

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE

INSTITUT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre:.....

Série:.....

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de Magister
En Mathématiques

Méthodes mixtes et décomposition
de domaines pour le problème de
STOKES

OPTION:

Analyse Numérique

PAR

TOUAFEK NOURESSADAT

SOUTENUE LE: / / 1997

Devant le jury:

Président :	M. DENCHE	MC	U. CONSTANTINE
Rapporteur :	K. NAFA	CC	U. ANNABA
Examineur :	F. Z. NOURI	MC	U. ANNABA
Examineur :	M. BOUTEFNOUCHET	CC	U. ANNABA
Examineur :	A. S. CHIBI	MC	U. ANNABA

Table des matières

Introduction

Chapitre I

1. Les équations de Navier-Stokes	6
2. Les conditions aux bords	7
3. Les équations de Stokes	8
4. Formulation variationnelle du problème homogène de Stokes	9
5. Problème variationnel général	11
6. Application au problème homogène de Stokes	12
7. Problème d'approximation général	12
8. Application à l'approximation du problème homogène de Stokes	13

Chapitre II

1. Introduction	21
2. Technique des macro-éléments	21
2.1. Technique des macro-éléments sans éléments communs	22
2.1.1. Application à la construction d'éléments stables	26
2.2. Technique des macro-éléments avec éléments communs	32
2.2.1. Application à la construction d'éléments stables	35

Chapitre III

1. Préconditionnement du problème de Stokes	65
1.1. Introduction	65
1.2. Le problème multidomaine associé au problème de Stokes	66
1.3. La matrice de capacitance associée au problème multidomaine	68
1.4. Propriétés de la matrice de capacitance	71
1.5. Préconditionnement de la matrice de capacitance	75
2. Décomposition de domaines et relaxation	77

Conclusion

Références

Résumés

Dédicaces

à la mémoire de ma soeur Farida

à ma très chère mère

à mon très chère père

à mes frères Abdellah, Ahmed

à ma soeur Nadià ma belle soeur Naima

à mon beau frère Zoubir

aux petits Tarek, Oussama, Amina, Sifeddine, Chaima

à la mémoire de mon ami M.L.Ben Charif

à L.H

à toute ma famille

à tous mes amis

à l'ALGERIE.

Remerciements

Je remercie vivement Mr:K.Nafa C.C à l'université d'Annaba pour m'avoir proposé un sujet de travail,pour ses précieux conseils,pour m'avoir guidé tout au long de mon travail.

Je remercie également:

Mr:M.Denche M.C à l'université de Constantine pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury et pour l'aide technique qu'il m'a accordé.Ainsi qu'à Mme:F.Z.Nouri M.C à l'université d'Annaba, Mr:M.Boutefnouchet C.C à l'université d'Annaba et Mr:A.S.Chibi M.C à l'université d'Annaba d'avoir accepté d'en faire partie du jury.

Introduction

Durant les vingt dernières années la méthode d'éléments finis mixte a joué un rôle très important dans l'étude des problèmes d'écoulements. La formulation mathématique des problèmes d'écoulements des fluides laminaires incompressibles est basée sur les équations de Navier-Stokes.

Pour ces équations, plusieurs formulations ont été développées et le choix d'une formulation dépend des quantités physiques objectives. La formulation mixte vitesse pression est la plus utilisée, vue sa simplicité et son cadre fonctionnel adéquat.

La théorie de base des méthodes d'éléments finis mixtes pour la résolution des problèmes du type point selle a été introduite par Ladyzenskaya [17], Babuska [2] et Brezzi [7]. Cette théorie a été appliquée aux problèmes de Stokes et d'élasticité linéaire voir Crouzeix-Raviart [10], Fortin [12], [13], Stenberg-Pitkaranta [23], Stenberg [27], [28], [29], [30] et généralisée pour les équations de Navier-Stokes, voir Girault-Raviart [14], [15], Cuvelier [11], Gunzberger [16].

Pour obtenir des résultats optimaux sur la convergence, les espaces d'approximations doivent être compatibles. Pour les équations de Stokes, ceci est garanti par la vérification de la condition inf-sup dite condition de Babuska-Brezzi [2], [7], la condition inf-sup est très importante, puisqu'elle nous assure la stabilité de l'approximation choisie.

Malgré que les approximations d'ordres bas tels que $P_1 - P_1$ et $Q_1 - Q_1$ sont simples et génèrent des matrices creuses, elles ne sont pas stables. Néanmoins, en utilisant deux niveaux de discrétisations Nafa et Thatcher [22] ont montré la stabilité de l'approximation $P_1 - P_1(\frac{h}{2}, h)$ pour les cas bidimensionnels et tridimensionnels. Dans notre travail on se sert de cette approche et de la théorie de stabilité locale [27], [29], [30] pour introduire d'autres approximations à ordres bas dans les cas bidimensionnels et tridimensionnels, qui satisfont la condition de Babuska-Brezzi.

Les approximations stables des équations de Stokes conduisent à la résolution d'un système algébrique symétrique mais non défini positif, par conséquent une résolution directe paraît très coûteuse.

Dans cette thèse, on propose des préconditionnements du système généré en utilisant la méthode de décomposition de domaines, ce qui rend l'algorithme de résolution plus efficace.

Notre travail comprend trois chapitres. Dans le chapitre I on introduit tout d'abord les équations de Navier-Stokes avec différents types de conditions aux bords nécessaires à l'étude de ces équations. Puis on s'intéresse à l'approximation du problème de Stokes par les méthodes d'éléments finis mixtes. Dans ce contexte on rappelle la condition de stabilité de ces méthodes et quelques techniques qui permettent sa vérification. On termine ce chapitre en donnant des exemples concrets d'approximations stables.

Le chapitre II, comprend la partie la plus importante de notre travail. Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude de la vérification de la condition de stabilité en utilisant la technique des macro-éléments Stenberg [27], [29], [30], Nafa-Thatcher [20], [22]. Dans notre étude on distingue deux classes de macro-éléments et on se sert de cette analyse pour construire de nouvelles approximations d'ordres bas stables pour les cas bidimensionnels et tridimensionnels.

Dans le chapitre III, on introduit la méthode de décomposition de domaines pour le problème de Stokes. Plus précisément on se sert de cette méthode pour préconditionner la

matrice de capacitance associée, ce qui rend l'algorithme de résolution plus efficace. A la fin de ce chapitre on présente la méthode de relaxation, qui est une autre approche pour la résolution du problème de Stokes.

Chapitre I

METHODES MIXTES POUR LE PROBLEME DE STOKES

1 Les équations de Navier Stokes:

Considérons les équations de Navier -Stokes qui décrivent l'écoulement d-dimensionnel d'un fluide visqueux incompressible:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}) - \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho f_i, \forall i = 1, \dots, d \dots (1.1) \\ \operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d D_{ii}(u) = 0 \text{ (condition d'incompressibilité)} \dots (1.2) \end{array} \right.$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij} = 2\mu D_{ij}(u) - P\delta_{ij} \dots (1.3a) \\ D_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \dots (1.3b) \end{array} \right.$$

Dans ces équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \text{ représente la vitesse du fluide,} \\ \rho : \text{densité du fluide (constante),} \\ \mu > 0 : \text{viscosité du fluide (constante),} \\ P : \text{Pression du fluide,} \\ f = (f_1, f_2, \dots, f_d) \text{ représente la densité des forces appliquées par unité de masse,} \\ \sigma = (\sigma_{ij})_{i,j} \text{ désigne le tenseur des contraintes (Stress tensor).} \end{array} \right.$$

et:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Comme d'habitude on pose:

$$p = \frac{P}{\rho} \text{ et } \nu = \frac{\mu}{\rho} \dots (1.4)$$

ici p et ν sont appelées pression et viscosité cinématique.

Avec ces notations les équations de Navier Stokes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - 2\nu \sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i, \forall i = 1, \dots, d, \dots (1.5a), \\ \operatorname{div} u = 0, \dots (1.5b). \end{array} \right.$$

On note que lorsque $\operatorname{div} u = 0$ on a :

$$\sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \right)$$

Mais:

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d D_{ii}(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right) \\ \sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\ \sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

soit :

$$\sum_{j=1}^d \frac{\partial D_{ij}(u)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \Delta u_i, \forall i = 1, \dots, d, \dots (1.6)$$

Ainsi les équations (1.5) peuvent être écrites vectoriellement comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \nu \Delta u + \text{grad} p = f, \dots (1.7a), \\ \text{div} u = 0, \dots (1.7b). \end{cases}$$

avec:

$$\begin{cases} u = (u_1, \dots, u_d) \\ \Delta u = (\Delta u_1, \dots, \Delta u_d) \end{cases}$$

Remarque 1 : Une autre manière d'écrire les équations de Navier-Stokes consiste à introduire un paramètre appelé nombre de Reynolds qui mesure l'effet de la viscosité sur l'écoulement et qu'on dénote Re .

Dans ce cas les équations de Navier-Stokes peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{1}{Re} \Delta u + \text{grad} p = f, \dots (1.8a), \\ \text{div} u = 0, \dots (1.8b). \end{cases}$$

On voit, qu'on obtient de nouveau les équations (1.7) avec ν remplacé par $\frac{1}{Re}$, Re est habituellement donné par :

$$Re = \frac{\rho U L}{\nu}, \dots (1.9)$$

où: U, L représentent respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques à l'écoulement du fluide.

Si on considère dans les équations (1.7) seulement le cas du régime permanent stationnaire c'est-à-dire:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

on obtient les équations de Navier-Stokes pour le cas stationnaire i.e:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \nu \Delta u + \text{grad} p = f, \dots (1.10a), \\ \text{div} u = 0, \dots (1.10b). \end{cases}$$

Le fluide est généralement contenu entre des frontières, et il doit y rester ainsi. Pour que le problème soit bien posé on doit exiger des conditions aux bords.

2 Les conditions aux bords:

Soit Ω un ouvert bornée de R^d , $d = 2, 3$ la région du fluide avec une frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière.

Pour avoir un problème bien posé les équations de Navier-Stokes stationnaires doivent être complétées par des conditions aux bords. Le choix de ces conditions n'est pas facile, mais la physique et les expériences nous donne les grandes lignes qu'on doit suivre pour un tel choix. On note qu'il y'a plusieurs types de conditions aux bords, on présente ici trois types:

2.1 conditions de Dirichlet sur la vitesse:

En raison de la nature élliptique des équations différentielles pour les composantes de la vitesse (présence de Δu) une condition sur cette dernière peut être imposée le long de toute la frontière et elle est donnée par :

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega, \dots (1.11)$$

g est un champ défini sur $\partial\Omega$. Elle peut être écrite:

$$u_1 = g_1, \dots, u_d = g_d, \dots (1.12).$$

cette condition peut être imposée seulement sur une partie Γ_1 de $\partial\Omega$ i.e $u = g$ sur Γ_1 .

2.2 conditions symétriques:

Par fois le problème considéré, possède une symétrie dans la région du fluide à travers une surface lorsque $\Omega \subset R^3$ ou une ligne lorsque $\Omega \subset R^2$, dans ce cas cette symétrie entraîne les conditions aux bords suivantes:

$$u \cdot \eta = 0, \dots (1.13),$$

$$\eta \cdot \nabla (u \cdot t_1) = 0, \dots (1.14),$$

$$\eta \cdot \nabla (u \cdot t_2) = 0, \dots (1.15).$$

où: t_1, t_2 sont les vecteurs unitaires dans le plan tangentiel et $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^t$ représente le vecteur unitaire normale à la surface (ligne) de symétrie.

2.3 Conditions de tractions:

Jusque là on a seulement parlé des conditions aux bords sur la vitesse, mais la pression peut apparaître dans les conditions aux bords qui peuvent être présentés sous la forme:

$$(\nu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - p)\eta_1 + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\eta_2 + \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\eta_3 = h_1, \dots (1.16),$$

$$\nu \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\eta_1 + (\nu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - p)\eta_2 + \nu \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\eta_3 = h_2, \dots (1.17),$$

$$\nu \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\eta_1 + \nu \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\eta_2 + (\nu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} - p)\eta_3 = h_3, \dots (1.18).$$

où: $h = (h_1, h_2, h_3)$ est un vecteur donné.

3 Les équations de stokes:

Considérons à nouveau une autre simplification des équations (1.10). En supposant que la vitesse est suffisamment petite pour que les termes non linéaires:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

soient négligées, on obtient les équations de stokes:

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \text{grad} p &= f, \dots (1.19a), \\ \text{div} u = 0 &= 0, \dots (1.19b) \end{cases}$$

4 Formulation variationnelle du problème homogène de Stokes:

Pour simplifier l'exposé on considère des conditions aux bords homogènes et nous signalons que le cas des conditions non homogène peut être traité sans difficulté.

Le problème homogène de Stokes s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver la vitesse } u = (u_1, \dots, u_d) \text{ et la pression } p \text{ tq :} & \\ -\nu \Delta u + \text{grad } p & = f \text{ dans } \Omega \dots (1.20a), \\ \text{div } u & = 0 \text{ dans } \Omega \dots (1.20b), \\ u & = 0 \text{ sur } \partial\Omega \dots (1.20c). \end{array} \right.$$

où: $f \in (L^2(\Omega))^d$, Ω ouvert bornée de R^d , $d = 2, 3$ de frontière $\partial\Omega$ assez régulière.

Dans le but d'introduire la formulation variationnelle du problème homogène de Stokes, définissons les espaces fonctionnelles suivants:

• L'espace $L^2(\Omega)$: On note par $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions à carré intégrable sur Ω muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et de la norme $\|\cdot\|_0$ définis par:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f g d\Omega \quad \forall f, g \in L^2(\Omega), \dots (1.21),$$

$$\|f\|_0 = (f, f)^{1/2} \quad \forall f \in L^2(\Omega), \dots (1.22).$$

• L'espace $L_0^2(\Omega)$: $L_0^2(\Omega)$ est défini par:

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} f d\Omega = 0 \right\} \dots (1.23).$$

• L'espace $H^m(\Omega)$, $m \in N$: On note par $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini comme suit:

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \mid D^k f \in L^2(\Omega); 1 \leq |k| \leq m \right\} \dots (1.24)$$

D^k désigne la dérivée généralisée d'ordre $|k|$ donnée par:

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}} = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_d} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}, \dots (1.25).$$

où: $x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in N^d$ et $|k| = k_1 + \dots + k_d$. $H^m(\Omega)$ est muni de la norme:

$$\|f\|_m = (\|f\|_0^2 + \sum_{1 \leq |k| \leq m} \|D^k f\|_0^2)^{1/2} \dots (1.26).$$

On définit aussi sur $H^m(\Omega)$ la semi-norme:

$$|f|_m = \left(\sum_{|k|=m} \|D^k f\|_0^2 \right)^{1/2} \dots (1.27).$$

En particulier pour $m = 1$ on a:

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d \right\} \dots (1.28).$$

avec la norme:

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= (\|f\|_0^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_0^2)^{1/2} \dots\dots (1.29) \\ &= (\|f\|_0^2 + \|\nabla f\|_0^2)^{1/2}.\end{aligned}$$

Définissons aussi l'espace $H_0^1(\Omega)$ comme suit:

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \mid f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \dots\dots (1.30).$$

Il est bien connu que la semi norme:

$$|f|_1 = \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{1/2} = \|\nabla f\|_0, \dots\dots (1.31).$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_1$ induite par $H^1(\Omega)$.

On remarque que: $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Pour les fonctions vectorielles, on pose:

$$(L^2(\Omega))^d = \{f = (f_1, \dots, f_d); f_i \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}, \dots\dots (1.32).$$

et on mène cet espace de la norme:

$$\|f\|_0 = \left(\sum_{i=1}^d \|f_i\|_0^2 \right)^{1/2}, \dots\dots (1.33).$$

de manière analogue, on pose:

$$(H^m(\Omega))^d = \{f = (f_1, \dots, f_d); f_i \in H^m(\Omega), i = 1, \dots, d\} \dots\dots (1.34)$$

qu'on munit de la norme:

$$\|f\|_m = \left(\sum_{i=1}^d \|f_i\|_m^2 \right)^{1/2}, \dots\dots (1.35).$$

de même on définit:

$$(H_0^1(\Omega))^d = \{f \in (H^1(\Omega))^d, f = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \dots\dots (1.36).$$

pour cet espace, les deux normes suivantes sont équivalentes:

$$\|f\|_1 = \left(\sum_{i=1}^d \|f_i\|_1^2 \right)^{1/2} \dots\dots (1.37).$$

$$|f|_1 = \left(\sum_{i=1}^d |f_i|_1^2 \right)^{1/2} \dots\dots (1.38)$$

Après avoir introduit tous ces espaces, passant à la formulation variationnelle du problème homogène de Stokes.

Pour cela, soient $u \in (H_0^1(\Omega))^d$ et $q \in L_0^2(\Omega)$ deux fonctions testées en multipliant (1.20a) et (1.20b) respectivement par v et q et en intégrant on aura:

$$\begin{cases} -\nu \int_{\Omega} \Delta u \cdot v d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot v d\Omega &= \int_{\Omega} f v d\Omega \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u q d\Omega &= 0 \end{cases}$$

en utilisant la formule de Green on obtient:

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \nu \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \eta v ds - \int_{\Omega} \operatorname{div} v p d\Omega + \int_{\partial\Omega} p \eta v ds & = \int_{\Omega} f v d\Omega \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u q d\Omega & = 0 \end{cases}$$

en tenant compte du fait que $v = 0$ sur $\partial\Omega$, on obtient:

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} v p d\Omega & = \int_{\Omega} f v d\Omega \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} u q d\Omega & = 0 \end{cases}$$

ainsi le problème faible associé au problème homogène de Stokes(1.20) s'écrit:

Étant donnée $f \in (L^2(\Omega))^d$, trouver $u \in (H_0^1(\Omega))^d$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tq:

$$\begin{cases} \nu (\nabla u, \nabla v) - (\operatorname{div} v, p) = (f, v); \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d \dots (1.39a) \\ (\operatorname{div} u, q) = 0; \forall q \in L_0^2(\Omega) \dots (1.39b) \end{cases}$$

ce problème, est un exemple typique d'une classe de problèmes variationnels qu'on va présenter, en donnant les résultats qui garantissent l'existence d'une solution unique.

5 Problème variationnel général:

Soient X, M deux espaces de Hilbert de normes respectives $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_M$ et X', M' leurs duaux. Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Étant données } l \in X', \psi \in M', \text{ trouver } (u, p) \in X \times M \text{ tq:} \\ a(u, v) + b(v, p) & = \langle l, v \rangle, \forall v \in X \dots (1.40a), \\ b(u, q) & = \langle \psi, q \rangle, \forall q \in M \dots (1.40b). \end{cases}$$

où: $a : X \times X \longrightarrow R$ et $b : X \times M \longrightarrow R$ sont deux formes bilinéaires et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre X' et X (respectivement entre M' et M).

L'existence d'une solution unique de ce problème est garantie par le théorème suivant:

Theoreme 1 : Supposons:

H_1 : (continuité de a et b) qu'ils existent deux constantes positives c_1, c_2 tq:

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &\leq c_1 \|v\|_X \cdot \|w\|_X, \forall v, w \in X \\ |b(v, q)| &\leq c_2 \|v\|_X \cdot \|q\|_M, \forall v \in X, \forall q \in M \end{aligned}$$

H_2 : (Z ellipticité de a) qu'il existe une constante positive α^* tq:

$$a(v, v) \geq \alpha^* \|v\|_X^2, \forall v \in Z$$

avec:

$$Z = \{v \in X : b(v, q) = 0, \forall q \in M\}$$

H_3 : (condition inf-sup) qu'il existe une constante β^* positive tq:

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta^* \|q\|_M, \forall q \in M \dots (1.41).$$

Alors, le problème (1.40) admet une solution unique $(u, p) \in X \times M$.

Démonstration Voir (F-Brezzi [7])

6 Application au problème homogène de Stokes:

On sait d'après ce qui précède que le problème faible associé au problème homogène de Stokes s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, p) \in (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega) \text{ tq :} \\ \nu(\nabla u, \nabla v) - (\operatorname{div} v, p) = (f, v); \forall v \in (H_0^1(\Omega))^d \dots\dots (1.42a), \\ (\operatorname{div} u, q) = 0; \forall q \in L_0^2(\Omega) \dots\dots (1.42b). \end{array} \right.$$

qui est un exemple typique du problème (1.40) en prenant :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \nu(\nabla u, \nabla v), b(v, q) = -(\operatorname{div} v, q) \\ X &= H_0^1(\Omega)^d, M = L_0^2(\Omega) \end{aligned}$$

Il est immédiat que les conditions H_1, H_2 sont satisfaites. Pour montrer que la condition H_3 est satisfaite i.e qu'il existe $\beta^* > 0$ tq:

$$\sup_{v \in (H_0^1(\Omega))^d} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1} \geq \beta^* \|q\|_0, \forall q \in L_0^2(\Omega) \dots\dots (1.43)$$

on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1 : Soit $q \in L_0^2(\Omega)$, il existe un élément unique $v \in H_0^1(\Omega)^d$ tq:

$$\operatorname{div} v = q \text{ et } |v|_1 \leq c \|q\|_0, c \text{ constante positive.}$$

Démonstration: Voir (V-Girault, P-A-Raviart[15]).

D'après le lemme précédent, pour $q \in L_0^2(\Omega)$ il existe $v \in H_0^1(\Omega)^d$ tq: $\operatorname{div} v = q$ et $|v|_1 \leq c \|q\|_0$, d'où:

$$\frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1} = \frac{\|q\|_0^2}{|v|_1} \geq \frac{1}{c} \|q\|_0$$

donc:

$$\sup_{v \in (H_0^1(\Omega))^d} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1} \geq \beta^* \|q\|_0, \forall q \in L_0^2(\Omega)$$

avec

$$\beta^* = \frac{1}{c}.$$

Ainsi le théorème 1 assure l'existence d'une solution unique pour le problème (1.42).

7 Problème d'approximation général:

On conserve les mêmes notations que dans le problème (1.40) et on conserve aussi les hypothèses qui garantissent l'existence d'une solution unique du problème (1.40) i.e H_1, H_2 et H_3 .

Soit maintenant $h > 0$, un paramètre de discretisation appelé à tendre vers zéro. Pour chaque $h > 0$, soient $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$ deux espaces de dimensions finis qui approximent X et M .

Remarque 2 : Une telle approximation est dite conforme .Si les inclusions ne sont pas respectées on dit que l'approximation est non conforme.

Dans notre travail on s'intéresse seulement à des approximations conformes.

Par analogie avec le problème (1.40), définissons le problème suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in X_h \times M_h \text{ tq :} \\ a(u_h, v) + b(v, p_h) = \langle l, v \rangle, \forall v \in X_h \dots (1.44a), \\ b(u_h, q) = \langle \psi, q \rangle, \forall q \in M_h \dots (1.44b). \end{cases}$$

L'existence d'une solution unique de ce problème est garantie par le théorème suivant:

Theoreme 2 : Supposons :

$(H_2)_h$: (Z_h ellipticité de a) qu'il existe une constante $\alpha > 0$ indépendante de h tq:

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2, \forall v \in Z_h$$

avec:

$$Z_h = \{v \in X_h : b(v, q) = 0, \forall q \in M_h\}$$

$(H_3)_h$: (condition inf-sup discrete) qu'il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h tq:

$$\sup_{0 \neq v \in X_h} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M, \forall q \in M_h \dots (1.45).$$

Alors, le problème (1.44) admet une solution unique $(u_h, p_h) \in X_h \times M_h$. De plus, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h tq :

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_M \leq c \left\{ \inf_{v \in X_h} \|u - v\|_X + \inf_{q \in M_h} \|p - q\| \right\}$$

où (u, p) est la solution du problème (1.40).

Démonstration: Voir (V-Girault, P-A-Raviart [15]).

Remarque 3 : En général $Z_h \not\subset Z$ ainsi la condition $(H_2)_h$ ne peut être déduite directement de la condition H_2 du théorème 1.

• Pour avoir une bonne méthode d'éléments finis les espaces X_h, M_h doivent être choisis de telle sorte qu'ils satisfont la condition inf-sup discrete (1.45). i.e la condition de Babuska-Brezzi est une condition de compatibilité entre X_h et M_h .

8 Application a l'approximation du problème homogène de Stokes :

Le problème discret de Stokes s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ tq :} \\ \nu(\nabla u_h, \nabla v) - (\operatorname{div} v, p_h) = (f, v), \forall v \in V_h \dots (1.46a), \\ (\operatorname{div} u_h, q) = 0, \forall q \in Q_h \dots (1.46b). \end{cases}$$

où:

$$\begin{aligned} V_h &\subset (H_0^1(\Omega))^d, Q_h \subset L_0^2(\Omega) \text{ sont les espaces d'approximations.} \\ a(u, v) &= \nu(\nabla u, \nabla v) \\ b(v, q) &= -(\operatorname{div} v, q) \end{aligned}$$

et on prend:

$$Z_h = \{v \in V_h : (\operatorname{div} v, q) = 0, \forall q \in Q_h\}.$$

On voit que la condition $(H_2)_h$ du théorème 2 est satisfaite et l'existence et l'unicité de la solution du problème (1.46) sont garanties par la vérification de la condition inf-sup discrete i.e l'existence d'une constant $\beta > 0$ indépendante de h tq:

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1} \geq \beta \|q\|_0, \forall q \in Q_h \dots (1.47)$$

Remarque 4 : On note qu'à cause de (1.46b) la solution (u_h, p_h) est telle que: $u_h \in Z_h$.

Dans ce qui suit on s'intéresse à l'étude de certaines techniques qui permettent la vérification de la condition de compatibilité (1.47) pour le probleme de Stokes.

8.1 Techniques de verifications de la condition inf-sup pour le problème de Stokes:

Téchnique de stabilité globale:

Fortin à établi dans [12] que si on arrive à construire un opérateur $\pi_h : (H_0^1(\Omega))^d \longrightarrow V_h$ tq:

$$(\operatorname{div} v, q) = (\operatorname{div}(\pi_h v), q), \forall q \in Q_h$$

et

$$|\pi_h v|_1 \leq c |v|_1, \forall v \in V_h, c \text{ constante positive indépendante de } h$$

alors, la condition inf-sup discrete (1.47) est satisfaite.

En effet: si un tel opérateur existe, alors $\forall q \in Q_h$; on a:

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1} \geq \sup_{v \in (H_0^1(\Omega))^d} \frac{(\operatorname{div}(\pi_h v), q)}{|\pi_h v|_1} = \sup_{v \in (H_0^1(\Omega))^d} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|\pi_h v|_1} \geq \frac{1}{c} \sup_{v \in (H_0^1(\Omega))^d} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1}$$

d'où

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1} \geq \frac{1}{c} \beta^* \|q\|_0 = \beta \|q\|_0, \forall q \in Q_h$$

où: β^* est la constante de la condition inf-sup continue (1.43).

Téchnique de stabilité locale:

La difficulté dans la vérification de la condition inf-sup provient de sa nature globale, c'est ainsi que Boland - Nicolaides dans [5] et Stenberg dans [27] ont introduit une technique qui permet de réduire la vérification de la condition inf-sup globale à la vérification d'une condition inf-sup locale bien sûr facile à établir.

On revient en détails sur cette technique dans le chapitre prochain où on s'intéresse seulement à la technique des macro-éléments introduite par Stenberg dans [27].

Remarque 5 : La condition inf-sup discrete (1.47) à les formes équivalentes suivantes:

* Il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h tq:

$$\inf_{0 \neq q \in Q_h} \sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{|v|_1 \|q\|_0} \geq \beta$$

* Il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de h tq:

$$\inf_{\|q\|_0=1, q \in Q_h} \sup_{|v|_1=1, v \in V_h} (\operatorname{div} v, q) \geq \beta$$

* $\forall q \in Q_h$ il existe $v \in V_h$ tel que:

$$(\operatorname{div} v, q) \geq c \|q\|_0^2 \text{ et } |v|_1 \leq \|q\|_0$$

* Il est de même pour la condition inf-sup continue (1.43).

8.2 Exemples d'éléments stables et instables pour le problème de Stokes:

On se restreint seulement au cas où Ω est un domaine polygonal de R^2 .

Soit τ_h une partition de Ω par des triangles ou des quadrilatères convexes, naturellement la partition est supposée régulière i.e: Il existe une constante $\sigma > 1$:

$$h_K \leq \sigma \cdot \rho_K ; \forall K \in \tau_h$$

où:

h_K désigne le diamètre de K

ρ_K désigne le diamètre maximal de tous les cercles contenues dans K .voir Ciarlet[8].

