

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques

N° d'ordre :

Série :

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Equations aux Dérivées Partielles*

PROBLEMES AUX LIMITES POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Par

Mustapha Fateh YAROU

Soutenue le 30/09/2003 devant le jury composé de :

Président	: BENKAFADAR M.N.	Prof.	Université de Constantine
Rapporteur	: DENCHE M.	Prof.	Université de Constantine
Examineurs	: AIBECHE A.	M.C.	Université de Sétif
	MESSAOUDI K.	M.C.	Université de Batna
	REBBANI F.	Prof.	Université de Annaba
	TSYMBAL V.	Prof.	Université de Lvov (Ukraine)

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques

N° d'ordre :

Série :

THESE

Présentée pour obtenir le diplôme de

DOCTORAT D'ETAT

Spécialité : *Mathématiques*

Option : *Equations aux Dérivées Partielles*

PROBLEMES AUX LIMITES POUR UNE CLASSE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Par

Mustapha Fateh YAROU

Soutenue le 30/09/2003 devant le jury composé de :

Président : BENKAFADAR M.N. Prof. Université de Constantine

Rapporteur : DENCHE M. Prof. Université de Constantine

Examineurs : AIBECHÉ A. M.C. Université de Sétif

MESSAOUDI K. M.C. Université de Batna

REBBANI F. Prof. Université de Annaba

TSYMBAL V. Prof. Université de Lvov (Ukraine)

Remerciements

Il m'est très agréable de témoigner ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Mohamed Denche, mon directeur de thèse, qui m'a initié à la recherche et m'a ouvert tous les horizons. Son humilité, sa patience, ses énormes qualités tant pédagogiques qu'intellectuelles m'ont été d'une grande aide; je le remercie vivement pour sa gentillesse et sa totale disponibilité.

L'honneur pour moi est grand que Monsieur le professeur Nasreddine Benkafadar ait accepté de présider le jury, tant sa rigueur méthodologique et son intuition scientifique sont reconnues et appréciées par tous ses étudiants, aussi je tiens à lui exprimer mes plus vives reconnaissances.

Monsieur Aissa Aibeche a été à mes cotés durant ces nombreuses années, ses conseils et encouragements m'ont permis de mener à bien ce travail. Avec lui j'ai appris qu'on peut vivre autrement la recherche mathématique: au lieu d'être une course effrénée, monotone et égoïste, à la poursuite de résultats, elle peut être vivante, agréable, enrichissante et fructueuse à tous les niveaux. Qu'il trouve ici ma profonde reconnaissance.

Je remercie chaleureusement les professeurs F Rebbani, V Tsybal et K Messaoudi d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes plus vifs remerciements vont aussi à messieurs les Professeurs Charles Castaing et Lionel Thibault de l'université de Montpellier II. J'ai eu la chance de les côtoyer et de profiter de leurs énormes connaissances et qualités aussi bien scientifiques qu'humaines ainsi que de leur rigueur et intuition scientifique qu'ils n'ont cessé de me prodiguer durant mes cours séjours à Montpellier.

Toute ma gratitude pour Monsieur Messaoud Bounkhal de l'université de Ryadh, notre collaboration fructueuse m'a permis de mesurer ses immenses capacités scientifiques et toutes ses valeurs humaines. Il a été pour beaucoup dans la finalisation de cette thèse.

Enfin, je voudrais reconnaître que j'ai eu plusieurs moments de découragement, tant l'honnêteté et la rigueur sont devenues des tares par les temps qui courent; et sans l'aide de Dieu tout puissant je n'aurais pu achever cette thèse, aussi Louange à Dieu avant tout et après tout.

Dédicace

A la mémoire de mon défunt père qui m'a appris dans cette vie deux choses dont je suis fier: Rester honnête quelque soit les circonstances, et ne jamais abandonner même si tout semble perdu,

A ma chère mère, que Dieu la préserve, qui est tout le temps présente à mes cotés, bienveillante sur moi,

A ma femme qui n'a cessé de me soutenir et m'encourager tout au long de cette thèse,

A mes enfants ; Noureddine, Diyaeddine, Takieddine, avec tendresse et amour,

A mes frères et sœurs et tous mes proches.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 0 : Introduction générale	2
---	----------

Chapitre 1 : Concepts de base et résultats préliminaires

• 1.1 Multifonctions et r -prox régularité	6
• 1.2 Processus de rafle	13
• 1.3 Inclusions différentielles avec retard	16
• 1.4 Quelques résultats classiques	18

Chapitre 2 : Résultats d'existence concernant le processus de rafle non convexe du premier ordre avec perturbations retardées

• 2.1 Introduction	24
• 2.2 Le cas Lipschitz	25
• 2.3 Le cas absolument continu	35
• 2.4 Existence de solution viable	44

Chapitre 3 : Résultats d'existence concernant le processus de rafle non convexe du second ordre avec perturbations retardées

- 3.1 Introduction 52
- 3.2 Méthode du point fixe 53
- 3.3 Méthode de discrétisation59

Chapitre 4 : Solution BV pour une classe d'opérateurs sous différentiels dans les espaces de Hilbert

- 4.1 Introduction et préliminaires77
- 4.2 Problème régularisé 80
- 4.3 Existence de solution vbcd 90
- 4.4 Cas non homogène 92

Bibliographie 94

CHAPITRE 0

INTRODUCTION GENERALE

Récemment, plusieurs notions de régularité d'ensembles en analyse non lisse (non différentiable) ont été développées. Ces études ont deux motivations principales : les règles de calcul qui jouent un rôle crucial pour l'obtention de formules exactes, voir par exemple [15], [43], [44], [89], [90], [91], [109]. La deuxième est leur application à la résolution des inclusions différentielles (équations différentielles multivoques). Parmi ces notions, celle qui est sujet de notre intérêt, est *l'uniforme r -prox régularité* introduite dans [45] et [108] et dont les propriétés ont été exploitées et appliquées avec succès à la résolution de certains problèmes d'évolution [12], [16], [40],

Les résultats exposés dans cette thèse illustrent diverses techniques utilisées dans les questions d'existence de solution pour des problèmes d'évolution non linéaires concernant des inclusions différentielles, principalement celles gouvernées par des *opérateurs maximaux monotones* et plus particulièrement les problèmes connus sous le nom de *Processus de Rafle*.

Introduit dans les années 70 par J.J. Moreau, le processus de rafle est un problème d'évolution cinématique lié à la modélisation de systèmes elasto-plastiques en mécanique et se présente sous la forme

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) \quad \text{p.p sur } [0, T], \quad u(0) = u_0 \in C(0) \quad (P.R)$$

$N_{C(t)}(u(t))$ est le cône normal en $u(t)$ à l'ensemble (fermé mobile) $C(t)$. Le processus de rafle est complètement résolu pour des multifonctions à valeurs

convexes $C(t)$, $\forall t \in [0, T]$ dans un espace de Hilbert [101]. Castaing a étudié des versions aléatoires de ce problème dans [24], [26] et a introduit de nouvelles techniques dans [25] à partir desquels plusieurs résultats ont été obtenus dans le cas non convexe ; en particulier l'existence de solution pour un ensemble de la forme $C(t) = S + v(t)$, S fixe non convexe fermé d'un Hilbert de dimension finie et v une fonction à variation finie. De son côté, Valadier dans [116], [118] a obtenu des résultats lorsque $N_{C(t)}(u) \cap B_H$ est de graphe fermé, c'est le cas lorsque $C(t)$ est le complémentaire dans $\mathbb{R}^n$ de l'intérieur d'un ensemble convexe. Durant ces dernières années, [8] et [10] ont montré l'existence pour des ensembles non convexes dans un Hilbert de dimension finie en introduisant une approche utilisant le concept de *cône normal proximal limite*, et [46] établit l'existence pour des ensembles Φ -convexes. En utilisant une caractérisation importante des ensembles uniformément r -prox réguliers, [13], [14], [16], [114] ont établi plusieurs résultats dans le cas non convexe.

Parallèlement, à partir des premiers travaux de [69], [47] et [48] concernant l'étude des procédures de planning en économie mathématique, lesquels ont été réduit à un problème de la forme

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u(t)) & \text{p. p. dans } I; \\ u(t) \in C(t), \quad \forall t \in I; & u(0) = u_0 \in C(0). \end{cases} \quad (PRP1)$$

appelé *Processus de rafle avec perturbation du premier ordre* ; Plusieurs travaux ont eu pour objet ces problèmes perturbés, notamment [6], [11], [31], [37], [34], [36], [57], [58], [59], [78], [85], [120] dans le cas convexe avec perturbations convexes et non convexes, puis [8], [10], [12], [13], [14], [16], [40], [55], [114] dans le cas non convexe.

Motivés par des applications physiques naturelles que l'on rencontre en synthèse de contrôle optimal, systèmes de réaction diffusion, jeux différentiels et en dynamique des populations, ces problèmes du processus de rafle perturbés mais avec retard (ou mémoire) ont été abordé, ces problèmes s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + F(t, u_t) & \text{p. p. sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = T(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (PRPR1)$$

et reposent sur des résultats établis pour l'inclusion différentielle plus générale

$$\dot{u}(t) \in F(t, u_t) \quad \text{p. p. sur } I \quad (IDR1)$$

laquelle a été étudié dans [33], [53], [56], [61], [62], [63], [64], [65], [70], [72], [73], [112]. Les principaux résultats concernant (PRPR1) se trouvent dans [32], [38], [40], [110], [113], [114] et leurs références.

Le premier résultat concernant le *Processus de rafle du second ordre*

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) & \text{p. p. } t \in I; \\ \dot{u}(t) \in K(u(t)), & \forall t \in I; \end{cases} \quad (PR2)$$

a été obtenu par [30] pour une multifonction K à valeurs convexes et non convexes. De tels problèmes apparaissent en modélisation de systèmes de *dry-friction* [103]. Pour une inclusion différentielle générale du second ordre, on réfère à [1], [2], [31], [49], [88]. [112] dans le cas convexe et [14] lorsque $K(u(t))$ n'est pas nécessairement convexe, ont traité le problème perturbé (PRP2) et [12] le problème plus général

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) + F(t, u(t), \dot{u}(t)) + G(t, u(t), \dot{u}(t)) & \text{p. p. } t \in I, \\ u(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I; \end{cases} \quad (PRPG2)$$

avec différentes hypothèses. [54] a considéré le problème perturbé avec retard (PRPR2) en dimension finie dans le cas convexe et avec perturbation continue.

