des points réguliers de l'opérateur A est appelé ensemble résolvant de A et noté par : $\rho(A)$.

Définition 1.24 Si $\lambda \in \rho(A)$, L'opérateur linéaire et borné $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est appelé résolvante de A.

Définition 1.25 L'ensemble complémentaire de $\rho(A)$ dans le plan complexe est appelé le spèctre de l'opérateur A et noté par $\sigma(A)$.

Définition 1.26 (Valeur et vecteur propre)

Le nombre λ est dit valeur propre de l'opérateur A s'il existe $u \in D(A)$, tel que :

$$Au = \lambda u, \; u \neq 0$$

l'élément u est le vecteur propre de A associé à λ. Toute valeur propre de A est un point de son spectre, l'opérateur $(A - \lambda I)$ est donc non-inversible.

Proposition 1.27

Si l'opérateur A est auto-adjoint et de plus positif, alors $\sigma(A) \subset [0, +\infty[$.

Proposition 1.28 Soit H un espace de Hilbert. A est un opérateur linéaire et borné, alors : $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.

Théorème 1.29 Soit A un opérateur auto-adjoint et compact dans un espace de Hilbert complexe H. Alors :

1) A possède au moins une valeur propre non-nulle si $A \neq 0$.

2) Les valeurs propres de A sont toutes réelles et contenues dans $[m, M]$, où :

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \quad , \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

3) M est la plus grande valeur propre de A si $M \neq 0$, m est la plus petite valeur propre de A si $m \neq 0$.

1.2.6 Opérateurs non-bornés dans un espce de Hilbert

Dans un espace de Hilbert complexe H, on considère un opérateur linéaire A défini sur un ensemble $D(A)$ dense dans H. Soit A^* l'adjoint de A.

Définition 1.30 On dit que l'opérateur A est symétrique si $D(A^*) \supset D(A)$ et si sur $D(A)$ on a : $A^*x = Ax$.

Définition 1.31 On dit que l'opérateur A est auto-adjoint si $D(A^*) = D(A)$ et si sur $D(A)$ on a : $A^*x = Ax$.

1.3 Rappel sur les semi-groupes

Dans cette section on présente quelques définitions et théorèmes venus de la théorie des semi-groupes qui doit son origine à l'étude des équations différentielles ordinaires en dimension finie.

1.3.1 Définitions

Soit X un espace de Banach.

Définition 1.32 On dit que la famille d'opérateurs linéaires $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe (fortement continu) si :

(i) $\forall t \geq 0, S(t) \in L(X)$

(ii) $S(0) = Id_{L(X)}$

(iii) $\forall (s,t) \geq 0, S(s+t) = S(s) \circ S(t)$

(iv) $\forall x \in X, \lim\limits_{x \longrightarrow 0} S(t)\, x = x$

Définition 1.33 On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur non-borné $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, défini par :

$$Ax = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{S(t)\, x - x}{t}$$

Remarque Dans le cas où $D(A) = X$ et $A \in L(X)$, la famille d'opérateurs $\left(e^{-tA}\right)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de générateur infinitésimal A, c'est pourquoi on note abusivement $S(t) = e^{-tA}$.

Définition 1.34 Le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit de contraction si :

$$\|S(t)\|_{L(X)} \leq 1, \ \forall t \geq 0$$

.

1.3.2 Propriétés des semi-groupes de contraction

Théorème 1.35 soient X un espace de Banach, $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe de contraction sur X et A son générateur infinitésimal , alors :

(i) $\forall x \in X : t \longrightarrow S(t)\,x \in C^0(\mathbb{R}^+, X)$.

(ii) $\forall x \in X, \forall t \geq 0 : S(t)\,x \in D(A)\,, S(t)\,x \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ et vérifie $x'(t) = Ax(t)$

(iii) A est fermé de domaine dense.

Théorème 1.36 (caractérisation des générateurs infinitésimaux)

Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur non-borné sur X. On a l'équivalence :

(i) A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.

(ii) $D(A)$ est dense et pour toute condition initiale $x_0 \in D(A)$, il existe une unique solution $x(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$ de $\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

De plus sous cette hypothèse la solution $x(t)$ est à valeurs dans $D(A)$ et vérifie $\|x(t)\|_X \leq \|x_0\|_X$, ainsi que $\|x'(t)\|_X \leq \|Ax(t)\|_X \leq \|Ax_0\|_X$.

1.4 L'opérateur A_α

Définition 1.37 Soit A un opérateur positif, auto-adjoint et non-borné sur un espace de Hilbert H. L'opérateur

$$A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1}$$

est appelé **approximation de Yosida** de l'opérateur A.

Théorème 1.38 (Propriétés de l'opérateur A_α)

- L'opérateur A_α est positif et auto-adjoint.
- L'opérateur $A_\alpha \in L(H)$.
- $\|A_\alpha h\| \leq \|Ah\|, \forall \alpha > 0, \forall h \in D(A)$.
- $\forall h \in D(A), \lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} A_\alpha h = Ah$.
- $\forall h \in H, \forall t \geq 0, \lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} S_\alpha(t) h = \lim\limits_{\alpha \longrightarrow 0} e^{-tA_\alpha} h = S(t) h = e^{-tA} h$.

1.5 Théorème de Hille-Yosida

Soit H un espace de Hilbert.

Définition 1.39 L'opérateur linéaire non-borné $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$, est monotone si

$$(Av, v) \geq 0, \forall v \in D(A)$$

et il est maximal monotone si de plus $\operatorname{Im}(I + A) = H$, i.e :

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) : \; u + Au = f$$

Théorème 1.40 (Hille-Yosida)

Soit A un opérateur maximal monotone défini sur un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction

$$u \in C^1\left(\mathbb{R}^+, H\right) \cap C\left(\mathbb{R}^+, D(A)\right)$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0| \;\; et \;\; \left|\frac{du(t)}{dt}\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall t \geq 0$$

Remarque L'intérèt principal du théorème de Hille-Yosida réside dans le fait que pour résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

on se ramène à vérifier que A est maximal monotone.

Chapitre 2

QUELQUES MÉTHODES DE RÉGULARISATION DE PROBLÈMES MAL-POSÉS

2.1 Problèmes inverses

Dans le livre "Inverse Problems" [33], l'auteur introduit la définition d'un problème inverse. Il s'agit d'un problème qui détermine des causes connaissant des effets. Ce problème est l'inverse d'un autre appelé direct qui détermine les effets, les causes étant connues.

L'étude des problèmes inverses est difficile et ça est dû à la possibilité d'avoir plusieurs solutions, car des causes différentes mènent aux même effets. Des informations en plus sont nécéssaires pour récupérer l'unicité de la solution.

Une autre difficulté pratique de l'étude des problèmes inverses est qu'elle demande souvent une bonne connaissance du problème direct, d'où le succès dans la résolution d'un problème inverse repose en général sur des éléments spécifiques à ce problème. Il existe toutefois quelques techniques qui possèdent un domaine d'applicabilité étendu.

Parmi les domaines dans lesquels les problèmes inverses jouent un rôle important nous pouvons citer :

l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X, ...), l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir ...), l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques) la chimie (détermination des constantes de réaction), le radar (détermination de la forme d'un obstacle), la mécanique quantique (détermination du potentiel), le traitement d'image (restauration d'images floues)...etc.

La plus part des problèmes inverses ne satisfait pas à la définition d'un problème bien-posé, on les appelle problèmes mal-posés.

2.2 Problèmes bien-posés et mal-posés

Le mathématicien français Jaques Hadamard a définit le concept d'un problème bien-posé. Il s'agit d'un problème dont :

– la solution existe ;

– elle est unique ;

– elle dépend continûment des données.

Un problème qui n'est pas bien-posé au sens de la définition précédente est dit mal-posé.

La non-existence et la non-unicité de la solution d'un problème mal-posé sont sans doute des difficultés sérieuses mais on peut les rétablir. Cependant le manque de continuité est plus problématique, en particulier en vue d'une résolution approchée ou numérique. C'est-à-dire il ne sera pas possible (indépendamment de la méthode numérique) d'approcher d'une manière satisfaisante la solution du problème inverse car les données disponibles seront bruitées donc proches, mais différentes des données réelles.

2.3 Exemples de problèmes mal-posés

On présente ici quelques exemples simples de problèmes mal-posés. Pour d'autres exemples bien détaillés, on conseille de voir les deux célèbres livres de H. W. Engl M. Hanke et A. Neubauer [23] et A.N. Tikhonov et V.Y. Arsenin [57] .

♦Les équations intégrales de première espèce de Fredholm et Voltera

Si $Au = \int_a^b A(x,y)\,u(y)\,dy$ ou $Vu = \int_a^x A(x,y)\,u(y)\,dy$, et $A(x,y)$ est un noyau continu sur $D = [a,b] \times [a,b]$, alors les opérateurs A et V sont compacts sur $H = L^2[a,b]$. Ces opérateurs n'admettent pas d'inverses bornés sur H, c'est pour ça les problèmes $Au = f$ et $Vu = f$, sont mal-posés.

♦Problèmes de minimisation

On considère le problème de minimisation :

$$\phi(u) = \inf \|Au - f\|$$

On suppose que u_i est l'infinimum de $\phi(u)$: $\phi(u_i) \leq \phi(u)$.

Si f est perturbée, donc : $\phi_\delta(u) = \inf \|Au - f_\delta\|$, $\|f_\delta - f\| \leq \delta$, l'infinimum de $\phi_\delta(u)$ peut ne pas être atteint à un élément u_δ qui est loin de u_i, d'où le graphe $f \longrightarrow u_i$; peut être non-continu. Dans ce cas ce problème est mal-posé. Des problèmes similaires sont étudiés dans [61].

⧫Le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

On considère le problème :

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \quad y > 0 \\ u\,|_{y=0} = 0 \\ u_y\,|_{y=0} = V_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \end{cases}$$

$u = u(x,y)\,, x \in \mathbb{R}, y > 0$. C'est clair que : $u(x,y) = \frac{\sin nx}{2n^2}\left(e^{ny} - e^{-ny}\right)$, est une solution du problème et elle est unique (par l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations elliptiques). Cet exemple appartient à J. Hadamard, et il montre que la condition de Cauchy peut être arbitrairement petite lorsque la solution tend vers l'infini quand $n \longrightarrow \infty$, pour tout point $(x,y)\,, y > 0, x \neq n\pi$. Donc ce problème est mal-posé.