Choisissons pour le problème (1.46) V_h, Q_h comme suit:

$$V_h = \left\{ v \in (H_0^1(\Omega))^d \mid v|_K \in R_l(K); \forall K \in \tau_h \right\} \dots (1.48),$$

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q|_K \in R_{l'}(K); \forall K \in \tau_h \right\} \dots (1.49).$$

ou:

$$Q_h = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) \mid q|_K \in P_{l'}(K); \forall K \in \tau_h \right\} \dots (1.50)$$

où: $l, l' \in N$. Pour $m \in N$:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K) & \text{si } K \text{ est triangle} \dots (1.51a) \\ Q_m(K) & \text{si } K \text{ est quadrilatère} \dots (1.51b) \end{cases}$$

* $P_m(K)$ désigne l'espace des (fonctions) polynômes de degré $\leq m$ sur K i.e $p \in P_m(K)$ est de la forme

$$p(x) = \sum_{0 \leq i+j \leq m} a_{ij} x_1^i x_2^j, a_{ij} \in R, x = (x_1, x_2)$$

* $Q_m(K)$ désigne l'espace des (fonctions) polynômes de degré $\leq m$ par rapport à chaque variable sur K i.e $p \in Q_m(K)$ est de la forme:

$$p(x) = \sum_{0 \leq i,j \leq m} a_{ij} x_1^i x_2^j, a_{ij} \in R, x = (x_1, x_2)$$

Theoreme 3 : Supposons que la solution (u, p) du problème (1.20) satisfait:

$$u \in (H^r(\Omega))^2, r \geq 1 \text{ et } p \in H^s(\Omega), s \geq 0$$

et soit (u_h, p_h) la solution du problème (1.46) . Alors, si la condition inf-sup discrete (1.47) est satisfaite; on a les estimations d'erreurs suivantes:

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq c[h^{q_1-1} \|u\|_{q_1} + h^{q_2} \|p\|_{q_2}] \dots (1.52).$$

où:

$$q_1 = \min \{r, l + 1\}, q_2 = \min \{s, l' + 1\}.$$

De plus si Ω est convexe on a:

$$\|u - u_h\|_0 \leq c[h^{q_1} \|u\|_{q_1} + h^{q_2+1} \|p\|_{q_2}] \dots (1.53).$$

Démonstration: Voir (V-Giraut , P-A-Raviart [14]).

Donnons maintenant des exemples d'éléments stables et instables:

(a) L'élément $Q_2 - Q_1$: Soit τ_h une partition de Ω par des quadrilatères convexes et choisissons:

$$\begin{aligned} V_h &= \{v \in (H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in (Q_2(K))^2; \forall K \in \tau_h\}, \\ Q_h &= \{q \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q|_K \in Q_1(K); \forall K \in \tau_h\}. \end{aligned}$$

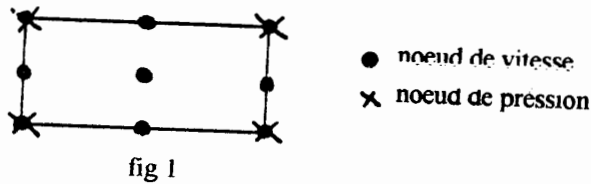
Pour chaque $K \in \tau_h$ on a les noeuds représentés comme fans la fig(1).

Cet élément généralement appelé élément de Taylor - Hood est stable c'est-à-dire que la paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup (1.47) voir (Verfurth [31]), (Stenberg [30]). Pour cet élément on a les estimations d'erreurs suivantes: Pour $u \in (H^3(\Omega))^2, p \in H^2(\Omega)$:

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq ch^2[\|u\|_3 + \|p\|_2] \dots (1.54).$$

De plus, si Ω est convexe on a:

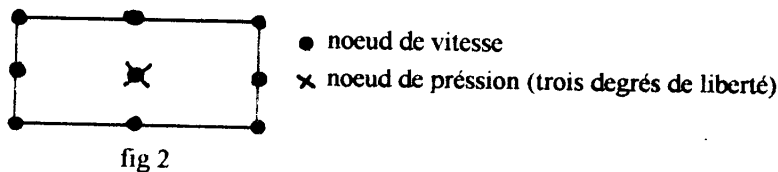
$$\|u - u_h\|_0 \leq ch^3[\|u\|_3 + \|p\|_2] \dots (1.55).$$



(b) L'élément $Q_2 - P_1$: On conserve la même partition que celle de l'élément $Q_2 - Q_1$ et choisissons:

$$\begin{aligned} V_h &= \{v \in (H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in (Q_2(K))^2; \forall K \in \tau_h\}, \\ Q_h &= \{q \in L_0^2(\Omega) \mid q|_K \in P_1(K); \forall K \in \tau_h\}. \end{aligned}$$

Pour chaque $K \in \tau_h$ on a les noeuds représentés comme dans la fig(2).



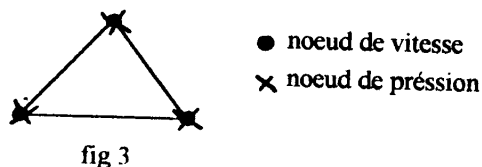
La paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup (147) voir (Fortin [13]) et (Stenberg [27]), pour cet élément on a aussi les estimations d'erreurs (1.54) et (1.55).

(c) L'élément $P_1 - P_1$: Soit τ_h une partition de Ω par des triangles et choisissons:

$$V_h = \{v \in (H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in (P_1(K))^2; \forall K \in \tau_h\},$$

$$Q_h = \{q \in (L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid q|_K \in P_1(K); \forall K \in \tau_h\}.$$

Pour chaque K on a les noeuds représentés comme dans la fig(3)



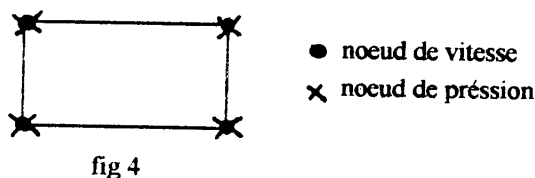
Il est bien connu que cet élément ne satisfait pas la condition inf-sup (1.47).

(d) L'élément $Q_1 - Q_1$: Soit τ_h une partition de Ω par des quadrilatères convexes et choisissons:

$$V_h = \{v \in (H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in (Q_1(K))^2; \forall K \in \tau_h\},$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q|_K \in Q_1(K); \forall K \in \tau_h\}.$$

Pour chaque $K \in \tau_h$ on a les noeuds représentés comme dans la fig(4)



Il est bien connu que cet élément n'est pas stable (voir Gunzberger [16]).

Remarque 6 : Dans notre présentation d'éléments stables et instables on a construit V_h, Q_h à partir d'approximations polynômiales de la vitesse et de la pression sur la même partition τ_h .

Une autre approche consiste à approximer la vitesse et la pression sur des partitions différentes mais bien reliés ce qui permet de construire d'autres éléments stables, ce qui est le cas de l'élément suivant:

(ϵ) L'élément $P_1 - P_1(\frac{h}{2}, h)$: Soit τ_h une partition de Ω par des quadrilatères convexes, et introduisons la partition $\tau_{\frac{h}{2}}$ on subdivise chaque $K \in \tau_h$ à 8 petites triangles comme dans la fig (5):



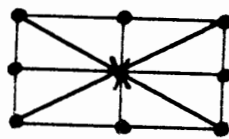
fig 5

Choisissons:

$$V_h = \{v \in (H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in P_1(K); \forall K \in \tau_{\frac{h}{2}}\},$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) \mid q|_K \in P_1(K); \forall K \in \tau_h\}.$$

on a les noeuds représentés comme dans la fig (6)



- noeud de vitesse
- ✕ noeud de pression (trois degrés de liberté)

fig 6

Nafa et Thatcher ont démontré dans [22] que le paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup (1.47). Pour cet élément on a les estimations d'erreurs suivantes: Pour $u \in (H^2(\Omega))^2$ et $p \in H^1(\Omega)$:

$$\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq ch[\|u\|_2 + \|p\|_1] \dots (1.56).$$

De plus, si Ω est convexe on a:

$$\|u - u_h\|_0 \leq ch^2[\|u\|_2 + \|p\|_1] \dots (1.57).$$

Remarque 7 : • Dans le chapitre qui suit on se sert de cette technique et de la stabilité locale voir [27],[29],[30] pour construire d'autres éléments qui sont stables.

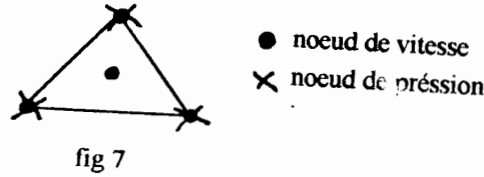
• Une autre technique qui permet de construire d'éléments stables consiste à enrichir l'espace d'approximation de la vitesse V_h par des fonctions bulles ce qui est le cas de l'élément suivant:

(f) L'élément P_1 -bulle P_1 : Soit τ_h une partition de Ω par des triangles et choisissons:

$$V_h = \{v \in (H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in (P_1(K) \oplus B_3(K))^2; \forall K \in \tau_h\},$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q|_K \in P_1(K); \forall K \in \tau_h\}.$$

Les éléments de $B_3(K)$ sont des fonctions bulles sur K et elles sont de la forme $\alpha(K)\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ où $\alpha(K) \in R$ et $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ désignent les coordonnées barycentriques sur K . Pour chaque $K \in \tau_h$ on a les noeuds représentés comme dans la fig(7).



(Arnold - Brezzi - Fortin) ont démontrés dans [1] que le paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup(1.47).

Remarque 8 : • L'analogue tridimensionnel de l'élément bidimensionnel P_1 -bulle $| P_1$ est stable, voir (A.Soulaimani et all [26]).

• L'analogue tridimensionnel de l'élément bidimensionnel $P_1 - P_1(\frac{h}{2}, h)$ est stable, voir (Nafa-Thatcher [22]).

• L'élément Q_1 -bulle $| Q_1$ est stable voir (Mons-Rogé [19]).

Remarque 9 : Les approximations d'ordre bas sont intéressantes puisqu'elles sont simples et donnent des ordres de convergences raisonnables. Deplus, elles sont moins couteuses dans la mise en oeuvre et génèrent des matrices creuses ce qui rend l'algorithme de résolution efficace.

Chapitre II

ANALYSE ET APPLICATION DE LA TECHNIQUE DE STABILITE LOCALE

1 Introduction:

Comme déjà noté au chapitre précédent, on sait que la difficulté dans la vérification de la condition de Babuska Brezzi réside de sa nature globale, c'est ainsi que Boland- Nicolaides dans [5] et Stenberg dans [27] ont localisés cette difficulté. Dans notre travail on s'intéresse seulement à la technique des macro-éléments pour le problème de Stokes.

Dans la suite de l'exposé, on suppose en plus que la région Ω est polygonal ($d = 2$) ou polyédrique ($d = 3$).

2 Technique des macro-éléments:

Soit τ_h une partition de Ω par des triangles ou des quadrilatères convexes en dimension deux ou par des tétraèdres ou des hexaèdres convexes en dimension trois, naturellement cette partition est supposée régulière dans le sens usuel i.e:

il existe une constante $\sigma > 1$: $h_K \leq \sigma \cdot \rho_K ; \forall K \in \tau_h, \dots \dots (2.1)$

où:

$$\begin{cases} h_K : \text{désigne le diamètre de } K \\ \rho_K : \text{désigne le diamètre maximal de tous les cercles (sphères) contenues dans } K \end{cases}$$

comme d'habitude:

$$h = \max_{K \in \tau_h} \{h_K\}.$$

Supposons aussi que les espaces d'éléments finis peuvent être uniquement définis en utilisant un élément de référence $\hat{K}$ ($\hat{K}$ sera un triangle, un tétraèdre, un carré, un cube (unité)) et qu'on a deux espaces polynomiaux de dimensions finies $\hat{V}$ et $\hat{Q}$. De plus, pour chaque $K \in \tau_h$, soit F_k l'application affine (triangles, tétraèdres), bilinéaire (quadrilatères), trilineaire (hexaèdres) de $\hat{K}$ sur K . Par exemple si K est quadrilatère F_k est comme dans la (fig.8).

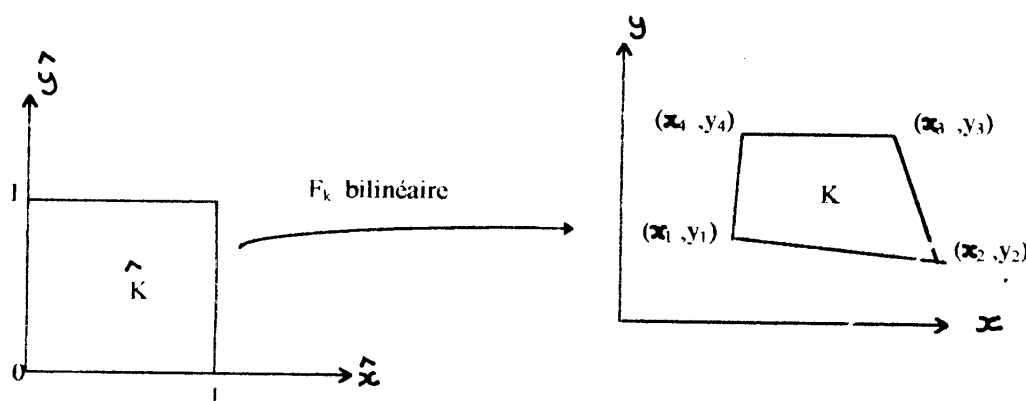


fig 8

$F_k = (F_1, F_2): F_i(\hat{x}, \hat{y}) = a_i + b_i \hat{x} + c_i \hat{y} + d_i \hat{x}\hat{y}, i = 1, 2, \text{et:}$

$$\begin{cases} F_k(0, 0) = (x_1, y_1) \\ F_k(1, 0) = (x_2, y_2) \\ F_k(0, 1) = (x_4, y_4) \\ F_k(1, 1) = (x_3, y_3) \end{cases}$$

Choisissons:

$$V_h = \{v \in (H_0^1(\Omega))^d \mid v(x) = \hat{v}(F_k^{-1}(x)), \hat{v} \in \hat{V}, x \in K, K \in \tau_h\} \dots (2.2).$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) \mid q(x) = \hat{q}(F_k^{-1}(x)), \hat{q} \in \hat{Q}, x \in K, K \in \tau_h\} \dots (2.3).$$

où:

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q(x) = \hat{q}(F_k^{-1}(x)), \hat{q} \in \hat{Q}, x \in K, K \in \tau_h\} \dots (2.4).$$

Déf 1: On désigne par un macro-élément l'union d'un ou de plusieurs éléments voisins de τ_h .

Déf 2: On dit qu'un macro-élément M est équivalent à un macro-élément de référence $\hat{M}$, si on peut définir une application bijective, continue: $F: \hat{M} \longrightarrow M$ tq:

(i) $F(\hat{M}) = M$

(ii) si $\hat{M} = \cup_{j=1}^m \hat{K}_j$ où $\hat{K}_j, j = 1, \dots, m$ sont des éléments de $\hat{M}$ alors: $K_j = F(\hat{K}_j)$, où $K_j, j = 1, \dots, m$ sont des éléments de M .

(iii) $F|_{\hat{K}_j} = F_{K_j} \circ F_{\hat{K}_j}, j = 1, \dots, m$ où $F_{K_j}, F_{\hat{K}_j}$ sont respectivement l'application de l'élément de référence $\hat{K}$ sur K_j et l'application de l'élément de référence $\hat{K}$ sur $\hat{K}_j$.

Déf 3: On définit $\xi_{\hat{M}}$ comme étant la classe de tous les macro-éléments équivalents au macro-élément de référence $\hat{M}$.

Pour un macro-élément donné M définissons:

$$V_{0,M} = \{v \in (H_0^1(M))^d \mid v(x) = \hat{v}(F_k^{-1}(x)), \hat{v} \in \hat{V}, x \in K, K \subset M\} \dots (2.5),$$

$$Q_M = \{q \in L^2(M) \mid q(x) = \hat{q}(F_k^{-1}(x)), \hat{q} \in \hat{Q}, x \in K, K \subset M\} \dots (2.6),$$

où:

$$Q_M = \{q \in L^2(M) \cap C(\bar{M}) \mid q(x) = \hat{q}(F_k^{-1}(x)), \hat{q} \in \hat{Q}, x \in K, K \subset M\} \dots (2.7),$$

$$N_M = \{q \in Q_M \mid (\text{div} v, q)_M = 0, \forall v \in V_{0,M}\} \dots (2.8),$$

$$Q_{0,M} = Q_M \cap L_0^2(\Omega) \dots (2.9).$$

Après avoir introduit toutes ces notions on est prêt à introduire la technique des macro-éléments. Dans ce qui suit on distingue deux cas.

2.1 Technique des macro-éléments sans éléments communs:

Pour cette technique on exige que chaque élément de la partition appartient à un et un seul macro-élément.

Lemme 2 : Supposons que pour chaque $M \in \xi_M^\wedge$, l'espace N_M est de dimension un constitué des fonctions constantes sur M . Alors, il existe une constante $\beta_M^\wedge > 0$ tq:

$$\sup_{0 \neq v \in V_{0,M}} \frac{(\text{div} v, p)}{|v|_{1,M}} \geq \beta_M^\wedge \|p\|_{0,M} \forall p \in Q_{0,M}, \dots (2.10)$$

pour chaque $M \in \xi_M^\wedge$.

Démonstration: Soit $M \in \xi_M^\wedge$ et définissons :

$$\beta_M = \inf_{\{\|p\|_{0,M}=1, p \in Q_{0,M}\}} \sup_{\{\|v\|_{1,M}=1, v \in V_{0,M}\}} (\text{div} v, p)_M$$

puisque N_M est supposé constitué des fonctions constantes, on a $\beta_M > 0$. Montrons qu'il existe une constante $\beta_M^\wedge$ tq: $\beta_M \geq \beta_M^\wedge > 0$.

soit $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^k$ les sommets d'éléments de $\hat{M}$, ainsi chaque $M \in \xi_M^\wedge$ est uniquement défini par ces sommets i.e $x^i = F(\hat{x}^i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. , cela veut dire que $\beta_M = \beta(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^k) = \beta(X)$ avec $X = (\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^k) \in R^{dk}$, et la fonction β dépend continuellement de X .

supposons $\hat{x}^1$ coïncide avec l'origine et que $h_M = 1$ où h_M est défini comme suit:

$$h_M = \max_{K \subset M} \{h_K\}.$$

Le cas général peut être traité en faisant le changement de variable de x à: $\frac{x-x^1}{h_M}$, ainsi chaque sommet est situé à une distance de l'origine inférieure ou égale à l'unité et par conséquent X appartient à un compact de R^{dk} . Donc il existe une constante $\beta_M^\wedge > 0$:

$$\inf_{\{\|p\|_{0,M}=1, p \in Q_{0,M}\}} \sup_{\{\|v\|_{1,M}=1, v \in V_{0,M}\}} (\text{div} v, p)_M \geq \beta_M^\wedge, \forall M \in \xi_M^\wedge$$

C.Q.F.D.

Maintenant, on arrive au résultat essentiel de cette technique.

Theoreme 4 Supposons que :

CM1: les éléments de τ_h peuvent être regrouper pour former une partition M_h de macro-éléments sans éléments communs, et qu'on a un nombre fini de classes d'équivalences $\xi_{M_i}^\wedge$, $i = 1, \dots, n$ tq: chaque $M \in M_h$ appartient à une classe $\xi_{M_i}^\wedge$, $i = 1, \dots, n$.

CM2: $\forall M \in \xi_{M_i}^\wedge$, $i = 1, \dots, n$ l'espace N_M est de dimension un constitué des fonctions constantes sur M .

CM3: $\forall M, M' \in M_h$ deux macro-éléments voisins tels que: $\int_{M \cap M'} ds \neq 0$ il existe $v \in V_h$ tel que:

$$\text{supp } v \subset M \cap M' \text{ et } \int_{M \cap M'} v \cdot \eta \, ds \neq 0$$

Alors, la condition inf-sup discrete (1.47) est satisfaite avec une constante positive indépendante de h i.e il existe $\beta > 0$ tq:

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\text{div} v, p)}{|v|_1} \geq \beta \|p\|_0, \forall p \in Q_h$$

Remarque 10 : En d'autres termes la condition CM3 veut dire que Deux macro-éléments voisins M, M' ayant un côté (face) commun doivent contenir un noeud de vitesse interieure à ce côté (face)

Démonstration: Soit $p \in Q_h$, alors il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ et $v, g \in V_h$ tq:

$$\begin{cases} (divv, p) = (divv, (I - \pi_h)p) \geq c_1 \|(I - \pi_h)p\|_0^2 \dots (2.11a) \\ |v|_1 \leq \|(I - \pi_h)p\|_0 \dots (2.11b) \end{cases}$$

et:

$$\begin{cases} (divg, \pi_h p) = \|\pi_h p\|_0^2 \dots (2.12a) \\ |g|_1 \leq c_2 \|\pi_h p\|_0 \dots (2.12b) \end{cases}$$

où: π_h est la projection orthogonal (au sens de la norme de L^2) de Q_h sur D_h tq:

$$D_h = \{\mu \in L_0^2(\Omega) \mid \mu|_M \text{ est constant}, \forall M \in M_h\}.$$

En effet: puisque $(I - \pi_h)p \in Q_{0,M} \forall M \in M_h$ et que chaque M appartient à une des classes $\xi_{M_i}, i = 1, \dots, n$. Alors, d'après le lemme 2 il existe pour chaque M un $v_M \in V_{0,M}$ tq:

$$\begin{aligned} (divv_M, (I - \pi_h)p)_M &\geq c_1 \|(I - \pi_h)p\|_{0,M}^2 \\ \text{et } |v_M|_{1,M} &\leq \|(I - \pi_h)p\|_{0,M} \end{aligned}$$

où: $c_1 = \min\{c_{M_i}, i = 1, \dots, n\}$.

Définissons $v = \sum_{M \in M_h} v_M, v|_M = v_M, \forall M \in M_h$ puisque $v = 0$ sur $\partial M, \forall M \in M_h \Rightarrow v = 0$ sur $\partial\Omega$ donc $v \in V_h$ et que:

$$\begin{aligned} (divv, \pi_h p) &= - \int_{\Omega} v \operatorname{grad} \pi_h p \, dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot \eta \pi_h p \, ds \\ (divv, \pi_h p) &= - \sum_{M \in M_h} \int_M v \operatorname{grad} \pi_h p \, dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot \eta \pi_h p \, ds \\ (divv, \pi_h p) &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

cela implique

$$(divv, p) = (divv, \pi_h p) + (divv, (I - \pi_h)p) = (divv, (I - \pi_h)p).$$

D'autre part

$$(divv_M, (I - \pi_h)p)_M \geq c_1 \|(I - \pi_h)p\|_{0,M}^2$$

cela implique que

$$(divv, (I - \pi_h)p) \geq c_1 \|(I - \pi_h)p\|_0^2$$

d'où: (2.11a).

De plus,

$$|v_M|_{1,M} \leq \|(I - \pi_h)p\|_{0,M} \Rightarrow |v|_1 \leq \|(I - \pi_h)p\|_0$$

d'où (2.11b).

Mais puisque $\pi_h p \in L_0^2(\Omega)$, alors d'après le lemme 1 il existe $z \in (H_0^1(\Omega))^d$ tq :

$$\begin{cases} div z = \pi_h p \dots (2.13a), \\ |z|_1 \leq c \|\pi_h p\|_0, c > 0 \dots (2.13b). \end{cases}$$

De plus ,d'après Stenberg [27] ,Nafa-Thatcher [20],[21] il existe un opérateur:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_h : (H_0^1(\Omega))^d \longrightarrow V_h \text{ tq :} \\ (div I_h z, \mu) = (div z, \mu), \forall \mu \in D_h \dots \dots (2.14a) \\ \text{et } |I_h z|_1 \leq c' |z|_1, c' > 0 \dots \dots (2.14b) \end{array} \right.$$

ainsi ,en prenant $g = I_h z \dots \dots (2.15)$ on aura:

$$(div g, \pi_h p) = (div I_h z, \pi_h p) = (div z, \pi_h p) = (\pi_h p, \pi_h p)$$

i e $(div g, \pi_h p) = \|\pi_h p\|_0^2$ d'où (2.12a).De plus ,en tenant compte de (2.13),(2.14) et (2.15) on aura:

$$|g|_1 = |I_h z|_1 \leq c' |z|_1 \leq c' c \|\pi_h p\|_0 = c_2 \|\pi_h p\|_0$$

d'où (2.12b).Soit maintenant $w = v + \delta g \in V_h$ où:

$$\delta = \frac{2c_1}{1 + c_3^2}, c_3 = dc_2$$

et v, g sont comme dans (2.11) et (2.12) alors:

$$\begin{aligned} (div w, p) &= (div v, p) + \delta (div g, p) \\ (div w, p) &\geq c_1 \|(I - \pi_h)p\|_0^2 + (div g, \pi_h p) + \delta (div g, (I - \pi_h)p) \\ (div w, p) &\geq c_1 \|(I - \pi_h)p\|_0^2 + \delta \|\pi_h p\|_0^2 - d\delta |g|_1 \|(I - \pi_h)p\|_0 \\ (div w, p) &\geq c_1 \|(I - \pi_h)p\|_0^2 + \delta \|\pi_h p\|_0^2 - dc_2 \delta \|\pi_h p\|_0 \|(I - \pi_h)p\|_0 \\ (div w, p) &= c_1 \|(I - \pi_h)p\|_0^2 + \delta \|\pi_h p\|_0^2 - c_3 \delta \|\pi_h p\|_0 \|(I - \pi_h)p\|_0 \\ (div w, p) &\geq (c_1 - \frac{\delta c_3^2}{2}) \|(I - \pi_h)p\|_0^2 + \frac{\delta}{2} \|\pi_h p\|_0^2 \end{aligned}$$

mais:

$$\frac{\delta}{2} = (c_1 - \frac{\delta c_3^2}{2})$$

d'où:

$$(div w, p) \geq \frac{\delta}{2} (\|(I - \pi_h)p\|_0^2 + \|\pi_h p\|_0^2) = \frac{\delta}{2} \|p\|_0^2$$

on a aussi:

$$|w|_1 \leq \|(I - \pi_h)p\|_0 + \delta c_2 \|\pi_h p\|_0 \leq (1 + \delta c_2) \|p\|_0$$

d'où:

$$\frac{(div w, p)}{|w|_1} \geq \frac{\delta}{2(1 + \delta c_2)} \|p\|_0$$

donc:

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(div v, p)}{|v|_1} \geq \beta \|p\|_0, \forall p \in Q_h$$

avec:

$$\beta = \frac{\delta}{2(1 + \delta c_2)}.$$

C.Q.F.D

Remarque 11 : Dans Stenberg [27] l'opérateur I_h est construit seulement au cas de dimension deux, mais comme il à été remarqué par Clément [9] et Stenberg [27] le résultat reste valable pour le cas de dimension trois voir Nafa-Thacher [20],[21], Girault-Raviart [15].

* $|\cdot|_{1,M}$ désigne la norme de l'espace $(H_0^1(M))^d$.

* $\|\cdot\|_{0,M}$ désigne la norme de l'espace $L^2(M)$.

* $(\cdot, \cdot)_M$ désigne le produit scalaire de $L^2(M)$.

2.1.1 Application à la construction d'éléments stables:

L'élément $Q_1-P_1(\frac{h}{2}, h)$ en dimension 2: Soit τ_h une partition régulière de Ω par des quadrilatères convexes et introduisons la partition $\tau_{\frac{h}{2}}$ on subdivisons chaque $K \in \tau_h$ à 4 petites quadrilatères voir fig (9)

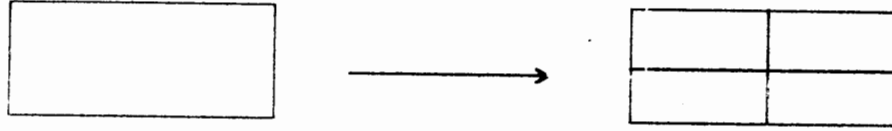


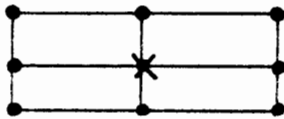
fig 9

Choisissons:

$$V_h = \{v \in ((H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in (Q_1(K))^2, \forall K \in \tau_{\frac{h}{2}}\} \dots (2.16),$$

$$Q_h = \{q \in (L_0^2(\Omega) \mid q|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\} \dots (2.17).$$

Pour ce choix on a les noeuds représentés comme dans la fig(10).