Notons que l'on peut voir le processus de rafle comme étant un problème d'évolution gouverné par un opérateur maximal monotone

$$-\dot{u}(t) \in A(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \quad (OMM)$$

lesquels ont été l'objet d'un grand nombre de résultats d'existence (l'unicité découlant directement de la monotonie de A), parmi lesquels [32], [76], [81], [82], [110], [113], [121]. Pour la théorie des opérateurs non linéaires, on réfère à [7], [20], [122].

Les travaux de cette thèse sont une continuation de ceux su cités et traitent essentiellement les problèmes du processus de rafle avec perturbation et avec retard. Dans le Chapitre 1, on rappelle des notions essentielles et des résultats de base concernant les multifonctions, les ensembles uniformément r -prox réguliers, le processus de rafle, les problèmes avec retard ainsi que les ingrédients et artifices utilisés dans les techniques de démonstration. Le

Chapitre 2 est consacré au processus de rafle avec perturbation et retard du premier ordre (PRPR1). On expose quelques théorèmes d'existence de solution Lipschitzienne puis absolument continue sous différentes conditions : en prenant C à valeurs uniformément r -prox régulières et compactes dans un Hilbert de dimension quelconque puis en remplaçant la compacité de $C(t)$ par une condition sur la perturbation F : F contenue dans un compact. Dans le Chapitre 3, on développe deux méthodes de résolution du problème du processus de rafle perturbé avec retard du second ordre

$$\begin{cases} -\ddot{u}(t) \in N_{K(u(t))}(\dot{u}(t)) + F(t, T(t)u, T(t)\dot{u}) & p.p. \quad t \in I; \\ T(0)u = \varphi, \quad \text{sur } [-\tau, 0]; \\ \dot{u}(t) \in K(u(t)), \quad \forall t \in I. \end{cases} \quad (PRPR2)$$

La première repose sur l'utilisation du Théorème du point fixe de Kakutani-Ky Fan via les résultats obtenus dans le Chapitre 2 pour le premier ordre. La deuxième est une technique de discrétisation qui consiste à ramener le problème avec retard à un problème sans retard et utiliser les résultats connus pour le (PRP2). Enfin dans le Chapitre 4, on traite un problème plus général ; le cône normal $N_{C(t)}(u(t))$ étant défini comme le sous différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble $C(t)$ qui est une fonction convexe propre semi-continue inférieurement, il est naturel de considérer le problème

$$-\frac{du}{dt}(t) \in \partial\varphi(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \quad (\mathcal{P})$$

où $\partial\varphi(t, \cdot)$, sous différentiel d'une fonction convexe propre semi-continue inférieurement, est un opérateur maximal monotone, et on s'est intéressé à la recherche de solution à variation bornée continue à droite, en utilisant la technique de régularisation Yosida, puis on donne un résultat pour le problème perturbé.

Une partie du Chapitre 2 a été l'objet d'un article en collaboration avec M. Bounkhel paru dans AJMS [17] ; une partie du Chapitre 4 a été publiée dans [123] ; des parties des chapitres 3 et 4 sont l'objet d'un article soumis à la revue Portugaliae Mathematica.

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

1.1 Multifonctions et r-prox-régularité.

Dans tout ce qui suit, H est un espace de Hilbert réel en général séparable, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. $\mathcal{B}$ dénote la boule unité fermée de H centrée à l'origine, et $f(H)$ (respectivement $cf(H)$, $ck(H)$ et $cwk(H)$) l'ensemble des parties non vides fermées (respectivement fermées convexes, convexes compactes, convexes faiblement compactes) de H . Une multifonction Φ de X dans Y est une fonction définie sur un espace topologique X et à valeurs dans l'ensemble des parties de Y . On notera dans la suite $\Phi : X \rightarrow f(H)$ ou $\Phi : X \rightrightarrows H$ toute multifonction définie sur X et à valeurs non vides fermées dans H .

Si S est un sous ensemble de H , Ψ_S représente la fonction indicatrice de S , i.e.

$$\Psi_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in S \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$\sigma(S, \cdot)$ est la fonction support associée avec S , i.e.

$$\sigma(S, p) := \sup_{s \in S} \langle s, p \rangle,$$

et on désignera la fonction caractéristique de S par χ_S , l'intérieur, l'adhérence et l'enveloppe convexe de S respectivement par $\text{int}(S)$, $\text{cl}(S)$ et $\text{co}(S)$. $\text{Proj}_S(\cdot)$

est la projection sur S définie par

$$Proj_S(u) := \{y \in S : \|u - y\| = \inf_{z \in S} \|u - z\|\}$$

et caractérisée par

$$y \in Proj_S(x) \iff y \in S \text{ et } \forall z \in S, \langle x - y, y - z \rangle \geq 0$$

$N_S(y)$ désigne le cône normal à S en y . On a ([4], p. 220) ou ([5], p. 168)

$$y \in Proj_S(x) \iff x - y \in N_S(y),$$

et

$$z \in N_S(y) \iff y \in S \text{ et } \langle z, y \rangle = \sigma(S, z) \iff y \in S \text{ et } z \in \partial\Psi_S(y)$$

où $\partial f(\cdot)$ est le sous différentiel de f au sens de l'analyse convexe, i.e.

$$\partial f(x) = \{y \in H : \forall z \in H, f(z) \geq f(x) + \langle y, z - x \rangle\} \quad (1.1)$$

Pour tout convexe fermé $S \subset H$, et $x \in S$ on a

$$N_S(y) := \{y \in H : \langle y, z - x \rangle \leq 0 \forall z \in S\} \quad (1.2)$$

Remarquons que l'on a toujours $0 \in N_S(x)$, $N_{\{x\}} = H$ et $N_S(x) = \{0\}$ pour $x \in \text{int}(S)$ si $\text{int}(S) \neq \emptyset$. D'autre part, de $N_S(x) = \partial\Psi_S(y)$, c'est un opérateur maximal monotone (voir [20]).

Si A et B sont deux sous ensembles de H , notons par $e(A, B)$ l'excès (ou écart) de A sur B défini par

$$e(A, B) = \sup\{d_B(a); a \in A\}$$

où $d_B(a) = \inf_{b \in B} \|a - b\|$ est la fonction distance de a à B .

Définition 1.1 On appelle distance de Hausdorff entre A et B la fonction $\mathcal{H} : f(H) \times f(H) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\mathcal{H}(A, B) = \max(e(A, B); e(B, A)) \quad (1.3)$$

$\mathcal{H}$ est une métrique sur $f(H)$. En effet, il suffit de montrer l'inégalité triangulaire. Soient $A, B, C \in f(H)$, pour tout $a \in A, b \in B$ on a

$$d_C(a) \leq d(a, b) + d_C(b) \leq d(a, b) + \mathcal{H}(B, C)$$

Il s'ensuit que $d_C(a) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$ pour tout $a \in A$. Ainsi, $e(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$, et de façon similaire on a aussi $e(C, A) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

Soit $\Phi : X \rightrightarrows Y$ une multifonction définie entre deux espaces topologiques X et Y .

Définition 1.2 On dit que Φ est semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x \in \text{dom}(\Phi) := \{x' \in X : \Phi(x') \neq \emptyset\}$ si pour tout ouvert O contenant $\Phi(x)$ il existe un voisinage V de x tel que $\Phi(V) \subset O$, ou bien de façon équivalente, pour tout fermé U de Y , $\{x \in X : \Phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est fermé. Pour $\Phi : X \rightarrow \text{cwk}(H)$, on dira que Φ est s.c.s pour la topologie faible $\sigma(H, H)$ ou bien qu'elle est scalairement s.c.s si pour tout y dans H , $\sigma(\Phi(\cdot), y)$ est s.c.s. (voir [41], Théorème II.20).

Définition 1.3 Φ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en x si pour tout ouvert U de H tel que $\Phi(x) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V de x tel que $\Phi(V) \cap U \neq \emptyset$.

Définition 1.4 ([41])

1. Si I dénote l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$ de $\mathbb{R}$, dt est la mesure de Lebesgue sur I et $\mathcal{L}(I)$ est la σ -algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables de I ; $\mathcal{B}(X)$ est la tribu borélienne de X pour tout espace topologique X .
2. Une multifonction $\Phi : I \rightarrow f(X)$ est dite mesurable si son graphe $\text{gph}(\Phi) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(X)$. On appelle sélection mesurable de la multifonction Φ toute fonction mesurable $f : I \rightarrow X$ telle que $f(t) \in \Phi(t)$ presque partout sur I .
3. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \text{cwk}(H)$ est dite scalairement mesurable si la fonction scalaire $\sigma(\Gamma(\cdot), y)$, est $\mathcal{A}$ -mesurable $\forall y \in H$. Toute multifonction scalairement mesurable admet une sélection $\mathcal{A}$ -mesurable.

$\mathcal{H}$ est une métrique sur $f(H)$. En effet, il suffit de montrer l'inégalité triangulaire. Soient $A, B, C \in f(H)$, pour tout $a \in A, b \in B$ on a

$$d_C(a) \leq d(a, b) + d_C(b) \leq d(a, b) + \mathcal{H}(B, C)$$

Il s'ensuit que $d_C(a) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$ pour tout $a \in A$. Ainsi, $e(A, C) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$, et de façon similaire on a aussi $e(C, A) \leq \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C)$.

Soit $\Phi : X \rightrightarrows Y$ une multifonction définie entre deux espaces topologiques X et Y .

Définition 1.2 On dit que Φ est semi-continue supérieurement (s.c.s) en $x \in \text{dom}(\Phi) := \{x' \in X : \Phi(x') \neq \emptyset\}$ si pour tout ouvert O contenant $\Phi(x)$ il existe un voisinage V de x tel que $\Phi(V) \subset O$, ou bien de façon équivalente, pour tout fermé U de Y , $\{x \in X : \Phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$ est fermé. Pour $\Phi : X \rightarrow \text{cwk}(H)$, on dira que Φ est s.c.s pour la topologie faible $\sigma(H, H)$ ou bien qu'elle est scalairement s.c.s si pour tout y dans H , $\sigma(\Phi(\cdot), y)$ est s.c.s. (voir [41], Théorème II.20).

Définition 1.3 Φ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en x si pour tout ouvert U de H tel que $\Phi(x) \cap U \neq \emptyset$, il existe un voisinage V de x tel que $\Phi(V) \cap U \neq \emptyset$.