⧫L'équation de la chaleur rétrogradée

On considère le problème de l'équation de la chaleur rétrograde :

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ t \geq 0, x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,T) = \nu(x) \end{cases}$$

$\nu(x)$ est donnée. On veut trouver $u(x,0) = w(x)\,.$

En séparant les variables, on obtient que :

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin(nx)$$

$u_n(t)=e^{-n^2(t-T)}\nu_n,\ \nu_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\nu(x)\sin(nx)\,dx$, donc :

$$w(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2T}\nu_n\sin(nx)$$

à condition que cette série converge sur $L^2[0,\pi]$, c'est-à-dire : $\sum_{n=1}^{\infty}e^{2n^2T}|\nu_n|^2<\infty$. Et ça ne peut pas avoir lieu seulement si ν_n décroit suffisament rapide, d'où le problème de la chaleur est mal-posé : il n'est pas résoluble pour une donné $\nu(x)$ à moins que la condition $\sum_{n=1}^{\infty}e^{2n^2T}|\nu_n|^2<\infty$, soit vérifiée et des petites perturbations de la donnée ν dans $L^2[0,\pi]$ peut emmener à des perturbations larges et arbitraires de la fonction $w(x)$, voir [42], [30].

2.4 Méthodes de régularisation

On aborde dans cette partie de ce chapitre le principe de quelques méthodes de régularisation. En fait, cette partie est une introduction aux méthodes de régularisation les plus courantes : la méthode de Tikhonov, la méthode de Morozov et on termine par une méthode itérative c'est la méthode de Landweber. Pour une lecture plus approfondie on propose de voir le livre de Kirsch [34].

Régulariser un problème mal-posé, c'est le remplacer par un autre, bien-posé de sorte que l'erreur commise soit compensée par le gain de stabilité. La principale difficulté dans l'application d'une méthode de régularisation à un problème particulier est la détermination du paramètre de régularisation lui-même.

Dans cette partie $K : X \longrightarrow Y$, désigne un opérateur linéaire et borné défini entre deux espaces de Hilbert X et Y.

2.4.1 La méthode de Tikhonov

Cette méthode de régularisation consiste à résoudre le système linéaire

$$Kx = y \tag{2.1}$$

qui revient à minimiser

$$\|Kx - y\|_Y$$

tels que $x \in X$, $y \in Y$.

Si X est de dimension infinie et l'opérateur K est compact, ce problème de minimisation est aussi mal-posé, voir le lemme suivant :

Lemme 2.1

Soient $K : X \longrightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $y \in Y$. Il existe $\widehat{x} \in X$ tel que $\|K\widehat{x} - y\|_Y \leq \|Kx - y\|_Y$, pour tout $x \in X$ si et seulement si $\widehat{x} \in X$, est une solution de l'équation :

$$K^*K\widehat{x} = K^*y \tag{2.2}$$

On se donne $K : X \longrightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $y \in Y$ et on veut déterminer $x^{\alpha} \in X$, qui minimise *la fonctionnelle de Tikhonov :*

$$J_{\alpha}(x) = \|Kx - y\|^2 + \alpha \|x\|^2 \tag{2.3}$$

On a le théorème suivant :

Théorème 2.2

Soient $K : X \longrightarrow Y$, un opérateur linéaire et borné et $\alpha > 0$. La fonctionnelle de Tikhonov J_{α} admet un seul minimum $x^{\alpha} \in X$. Ce minimum est la solution unique de l'équation

$$\alpha x^{\alpha} + K^* K x^{\alpha} = K^* y \tag{2.4}$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [34] p.37.

La solution de l'équation 2.4 peut être écite sous la forme $x^{\alpha} = R_{\alpha} y$, tel que :

$$R_{\alpha} := (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* : Y \longrightarrow X \tag{2.5}$$

En choisissant un système singulier $\left(\mu_j, x_j, y_j\right)$ pour l'opérateur compact K, on voit que $R_{\alpha} y$ admet la représentation suivante :

$$R_{\alpha} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_j}{\alpha + \mu_j^2} (y, y_j)\, x_j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q\left(\alpha, \mu_j\right)}{\mu_j} (y, y_j)\, x_j \quad , \quad y \in Y \tag{2.6}$$

avec : $q(\alpha, \mu) = \frac{\mu^2}{\alpha + \mu^2}$. Cette fonction q est appelée *la fonction filtre.*

Théorème 2.3

Soit $K : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact et $\alpha > 0$.

a) L'opérateur $\alpha I + K^*K$ admet un inverse borné. L'opérateur $R_\alpha : Y \longrightarrow X$ défini par 2.5 forme une stratégie de régularisation avec $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$. On l'appelle *la méthde de régularisation de Tikhonov.* $R_\alpha y^\delta$ est déterminé comme la solution unique $x^{\alpha,\delta} \in X$ de l'équation du second espèce

$$\alpha x^{\alpha,\delta} + K^*Kx^{\alpha,\delta} = K^*y^\delta \tag{2.7}$$

chaque choix $\alpha(\delta) \longrightarrow 0$ $(\delta \longrightarrow 0)$ avec $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \longrightarrow 0$ $(\delta \longrightarrow 0)$ est admissible.

b) Soit $x = K^*z \in \operatorname{Im}(K^*)$ avec $\|z\| \leq E$. On choisit $\alpha(\delta) = \frac{c\delta}{E}$ pour $c > 0$, alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\left\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\right\| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right)\sqrt{\delta E} \tag{2.8}$$

c) Soit $x = K^*Kz \in \operatorname{Im}(K^*K)$ avec $\|z\| \leq E$. Le choix $\alpha(\delta) = c\left(\frac{\delta}{E}\right)^{\frac{2}{3}}$, pour $c > 0$, donne l'estimation de l'erreur :

$$\left\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\right\| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{c}} + \sqrt{c}\right)E^{\frac{1}{3}}\delta^{\frac{2}{3}} \tag{2.9}$$

Pour cela, la méthode de régularisation de Tikhonov est optimale pour $\left\|(K^*)^{-1}x\right\| \leq E$ où $\left\|(K^*K)^{-1}x\right\| \leq E$.

Les valeurs propres de K tendent vers zéro et les valeurs propres de $\alpha I + K^*K$ sont bornées loines de zéro par $\alpha > 0$.

Du théorème précédent, on observe que α a été choisit d'une façon à dépendre de δ et qu'il converge vers zéro quand δ tend vers zéro mais pas plus vite que δ^2.

Théorème 2.4

Soit $K : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire et compact tel que l'image $\mathrm{Im}\,(K)$ est de dimension infinie. De plus, soit $x \in X$, et on assume qu'il existe une fonction continue $\alpha : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ avec $\alpha\,(0) = 0$,telle que

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \left\| x^{\alpha(\delta),\delta} - x \right\| \delta^{-\frac{2}{3}} = 0$$

pour tout $y^{\delta} \in Y$ avec $\left\| y^{\delta} - Kx \right\| \leq \delta$, où $x^{\alpha(\delta),\delta} \in X$ résoud 2.7. Alors $x = 0$.

La démonstration détaillée de ce résultat se trouve dans le livre de Kirsch [34]. p.39.

Ce résultat montre que la méthode de régularisation de Tikhonov n'est pas optimale pour des hypothèses plus fortes sur la solution x.

Le choix de α dans le théorème 2.3 est mis à priori, c'est-à-dire avant de commencer le calcul de x^{α} en résolvant le problème des moindres carrés.

2.4.2 Le principe de Morozov

On donne ici un exemple de méthode de choix à posteriori du paramètre de régularisation. On expose la plus classique de celles-ci, "the discrepancy principle" de Morozov [51], ou le principe de décalage de Morozov.

D'après kirsch [34], on présente un principe basé sur la méthode de régularisation de Tikhonov.

On assume que $K : X \longrightarrow Y$ est un opérateur compact et injectif défini entre les deux espaces de Hilbert X et Y avec une image dense $\mathrm{Im}\,(K) \subset Y$.

En étudie encore l'équation $Kx = y$, $y \in Y$.

On calcule maintenant le paramètre de régularisation $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, tel que la solution de Tikhonov correspondante est la solution de l'équation 2.7 et elle est le minimum de 2.3 qui satisfait à l'équation

$$\left\|Kx^{\alpha,\delta} - y^{\delta}\right\| = \delta$$

On note que le choix de α par "the discrepancy principle" guarentie d'une part que l'erreur est δ, d'autre part, α est très petit.

Théorème 2.5

Soit $K : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire et compact avec une image dense dans Y.

Soit $Kx = y$, $x \in X$, $y \in Y$, $y^{\delta} \in Y$ tels que : $\left\|y - y^{\delta}\right\| \leq \delta < \left\|y^{\delta}\right\|$. Soit $x^{\alpha(\delta)}$ la solution de Tikhonov satisfaisant $\left\|Kx^{\alpha(\delta),\delta} - y^{\delta}\right\| = \delta$, pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$. Alors :

a) $x^{\alpha(\delta),\delta} \longrightarrow x$ pour $\delta \longrightarrow 0$. Donc "the discrepancy principle" est admissible.

b) Soit $x = K^*z \in K^*(Y)$ avec $\|z\| \leq E$, alors

$$\left\|x^{\alpha(\delta),\delta} - x\right\| \leq 2\sqrt{\delta E}$$

Pour cela "the discrepancy principle" est une stratégie de régularisation optimale sous la condition $\left\|(K^*)^{-1} x\right\| \leq E$.

La preuve de ce théorème est dans [34]. p.48.

La détermination de $\alpha(\delta)$ est équivalente au problème de trouver la racine de la fonction monotone :

$$\phi(\alpha) = \left\| Kx^{\alpha(\delta),\delta} - y^{\delta} \right\|^2 - \delta^2$$

pour δ fixé. Ce n'est pas nécéssaire de satisfaire l'équation $\left\| Kx^{\alpha,\delta} - y^{\delta} \right\| = \delta$, exactement, une inclusion de la forme

$$c_1\delta \leq \left\| Kx^{\alpha(\delta),\delta} - y^{\delta} \right\| \leq c_2\delta$$

est suffisante pour prouver les assertions du théorème précédent.

Dans le théorème suivant, on prouve que l'ordre de convergence $\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right)$ est meilleur pour le principe de décalage de Morozov.

Théorème 2.6

Soit K un opérateur compact et soit $\alpha(\delta)$ choisit par le principe de décalage. On assume que pour tout $x \in \mathrm{Im}(K^*K)$, $y = Kx \neq 0$ et pour toute suite $\delta_n \longrightarrow 0$ et $y^{\delta_n} \in Y$, tel que : $\left\| y - y^{\delta_n} \right\| \leq \delta_n$ et $\left\| y^{\delta_n} \right\| > \delta_n$ pour tout n. La solution de Tikhonov correspondante $x^n = x^{\alpha(\delta_n),\delta_n}$ converge vers x plus vite que $\sqrt{\delta_n}$ vers zéro, donc

$$\frac{1}{\sqrt{\delta_n}} \left\| x^n - x \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors l'image $\mathrm{Im}(K)$ est de dimension fini.