● noeud de vitesse
 ✕ noeud de pression (trois degrés de liberté)

fig 10

Choisissons $M_h = \tau_h$ c'est à dire chaque macro-élément $M \in M_h$ est constitué d'un seul élément de τ_h , i.e de 4 petites éléments de $\tau_{\frac{h}{2}}$.

Soit M un macro-élément, $M = K$, $K \in \tau_h$ et définissons:

$$V_{0,M} = \{v \in ((H_0^1(M) \cap C(\bar{M}))^2 \mid v|_{K_i} \in (Q_1(K_i))^2, \forall K_i \subset K, i = 1, \dots, 4) \dots (2.18)$$

$$Q_M = \{q \in (L^2(M) \cap C(\bar{M})) \mid q|_K \in P_1(K)\} \dots (2.19)$$

$$N_M = \{q \in Q_M \mid (div v, q)_M = 0, \forall v \in V_{0,M}\} \dots (2.20)$$

Remarque 12 : Pour la partition M_h ainsi construite on a une seule classe d'équivalence les conditions CM1 et CM3 sont satisfaites donc pour montrer que la paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup (1.47) on doit vérifier la condition CM2 c'est -a- dire on doit montrer que N_M est constitué de fonctions constantes .Ceci est donné par le lemme suivant:

Lemme 3 : Soit M un macro-élément du type précédent , alors N_M est de dimension un constitué de fonctions constantes sur M .

Démonstration : soit $\hat{M}$ le macro-élément de référence et $F = (F_1, F_2)$ l'application bijective continue ,bilinéaire de $\hat{M}$ dans M voir fig(11):

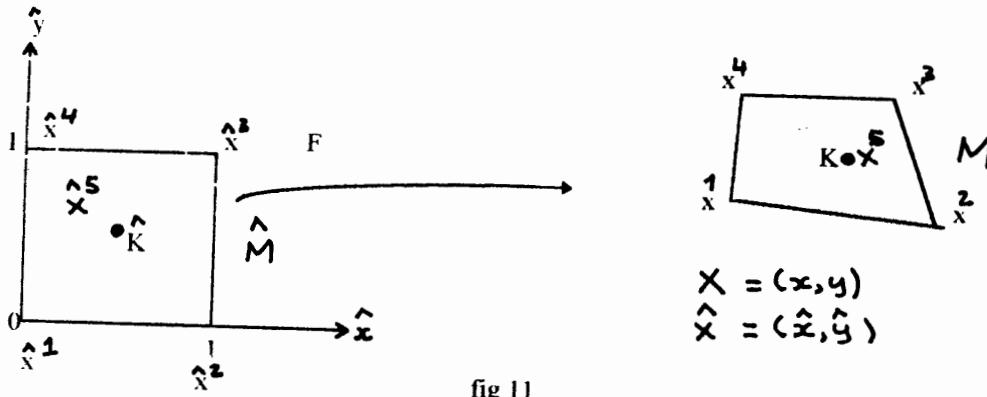


fig 11

Définissons: $\hat{u}(\hat{X}) = u(F(\hat{X}))$ et $\hat{p}(\hat{X}) = p(F(\hat{X}))$, pour $u \in V_{0,M}$ et $p \in Q_M$, on peut écrire:

$$(div u, p)_M = -(u, \nabla p)_M = - \int_{\hat{M}} \hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \left| J_F(\hat{X}) \right| d\hat{X}$$

où: J_F est la matrice jacobienne de F et J_F^{-T} est le transposé de J_F^{-1} , $|J_F|$ le déterminant de J_F .

on a: $\hat{M} = \cup_{i=1}^4 \hat{K}_i$, $K_i \in \tau_{h/2}$. F est bilinéaire i.e

$$F = (F_1, F_2) \text{ et } F_i(\hat{X}) = a_i + b_i \hat{x} + c_i \hat{y} + d_i \hat{x}\hat{y}, i = 1, 2, \dots (2.21)$$

$$J_F(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(\hat{X}) & \partial_2 F_1(\hat{X}) \\ \partial_1 F_2(\hat{X}) & \partial_2 F_2(\hat{X}) \end{bmatrix}$$

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_2 F_2(\hat{X}) & -\partial_1 F_2(\hat{X}) \\ -\partial_2 F_1(\hat{X}) & \partial_1 F_1(\hat{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 + d_2 \hat{x} & -b_2 - d_2 \hat{y} \\ -c_1 - d_1 \hat{x} & b_1 + d_1 \hat{y} \end{bmatrix}$$

p est linéaire i.e

$$\hat{p}(\hat{X}) = a + b \hat{x} + c \hat{y} \dots (2.22a), \nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \dots (2.22b)$$

d'où:

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} c_2 + d_2 \hat{x} & -b_2 - d_2 \hat{y} \\ -c_1 - d_1 \hat{x} & b_1 + d_1 \hat{y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

qui s'écrit sous la forme:

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_1 \hat{x} + C_1 \hat{y} \\ A_2 + B_2 \hat{x} + C_2 \hat{y} \end{pmatrix} \in (P_1(M))^2$$

De plus, sur chaque $\hat{K}_i$ on a:

$$\hat{u}^T(\hat{X}) = \begin{pmatrix} a_1^i + b_1^i \hat{x} + c_1^i \hat{y} + d_1^i \hat{x}\hat{y} & a_2^i + b_2^i \hat{x} + c_2^i \hat{y} + d_2^i \hat{x}\hat{y} \end{pmatrix}$$

ainsi

$$(\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \left| J_F(\hat{X}) \right|) \big|_{\hat{K}_i}$$

s'écrit sous la forme:

$$A + B \hat{x} + C \hat{y} + D \hat{x}\hat{y} + E \hat{x}^2 + F \hat{y}^2 + G \hat{x}^2\hat{y} + H \hat{x}\hat{y}^2$$

i.e: $(\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \left| J_F(\hat{X}) \right|) \big|_{\hat{K}_i} \in Q_2(\hat{K}_i)$.

De plus, $(\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \left| J_F(\hat{X}) \right|)$ est continue sur $\hat{M}$. Donc la formule de Simpson donne la valeur exacte de l'intégrale

$$\int_{\hat{M}} \hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \left| J_F(\hat{X}) \right| d\hat{X}$$

* Soit $p \in V_M$, et choisissons $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point $\hat{X}^5$ où $\hat{X}^5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ainsi la condition $(div u, p)_M = 0$ donne:

$$J_F^{-T}(\hat{X}^5) \nabla \hat{p}(\hat{X}^5) \left| J_F(\hat{X}^5) \right| = 0$$

puisque $\left| J_F(\hat{X}^5) \right| \neq 0$ cela implique que

$$\nabla \hat{p}(\hat{X}^5) = 0 \text{ i.e : } \nabla \hat{p}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e $b = c = 0$, en remplaçant dans (2.22a) on aura $\hat{p}(\hat{X}) = a$, donc p est constant sur M .

C.Q.F.D.

Ainsi, les conditions CM1, CM2 et CM3 sont satisfaites et donc le théorème (4) assure que la paire (V_h, Q_h) données par (2.16) et (2.17) est stable. donc pour cet élément on a les estimations d'erreurs (1.46), (1.47).

l'élément $Q_1-P_1(\frac{h}{2}, h)$ en dimension 3: Soit τ_h une partition régulière de Ω par des hexaèdres convexes et introduisons la partition $\tau_{\frac{h}{2}}$ on subdivisons chaque $K \in \tau_h$ à 8 petites hexaèdres fig(12)

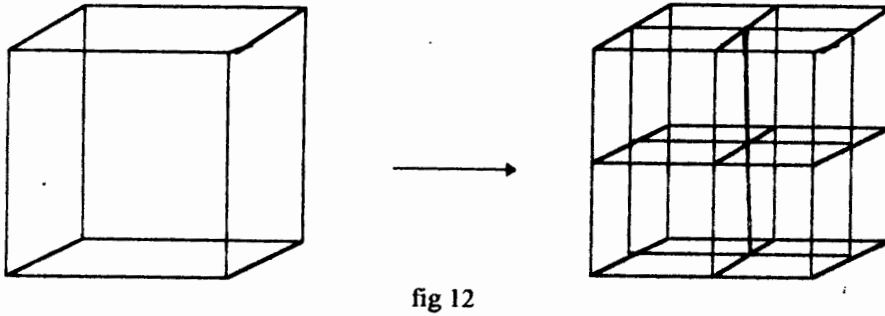


fig 12

Choisissons:

$$V_h = \{v \in ((H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^3 \mid v|_K \in (Q_1(K))^3, \forall K \in \tau_{\frac{h}{2}})\} \dots (2.23)$$

$$Q_h = \{q \in (L_0^2(\Omega) \mid q|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h)\} \dots (2.24)$$

Pour ce choix on a les noeuds représentés comme dans la fig(13)

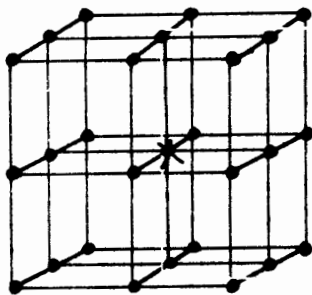


fig 13

● noeud de vitesse

x noeud de pression (quatre degrés de liberté)

Choisissons $M_h = \tau_h$ c'est à dire chaque macro-élément $M \in M_h$ est constitué d'un seul élément de τ_h , i.e de 8 petites éléments de $\tau_{\frac{h}{2}}$. Soit M un macro-élément, $M = K, K \in$

τ_h et définissons:

$$V_{0,M} = \{v \in ((H_0^1(M) \cap C(\bar{M}))^3 \mid v|_{K_i} \in (Q_1(K_i))^3, \forall K_i \subset K, i = 1, \dots, 8) \dots (2.25)$$

$$Q_M = \{q \in (L^2(M) \cap C(\bar{M})) \mid q|_K \in P_1(K)\} \dots (2.26)$$

$$N_M = \{q \in Q_M \mid (\text{div} v, q)_M = 0, \forall v \in V_{0,M}\} \dots (2.27)$$

Remarque 13 : Pour la partition M_h ainsi construite on a une seule classe d'équivalence, les conditions CM1 et CM3 sont satisfaites donc pour déduire que la paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup (1.47) on doit seulement vérifier la condition CM2 i.e on doit montrer que N_M est constitué de fonctions constantes. Ceci est donné par le lemme suivant:

Lemme 4 : Soit M un macro-élément du type précédent, alors N_M est de dimension un constitué de fonctions constantes sur M .

Démonstration : soit $\hat{M}$ le macro-élément de référence et $F = (F_1, F_2, F_3)$ l'application bijective, continue, trilineaire de $\hat{M}$ dans M voir fig (14)

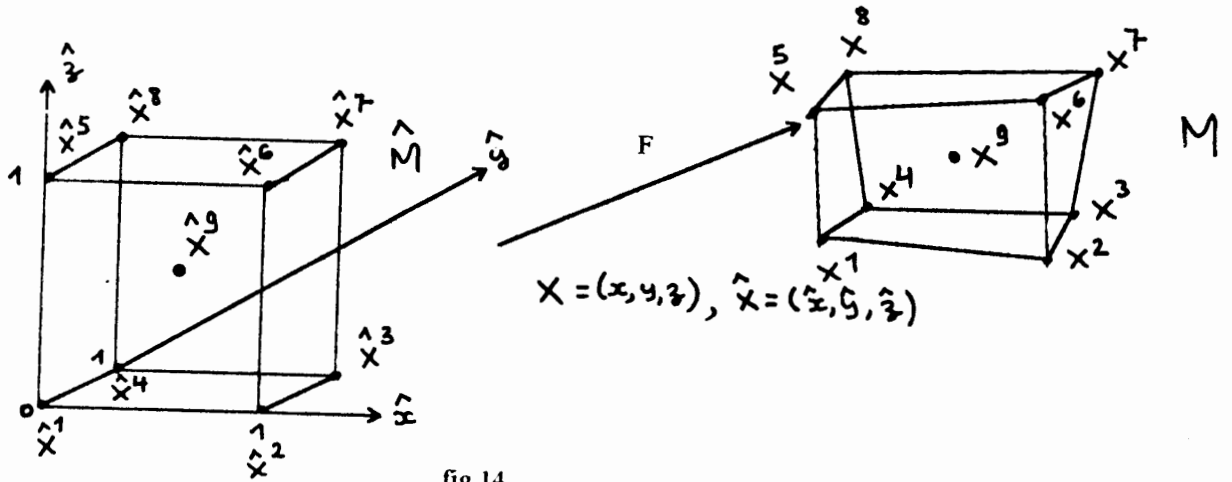


fig 14

Définissons $\hat{u}(\hat{X}) = u(F(\hat{X}))$ et $\hat{p}(\hat{X}) = p(F(\hat{X}))$, pour $u \in V_{0,M}$ et $p \in Q_M$, on peut écrire:

$$(\text{div} u, p)_M = -(u, \nabla p)_M = - \int_{\hat{M}} \hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) |J_F(\hat{X})| d\hat{X} \dots (2.28)$$

où: J_F est la matrice jacobienne de F et J_F^{-T} est le transposé de J_F^{-1} , $|J_F|$ le déterminant de J_F .

on a: $\hat{M} = \cup_{i=1}^8 \hat{K}_i$, $K_i \in \tau_h$, F est trilineaire i.e:

$$F = (F_1, F_2, F_3)$$

$$F_i(\hat{X}) = a_i + b_i \hat{x} + c_i \hat{y} + d_i \hat{z} + e_i \hat{x}\hat{y} + f_i \hat{x}\hat{z} + g_i \hat{y}\hat{z} + h_i \hat{x}\hat{y}\hat{z}, i = 1, 2, 3 \dots (2.29)$$

$$J_F(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(\hat{X}) & \partial_2 F_1(\hat{X}) & \partial_3 F_1(\hat{X}) \\ \partial_1 F_2(\hat{X}) & \partial_2 F_2(\hat{X}) & \partial_3 F_2(\hat{X}) \\ \partial_1 F_3(\hat{X}) & \partial_2 F_3(\hat{X}) & \partial_3 F_3(\hat{X}) \end{bmatrix}$$

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) = \alpha(\hat{X}) \text{ où:}$$

$$\alpha(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_2 F_2 \partial_3 F_3 - \partial_2 F_3 \partial_3 F_2 & \partial_1 F_3 \partial_3 F_2 - \partial_1 F_2 \partial_3 F_3 & \partial_1 F_2 \partial_2 F_3 - \partial_1 F_3 \partial_2 F_2 \\ \partial_2 F_3 \partial_3 F_1 - \partial_2 F_1 \partial_3 F_3 & \partial_1 F_1 \partial_3 F_3 - \partial_1 F_3 \partial_3 F_1 & \partial_1 F_3 \partial_2 F_1 - \partial_1 F_1 \partial_2 F_3 \\ \partial_2 F_1 \partial_3 F_2 - \partial_2 F_2 \partial_3 F_1 & \partial_1 F_2 \partial_3 F_1 - \partial_1 F_1 \partial_3 F_2 & \partial_1 F_1 \partial_2 F_2 - \partial_1 F_2 \partial_2 F_1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$\alpha(\hat{X}) = (\alpha_{i,j}(\hat{X}))_{i,j=1,2,3}$ où les composantes s'écrivent sous les formes suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(\hat{X}) &= a_{11} + b_{11} \hat{x} + c_{11} \hat{y} + d_{11} \hat{z} + e_{11} \hat{x}\hat{y} + f_{11} \hat{x}\hat{z} + g_{11} \hat{x}^2 + h_{11} \hat{x}\hat{y}^2 + i_{11} \hat{x}\hat{z}^2 \\ \alpha_{12}(\hat{X}) &= a_{12} + b_{12} \hat{x} + c_{12} \hat{y} + d_{12} \hat{z} + e_{12} \hat{x}\hat{y} + f_{12} \hat{y}\hat{z} + g_{12} \hat{y}^2 + h_{12} \hat{x}\hat{y}^2 + i_{12} \hat{y}\hat{z}^2 \\ \alpha_{13}(\hat{X}) &= a_{13} + b_{13} \hat{x} + c_{13} \hat{y} + d_{13} \hat{z} + e_{13} \hat{x}\hat{z} + f_{13} \hat{y}\hat{z} + g_{13} \hat{z}^2 + h_{13} \hat{x}\hat{z}^2 + i_{13} \hat{y}\hat{z}^2 \\ \alpha_{21}(\hat{X}) &= a_{21} + b_{21} \hat{x} + c_{21} \hat{y} + d_{21} \hat{z} + e_{21} \hat{x}\hat{y} + f_{21} \hat{x}\hat{z} + g_{21} \hat{x}^2 + h_{21} \hat{x}\hat{y}^2 + i_{21} \hat{x}\hat{z}^2 \\ \alpha_{22}(\hat{X}) &= a_{22} + b_{22} \hat{x} + c_{22} \hat{y} + d_{22} \hat{z} + e_{22} \hat{x}\hat{y} + f_{22} \hat{y}\hat{z} + g_{22} \hat{y}^2 + h_{22} \hat{x}\hat{y}^2 + i_{22} \hat{y}\hat{z}^2 \quad \dots (2.31) \\ \alpha_{23}(\hat{X}) &= a_{23} + b_{23} \hat{x} + c_{23} \hat{y} + d_{23} \hat{z} + e_{23} \hat{x}\hat{z} + f_{23} \hat{y}\hat{z} + g_{23} \hat{z}^2 + h_{23} \hat{x}\hat{z}^2 + i_{23} \hat{y}\hat{z}^2 \\ \alpha_{31}(\hat{X}) &= a_{31} + b_{31} \hat{x} + c_{31} \hat{y} + d_{31} \hat{z} + e_{31} \hat{x}\hat{y} + f_{31} \hat{x}\hat{z} + g_{31} \hat{x}^2 + h_{31} \hat{x}\hat{y}^2 + i_{31} \hat{x}\hat{z}^2 \\ \alpha_{32}(\hat{X}) &= a_{32} + b_{32} \hat{x} + c_{32} \hat{y} + d_{32} \hat{z} + e_{32} \hat{x}\hat{y} + f_{32} \hat{y}\hat{z} + g_{32} \hat{y}^2 + h_{32} \hat{x}\hat{y}^2 + i_{32} \hat{y}\hat{z}^2 \\ \alpha_{33}(\hat{X}) &= a_{33} + b_{33} \hat{x} + c_{33} \hat{y} + d_{33} \hat{z} + e_{33} \hat{x}\hat{z} + f_{33} \hat{y}\hat{z} + g_{33} \hat{z}^2 + h_{33} \hat{x}\hat{z}^2 + i_{33} \hat{y}\hat{z}^2 \end{aligned}$$

p est lineaire i.e:

$$\hat{p}(\hat{X}) = a + b \hat{x} + c \hat{y} + d \hat{z} \dots (2.32a)$$

$$\nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} \dots (2.32b)$$

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} R_1(\hat{X}) \\ R_2(\hat{X}) \\ R_3(\hat{X}) \end{bmatrix} \text{ où:}$$

$$\begin{aligned} R_i(\hat{X}) &= A_i + B_i \hat{x} + C_i \hat{y} + D_i \hat{z} + E_i \hat{x}\hat{y} + \\ &+ F_i \hat{x}\hat{z} + G_i \hat{y}\hat{z} + H_i \hat{x}^2 + I_i \hat{y}^2 + J_i \hat{z}^2 + \\ &+ K_i \hat{x}\hat{y}^2 + L_i \hat{x}\hat{z}^2 + M_i \hat{x}\hat{y}\hat{z} + N_i \hat{y}\hat{z}^2 + \\ &+ O_i \hat{x}\hat{z}^2 + P \hat{y}\hat{z}^2, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

c'est -a -dire : $\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \in (Q_2(\hat{M}))^3$. De plus, sur chaque $\hat{K}_i$ on a:

$$\hat{u}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} a_1^i + b_1^i \hat{x} + c_1^i \hat{y} + d_1^i \hat{z} + e_1^i \hat{x}\hat{y} + f_1^i \hat{x}\hat{z} + g_1^i \hat{y}\hat{z} + h_1^i \hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ a_2^i + b_2^i \hat{x} + c_2^i \hat{y} + d_2^i \hat{z} + e_2^i \hat{x}\hat{y} + f_2^i \hat{x}\hat{z} + g_2^i \hat{y}\hat{z} + h_2^i \hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ a_3^i + b_3^i \hat{x} + c_3^i \hat{y} + d_3^i \hat{z} + e_3^i \hat{x}\hat{y} + f_3^i \hat{x}\hat{z} + g_3^i \hat{y}\hat{z} + h_3^i \hat{x}\hat{y}\hat{z} \end{bmatrix}$$

Ainsi; $(\hat{u}^T(\hat{X})J_F^{-T}(\hat{X})\nabla \hat{p}(\hat{X})|J_F(\hat{X})|)|_{\hat{K}_i}$ est un polynôme qui appartient à $Q_3(\hat{K}_i)$ de plus, $\hat{u}^T(\hat{X})J_F^{-T}(\hat{X})\nabla \hat{p}(\hat{X})|J_F(\hat{X})|$ est continue sur $\hat{M}=\hat{K}$ donc la formule de Simpson donne la valeur exacte de l'intégrale

$$\int_{\hat{M}} \hat{u}^T(\hat{X})J_F^{-T}(\hat{X})\nabla \hat{p}(\hat{X})|J_F(\hat{X})| d\hat{X}$$

soit $p \in N_M$ et $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point X^9 où: $X^9 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ainsi la condition $(div u, p)_M = 0$ implique:

$$J_F(\hat{X}^9)\nabla \hat{p}(\hat{X}^9)|J_F(\hat{X}^9)| = 0$$

puisque: $|J_F(\hat{X}^9)| \neq 0$ cela donne: $\nabla \hat{p}(\hat{X}^9) = 0$ i.e $\nabla \hat{p}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ c'est à-dire:

$$\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

cela implique que $b = c = d = 0$. En remplaçant dans (2.32a) on aura : $\hat{p}(\hat{X}) = a$, donc p est constant sur M .

C.Q.F.D

Ainsi, les conditions CM1, CM2 et CM3 sont satisfaites et donc le théorème 4 assure que la paire (V_h, Q_h) donnée par (2.23) et (2.24) est stable.

2.2 Technique des macro-éléments avec éléments communs:

Dans ce cas on exige pas que chaque $K \in \tau_h$ appartienne à un seul macro-élément de plus on fait une restriction à la définition d'un macro élément, c'est à dire on désigne par un macro élément l'union de deux éléments au moins.

Avant de donné un lemme analogue au lemme 2, introduisons une norme sur Q_h qui dépend du maillage, pour cela on désigne par Γ_h la collection des cotés (faces) des éléments de τ_h qui n'appartiennent pas à $\partial\Omega$. Ainsi, on peut montrer que:

$$\|p\|_h = (\sum_{K \in \tau_h} h_K^2 \|\nabla p\|_{0,K}^2 + \sum_{T \in \Gamma_h} h_T \int_T |[p]|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \dots (2.33)$$

est une norme sur Q_h où h_T désigne la longueur (la surface) de T et $[p]$ le saut de p le long de T i.e:

$$[p] = p^+ - p^-.$$

Il est évident que:

$$\begin{aligned} \|p + p'\|_h &\leq \|p\|_h + \|p'\|_h \\ \|\lambda p\|_h &= |\lambda| \|p\|_h \\ p = 0 &\implies \|p\|_h = 0 \end{aligned}$$

il nous reste seulement qu'à montrer que $\|p\|_h = 0 \implies p = 0$.

$\|p\|_h = 0$ donne:

$$\begin{aligned} \|\nabla p\|_{0,K} &= 0, \forall K \in \tau_h \\ \text{et } \int_T |[p]|^2 ds &= 0, \forall T \in \Gamma_h \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} \nabla p &= 0, \forall K \in \tau_h \\ \text{et } p^+ - p^- &= 0, \forall T \in \Gamma_h \end{aligned}$$

donc p est constant sur Ω , i.e $p = c$, c constante.

Mais $Q_h \subset L_0^2(\Omega)$ d'où:

$$\int_{\Omega} p d\Omega = \int_{\Omega} c d\Omega = 0 \implies c = 0 \implies p = 0$$

i.e: $\|\cdot\|_h$ est une norme sur Q_h . De même définissons sur Q_M la semi norme:

$$|p|_M = \left(\sum_{K \in \mathcal{M}} h_K^2 \|\nabla p\|_{0,K}^2 + \sum_{T \in \Gamma_M} h_T \int_T |[p]|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \dots (2.34)$$

où: $\Gamma_M = \{T \subset M \mid T \notin \partial M\}$.

Lemme 5 : Supposons, que pour chaque $M \in \xi_M^\wedge$ l'espace N_M est de dimension un constitué de fonctions constantes sur M . Alors, il existe une constante positive $c_M^\wedge$ tq:

$$\sup_{0 \neq v \in V_{0,M}} \frac{(\text{div} v, p)}{|v|_{1,M}} \geq c_M^\wedge |p|_M, \forall p \in Q_M \dots (2.35)$$

pour chaque $M \in \xi_M^\wedge$.

La démonstration est analogue à celle du lemme 2.

Donnons maintenant le résultat essentiel de cette technique.

Theoreme 5 : supposons, que les éléments de τ_h peuvent être regrouper pour former une partition M_h de macro-éléments, qu'on a un nombre fini de classes d'équivalences $\xi_{M_i}^\wedge, i = 1, \dots, n$ et qu'il existe un entier $L > 0$ tel que:

CM1: $\forall M \in \xi_{M_i}^\wedge, i = 1, \dots, n, N_M$ est de dimension 1 constitué de fonctions constantes sur M .

CM2: chaque M de M_h appartient à une classe $\xi_{M_i}^\wedge, i = 1, \dots, n$.

CM3: chaque T de Γ_h est un côté (face) intérieur au moins d'un macro-élément et pas plus de L macro-éléments.