Définition 1.4 ([41])

1. Si I dénote l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$ de $\mathbb{R}$, dt est la mesure de Lebesgue sur I et $\mathcal{L}(I)$ est la σ -algèbre des ensembles Lebesgue-mesurables de I ; $\mathcal{B}(X)$ est la tribu borélienne de X pour tout espace topologique X .
2. Une multifonction $\Phi : I \rightarrow f(X)$ est dite mesurable si son graphe $\text{gph}(\Phi) \in \mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(X)$. On appelle sélection mesurable de la multifonction Φ toute fonction mesurable $f : I \rightarrow X$ telle que $f(t) \in \Phi(t)$ presque partout sur I .
3. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, $\Gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \text{cwk}(H)$ est dite scalairement mesurable si la fonction scalaire $\sigma(\Gamma(\cdot), y)$, est $\mathcal{A}$ -mesurable $\forall y \in H$. Toute multifonction scalairement mesurable admet une sélection $\mathcal{A}$ -mesurable.

Soit S un sous ensemble fermé non vide de H , on dénote par $d_S(\cdot)$ la distance usuelle du sous ensemble S . Rappelons quelques notions de base que nous utiliserons dans la suite. Soit $f : H \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ une fonction semi-continue inférieurement, c'est à dire pour tout $x \in H$, $f(x) \leq \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$. Et soit x un point de H où f est finie.

Définition 1.5 ([44]) *Le sous différentiel proximal de la fonction f au point x , noté $\partial^P f(x)$, est l'ensemble de tous les $\xi \in H$, pour lesquels il existe $\delta, \sigma > 0$ tels que pour tout $x' \in x + \delta B$ on a*

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq f(x') - f(x) + \sigma \|x' - x\|^2 \quad (1.4)$$

B est la boule unité fermée centrée à l'origine de H .

Ainsi, le sous différentiel proximal de la fonction distance s'écrit

$$\partial^P d_S(x) = \{y \in H, \exists \delta, \sigma > 0 : \forall x' \in x + \delta B \quad \langle y, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x)\} \quad (1.5)$$

Définition 1.6 ([45], [108]) *Soient S un ensemble fermé non vide de H , et $x \in S$. On définit le cône normal proximal de S en x par $N_S^P(x) := \partial^P \Psi_S(x)$, où Ψ_S représente la fonction indicatrice de S .*

Le cône normal proximal est aussi donné par

$$\begin{aligned} N_S^P(x) &= \{\xi \in H : \exists \alpha > 0 : x \in \text{Proj}_S(x + \alpha \xi)\} \\ &= \{\xi \in H : \exists \alpha > 0 : d_S(x + \alpha \xi) = \alpha \|\xi\|\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

où $\text{Proj}_S(u) := \{y \in S : d_S(u) = \|u - y\|\}$.

La relation entre le cône normal proximal et le sous différentiel proximal de la fonction distance est donné par la proposition suivante due à [15]

Proposition 1.1 *Soit X un espace vectoriel normé, S un sous ensemble non vide fermé de X , et $x \in S$. Alors*

$$\partial^P d_S(x) = N_S^P(x) \cap B^* \quad (1.7)$$

où B^* est la boule unité fermée du dual de X .

Preuve. Soit $x^* \in \partial^P d_S(x)$, alors il existe $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $x' \in x + \delta B$ $\langle x^*, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x) = \sigma \|x' - x\|^2 + d_S(x')$, puisque $x \in S$ et donc pour tout $x' \in S \cap (x + \delta B)$,

$$\langle x^*, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2,$$

ce qui assure que $x^* \in N_S^P(x)$. Comme on a toujours $\partial^P d_S(x) \subset B^*$, alors $x^* \in N_S^P(x) \cap B^*$.

Maintenant fixons $x^* \in N_S^P(x)$ avec $\|x^*\| \leq 1$. Il existe alors $\sigma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\langle x^*, x' - x \rangle \leq \sigma \|x' - x\|^2 \text{ pour tout } x' \in S \cap (x + \delta B). \quad (1.8)$$

Fixons maintenant $\gamma := \min\{1, \frac{\delta}{3}\}$ et fixons aussi $z \in x + \gamma B$, puis choisissons $y_z \in S$ tel que

$$\|y_z - z\| \leq d_S(z) + \|z - x\|^2. \quad (1.9)$$

Alors $y_z \in x + \delta B$, puisque de (1.9), $\|y_z - x\| \leq \|y_z - z\| + \|z - x\| \leq 3\|z - x\| \leq 3\gamma \leq \delta$,
et donc

$$\begin{aligned} \langle x^*, z - x \rangle &= \langle x^*, y_z - x \rangle + \langle x^*, z - y_z \rangle \\ &\leq \sigma \|y_z - x\|^2 + \|y_z - z\| \\ &\leq 9\sigma \|z - x\| + d_S(z) + \|z - x\|^2 \\ &\leq (9\sigma + 1)\|z - x\| + d_S(z) - d_S(x). \end{aligned}$$

ceci assure que $x^* \in \partial^P d_S(x)$ ce qui achève la démonstration.

Introduisons maintenant des sous ensembles qui vont jouer un rôle primordial pour tous les résultats que nous allons exposer dans le cas non convexe : ce sont les ensembles uniformément r -prox réguliers.

Définition 1.7 ([108]) *Etant donné un $r \in]0, +\infty]$, un sous ensemble S est uniformément r -prox régulier si et seulement si pour tout $y \in S$ et tout $\xi \in N_S^P(y)$, $\xi \neq 0$ on a*

$$\left\langle \frac{\xi}{\|\xi\|}, x - y \right\rangle \leq \frac{1}{2r} \|x - y\|^2, \quad (1.10)$$

pour tout $x \in S$. Par convention $\frac{1}{r} = 0$ pour $r = +\infty$ (dans ce cas, l'uniforme r -prox régularité est équivalente à la convexité de S).

Quelques propriétés importantes de ces ensembles sont résumés dans la proposition suivante (voir démonstration dans [45], [108])

Proposition 1.2 *Soit $r > 0$, et S un sous ensemble non vide fermé uniformément r -prox régulier de H ; alors on a*

1. *$\text{Proj}_S(x)$ existe et est unique pour tout $x \in H$ avec $d_S(x) < r$;*
2. *Le sous différentiel proximal de d_S coïncide avec tous les sous différentiels contenus dans le sous différentiel de Clarke en tout point $x \in H$ satisfaisant $d_S(x) < r$. Dans ce cas, $\partial^P d_S(x) := \partial d_S(x) = \partial^C d_S(x)$ est un ensemble fermé convexe de H .*

Comme conséquence de (2), pour les ensembles uniformément r -prox-réguliers, le cône normal proximal à S coïncide avec tous les cônes normaux contenus dans le cône normal de Clarke en tout point $x \in S$, $N_S^P(x) := N_S^C(x)$. (On réfère à [45] pour les définitions du sous différentiel et cône normal de Clarke.)

Enonçons à présent une caractérisation très utile des ensembles uniformément r -prox-réguliers obtenue dans [15].

Proposition 1.3 *Soit $r > 0$, et S un sous ensemble non vide fermé uniformément r -prox-régulier de H ; alors pour tout $x \in S$ et tout $\xi \in \partial_S^P(x)$ on a*

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{2}{r} \|x' - x\|^2 + d_S(x') \forall x' \in H, \text{ avec } d_S(x') \leq r \quad (1.11)$$

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la dernière proposition (voir aussi [15])

Corollaire 1.1 *Pour tout sous ensemble S non vide fermé uniformément r -prox-régulier de H ; on a pour tout $x \in H$ avec $d_S(x) < r$ et tout $\xi \in \partial_S^P(x)$*

$$\langle \xi, x' - x \rangle \leq \frac{8}{r - d_S(x)} \|x' - x\|^2 + d_S(x') - d_S(x), \forall x' \in H, \text{ avec } d_S(x') \leq r \quad (1.12)$$

Ce corollaire est utilisé pour montrer une propriété de fermeture du sous différentiel de la fonction distance associé à une multifonction (voir [12])

Proposition 1.4 *Soit $r > 0$, Ω un sous ensemble ouvert d'un espace vectoriel normé X , et $K : \Omega \rightrightarrows H$ une multifonction Hausdorff-continue (i.e.*

$\lim_{x' \rightarrow x} \mathcal{H}(K(x'), K(x)) = 0, \forall x \in H$ telle que $K(y)$ soit uniformément r -prox-régulier pour tout $y \in \Omega$. Alors, étant donné $\delta, 0 < \delta < r$, pour tout $y' \in \Omega, x' \in K(y') + (r - \delta)B, x_n \rightarrow x', y_n \rightarrow y'$ avec $y_n \in \Omega$, et $\xi_n \in \partial^P d_{K(y_n)}(x_n)$ avec $\xi_n \rightarrow \xi'$, on a $\xi' \in \partial^P d_{K(y')}(x')$.

Preuve. Fixons $y' \in \Omega, x' \in K(y') + (r - \delta)B$. Comme $x_n \rightarrow x'$ on obtient pour n suffisamment grand, $x_n \in x' + \frac{\delta}{4}B$. d'autre part, puisque $K(y')$ est uniformément r -prox-régulier, de la Proposition (1.2), il existe un point $z \in K(y')$ avec $d_{K(y')}(x') = \|y' - x'\|$. Alors, de la définition de la distance de Hausdorff, on peut écrire

$$d_{K(y_n)}(x_n) \leq \mathcal{H}(K(y_n), K(y')) + \|x_n - z\|,$$

la continuité de K assure pour n assez grand

$$d_{K(y_n)}(x_n) \leq \frac{\delta}{4} + \|x_n - x'\| + \|x' - z\| \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + r - \delta = r - \frac{\delta}{2} < r.$$

En appliquant le corollaire précédent avec $\xi_n \in \partial^P d_{K(y_n)}(x_n)$ on obtient

$$\langle \xi_n, u - x_n \rangle \leq \frac{8}{r - d_{K(y_n)}(x_n)} \|u - x_n\|^2 + d_{K(y_n)}(u) - d_{K(y_n)}(x_n), \quad (1.13)$$

pour tout $u \in H$, avec $d_{K(y_n)}(u) \leq r$

Cette inégalité reste vraie pour tout $u \in x' + \delta' B$ avec $0 < \delta' < \frac{\delta}{4}$ car pour un tel u on a

$$d_{K(y_n)}(u) \leq \|u - x'\| + \|x' - x_n\| + d_{K(y_n)}(x_n) \leq \delta' + \frac{\delta}{4} + r - \frac{\delta}{2} < r.$$

Par conséquent, en utilisant la continuité de la fonction distance par rapport à (y, x) qui découle de la Hausdorff-continuité de K et en tendant n vers $+\infty$, l'inégalité (1.9) donne

$$\langle \xi', u - x' \rangle \leq \frac{8}{r - d_{K(y')}(x')} \|u - x'\|^2 + d_{K(y')}(u) - d_{K(y')}(x'),$$

pour tout $u \in x' + \delta' B$. Ceci assure que $\xi' \in \partial^P d_{K(y')}(x')$ ce qui achève la preuve de la proposition.