Des efforts énormes sont faits pour modifier le principe de décalage original. Voir [22], [21], [25] et d'autres.

2.4.3 La méthode de Landweber

Les méthodes itératives sont des méthodes qui construisent une suite de solutions approchées qui (dans le cas non bruité) convergent vers la solution désirée. Dans le contexte des problèmes inverses la situation est plus compliquée : en présence de bruit, la suite construite par la méthode itérative ne converge pas, en général, vers une solution du problème de départ. Il est, encore une fois, nécessaire de régulariser le processus itératif, et c'est l'indice d'itération lui-même qui joue le rôle de paramètre de régularisation. En d'autres termes, il convient d'arrêter les itérations plus tôt qu'on ne le ferait dans un cas non bruité.

On examine dans ce paragraphe que la plus simple des méthodes itératives : la méthode de Landweber [38], qui a pour principal avantage de se prêter à une analyse simple. Malheureusement, elle converge trop lentement pour être utilisable en pratique, d'autant plus que des méthodes beaucoup plus performantes existent. Les deux plus importantes sont la méthode de Brakhage voir [23], et surtout la méthode du gradient conjugué et ses variantes. Cette dernière méthode est la plus employée. Dans le contexte des problèmes mal-posés, un exposé accessible se trouve dans le livre de Kirch [34], des exposés plus complets sont dans [23], [28] (cette dernière référence est consacrée entièrement à l'analyse des méthodes de type gradient conjugué pour les problèmes mal-posés).

Landweber [38], Fridman [24] et Bialy [6] ont proposé de réécrire l'équation $Kx = y$ sous la forme :

$$x = (I - aK^*K)\,x + aK^*y$$

pour $a > 0$. Le schéma itérative de cette équation est le suivant :

$$x^0 = 0 \;\text{ et }\; x^m = (I - aK^*K)\,x^{m-1} + aK^*y \tag{2.10}$$

pour $m = 1, 2, ...$

Lemme 2.7

Soit la suite (x^m) définie par 2.10 et on définit la fonctionnelle $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\Psi(x) = \frac{1}{2}\|Kx - y\|^2$, $x \in X$. Alors Ψ est différentiable au sens de Fréchet pour tout $z \in X$ et

$$\Psi'(z)\,x = \operatorname{Re}(Kz - y, Kx) = \operatorname{Re}(K^*(Kz - y), x),\; x \in X \tag{2.11}$$

La fonctionnelle linéaire $\Psi'(z)$ peut être identifié avec $K^*(Kz - y) \in X$ sur l'espace de Hilbert X.

C'est facile de voir la forme explicite $x^m = R_m y$, où l'opérateur $R_m : Y \longrightarrow X$ est défini par :

$$R_m = a\sum_{k=0}^{m-1} (I - aK^*K)^k K^*,\; m = 1, 2, ... \tag{2.12}$$

Théorème 2.8

a) Soit $K : X \longrightarrow Y$, un opérateur compact et soit $0 < a < \frac{1}{\|K\|^2}$. On définit les opérateurs linéaires et bornés $R_m : Y \longrightarrow X$ par 2.12. Ces opérateurs définissent une stratégie de régularization de paramètre $\alpha = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ et $\|R_m\| \leq \sqrt{am}$. La suite $x^{m,\delta} = R_m y^\delta$ est calculée par les itérations suivantes :

$$x^{0,\delta} = 0 \;\; \text{et} \;\; x^{m,\delta} = (I - aK^*K)\, x^{m-1,\delta} + aK^*y^\delta$$

pour $m = 1, 2, ...$ Toute stratégie $m(\delta) \longrightarrow \infty$ $(\delta \longrightarrow 0)$ avec $\delta^2 m(\delta) \longrightarrow 0$ $(\delta \longrightarrow 0)$ est admissible.

b) Soit $x = K^*z \in \mathrm{Im}(K^*)$ avec $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \frac{E}{\delta} \leq m(\delta) \leq c_2 \frac{E}{\delta}$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\left\|x^{m,\delta} - x\right\| \leq c_3 \sqrt{\delta E}$$

pour c_3 qui dépend de c_1, c_2 et a. Alors l'itération de Landweber est optimale pour $\left\|(K^*)^{-1} x\right\| \leq E$.

c) Maintenant, soit $x = K^*Kz \in \mathrm{Im}(K^*K)$, $\|z\| \leq E$ et $0 < c_1 < c_2$, pour chaque choix $m(\delta)$ avec $c_1 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}} \leq m(\delta) \leq c_2 \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{2}{3}}$, on a :

$$\left\|x^{m,\delta} - x\right\| \leq c_3 E^{\frac{1}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}$$

pour c_3 qui dépend de c_1, c_2 et a. Pour cela, l'itération de Landweber est aussi optimale pour $\left\|(K^*K)^{-1} x\right\| \leq E$.

Pour cette méthode, on observe qu'une haute précision demende un nombre large m d'itérations mais la stabilité nous force à garder m le plus petit possible.

Chapitre 3

MÉTHODE DE RÉGULARISATION MODIFIÉE POUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES DE CAUCHY RÉTROGRADES

On considère dans ce chapitre un problème de Cauchy rétrograde, parabolique et abstrait associé à un opérateur linéaire, non-borné défini sur un espace de Hilbert H dont le coefficient de l'équation est un opérateur positif, non-borné et auto-adjoint et la donnée est à l'instant final $t = T$. Il est connue que ce problème est mal-posé dans le sens où la solution si elle existe, elle ne dépend pas continûment de la donnée.

Pour étudier ce problème, on a besoin de régulariser le problème donné en perturbant l'équation et la condition finale afin d'obtenir un problème approché non-local qui dépend de deux paramètres très petits.

On établit une estimation pour la solution du problème régularisé et on montre que le problème modifié est stable et sa solution est une approximation de la solution exacte du problème original. En fin, des résultats de convergence sont établis.

3.1 Introduction

Soit A un opérateur positif (on suppose que $A \geq \eta > 0$), auto-adjoint, linéaire et non-borné sur un espace de Hilbert H, tel que $-A$ est le générateur d'un semi-groupe de contraction et compact sur H.

On considère le problème à valeur finale de trouver $u : [0, T] \longrightarrow H$, tel que :

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = 0, \quad 0 \leq t < T \\ u(T) = \phi \end{cases} \tag{3.1}$$

pour une certaine valeur finale ϕ dans H. Ce problème n'est pas bien-posé seulement si une solution unique existe sur $[0, T]$, elle ne doit pas dépendre continûment de la valeur finale ϕ. Ce type de problèmes a était considéré par plusieurs auteurs utilisant des approches différentes, comme Lattès et Lions [39], Lavrentiev [41], Miller [50], Payne [52], Showalter [55]. Ils ont approché le problème à valeur finale 3.1 en perturbant l'opérateur A.

Un problème similaire a était traité d'une autre manière voir [1], [14], [56]. En perturbant la condition de la valeur finale, ils approchent le problème 3.1 par

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & 0 \le t < T \\ u(T) + \alpha u(0) = \phi \end{cases}$$

une approche similaire est connue comme la méthode des conditons aux limites auxiliaires et donnée dans [31], [44]. De plus, les conditions standars de la forme

$$u(T) + \alpha u(0) = \phi$$

pour les équations paraboliques ont été considérées dans des travaux récents voir [3] [4]. Pour d'autres résultats conçernant ce type de problèmes, voir aussi [17], [18].

Dans ce chapitre, on perturbe l'équation et la condition finale du problème 3.1 au même temps, pour avoir un problème non-local approché qui dépend de deux paramètre très petits avec une condition aux limites qui contient une dérivée du même ordre que l'équation, comme suit :

$$\begin{cases} v_\sigma'(t) + A_\alpha v_\sigma(t) = 0, & 0 \leqslant t < T \\ v_\sigma(T) - \beta v_\sigma'(0) = \phi \end{cases}$$

où l'opérateur A est remplacé par $A_\alpha = A(I + \alpha A)^{-1}$ et la condition $u(T) = \phi$ par $u_\sigma(T) - \beta u_\sigma'(0) = \phi$, $\sigma = (\alpha, \beta)$ tels que $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

On montre que les problèmes approchés sont bien-posé et que leurs solutions v_σ converge si et seulement si le problème original a une solution classique. On montre aussi que cette méthode donne une approximation meilleure que d'autres types de méthodes comme quasi-révérsibilité et quasi-valeur aux limites, voir par exemple, [1] [7], [14], [16], [39]. En fin, on obtient des résultats de convergence de la solution et de la condition finale.

3.2 Le problème approché

On approche le problème à valeur finale 3.1, par le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} v'_{\sigma}(t) + A_{\alpha} v_{\sigma}(t) = 0, \quad 0 \leqslant t < T. \\ \qquad v_{\sigma}(T) - \beta v'_{\sigma}(0) = \phi \end{cases} \tag{3.2}$$

où l'opérateur A est définie précédement et A_{α} est l'approximation de Yosida de A. $\sigma = (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Définition

On définit la fonction

$$v_{\sigma}(t) = S_{\alpha}(t) (\beta A_{\alpha} + S_{\alpha}(T))^{-1} \phi \tag{3.3}$$

$\forall \phi \in H$, $\sigma = (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $t \in [0, T]$, où $S_{\alpha}(t)$ est le semi groupe de générateur $-A_{\alpha}$.

Maintenant, on donne un théorème dont sa démonstration est basée sur la théorie des semi-groupes voir [53].

Théorème 3.1 $\forall \phi \in H$, la fonction $v_{\sigma}(t)$ est la solution unique du problème perturbé 3.2 et elle dépend continûment de ϕ.

Démonstration

On considère le problème :

$$\begin{cases} v'_{\sigma}(t) + A_{\alpha} v_{\sigma}(t) = 0, \quad 0 < t < T. \\ \quad v_{\sigma}(0) = (\beta A_{\alpha} + S_{\alpha}(T))^{-1} \phi \end{cases} \tag{3.4}$$

Ce problème est bien-posé et on peut vérifier facilement que sa solution est $v_{\sigma}(t)$ et que :

$$\begin{aligned} v_\sigma(T) - \beta v_\sigma'(0) &= S_\alpha(T)(\beta A_\alpha + S_\alpha(T))^{-1}\phi + \beta A_\alpha(\beta A_\alpha + S_\alpha(T))^{-1}\phi \\ &= (\beta A_\alpha + S_\alpha(T))(\beta A_\alpha + S_\alpha(T))^{-1}\phi = \phi. \end{aligned}$$

d'où il en résulte que $v_\sigma(t)$ est la solution unique du problème intermédiaire 3.2 donnée par 3.3.