CM4: chaque K de τ_h est contenue dans un macro-élément et pas plus de L macro éléments. Alors, la condition de stabilité (1.47) est satisfaite. i.e il existe une constante positive β indépendante de h tq:

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\text{div} v, p)}{|v|_1} \geq \beta \|p\|_0, \forall p \in Q_h.$$

Démonstration : Soit $p \in Q_h$, la condition de stabilité locale (2.35) implique que pour chaque $M \in M_h$, il existe $v_M \in V_h$ tq: $v_M = 0$ sur $\Omega - M$, et vérifiant les conditions:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} v_M, p) &= (\operatorname{div} v_M, p)_M \geq c |p|_M^2 \\ \text{et : } |v_M|_1 &= |v_M|_{1,M} \leq |p|_M \end{aligned}$$

où

$$c = \min \{c_{M,i}, i = 1, \dots, n\}$$

posons

$$v = \sum_{M \in M_h} v_M, v|_M = v_M.$$

on obtient

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} v, p) &= \sum_{M \in M_h} (\operatorname{div} v_M, p)_M \geq c \sum_{M \in M_h} |p|_M^2 \geq c \|p\|_h^2 \\ \text{et } |v|_1 &\leq \sum_{M \in M_h} |v_M|_{1,M} \leq \sum_{M \in M_h} |p|_M \leq L \|p\|_h \end{aligned}$$

donc

$$\frac{(\operatorname{div} v, p)}{|v|_1} \geq c_1 \|p\|_h, c_1 = \frac{c}{L}$$

d'où

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v, p)}{|v|_1} \geq c_1 \|p\|_h, \forall p \in Q_h$$

d'où

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(\operatorname{div} v, p)}{|v|_1} \geq c_1 \frac{\|p\|_h}{\|p\|_0} \|p\|_0, \forall p \in Q_h \dots (2.36).$$

De plus la condition inf-sup continue (1.45) implique que pour chaque $p \in Q_h$ il existe $w \in (H_0^1(\Omega))^d$ tel que:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} w, p) &\geq c_2 \|p\|_0^2 \dots (2.37a), c_2 \text{ constante positive} \\ |w|_1 &\leq \|p\|_0 \dots (2.37b). \end{aligned}$$

De plus, d'après Clément [9], Babuska et al [3], Bernardi [4] et Girault Raviart [15] il existe $w^* \in V_h$ un interpolant de w tel que:

$$\left(\sum_{K \in \tau_h} h_K^{-2} \|w - w^*\|_{0,K}^2 + \sum_{T \in \Gamma_h} h_T^{-1} \int_T |w - w^*|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_3 |w|_1 \dots (2.38a)$$

et

$$|w^*|_1 \leq c_4 |w|_1 \dots (2.38b).$$

En tenant compte de (2.33), (2.37) et (2.38) on aura:

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} w^*, p) &= (\operatorname{div}(w^* - w), p) + (\operatorname{div} w, p) \\ (\operatorname{div} w^*, p) &\geq (\operatorname{div}(w^* - w), p) + c_2 \|p\|_0^2 \\ (\operatorname{div} w^*, p) &\geq \sum_{K \in \tau_h} (w - w^*)_K + \sum_{T \in \Gamma_h} \int_T ((w^* - w) \cdot \eta)([p]) ds + c_2 \|p\|_0^2 \\ (\operatorname{div} w^*, p) &\geq -(\sum_{K \in \tau_h} h_K^{-2} \|w - w^*\|_{0,K}^2 + \sum_{T \in \Gamma_h} h_T^{-1} \int_T |w - w^*|^2 ds)^{\frac{1}{2}} \cdot \|p\|_h + c_2 \|p\|_0^2 \\ (\operatorname{div} w^*, p) &\geq -c_3 |w|_1 \|p\|_h + c_2 \|p\|_0^2 \\ (\operatorname{div} w^*, p) &\geq -c_3 \|p\|_0 \|p\|_h + c_2 \|p\|_0^2 \\ (\operatorname{div} w^*, p) &\geq (c_2 \|p\|_0 - c_3 \|p\|_h) \|p\|_0 = (c_2 - c_3 \frac{\|p\|_h}{\|p\|_0}) \|p\|_0^2 \dots (2.39) \end{aligned}$$

mais

$$|w^*|_1 \leq c_4 |w|_1 \leq c_4 \|p\|_0 \dots (2.40)$$

ainsi, (2.39) et (2.40) donnent:

$$\frac{(div w^*, p)}{|w^*|_1} \geq (c_2 - c_3 \frac{\|p\|_h}{\|p\|_0}) \|p\|_0^2 \times \frac{1}{c_4 \|p\|_0}$$

$$\frac{(div w^*, p)}{|w^*|_1} \geq (c_5 - c_6 \frac{\|p\|_h}{\|p\|_0}) \|p\|_0$$

où:

$$c_5 = \frac{c_2}{c_4}, c_6 = \frac{c_3}{c_4}$$

d'où:

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(div v, p)}{|v|_1} \geq (c_5 - c_6 \frac{\|p\|_h}{\|p\|_0}) \|p\|_0 \dots (2.41)$$

En tenant compte de (2.36) et (2.41) on aura:

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(div v, p)}{|v|_1} \geq \max(c_1 \frac{\|p\|_h}{\|p\|_0}, c_5 - c_6 \frac{\|p\|_h}{\|p\|_0}) \|p\|_0$$

d'où

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(div v, p)}{|v|_1} \geq \min_{t>0} \max(c_1 t, c_5 - c_6 t) \|p\|_0$$

Ainsi on a

$$\sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{(div v, p)}{|v|_1} \geq \frac{c_1 c_5}{c_1 + c_6} \|p\|_0, \forall p \in Q_h$$

i.e la condition de stabilité discrete est satisfaite avec la constante:

$$\beta = \frac{c_1 c_5}{c_1 + c_6}$$

C.Q.F.D

2.2.1 Application à la construction d'éléments stables:

L'élément $Q_1 - Q_1(\frac{h}{2}, h)$ en dimension 2: Soit τ_h une partition régulière de Ω par des quadrilatères convexes, introduisons la partition $\tau_{\frac{h}{2}}$ on subdivisons chaque $K \in \tau_h$ à 4 petites quadrilateres voir fig(9), et choisissons:

$$V_h = \{v \in ((H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^2 \mid v|_K \in (Q_1(K))^2, \forall K \in \tau_{\frac{h}{2}}\} \dots (2.42)$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q|_K \in Q_1(K), \forall K \in \tau_h\} \dots (2.43)$$

pour ce choix on a les noeuds représentés comme dans la fig(15).

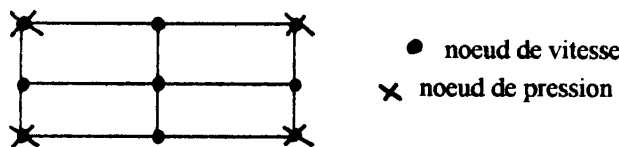


fig 15

Choisissons M_h comme suit:

chaque macro-élément $M \in M_h$ est constitué de deux éléments de τ_h , c'est à dire de 8 petites éléments de $\tau_{\frac{h}{2}}$. Soit M un macro-élément $M = K_1 \cup K_2, K_i \in \tau_h, i = 1, 2$. et $K_i = \cup_{j=1}^4 K_{ij}, K_{ij} \in \tau_{\frac{h}{2}}, i = 1, 2, j = 1, \dots, 4$, définissons:

$$V_{0,M} = \{v \in ((H_0^1(M) \cap C(\bar{M}))^2 \mid v|_{K_{ij}} \in (Q_1(K_{ij}))^2, \forall K_{ij} \subset M, i = 1, 2, j = \overline{1,4}) \dots (2.44)$$

$$Q_M = \{q \in (L^2(M) \cap C(\bar{M})) \mid q|_{K_i} \in Q_1(K_i), \forall K_i \subset M, i = 1, 2\} \dots (2.45)$$

$$N_M = \{q \in Q_M \mid (\text{div} v, q)_M = 0, \forall v \in V_{0,M}\} \dots (2.46)$$

Remarque 14 : Pour la partition M_h ainsi construite on a une seule classe d'équivalence, les conditions CM2, CM3 et CM4 sont satisfaites. Donc pour montrer que la paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup (1.47), on doit vérifier la condition CM1. Ceci est donné par le lemme suivant

Lemme 6 : Soit M un macro-élément du type précédent, alors N_M est de dimension un constitué de fonctions constantes sur M .

Démonstration: Soit $\hat{M} = \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$ le macro-élément de référence et $F = (F_1, F_2)$ l'application bijective, continue et bilinéaire par morceaux de $\hat{M}$ dans M tq:
 $F|_{\hat{K}_i} = F^i, F^i(\hat{K}_i) = K_i, K_i \in \tau_h, \hat{K}_i$ sont des carrés unité voir fig(16)

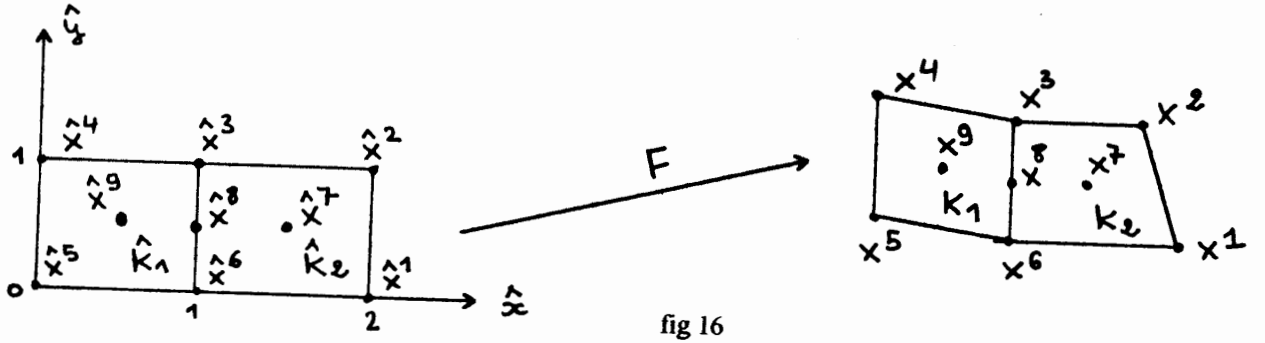


fig 16

$$X = (x, y), \hat{X} = (\hat{x}, \hat{y})$$

Définissons $\hat{u}(\hat{X}) = u(F(\hat{X}))$ et $\hat{p}(\hat{X}) = p(F(\hat{X}))$, pour $u \in V_{0,M}$ et $p \in Q_M$, on peut écrire:

$$(\text{div} u, p)_M = -(u, \nabla p)_M = - \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{K}_i} \hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \left| J_F(\hat{X}) \right| d\hat{X}$$

où: J_F est la matrice jacobienne de F et J_F^{-T} est le transposé de J_F^{-1} , $|J_F|$ le déterminant de J_F . soit: $\hat{K}_i \subset \hat{M}$, $i = 1, 2$, et $\hat{K}_i = \cup_{j=1}^4 \hat{K}_{ij}$, $K_{ij} \in \tau_h$.
 F est bilinéaire, donc

$$F = (F_1, F_2) \text{ et } F_i(\hat{X}) = a_i + b_i \hat{x} + c_i \hat{y} + d_i \hat{x}\hat{y}, i = 1, 2, \dots (2.47)$$

$$J_F(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(\hat{X}) & \partial_2 F_1(\hat{X}) \\ \partial_1 F_2(\hat{X}) & \partial_2 F_2(\hat{X}) \end{bmatrix}$$

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_2 F_2(\hat{X}) & -\partial_1 F_2(\hat{X}) \\ -\partial_2 F_1(\hat{X}) & \partial_1 F_1(\hat{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 + d_2 \hat{x} & -b_2 - d_2 \hat{y} \\ -c_1 - d_1 \hat{x} & b_1 + d_1 \hat{y} \end{bmatrix}$$

p est bilinéaire, donc

$$\begin{cases} \hat{p}(\hat{X}) = a + b \hat{x} + c \hat{y} + d \hat{x}\hat{y} \dots (2.48a) \\ \nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b + d \hat{y} \\ c + d \hat{x} \end{pmatrix} \dots (2.48b) \end{cases}$$

d'où

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} c_2 + d_2 \hat{x} & -b_2 - d_2 \hat{y} \\ -c_1 - d_1 \hat{x} & b_1 + d_1 \hat{y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b + d \hat{y} \\ c + d \hat{x} \end{pmatrix}$$

qui s'écrit de la forme:

$$\begin{pmatrix} A_1 + B_1 \hat{x} + C_1 \hat{y} + D_1 \hat{x}\hat{y} \\ A_2 + B_2 \hat{x} + C_2 \hat{y} + D_2 \hat{x}\hat{y} \end{pmatrix}$$

i.e: $\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{\hat{K}_i} \in (Q_1(\hat{K}_i))^2$. De plus, sur chaque $\hat{K}_{ij}$ on a

$$\hat{u}^T(\hat{X}) = \begin{pmatrix} a_1^{ij} + b_1^{ij} \hat{x} + c_1^{ij} \hat{y} + d_1^{ij} \hat{x}\hat{y} & a_2^{ij} + b_2^{ij} \hat{x} + c_2^{ij} \hat{y} + d_2^{ij} \hat{x}\hat{y} \end{pmatrix}$$

Ainsi: $(\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{J_F(\hat{X})}) \Big|_{\hat{K}_{ij}}$ s'écrit sous la forme

$$A + B \hat{x} + C \hat{y} + D \hat{x}\hat{y} + E \hat{x}^2 + F \hat{y}^2 + G \hat{x}\hat{y}^2 + H \hat{x}\hat{y}^2 + I \hat{x}\hat{y}^2$$

i.e: $(\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{J_F(\hat{X})}) \Big|_{\hat{K}_{ij}} \in Q_2(\hat{K}_{ij})$. De plus,

$(\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{J_F(\hat{X})}) \Big|_{\hat{K}_i}$ est continue sur $\hat{K}_i$. Donc la formule de Simpson donne la valeur exacte de l'intégrale

$$\int_{\hat{K}_i} \hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{J_F(\hat{X})} d\hat{X}, i = 1, 2, K_i \in \tau_h$$

*Soit $p \in N_M$ et choisissons $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u aux points $\overset{7}{X}, \overset{9}{X}$ respectivement où $\overset{7}{X} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, et $\overset{9}{X} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ainsi la condition $(\text{div } u, p)_M = 0$ donne:

$$j_F^{-T}(\overset{i}{X}) \nabla \hat{p}(\overset{i}{X}) \Big|_{J_F(\overset{i}{X})} = 0, i = 7, 9$$

puisque $\Big|J_F(\overset{i}{X})\Big| \neq 0, i = 7, 9$ cela implique que

$$\nabla \hat{p}(\overset{i}{X}) = 0, i = 7, 9 \dots (2.49).$$

Soient $p_i = p(\overset{i}{X}) = \hat{p}(\overset{i}{X})$, $\overset{i}{X} = (x_1^i, x_2^i)$, $i = 1, \dots, 6$ les degrés de libertés pour $p \in N_M$, alors la condition (2.49) implique

$$\begin{cases} p_2 = p_4 = p_6 = \alpha \dots (2.50a), \\ p_1 = p_3 = p_5 = \beta \dots (2.50b). \end{cases}$$

En effet, sur $\hat{K}_1$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(\hat{X}) &= a_1 + b_1 \hat{x} + c_1 \hat{y} + d_1 \hat{x}\hat{y} \\ \nabla \hat{p}_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} b_1 + \frac{d_1}{2} \\ c_1 + \frac{d_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cela donne

$$\begin{cases} b_1 = c_1 \\ d_1 = -2c_1 \end{cases} \dots (*)$$

ainsi, on aura:

$$\begin{cases} p_5 = a_1 \\ p_6 = a_1 + b_1 \\ p_3 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 \\ p_4 = a_1 + c_1 \end{cases} \dots (2*)$$

en tenant compte de (*) et (2*) on aura:

$$\begin{cases} p_5 = p_3 \dots (2.51a) \\ p_4 = p_6 \dots (2.51b) \end{cases}$$

De même, sur $\hat{K}_2$:

$$\begin{aligned} \hat{p}_2(\hat{X}) &= a_2 + b_2 \hat{x} + c_2 \hat{y} + d_2 \hat{x}\hat{y} \\ \nabla \hat{p}_2(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} b_2 + \frac{d_2}{2} \\ c_2 + \frac{3d_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

cela donne:

$$\begin{cases} d_2 = -2b_2 \\ c_2 = 3b_2 \end{cases} \dots (3*)$$

Ainsi, on aura:

$$\begin{cases} p_6 = a_2 + b_2 \\ p_1 = a_2 + 2b_2 \\ p_2 = a_2 + 2b_2 + c_2 + 2d_2 \\ p_3 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \end{cases} \dots (4*)$$

En tenant compte de (3*) et (4*) on aura:

$$p_6 = p_2 \dots (2.52a)$$

$$p_1 = p_3 \dots (2.52b)$$

d'où, (2.51) et (2.52) donnent:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = p_5 \\ p_2 = p_4 = p_6 \end{cases}$$

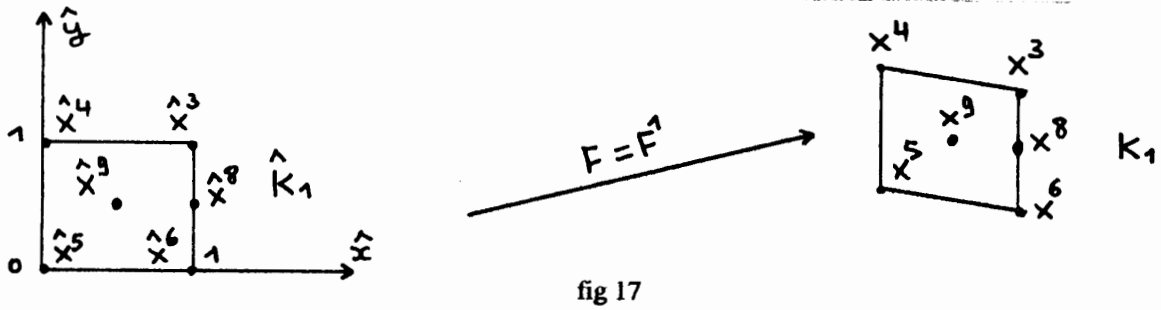
Pour montrer que N_M est constitué des fonctions constantes sur M , il nous reste qu'à montrer que $\alpha = \beta$, pour cela soit $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point $\hat{X}^8$ où $\hat{X}^8 = (1, \frac{1}{2})$. Ainsi, la condition : $(div u, p)_M = 0$ donne:

$$\hat{u}^T(\hat{X}^8) \{ (J_F^{-T}(\hat{X}^8) \nabla \hat{p}(\hat{X}^8) | J_F(\hat{X}^8)) |_{\hat{K}_1} + (J_F^{-T}(\hat{X}^8) \nabla \hat{p}(\hat{X}^8) | J_F(\hat{X}^8)) |_{\hat{K}_2} \} = 0 \dots (2.53)$$

Pour $u(\hat{X}^8) = \hat{u}(\hat{X}^8) = \overline{\hat{X}^6 \hat{X}^3}$ i.e $\hat{u}(\hat{X}^8) = \begin{pmatrix} x_1^3 - x_1^6 \\ x_2^3 - x_2^6 \end{pmatrix}$ on a:

$$(J_F^{-1}(\hat{X}^8) u(\hat{X}^8)) |_{\hat{K}_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots (2.54).$$

En effet: sur $\hat{K}_1$: voir fig (17):



F est bilinéaire i.e

$$F = (F_1, F_2) \text{ et } F_i(\hat{X}) = a_i + b_i \hat{x} + c_i \hat{y} + d_i \hat{x}\hat{y}, i = 1, 2, \dots (2.55)$$

et

$$\begin{cases} F_i(0,0) = a_i = x_i^5 \\ F_i(1,0) = a_i + b_i = x_i^6 \\ F_i(0,1) = a_i + c_i = x_i^4 \\ F_i(1,1) = a_i + b_i + c_i + d_i = x_i^3 \end{cases}, i = 1, 2$$

de ces équations on tire

$$\begin{cases} a_i = x_i^5 \\ b_i = x_i^6 - x_i^5 \\ c_i = x_i^4 - x_i^5 \\ d_i = x_i^3 - x_i^6 + x_i^5 - x_i^4 \end{cases}, i = 1, 2, \dots (2.56)$$

soit

$$J_F^{-1}(\hat{X}) = \frac{1}{|J_F(\hat{X})|} \begin{bmatrix} \partial_2 F_2(\hat{X}) & -\partial_1 F_1(\hat{X}) \\ -\partial_1 F_2(\hat{X}) & \partial_1 F_1(\hat{X}) \end{bmatrix} = \frac{1}{|J_F(\hat{X})|} \gamma(\hat{X})$$

$$|J_F(\hat{X})| = \partial_1 F_1(\hat{X}) \partial_2 F_2(\hat{X}) - \partial_1 F_2(\hat{X}) \partial_2 F_1(\hat{X})$$

$$\begin{aligned} |J_F(\hat{X})| &= [x_1^6 - x_1^5 + (x_1^3 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^4) \hat{y}] \\ &\quad \times [x_2^4 - x_2^5 + (x_2^3 - x_2^6 + x_2^5 - x_2^4) \hat{x}] \\ &\quad - [x_2^6 - x_2^5 + (x_2^3 - x_2^6 + x_2^5 - x_2^4) \hat{y}] \\ &\quad \times [x_1^4 - x_1^5 + (x_1^3 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^4) \hat{x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J_F(1, \frac{1}{2})| &= [x_1^6 - x_1^5 + \frac{1}{2}(x_1^3 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^4)][x_2^3 - x_2^6] - \\ &\quad - [x_2^6 - x_2^5 + \frac{1}{2}(x_2^3 - x_2^6 + x_2^5 - x_2^4)][x_1^3 - x_1^6] \end{aligned}$$

$$\gamma(\hat{X}) = \begin{bmatrix} x_2^4 - x_2^5 + (x_2^3 - x_2^6 + x_2^5 - x_2^4) \hat{x} & -[x_1^4 - x_1^5 + (x_1^3 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^4) \hat{x}] \\ -[x_2^6 - x_2^5 + (x_2^3 - x_2^6 + x_2^5 - x_2^4) \hat{y}] & x_1^6 - x_1^5 + (x_1^3 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^4) \hat{y} \end{bmatrix}$$

d'où

$$\gamma(1, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} x_2^3 - x_2^6 & -(x_1^3 - x_1^6) \\ -[x_2^6 - x_2^5 + \frac{1}{2}(x_2^3 - x_2^6 + x_2^5 - x_2^4)] & x_1^6 - x_1^5 + \frac{1}{2}(x_1^3 - x_1^6 + x_1^5 - x_1^4) \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$\gamma(1, \frac{1}{2}) |J_F(1, \frac{1}{2})| = \begin{pmatrix} 0 \\ |J_F(1, \frac{1}{2})| \end{pmatrix}$$

d'où

$$[J_F^{-1}(\hat{X}) u(\hat{X})] |_{\hat{K}_1} = \frac{1}{|J_F(1, \frac{1}{2})|} \begin{pmatrix} 0 \\ |J_F(1, \frac{1}{2})| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De même, sur $\hat{K}_2$ (voir fig (18)):

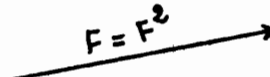
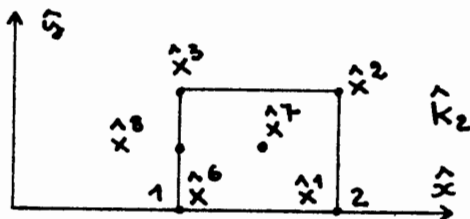
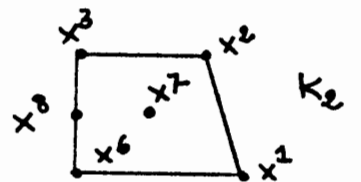


fig 18



F est bilineaire i.e

$$F = (F_1, F_2) \text{ et } F_i(\hat{X}) = a_i + b_i \hat{x} + c_i \hat{y} + d_i \hat{x}\hat{y}, i = 1, 2, \dots (2.57)$$

et

$$\begin{cases} F_i(1, 0) = a_i + b_i = x_i^6 \\ F_i(2, 0) = a_i + 2b_i = x_i^1 \\ F_i(2, 1) = a_i + 2b_i + c_i + 2d_i = x_i^2 \\ F_i(1, 1) = a_i + b_i + c_i + d_i = x_i^3 \end{cases}, i = 1, 2$$

de ces équations on tire:

$$\begin{cases} a_i = 2x_i^6 - x_i^1 \\ b_i = x_i^1 - x_i^6 \\ c_i = 2(x_i^3 - x_i^6) + x_i^1 - x_i^2 \\ d_i = x_i^2 - x_i^3 + x_i^6 - x_i^1 \end{cases}, i = 1, 2, \dots (2.58)$$

soit

$$J_F^{-1}(\hat{X}) = \frac{1}{|J_F(\hat{X})|} \begin{bmatrix} \partial_2 F_2(\hat{X}) & -\partial_1 F_1(\hat{X}) \\ -\partial_1 F_2(\hat{X}) & \partial_1 F_1(\hat{X}) \end{bmatrix} = \frac{1}{|J_F(\hat{X})|} \gamma(\hat{X})$$

$$|J_F(\hat{X})| = \partial_1 F_1(\hat{X}) \partial_2 F_2(\hat{X}) - \partial_1 F_2(\hat{X}) \partial_2 F_1(\hat{X})$$

$$\begin{aligned} |J_F(\hat{X})| &= [x_1^1 - x_1^6 + (x_1^2 - x_1^3 + x_1^6 - x_1^1) \hat{y}] \\ &\quad \times [2(x_2^3 - x_2^6) + x_2^1 - x_2^2 + (x_2^2 - x_2^3 + x_2^6 - x_2^1) \hat{x}] \\ &\quad - [x_2^1 - x_2^6 + (x_2^2 - x_2^3 + x_2^6 - x_2^1) \hat{y}] \\ &\quad \times [2(x_1^3 - x_1^6) + x_1^1 - x_1^2 + (x_1^2 - x_1^3 + x_1^6 - x_1^1) \hat{x}] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |J_F(1, \frac{1}{2})| &= [x_1^1 - x_1^6 + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_1^3 + x_1^6 - x_1^1)][x_2^3 - x_2^6] \\ &\quad - [x_2^1 - x_2^6 + \frac{1}{2}(x_2^2 - x_2^3 + x_2^6 - x_2^1)][x_1^3 - x_1^6] \\ \gamma(\hat{X}) &= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\hat{X}) & \gamma_{12}(\hat{X}) \\ \gamma_{21}(\hat{X}) & \gamma_{22}(\hat{X}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(\hat{X}) &= 2(x_2^3 - x_2^6) + x_2^1 - x_2^2 + (x_2^2 - x_2^3 + x_2^6 - x_2^1) \hat{x} \\ \gamma_{12}(\hat{X}) &= -[2(x_1^3 - x_1^6) + x_1^1 - x_1^2 + (x_1^2 - x_1^3 + x_1^6 - x_1^1) \hat{x}] \\ \gamma_{21}(\hat{X}) &= -[x_2^1 - x_2^6 + (x_2^2 - x_2^3 + x_2^6 - x_2^1) \hat{y}] \\ \gamma_{22}(\hat{X}) &= [x_1^1 - x_1^6 + (x_1^2 - x_1^3 + x_1^6 - x_1^1) \hat{y}] \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma(1, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} x_1^3 - x_1^6 \\ x_2^3 - x_2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |J_F(1, \frac{1}{2})| \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$[J_F^{-1}(\hat{X}) u(\hat{X})] |_{\hat{K}_2} = \frac{1}{|J_F(1, \frac{1}{2})|} \begin{pmatrix} 0 \\ |J_F(1, \frac{1}{2})| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En remarque aussi que: $\partial_2 \hat{p}(\hat{X})|_{\hat{K}_1} = \partial_2 \hat{p}(\hat{X})|_{\hat{K}_2} = \partial_2 \hat{p}(\hat{X}) \dots (2.59).$

En effet,

$$\begin{aligned}\partial_2 \hat{p}(\hat{X})|_{\hat{K}_1} &= \partial_2 \hat{p}_1(1, \frac{1}{2}) = c_1 + d_1 = p_5 - p_4 \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{X})|_{\hat{K}_2} &= \partial_2 \hat{p}(1, \frac{1}{2})|_{\hat{K}_2} = c_2 + d_2 = p_5 - p_4\end{aligned}$$

d'où

$$\partial_2 \hat{p}(\hat{X})|_{\hat{K}_1} = \partial_2 \hat{p}(\hat{X})|_{\hat{K}_2} = \partial_2 \hat{p}(\hat{X}) = p_5 - p_4 \dots (2.60).$$

En tenant compte de (2.54), (2.53) se réduit à :

$$\partial_2 \hat{p}(\hat{X})[(J_F(\hat{X})|_{\hat{K}_1} + |J_F(\hat{X})|_{\hat{K}_2})] = 0$$

donc

$$\partial_2 \hat{p}(\hat{X}) = 0.$$

d'où d'après (2.60), $p_5 = p_4$. Ainsi, en tenant compte de (2.50) on aura :

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6.$$

c'est -à-dire que p est constant sur M .

C.Q.F.D

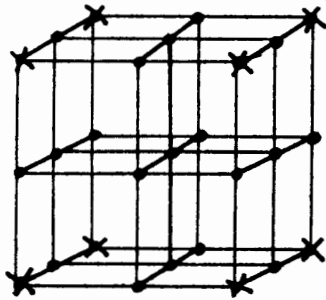
Ainsi, les conditions CM1, CM2, CM3 et CM4 sont satisfaites, et donc le théorème 5 assure que la paire (V_h, Q_h) données par (2.42) et (2.43) est stable.

l'élément $Q_1 - Q_1(\frac{h}{2}, h)$ en dimension 3: Soit τ_h une partition régulière de Ω par des hexahédres convexes et introduisons la partition $\tau_{\frac{h}{2}}$ on subdivisons chaque $K \in \tau_h$ à 8 petites hexahédres (voir fig(12)). Choisissons:

$$V_h = \{v \in ((H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}))^3 \mid v|_K \in (Q_1(K))^3, \forall K \in \tau_{\frac{h}{2}}\} \dots (2.61),$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q|_K \in Q_1(K), \forall K \in \tau_h\} \dots (2.62).$$

Pour ce choix on a les noeuds représentés comme dans la fig(19).



- noeud de vitesse
- ✕ noeud de pression

fig 19

Choisissons M_h comme suit
chaque $M \in M_h$ est composé de 4 éléments ayant un côté intérieur commun, voir fig (20).

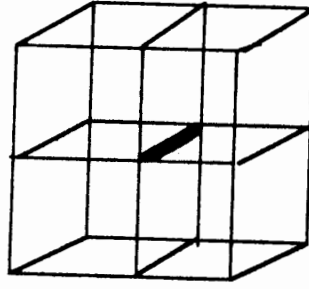


fig 20

Donc M est constitué de 32 éléments de τ_h .