Remarque 1.1 Comme conséquence directe de ce résultat, on a la semi-continuité supérieure de la multifonction $(y, x) \mapsto \partial^P d_{K(y)}(x)$ de $\Omega \times H$ vers

H muni de la topologie faible, qui est équivalente (voir par exemple Proposition 1.4.1 et Théorème 1.4.2 dans [4]) à la semi-continuité supérieure de la fonction $(y, x) \mapsto \sigma(\partial^P d_{K(y)}(x), p)$ pour tout $p \in H$. Ici, $\sigma(S, p)$ est la fonction support associée avec S , i.e. $\sigma(S, p) := \sup_{s \in S} \langle s, p \rangle$. En suivant la terminologie utilisée dans [39] ainsi que leurs références, on peut dire que la multifonction $K \rightrightarrows H$ est scalairement semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour tout $p \in X^*$ les fonctions supports $\sigma(K(\cdot), p)$ sont semi-continues supérieurement sur X . Dans le cas où $X = H = \mathbb{R}^n$, et K est à valeurs convexes on a que la semi-continuité supérieure de K est équivalente à sa scalaire semi-continuité supérieure. Pour plus de détail, on réfère à [41].

Voici maintenant quelques concepts de base et des résultats standards concernant les inclusions différentielles, que nous utiliserons tout au long de cette thèse.

1.2 Le processus de raffe.

Introduit et étudié dans les années 70 par J.J. Moreau ([92]-[102]), c'est une inclusion différentielle de la forme

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) \quad \text{p.p sur } [0, T], \quad u(0) = u_0 \in C(0) \quad (P.R)$$

où $C(t)$ est un sous ensemble non vide fermé de H , $N_{C(t)}(u(t))$ est le cône normal de Clarke à $C(t)$ en $u(t)$. Cette formulation modélise un certain nombre de situations pratiques en mécanique comme l'écoulement (chute) d'eau dans une cavité, dynamique des systèmes avec contrainte unilatérale, plasticité et évolution des systèmes élastoplastiques. Intuitivement, on peut définir le processus de raffe comme suit : un ensemble convexe fermé mobile $C(t)$ d'un espace de Hilbert varie avec le temps. A l'instant initial, un point $u_0 \in C(0)$, au cours du temps ce point est éventuellement poussé par le bord de $C(t)$ dans la direction de la normale rentrante et reste dans $C(t)$, i.e. le point mobile reste fixe dans H tant qu'il est interne à $C(t)$; lorsque u est rejoint par la frontière de cet ensemble, il est poussé par cette frontière dans la direction de la normale rentrante de manière à rester dans $C(t)$ pour tout t .

Définition 1.8 Une fonction $u : I := [0, T] \rightarrow H$ est absolument continue s'il existe une fonction Lebesgue intégrable $\dot{u} \in L^1(I, H)$ telle que $u(t) = u(0) + \int_0^t \dot{u}(s) ds \quad \forall t \in I$.

Une multifonction $C : [0, T] \rightarrow cf(H)$ à valeurs convexes fermées non vides dans H est dite absolument continue si sa fonction variation est absolument continue ; rappelons que la variation $v : I \rightarrow [0, +\infty]$ de C est donnée par

$$v(t) = \sup_{(t_i)} \sum_{i=1}^n \mathcal{H}(C(t_i), C(t_{i-1}))$$

où le suprénum est pris sur toutes les partitions

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t.$$

Comme conséquence à cette définition, on a

$$\mathcal{H}(C(t), C(s)) \leq v(t) - v(s) = \int_s^t \dot{v}(z) dz \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Définition 1.9 Une fonction $u : I \rightarrow H$ est dite solution du problème (P.R) si

$$\begin{cases} (a) \ u(0) = u_0; \\ (b) \ u(t) \in C(t), \quad \forall t \in I; \\ (c) \ u \text{ est différentiable p.p. sur } I; \\ (d) \ -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T]. \end{cases}$$

Le résultat suivant est dû initialement à Moreau et admet de nombreux raffinements (voir [21]-[30], [83]-[87], [115]-[119]).

Proposition 1.5 Soit $C : [0, T] \rightarrow cf(H)$ absolument continue de variation v , alors pour tout $a \in C(0)$, il existe une unique solution u , absolument continue vérifiant :

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T], \quad u(0) = a \in C(0).$$

avec $|\dot{u}(t)| \leq \dot{v}(t)$ presque partout dans I .

De plus si u et v sont deux solutions avec $u(0) = u_0$ et $v(0) = v_0$, alors

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u_0 - v_0\|, \quad t \in I$$

La démonstration repose sur la construction d'une suite approximante de la solution à l'aide d'une discrétisation de l'intervalle I et un algorithme dit de *rattrapage* de la forme suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T, \quad t_{i+1}^n - t_i^n \leq \frac{1}{n}$$

$$u_0^n = u_0, \quad u_{i+1}^n = \text{proj}_{C(t_{i+1})}(u_i^n) \in C(t_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-1$$

L'approximation u_{i+1}^n est tenue de rattraper l'ensemble $C(t_{i+1})$. Pour montrer l'existence de solution, on doit s'assurer que la suite construite de fonctions approximantes admet des variations uniformément bornées et on utilise le lemme suivant (de compacité) qui permet de choisir une sous suite convergente.

Lemme 1.1 *Soit (u_n) une suite de fonctions de I dans H uniformément bornée en norme et en variation, i.e.*

$$\|u_n(t)\| \leq M_1, \quad n \in \mathbb{N}, t \in I \quad \text{et} \quad \text{var}(u_n) \leq M_2, \quad n \in \mathbb{N};$$

pour des constantes $M_1, M_2 > 0$ indépendamment de n et t . Alors il existe une sous suite (u_{n_k}) et une fonction $u : I \rightarrow H$ telles que $\text{var}(u) \leq M_2$ et $u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$ faiblement dans H pour tout $t \in I$.

Preuve. voir Théorème 0.2.1, p. 10 de [87]

Le corollaire suivant permet d'obtenir l'existence pour le problème perturbé pour toute perturbation admettant une sélection mesurable.

Corollaire 1.2 *Sous les mêmes hypothèses de la proposition précédente, et pour tout couple $(f, a) \in L^1([0, T], H) \times C(0)$, le problème*

$$\dot{u}(t) \in -N_{C(t)}(u(t)) + f(t) \quad \text{p.p sur } [0, T], \quad u(0) = a \in C(0).$$

admet une solution unique absolument continue telle que $|\dot{u}(t)| \leq \dot{v}(t) + 2|f(t)|$ presque partout dans I .

Remarque 1.2

1. La méthode de démonstration du problème (P.R) étant constructive, l'algorithme (de rattrapage) peut être facilement implémenté numériquement. Nous ne nous intéresserons pas dans cette thèse à l'aspect numérique, pour les méthodes numériques du processus de rafle, nous référons à [104].

2. Comme cela a été exposé dans l'introduction, l'hypothèse de base prise sur C pour obtenir l'existence de solution du processus de rafle a été affaiblie de plusieurs façons. De même, les considérations aussi bien mécaniques, économétriques, biologiques (et autres) ont conduit à l'étude du problème du second ordre, du problème avec perturbation (convexe ou non convexe) et (ou) avec retard, et à la recherche de solutions Lipschitziennes, absolument continues, à variations bornées (continues à droite), au sens des mesures différentielles, viables, périodiques ..., et surtout à considérer le cas non convexe, i.e. lorsque C n'est pas à valeurs nécessairement convexes, ce qui est le sujet des résultats exposés dans cette thèse.

1.3 Inclusions différentielles avec retard (mémoire).

Les inclusions différentielles avec retard sont des équations différentielles multivoques où le système ne dépend pas seulement de la valeur initiale mais aussi de l'état antérieur du système. Si une inclusion différentielle exprime qu'à tout instant, la vitesse du système dépend de son état à tout instant, les inclusions différentielles avec mémoire expriment que la vitesse dépend non seulement de l'état du système à cet instant mais aussi de l'histoire de la trajectoire jusqu'à cet instant. Pour formaliser ce concept, on introduit pour tout $T > 0$ et $\tau > 0$, l'espace de Banach $\mathcal{C}_T := \mathcal{C}_T([-\tau, T], H)$ (resp. $\mathcal{C}_0$) des fonctions continues de $[-\tau, T]$ (resp. $[-\tau, 0]$) dans l'espace de Hilbert H , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts

$$\|\varphi\|_T = \max\{\|\varphi(s)\| : s \in [-\tau, T]\}.$$

(respectivement)

$$\|\varphi\|_0 = \max\{\|\varphi(s)\| : s \in [-\tau, 0]\}.$$

Si $u : [-\tau, T] \rightarrow H$, alors pour chaque $t \in I := [0, T]$, on définit la fonction $u_t(s) = \mathcal{T}(t)u(s) = u(t+s)$, $s \in [-\tau, 0]$. Il est évident que, si $u \in \mathcal{C}_T$, alors $u_t \in \mathcal{C}_0$, et l'application $u \rightarrow u_t$ est continue au sens de la convergence uniforme.

Ce genre de problèmes se rencontrent en théorie de contrôle optimal, dans les problèmes de collision en électrodynamique, ainsi que dans les procédures de

planning en micro-économie et dans les problèmes d'évolution biologiques. (voir par exemple [66], [67]). Nous ne traiterons ici que les problèmes avec retard fini, pour le retard infini, on réfère à [80].