Conçernant la dépendance continue de v_σ par rapport à ϕ, on a :

$\|v_\sigma(t)\| = \left\|S_\alpha(t)(\beta A_\alpha + S_\alpha(T))^{-1}\phi\right\| \leqslant \left\|(\beta A_\alpha + S_\alpha(T))^{-1}\phi\right\| \leqslant \frac{1}{\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}+e^{-\frac{T}{\alpha}}}\|\phi\|.$ ■

Maintenant, on utilise la valeur initiale : $\phi_\sigma = v_\sigma(0) = (\beta A_\alpha + S_\alpha(T))^{-1}\phi$, pour définir le problème suivant :

$$\begin{cases} u_\sigma'(t) + Au_\sigma(t) = 0 \\ u_\sigma(0) = \phi_\sigma \end{cases} \tag{3.5}$$

Théorème 3.2 Le problème 3.5 est bien-posé et sa solution est donné par

$$u_\sigma(t) = S(t)(\beta A_\alpha + S_\alpha(T))^{-1}\phi$$

de plus ;

$$\|u_\sigma(t)\| \leqslant \frac{1}{\left(\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta} + e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)^{\frac{T-t}{T}}}\|\phi\|$$

Démonstration

La solution du problème 3.5 s'écrit sous la forme $u_\sigma(t) = S(t)\phi_\sigma$, et on a :

$$\begin{aligned}
\|u_\sigma(t)\|^2 &= \int\limits_{\eta}^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda T}}{\left(\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}\right)^2} d\,\|E_\lambda\phi\|^2 \\
&= \int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-2\lambda T} \left[\left(\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}\right)^{-\frac{t}{T}} \left(\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}\right)^{1-\frac{t}{T}}\right]^{-2} d\,\|E_\lambda\phi\|^2 \\
&\leq \int\limits_{\eta}^{+\infty} \left[\left(\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}\right)^{\frac{T-t}{T}}\right]^{-2} d\,\|E_\lambda\phi\|^2
\end{aligned}$$

alors,

$$\|u_\sigma(t)\| \leqslant \left[\frac{1}{\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta} + e^{-\frac{T}{\alpha}}}\right]^{\frac{T-t}{T}} \|\phi\| .\blacksquare$$

3.3 Résultats de convergence

Dans cette section, on va démontrer que la condition finale et la solution du problème perturbé convergent vers la condition finale et la solution du problème original 3.1.

Théorème 3.3 $\forall\phi \in H, \|u_\sigma(T) - \phi\| \longrightarrow 0$, quand $|\sigma| \longrightarrow 0$.

Démonstration

On a : $u_\sigma(T) - \phi = \left[S(T)\left(\beta A_\alpha + S_\alpha(T)\right)^{-1} - I\right]\phi$

donc ;

$$\begin{aligned}
\|u_\sigma(T) - \phi\|^2 &= \int\limits_{\eta}^{+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda T}}{\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}} - 1\right)^2 d\,\|E_\lambda\phi\|^2 \\
&= \int\limits_{\eta}^{+\infty} \left(\frac{\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda}}{\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}} + \frac{e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}} - e^{-\lambda T}}{\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}}\right)^2 d\,\|E_\lambda\phi\|^2
\end{aligned}$$

en posant

$$M_\sigma(\lambda) = \frac{\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda}}{\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}} \quad , \quad N_\sigma(\lambda) = \frac{e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}} - e^{-\lambda T}}{\frac{\beta\lambda}{1+\alpha\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}}$$

$$P_\sigma(\lambda) = M_\sigma(\lambda) + N_\sigma(\lambda)$$

on obtient que

$$\|u_\sigma(T) - \phi\|^2 \leqslant 2 \int_\eta^{+\infty} \left(M_\sigma^2(\lambda) + N_\sigma^2(\lambda)\right) d\|E_\lambda \phi\|^2$$

c'est clair que : $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}^* / \int_k^{+\infty} d\|E_\lambda \phi\|^2 < \frac{\varepsilon}{8}$ et $M_\sigma(\lambda) \leqslant 1, N_\sigma(\lambda) \leq 1$

alors

$$I_\sigma = \int_\eta^k M_\sigma^2(\lambda)\, d\|E_\lambda \phi\|^2 + \int_k^{+\infty} M_\sigma^2(\lambda)\, d\|E_\lambda \phi\|^2$$

$$J_\sigma = \int_\eta^k N_\sigma^2(\lambda)\, d\|E_\lambda \phi\|^2 + \int_k^{+\infty} N_\sigma^2(\lambda)\, d\|E_\lambda \phi\|^2$$

donc, on trouve que

$$I_\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{8} + \beta^2 e^{2kT} \|\phi\|^2$$

$$J_\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{8} + \alpha^2 T^2 k^4 \|\phi\|^2 .$$

En fin, en choisissant σ tel que $|\sigma|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \leqslant \frac{1}{\|\phi\|^2}\left(\frac{1}{T^2k^4} + \frac{1}{e^{2kT}}\right)\frac{\varepsilon}{8}$, on obtient l'estimation suivante :

$$\|u_\sigma(T) - \phi\|^2 \leqslant \frac{\epsilon}{2} + 2\left(\beta^2 e^{2kT} + \alpha^2 T^2 k^4\right)\|\phi\|^2. \blacksquare$$

Dans ce qui suit, on va utiliser la notation suivante :

$$C_\theta(A) = \left\{ h \in H : \|h\|_{C_\theta}^2 = \left\|e^{\theta T A} h\right\|^2 = \int_\eta^{+\infty} e^{2T\theta\lambda} d\|E_\lambda \phi\|^2 < +\infty \right\}, \theta \geqslant 0.$$

D'après la définition de $C_\theta(A)$, on a les inclusions topologiques suivantes :

$$C_{\theta_1}(A) \subseteq C_{\theta_2}(A), \qquad \theta_2 \geqslant \theta_1$$

$$C_\theta(A) \subset H, \qquad \theta > 0.$$

On a maintenant le théorème suivant

Théorème 3.4

Si $\phi \in C_\theta(A)$, alors :

$$\|u_\sigma(T)-\phi\|^2 \leqslant 2\left(C_1^2(\theta)\frac{\beta^{2\theta}}{\alpha^2}\left(\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)^{2(\theta-1)}+C_2^2(\theta,T)\,\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_\theta}^2 \qquad ,0<\theta<1$$

et de plus,

$$\|u_\sigma(T)-\phi\|^2 \leqslant 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+C_2^2(\theta,T)\,\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_\theta}^2 \qquad ,\theta\geqslant 1$$

tel que ;

$$C_1(\theta)=(1-\theta)^{1-\theta}\theta^\theta\leqslant 1 \qquad , \qquad C_2(\theta,T)=\frac{1}{T\theta^2}$$

Démonstration

D'après la démonstration précédente, on a la relation suivante :

$$\|u_\sigma(T)-\phi\|^2=\int_\eta^{+\infty} P_\sigma^2(\lambda)\,d\,\|E_\lambda\phi\|^2$$
$$=\int_\eta^{+\infty} P_\sigma^2(\lambda)\,e^{-2T\theta\lambda}e^{2T\theta\lambda}d\,\|E_\lambda\phi\|^2\leqslant 2\left(M_{\sigma,\theta,\infty}^2+N_{\sigma,\theta,\infty}^2\right)\|\varphi\|_{C_\theta}^2$$

tels que :

$$M_{\sigma,\theta,\infty}=\sup_{\lambda\geqslant\eta} M_\sigma e^{-T\theta\lambda} \qquad , \qquad N_{\sigma,\theta,\infty}=\sup_{\lambda\geqslant\eta} N_\sigma e^{-T\theta\lambda}$$

Si $0<\theta<1$, on a :

$$M_{\sigma,\theta,\infty}\leq\frac{\beta^\theta}{\alpha}\left(\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)^{\theta-1}C_1(\theta)$$

et pour $\theta\geqslant 1$:

$$M_{\sigma,\theta,\infty}\leq\frac{\beta}{\alpha}$$

ainsi que,

$$N_{\sigma,\theta,\infty}\leqslant\frac{4\alpha}{T\theta^2e^2}\leqslant\frac{\alpha}{T\theta^2} \qquad , \qquad \forall\theta>0$$

En utilisant les relations pécédentes, on obtient que :

$$\|u_\sigma(T)-\phi\|^2 \leqslant \begin{cases} 2\left(C_1^2(\theta)\frac{\beta^{2\theta}}{\alpha^2}\left(\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)^{2(\theta-1)}+C_2^2(\theta,T)\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_\theta}^2. & ,0<\theta<1 \\ 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+C_2^2(\theta,T)\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_\theta}^2 & ,\theta\geqslant 1 \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration.■

Définissons maintenant la fonction :

$$F:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\longrightarrow H$$
$$\sigma=(\alpha,\beta)\longrightarrow F(\sigma)=\begin{cases} u_\sigma(0)=\phi_\sigma & ,\sigma\neq(0,0) \\ u(0)=\phi_0 & ,\sigma=(0,0) \end{cases}$$

Théorème 3.5

Pour tout $\phi\in H$, le problème 3.1 admet une solution unique si et seulement si la fonction F est continue en $(0,0)$. De plus $u_\sigma(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t quand $|\sigma|\longrightarrow 0$.

Démonstration

On assume que $\lim\limits_{|\sigma|\longrightarrow 0}\phi_\sigma=\phi_0$ et $\|\phi_0\|<\infty$.

Soit : $w(t)=S(t)\phi_0$. On a :

$\|w(t)-u_\sigma(t)\|\leqslant\|\phi_0-\phi_\sigma\|$

alors ;

$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(t)-u_\sigma(t)\|\leqslant\|\phi_0-\phi_\sigma\|\underset{|\sigma|\longrightarrow 0}{\longrightarrow}0$

et d'après le théorème 3.3, on a :

$\lim\limits_{|\sigma|\longrightarrow 0}u_\sigma(T)=\phi \qquad , \qquad \lim\limits_{|\sigma|\longrightarrow 0}u_\sigma(T)=w(T)$

donc on trouve que $w(t)$ est une solution du problème 3.1.