Soit M un macro-élément: $M = \cup_{i=1}^4 K_i$, $K_i \in \tau_h$, $K_i = \cup_{j=1}^8 K_{ij}$, $K_{ij} \in \tau_h$. Définissons

$$V_{0,M} = \{v \in ((H_0^1(M) \cap C(\bar{M}))^3 \mid v|_{K_{ij}} \in (Q_1(K_{ij}))^3, \forall K_{ij} \subset M, i=\bar{1}, \bar{4}, j=\bar{1}, \bar{8})\} \dots (2.63)$$

$$Q_M = \{q \in (L^2(M) \cap C(\bar{M})) \mid q|_{K_i} \in Q_1(K_i), \forall K_i \subset M, i=\bar{1}, \bar{4}\} \dots (2.64)$$

$$N_M = \{q \in Q_M \mid (\text{div} v, q)_M = 0, \forall v \in V_{0,M}\} \dots (2.65)$$

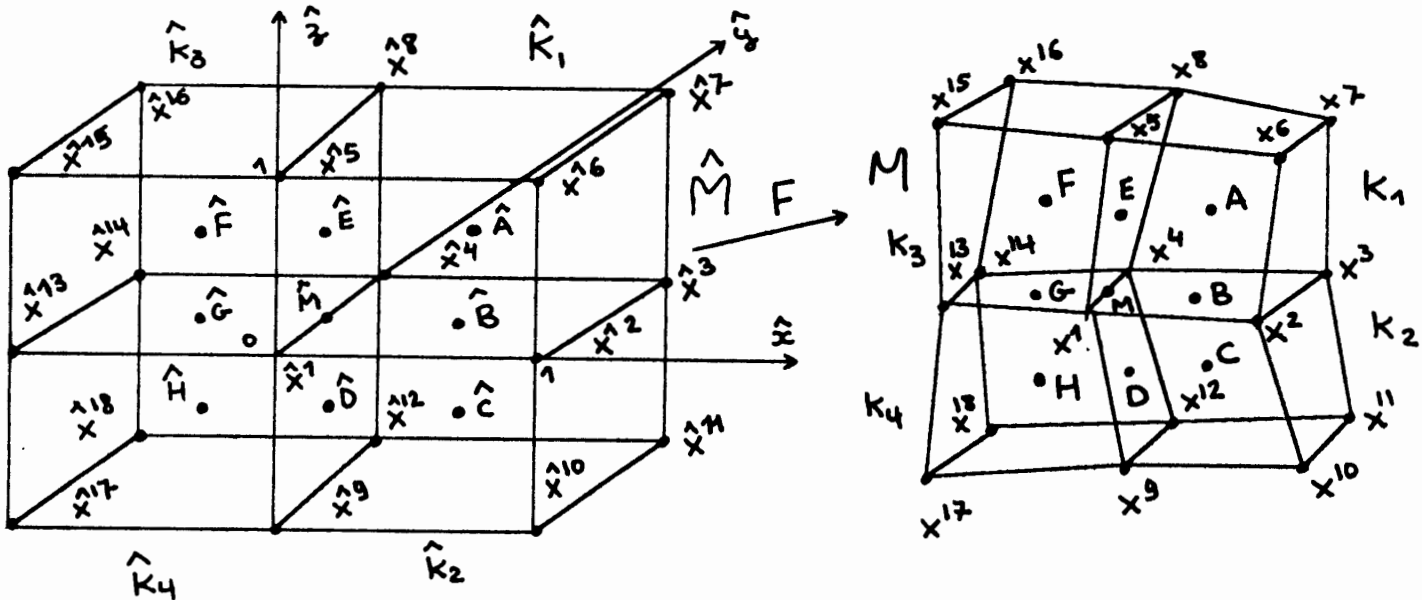
Remarque 15 : Pour la partition M_h ainsi construite on a une seule classe d'équivalence, les conditions CM2, CM3 et CM4 sont satisfaites donc pour déduire que la paire (V_h, Q_h) satisfait la condition inf-sup (1.47) on doit seulement vérifier la condition CM1. Ce ci est donné par le lemme suivant.

Lemme 7 : Soit M un macro-élément du type précédent, alors N_M est de dimension un constitué de fonctions constantes sur M .

Démonstration : soit $\hat{M} = \cup_{i=1}^4 \hat{K}_i$ le macro-élément de référence et $F = (F_1, F_2, F_3)$

l'application bijective, continue et trilineaire par morceaux de $\hat{M}$ dans M tq: $F|_{\hat{K}_i} =$

F^i , $F^i(\hat{K}) = K_i$, $i = 1, \dots, 4$, et $\hat{K}_i$ sont des cubes unités, (voir fig(21)).



où:

$$\begin{cases} \hat{A} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & , \hat{E} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & , \hat{F} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \\ \hat{B} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) & , \hat{D} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & , \hat{G} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \\ \hat{C} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) & , \hat{M} = (0, \frac{1}{2}, 0) & , \hat{H} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{X}^1 = (0, 0, 0) & , \hat{X}^5 = (0, 0, 1) & , \hat{X}^9 = (0, 0, -1) & , \hat{X}^{13} = (-1, 0, 0) \\ \hat{X}^2 = (1, 0, 0) & , \hat{X}^6 = (1, 0, 1) & , \hat{X}^{10} = (1, 0, -1) & , \hat{X}^{14} = (-1, 1, 0) \\ \hat{X}^3 = (1, 1, 0) & , \hat{X}^7 = (1, 1, 1) & , \hat{X}^{11} = (1, 1, -1) & , \hat{X}^{15} = (-1, 0, 1) \\ \hat{X}^4 = (0, 1, 0) & , \hat{X}^8 = (0, 1, 1) & , \hat{X}^{12} = (0, 1, -1) & , \hat{X}^{16} = (-1, 1, 1) \\ \hat{X}^{17} = (-1, 0, -1) & , \hat{X}^{18} = (-1, 1, 1), & , X = (x, y, z) & , \hat{X} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \end{cases}$$

définissons $\hat{u}(\hat{X}) = u(F(\hat{X}))$ et $\hat{p}(\hat{X}) = p(F(\hat{X}))$, pour $u \in V_{0,M}$ et $p \in Q_M$ on peut écrire

$$(div u, p)_M = -(u, \nabla p)_M = - \sum_{i=1}^4 \int_{\hat{K}_i} \hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \left| J_F(\hat{X}) \right| d\hat{X}$$

où J_F est la matrice jacobienne de F et J_F^{-T} est le transposé de J_F^{-1} , et $|J_F|$ le déterminant de J_F . Soit $\hat{K}_i \subset \hat{M}$, $i = 1, \dots, 4$, et $\hat{K}_i = \cup_{j=1}^8 \hat{K}_{ij}$, $K_{ij} \in \tau_{\frac{h}{2}}$. F est trilineaire i.e

$$\begin{cases} F = (F_1, F_2, F_3), \\ F_i(\hat{X}) = a_i + b_i \hat{x} + c_i \hat{y} + d_i \hat{z} + e_i \hat{x}\hat{y} + f_i \hat{x}\hat{z} + g_i \hat{y}\hat{z} + h_i \hat{x}\hat{y}\hat{z}, i = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \quad (2.66)$$

$$J_F(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(\hat{X}) & \partial_2 F_1(\hat{X}) & \partial_3 F_1(\hat{X}) \\ \partial_1 F_2(\hat{X}) & \partial_2 F_2(\hat{X}) & \partial_3 F_2(\hat{X}) \\ \partial_1 F_3(\hat{X}) & \partial_2 F_3(\hat{X}) & \partial_3 F_3(\hat{X}) \end{bmatrix}$$

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) = \alpha(\hat{X}) \text{ où:}$$

$$\alpha(\hat{X}) = \begin{bmatrix} \partial_2 F_2 \partial_3 F_3 - \partial_2 F_3 \partial_3 F_2 & \partial_1 F_3 \partial_3 F_2 - \partial_1 F_2 \partial_3 F_3 & \partial_1 F_2 \partial_2 F_3 - \partial_1 F_3 \partial_2 F_2 \\ \partial_2 F_3 \partial_3 F_1 - \partial_2 F_1 \partial_3 F_3 & \partial_1 F_1 \partial_3 F_3 - \partial_1 F_3 \partial_3 F_1 & \partial_1 F_3 \partial_2 F_1 - \partial_1 F_1 \partial_2 F_3 \\ \partial_2 F_1 \partial_3 F_2 - \partial_2 F_2 \partial_3 F_1 & \partial_1 F_2 \partial_3 F_1 - \partial_1 F_1 \partial_3 F_2 & \partial_1 F_1 \partial_2 F_2 - \partial_1 F_2 \partial_2 F_1 \end{bmatrix}$$

$\alpha(\hat{X}) = (\alpha_{i,j}(\hat{X}))_{i,j=1,2,3}$ où les composantes s'écrivent sous les formes suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(\hat{X}) &= a_{11} + b_{11} \hat{x} + c_{11} \hat{y} + d_{11} \hat{z} + e_{11} \hat{x}\hat{y} + f_{11} \hat{x}\hat{z} + g_{11} \hat{x}^2 + h_{11} \hat{x}\hat{y} + i_{11} \hat{x}\hat{z} \\ \alpha_{12}(\hat{X}) &= a_{12} + b_{12} \hat{x} + c_{12} \hat{y} + d_{12} \hat{z} + e_{12} \hat{x}\hat{y} + f_{12} \hat{y}\hat{z} + g_{12} \hat{y}^2 + h_{12} \hat{x}\hat{y} + i_{12} \hat{y}\hat{z} \\ \alpha_{13}(\hat{X}) &= a_{13} + b_{13} \hat{x} + c_{13} \hat{y} + d_{13} \hat{z} + e_{13} \hat{x}\hat{z} + f_{13} \hat{y}\hat{z} + g_{13} \hat{z}^2 + h_{13} \hat{x}\hat{z} + i_{13} \hat{y}\hat{z} \\ \alpha_{21}(\hat{X}) &= a_{21} + b_{21} \hat{x} + c_{21} \hat{y} + d_{21} \hat{z} + e_{21} \hat{x}\hat{y} + f_{21} \hat{x}\hat{z} + g_{21} \hat{x}^2 + h_{21} \hat{x}\hat{y} + i_{21} \hat{x}\hat{z} \\ \alpha_{22}(\hat{X}) &= a_{22} + b_{22} \hat{x} + c_{22} \hat{y} + d_{22} \hat{z} + e_{22} \hat{x}\hat{y} + f_{22} \hat{y}\hat{z} + g_{22} \hat{y}^2 + h_{22} \hat{x}\hat{y} + i_{22} \hat{y}\hat{z} \\ \alpha_{23}(\hat{X}) &= a_{23} + b_{23} \hat{x} + c_{23} \hat{y} + d_{23} \hat{z} + e_{23} \hat{x}\hat{z} + f_{23} \hat{y}\hat{z} + g_{23} \hat{z}^2 + h_{23} \hat{x}\hat{z} + i_{23} \hat{y}\hat{z} \\ \alpha_{31}(\hat{X}) &= a_{31} + b_{31} \hat{x} + c_{31} \hat{y} + d_{31} \hat{z} + e_{31} \hat{x}\hat{y} + f_{31} \hat{x}\hat{z} + g_{31} \hat{x}^2 + h_{31} \hat{x}\hat{y} + i_{31} \hat{x}\hat{z} \\ \alpha_{32}(\hat{X}) &= a_{32} + b_{32} \hat{x} + c_{32} \hat{y} + d_{32} \hat{z} + e_{32} \hat{x}\hat{y} + f_{32} \hat{y}\hat{z} + g_{32} \hat{y}^2 + h_{32} \hat{x}\hat{y} + i_{32} \hat{y}\hat{z} \\ \alpha_{33}(\hat{X}) &= a_{33} + b_{33} \hat{x} + c_{33} \hat{y} + d_{33} \hat{z} + e_{33} \hat{x}\hat{z} + f_{33} \hat{y}\hat{z} + g_{33} \hat{z}^2 + h_{33} \hat{x}\hat{z} + i_{33} \hat{y}\hat{z} \end{aligned}$$

p est bilinéaire i.e:

$$\begin{cases} \hat{p}(\hat{X}) = a + b\hat{x} + c\hat{y} + d\hat{z} + e\hat{x}\hat{y} + f\hat{x}\hat{z} + g\hat{y}\hat{z} + h\hat{x}\hat{y}\hat{z} \dots (2.69a) \\ \nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b + e\hat{y} + f\hat{z} + h\hat{y}\hat{z} \\ c + e\hat{x} + g\hat{z} + h\hat{x}\hat{z} \\ d + f\hat{x} + g\hat{y} + h\hat{x}\hat{y} \end{pmatrix} \dots (2.69b) \end{cases}$$

$$\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} R_1(\hat{X}) \\ R_2(\hat{X}) \\ R_3(\hat{X}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_i(\hat{X}) = & A_i + B_i\hat{x} + C_i\hat{y} + D_i\hat{z} + E_i\hat{x}\hat{y} + F_i\hat{x}\hat{z} + \\ & + G_i\hat{y}\hat{z} + H_i\hat{x}\hat{y}\hat{z} + I_i\hat{x}^2 + J_i\hat{y}^2 + K_i\hat{z}^2 + L_i\hat{x}\hat{y}^2 \\ & + M_i\hat{x}\hat{z}^2 + N_i\hat{y}\hat{z}^2 + O_i\hat{x}\hat{y}^2 + P_i\hat{x}\hat{z}^2 + Q_i\hat{y}\hat{z}^2 \\ & + R_i\hat{x}\hat{y}\hat{z}^2 + S_i\hat{x}\hat{y}\hat{z}^2 + T_i\hat{x}\hat{y}\hat{z}^2 + U_i\hat{x}\hat{y}^2 + V_i\hat{y}\hat{z}^2 + \\ & + W_i\hat{y}\hat{z}^2 + X_i\hat{x}\hat{y}\hat{z}^2 + Y_i\hat{x}\hat{y}\hat{z}^2 + Z_i\hat{x}\hat{y}\hat{z}^2, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire: $\left[\left| J_F(\hat{X}) \right| J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \right] \Big|_{\hat{K}_i} \in (Q_2(\hat{K}_i))^3$. De plus, sur chaque $\hat{K}_{ij}$ on a:

$$\hat{u}(\hat{X}) = \begin{bmatrix} a_1^{ij} + b_1^{ij}\hat{x} + c_1^{ij}\hat{y} + d_1^{ij}\hat{z} + e_1^{ij}\hat{x}\hat{y} + f_1^{ij}\hat{x}\hat{z} + g_1^{ij}\hat{y}\hat{z} + h_1^{ij}\hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ a_2^{ij} + b_2^{ij}\hat{x} + c_2^{ij}\hat{y} + d_2^{ij}\hat{z} + e_2^{ij}\hat{x}\hat{y} + f_2^{ij}\hat{x}\hat{z} + g_2^{ij}\hat{y}\hat{z} + h_2^{ij}\hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ a_3^{ij} + b_3^{ij}\hat{x} + c_3^{ij}\hat{y} + d_3^{ij}\hat{z} + e_3^{ij}\hat{x}\hat{y} + f_3^{ij}\hat{x}\hat{z} + g_3^{ij}\hat{y}\hat{z} + h_3^{ij}\hat{x}\hat{y}\hat{z} \end{bmatrix}$$

Ainsi, $(\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{J_F(\hat{X})}) \Big|_{\hat{K}_{ij}}$ est un polynôme qui appartient à $Q_3(\hat{K}_{ij})$, de plus $\hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{J_F(\hat{X})} \Big|_{\hat{K}_i}$ est continue sur $\hat{K}_i$ donc la formule de Simpson donne la valeur exacte de l'intégrale

$$\int_{\hat{K}_i} \hat{u}^T(\hat{X}) J_F^{-T}(\hat{X}) \nabla \hat{p}(\hat{X}) \Big|_{J_F(\hat{X})} d\hat{X}.$$

* Soit $p \in N_M$ et soit $p_i = p(\hat{X}) = \hat{p}(\hat{X})$, $i = 1, \dots, 18$ les degrés de liberté de $p \in N_M$ où $\hat{X} = (x_1^i, x_2^i, x_3^i)$, $i = 1, \dots, 18$.

* Choisissons $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point: A où: $\hat{A} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ainsi la condition $(\text{div} u, p)_M = 0$ implique:

$$J_F^{-T}(\hat{A}) \nabla \hat{p}(\hat{A}) \Big|_{J_F(\hat{A})} = 0$$

puisque $\left| J_F(\hat{A}) \right| \neq 0$ ce la donne

$$\nabla \hat{p}(\hat{A}) = 0 \dots (2.70)$$

* De même si on choisit $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u aux points C, F, H respectivement où:

$$\hat{C} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \hat{F} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \hat{H} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).$$

on aura

$$\nabla \hat{p}(\hat{C}) = 0 \dots (2.71),$$

$$\nabla \hat{p}(\hat{F}) = 0 \dots (2.72),$$

$$\nabla \hat{p}(\hat{H}) = 0 \dots (2.73).$$

* Maintenant soit $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point B où: $\hat{B} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, ainsi la condition $(div u, p)_M = 0$ implique

$$(\left|J_F(\hat{B})\right| J_F^{-T}(\hat{B}) \nabla \hat{p}(\hat{B})) \big|_{\hat{K}_1} + (\left|J_F(\hat{B})\right| J_F^{-T}(\hat{B}) \nabla \hat{p}(\hat{B})) \big|_{\hat{K}_2} = 0 \dots (2.74)$$

soient $\alpha^j, j = 1, 2, 3$ les vecteurs colonnes de la matrice $(\left|J_F(\hat{B})\right| J_F^{-T}(\hat{B})) \big|_{\hat{K}_i}, i = 1, 2$. On remarque que:

$$\alpha^{13} = \alpha^{23} \dots (2.75)$$

et

$$\partial_i \hat{p}(\hat{B}) \big|_{\hat{K}_1} = \partial_i \hat{p}(\hat{B}) \big|_{\hat{K}_2} = \partial_i \hat{p}(\hat{B}), i = 1, 2 \dots (2.76)$$

En effet:

$$\alpha^{j3} = \begin{bmatrix} \partial_1 F_2^j(\hat{B}) \partial_2 F_3^j(\hat{B}) - \partial_1 F_3^j(\hat{B}) \partial_2 F_2^j(\hat{B}) \\ \partial_1 F_3^j(\hat{B}) \partial_2 F_1^j(\hat{B}) - \partial_1 F_1^j(\hat{B}) \partial_2 F_3^j(\hat{B}) \\ \partial_1 F_1^j(\hat{B}) \partial_2 F_2^j(\hat{B}) - \partial_1 F_2^j(\hat{B}) \partial_2 F_1^j(\hat{B}) \end{bmatrix}, j = 1, 2.$$

$$F_i^j(\hat{X}) = a_i^j + b_i^j \hat{x} + c_i^j \hat{y} + d_i^j \hat{z} + e_i^j \hat{x}\hat{y} + f_i^j \hat{x}\hat{z} + g_i^j \hat{y}\hat{z} + h_i^j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, i = \bar{1}, \bar{3}, j = 1, 2$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_1 F_i^j(\hat{B}) = b_i^j + \frac{1}{2} e_i^j \\ \partial_2 F_i^j(\hat{B}) = c_i^j + \frac{1}{2} e_i^j \end{cases}, j = 1, 3, i = 1, 2, 3.$$

sur $\hat{K}_j, j = 1, 2$:

$$\begin{cases} x_i^1 = a_i^j \\ x_i^2 = a_i^j + b_i^j \\ x_i^4 = a_i^j + c_i^j \\ x_i^3 = a_i^j + b_i^j + c_i^j + e_i^j \end{cases}, j = 1, 2, i = 1, 2, 3.$$

de ces équations on a:

$$\begin{cases} b_i^j = x_i^2 - x_i^1 \\ c_i^j = x_i^4 - x_i^1 \\ e_i^j = x_i^3 - x_i^4 + x_i^1 - x_i^2 \end{cases}, j = 1, 2, i = 1, 2, 3.$$

donc

$$\begin{cases} \partial_1 F_i^1(\hat{B}) = \partial_1 F_i^2(\hat{B}) \\ \partial_2 F_i^1(\hat{B}) = \partial_2 F_i^2(\hat{B}) \end{cases}, i = 1, 2, 3$$

ce qui implique que $\alpha^{13} = \alpha^{23}$ d'où (2.75). On a aussi:

$$\hat{p}^j(\hat{X}) = a_j + b_j \hat{x} + c_j \hat{y} + d_j \hat{z} + e_j \hat{x}\hat{y} + f_j \hat{x}\hat{z} + g_j \hat{y}\hat{z} + h_j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, j = 1, 2$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_1 \hat{p}^j(\hat{B}) = b_j + \frac{1}{2}e_j \\ \partial_2 \hat{p}^j(\hat{B}) = c_j + \frac{1}{2}e_j \end{cases}, j = 1, 2.$$

sur $\hat{K}_j, j = 1, 2$ on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_2 = a_j + b_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_3 = a_j + b_j + c_j + e_j \end{cases}, j = 1, 2.$$

de ces équations on a:

$$\begin{cases} b_j = p_2 - p_1 \\ c_j = p_4 - p_1 \\ e_j = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 \end{cases}, j = 1, 2$$

ce qui implique que:

$$\partial_i \hat{p}(\hat{B})|_{\hat{K}_1} = \partial_i \hat{p}(\hat{B})|_{\hat{K}_2} = \partial_i \hat{p}(\hat{B}), i = 1, 2$$

d'où (2.76). En tenant compte de (2.75) et (2.76) la condition (2.74) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{B}) \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{B}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{B})|_{\hat{K}_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{B}) \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{B}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{B})|_{\hat{K}_2} \end{bmatrix} = 0$$

i.e:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} + \alpha^{21} & \alpha^{12} + \alpha^{22} & \alpha^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{B}) \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{B}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{B})|_{\hat{K}_1} + \partial_3 \hat{p}(\hat{B})|_{\hat{K}_2} \end{bmatrix} = 0$$

En vertu des hypothèses de régularité des hexahédres le déterminant de la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} + \alpha^{21} & \alpha^{12} + \alpha^{22} & \alpha^{13} \end{bmatrix}$$

est non nul, d'où

$$\partial_i \hat{p}(\hat{B}) = 0, i = 1, 2, \dots (2.77).$$

* Maintenant soit $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point E où : $\hat{E} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ainsi la condition $(div u, p)_M = 0$ implique

$$\left(\left| J_F(\hat{E}) \right| J_F^{-T}(\hat{E}) \nabla \hat{p}(\hat{E}) \right) \Big|_{\hat{K}_1} + \left(\left| J_F(\hat{E}) \right| J_F^{-T}(\hat{E}) \nabla \hat{p}(\hat{E}) \right) \Big|_{\hat{K}_3} = 0 \dots (2.78)$$

soient $\alpha^j, j = 1, 2, 3$ les vecteurs colonnes de la matrice $\left(\left| J_F(\hat{E}) \right| J_F^{-T}(\hat{E}) \right) \Big|_{\hat{K}_i}, i = 1, 3$. On remarque que

$$\alpha^{11} = \alpha^{31} \dots (2.79)$$

et

$$\partial_i \hat{p}(\hat{E}) \Big|_{\hat{K}_1} = \partial_i \hat{p}(\hat{E}) \Big|_{\hat{K}_3} = \partial_i \hat{p}(\hat{E}), i = 2, 3 \dots (2.80)$$

En effet,

$$\alpha^{j3} = \begin{bmatrix} \partial_2 F_2^j(\hat{E}) \partial_3 F_3^j(\hat{E}) - \partial_2 F_3^j(\hat{E}) \partial_3 F_2^j(\hat{E}) \\ \partial_2 F_3^j(\hat{E}) \partial_3 F_1^j(\hat{E}) - \partial_3 F_1^j(\hat{E}) \partial_3 F_3^j(\hat{E}) \\ \partial_2 F_1^j(\hat{E}) \partial_3 F_2^j(\hat{E}) - \partial_2 F_2^j(\hat{E}) \partial_3 F_1^j(\hat{E}) \end{bmatrix}, j = 1, 3$$

$$F_i^j(\hat{X}) = a_i^j + b_i^j \hat{x} + c_i^j \hat{y} + d_i^j \hat{z} + e_i^j \hat{x}\hat{y} + f_i^j \hat{x}\hat{z} + g_i^j \hat{y}\hat{z} + h_i^j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, i = \overline{1,3}, j = 1, 3$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^j(\hat{E}) = c_i^j + \frac{1}{2} g_i^j \\ \partial_3 F_i^j(\hat{E}) = d_i^j + \frac{1}{2} g_i^j \end{cases}, j = 1, 3, i = 1, 2, 3.$$

sur $\hat{K}_j, j = 1, 3$ on a:

$$\begin{cases} x_1^1 = a_1^1 \\ x_1^4 = a_1^1 + c_1^1 \\ x_1^5 = a_1^1 + d_1^1 \\ x_1^8 = a_1^1 + c_1^1 + d_1^1 + g_1^1 \end{cases}, j = 1, 3, i = 1, 2, 3.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} c_i^j = x_i^4 - x_i^1 \\ d_i^j = x_i^5 - x_i^1 \\ g_i^j = x_i^8 - x_i^5 + x_i^1 - x_i^4 \end{cases}, j = 1, 3, i = 1, 2, 3.$$

donc

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^1(\hat{E}) = \partial_2 F_i^3(\hat{E}) \\ \partial_3 F_i^1(\hat{E}) = \partial_3 F_i^3(\hat{E}) \end{cases}, i = 1, 2, 3.$$

ce qui implique que: $\alpha^{11} = \alpha^{31}$ d'où (2.79). On a aussi:

$$\hat{p}^j(\hat{X}) = a_j + b_j \hat{x} + c_j \hat{y} + d_j \hat{z} + e_j \hat{x}\hat{y} + f_j \hat{x}\hat{z} + g_j \hat{y}\hat{z} + h_j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, j = 1, 3$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_2 \hat{p}^j(\hat{E}) = c_j + \frac{1}{2}g_j \\ \partial_3 \hat{p}^j(\hat{E}) = d_j + \frac{1}{2}g_j \end{cases}, j = 1, 3.$$

sur $\hat{K}_j, j = 1, 3$, on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_5 = a_j + d_j \\ p_8 = a_j + c_j + d_j + g_j \end{cases}, j = 1, 3$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} c_j = p_4 - p_1 \\ d_j = p_5 - p_1 \\ g_j = p_8 - p_5 + p_1 - p_4 \end{cases}, j = 1, 3$$

ce qui implique que:

$$\partial_i \hat{p}(\hat{E})|_{\hat{K}_1} = \partial_i \hat{p}(\hat{E})|_{\hat{K}_3} = \partial_i \hat{p}(\hat{E}), i = 2, 3$$

d'où (2.80). En tenant compte de (2.79) et (2.80) la condition (2.78) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{E})|_{\hat{K}_1} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{E}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{E}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{E})|_{\hat{K}_3} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{E}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{E}) \end{bmatrix} = 0$$

i.e:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} + \alpha^{32} & \alpha^{13} + \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{E})|_{\hat{K}_1} + \partial_1 \hat{p}(\hat{E})|_{\hat{K}_3} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{E}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{E}) \end{bmatrix} = 0$$

Vue les hypotheses de régularité des hexahédres le déterminant de la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} + \alpha^{32} & \alpha^{13} + \alpha^{33} \end{bmatrix}$$

est non nul, d'où

$$\partial_i \hat{p}(\hat{E}) = 0, i = 2, 3, \dots (2.81).$$

* Maintenant soit $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point: D où $\hat{D} = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, ainsi la condition $(div u, p)_M = 0$ implique:

$$\left(J_F(\hat{D}) \left| J_F^{-T}(\hat{D}) \nabla \hat{p}(\hat{D}) \right| \right) |_{\hat{K}_2} + \left(J_F(\hat{D}) \left| J_F^{-T}(\hat{D}) \nabla \hat{p}(\hat{D}) \right| \right) |_{\hat{K}_4} = 0 \dots (2.82)$$

soient $\alpha^j, j = 1, 2, 3$ les vecteurs colonnes de la matrice $\left(J_F(\hat{D}) \left| J_F^{-T}(\hat{D}) \right| \right) |_{\hat{K}_i}, i = 2, 4$. On remarque que:

$$\alpha^{21} = \alpha^{41} \dots (2.83)$$

et

$$\partial_i \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_2} = \partial_i \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_4} = \partial_i \hat{p}(\hat{D}), i = 2, 3, \dots (2.84)$$