Définition 1.10 Soit E un espace de Banach et $F : [0, T] \times \mathcal{C}_0([-\tau, 0], E) \rightarrow ck(E)$. Une solution du problème

$$\dot{u}(t) \in F(t, u_t) \quad p.p. \text{ sur } [0, T], \quad u = \varphi \text{ sur } [-r, 0] \quad (IDR)$$

avec $\varphi \in \mathcal{C}_0([-\tau, 0], E)$, est une fonction continue $u : [-r, T] \rightarrow E$ absolument continue sur $[0, T]$ vérifiant (IDR). u sera dite solution viable dans l'ensemble $K(t)$ pour $K : [0, T] \rightrightarrows E$ si elle vérifie $u(t) \in K(t)$, $\forall t \in [0, T]$; K sera dit invariant si pour toute fonction initiale $\varphi \in \mathcal{C}_0$ telle que $\varphi(0) \in K(0)$, toutes les solutions sont viables dans $K(t)$.

L'une des méthodes que nous utiliserons ici consiste à ramener le problème à un problème sans retard via une technique de discrétisation développée dans [32], [33] et [112]. Ainsi, dans le cas convexe le résultat suivant est obtenu (Théorème 2.2, p.34 de [112])

Proposition 1.6 Soit D un sous ensemble non vide fermé convexe de E , $I := [0, T]$ et $F : I \times \mathcal{C}_0 \rightarrow ck(E)$ une multifonction vérifiant :

- (i) F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{C}_0)$ -mesurable,
- (ii) pour tout t fixé dans I , $F(t, \cdot)$ est u.s.c sur $\mathcal{C}_0$,
- (iii) il existe un ensemble équilibré K dans $ck(E)$ tel que pour tout $(t, \theta) \in I \times \mathcal{C}_0$

$$F(t, \theta) \subset (1 + \|\theta(0)\|) K,$$

- (iv) $F(t, \theta) \cap T_D \theta(0) \neq \emptyset$, $\forall (t, \theta) \in I \times \mathcal{C}_0$,

Alors, pour tout $\varphi_0 \in \mathcal{C}_0$, il existe une fonction continue $u : [-r, T] \rightarrow E$, absolument continue sur $[0, T]$, vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in F(t, u_t) & a.e. \text{ on } [0, T] \\ u(t) \in D & \forall t \in [0, T] \\ u_0 = \varphi_0 \end{cases}$$

où un ensemble K est dit équilibré si $\lambda x \in K$, $\forall x \in K$, $|\lambda| \leq 1$; et avec une condition tangentielle (iv) qui est un critère de viabilité pour les multifonctions s.c.s à valeurs convexes compactes, définie à l'aide du cône contingent

de Bouligand, lequel s'écrit

$$T_K(x) := \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{\alpha > 0} \bigcup_{0 < h < \alpha} \left(\frac{1}{h}(K - x) + \epsilon B \right)$$

La démonstration requière l'existence de solution pour le problème sans retard, celle ci est donnée dans le théorème 7.3 de [39] (voir aussi Proposition 5.8, p.76 de [9])

Proposition 1.7 *Soit D un sous ensemble non vide fermé convexe de E , $I := [0, T]$ et $F : I \times D \rightarrow ck(E)$ une multifonction vérifiant :*

- (i) F est $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(D)$ -mesurable,
- (ii) pour tout t fixé dans I , $F(t, \cdot)$ est scalairement usc sur D ,
- (iii) il existe un ensemble équilibré K dans $ck(E)$ tel que pour tout $(t, u) \in I \times D$

$$F(t, u) \subset (1 + \|u\|) K,$$

- (iv) $F(t, u) \cap T_D(u) \neq \emptyset$, $\forall (t, u) \in I \times D$,

Alors, pour tout $u_0 \in D$, il existe une fonction absolument continue $u : I \rightarrow E$, vérifiant :

$$\begin{cases} u(t) \in F(t, u(t)) & \text{a.e. on } [0, T] \\ u(t) \in D & \forall t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

1.4 Quelques résultats classiques.

Rappelons à présent quelques résultats classiques utilisés dans les différentes méthodes de construction de solutions exposées ici. Commençons par la conséquence suivante du Théorème d'Arzelà-Ascoli concernant l'extraction de sous suites convergentes

Théorème 1.1 *Soit $(x_n(\cdot))$ une suite de fonctions absolument continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach X telle que*

$$\begin{cases} \forall t \in I, (x_k(t))_k \text{ est relativement compacte dans } X, \\ \text{il existe une fonction positive } c(\cdot) \in L^1(I) : \|\dot{x}_k(t)\| \leq c(t) \text{ p.p dans } I; \end{cases}$$

Alors il existe une sous suite (encore notée $x_k(\cdot)$) qui converge vers une fonction absolument continue $x : I \rightarrow X$ dans le sens suivant

$$\begin{cases} x_k(\cdot) \text{ converge uniformément vers } x(\cdot) \text{ sur les compacts de } I, \\ \dot{x}_k(\cdot) \text{ converge faiblement vers } \dot{x}(\cdot) \text{ dans } L^1(I, X). \end{cases}$$

$$4. y_k(t) \in F(t, x_k(t)) \text{ p.p.};$$

Alors

$$y(t) \in F(t, x(t)) \text{ p.p.}$$

Preuve. voir Théorème VI.4, p.170 dans [41]

Ce résultat admet un corollaire intéressant démontré dans [39] (lemme 6.5, p.344).

Corollaire 1.3 *Soit E un espace de Banach séparable, (S, d) un espace de Souslin métrisable et $F : I \times S \rightarrow \text{cwk}(E)$ vérifiant :*

(i) F est scalairement $\mathcal{L}(I) \otimes \mathcal{B}(X)$ -mesurable ;

(ii) pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est scalairement semi-continue supérieurement ;

(iii) $\sup_{(t,x) \in I \times S} F(t, x) < \infty$.

Soit $(r_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres strictement positifs tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$; $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables de I vers S qui converge ponctuellement vers une fonction X , et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $L_E^1(I)$ qui converge $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers Y dans $L_E^1(I)$ telle que

$$Y_n(t) \in \frac{1}{r_n} \int_{[t, t+r_n] \cap I} F(s, X_n(t)) ds \text{ p.p.}$$

Alors

$$Y(t) \in F(t, X(t)) \text{ p. p.}$$

Rappelons qu'un espace de Souslin X est un espace topologique de Hausdorff tel qu'il existe un espace polonais Y et une application continue de Y vers X ; un espace topologique (Y, τ) est un espace polonais si τ est métrisable par une métrique d telle que (Y, d) est un espace métrique complet séparable ; et que tout Banach séparable de dimension quelconque est un espace de Souslin.

Aussi bien dans le cas univoque que multivoque, la question d'existence de solution fait souvent appelle à des méthodes du point fixe, celui que nous utiliserons ici est celui de Kakutani-Ky Fan, (voir par exemple [77], Théorème 4.6, p. 62)

Théorème 1.4 *Soit X un espace topologique de Hausdorff localement convexe, S un sous ensemble non vide convexe compact de X et $F : S \rightarrow cf(S)$. Si F est semi-continue supérieurement sur S , alors il existe $x \in S : x \in F(x)$.*

Terminons ce chapitre par rappeler quelques artifices très utiles dans les techniques de démonstration que nous exposons. Le premier est une conséquence du Théorème de Mazur lequel stipule que l'enveloppe convexe fermée d'un sous ensemble fortement compact (resp. compact en norme) d'un espace de Banach est fortement compact (resp. compact en norme). Cette conséquence s'énonce comme suit

Théorème 1.5 *Soit X un espace de Banach et (x_n) une suite d'éléments de X convergeant faiblement vers x , alors il existe une suite de combinaisons convexes des éléments x_n qui converge vers x en norme dans X .*

En d'autres termes, si $x_n \rightharpoonup x$ alors $y_n \rightarrow x$ pour $y_n \in \overline{\text{co}}\{x_k : k \geq n\}$. (références : [51], Théorème II.5 ; [52], p.60 ; [77], p.8.)

Le deuxième est l'inégalité de Gronwall qui admet de nombreuses versions parmi lesquelles les deux lemmes suivants (le dernier est une version discrète.)

Lemme 1.2 [40] *Soient $\alpha, \beta, r : [0, T] \rightarrow [0, \infty[$ trois fonctions positives Lebesgue-intégrables telles que pour presque tout $t \in [0, T]$*

$$r(t) \leq \alpha(t) + \beta(t) \int_0^t r(s) ds;$$

Alors

$$r(t) \leq \alpha(t) + \beta(t) \int_0^t [\alpha(s) \exp(\int_s^t \beta(\tau) d\tau)] ds$$

Lemme 1.3 [76] *Soient $(\alpha_i), (\beta_i), (\gamma_i)$ et (a_i) des suites de nombres réels positives telles que*

$$a_{i+1} \leq \alpha_i + \beta_i(a_0 + \dots + a_{i-1}) + (1 + \gamma_i)a_i \quad \text{pour } i \in \mathbb{N}_0;$$

Alors

$$a_j \leq (a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_k) \cdot \exp(\sum_{k=0}^{j-1} [k\beta_k + \gamma_k]) \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}_0.$$

Enfin, le résultat suivant est dû à [50] sur la convergence des suites dans un Hilbert

Lemme 1.4 *Si (z_n) est une suite d'éléments d'un espace de Hilbert, (λ_n) une suite strictement décroissante de réels positifs vérifiant*

$$\langle z_n - z_m, \lambda_n z_n - \lambda_m z_m \rangle \leq 0 \quad \forall n, m \in N,$$

alors la suite $(|z_n|)$ est croissante ; si de plus elle est bornée, la suite (z_n) converge dans H .

Chapitre 2

Résultats d'existence concernant le processus de rafle non convexe du premier ordre avec perturbations retardées

2.1 Introduction.

Ce chapitre est consacré à quelques résultats d'existence de solutions pour des inclusions différentielles avec retard du premier ordre de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N^P(C(t); u(t)) + F(t, u_t) & \text{p. p. sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = T(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (PRPR1)$$

Nous allons l'appeler *Processus de rafle non convexe avec perturbation retardée du premier ordre*. De tels problèmes ont été étudiés par différents auteurs (voir par exemple [8], [32], [38], [40], [46], [61] [114], ainsi que leurs références). Dans [38], quelques propriétés topologiques de l'ensemble de solutions pour le problème (PRPR1) dans le cas convexe ont été établies, et dans [40], la compacité de l'ensemble de solutions dans $\mathbb{R}^n$ a été obtenue dans le cas non convexe. En utilisant quelques nouvelles propriétés et caractérisations des ensembles uniformément r -prox réguliers, obtenus dans [15, 16, 40, 108],

on établit dans ce qui suit, l'existence de solutions Lipschitziennes et absolument continues pour le problème (PRPR1) dans le cas non convexe en dimension infinie.