Maintenant, on suppose que $u(t) = e^{(T-t)A}\phi$, est une solution du problème 3.1. On a : $u(0) = S(-T)\phi \in H$, alors :

$$\|u(0)\|^2 = \left\|e^{TA}\phi\right\|^2 = \|\phi\|_{C_1}^2 = \int_\eta^{+\infty} e^{2T\lambda} d\|E_\lambda\phi\|^2 < \infty.$$

Soient $k > 0$et $\epsilon > 0$,tel que : $\int_k^{+\infty} e^{2T\lambda} d\|E_\lambda\phi\|^2 < \frac{\epsilon}{8}$

Soient $\sigma_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ et $\sigma_2 = (\alpha_2, \beta_2)$, alors :

$$\begin{aligned}
\|u_{\sigma_1} - u_{\sigma_2}\|^2 &= \int_\eta^{+\infty} \left(\frac{1}{\frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}} - \frac{1}{\frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}} \right)^2 d\|E_\lambda\phi\|^2 \\
&\leqslant 2\int_\eta^{+\infty} \left[\frac{\frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda} - \frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda}}{\left(\frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)} \right]^2 d\|E_\lambda\phi\|^2 + \\
&\quad +2\int_\eta^{+\infty} \left[\frac{e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}} - e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}}{\left(\frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)} \right]^2 d\|E_\lambda\phi\|^2
\end{aligned}$$

On pose :

$$M_{\sigma_1,\sigma_2} = \frac{\left|\frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda} - \frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right|}{\left(\frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)}$$

$$N_{\sigma_1,\sigma_2} = \frac{\left|e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}} - e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right|}{\left(\frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda} + e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)}$$

Alors :

$$\|u_{\sigma_1} - u_{\sigma_2}\|^2 \leqslant 2\int_\eta^{+\infty} M_{\sigma_1,\sigma_2}^2(\lambda)\, d\|E_\lambda\phi\|^2 + 2\int_\eta^{+\infty} N_{\sigma_1,\sigma_2}^2(\lambda)\, d\|E_\lambda\phi\|^2$$

En passant par les même étapes de la démonstration du théorème 3.3, on obtient que :

$$M_{\sigma_1,\sigma_2}(\lambda) \leqslant \left|\frac{\beta_1\lambda}{1+\alpha_1\lambda} - \frac{\beta_2\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right| e^{2\lambda T}$$

$$N_{\sigma_1,\sigma_2}(\lambda) \leqslant e^{2\lambda T} T\lambda^2 |\alpha_1 - \alpha_2|$$

donc :

$\|u_{\sigma_1}(0)-u_{\sigma_2}(0)\|^2 \leqslant \frac{\epsilon}{2}+2e^{2kT}\|\phi\|_{C_1}^2\left[\left[\frac{\beta_2 k}{1+\alpha_2 k}-\frac{\beta_1 k}{1+\alpha_1 k}\right]^2+T^2k^4(\alpha_1-\alpha_2)^2\right]$

On choisit $\sigma=(\alpha,\beta)$ tel que :

$|\sigma|^2=\alpha^2+\beta^2 \leqslant \frac{1}{\|\phi\|_{C_1}^2}\frac{1}{e^{2kT}}\left(1+\frac{1}{T^2k^4}\right)\frac{\epsilon}{8}.$

et si $\sigma_0=(0,0)$, on a : $\|u_\sigma(0)-u_{\sigma_0}(0)\|^2=\|\phi_\sigma-\phi_0\|^2 \leqslant \epsilon$

ce qui prouve que la fonction F est continue au point $(0,0)$.■

On prouve facilement que :

$$\|u_\sigma(0)-u(0)\|^2=\|u_\sigma(T)-\phi\|_{C_1}^2 \tag{3.6}$$

pour $\phi\in C_1(A)$, et en utilisant le théorème 3.3, on obtient que :

$$\|u_\sigma(0)-u(0)\|^2 \underset{|\sigma|\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème 3.6 Si $\phi\in C_{\theta+1}(A)$, alors :

$\|u_\sigma(0)-u(0)\|^2 \leqslant 2\left(C_1^2(\theta)\frac{\beta^{2\theta}}{\alpha^2}\left(\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)^{2(\theta-1)}+C_2^2(\theta,T)\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^2, 0<\theta<1$

et

$\|u_\sigma(0)-u(0)\|^2 \leqslant 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+C_2^2(\theta,T)\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^2, \theta\geqslant 1$

tels que ;

$C_1(\theta)=(1-\theta)^{1-\theta}\theta^\theta \leqslant 1 \qquad , \qquad C_2(\theta,T)=\frac{1}{T\theta^2}$

Démonstration

D'après la relation 3.6 :

$$\begin{aligned}\|u_\sigma(0)-u(0)\|^2 &= \|u_\sigma(T)-\phi\|_{C_1}^2\\ &= \left\|e^{TA}(u_\sigma(T)-\phi)\right\|^2\end{aligned}$$

$$= \int_{\eta}^{+\infty} P_{\sigma}^{2}(\lambda) e^{2(1+\theta)T\lambda} e^{-2T\lambda\theta} d\left\|E_{\lambda}\phi\right\|^{2}$$
$$\leqslant 2\left(M_{\sigma,\theta,\infty}^{2} + N_{\sigma,\theta,\infty}^{2}\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^{2}$$

et en utilisant le théorème 3.4, on arrive au résultat désiré.■

Corollaire 3.7

Si $\phi \in C_{\theta+1}(A)$, alors :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{\sigma}(t) - u(t)\|^{2} \leqslant \|u_{\sigma}(0) - u(0)\|^{2}$$
$$\leqslant 2\left(C_{1}^{2}(\theta)\frac{\beta^{2\theta}}{\alpha^{2}}\left(\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)^{2(\theta-1)} + C_{2}^{2}(\theta,T)\alpha^{2}\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^{2}, 0<\theta<1$$

et

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{\sigma}(t) - u(t)\|^{2} \leqslant \|u_{\sigma}(0) - u(0)\|^{2} \leqslant 2\left(\frac{\beta^{2}}{\alpha^{2}} + C_{2}^{2}(\theta,T)\alpha^{2}\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^{2}, \theta \geqslant 1$$

tels que ;

$$C_{1}(\theta) = (1-\theta)^{1-\theta}\theta^{\theta} \leqslant 1 \qquad , \qquad C_{2}(\theta,T) = \frac{1}{T\theta^{2}}.$$

Démonstration

D'après le théorème 3.5, on obtient que :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_{\sigma}(t) - u(t)\|^{2} \leqslant \|u_{\sigma}(0) - u(0)\|^{2}$$

et en utilisant le résultat donné par le théorème 3.6, on trouve le résultat voulu.■

3.4 Conclusion

1. On note que dans ce travail le facteur d'erreur $\epsilon(\sigma)$ introduit par des petits changements dans la valeur finale est d'ordre $\frac{1}{\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}+e^{-\frac{T}{\alpha}}}$.

2. On note aussi que le facteur d'erreur $\epsilon(\beta)$ donné par [14] (resp. $\epsilon(\alpha)$ dans [39]) est d'ordre $\frac{1}{\beta}$ (resp. $e^{\frac{T}{\alpha}}$) ,alors :

$$\frac{1}{\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}+e^{-\frac{T}{\alpha}}}\leq\frac{1}{\beta}\qquad\text{et}\qquad\frac{1}{\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}+e^{-\frac{T}{\alpha}}}\leq e^{\frac{T}{\alpha}}$$

3. Aussi, le facteur d'erreur $\epsilon\left(\sigma\right)$ donné par Boussetila et Rebbani [7] est d'ordre $\frac{1}{\beta+e^{-\frac{T}{\alpha}}}$. On a

$$\frac{1}{\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}+e^{-\frac{T}{\alpha}}}\leq\frac{1}{\beta+e^{-\frac{T}{\alpha}}}$$

pour $0<\alpha\leq 1-\frac{1}{\eta}$, $\eta>1$, alors pour tous les opérateurs A $(A\geq\eta>1)$ considérés avant, notre méthode d'approximation donne une meilleure approximation que les méthodes données par Boussetila et Rebbani dans [7] et dans [14], [39].

Chapitre 4

MÉTHODE DE RÉGULARISATION AMÉLIORÉE POUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES DE CAUCHY RÉTROGRADES

On considère dans ce chapitre un problème de Cauchy rétrograde, parabolique et abstrait associé à un opérateur linéaire et non-borné défini sur un espace de Hilbert H dont le coéfficient de l'équation est un opérateur positif, non-borné et auto-adjoint qui admet un spectre continu et la donnée est à l'instant final $t = T$. Dans la littérature mathématique, ce problème est mal-posé dans le sens où la solution si elle existe elle ne dépend pas continûment de la donnée. La méthode de régularisation utilisée ici consiste à perturber l'équation et la condition finale pour obtenir un problème approché non-local qui dépend de deux petits paramètres.

On donne quelques estimations pour la solution du problème régularisé et on montre aussi que le problème modifié est stable et sa solution est l'approximation de la solution exacte du problème original. En fin, on donne des résultats de convergence.

4.1 Introduction

Soit A un opérateur positif (on suppose que $A \geq \eta > 0$), auto-adjoint, linéaire et non-borné sur un espace de Hilbert H tel que $-A$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe sur H. Soit T un nombre réel positif.

On considère le problème à valeur finale suivant : Trouver $u : [0, T] \longrightarrow H$, tel que :

$$\begin{cases} u^{'}(t) + Au(t) = 0, \quad 0 \leq t < T. \\ u(T) = \phi \end{cases} \tag{4.1}$$

pour une certaine valeur finale $\phi \in H$.

Les études faites de ce type de problèmes sont présentées dans le chapitre précédant voir pages 39-40.

On peut aussi lire le travail récent de Campbell et Hughes [11] qui traite les problèmes mal posés non-homogènes sur un espace de Banach ainsi que les travaux très récents de Tuan [59], et Tuan, Trong, Quan [60] qui ont relation avec les mêmes problèmes mal-posés et utilisent des approches différentes. Pour quelques commentaires sur les résultats présentés dans le travail [59] et qui utilise une régularisation différente ("the truncation regularization method") voir la dernière remarque de ce chapitre.

Pour régulariser le problème 4.1, on va perturber simultanément l'opérateur A par l'approximation de Yosida $A_\alpha = A\left(I+\alpha A\right)^{-1}$ et la condition finale $u\left(T\right)=\phi$ par $u_\sigma\left(T\right)+\beta\left(u_\sigma\left(0\right)-u'_\sigma\left(0\right)\right)=\phi, \sigma=\left(\alpha,\beta\right)$ tels que $\alpha>0, \beta>0$. Donc, on va obtenir un problème perturbé non-local.

Dans ce qui suit, on va définir la solution du problème approché qui est bien-posé. On trouve le facteur d'erreur puis on donne des résultats de convergence de la condition finale et de la solution et on termine par une comparaison de l'approximation obtenue de cette méthode avec d'autres travaux. On cite [7], [14], [19], [39].