En effet,

$$\alpha^{j3} = \begin{bmatrix} \partial_2 F_2^j(\hat{D}) \partial_3 F_3^j(\hat{D}) - \partial_2 F_3^j(\hat{D}) \partial_3 F_2^j(\hat{D}) \\ \partial_2 F_3^j(\hat{D}) \partial_3 F_1^j(\hat{D}) - \partial_3 F_1^j(\hat{D}) \partial_3 F_3^j(\hat{D}) \\ \partial_2 F_1^j(\hat{D}) \partial_3 F_2^j(\hat{D}) - \partial_2 F_2^j(\hat{D}) \partial_3 F_1^j(\hat{D}) \end{bmatrix}, j = 2, 4$$

$$F_i^j(\hat{X}) = a_i^j + b_i^j \hat{x} + c_i^j \hat{y} + d_i^j \hat{z} + e_i^j \hat{x}\hat{y} + f_i^j \hat{x}\hat{z} + g_i^j \hat{y}\hat{z} + h_i^j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, i = \bar{1}, \bar{3}, j = 2, 4$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^j(\hat{D}) = c_i^j - \frac{1}{2}g_i^j \\ \partial_3 F_i^j(\hat{D}) = d_i^j + \frac{1}{2}g_i^j \end{cases}, j = 2, 4, i = 1, 2, 3.$$

sur $\hat{K}_j, j = 2, 4$ on a:

$$\begin{cases} x_i^1 = a_i^j \\ x_i^4 = a_i^j + c_i^j \\ x_i^9 = a_i^j - d_i^j \\ x_i^8 = a_i^j + c_i^j - d_i^j - g_i^j \end{cases}, j = 2, 4, i = 1, 2, 3.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} c_i^j = x_i^4 - x_i^1 \\ d_i^j = x_i^1 - x_i^9 \\ g_i^j = x_i^4 - x_i^1 + x_i^9 - x_i^{12} \end{cases}, j = 2, 4, i = 1, 2, 3.$$

donc

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^2(\hat{D}) = \partial_2 F_i^4(\hat{D}) \\ \partial_3 F_i^2(\hat{D}) = \partial_3 F_i^4(\hat{D}) \end{cases}, i = 1, 2, 3.$$

ce qui implique que: $\alpha^{21} = \alpha^{41}$ d'où (2.83). on a aussi:

$$\hat{p}^j(\hat{X}) = a_j + b_j \hat{x} + c_j \hat{y} + d_j \hat{z} + e_j \hat{x}\hat{y} + f_j \hat{x}\hat{z} + g_j \hat{y}\hat{z} + h_j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, j = 2, 4$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_2 \hat{p}^j(\hat{D}) = c_j - \frac{1}{2}g_j \\ \partial_3 \hat{p}^j(\hat{D}) = d_j + \frac{1}{2}g_j \end{cases}, j = 2, 4.$$

sur $\hat{K}_j, j = 2, 4$ on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_9 = a_j - d_j \\ p_{12} = a_j + c_j - d_j - g_j \end{cases}, j = 2, 4.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} c_j = p_4 - p_1 \\ d_j = p_1 - p_9 \\ g_j = p_8 - p_4 + p_9 - p_{12} \end{cases}, j = 2, 4.$$

ce qui implique que:

$$\partial_i \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_2} = \partial_i \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_4} = \partial_i \hat{p}(\hat{D}), i = 2, 3$$

d'où (2.84). En tenant compte de (2.83) et (2.84) la condition (2.82) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_2} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{D}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{D}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^{21} & \alpha^{42} & \alpha^{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_4} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{D}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{D}) \end{bmatrix} = 0$$

i.e:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} + \alpha^{32} & \alpha^{13} + \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_2} + \partial_1 \hat{p}(\hat{D})|_{\hat{K}_4} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{D}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{D}) \end{bmatrix} = 0$$

En vertu des hypothèses de régularité des hexahédres le déterminant de la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{21} & \alpha^{22} + \alpha^{42} & \alpha^{23} + \alpha^{43} \end{bmatrix}$$

est non nul, d'où:

$$\partial_i \hat{p}(\hat{D}) = 0, i = 2, 3 \dots (2.85)$$

* Maintenant soit $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point G où: $\hat{G} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, ainsi la condition $(div u, p)_M = 0$ implique:

$$(|J_F(\hat{G})| J_F^{-T}(\hat{G}) \nabla \hat{p}(\hat{G}))|_{\hat{K}_3} + (|J_F(\hat{G})| J_F^{-T}(\hat{G}) \nabla \hat{p}(\hat{G}))|_{\hat{K}_2} = 0 \dots (2.86)$$

soient $\alpha^j, j = 1, 2, 3$ les vecteurs colonnes de la matrice $(|J_F(\hat{G})| J_F^{-T}(\hat{G}))|_{\hat{K}_i}, i = 3, 4$. On remarque que:

$$\alpha^{33} = \alpha^{43} \dots (2.87)$$

et:

$$\partial_i \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_3} = \partial_i \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_4} = \partial_i \hat{p}(\hat{G}), i = 1, 2 \dots (2.88)$$

En effet,

$$\alpha^{j3} = \begin{bmatrix} \partial_1 F_2^j(\hat{G}) \partial_2 F_3^j(\hat{G}) - \partial_1 F_3^j(\hat{G}) \partial_2 F_2^j(\hat{G}) \\ \partial_1 F_3^j(\hat{G}) \partial_2 F_1^j(\hat{G}) - \partial_1 F_1^j(\hat{G}) \partial_2 F_3^j(\hat{G}) \\ \partial_1 F_1^j(\hat{G}) \partial_2 F_2^j(\hat{G}) - \partial_1 F_2^j(\hat{G}) \partial_2 F_1^j(\hat{G}) \end{bmatrix}, j = 3, 4$$

$$F_i^j(\hat{X}) = a_i^j + b_i^j \hat{x} + c_i^j \hat{y} + d_i^j \hat{z} + e_i^j \hat{x}\hat{y} + f_i^j \hat{x}\hat{z} + g_i^j \hat{y}\hat{z} + h_i^j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, i = \overline{1,3}, j = 3, 4$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_1 F_i^j(\hat{G}) = b_i^j + \frac{1}{2}e_i^j \\ \partial_2 F_i^j(\hat{G}) = c_i^j - \frac{1}{2}e_i^j \end{cases}, j = 3, 4, i = 1, 2, 3.$$

sur $\hat{K}_j, j = 3, 4$ on a:

$$\begin{cases} x_i^1 = a_i^j \\ x_i^{13} = a_i^j - b_i^j \\ x_i^4 = a_i^j + c_i^j \\ x_i^{14} = a_i^j - b_i^j + c_i^j - e_i^j \end{cases}, j = 3, 4, i = 1, 2, 3.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} b_i^j = x_i^1 - x_i^{13} \\ c_i^j = x_i^4 - x_i^{13} \\ e_i^j = x_i^4 - x_i^1 + x_i^{13} - x_i^{14} \end{cases}, j = 3, 4, i = 1, 2, 3.$$

donc

$$\begin{cases} \partial_1 F_i^3(\hat{G}) = \partial_1 F_i^4(\hat{G}) \\ \partial_2 F_i^3(\hat{G}) = \partial_2 F_i^4(\hat{G}) \end{cases}, i = 1, 2, 3.$$

ce qui implique que: $\alpha^{33} = \alpha^{43}$ d'où (2.87). On a aussi:

$$\hat{p}^j(\hat{X}) = a_j + b_j \hat{x} + c_j \hat{y} + d_j \hat{z} + e_j \hat{x}\hat{y} + f_j \hat{x}\hat{z} + g_j \hat{y}\hat{z} + h_j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, j = 3, 4$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$\begin{cases} \partial_1 \hat{p}^j(\hat{G}) = b_j + \frac{1}{2}e_j \\ \partial_2 \hat{p}^j(\hat{G}) = c_j - \frac{1}{2}e_j \end{cases}, j = 3, 4$$

sur $\hat{K}_j, j = 3, 4$ on obtient:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_{13} = a_j - b_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_{14} = a_j - b_j + c_j - e_j \end{cases}, j = 3, 4$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} b_j = p_1 - p_{13} \\ c_j = p_4 - p_1 \\ e_j = p_4 - p_1 + p_{13} - p_{14} \end{cases}, j = 3, 4$$

ce qui implique que

$$\partial_i \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_3} = \partial_i \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_4} = \partial_i \hat{p}(\hat{G}), i = 1, 2$$

d'où (2.88). En tenant compte de (2.87) et (2.88) la condition (2.86) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{31} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{G}) \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{G}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^{41} & \alpha^{42} & \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{G}) \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{G}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_4} \end{bmatrix} = 0$$

i.e

$$\begin{bmatrix} \alpha^{31} + \alpha^{41} & \alpha^{32} + \alpha^{42} & \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{G}) \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{G}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_3} + \partial_3 \hat{p}(\hat{G})|_{\hat{K}_4} \end{bmatrix} = 0$$

En vertu des hypothèses de régularité des hexahédres le déterminant de la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{31} + \alpha^{41} & \alpha^{32} + \alpha^{42} & \alpha^{33} \end{bmatrix}$$

est non nul, d'où

$$\partial_i \hat{p}(\hat{G}) = 0, i = 1, 2, \dots (2.89).$$

Ainsi (2.70),(2.71),(2.73),(2.77),(2.81),(2.85),et (2.89) donne:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = p_6 = p_8 = p_{10} = p_{12} = p_{14} = p_{15} = p_{17} \dots \dots (2.90a) \\ p_2 = p_4 = p_5 = p_7 = p_9 = p_{11} = p_{13} = p_{16} = p_{18} \dots \dots (2.90b) \end{cases}$$

En effet

1) sur $\hat{K}_1$:

$$\begin{cases} \hat{p}^1(\hat{X}) = a_1 + b_1 \hat{x} + c_1 \hat{y} + d_1 \hat{z} + e_1 \hat{x}\hat{y} + f_1 \hat{x}\hat{z} + g_1 \hat{y}\hat{z} + h_1 \hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ \nabla \hat{p}^1(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b_1 + e_1 \hat{y} + f_1 \hat{z} + h_1 \hat{y}\hat{z} \\ c_1 + e_1 \hat{x} + g_1 \hat{z} + h_1 \hat{x}\hat{z} \\ d_1 + f_1 \hat{x} + g_1 \hat{y} + h_1 \hat{x}\hat{y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

et on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = a_1 \\ p_2 = a_1 + b_1 \\ p_3 = a_1 + b_1 + c_1 + e_1 \\ p_4 = a_1 + c_1 \\ p_5 = a_1 + d_1 \\ p_6 = a_1 + b_1 + d_1 + f_1 \\ p_7 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1 + g_1 + h_1 \\ p_8 = a_1 + c_1 + d_1 + g_1 \end{array} \right.$$

*) $\nabla \hat{p}^1(\hat{A}) = 0$ donne

$$\begin{cases} b_1 + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{4}h_1 = 0 \\ c_1 + \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{4}h_1 = 0 \\ d_1 + \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{4}h_1 = 0 \end{cases}$$

2*) $\partial_i \hat{p}^1(\hat{B}) = 0, i = 1, 2$ donne

$$\begin{cases} b_1 + \frac{1}{2}e_1 = 0 \\ c_1 + \frac{1}{2}e_1 = 0 \end{cases}$$

3*) $\partial_i \hat{p}^1(\hat{E}) = 0, i = 2, 3$ donne:

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{2}g_1 = 0 \\ d_1 + \frac{1}{2}g_1 = 0 \end{cases}$$

de ces équations on a:

$$\begin{cases} c_1 = b_1 \\ d_1 = b_1 \\ g_1 = -2b_1 \\ e_1 = -2b_1 \\ f_1 = -2b_1 \\ h_1 = 4b_1 \end{cases}$$

ainsi on aura:

$$\begin{cases} p_1 = a_1 \\ p_2 = a_1 + b_1 \\ p_3 = a_1 \\ p_4 = a_1 + b_1 \\ p_5 = a_1 + b_1 \\ p_6 = a_1 \\ p_7 = a_1 + b_1 \\ p_8 = a_1 \end{cases}$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = p_6 = p_8 \dots (2.91a), \\ p_2 = p_4 = p_5 = p_7 \dots (2.91b). \end{cases}$$

2) sur $\hat{K}_2$:

$$\begin{cases} \hat{p}^2(\hat{X}) = a_2 + b_2 \hat{x} + c_2 \hat{y} + d_2 \hat{z} + e_2 \hat{x}\hat{y} + f_2 \hat{x}\hat{z} + g_2 \hat{y}\hat{z} + h_2 \hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ \nabla \hat{p}^2(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b_2 + e_2 \hat{y} + f_2 \hat{z} + h_2 \hat{y}\hat{z} \\ c_2 + e_2 \hat{x} + g_2 \hat{z} + h_2 \hat{x}\hat{z} \\ d_2 + f_2 \hat{x} + g_2 \hat{y} + h_2 \hat{x}\hat{y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

et on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_2 \\ p_2 = a_2 + b_2 \\ p_3 = a_2 + b_2 + c_2 + e_2 \\ p_4 = a_2 + c_2 \\ p_9 = a_2 - d_2 \\ p_{10} = a_2 + b_2 - d_2 - f_2 \\ p_{11} = a_2 + b_2 + c_2 - d_2 + e_2 - f_2 - g_2 - h_2 \\ p_{12} = a_2 + c_2 - d_2 - g_2 \end{cases}$$

*) $\nabla \hat{p}^2(\hat{C}) = 0$ donne:

$$\begin{cases} b_2 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{4}h_2 = 0 \\ c_2 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}g_2 - \frac{1}{4}h_2 = 0 \\ d_2 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}g_2 + \frac{1}{4}h_2 = 0 \end{cases}$$

2*) $\partial_i \hat{p}^2(\hat{B}) = 0, i = 1, 2$ donne:

$$\begin{cases} b_2 + \frac{1}{2}e_2 = 0 \\ c_2 + \frac{1}{2}e_2 = 0 \end{cases}$$

3*) $\partial_i \hat{p}^2(\hat{D}) = 0, i = 2, 3$ donne:

$$\begin{cases} c_2 - \frac{1}{2}g_2 = 0 \\ d_2 + \frac{1}{2}g_2 = 0 \end{cases}$$

de ces équations on a:

$$\begin{cases} c_2 = b_2 \\ d_2 = -b_2 \\ g_2 = 2b_2 \\ e_2 = -2b_2 \\ f_2 = -2b_2 \\ h_2 = -4b_2 \end{cases}$$

soit:

$$\begin{cases} p_1 = a_2 \\ p_2 = a_2 + b_2 \\ p_3 = a_2 \\ p_4 = a_2 + b_2 \\ p_9 = a_2 + b_2 \\ p_{10} = a_2 \\ p_{11} = a_2 + b_2 \\ p_{12} = a_2 \end{cases}$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = p_{10} = p_{12} \dots (2.92a), \\ p_2 = p_4 = p_9 = p_{11} \dots (2.92b). \end{cases}$$

De (2.91) et (2.92) on obtient:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = p_6 = p_8 = p_{10} = p_{12} \dots (2.93a), \\ p_2 = p_4 = p_5 = p_7 = p_9 = p_{11} \dots (2.93b). \end{cases}$$

3) sur $\hat{K}_3$:

$$\begin{cases} \hat{p}^3(\hat{X}) = a_3 + b_3 \hat{x} + c_3 \hat{y} + d_3 \hat{z} + e_3 \hat{x}\hat{y} + f_3 \hat{x}\hat{z} + g_3 \hat{y}\hat{z} + h_3 \hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ \nabla \hat{p}^3(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b_3 + e_3 \hat{y} + f_3 \hat{z} + h_3 \hat{y}\hat{z} \\ c_3 + e_3 \hat{x} + g_3 \hat{z} + h_3 \hat{x}\hat{z} \\ d_3 + f_3 \hat{x} + g_3 \hat{y} + h_3 \hat{x}\hat{y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

et on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = a_3 \\ p_4 = a_3 + c_3 \\ p_8 = a_3 + c_3 + d_3 + g_3 \\ p_{13} = a_3 - b_3 \\ p_5 = a_3 + d_3 \\ p_{14} = a_3 - b_3 + c_3 - e_3 \\ p_{16} = a_3 - b_3 + c_3 + d_3 - e_3 - f_3 + g_3 - h_3 \\ p_{15} = a_3 - b_3 + d_3 - f_3 \end{array} \right.$$

*) $\nabla \hat{p}^3(\hat{F}) = 0$ donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_3 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}f_3 + \frac{1}{4}h_3 = 0 \\ c_3 - \frac{1}{2}e_3 + \frac{1}{2}g_3 - \frac{1}{4}h_3 = 0 \\ d_3 - \frac{1}{2}f_3 + \frac{1}{2}g_3 - \frac{1}{4}h_3 = 0 \end{array} \right.$$

2*) $\partial_i \hat{p}^3(\hat{E}) = 0, i = 2, 3$ donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_3 + \frac{1}{2}g_3 = 0 \\ d_3 + \frac{1}{2}g_3 = 0 \end{array} \right.$$

3*) $\partial_i \hat{p}^3(\hat{G}) = 0, i = 1, 2$ donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_3 + \frac{1}{2}e_3 = 0 \\ c_3 - \frac{1}{2}e_3 = 0 \end{array} \right.$$

de ces équations on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_3 = -b_3 \\ d_3 = -b_3 \\ g_3 = 2b_3 \\ e_3 = -2b_3 \\ f_3 = -2b_3 \\ h_3 = 4b_3 \end{array} \right.$$

soit:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = a_3 \\ p_4 = a_3 - b_3 \\ p_8 = a_3 \\ p_5 = a_3 - b_3 \\ p_{13} = a_3 - b_3 \\ p_{14} = a_3 \\ p_{16} = a_3 - b_3 \\ p_{15} = a_3 \end{array} \right.$$

Ce qui donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_8 = p_{14} = p_{15} \dots (2.94a), \\ p_4 = p_5 = p_{13} = p_{16} \dots (2.94b). \end{array} \right.$$

De (2.93) et (2.94) on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_3 = p_6 = p_8 = p_{10} = p_{12} = p_{14} = p_{15} \dots (2.95a) \\ p_2 = p_4 = p_5 = p_7 = p_9 = p_{11} = p_{13} = p_{16} \dots (2.95b). \end{array} \right.$$

4) sur $\hat{K}_4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}^4(\hat{X}) = a_4 + b_4 \hat{x} + c_4 \hat{y} + d_4 \hat{z} + e_4 \hat{x}\hat{y} + f_4 \hat{x}\hat{z} + g_4 \hat{y}\hat{z} + h_4 \hat{x}\hat{y}\hat{z} \\ \nabla \hat{p}^4(\hat{X}) = \begin{pmatrix} b_4 + e_4 \hat{y} + f_4 \hat{z} + h_4 \hat{y}\hat{z} \\ c_4 + e_4 \hat{x} + g_4 \hat{z} + h_4 \hat{x}\hat{z} \\ d_4 + f_4 \hat{x} + g_4 \hat{y} + h_4 \hat{x}\hat{y} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

et on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = a_4 \\ p_4 = a_4 + c_4 \\ p_{12} = a_4 + c_4 - d_4 - g_4 \\ p_{13} = a_4 - b_4 \\ p_9 = a_4 - d_4 \\ p_{14} = a_4 - b_4 + c_4 - e_4 \\ p_{18} = a_4 - b_4 + c_4 - d_4 - e_4 + f_4 - g_4 + h_4 \\ p_{17} = a_4 - b_4 - d_4 + f_4 \end{array} \right.$$

*) $\nabla \hat{p}^4(\hat{H}) = 0$ donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_4 + \frac{1}{2}e_4 - \frac{1}{2}f_4 - \frac{1}{4}h_4 = 0 \\ c_4 - \frac{1}{2}e_4 - \frac{1}{2}g_4 + \frac{1}{4}h_4 = 0 \\ d_4 - \frac{1}{2}f_4 + \frac{1}{2}g_4 - \frac{1}{4}h_4 = 0 \end{array} \right.$$

2*) $\partial_i \hat{p}^4(\hat{D}) = 0, i = 2, 3$ donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_4 - \frac{1}{2}g_4 = 0 \\ d_4 + \frac{1}{2}g_4 = 0 \end{array} \right.$$

3*) $\partial_i \hat{p}^4(\hat{G}) = 0, i = 1, 2$ donne:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_4 + \frac{1}{2}e_4 = 0 \\ c_4 - \frac{1}{2}e_4 = 0 \end{array} \right.$$

de ces équations on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_4 = -b_4 \\ d_4 = b_4 \\ g_4 = -2b_4 \\ e_4 = -2b_4 \\ f_4 = 2b_4 \\ h_4 = -4b_4 \end{array} \right.$$

soit:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = a_4 \\ p_4 = a_4 - b_4 \\ p_{12} = a_4 \\ p_9 = a_4 - b_4 \\ p_{13} = a_4 - b_4 \\ p_{14} = a_4 \\ p_{18} = a_4 - b_4 \\ p_{17} = a_4 \end{array} \right.$$

Ce qui donne:

$$\begin{cases} p_1 = p_{12} = p_{14} = p_{17} \dots (2.96a) \\ p_4 = p_9 = p_{13} = p_{18} \dots (2.96b) \end{cases}$$

De (2.95) et (2.96) on obtient:

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = p_6 = p_8 = p_{10} = p_{12} = p_{14} = p_{15} = p_{17} = \alpha \dots (2.97a), \\ p_2 = p_4 = p_5 = p_7 = p_9 = p_{11} = p_{13} = p_{16} = p_{18} = \beta \dots (2.97b). \end{cases}$$

Pour conclure que p est constant sur M il suffit de montrer qu'on a $\alpha = \beta$. Pour cela :

* Soit $u \in V_{0,M}$ tel que le seul degré de liberté non nul est la valeur de u au point M où $\hat{M} = (0, \frac{1}{2}, 0)$, ainsi la condition $(\text{div} u, p)_M = 0$ implique:

$$\begin{aligned} & \left(\left| J_F(\hat{M}) \right| J_F^{-T}(\hat{M}) \nabla \hat{p}(\hat{M}) \right) \Big|_{\hat{K}_1} + \left(\left| J_F(\hat{M}) \right| J_F^{-T}(\hat{M}) \nabla \hat{p}(\hat{M}) \right) \Big|_{\hat{K}_2} + \\ & + \left(\left| J_F(\hat{M}) \right| J_F^{-T}(\hat{M}) \nabla \hat{p}(\hat{M}) \right) \Big|_{\hat{K}_3} + \left(\left| J_F(\hat{M}) \right| J_F^{-T}(\hat{M}) \nabla \hat{p}(\hat{M}) \right) \Big|_{\hat{K}_4} = 0 \dots (2.98) \end{aligned}$$

soient $\alpha^{ij}, j = 1, 2, 3$ les vecteurs colonnes de la matrice $\left(\left| J_F(\hat{M}) \right| J_F^{-T}(\hat{M}) \right) \Big|_{\hat{K}_i}, i = 1, \dots, 4$. On remarque que:

$$\begin{cases} \alpha^{11} = \alpha^{31} \dots (2.99), \\ \alpha^{13} = \alpha^{23} \dots (2.100), \\ \alpha^{21} = \alpha^{41} \dots (2.101), \\ \alpha^{33} = \alpha^{43} \dots (2.102). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_1 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_1} = \partial_1 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_2} \dots (2.103), \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_1} = \partial_3 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_3} \dots (2.104), \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_2} = \partial_3 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_4} \dots (2.105), \\ \partial_1 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_3} = \partial_1 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_4} \dots (2.106). \end{cases}$$

et on a aussi:

$$\partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_1} = \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_2} = \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_3} = \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \Big|_{\hat{K}_4} = \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \dots (2.107)$$

En effet,

$$F_i^j(\hat{X}) = a_i^j + b_i^j \hat{x} + c_i^j \hat{y} + d_i^j \hat{z} + e_i^j \hat{x}\hat{y} + f_i^j \hat{x}\hat{z} + g_i^j \hat{y}\hat{z} + h_i^j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, i = \overline{1,3}, j = 1, \dots, 4$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

* $\alpha^{11} = \alpha^{31}$?

$$\begin{aligned} \alpha^{j1} &= \begin{bmatrix} \partial_2 F_2^j(\hat{M}) \partial_3 F_3^j(\hat{M}) - \partial_2 F_3^j(\hat{M}) \partial_3 F_2^j(\hat{M}) \\ \partial_2 F_3^j(\hat{M}) \partial_3 F_1^j(\hat{M}) - \partial_2 F_1^j(\hat{M}) \partial_3 F_3^j(\hat{M}) \\ \partial_2 F_1^j(\hat{M}) \partial_3 F_2^j(\hat{M}) - \partial_2 F_2^j(\hat{M}) \partial_3 F_1^j(\hat{M}) \end{bmatrix}, j = 1, 3 \\ &\begin{cases} \partial_2 F_i^j(\hat{M}) = c_i^j \\ \partial_3 F_i^j(\hat{M}) = d_i^j + \frac{1}{2} g_i^j \end{cases}, j = 1, 3, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\alpha_{j1} = \begin{bmatrix} \partial_2 F_j^2(M) \partial_3 F_j^3(M) - \partial_2 F_j^3(M) \partial_3 F_j^2(M) \\ \partial_2 F_j^3(M) \partial_3 F_j^1(M) - \partial_2 F_j^1(M) \partial_3 F_j^3(M) \\ \partial_2 F_j^1(M) \partial_3 F_j^2(M) - \partial_2 F_j^2(M) \partial_3 F_j^1(M) \end{bmatrix}, j = 2, 4$$

ce qui implique que : $\alpha_{13} = \alpha_{23}$ d'où (2.100).

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_2 F_j^1(M) = \partial_2 F_j^2(M) \\ \partial_1 F_j^1(M) = \partial_1 F_j^2(M) \end{array} \right\}, j = 1, 2, 3.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} b_j^i = x_j^i - x_j^i \\ c_j^i = x_j^i - x_j^i \\ x_j^i = x_j^i - x_j^i \end{array} \right\}, j = 1, 2, i = 1, 2, 3.$$

de ces équations on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^i = a_j^i + b_j^i + c_j^i \\ x_j^i = a_j^i + d_j^i + e_j^i \\ x_j^i = a_j^i + d_j^i + e_j^i \end{array} \right\}, j = 1, 2, i = 1, 2, 3.$$

mais, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_2 F_j^2(M) = c_j^i \\ \partial_1 F_j^1(M) = b_j^i + \frac{1}{2} c_j^i \end{array} \right\}, j = 1, 2, i = 1, 2, 3.$$

$$\alpha_{j3} = \begin{bmatrix} \partial_1 F_j^1(M) \partial_2 F_j^2(M) - \partial_1 F_j^2(M) \partial_2 F_j^1(M) \\ \partial_1 F_j^2(M) \partial_2 F_j^3(M) - \partial_1 F_j^3(M) \partial_2 F_j^2(M) \\ \partial_1 F_j^3(M) \partial_2 F_j^1(M) - \partial_1 F_j^1(M) \partial_2 F_j^3(M) \end{bmatrix}, j = 1, 2$$

ce qui implique que : $\alpha_{11} = \alpha_{31}$ d'où (2.99).

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_2 F_j^1(M) = \partial_2 F_j^3(M) \\ \partial_3 F_j^1(M) = \partial_3 F_j^3(M) \end{array} \right\}, j = 1, 2, 3.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} g_j^i = x_j^i - x_j^i + x_j^i - x_j^i \\ d_j^i = x_j^i - x_j^i \\ c_j^i = x_j^i - x_j^i \end{array} \right\}, j = 1, 3, i = 1, 2, 3$$

de ces équations on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j^i = a_j^i + d_j^i + e_j^i \\ x_j^i = a_j^i + d_j^i + e_j^i \\ x_j^i = a_j^i + d_j^i + e_j^i \end{array} \right\}, j = 1, 3, i = 1, 2, 3.$$

mais, on a :

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^j(\hat{M}) = c_i^j \\ \partial_3 F_i^j(\hat{M}) = d_i^j + \frac{1}{2}g_i^j \end{cases}, j = 2, 4, i = 1, 2, 3.$$

mais, on a:

$$\begin{cases} x_i^1 = a_i^j \\ x_i^4 = a_i^j + c_i^j \\ x_i^9 = a_i^j - d_i^j \\ x_i^{12} = a_i^j + c_i^j - d_i^j - g_i^j \end{cases}, j = 2, 4, i = 1, 2, 3.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} c_i^j = x_i^4 - x_i^1 \\ d_i^j = x_i^1 - x_i^9 \\ g_i^j = x_i^4 - x_i^1 + x_i^9 - x_i^{12} \end{cases}, j = 2, 4, i = 1, 2, 3.$$

donc:

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^2(\hat{M}) = \partial_2 F_i^4(\hat{M}) \\ \partial_3 F_i^2(\hat{M}) = \partial_3 F_i^4(\hat{M}) \end{cases}, i = 1, 2, 3.$$

ce qui implique que : $\alpha^{21} = \alpha^{41}$ d'où (2.101).