2.2 Le cas Lipschitz.

Considérons une multifonction $C : I \rightrightarrows H$. Nous allons considérer deux hypothèses sur C . On dira que C est Lipschitzienne de rapport λ si pour tout $t, s \in I$ on a

$$\mathcal{H}(C(t), C(s)) \leq \lambda |t - s| \quad (\mathcal{H}_1)$$

$\mathcal{H}$ étant la distance de Hausdorff; C sera dite Lipschitz-continue de rapport λ si pour tout $y \in H$ et tout $t, s \in I$ on a

$$|d_{C(t)}(y) - d_{C(s)}(y)| \leq \lambda |t - s|. \quad (\mathcal{H}_2)$$

Il est clair que $(\mathcal{H}_1)$ implique $(\mathcal{H}_2)$. Nous allons commencer par établir un résultat qui permet d'obtenir une solution approchée pour le problème (PRP R1) sous certaines considérations.

Théorème 2.1 *Soit H un espace de Hilbert separable, $T > 0$, et $r \in]0, +\infty]$. Supposons que $C(t)$ est uniformément r -prox-régulier pour chaque $t \in I := [0, T]$ et Lipschitz-continue de rapport $\lambda > 0$. Soit $F : I \times C_0 \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs convexes compactes dans H tel que F est (globalement) s.c.s sur $I \times C_0$ pour tout t fixé dans I et $F(\cdot, \varphi)$ admet une sélection mesurable dans I pour chaque φ fixé dans C_0 . Si $F(t, \varphi) \subset L^1 \forall (t, \varphi) \in I \times C_0$, pour un certain $l > 0$; alors, pour chaque $\varphi \in C_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$ et pour chaque n suffisamment large il existe une application continue $u_n : [-\tau, T] \rightarrow H$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1) $-\dot{u}_n(t) \in N_{C(\theta_n(t))}^P(u_n(\theta_n(t))) + F(\rho_n(t), T(\rho_n(t))u_n)$, p.p. $t \in I$, où $\theta_n, \rho_n : I \rightarrow I$ avec $\theta_n(t) \rightarrow t$ et $\rho_n(t) \rightarrow t$ pour tout $t \in I$.

2) $\|\dot{u}_n(t)\| \leq (2l + \lambda)$, pour presque tout $t \in I$.

Preuve. On construit via discretization une suite d'applications continues $\{u_n\}_n$ dans C_T .

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, considérons la partition suivante de I :

$$t_{n,i} := \frac{iT}{2^n} \quad (0 \leq i \leq 2^n) \quad (2.1)$$

et

$$I_{n,i} :=]t_{n,i}, t_{n,i+1}] \quad \text{si } 0 \leq i \leq 2^n - 1.$$

Posons

$$\mu_n := \frac{T}{2^n}.$$

Fixons $n_0 \geq 1$ satisfaisant pour tout $n \geq n_0$

$$(2l + 3\lambda)\mu_n < r. \quad (2.2)$$

Premièrement, on pose $u_n(s) := \varphi(s)$, pour tout $s \in [-\tau, 0]$ et pour tout $n \geq n_0$.

Pour chaque $n \geq n_0$, définissons par induction :

$$u_n(t_{n,i+1}) := u_{n,i+1} = \text{Proj}_{C(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)), \quad (2.3)$$

où $f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)$ est l'élément de norme minimale de $F(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)$, c.a.d,

$$\|f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)\| = \min\{\|y\| : y \in F(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)\} \leq l$$

et

$$T(t_{n,i})u_n := (u_n)_{t_{n,i}} \in \mathcal{C}_0.$$

Cette construction est possible en dépit de la nonconvexité des images de C . En effet, pour chaque $n \geq n_0$ on a

$$d_{C(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)) \leq l\mu_n + \lambda|t_{n,i+1} - t_{n,i}| \leq (l + \lambda)\mu_n \leq \frac{r}{2}$$

et donc comme C est à valeurs uniformément r -prox-régulières, de la Proposition 1.2, il existe un point $u_{n,i+1} = \text{Proj}_{C(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n))$, pour tout $n \geq n_0$. Noter que de (2.3) et (2.1) on déduit pour chaque $0 \leq i < 2^n$

$$\|u_{n,i+1} - (u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n))\| \leq (l + \lambda)\mu_n. \quad (2.4)$$

Par construction on a $u_{n,i} \in C(t_{n,i})$, pour tout $0 \leq i < 2^n$.

Pour chaque $n \geq n_0$, ces $(u_{n,i})_{0 \leq i \leq 2^n}$ et $(f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n))_{0 \leq i \leq 2^n}$ sont utilisés pour construire deux applications u_n et f_n de I à H en prenant leurs restrictions sur chaque intervalle $I_{n,i}$ par interpolation linéaire comme suit :

$$f_n(0) := f_{n,0}, f_n(t) := f_{n,i} \quad \forall t \in I_{n,i}, 0 \leq i \leq 2^n \text{ avec } f_{n,i} := f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)$$

et $u_n(0) := u_{n,0} = \varphi(0)$, et pour tout $t \in I_{n,i}$, ($0 \leq i \leq 2^n$)

$$u_n(t) := u_{n,i} + \frac{t - t_{n,i}}{\mu_n}(u_{n,i+1} - u_{n,i}). \quad (2.5)$$

d'où pour chaque t et t' dans $I_{n,i}$ ($0 \leq i \leq 2^n$) on a

$$u_n(t') - u_n(t) = \frac{t' - t}{\mu_n}(u_{n,i+1} - u_{n,i}).$$

Alors, en vertu de (2.4), si $t, t' \in I_{n,i}$ ($0 \leq i < 2^n$) avec $t \leq t'$, on obtient

$$\|u_n(t') - u_n(t)\| \leq (2l + \lambda)(t' - t), \quad (2.6)$$

et, par addition ceci reste vrai pour tout $t, t' \in I$ avec $t \leq t'$. Cette inégalité entraine que u_n est Lipschitz-continue de rapport $2l + \lambda$.

Revenant à la définition de u_n dans (2.5), on observe que pour $0 \leq i < 2^n$ $\dot{u}_n(t) = \frac{u_{n,i+1} - u_{n,i}}{\mu_n}$ pour presque tout $t \in I_{n,i}$.

Alors on obtient, en vertu de (2.4), pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}_n(t) + f_n(t)\| \leq (2l + \lambda), \quad (2.7)$$

qui prouve la partie 2) du théorème.

Maintenant, soient θ_n, ρ_n définies de I vers I par $\theta_n(0) = 0, \rho_n(0) = 0$, et

$$\theta_n(t) = t_{n,i+1}, \quad \rho_n(t) = t_{n,i} \quad \text{si } t \in I_{n,i} \quad (0 \leq i < 2^n).$$

Alors, de (2.3), la construction des u_n et f_n , ainsi que des propriétés des cônes normaux proximaux aux sous ensembles, on obtient pour presque tout $t \in I$

$$f_n(t) \in F(\rho_n(t), T(\rho_n(t))u_n) \quad (2.8)$$

et

$$\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in -N^P(C(\theta_n(t)); u_n(\theta_n(t))). \quad (2.9)$$

Ces dernières inclusions assurent la partie 1) du théorème, ce qui achève la démonstration.

A présent, nous pouvons établir notre premier résultat d'existence pour le problème (PRPR1).

Théorème 2.2 *Supposons $C(t)$ uniformément r -prox-régulier, fortement compact pour chaque $t \in I := [0, T]$, Lipschitz-continue de rapport $\lambda > 0$, et F à valeurs convexes compactes telle que $F(t, \cdot)$ est s.c.s sur C_0 pour tout t fixé dans I , $F(\cdot, \varphi)$ admet une sélection mesurable dans I pour chaque φ fixé dans C_0 et $F(t, \varphi) \subset lB \forall (t, \varphi) \in I \times C_0$; alors pour chaque $\varphi \in C_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$, il existe une application continue $u : [-\tau, T] \rightarrow H$ telle que u est Lipschitzienne sur I et satisfait :*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, u_t) & \text{p.p. sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = T(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]; \end{cases} \quad (PRPR1)$$

et

$$\|\dot{u}(t)\| \leq (2l + \lambda) \quad \text{p.p. sur } I.$$

Preuve. On montre d'abord la conclusion de notre théorème pour une multifonction F globalement s.c.s sur $I \times C_0$, puis comme dans [38] (voir aussi [12]), on peut procéder par approximation pour le démontrer pour $F(t, \cdot)$ s.c.s sur C_0 pour chaque t fixé dans I et $F(\cdot, \varphi)$ admet une sélection mesurable dans I pour chaque φ fixé dans C_0 .