Dans ce travail, on note par H un espace de Hilbert, $\{E_\lambda, \lambda\geq\eta>0\}$, la résolution de l'identité associée à l'opérateur positif non-borné et auto-adjoint A. Donc la représentation spectrale du C_0-semi-groupe $S\left(t\right)=e^{-tA}$ (respectivement A) est donnée par : $S\left(t\right)=e^{-tA}=\int_\eta^{+\infty} e^{-t\lambda}dE_\lambda$ (respectivement $A=\int_\eta^{+\infty}\lambda dE_\lambda$) et pour tout $u\in D\left(A\right), Au=\int_\eta^{+\infty}\lambda dE_\lambda u$, et ça est caractérisé par

$$u\in D\left(A\right) \quad ssi \quad \left\|Au\right\|^2=\int_\eta^{+\infty}\lambda^2 d\left\|E_\lambda u\right\|^2<\infty$$

De plus, une solution du problème 4.1 sur l'intervalle $\left[0,T\right]$ est une fonction $u\in C\left(\left[0,T\right];H\right)\cap C^1\left(\left]0,T\right[;H\right)$ telle que pour tout $t\in\left]0,T\right[$ $u\left(t\right)\in D\left(A\right)$ et 4.1 soit vérifié. Une caractérisatiion importante de l'ensemble admissible pour lequel le problème 4.1 a une solution : Le problème 4.1 admet une solution u ssi $\int_\eta^{+\infty} e^{2\lambda T}d\left\|E_\lambda\phi\right\|^2<\infty$

et cette solution unique est représentée par : $u(t) = \int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{(T-t)\lambda} dE_\lambda \phi < \infty$. (voir [7] Lemme1).

4.2 Le problème approché

On approche le problème à valeur finale 4.1, par le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} v_\sigma'(t) + A_\alpha v_\sigma(t) = 0, 0 \leqslant t < T \\ v_\sigma(T) + \beta\left(v_\sigma(0) - v_\sigma'(0)\right) = \phi \end{cases} \tag{4.2}$$

l'opérateur A_α est l'approximation de Yosida de l'opérateur A défini précédement et $\sigma = (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Définition

Pour tout ϕ dans H, on définit la fonction

$$v_\sigma(t) = S_\alpha(t)\left(\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T)\right)^{-1} \phi \tag{4.3}$$

où $S_\alpha(t)$ est le semi groupe de générateur $-A_\alpha$, $t \in [0, T]$ et $\sigma = (\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

On donne maintenant un théorème dont sa preuve repose sur la théorie des semi-groupes voir [53].

Théorème 4.1

La fonction $v_\sigma(t)$ est la solution unique du problème perturbé 4.2 et elle dépend continûment de ϕ.

Démonstration

On considère le problème classique de Cauchy

$$\begin{cases} v_\sigma'(t) + A_\alpha v_\sigma(t) = 0, 0 < t < T. \\ v_\sigma(0) = (\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi \end{cases}$$

C'est clair que $v_\sigma(t)$ est sa solution unique et que :

$$\begin{aligned} v_\sigma(T) + \beta\left(v_\sigma(0) - v_\sigma'(0)\right) &= S_\alpha(T)(\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi + \beta A_\alpha(\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi \\ &= (\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))(\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi = \phi. \end{aligned}$$

Pour la dépendance continue de v_σ par rapport à ϕ, on a :

$$\begin{aligned} \|v_\sigma(t)\| &= \left\|S_\alpha(t)(\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi\right\| \\ &\leqslant \left\|(\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi\right\| \leqslant \frac{1}{\beta + \frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta} + e^{-\frac{T}{\alpha}}}\|\phi\| . \blacksquare \end{aligned}$$

On considère maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} u_\sigma'(t) + Au_\sigma(t) = 0 \\ u_\sigma(0) = \phi_\sigma = (\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi \end{cases} \tag{4.4}$$

Théorème 4.2

Le problème 4.4, est bien-posé et sa solution est donnée par

$$u_\sigma(t) = S(t)(\beta(I + A_\alpha) + S_\alpha(T))^{-1}\phi$$

de plus

$$\|u_\sigma(t)\| \leqslant \frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)^{\frac{T-t}{T}}} \|\phi\| .$$

Démonstration

On vérifie par un petit calcul que : $u_\sigma(t) = S(t)\,\phi_\sigma$ est la solution du problème 4.4.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\|u_\sigma(t)\|^2 &= \int_\eta^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda T}}{\left(\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}\right)^2} d\|E_\lambda\phi\|^2 \\
&= \int_\eta^{+\infty} e^{-2\lambda T}\left[\left(\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}\right)^{-\frac{t}{T}}\left(\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}\right)^{1-\frac{t}{T}}\right]^{-2} d\|E_\lambda\phi\| \\
&\leq \int_\eta^{+\infty}\left[\frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)^2}\right]^{\frac{T-t}{T}} d\|E_\lambda\phi\|^2
\end{aligned}$$

alors,

$$\|u_\sigma(t)\| \leqslant \left[\frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)}\right]^{\frac{T-t}{T}} \|\phi\|$$

ce qui achève la démonstration.□

4.3 Résultats de convergence

Dans cette partie de ce quatrième chapitre, on démontre les résultats de convergence suivants :

1. $\|u_\sigma(T)-\phi\| \underset{|\sigma|\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$
2. $\|u_\sigma(0)-u(0)\| \underset{|\sigma|\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$
3. $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_\sigma(t)-u(t)\| \underset{|\sigma|\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$

qui sont donnés par les théorèmes suivants :

Théorème 4.3

$\forall \phi \in H, \|u_\sigma (T) - \phi\| \longrightarrow 0$, quand $|\sigma| \longrightarrow 0$.

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} u_\sigma (T) - \phi &= S(T) (\beta (I + A_\alpha) + S_\alpha (T))^{-1} \phi - \phi \\ &= \left[S(T) (\beta (I + A_\alpha) + S_\alpha (T))^{-1} - I \right] \phi \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} \|u_\sigma (T) - \phi\|^2 &= \int_\eta^{+\infty} \left(\frac{e^{-\lambda T}}{\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}} - 1 \right)^2 d \|E_\lambda \phi\|^2 \\ &= \int_\eta^{+\infty} \left(\frac{\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)}{\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}} + \frac{e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}} - e^{-\lambda T}}{\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}} \right)^2 d \|E_\lambda \phi\|^2 \end{aligned}$$

Posons

$$M_\sigma (\lambda) = \frac{\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)}{\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}} \qquad et \qquad N_\sigma (\lambda) = \frac{e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}} - e^{-\lambda T}}{\beta\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha\lambda}}}$$

$$P_\sigma (\lambda) = M_\sigma (\lambda) + N_\sigma (\lambda)$$

on obtient que :

$$\|u_\sigma (T) - \phi\|^2 \leqslant 2 \int_\eta^{+\infty} \left(M_\sigma^2 (\lambda) + N_\sigma^2 (\lambda) \right) d \|E_\lambda \phi\|^2$$

c'est clair que $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{N}^* / \int_k^{+\infty} d \|E_\lambda \phi\|^2 < \frac{\varepsilon}{8}$ et que $M_\sigma (\lambda) \leqslant 1, N_\sigma (\lambda) \leq 1$

Donc, si on note par :

$$I_\sigma = \int_\eta^{k} M_\sigma^2 (\lambda) \, d \|E_\lambda \phi\|^2 + \int_k^{+\infty} M_\sigma^2 (\lambda) \, d \|E_\lambda \phi\|^2$$

et

$$J_\sigma = \int_\eta^{k} N_\sigma^2 (\lambda) \, d \|E_\lambda \phi\|^2 + \int_k^{+\infty} N_\sigma^2 (\lambda) \, d \|E_\lambda \phi\|^2$$

il vient que :

$I_\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{8} + \beta^2 \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2 e^{2kT} \|\phi\|^2.$

$J_\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{8} + \alpha^2 T^2 k^4 \|\phi\|^2.$

Finalement, en choisissant σ tel que $|\sigma|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \leqslant \frac{1}{\|\phi\|^2}\left(\frac{1}{T^2k^4} + \frac{1}{e^{2kT}}\right)\frac{\varepsilon}{8}$, on trouve que :

$\|u_\sigma(T) - \phi\|^2 \leqslant \left(\frac{\epsilon}{2} + 2\left(\beta^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^2 e^{2kT} + \alpha^2T^2k^4\right)\right)\|\phi\|^2.\blacksquare$

Dans ce qui suit, on va utiliser la notation suivante :

$$C_\theta(A) = \left\{ h \in H : \|h\|_{C_\theta}^2 = \left\|e^{\theta TA}h\right\|^2 = \int_\eta^{+\infty} e^{2T\theta\lambda} d\|E_\lambda\phi\|^2 < +\infty \right\}, \theta \geqslant 0.$$

D'après la définition de $C_\theta(A)$, on a les propriétés suivantes :

$C_{\theta_1}(A) \subseteq C_{\theta_2}(A), \qquad \theta_2 \geqslant \theta_1$

$C_\theta(A) \subset H, \qquad \theta > 0.$

Théorème 4.4

Si $\phi \in C_\theta(A)$, alors :

$$\|u_\sigma(T) - \phi\|^2 \leqslant 2\left(C_1^2(\theta)\frac{\beta^{2\theta}}{\alpha^2}\left(\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)^{2(\theta-1)} + C_2^2(\theta,T)\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_\theta}^2 \qquad ,0<\theta<1$$

et

$$\|u_\sigma(T) - \phi\|^2 \leqslant 2\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + C_2^2(\theta,T)\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_\theta}^2 \qquad ,\theta \geqslant 1$$

tels que : $C_1(\theta) = (1-\theta)^{1-\theta}\theta^\theta \leqslant 1$ et $C_2(\theta,T) = \frac{1}{T\theta^2}$.

Démonstration

D'après la démonstration précédente, on a :

$$\|u_\sigma(T) - \phi\|^2 = \int_\eta^{+\infty} P_\sigma^2(\lambda)\, d\|E_\lambda\phi\|^2$$

$$= \int_\eta^{+\infty} P_\sigma^2(\lambda)\, e^{-2T\theta\lambda}e^{2T\theta\lambda} d\|E_\lambda\phi\|^2 \leqslant 2\left(M_{\sigma,\theta,\infty}^2 + N_{\sigma,\theta,\infty}^2\right)\|\varphi\|_{C_\theta}^2$$

tels que :

$$M_{\sigma,\theta,\infty} = \sup_{\lambda \geqslant \eta} M_\sigma e^{-T\theta\lambda} \quad , \quad N_{\sigma,\theta,\infty} = \sup_{\lambda \geqslant \eta} N_\sigma e^{-T\theta\lambda}$$

D'une part,

$$M_{\sigma,\theta,\infty} = \sup_{\lambda \geqslant 0} M_{\sigma,\theta} \leqslant \begin{cases} 2\frac{\beta}{\alpha} & , \theta \geqslant 1 \\ \frac{2}{\alpha}\beta^\theta (1-\theta)^{1-\theta} \theta^\theta , & 0 < \theta < 1 \end{cases} \tag{4.5}$$

d'autre part :

$$N_{\sigma,\theta,\infty} \leqslant \frac{4\alpha}{T\theta^2 e^2} \leqslant \frac{\alpha}{T\theta^2}, \forall \theta > 0 \tag{4.6}$$

Donc en utilisant ces deux relations 4.5 et 4.6, on trouve les estimations désirées.