* $\alpha^{33} = \alpha^{13}$?

$$\alpha^{j3} = \begin{bmatrix} \partial_1 F_2^j(\hat{M})\partial_2 F_3^j(\hat{M}) - \partial_1 F_3^j(\hat{M})\partial_2 F_2^j(\hat{M}) \\ \partial_1 F_3^j(\hat{M})\partial_2 F_1^j(\hat{M}) - \partial_1 F_1^j(\hat{M})\partial_2 F_3^j(\hat{M}) \\ \partial_1 F_1^j(\hat{M})\partial_2 F_2^j(\hat{M}) - \partial_1 F_2^j(\hat{M})\partial_2 F_1^j(\hat{M}) \end{bmatrix}, j = 3, 4.$$

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^j(\hat{M}) = c_i^j \\ \partial_1 F_i^j(\hat{M}) = b_i^j + \frac{1}{2}e_i^j \end{cases}, j = 3, 4, i = 1, 2, 3.$$

mais, on a:

$$\begin{cases} x_i^1 = a_i^j \\ x_i^4 = a_i^j + c_i^j \\ x_i^{13} = a_i^j - b_i^j \\ x_i^{14} = a_i^j - b_i^j + c_i^j - e_i^j \end{cases}, j = 3, 4, i = 1, 2, 3.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} c_i^j = x_i^4 - x_i^1 \\ b_i^j = x_i^1 - x_i^{13} \\ e_i^j = x_i^4 - x_i^1 + x_i^{13} - x_i^{14} \end{cases}, j = 3, 4, i = 1, 2, 3$$

donc:

$$\begin{cases} \partial_2 F_i^3(\hat{M}) = \partial_2 F_i^4(\hat{M}) \\ \partial_1 F_i^3(\hat{M}) = \partial_1 F_i^4(\hat{M}) \end{cases}, i = 1, 2, 3.$$

ce qui implique que : $\alpha^{33} = \alpha^{13}$ d'où (2.102). On a aussi:

$$\hat{p}^j(\hat{X}) = a_j + b_j \hat{x} + c_j \hat{y} + d_j \hat{z} + e_j \hat{x}\hat{y} + f_j \hat{x}\hat{z} + g_j \hat{y}\hat{z} + h_j \hat{x}\hat{y}\hat{z}, j = 1, \dots, 4$$

(l'indice j c'est pour dire qu'on est sur $\hat{K}_j$).

$$* \partial_1 \hat{p}^1(\hat{M}) = \partial_1 \hat{p}^2(\hat{M})?$$

$$\partial_1 \hat{p}^j(\hat{M}) = b_j + \frac{1}{2}e_j, j = 1, 2$$

mais, on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_2 = a_j + b_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_3 = a_j + b_j + c_j + e_j \end{cases}, j = 1, 2.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} b_j = p_2 - p_1 \\ e_j = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 \end{cases}, j = 1, 2$$

ce qui implique que:

$$\partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} = \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_2}$$

d'où (2.103).

$$* \partial_3 \hat{p}^1(\hat{M}) = \partial_3 \hat{p}^3(\hat{M})?$$

$$\partial_3 \hat{p}^j(\hat{M}) = d_j + \frac{1}{2}g_j, j = 1, 3$$

mais, on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_5 = a_j + d_j \\ p_8 = a_j + c_j + d_j + g_j \end{cases}, j = 1, 3.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} d_j = p_5 - p_1 \\ g_j = p_8 - p_5 + p_1 - p_4 \end{cases}, j = 1, 3$$

ce qui implique que:

$$\partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} = \partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_3}$$

d'où (2.101).

$$\partial_3 \hat{p}^2(\hat{M}) = \partial_3 \hat{p}^4(\hat{M})?$$

$$\partial_3 \hat{p}^j(\hat{M}) = d_j + \frac{1}{2}g_j, j = 2, 4$$

mais, on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_9 = a_j - d_j \\ p_{12} = a_j + c_j - d_j - g_j \end{cases}, j = 2, 4.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} d_j = p_1 - p_9 \\ g_j = p_4 - p_1 + p_9 - p_{12} \end{cases}, j = 2, 4$$

ce qui implique que:

$$\partial_3 \hat{p}^2(\hat{M}) = \partial_3 \hat{p}^4(\hat{M})$$

d'où (2.105).

$$\partial_1 \hat{p}^3(\hat{M}) = \partial_1 \hat{p}^4(\hat{M})?$$

$$\partial_1 \hat{p}^j(\hat{M}) = b_j + \frac{1}{2}e_j, j = 3, 4$$

mais, on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_{13} = a_j - b_j \\ p_4 = a_j + c_j \\ p_{14} = a_j - b_j + c_j - e_j \end{cases}, j = 3, 4.$$

de ces équations on obtient:

$$\begin{cases} b_j = p_1 - p_{13} \\ e_j = p_4 - p_1 + p_{13} - p_{14} \end{cases}, j = 3, 4$$

ce qui implique que:

$$\partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_3} = \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_4}$$

d'où (2.106).

$$\partial_2 \hat{p}^1(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}^2(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}^3(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}^4(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}(\hat{M})?$$

$$\partial_2 \hat{p}^j(\hat{M}) = c_j, j = 1, 2, 3, 4$$

mais, on a:

$$\begin{cases} p_1 = a_j \\ p_4 = a_j + c_j \end{cases}, j = 1, 2, 3, 4.$$

de ces équations on obtient:

$$c_j = p_4 - p_1, j = 1, 2, 3, 4$$

ce qui implique que:

$$\partial_2 \hat{p}^1(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}^2(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}^3(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}^4(\hat{M}) = \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) = p_4 - p_1 \dots (2.108)$$

d'où (2.107). En tenant compte de (2.99), (2.100), (2.101), (2.102), (2.103), (2.104), (2.105), (2.106), (2.107) et de (2.108) la condition (2.98) s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{12} & \alpha^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^{21} & \alpha^{22} & \alpha^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_2} \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \alpha^{11} & \alpha^{32} & \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_3} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^{21} & \alpha^{42} & \alpha^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_3} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_2} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

qui s'écrit sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} + \alpha^{21} \\ \alpha^{12} + \alpha^{22} + \alpha^{32} + \alpha^{42} \\ \alpha^{13} + \alpha^{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} + \partial_1 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_3} \\ \partial_2 \hat{p}(\hat{M}) \\ \partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_1} + \partial_3 \hat{p}(\hat{M})|_{\hat{K}_2} \end{bmatrix} = 0$$

Vue les hypothèses de régularités des hexahédres le déterminant de la matrice:

$$\begin{bmatrix} \alpha^{11} + \alpha^{21} & \alpha^{12} + \alpha^{22} + \alpha^{32} + \alpha^{42} & \alpha^{13} + \alpha^{33} \end{bmatrix}$$

est non nul d'où:

$$\partial_2 \hat{p}(\hat{M}) = 0, \dots (2.109)$$

ce qui implique d'après (2.108) que $p_1 = p_4$. En tenant compte de ca (2.90) donne:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{17} = p_{18}.$$

c'est -à-dire que p est constant sur M .

C.Q.F.D.

Ainsi, les conditions CM1, CM2, CM3 et CM4 sont satisfaites et donc le théorème 5 assure que la paire (V_h, Q_h) donnée par (2.61) et (2.62) est stable.

Chapitre III

PRECONDITIONNEMENT DU PROBLEME DE STOKES

1 Préconditionnement du problème de Stokes par la méthode de décomposition de domaines.

1.1 Introduction:

Considérons le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \text{Etant donnée } f \in L^2(\Omega), \text{ trouver } u \text{ tel que:} \\ Au = f \text{ dans } \Omega \dots\dots (3.1a) \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \dots\dots (3.2a) \end{cases}$$

où:

$$Au = - \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}), d = 2, 3 \dots\dots (3.2)$$

Les coefficients a_{ij} sont des fonctions mesurables et bornées sur Ω . De plus, on suppose (hypothèse d'ellipticité) qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tq:

$$\forall \xi \in R^d : \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_j \xi_i \geq \alpha |\xi|^2 \dots\dots (3.3).$$

La formulation faible de ce problème s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq :} \\ A(u, v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega) \dots\dots (3.4) \end{cases}$$

où :

$$A(u, v) = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \dots\dots (3.5).$$

Il est bien connu que ce problème admet une solution unique (voir Raviart-Thomas[25]).

Soit τ_h une partition régulière de Ω et soit V_h un espace d'approximation de $H_0^1(\Omega)$ défini sur cette partition. L'approximation de Galerkin du problème (3.4) est définie comme étant la solution du problème discret suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tq :} \\ A(u_h, v) = (f, v) \forall v \in V_h \dots\dots (3.6) \end{cases}$$

Soit $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq N}$ une base pour l'espace V_h , ainsi la résolution du problème (3.6) conduit au système algébrique :

$$A\mathbf{U} = F \dots\dots (3.7).$$

où

$$\begin{cases} A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}, & a_{ij} = A(\varphi_j, \varphi_i), \\ F = (F_i)_{1 \leq i \leq N}, & F_i = (f, \varphi_i). \end{cases}$$

et $U = (U_i)_{1 \leq i \leq N}$ le vecteur des valeurs aux noeuds correspondantes.

En général, la matrice A n'est pas bien conditionnée et par conséquent l'application directe de la méthode du gradient -conjugué pour le système symétrique défini positif (3.7) ne conduit pas à un bon algorithme.

La méthode de preconditionnement consiste à choisir une matrice P symétrique définie positive et qui donne une matrice $P^{-1}A$ bien conditionnée et creuse, ce qui rend l'algorithme

de résolution du système $P^{-1}AU = P^{-1}F$ plus efficace.

Si la matrice P est associée à une forme bilinéaire $B(.,.)$, le bon conditionnement de $P^{-1}A$ est assuré par l'équivalence spectrale (voir Bramble et al [6]) i.e : ils existent deux constantes $K_1, K_2 > 0$ indépendantes de h tq:

$$K_1 B(v, v) \leq A(v, v) \leq K_2 B(v, v), \forall v \in V_h \dots \dots (3.8).$$

Pour le problème approché de Stokes (1.46) le système algébrique généré s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} AU + B^T P &= F \dots (3.9a) \\ BU &= 0 \dots (3.9b) \end{cases}$$

où:

$$\begin{cases} A = (a_{ij})_{i,j}, & a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \\ B = (b_{lm})_{l,m}, & b_{lm} = b(\varphi_m, q_l), \\ F = (F_i)_i, & F_i = (f, \varphi_i). \end{cases}$$

Les $\{\varphi_i\}$ (respectivement les $\{q_l\}$) sont les fonctions de base de V_h (respectivement de Q_h) et U, P sont respectivement les vecteurs des valeurs aux noeuds de u et p . Les espaces V_h, Q_h sont choisis de tel sorte qu'ils satisfont la condition inf-sup (1.47).

Remarque 16 : *Il est bien connu que la matrice:*

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

est symétrique, mais n'est pas définie positive.

Dans ce qui suit, on s'intéresse au préconditionnement du problème de Stokes. Plus exactement, on se sert de la méthode de décomposition de domaines pour préconditionner la matrice de capacitance associée. L'approche qu'on va présenter a été initialement proposée par Quarteroni [24].

1.2 Le problème multidomaine associé au problème de Stokes:

Supposons que Ω est décomposée en deux sous-domaines Ω_1, Ω_2 tq: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Gamma$, et que la partition τ_h , sur laquelle V_h, Q_h sont définis est telle que chaque élément appartient soit à Ω_1 soit à Ω_2 .

Remarque 17 : *On utilise une approximation discontinue pour la pression et continue pour la vitesse.*

Dans le but d'introduire un problème multidomaine équivalent au problème (1.46), définissons les espaces suivants:

$$V_{h,k} = \{v|_{\Omega_k}, v \in V_h\}, k = 1, 2 \dots (3.10)$$

$$V_{h,k}^* = \{v \in V_{h,k}, v|_{\Gamma} = 0\}, k = 1, 2 \dots (3.11)$$

$$\Phi_h = \{v|_{\Gamma}, v \in V_h\} \dots (3.12)$$

$$Q_{h,k} = \{q|_{\Omega_k}, q \in Q_h\}, k = 1, 2 \dots (3.13)$$

Définissons l'extention $\rho_k \varphi$ de $\varphi \in \Phi_h$ à Ω_k par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_k : \Phi_h \longrightarrow V_{h,k} \\ \rho_k \varphi = \varphi \text{ sur } \Gamma \\ \rho_k \varphi = 0 \text{ pour chaque noeud interieur à } \Omega_k. \end{array} \right. \dots (3.14)$$

Donnons maintenant le lemme suivant :

Lemme 8 : *Le problème (1.46) est équivalent, au problème multidomaine suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{h,k}, p_{h,k}) \in V_{h,k} \times Q_{h,k}, k = 1, 2. \text{ Tq:} \\ a_1(u_{h,1}, v) + b_1(v, p_{h,1}) = (f_1, v), \forall v \in V_{h,1}^* \dots (3.15a) \\ b_1(u_{h,1}, q) = 0, \forall q \in Q_{h,1} \dots (3.15b) \\ u_{h,1} = u_{h,2} \text{ sur } \Gamma \dots (3.15c) \\ a_1(u_{h,1}, \rho_1 \varphi) + b_1(\rho_1 \varphi, p_{h,1}) + \\ + a_2(u_{h,2}, \rho_2 \varphi) + b_2(\rho_2 \varphi, p_{h,2}) = (f_1, \rho_1 \varphi) + \\ + (f_2, \rho_2 \varphi), \forall \varphi \in \Phi_h \dots (3.15d) \\ a_2(u_{h,2}, v) + b_2(v, p_{h,2}) = (f_2, v), \forall v \in V_{h,2}^* \dots (3.15e) \\ b_2(u_{h,2}, q) = 0, \forall q \in Q_{h,2} \dots (3.15f) \end{array} \right.$$

où a_k, b_k et f_k désignent la restriction de a, b et f à Ω_k et $u_{h,k} = u_h|_{\Omega_k}, p_{h,k} = p_h|_{\Omega_k}$.

Démonstration: Soit $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ la solution du problème (1.46), montrons que $(u_{h,k}, p_{h,k}), k = 1, 2$ est solution du problème (3.15).

Pour $v \in V_{h,1}^*$ et $q \in Q_{h,1}$ définissons: $v' = \begin{cases} v \text{ sur } \Omega_1 \\ 0 \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$ et $q' = \begin{cases} q \text{ sur } \Omega_1 \\ 0 \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$

d'où: $v' \in V_h$ et $q' \in Q_h$. Donc comme (u_h, p_h) est solution du problème (1.46), alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_h, v') + b(v', p_h) = (f, v') \\ b(u_h, q') = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(u_{h,1}, v) + a_2(u_{h,2}, 0) + b_1(v, p_{h,1}) + b_2(0, p_{h,2}) = (f_1, v) + (f_2, 0) \\ b_1(u_{h,1}, q) + b_2(u_{h,2}, 0) = 0 \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(u_{h,1}, v) + b_1(v, p_{h,1}) = (f_1, v), \forall v \in V_{h,1}^* \\ b_1(u_{h,1}, q) = 0, \forall q \in Q_{h,1} \end{array} \right.$$

d'où : (3.15a) et (3.15b).

De même pour $v \in V_{h,2}^*$ et $q \in Q_{h,2}$ définissons: $v' = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Omega_1 \\ v \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$ et $q' = \begin{cases} 0 \text{ sur } \Omega_1 \\ q \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$

d'où: $v' \in V_h$ et $q' \in Q_h$. Donc comme (u_h, p_h) est solution du problème (1.46), alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_h, v') + b(v', p_h) = (f, v') \\ b(u_h, q') = 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1(u_{h,1}, 0) + a_2(u_{h,2}, v) + b_1(0, p_{h,1}) + b_2(v, p_{h,2}) = (f_1, 0) + (f_2, v) \\ b_1(u_{h,1}, 0) + b_2(u_{h,2}, q) = 0 \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{cases} a_2(u_{h,2}, v) + b_2(v, p_{h,2}) &= (f_2, v), \forall v \in V_{h,2}^* \\ b_2(u_{h,2}, q) &= 0, \forall q \in Q_{h,2} \end{cases}$$

d'où, (3.15e) et (3.15f). De plus, on a (3.15c) par continuité de la vitesse.

Il nous reste seulement qu'à établir (3.15d). Pour cela soit : $\varphi \in \Phi_h$ et posons

$$v = \begin{cases} \rho_1 \varphi \text{ sur } \Omega_1 \\ \rho_2 \varphi \text{ sur } \Omega_2 \end{cases} \text{ ainsi } v \in V_h.$$

D'où : $a(u_h, v) + b(v, p_h) = (f, v)$,

ce qui donne:

$$\begin{cases} a_1(u_{h,1}, \rho_1 \varphi) + a_2(u_{h,2}, \rho_1 \varphi) + b_1(\rho_1 \varphi, p_{h,1}) + b_2(\rho_2 \varphi, p_{h,2}) &= (f_1, \rho_1 \varphi) + (f_2, \rho_2 \varphi), \\ &\forall \varphi \in \Phi_h \end{cases}$$

d'où (3.15d).

Réciproquement: soient $v \in V_h$ et $q \in Q_h$ et posons:

$$\begin{cases} v_1 = v - \rho_1 \gamma_0 v \text{ sur } \Omega_1 \\ v_2 = v - \rho_2 \gamma_0 v \text{ sur } \Omega_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} q_1 = q|_{\Omega_1} \\ q_2 = q|_{\Omega_2} \end{cases} \text{ où } \gamma_0 v \text{ désigne la trace de } v \text{ sur } \Gamma \text{ i.e: } \gamma_0 v = v|_{\Gamma}.$$

On remarque que : $v_1 \in V_{h,1}^*$, $v_2 \in V_{h,2}^*$, $q_1 \in Q_{h,1}$ et $q_2 \in Q_{h,2}$. Montrons que: $u_h = \begin{cases} u_{h,1} \text{ sur } \Omega_1 \\ u_{h,2} \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$ et $p_h = \begin{cases} p_{h,1} \text{ sur } \Omega_1 \\ p_{h,2} \text{ sur } \Omega_2 \end{cases}$ sont solutions du problème (1.46). En effet, on a:

$$\begin{aligned} a(u_h, v) + b(v, p_h) &= a_1(u_{h,1}, v_1 + \rho_1 \gamma_0 v) + b_1(v_1 + \rho_1 \gamma_0 v, p_{h,1}) + \\ &\quad + a_2(u_{h,2}, v_2 + \rho_2 \gamma_0 v) + b_2(v_2 + \rho_2 \gamma_0 v, p_{h,2}) \\ &= a_1(u_{h,1}, v_1) + b_1(v_1, p_{h,1}) + \\ &\quad + a_1(u_{h,1}, \rho_1 \gamma_0 v) + b_1(\rho_1 \gamma_0 v, p_{h,1}) + \\ &\quad + a_2(u_{h,2}, v_2) + b_2(v_2, p_{h,2}) + \\ &\quad + a_2(u_{h,2}, \rho_2 \gamma_0 v) + b_2(\rho_2 \gamma_0 v, p_{h,2}) \\ &= (f_1, v_1) + (f_1, \rho_1 \gamma_0 v) + \\ &\quad + (f_2, v_2) + (f_2, \rho_2 \gamma_0 v) \\ &= (f_1, v_1 + \rho_1 \gamma_0 v) + \\ &\quad + (f_2, v_2 + \rho_2 \gamma_0 v) \\ &= (f_1, v) + (f_2, v) \\ &= (f, v). \end{aligned}$$

$$\text{et } b(u_h, q) = b_1(u_{h,1}, q_1) + b_2(u_{h,2}, q_2) = 0 + 0 = 0.$$

C.Q.F.D.

1.3 La matrice de capacitance associée au problème multidomaine:

Désignons par $\{\varphi_i^k\}$, $\{q_j^k\}$, $k = 1, 2$, $\{\psi_m\}$ respectivement les fonctions de bases de $V_{h,k}^*$, $Q_{h,k}$ et Φ_h , et par U_k^0 , P_k , $k = 1, 2$, U_3 respectivement les vecteurs des valeurs aux noeuds correspondantes de $u_{h,k}$, $p_{h,k}$ et $u_h|_{\Gamma}$.

Définissons les matrices suivantes :

$$\begin{cases} A_{kk}(N_k \times N_k) = (A_{kk})_{i,j} = a_k(\varphi_j^k, \varphi_i^k) \dots (3.16a) \\ B_{kk}(M_k \times N_k) = (B_{kk})_{i,j} = b_k(\varphi_j^k, q_i^k) \dots (3.16b) \\ A_{k3}(N_k \times N_3) = (A_{k3})_{i,j} = a_k(\rho_k \psi_j, \varphi_i^k) \dots (3.16c) \\ B_{k3}(M_k \times N_3) = (B_{k3})_{i,j} = b_k(\rho_k \psi_j, q_i^k) \dots (3.16d) \\ A_{33}^k(N_3 \times N_3) = (A_{33}^k)_{i,j} = a_k(\rho_k \psi_j, \rho_k \psi_i) \dots (3.16e) \\ (F_k)_i = (f_k, \varphi_i^k) \dots (3.16f) \\ (F_{k3})_i = (f_k, \rho_k \psi_i), F_3 = F_{13} + F_{23} \dots (3.16g) \end{cases}$$

Lemme 9 : avec les notations (3.16) le problème multidomaine (3.15) se ramène au système linéaire suivant:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11}^T & A_{13} & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{13}^T & B_{13}^T & A_{33} & A_{23}^T & B_{23}^T \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{22} & B_{22}^T \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^0 \\ P_1 \\ U_3 \\ U_2^0 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dots (3.17).$$

Démonstration: posons:

$$U_1^0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_1} \end{bmatrix}, U_2^0 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{N_2} \end{bmatrix}, U_3 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{N_3} \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{M_1} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{M_2} \end{bmatrix}.$$

et

$$\begin{cases} u_{h,1} = \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j \varphi_j^1 + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j \rho_1 \psi_j \\ u_{h,2} = \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j \varphi_j^2 + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j \rho_2 \psi_j \\ p_{h,1} = \sum_{j=1}^{M_1} \gamma_j q_j^1 \\ p_{h,2} = \sum_{j=1}^{M_2} \lambda_j q_j^2 \end{cases}$$

ainsi (3.15a) donne

$$\sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j a_1(\varphi_j^1, v) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_1(\rho_1 \psi_j, v) + \sum_{j=1}^{M_1} \gamma_j b_1(v, q_j^1) = (f_1, v), \forall v \in V_{h,1}^* \dots (*)$$

de même (3.15b) donne

$$\sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j b_1(\varphi_j^1, q) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j b_1(\rho_1 \psi_j, q) = 0, \forall q \in Q_{h,1} \dots (2*)$$

pour $v = \varphi_i^1, i = 1, \dots, N_1$ on a d'après (*)

$$\sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j a_1(\varphi_j^1, \varphi_i^1) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_1(\rho_1 \psi_j, \varphi_i^1) + \sum_{j=1}^{M_1} \gamma_j b_1(\varphi_i^1, q_j^1) = (f_1, \varphi_i^1)$$

c'est-à-dire $A_{11}U_1^0 + A_{13}U_3 + B_{11}^T P_1 = F_1$.

de même pour $q = q_i^1, i = 1, \dots, M_1$ on a d'après (2*)

$$\sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j b_1(\varphi_j^1, q_i^1) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j b_1(\rho_1 \psi_j, q_i^1) = 0$$

i.e $B_{11}U_1^0 + B_{13}U_3 = 0$.

(3.15e) donne

$$\sum_{j=1}^{N_2} \beta_j a_2(\varphi_j^2, v) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_2(\rho_2 \psi_j, v) + \sum_{j=1}^{M_2} \lambda_j b_2(v, q_j^2) = (f_2, v), \forall v \in V_{h,2}^* \dots (3*)$$

de même d'après (3.15f) on obtient

$$\sum_{j=1}^{N_2} \beta_j b_2(\varphi_j^2, q) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j b_2(\rho_2 \psi_j, q) = 0, \forall q \in Q_{h,2} \dots (4*)$$

pour $v = \varphi_i^2, i = 1, \dots, N_2$ (3*) donne:

$$\sum_{j=1}^{N_2} \beta_j a_2(\varphi_j^2, \varphi_i^2) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_2(\rho_2 \psi_j, \varphi_i^2) + \sum_{j=1}^{M_2} \lambda_j b_2(\varphi_i^2, q_j^2) = (f_2, \varphi_i^2)$$

c'est-à-dire: $A_{22}U_2^0 + A_{23}U_3 + B_{22}^T P_2 = F_2$.

de même pour $q = q_i^2, i = 1, \dots, M_2$ (4*) devient

$$\sum_{j=1}^{N_2} \beta_j b_2(\varphi_j^2, q_i^2) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j b_2(\rho_2 \psi_j, q_i^2) = 0$$

i.e $B_{22}U_2^0 + B_{23}U_3 = 0$.

De même (3.15d) donne:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j a_1(\varphi_j^1, \rho_1 \varphi) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_1(\rho_1 \psi_j, \rho_1 \varphi) &+ \sum_{j=1}^{M_1} \gamma_j b_1(\rho_1 \varphi, q_j^1) + \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j a_2(\varphi_j^2, \rho_2 \varphi) + \\ + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_2(\rho_2 \psi_j, \rho_2 \varphi) + \sum_{j=1}^{M_2} \lambda_j b_2(\rho_2 \varphi, q_j^2) &= (f_1, \rho_1 \varphi) + (f_2, \rho_2 \varphi), \forall \varphi \in \Phi_h \dots (5*) \end{aligned}$$

pour $\varphi = \psi_i, i = 1, \dots, N_3$ on obtient d'après (5*)

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_j a_1(\varphi_j^1, \rho_1 \psi_i) + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_1(\rho_1 \psi_j, \rho_1 \psi_i) &+ \sum_{j=1}^{M_1} \gamma_j b_1(\rho_1 \psi_i, q_j^1) + \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j a_2(\varphi_j^2, \rho_2 \psi_i) + \\ + \sum_{j=1}^{N_3} \mu_j a_2(\rho_2 \psi_j, \rho_2 \psi_i) + \sum_{j=1}^{M_2} \lambda_j b_2(\rho_2 \psi_i, q_j^2) &= (f_1, \rho_1 \psi_i) + (f_2, \rho_2 \psi_i) \end{aligned}$$

i.e: $A_{13}^T U_1^0 + A_{33}^T U_3 + B_{13}^T P_1 + A_{23}^T U_2^0 + A_{33}^T U_3 + B_{23}^T P_2 = F_{13} + F_{23} = F_3$.

Ainsi on a le système algébrique linéaire:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11}U_1^0 + A_{13}U_3 + B_{11}^T P_1 = F_1 \\ B_{11}U_1^0 + B_{13}U_3 = 0 \\ A_{13}^T U_1^0 + A_{33}^T U_3 + B_{13}^T P_1 + A_{23}^T U_2^0 + A_{33}^T U_3 + B_{23}^T P_2 = F_{13} + F_{23} = F_3 \\ A_{22}U_2^0 + A_{23}U_3 + B_{22}^T P_2 = F_2 \\ B_{22}U_2^0 + B_{23}U_3 = 0 \end{array} \right.$$

qui s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & B_{11}^T & A_{13} & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{13}^T & B_{13}^T & A_{33} & A_{23}^T & B_{23}^T \\ 0 & 0 & A_{23} & A_{22} & B_{22}^T \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^0 \\ P_1 \\ U_3 \\ U_2^0 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

avec $A_{33} = A_{33}^1 + A_{33}^2$

C.Q.F.D.