Soit $\varphi \in C_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$. En vertu du Théorème 2.1, il existe une suite d'applications continues $\{u_n\}$ possédant les propriétés 1) et 2). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfaisant (2.2), alors pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} d(u_n(t), C(t)) &\leq \|u_n(t) - u_n(t_i^n)\| + \lambda|t - t_i^n| \\ &\leq (2l + \lambda)|t - t_{n,i}| + \lambda|t - t_{n,i}| \\ &\leq 2(l + \lambda)|t - t_{n,i}| \leq 2(l + \lambda)\mu_n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$C(t)$ étant fortement compact et $\mu_n \rightarrow 0$, (2.10) implique que l'ensemble $\{u_n(t) : n \geq n_0\}$ est relativement fortement compact dans H pour tout $t \in I$. D'où, en utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.1), on peut extraire une sous suite de $\{u_n\}_n$ toujours notée $\{u_n\}_n$, qui converge uniformément sur $[-\tau, T]$ vers une fonction Lipschitzienne u qui vérifie clairement $u \equiv \varphi$ sur $[-\tau, 0]$. Maintenant en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient pour tout $t \in I$

$$u(t) \in C(t).$$

D'une part, il résulte de notre construction dans le Théorème 2.1 et par (2.6), (2.2), ainsi que de la convergence uniforme de $\{u_n\}_n$ vers u sur I que

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(\theta_n(t)) - u(\theta_n(t))\| + \|u(\theta_n(t)) - u(t)\| \rightarrow 0.$$

Posons pour toute fonction ψ à valeurs réelles définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$

$$\omega(\psi, J, \epsilon) := \sup\{|\psi(t) - \psi(t')| : t, t' \in J, |t - t'| \leq \epsilon\}$$

Alors des relations (2.2) et (2.6) on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\rho_n(t))u_n - \mathcal{T}(t)u_n\| &= \sup\{|u_n(s + \rho_n(t)) - u_n(s + t)| : s \in [-\tau, 0]\} \\ &\leq \omega(u_n, [-\tau, T], \mu_n) \\ &\leq \omega(\varphi, [-\tau, 0], \mu_n) + \omega(u_n, [0, T], \mu_n) \\ &\leq \omega(\varphi, [-\tau, 0], \mu_n) + (\lambda + 2l)\mu_n. \end{aligned}$$

Puisque φ est continue, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}(\rho_n(t))u_n - \mathcal{T}(t)u_n\| = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_0.$$

Par conséquent, comme la convergence uniforme de u_n vers u sur $[-\tau, T]$ implique que $\mathcal{T}(t)u_n$ converge uniformément vers $\mathcal{T}(t)u$ sur $[-\tau, 0]$, on conclut que

$$\mathcal{T}(\rho_n(t))u_n \longrightarrow \mathcal{T}(t)u = u_t \quad \text{dans } \mathcal{C}_0. \quad (2.11)$$

D'autre part, de (2.6) et du fait que $f_n(t) \in F(\rho_n(t), \mathcal{T}(\rho_n(t))u_n)$, (f_n) et $(\dot{u}_n)$ sont des suites bornées dans $L^1(I, H, dt)$, alors par extraction de sous suites, on peut supposer que f_n et $\dot{u}_n$ convergent faiblement dans $L^1(I, H, dt)$ vers des applications f et ω respectivement. Ainsi, pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi(0) + \int_0^t \dot{u}(s)ds = u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \varphi(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{u}_n(s)ds = \varphi(0) + \int_0^t \omega(s)ds,$$

ce qui prouve que $\dot{u}(t) = \omega(t)$ pour presque tout $t \in I$.

En utilisant alors le lemme de Mazur (Théorème 1.5), on obtient :

$$\dot{u}(t) + f(t) \in \bigcap_n \overline{\text{co}}\{\dot{u}_k(t) - f_k(t) : k \geq n\} \quad p.p. \quad \text{sur } I.$$

Fixons un tel t dans I et pour chaque ξ dans H , la dernière relation donne

$$\langle \dot{u}(t) + f(t), \xi \rangle \leq \inf_n \sup_{k \geq n} \langle \dot{u}_k(t) + f_k(t), \xi \rangle.$$

Par (2.7), (2.9), et la Proposition 1.1 on obtient pour presque tout $t \in I$

$$\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in N_{C(\theta_n(t))}^P(u_n(\theta_n(t))) \cap \delta \mathcal{B} = \delta \partial^P d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))), \quad (2.12)$$

où $\delta := (2l + \lambda)$. Par suite, en vertu de cette dernière inclusion et la Proposition 1.1 on obtient

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}(t) + f(t), \xi \rangle &\leq \delta \limsup_n \sigma(-\partial^P d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))); \xi) \\ &\leq \delta \sigma(-\partial^P d_{C(t)}(u(t)); \mu) \end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte de la semi continuité supérieure du sous différentiel proximal dans la Proposition 1.2. Puisque $\partial^P d_{C(t)}(u(t))$ est convexe fermé, on obtient

$$\dot{u}(t) + f(t) \in -\delta \partial^P d_{C(t)}(u(t)) \subset -N_{C(t)}^P(u(t)),$$

et alors

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}^P(u(t)) + f(t), \quad (2.13)$$

puisque $u(t) \in C(t)$. Finalement, de (2.8), (2.11) et de la semi-continuité supérieure globale de F ainsi que de la convexité de ses valeurs, on peut appliquer le théorème 1.3 et affirmer que

$$f(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u) = F(t, u_t) \quad \text{p. p. sur } I. \quad (2.14)$$

Ainsi, l'existence est démontrée.

Revenons maintenant au cas général, ie. F séparément s.c.s sur $\mathcal{C}_0$. Nous allons procéder par approximation de F par une suite de multifonctions globalement scalairement s.c.s F_n pour lesquels l'existence est assurée par le premier cas, et montrer ensuite la convergence des solutions associées à F_n en utilisant le corollaire 1.3. Soit (r_n) une suite de nombres strictement positifs tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Pour tout $n \geq 1$, posons

$$F_n(t, y) := \frac{1}{r_n} \int_{I_{t, r_n}} F(s, y) ds$$

pour tout $(t, y) \in I \times \mathcal{C}_0$ où $I_{t, r_n} := [t, t + r_n] \cap I$. Nous avons besoin du lemme suivant démontré dans ([39], Proposition 5.3)

Lemme 2.1 Soit E un espace de Banach séparable et $F : I \times E \rightarrow ck(E)$ vérifiant :

- (a)- Pour tout $t \in I$, $F(t, \cdot)$ est scalairement s.c.s sur E ;
- (b)- F est scalairement mesurable sur $I \times E$;
- (c)- $F(t, x) \subset lIB \ \forall (t, x) \in I \times E$.

Alors F_n est scalairement s.c.s sur $I \times E$.

En prenant $E := \mathcal{C}_0$, F vérifie les hypothèses du lemme, par conséquent, F_n est scalairement s.c.s sur $I \times \mathcal{C}_0$ avec $F_n(t, y) \subset lIB, \forall n \geq 1, \forall (t, y) \in I \times \mathcal{C}_0$. On peut donc appliquer le premier cas et affirmer l'existence pour tout $n \geq 1$, d'une application continue $u_n \in \mathcal{C}_T$ telle que

$$\begin{cases} \dot{u}_n(t) \in -N_{C(t)}^P(u_n(t)) + F(t, T(t)u_n) & \text{p.p. sur } I; \\ u_n(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u_n(s) = T(0)u_n(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

En d'autres termes, il existe une fonction mesurable $h_n : I \rightarrow H$ telle que

$$\begin{cases} h_n(t) \in F(t, T(t)u_n) & \text{p.p. sur } I; \\ \dot{u}_n(t) \in -N_{C(t)}^P(u_n(t)) + h_n(t) & \text{p.p. sur } I; \\ u_n(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u_n(s) = T(0)u_n(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Puisque C est compact et $u_n(t) \in C(t)$, $\forall t \in I$, on obtient la compacité relative forte de l'ensemble $\{u_n(t) : n \geq 1\}$ dans H pour tout $t \in I$. Du Théorème 1.1, on peut extraire une sous suite convergeant uniformément vers $u \in \mathcal{C}_T$ avec $u(t) \in C(t)$, $\forall t \in I$ et $T(0)u \equiv \varphi$ dans $[-\tau, 0]$.

D'autre part, $(\dot{u}_n)$ et (h_n) sont relativement $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact dans $L_H^1(I, dt)$. On peut donc supposer que $\dot{u}_n \rightarrow \dot{u}$ et $h_n \rightarrow h$ faiblement dans $L_H^1(I, dt)$. Puisque $T(t)u_n \rightarrow T(t)u$ dans $\mathcal{C}_0$ pour tout $t \in I$ et $h_n \rightarrow h, \sigma(L^1, L^\infty)$ avec $h_n(t) \in F(t, T(t)u_n)$ p.p. sur I , on peut alors appliquer le corollaire 1.3 et conclure que

$$h(t) \in F(t, T(t)u) \text{ p.p.}$$

En reprenant les techniques de Castaing comme dans le premier cas, on obtient

$$\dot{u}(t) + h(t) \in -\delta \partial^P d_{C(t)}(u(t)) \subset -N_{C(t)}^P(u(t)),$$

avec $\delta := (2l + \lambda)$ et finalement

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}^P(u(t)) + h(t) \subset N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, T(t)u).$$

La démonstration est ainsi complète.

Sous des hypothèses différentes, un autre résultat d'existence pour le problème (PRPR1) est aussi prouvé dans le théorème suivant. Ici, nous allons remplacer l'hypothèse de compacité de $C(t)$ par une condition sur la perturbation F .

Théorème 2.3 *Supposons les hypothèses du théorème 2.2 satisfaites avec C à valeurs non nécessairement compactes. Si $F(t, \varphi) \in \mathcal{K} \subset L^1 B$ pour chaque $(t, \varphi) \in I \times \mathcal{C}_0$, où $\mathcal{K}$ est un ensemble fortement compact dans H ; alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$, il existe une application continue $u : [-\tau, T] \rightarrow H$ telle que u est Lipschitzienne sur I et satisfait :*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, u_t) & \text{p.p. sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = \mathcal{T}(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]; \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{u}(t)\| \leq (2l + \lambda) \quad \text{p.p. sur } I.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$. Du Théorème 2.1, il existe une suite d'applications continues $\{u_n\}$ possédant les propriétés 1) et 2) du Théorème 2.1. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfaisant (2.2). La difficulté essentielle par rapport au cas précédent est la convergence de (u_n) , nous allons montrer ici que la suite $(u_n)_n$ vérifie la propriété de Cauchy dans l'espace des applications continues $\mathcal{C}(I, H)$ muni de la norme de la convergence uniforme. Fixons $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n \geq n_0$ et fixons aussi $t \in I$ avec $t \neq t_{m,i}$ pour $i = 0, \dots, 2^m$ et $t \neq t_{n,j}$ pour $j = 0, \dots, 2^n$. Observons en vertu de $(\mathcal{H}_2)$, (2.1), (2.4), et (2.6) que

$$\begin{aligned} d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) &= d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(\theta_m(t))) \\ &\leq \lambda |\theta_n(t) - \theta_m(t)| + \|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\| \\ &\leq \lambda(\mu_n + \mu_m) + (2l + \lambda)\mu_m \\ &\leq (2l + 3\lambda)\mu_{n_0}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

et donc, de (2.2) on a $d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) < r$. Posons $\delta := (2l + \lambda)$. Alors, les relations (2.12) et (2.15), et la Proposition 1.3 entraînent

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t) \rangle &\leq \frac{2\delta}{r} \|u_n(\theta_n(t)) - u_m(t)\|^2 + \delta d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) \\ &\leq \frac{2\delta}{r} [\|u_n(t) - u_m(t)\| + \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\|]^2 \\ &\quad + 2\delta(l + \lambda)\mu_{n,m}, \end{aligned}$$

où $\mu_{n,m} := \mu_n + \mu_m$ et ceci implique, en vertu de (2.4) et (2.6)

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t) \rangle &\leq \frac{2\delta}{r} [\|u_n(t) - u_m(t)\| + (2l + \lambda)\mu_n]^2 \\ &\quad + 2\delta(l + \lambda)\mu_{n,m}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Maintenant, définissons $g_n(t) := \int_0^t f_n(s)ds$ pour tout $t \in I$. Observons que pour tout $t \in I$ l'ensemble $\{g_n(t) : n \geq n_0\}$ est contenu dans l'ensemble fortement compact TK et est donc relativement fortement compact dans H . Par suite, comme $\|f_n(t)\| \leq l$ p. p. sur I , le Théorème 1.1 assure la relative forte compacité de l'ensemble $\{g_n : n \geq n_0\}$ par rapport à la convergence uniforme dans $C(I, H)$ et donc on peut supposer, sans perdre la généralité, que (g_n) converge uniformément vers une certaine application g . Aussi, on peut supposer que (f_n) converge faiblement dans $L^1(I, H, dt)$ vers une application f . Ainsi, pour tout $t \in I$,

$$g(t) = \lim_n g_n(t) = \lim_n \int_0^t f_n(s)ds = \int_0^t f(s)ds,$$

ce qui entraîne que g est absolument continue et que $\dot{g} = f$ p. p. sur I .