■

Définissons la fonction :

$$F : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow H$$
$$\sigma = (\alpha, \beta) \longrightarrow F(\sigma) = \begin{cases} u_\sigma(0) = \phi_\sigma & , \sigma \neq (0,0) \\ u(0) = \phi_0 & , \sigma = (0,0) \end{cases}$$

Théorème 4.5

Pour tout $\phi \in H$, le problème 4.1 admet une solution unique si et seulement si la fonction F est continue en $(0,0)$. De plus $u_\sigma(t)$ converge vers $u(t)$ uniformément en t quand $|\sigma| \longrightarrow 0$.

Démonstration

On assume que $\lim_{|\sigma| \longrightarrow 0} \phi_\sigma = \phi_0$ et que : $\|\phi_0\| < \infty$.

Soit : $w(t) = S(t)\phi_0$. On a :

$\|w(t) - u_\sigma(t)\| \leqslant \|\phi_0 - \phi_\sigma\|$

ce qui implique que :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|w(t)-u_\sigma(t)\|\leqslant\|\phi_0-\phi_\sigma\|\underset{|\sigma|\longrightarrow 0}{\longrightarrow}0$$

et d'après le théorème 4.3 :

$$\lim_{|\sigma|\longrightarrow 0}u_\sigma(T)=\phi\qquad,\qquad\lim_{|\sigma|\longrightarrow 0}u_\sigma(T)=w(T)$$

alors, il en résulte que $w(t)$ est une solution du problème 4.1.

Supposons maintenant que : $u(t)=e^{(T-t)A}\phi$ est une solution du problème 4.1.

On a : $u(0)=S(-T)\phi\in H$, donc on obtient que :

$$\|u(0)\|^2=\left\|e^{TA}\phi\right\|^2=\|\phi\|_{C_1}^2=\int_\eta^{+\infty}e^{2T\lambda}d\|E_\lambda\phi\|^2<\infty.$$

Soient $k>0$ et $\epsilon>0$, tels que : $\int_k^{+\infty}e^{2T\lambda}d\|E_\lambda\phi\|^2<\frac{\epsilon}{8}$

Etant donné $\sigma_1=(\alpha_1,\beta_1)$ et $\sigma_2=(\alpha_2,\beta_2)$, alors :

$$\begin{aligned}\|u_{\sigma_1}(0)-u_{\sigma_2}(0)\|^2&=\int_\eta^{+\infty}\left(\frac{1}{\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}}-\frac{1}{\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}}\right)^2d\|E_\lambda\phi\|^2\\&\leqslant 2\int_\eta^{+\infty}\left[\frac{\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)-\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)}{\left(\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)}\right]^2d\|E_\lambda\phi\|^2+\\&+2\int_\eta^{+\infty}\left[\frac{e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}-e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}}{\left(\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)}\right]^2d\|E_\lambda\phi\|^2\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}M_{\sigma_1,\sigma_2}&=\frac{\left|\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)-\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)\right|}{\left(\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)}\\N_{\sigma_1,\sigma_2}&=\frac{\left|e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}-e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right|}{\left(\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_1\lambda}}\right)\left(\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)+e^{-\frac{\lambda T}{1+\alpha_2\lambda}}\right)}\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\|u_{\sigma_1}(0)-u_{\sigma_2}(0)\|^2\leqslant 2\int_\eta^{+\infty}M_{\sigma_1,\sigma_2}^2(\lambda)\,d\|E_\lambda\phi\|^2+2\int_\eta^{+\infty}N_{\sigma_1,\sigma_2}^2(\lambda)\,d\|E_\lambda\phi\|^2$$

En suivant les mèmes étapes que la démostration du théorème 4.3, on trouve que :

$$M_{\sigma_1,\sigma_2}(\lambda) \leqslant \left|\beta_1\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_2\lambda}\right)-\beta_2\left(1+\frac{\lambda}{1+\alpha_1\lambda}\right)\right|e^{2\lambda T}$$

et

$$N_{\sigma_1,\sigma_2}(\lambda) \quad \leqslant e^{2\lambda T}T\lambda^2\left|\alpha_1-\alpha_2\right|$$

donc,

$\left\|u_{\sigma_1}(0)-u_{\sigma_2}(0)\right\|^2 \leqslant \frac{\epsilon}{2}+2e^{2kT}\left\|\phi\right\|^2_{C_1}\left[\left[\beta_2\left(1+\frac{k}{1+\alpha_2 k}\right)-\beta_1\left(1+\frac{k}{1+\alpha_1 k}\right)\right]^2+T^2k^4\left(\alpha_1-\alpha_2\right)^2\right]$

Si on choisit $\sigma=(\alpha,\beta)$ tel que :

$|\sigma|^2=\alpha^2+\beta^2 \leqslant \frac{1}{\|\phi\|^2_{C_1}}\frac{1}{e^{2kT}}\left(1+\frac{1}{T^2k^4}\right)\frac{\epsilon}{8}$.

et si $\sigma_0=(0,0)$, alors : $\left\|u_\sigma(0)-u_{\sigma_0}(0)\right\|^2=\left\|\phi_\sigma-\phi_0\right\|^2 \leqslant \epsilon$

ce qui prouve que F est continue en $(0,0)$.■

Si on suppose que $\phi \in C_1(A)$, alors en utilisant l'égalité :

$$\left\|u_\sigma(0)-u(0)\right\|^2=\left\|u_\sigma(T)-\phi\right\|^2_{C_1}$$

et le théorème 4.3, on trouve que :

$$\left\|u_\sigma(0)-u(0)\right\| \underset{|\sigma|\longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

Théorème 4.6

Si $\phi \in C_{\theta+1}(A)$, on a :

$\left\|u_\sigma(0)-u(0)\right\|^2 \leqslant 2\left(\frac{4}{\alpha^2}C_1^2(\theta)\beta^{2\theta}+C_2^2(\theta,T)\alpha^2\right)\left\|\phi\right\|^2_{C_{\theta+1}} \qquad ,0<\theta<1$

et

$$\|u_\sigma(0)-u(0)\|^2 \leqslant 2\left(\frac{4\beta^2}{\alpha^2}+C_2^2(\theta,T)\,\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^2 \qquad ,\theta \geqslant 1$$

tels que : $C_1(\theta)=(1-\theta)^{1-\theta}\,\theta^\theta \leqslant 1$ et $C_2(\theta,T)=\frac{1}{T\theta^2}$.

Démonstration

$$\begin{aligned}\|u_\sigma(0)-u(0)\|^2 &= \|u_\sigma(T)-\phi\|_{C_1}^2\\ &= \left\|e^{TA}\left(u_\sigma(T)-\phi\right)\right\|^2\\ &= \int_\eta^{+\infty} P_\sigma^2(\lambda)\,e^{2(1+\theta)T\lambda}e^{-2T\lambda\theta}d\,\|E_\lambda\phi\|^2\\ &\leqslant 2\left(M_{\sigma,\theta,\infty}^2+N_{\sigma,\theta,\infty}^2\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^2\end{aligned}$$

et en utilisant le théorème 4.4, on obtient le résultat désirée.■

Corollaire 4.7

Si $\phi \in C_{\theta+1}(A)$,on a :

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_\sigma(t)-u(t)\|^2 &\leqslant \|u_\sigma(0)-u(0)\|^2\\ &\leqslant 2\left(\tfrac{4}{\alpha^2}C_1^2(\theta)\,\beta^{2\theta}+C_2^2(\theta,T)\,\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^2 ,0<\theta<1\end{aligned}$$

de plus,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_\sigma(t)-u(t)\|^2 \leqslant \|u_\sigma(0)-u(0)\|^2 \leqslant 2\left(\frac{4\beta^2}{\alpha^2}+C_2^2(\theta,T)\,\alpha^2\right)\|\phi\|_{C_{\theta+1}}^2 ,\theta\geqslant 1$$

tels que ;

$$C_1(\theta)=(1-\theta)^{1-\theta}\,\theta^\theta \leqslant 1 \qquad , \qquad C_2(\theta,T)=\frac{1}{T\theta^2}.$$

Démonstration

D'après le théorème 4.5, on obtient que :

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_\sigma(t)-u(t)\|^2 \leqslant \|u_\sigma(0)-u(0)\|^2$$

et en utilisant le résultat donné par le théorème 4.6, on trouve le résultat voulu.

Remarque

On note que dans un travail très récent de Tuan [59], une utilisation nouvelle d'une méthode de régularisation différente (la méthode de troncation) est introduite pour résoudre une classe de problèmes similaire. Cette méthode de troncation consiste à éliminer tout les hauts bruits de la solution du problème mal-posé considéré afin d'obtenir une solution régularisée approchée avec certaine stabilité et les estimations d'erreurs qui sont indiquées sont de type "Hölder". En particulier, l'auteur donne quelques estimations pour l'instant $t = 0$, donc il obtient la convergence de la solution approchée en $t = 0$. Pour une comparaison significative avec les résultats obtenus par cette méthode de régularisation de troncation, on a besoin de la détermination et la sélection, pour chaque cas, de la possibilité d'un paramètre de régularisation propre $\beta(\varepsilon)$. Cependant, la méthode de régularisation présentée dans notre travail donne une meilleure approximation que plusieurs autres types de méthodes comme quasi-révérsibilité et quasi-valeur aux limites, par exemple, [1], [7], [14], [16], [19],[39].

4.4 Conclusion

1. On note que dans ce travail le facteur d'erreur $\epsilon(\sigma)$ introduit par des petits changements dans la valeur finale est d'ordre $\frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)}$, et dans le chapitre précédant qui est publiée dans un proceeding of the Third Conference on Mathematical Sciences [19], le facteur d'erreur donné était d'ordre $\frac{1}{\frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}+e^{-\frac{T}{\alpha}}} \geq \frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)}$.