Dans le but de donner la matrice de capacitance associe au problème multidomaine (3.15), définissons:

$$K_i = \begin{pmatrix} A_{ii} & B_{ii}^T \\ B_{ii} & 0 \end{pmatrix}, C_{i3} = \begin{pmatrix} A_{i3} \\ B_{i3} \end{pmatrix} \text{ et } J_i = \begin{pmatrix} A_{i3}^T & B_{i3}^T \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots (3.18)$$

donc (3.17), s'écrit :

$$\begin{pmatrix} K_1 & C_{13} & 0 \\ J_1 & A_{33} & J_2 \\ 0 & C_{23} & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ U_3 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ F_3 \\ G_2 \end{pmatrix}$$

où

$$t_k = \begin{pmatrix} U_k^0 \\ \rho_k \end{pmatrix}, G_k = \begin{pmatrix} F_k \\ 0 \end{pmatrix}, k = 1, 2.$$

donc

$$\begin{cases} K_1 t_1 + C_{13} U_3 = G_1 \\ J_1 t_1 + A_{33} U_3 + J_2 t_2 = F_3 \\ C_{23} U_3 + K_2 t_2 = G_2 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} t_1 = K_1^{-1} G_1 - K_1^{-1} C_{13} U_3 \\ t_2 = K_2^{-1} G_2 - K_2^{-1} C_{23} U_3 \end{cases}$$

d'où

$$J_1 (K_1^{-1} G_1 - K_1^{-1} C_{13} U_3) + A_{33} U_3 + J_2 (K_2^{-1} G_2 - K_2^{-1} C_{23} U_3) = F_3$$

soit

$$(A_{33}^1 - J_1 K_1^{-1} C_{13}^1 + A_{33}^2 - J_2 K_2^{-1} C_{23}^2) U_3 = F_3 - J_1 K_1^{-1} G_1 - J_2 K_2^{-1} G_2$$

qui s'écrit sous la forme:

$$C U_3 = G \dots (3.19a)$$

avec

$$\begin{cases} C = A_{33}^1 - J_1 K_1^{-1} C_{13}^1 + A_{33}^2 - J_2 K_2^{-1} C_{23}^2 \dots (3.19b). \\ G = F_3 - J_1 K_1^{-1} G_1 - J_2 K_2^{-1} G_2 \dots (3.19c). \end{cases}$$

la matrice C obtenue est appelé matrice de capacitance.

1.4 Propriétés de la matrice de capacitance:

Pour chaque $\varphi \in \Phi_h$ et pour chaque $k = 1, 2$ soit $(w_k(\varphi), \pi_k(\varphi)) \in V_{h,k} \times Q_{h,k}$ la solution du problème suivant:

$$\begin{cases} a_k(w_k(\varphi), v) + b_k(v, \pi_k(\varphi)) = 0, \forall v \in V_{h,k}^* \dots (3.20a) \\ b_k(w_k(\varphi), q) = 0, \forall q \in Q_{h,k} \dots (3.20b) \\ w_k(\varphi) = \varphi \text{ sur } \Gamma \dots (3.20c) \end{cases}$$

Pour chaque $\varphi, \psi \in \Phi_h$ on définit la forme:

$$A(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^2 a_k(w_k(\varphi), \rho_k \psi) + b_k(\rho_k \psi, \pi_k(\varphi)) \dots (3.21)$$

Lemme 10 : La forme A ainsi définie satisfait: $[CX_\varphi, X_\psi] = A(\varphi, \psi), \forall \varphi, \psi \in \Phi_h \dots (3.22)$
 où X_φ (X_ψ respectivement) est le vecteur dont ces N_3 composantes sont les valeurs de φ (respectivement de ψ) aux noeuds de Γ . et $[\cdot, \cdot]$ désigne le produit scalaire de R^{N_3}

Démonstration: On a

$$w_k = \sum_{j=1}^{N_k} w_{kj} \varphi_j^k + \sum_{j=1}^{N_3} w_{3j} \rho_k \psi_j, k = 1, 2.$$

$$W_k^0 = \begin{bmatrix} w_{k1} \\ w_{k2} \\ \vdots \\ w_{kN_k} \end{bmatrix}, k = 1, 2, X_\varphi = \begin{bmatrix} w_{31} \\ w_{32} \\ \vdots \\ w_{3N_k} \end{bmatrix}$$

$$\rho_k \psi = \sum_{j=1}^{N_k} \rho_{kj} \varphi_j^k + \sum_{j=1}^{N_3} \rho_{3j} \rho_k \psi_j, k = 1, 2.$$

$$\rho_k^0 = \begin{bmatrix} \rho_{k1} \\ \rho_{k2} \\ \vdots \\ \rho_{kN_k} \end{bmatrix}, k = 1, 2, X_\psi = \begin{bmatrix} \rho_{31} \\ \rho_{32} \\ \vdots \\ \rho_{3N_k} \end{bmatrix}$$

$$\pi_k = \sum_{j=1}^{N_k} \pi_{kj} q_j^k, k = 1, 2.$$

$$\pi_k = \begin{bmatrix} \pi_{k1} \\ \pi_{k2} \\ \vdots \\ \pi_{kM_k} \end{bmatrix}, k = 1, 2$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} a_1(w_1(\varphi), \rho_1 \psi) + b_1(\rho_1 \psi, \pi_1(\varphi)) &= \sum_{i=1}^{N_1} \rho_{1i} \sum_{j=1}^{N_1} w_{1j} a_1(\varphi_j^1, \varphi_i^1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_1} \rho_{1i} \sum_{j=1}^{N_3} w_{3j} a_1(\rho_1 \psi_j, \varphi_i^1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_3} \rho_{3i} \sum_{j=1}^{N_1} w_{1j} a_1(\varphi_j^1, \rho_1 \psi_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_3} \rho_{3i} \sum_{j=1}^{N_3} w_{3j} a_1(\rho_1 \psi_j, \rho_1 \psi_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_1} \rho_{1i} \sum_{j=1}^{M_1} \pi_{1j} b_1(\varphi_i^1, q_j^1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_3} \rho_{3i} \sum_{j=1}^{M_1} \pi_{1j} b_1(\rho_1 \psi_i, q_j^1). \\ a_1(w_1(\varphi), \rho_1 \psi) + b_1(\rho_1 \psi, \pi_1(\varphi)) &= \rho_1^{0T} A_{11} W_1^0 + \rho_1^{0T} A_{13} X_\varphi + X_\psi^T A_{13}^T W_1^0 \\ &\quad + X_\psi^T A_{33}^T X_\varphi + \rho_1^{0T} B_{11}^T \pi_1 + X_\psi^T B_{13}^T \pi_1. \\ &= \rho_1^{0T} (A_{11} W_1^0 + A_{13} X_\varphi + B_{11}^T \pi_1) \\ &\quad + X_\psi^T (A_{13}^T W_1^0 + A_{33}^T X_\varphi + B_{13}^T \pi_1). \end{aligned}$$

Mais, d'après (3.20a) on a

$$A_{11} W_1^0 + A_{13} X_\varphi + B_{11}^T \pi_1 = 0$$

d'où

$$u_1(w_1(\varphi), \rho_1\psi) + b_1(\rho_1\psi, \pi_1(\varphi)) = X_\psi^T(A_{13}^TW_1^0 + A_{33}^1X_\varphi + B_{13}^T\pi_1)\dots(3.23).$$

De même

$$\begin{aligned} u_2(w_2(\varphi), \rho_2\psi) + b_2(\rho_2\psi, \pi_2(\varphi)) = & \sum_{i=1}^{N_2} \rho_{2i} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2j} a_2(\varphi_j^2, \varphi_i^2) \\ & + \sum_{i=1}^{N_2} \rho_{2i} \sum_{j=1}^{N_3} w_{3j} a_2(\rho_2\psi_j, \varphi_i^2) \\ & + \sum_{i=1}^{N_3} \rho_{3i} \sum_{j=1}^{N_2} w_{2j} a_2(\varphi_j^2, \rho_2\psi_i) \\ & + \sum_{i=1}^{N_3} \rho_{3i} \sum_{j=1}^{N_3} w_{3j} a_2(\rho_2\psi_j, \rho_2\psi_i) \\ & + \sum_{i=1}^{N_2} \rho_{2i} \sum_{j=1}^{M_2} \pi_{2j} b_2(\varphi_i^2, q_j^2) \\ & + \sum_{i=1}^{N_3} \rho_{3i} \sum_{j=1}^{M_2} \pi_{2j} b_2(\rho_2\psi_i, q_j^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2(w_2(\varphi), \rho_2\psi) + b_2(\rho_2\psi, \pi_2(\varphi)) &= \rho_2^{0T} A_{22} W_2^0 + \rho_2^{0T} A_{23} X_\varphi + X_\psi^T A_{23}^T W_2^0 \\ &+ X_\psi^T A_{33}^T X_\varphi + \rho_2^{0T} B_{22}^T \pi_2 + X_\psi^T B_{23}^T \pi_2. \\ &= \rho_2^{0T} (A_{22} W_2^0 + A_{23} X_\varphi + B_{22}^T \pi_2) \\ &+ X_\psi^T (A_{23}^T W_2^0 + A_{33}^T X_\varphi + B_{23}^T \pi_2). \end{aligned}$$

Mais, d'après (3.20a) on a

$$A_{22} W_2^0 + A_{23} X_\varphi + B_{22}^T \pi_2 = 0$$

d'où

$$u_2(w_2(\varphi), \rho_2\psi) + b_2(\rho_2\psi, \pi_2(\varphi)) = X_\psi^T (A_{23}^T W_2^0 + A_{33}^T X_\varphi + B_{23}^T \pi_2) \dots (3.23).$$

De plus, (3.20) donne

$$\begin{cases} A_{kk} W_k^0 + A_{k3} X_\varphi + B_{kk}^T \pi_k = 0 \dots (3.25a), \\ B_{kk} W_k^0 + B_{k3} X_\varphi = 0 \dots (3.25b). \end{cases}$$

posons

$$\theta_k = \begin{bmatrix} W_k^0 \\ \pi_k \end{bmatrix}, k = 1, 2, \dots (3.26).$$

Ainsi (3.25) s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_{kk} & B_{kk}^T \\ B_{kk} & 0 \end{pmatrix} \theta_k + \begin{pmatrix} A_{k3} \\ B_{k3} \end{pmatrix} X_\varphi = 0, k = 1, 2.$$

soit

$$\theta_k = - \begin{pmatrix} A_{kk} & B_{kk}^T \\ B_{kk} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{k3} \\ B_{k3} \end{pmatrix} X_\varphi$$

i.e

$$\theta_k = K_k^{-1} C_{k3} X_\varphi, k = 1, 2, \dots (3.27)$$

On remarque aussi que

$$A(\varphi, \psi) = X_\varphi^T \left[\begin{pmatrix} A_{13}^T & B_{13}^T \end{pmatrix} \theta_1 + \begin{pmatrix} A_{23}^T & B_{23}^T \end{pmatrix} \theta_2 + A_{33}^1 X_\varphi + A_{33}^2 X_\varphi \right]$$

$$A(\varphi, \psi) = X_\psi^T [J_1 \theta_1 + J_2 \theta_2 + A_{33}^1 X_\varphi + A_{33}^2 X_\varphi] \dots (3.28).$$

En tenant compte de (3.27),(3.28) devient:

$$A(\varphi, \psi) = X_{\psi}^T \left[-J_1 K_1^{-1} C_{13} X_{\varphi} - J_2 K_2^{-1} C_{23} X_{\varphi} + A_{33}^1 X_{\varphi} + A_{33}^2 X_{\varphi} \right]$$

$$A(\varphi, \psi) = X_{\psi}^T \left(A_{33}^1 - J_1 K_1^{-1} C_{13} + A_{33}^2 - J_2 K_2^{-1} C_{23} \right) X_{\varphi}$$

$$A(\varphi, \psi) = \left[\left(A_{33}^1 - J_1 K_1^{-1} C_{13} + A_{33}^2 - J_2 K_2^{-1} C_{23} \right) X_{\varphi}, X_{\psi} \right]$$

$$A(\varphi, \psi) = [C X_{\varphi}, X_{\psi}]$$

C.Q.F.D.

Proposition 1 : La forme $A(.,.)$ satisfait l'égalité suivante:

$$A(\varphi, \psi) = a_1(w_1(\varphi), w_1(\psi)) + a_2(w_2(\varphi), w_2(\psi)), \forall \varphi, \psi \in \Phi_h \dots (3.29)$$

Démonstration: On a

$$A(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^2 [a_k(w_k(\varphi), \rho_k \psi) + b_k(\rho_k \psi, \pi_k(\varphi))]$$

$$A(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^2 [a_k(w_k(\varphi), \rho_k \psi - w_k(\psi)) + b_k(\rho_k \psi - w_k(\psi), \pi_k(\varphi))] \\ + \sum_{k=1}^2 [a_k(w_k(\varphi), w_k(\psi))] + \sum_{k=1}^2 [b_k(w_k(\psi), \pi_k(\varphi))]$$

d'après (3.20b) avec $\varphi \equiv \psi$ on a

$$b_k(w_k(\psi), \pi_k(\varphi)) = 0, k = 1, 2.$$

de même d'après (3.20a) on a

$$a_k(w_k(\varphi), \rho_k \psi - w_k(\psi)) + b_k(\rho_k \psi - w_k(\psi), \pi_k(\varphi)) = 0, k = 1, 2.$$

car

$$\rho_k \psi - w_k(\psi) \in V_{h,k}^*, (\rho_k \psi|_{\Gamma} = w_k(\psi)|_{\Gamma})$$

d'où

$$A(\varphi, \psi) = a_1(w_1(\varphi), w_1(\psi)) + a_2(w_2(\varphi), w_2(\psi))$$

C.Q.F.D.

Corollaire 1 : La matrice de capacitance C est symétrique définie positive.

Démonstration: On a:

$$C_{ij} = A(\psi_j, \psi_i); 1 \leq i, j \leq N_3 \dots (3.30).$$

En effet d'après le lemme 3.3 on a:

$$A(\psi_j, \psi_i) = [C X_{\psi_j}, X_{\psi_i}]$$

$$A(\psi_j, \psi_i) = X_{\psi_i}^T C X_{\psi_j}$$

$$A(\psi_j, \psi_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1N_3} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots & c_{2N_3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N_3 1} & c_{N_3 2} & \dots & \dots & c_{N_3 N_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\psi_j, \psi_i) = \begin{bmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \dots & \dots & c_{iN_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\psi_j, \psi_i) = c_{ij}, 1 \leq i, j \leq N_3.$$

Ainsi, la matrice C est associée à la forme $A(.,.)$ et comme $a_k(.,.)$, $k = 1, 2$ sont des formes symétriques et coercitives, il s'en suit que la matrice de capacitance C est symétrique définie positive.

1.5 Préconditionnement de la matrice de capacitance:

Définition 4: On définit l'extension harmonique $H_k(\varphi)$ de φ à Ω_k par:

$$H_k(\varphi) \in V_{h,k} : a(H_k(\varphi), v) = 0, \forall v \in V_{h,k}^*, H_k(\varphi) = \varphi \text{ sur } \Gamma.$$

Lemme 11 : Si τ_h est quasi uniforme alors ils existent deux constantes positives c_1, c_2 indépendantes de h tq:

$$c_1 \|H_1(\varphi)\|_1 \leq \|H_2(\varphi)\|_2 \leq c_2 \|H_1(\varphi)\|_1, \forall \varphi \in \Phi_h \dots (3.31).$$

où: $\|\cdot\|_k$ désigne la norme induite par $a_k(.,.)$.

Lemme 12 : Pour chaque $k = 1, 2$ on a:

$$\|H_k(\varphi)\|_k \leq \|w_k(\varphi)\|_k \leq (1 + \beta_{h,k}^{-1}) \|H_k(\varphi)\|_k, \forall \varphi \in \Phi_h \dots (3.32).$$

où $\beta_{h,k}$ est la constante de la condition inf-sup sur Ω_k .

Introduisons les formes suivantes réduites à Φ_h .

$$B_1(\varphi, \psi) = a_1(w_1(\varphi), w_1(\psi)) \dots (3.33),$$

$$B_2(\varphi, \psi) = a_2(w_2(\varphi), w_2(\psi)) \dots (3.34).$$

avec leurs matrices correspondentes

$$C_1 = A_{33}^1 - J_1 K_1^{-1} C_{13} \dots (3.35),$$

$$C_2 = A_{33}^2 - J_2 K_2^{-1} C_{23} \dots (3.36).$$

Lemme 13 : Les matrices C_k , $k = 1, 2$ sont spectralement équivalentes à la matrice C .

Démonstration: Soit $\varphi \in \Phi_h$ en tenant compte de (3.31) et (3.32) on obtient:

$$\|H_2(\varphi)\|_2 \leq \|w_2(\varphi)\|_2 \leq (1 + \beta_{h,2}^{-1}) \|H_2(\varphi)\|_2$$

$$c_1 \|H_1(\varphi)\|_1 \leq \|w_2(\varphi)\|_2 \leq c_2 (1 + \beta_{h,2}^{-1}) \|H_1(\varphi)\|_1$$

$$c_1(1 + \beta_{h,1}^{-1})^{-1} \|w_1(\varphi)\|_1 \leq \|w_{\mathbf{2}}(\varphi)\|_2 \leq c_2(1 + \beta_{h,2}^{-1}) \|w_1(\varphi)\|_1$$

$$c_1^2(1 + \beta_{h,1}^{-1})^{-2} \|w_1(\varphi)\|_1^2 \leq \|w_{\mathbf{2}}(\varphi)\|_2^2 \leq c_2^2(1 + \beta_{h,2}^{-1})^2 \|w_1(\varphi)\|_1^2$$

En ajoutant $\|w_1(\varphi)\|_1^2$ à chaque terme de cette double inégalité on obtient:

$$K_1^1 \|w_1(\varphi)\|_1^2 \leq \|w_1(\varphi)\|_1^2 + \|w_{\mathbf{2}}(\varphi)\|_2^2 \leq K_2^1 \|w_1(\varphi)\|_1^2$$

i.e

$$K_1^1 B_1(\varphi, \varphi) \leq A(\varphi, \varphi) \leq K_2^1 B_1(\varphi, \varphi), \forall \varphi \in \Phi_h \dots (3.37).$$

où

$$K_1^1 = 1 + c_1^2(1 + \beta_{h,1}^{-1})^{-2},$$

$$K_2^1 = 1 + c_2^2(1 + \beta_{h,2}^{-1})^2.$$

De même

$$K_1^2 B_2(\varphi, \varphi) \leq A(\varphi, \varphi) \leq K_2^2 B_2(\varphi, \varphi), \forall \varphi \in \Phi_h \dots (3.38)$$

où

$$K_1^2 = 1 + c_2^{-2}(1 + \beta_{h,2}^{-1})^{-2}$$

$$K_2^2 = 1 + c_1^{-2}(1 + \beta_{h,1}^{-1})^2$$

Donc, $C_k, k = 1, 2$ sont spectralement équivalentes à C . Comme $C_k, k = 1, 2$ sont symétriques et définies positives elles peuvent être utilisées comme des bons préconditionnements pour la matrice de capacitance.

C.Q.F.D.

Remarque 18 : Si $Q_h \subset C(\bar{\Omega})$ alors le problème multidomaine équivalent au problème (1.46) s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{h,k}, p_{h,k}) \in V_{h,k} \times Q_{h,k}, k = 1, 2. \text{ Tq:} \\ \quad a_1(u_{h,1}, v) + b_1(v, p_{h,1}) = (f_1, v), \forall v \in V_{h,1}^* \dots (3.39a) \\ \quad b_1(u_{h,1}, q) = 0, \forall q \in Q_{h,1}^* \dots (3.39b) \\ \quad u_{h,1} = u_{h,2} \text{ sur } \Gamma \dots (3.39c) \\ \quad a_1(u_{h,1}, \rho_1 \varphi) + b_1(\rho_1 \varphi, p_{h,1}) + \\ \quad + a_2(u_{h,2}, \rho_2 \varphi) + b_2(\rho_2 \varphi, p_{h,2}) = (f_1, \rho_1 \varphi) + (f_2, \rho_2 \varphi), \\ \quad \quad \quad \forall \varphi \in \Phi_h \dots (3.39d) \\ \quad b_1(u_{h,1}, q) + b_2(u_{h,2}, q) = 0, \forall q \in Q_{h,0} \dots (3.39e) \\ \quad a_2(u_{h,2}, v) + b_2(v, p_{h,2}) = (f_2, v), \forall v \in V_{h,2}^* \dots (3.39f) \\ \quad b_2(u_{h,2}, q) = 0, \forall q \in Q_{h,2}^* \dots (3.39g) \end{array} \right.$$

où:

$$Q_h = Q_{h,1}^* \oplus Q_{h,0} \oplus Q_{h,2}^*$$

$$Q_{h,k}^* = \{q \in Q_h \mid q|_{\Gamma} = 0, q|_{\Omega_j}, \text{ si } j \neq k\}, k = 1, 2$$

$$Q_{h,0} = \{q \in Q_h, q \text{ s'annule à chaque noeud de } \tau_h \text{ qui n'appartient pas à } \Gamma.\}$$

Une autre approche pour résoudre le problème de Stokes (1.46) à été proposé par Marini & Quarteroni [18]. Leurs technique consiste à définir un schéma itératif qui converge moyennant certaines hypothèses. Dans ce qui suit nous donnons le résultat essentiel de cette technique.

2 Décomposition de domaine et relaxation:

Cette technique consiste à construire le schéma itératif suivant:

Pour $g^0 \in \Phi_h$ donné, considérons les deux suites $(u_{h,k}^n, p_{h,k}^n) \in V_{h,k} \times Q_{h,k}, k = 1, 2$ qui satisfont:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1(u_{h,1}^n, v) + b_1(v, p_{h,1}^n) & = (f_1, v), \forall v \in V_{h,1}^* \dots (3.40a) \\ b_1(u_{h,1}^n, q) & = 0, \forall q \in Q_{h,1} \dots (3.40b) \\ \gamma_0 u_{h,1}^n & = g^{n-1} \text{ sur } \Gamma \dots (3.40c) \\ a_2(u_{h,2}^n, v) + b_2(v, p_{h,2}^n) & = (f_2, v) + (f_1, \rho_{1,h} \gamma_0 v) - a_1(u_{h,1}^n, \rho_{1,h} \gamma_0 v) - \\ & \quad - b_1(\rho_{1,h} \gamma_0 v, p_{h,1}^n), \forall v \in V_{h,2} \dots (3.40d) \\ b_2(u_{h,2}^n, q) & = 0, \forall q \in Q_{h,2} \dots (3.40e) \end{array} \right.$$

où $\gamma_0 v$ désigne la trace de v sur Γ et:

$$g^n = \theta_n \gamma_0 u_{h,2}^n + (1 - \theta_n) g^{n-1}, n \geq 1 \dots (3.35).$$

où θ_n est un paramètre de relaxation qu'on doit déterminer de tel sorte qu'il assure (et si c'est possible accélère) la convergence du schéma itératif proposé.

A propos du convergence du schéma itératif, on a le résultat suivant

Theoreme 6 : *Ils existent $\theta', \theta'' > 0$ tels que : si $\theta_n \in [\theta', \theta'']$ pour chaque n alors, $\forall h > 0$, la suite $\{u_{h,k}^n, p_{h,k}^n\}, k = 1, 2$ converge vers la solution $\{u_{h,k}, p_{h,k}\}, k = 1, 2$.*

Conclusion:

Dans notre travail on s'est intéressé à l'utilisation de la technique de stabilité locale des méthodes d'éléments finis mixtes, pour la construction d'approximation d'ordres bas stables pour les problèmes bidimensionnels et tridimensionnels.

Les éléments proposés $Q_1-P_1(\frac{h}{2}, h)$ et $Q_1-Q_1(\frac{h}{2}, h)$ sont simples à implémenter, donnent des ordres de convergences raisonnables et sont plus pratiques pour les géométries rectangulaires (respectivement hexahédriques). De plus ils génèrent des matrices creuses ce qui rend la résolution algébrique plus facile. Ceci est apparent sur tout pour les problèmes tridimensionnels, dont peu d'éléments à ordres bas stables sont connus. Pour ces problèmes les éléments construits conduisent à une nette réduction du nombre de composantes non nulles de la matrice associée.

Il serait donc intéressant pour les futures recherches de voir la performance de ces éléments pour des problèmes concrets régis par les équations de Navier-Stokes.

Dans la dernière partie de cette thèse, on s'est intéressé au préconditionnement du problème de Stokes et ceci en utilisant la méthode de décomposition de domaines. Ce qui nous a permis d'analyser deux types de préconditionnement.

- 13) M. Fortin << old and New finite elements for incomp resible flows >> International J. Numer. Methods Fluids 1 (1981) 347 - 364.
- 14) V. Girault - P. A. Raviart << Finite Element Approximations of the Navier - Stokes Equations >> Lecture Notes in Math. 749 (1979) Springer, Berlin.
- 15) V. Girault - P. A. Raviart << Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations >> theory and Algorithms Springer - Verlag Berlin (1986).
- 16) M. D. Gunzburger << Finite element methods for viscous incompressible flows >> Academic press, London (1989).
- 17) O. Ladyzhenskaya << The Mathematical theory of Viscous Incompressible flow >> Gordon and Breach (1969)
- 18) L. D. Marini - A. Quarteroni << Arelaxation Procedure for Domain Decomposition Methods Using Finite Elements>>. Numer. Math. 55, (1989) 575 - 598.
- 19) P. Mons - G. Rogé << L'element Q_1 - Bulle / Q_1 >> Mathematical Modeling - and Numerical Analysis 26 (1992) 507 - 521.
- 20) K. Nafa - R. W. Thatcher << Analysis and use of some low order macro-elements Analysis >> Report N° 164 MANCHESTER UNIVERSITY (1988).
- 21) K. Nafa - R.W. That cher << Equal order mixed finite element Approximation >> in T. J. Chung and G. R. Karr (editors), Finite element methods in flow problems, U. A. H. Press, HUNS VILLE ALA BAMA (1989)
- 22) K. Nafa - R. W. That cher << Low - order macro-elements for two and three - Dimensional Stokes Flow >> Numerical Methods for partial Differential equations 9, (1993) 579 - 5991.
- 23) J. Pitkaranta - R. Stenberg << Analysis of some mixed finite element methods for plane elasticity equations >> Math . Comp 41 (1983) 399-423.
- 24) A. Quarteroni << Domain Decomposition Algorithms for the Stokes Equations >> in Domain Decomposition methods, T.chane and Al (editors) SIAM, Philadelphia 1989 (331-442).

- 25) P. A. Raviart- J. M. Thomas << Introduction à l'Analyse Numerique des equations aux derivées partielles >> Edition Masson (1983).
- 26) A. Soulaïmani - M. Fortin - Y. Ouellet - G. Dhatt - F. Bertrand << simple continuos pressure elements for two and three dimensional incompressible flows >> . Comput. Methods Appl. Mech. Eng G2, (1987) 47 - 69.
- 27) R. Stenberg << Analysis of Mixed Finite Element Methods for the Stokes Problem >> , a unified approach Math. Comput 42. (1984), 9 - 23.
- 28) R. Stenberg << on the construction of optimal mixed finite element methods for the linear elasticity problem>> Numer. Math 48(1986) 447-462.
- 29) R. Stenberg << On some three - dimensional finite elements for incompressible media >> Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg. 63 (1987) 261 - 269.
- 30) R. Stenberg << Error Analysis of Some Finile Element Methods for the Stokes Problem >> Math. Comput 54 (1990) 495 - 508.
- 31) R. Verfürth << Error Estimates for mixed finite element approximation of the Stokes equations >> R.A.I.R.O Anal. Numer 18 (1984) 175 - 182.

Abstract

In this thesis we are interested in the construction of stable low order mixed finite elements for the Stokes problem. In particular, we use the local stability theory and a two levels of discretisation for the velocity and pressure to show the stability and convergence of the approximations $Q_1 - P_1(\frac{h}{2}, h)$ et $Q_1 - Q_1(\frac{h}{2}, h)$ for both two and three dimensional problems.

Moreover, using domain decomposition methods, we prove preconditioning results for the stokes problem.

Key Words: *Stokes problem, stable mixed methods, preconditioning*

RESUME

Dans cette thèse, on s'intéresse à la construction d'éléments finis mixtes stables d'ordres bas pour le problème de Stokes. Plus précisément, on se sert de la technique de stabilité locale et deux niveaux de discretisation pour la vitesse et la pression, pour montrer la stabilité et la convergence des approximations $Q_1 - P_1(\frac{h}{2}, h)$ et $Q_1 - Q_1(\frac{h}{2}, h)$ pour les problèmes bidimensionnels et tridimensionnels.

De plus, on démontre des résultats de préconditionnement du problème de Stokes par la méthode de décomposition de domaines.

Mots Clés: *problème de Stokes, méthodes mixtes stables, préconditionnement.*