2. On note aussi que le facteur d'erreur $\epsilon(\beta)$ donné par [14] (resp. $\epsilon(\alpha)$ dans [39]) est d'ordre $\frac{1}{\beta}$(resp. $e^{\frac{T}{\alpha}}$) et alors

$$\frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)} \leq \frac{1}{\beta} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)} \leq e^{\frac{T}{\alpha}}$$

3. Aussi, le facteur d'erreur $\epsilon(\sigma)$ donné par Boustilla et Rebbani [7] est d'ordre $\frac{1}{\beta+e^{-\frac{T}{\alpha}}}$. On a

$$\frac{1}{\left(\beta\left(1+\frac{\eta}{1+\alpha\eta}\right)+e^{-\frac{T}{\alpha}}\right)} \leq \frac{1}{\beta+e^{-\frac{T}{\alpha}}}$$

pour $0<\alpha\leq 1-\frac{1}{\eta}$, alors pour tout les opérateurs A $(A\geq\eta>1)$, considérés avant, notre méthode d'approximation donne une meilleure approximation que les méthodes données par Boussetila et Rebbani dans [7] et autres auteurs, exemple [14], [39].

Bibliographie

1 M. Ababna, Regularization by nonlocal conditions of the problem of the control of the initial condition for evolution operator-differential equations, Vestnik Belorusskogo Gosudarstvennogo Universiteta.Seriya 1. Fizika, Matematika, Informatika (1998), no. 2, 60–63, 81 (Russian).

2 S. Agmon, L. Nirenberg, Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 121-139.

3 K. A. Ames and L. E. Payne, Asymptotic behaviour for two regularizations of the Cauchy problem for the backward heat equation, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences 8 (1998), no. 1, 187–202.

4 K. A. Ames, L. E. Payne, and P.W. Schaefer, Energy and pointwise bounds in some non- standard parabolic problems, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics 134 (2004), no. 1, 1–9.

5 K.A. Ames, R.J. Hughes, Structural Stability for Ill-Posed Problems in Banach Space, Semigroup Forum, Vol. 70 (2005), No 1, 127-145.

6 H. Bialy. Iterative behandlung linearer funktionalg leichungen. Arch. Rat. Mech. Anal., 4 : 166, 1959.

7 N. Boussetila and F. Rebbani, Optimal regularization method for ill-posed cauchy problems. Electronic Journal of Differential Equations 2006. No. 147 , pp. 1-15.

8 H. Brézis. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

9 J. Baumeister. Stable Solution of Inverse Problems. Vieweg, Braunschweig, 1987.

10 J. Baumeister, A. Leitao, On iterative methods for solving ill-posed problems modled by partial differential equations, J. Inv. Ill-Posed Problems., Vol. 9.1 (2001) 1-17.

11 H. B. M. Campbell and R. J. Hughes, Continuous dependence results for inhomogeneous ill-posed problems in Banach space.Journal of Mathematical Analysis and Applications 331 (2007), no. 1, 342–357.

12 A.S. Carraso, Overcoming Hölder continuity in ill-posed continuation problems SIAM J. Numer. Anal., 31 (1994), 1535-1557.

13 G. Chavent. Problèmes inverses. notes de cours de DEA, Université Paris Dauphine.

14 G.W. Clark, S.F. Oppenheimer, Quasireversibility methods for non-well posed problems, Elect. J. Diff. Eqns., 8 (1994), 1-9.

15 D. Colton, H.W. Engel, A.K. Louis, J.R. Mc Laughlin and W. Rundell (editors), (2000) Survey on solution methods for inverse problems, Springer, Wien, New York.

16 M. Denche, K. Bessila, A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems,J. Math. Anna. Appl., 301 (2005), 419-426.

17 M. Denche and S. Djezzar, (2006), "A modified quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems" Boundary- Value Problems Volume 2006. Article ID 37524, 8 pages.

18 S. Djezzar, (2008), Regularization Method for an Abstract Backward Cauchy Problem. Proceedings of the Third International Conference on Mathematical Sciences-ICM2008, U.A.E. March 3-6, 2008 (Volume 3), pp1116 -1125.

19 S. Djezzar and N. Teniou, (2011), Modfied Regularization Method for Backward Cauchy Problems. Proceedings of the Third Conference on Mathematical Sciences-CMS'2011, Zarqa-Jordan April 27-29, (2011), pp. 1512-1519.

20 S. Djezzar and N. Teniou, Improved regularization method for backward Cauchy problems associated with continious spectrum operator, International Journal of Differential Equations, Volume 2011. ID 913125, 12 pages. doi : 10.1155/2011/913125.

21 H. Engl and A. Neubauer. Optimal discrepancy principles for the Tikhonov regularization of integral equations of the first kind. In G. Hämmerlin and K. H. Hoffmann, editors, Constructive Methods for the Pratical Treatment of Integral Equations, volume ISNM 73, pages 120-141, Basel, 1985. Birkhäuser Verlag.

22 H. Engl. Discrepancy principles for Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. J. Optim. Theory Appl., 52 : 209-215. 1987.

23 H. W. Engl, M. Hanke, and A. Neubauer. Regularization of Inverse Problems. Kluwer, Dordrecht, 1996.

24 V. Fridman. A method of successive approximations for Fredholm integral equations of the first kind. Uspeki Mat. Nauk., 11 : 233-234, 1956. In Russian.

25 H. Gfrerer. An a posteriori parameter choise for ordinary and iterated Tikhonov regularization of ill-posed problems leading to optimal convergence rates. Math. Comput., 49 : 507-522, 1987.

26 C. W. Groetsch. Inverse Problems in the Mathematical Sciences. Vieweg, Wiesbaden, 1993.

27 J. Hadamard. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, 1923.

28 M. Hanke. Conjugate Gradient Type Methods for Ill-Posed Problems, volume 327 of Pitman Research Notes in Mathematics. Longman, Harlow, 1995.

29 P. C. Hansen. Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion. SIAM, Philadelphia, 1998.

30 V. Ivanov, V. Vasin and V. Tanana, Theory of linear ill-posed problems and applications, Nauka, Moscow, 1978.

31 V. K. Ivanov, I. V. Mel'nikova, and A. I. Filinkov, Operator-Differential Equations and Ill-Posed Problems, Fizmatlit "Nauka", Moscow, 1995.

32 F. John, Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 551-585.

33 J. B. Keller. Inverse problems. Amer. Math. Monthly, 83 :107–118, 1976.

34 A. Kirsch. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. (Applied mathematical sciences ; V.120). Springer, New-York. 1996.

35 V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations, Leningrad Math. J., 1 (1990) No. 5, 1207-1228.

36 R.J. Knops, ed., Symposium on Non-Well Posed Problems and Logarithmic Convexity, Lecture Notes in Math. 316, Springer, New York, (1973).

37 S.G. Krein, O.I. Prozorovskaja, Analytic semi-groups and incorrect problems fo-revolutionary equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR., 133 (1960), 277-280.

38 L. Landweber. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. Amer. J. Math., 73 :615–624, 1951.

39 R. Lattès and J. L. Lions, Méthode de Quasi-Réversibilité et Applications, Travaux et Recherches Math´ematiques, no. 15, Dunod, Paris, 1967.

40 R. Lattès, J. L. Lions, The Method of Quasireversibility, Applications to Partial Differential Equations, Amer. Elsevier, New-York, (1969).

41 M. M. Lavrentiev, Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 11, Springer, Berlin, 1967.

42 M. M. Lavrent'ev, V. G. Romanov, S. P. Shishatsky, Ill-posed problems of mathematical physics and analysis, American Mathematical Society, Providence, RI 1986.

43 I.V. Mel'nikova, Regularization methods for ill-posed boundary problems, Ill-posed problems in natural sciences, (Moscow, 1991), 93-103, VSP, Utrecht, (1992).

44 I. V. Mel'nikova, Regularization of ill-posed differential problems, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal 33 (1992), no. 2, 125–134, 221 (Russian), translated in Siberian Math. J. 33 (1992), no. 2, 289–298.

45 I.V. Mel'nikova, S.V. Bochkareva, C-semigroups and regularization of an illposed Cauchy problem, Dok. Akad. Nauk., 329 (1993), 270-273.

46 I.V. Mel'nikova, General theory of ill-posed Cauchy problem, J. Inverse Ill-posed Problems, 3 (1995), 149-171.

47 I.V. Mel'nikova, Semigroup, distribution, and regularization methods, J. Math. Sci. Vol., 104, No. 2 (2001), 941-1007.

48 I.V. Mel'nikova, A.I. Filinkov, The Cauchy problem. Three approaches, Monograph and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 120, London New-York : Chapman & Hall, (2001).

49 I.V. Mel'nikova, Q. Zheng and J. Zheng, Regularization of weakly ill-posed Cauchy problem, J. Inv. Ill-posed Problems, Vol. 10 (2002), No. 5, 385-393.

50 K. Miller, Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non- well-posed problems, Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity (Heriot-Watt Univ., Edinburgh, 1972), Lecture Notes in Mathematics, vol.316, Springer, Berlin, (1973), pp. 161–176.

51 V. A. Morozov. Methods for Solving Incorrectly Posed problems. Springer-Verlag New-York, 1984.

52 L. E. Payne, Some general remarks on improperly posed problems for partial di¤erential equations, Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic

Convexity Heriot-Watt Univ., Edinburgh, 1972), Lecture Notes in Mathematics vol. 316, Springer, Berlin, (1973), pp. 1–30.

53 A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. (Applied mathematical sciences ; V.44). Springer, New-York. 1983.

54 S. Piskarev, Estimates for the rate of convergence in the solution of ill-posed problems for evolution equations, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat., 51 (1987) 676-687.

55 R. E. Showalter, The final value problem for evolution equations Journal of Mathematical Analysis and Applications 47 (1974), no. 3, 563–572.

56 R. E. Showalter, Cauchy problem for hyperparabolic partial differential equations Trends in the Theory and Practice of Nonlinear Analysis (Arlington, Tex, 1984) North-Holland Math. Stud., vol. 110, North-Holland, Amsterdam, (1985), pp. 421–425.

57 A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin, Solution of Ill-posed Problems, Winston & Sons Washington, DC, (1977).

58 V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Soboléva, Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle, Editions Mir, moscou, 1987.

59 N. H. Tuan, Regularization for a class of backward parabolic problems, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 2 (2010), no.2, 18-26.

60 N. H. Tuan, D. D. Trong, and P. H. Quan, On a backward Cauchy problem associated with continuous spectrum operator, Nonlinear Analysis, 73 (2010), no. 7, 1966-1972.

61 G. Vasil'ev, Methods for solving extremal problems. Minimization problems in function spaces, regularization, approximation, Nauka, Moscow, 1981.