Posons maintenant $w_n(t) := u_n(t) + g_n(t)$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in I$, et posons $\eta_{n,m} := \max\{\mu_{n,m}, \frac{1}{\lambda}(\|g_n - g\|_\infty + \|g_m - g\|_\infty)\}$. Alors de (2.7) et

(2.16) on a

$$\begin{aligned}
\langle \dot{w}_n(t), w_n(\theta_n(t)) - w_m(t) \rangle &= \langle \dot{w}_n(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t) \rangle + \langle \dot{w}_n(t), g_n(\theta_n(t)) - g_m(t) \rangle \\
&\leq \frac{2\delta}{r} \left[\|w_n(t) - w_m(t)\| + \|g_n(t) - g_m(t)\| + (2l + \lambda)\mu_n \right]^2 \\
&\quad + 2\delta(l + \lambda)\mu_{n,m} + \delta\|g_n(\theta_n(t)) - g_m(t)\| \\
&\leq \frac{2\delta}{r} \left[\|w_n(t) - w_m(t)\| + \lambda\eta_{n,m} + (2l + \lambda)\mu_n \right]^2 \\
&\quad + 3\delta(l + \lambda)\eta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité assure par (2.7) que

$$\begin{aligned}
\langle \dot{w}_n(t), w_n(t) - w_m(t) \rangle &\leq \langle \dot{w}_n(t), w_n(t) - w_n(\theta_n(t)) \rangle + 3\delta^2\eta_{n,m} \\
&\quad + \frac{2\delta}{r} \left[\|w_n(t) - w_m(t)\| + \lambda\eta_{n,m} + \delta\mu_n \right]^2 \\
&\leq 4\delta^2\eta_{n,m} + l\delta\eta_{n,m} \\
&\quad + \frac{2\delta}{r} \left[\|w_n(t) - w_m(t)\| + \lambda\eta_{n,m} + \delta\mu_n \right]^2.
\end{aligned}$$

De la même manière, on a aussi

$$\begin{aligned}
\langle \dot{w}_m(t), w_m(t) - w_n(t) \rangle &\leq 4\delta^2\eta_{n,m} + l\delta\eta_{n,m} + \\
&\quad + \frac{2\delta}{r} \left[\|w_n(t) - w_m(t)\| + \lambda\eta_{n,m} + \delta\mu_m \right]^2.
\end{aligned}$$

En remarquant que $\|w_n(t)\| \leq (l + \lambda)T + \|\varphi(0)\|$, il résulte alors des deux dernières inégalités que pour une certaine constante positive α indépendante de m, n , et t , on a

$$2\langle \dot{w}_m(t) - \dot{w}_n(t), w_m(t) - w_n(t) \rangle \leq \alpha\delta\eta_{n,m} + 8\frac{\delta}{r}\|w_m(t) - w_n(t)\|^2,$$

et donc, pour des constantes positives β et γ indépendantes de m, n , et t

$$\frac{d}{dt} \left(\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 \right) \leq \beta\lambda\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 + \gamma\eta_{n,m}.$$

Comme $\|w_m(0) - w_n(0)\|^2 = 0$, l'inégalité de Gronwall (Lemme 1.2) entraîne pour tout $t \in I$

$$\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 \leq \gamma \eta_{m,m} \int_0^t [\exp(\beta(t-s))] ds$$

et par suite, pour une certaine constante positive K indépendante de m, n , et t on a

$$\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 \leq K \eta_{m,m}.$$

La propriété de Cauchy dans $\mathcal{C}(I, H)$ de la suite $(w_n)_n = (u_n + g_n)_n$ est ainsi établie, par conséquent cette suite converge uniformément vers une application w . On déduit que la suite $(u_n)_n$ construite dans le Théorème 2.1 converge uniformément vers $u := w - g$. En suivant les mêmes arguments de la démonstration du Théorème 2.2, on montre la conclusion du théorème.

2.3 Le cas absolument continu.

Soient $T > 0$, $I = [0, T]$, $\tau > 0$ et $r \in]0, +\infty]$. Une multifonction $C : I \rightrightarrows H$ est dite absolument continue si pour tout $t, t' \in I$ on a

$$\mathcal{H}(C(t), C(t')) \leq |v(t) - v(t')|. \quad (2.17)$$

Comme dans le cas Lipschitz, on utilisera parfois l'hypothèse plus faible suivante : pour tout $y \in H$ et tout $t, t' \in I$

$$|d_{C(t)}(y) - d_{C(t')}(y)| \leq |v(t) - v(t')|. \quad (2.18)$$

avec $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue. Ceci veut dire que C varie de façon absolument continue. Nous allons commencer par établir un résultat qui permet d'obtenir des solutions approchées pour le problème (PRPR1) sous certaines considérations.

Théorème 2.4 *Supposons que C est absolument continu et à valeurs uniformément r -prox-régulières pour chaque $t \in I := [0, T]$. Soit $F : I \times C_0 \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs convexes compactes dans H tel que $F(t, \cdot)$ est s.c.s sur C_0 pour tout t fixé dans I et $F(\cdot, \varphi)$ admet une sélection mesurable dans I pour chaque φ fixé dans C_0 . Si $F(t, \varphi) \subset lB \ \forall (t, \varphi) \in I \times C_0$, pour un certain $l > 0$; alors, pour chaque $\varphi \in C_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$ et pour chaque*

n suffisamment large il existe une application continue $u_n : [-\tau, T] \rightarrow H$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1) $-\dot{u}_n(t) \in N_{C(\theta_n(t))}^P(u_n(\theta_n(t))) + F(\rho_n(t), T(\rho_n(t))u_n)$, p. p. sur I , où $\theta_n, \rho_n : I \rightarrow I$ avec $\theta_n(t) \rightarrow t$ et $\rho_n(t) \rightarrow t$ pour tout $t \in I$.

2) $\|\dot{u}_n(t)\| \leq (l+1)(\dot{v}(t) + 1)$, p.p. dans I .

Preuve. On suivra la même démarche que dans le cas Lipschitz, il suffit de montrer le résultat pour une multifonction F globalement s.c.s sur $I \times \mathcal{C}_0$, puis on procédera par approximation pour le cas où $F(t, \cdot)$ est s.c.s sur $\mathcal{C}_0$ pour chaque t fixé dans I et $F(\cdot, \varphi)$ admet une sélection mesurable dans I pour chaque φ fixé dans $\mathcal{C}_0$.

Premièrement, observons que (2.17) assure pour $t < t'$

$$|d_{C(t)}(y) - d_{C(t')}(y)| \leq \int_t^{t'} |\dot{v}(s)| ds, \quad (2.19)$$

on peut supposer (en remplaçant $\dot{v}$ par $|\dot{v}|$ s'il le faut) que $\dot{v}(t) \geq 0, \forall t \in I$.

On construit via discretization la suite recherchée d'applications continues $\{u_n\}_n$ dans $\mathcal{C}_T$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, considérons la partition suivante de I :

$$t_{n,i} := \frac{iT}{2^n} \quad (0 \leq i \leq 2^n) \quad (2.20)$$

et

$$I_{n,i} :=]t_{n,i}, t_{n,i+1}] \quad \text{si } 0 \leq i \leq 2^n - 1.$$

Posons

$$\mu_n := \frac{T}{2^n}, \quad \epsilon_{n,i} = \int_{t_{n,i}}^{t_{n,i+1}} \dot{v}(s) ds \quad \text{et} \quad \epsilon_n = \max_{0 \leq i \leq 2^n} \{\mu_n + \epsilon_{n,i}\}. \quad (2.21)$$

Puisque, $\epsilon_n \rightarrow 0$, on peut fixer $n_0 \geq 1$ satisfaisant pour tout $n \geq n_0$

$$2\mu_n < \frac{r}{(2l+1)} \quad , \quad 2\epsilon_n < \min\left\{1, \frac{r}{(4l+3)}\right\} \quad (2.22)$$

Premièrement, on pose $u_n(s) := \varphi(s)$, pour tout $s \in [-\tau, 0]$ et pour tout $n \geq n_0$.

Pour chaque $n \geq n_0$, définissons par induction :

$$u_n(t_{n,i+1}) := u_{n,i+1} = Proj_{C(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)), \quad (2.23)$$

où $f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)$ est l'élément de norme minimale de $F(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)$, c.a.d,

$$\|f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)\| = \min\{\|y\| : y \in F(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)\} \leq l \quad (2.24)$$

et

$$T(t_{n,i})u_n := (u_n)_{t_{n,i}}.$$

Cette construction est possible en dépit de la nonconvexité des images de C . En effet, pour chaque $n \geq n_0$ on a

$$d_{C(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)) \leq l\mu_n + v(t_{n,i+1}) - v(t_{n,i}) \leq (l+1)\epsilon_n \leq \frac{r}{2}$$

et donc comme C est à valeurs uniformément r -prox-régulières, de la Proposition 1.2 il existe un point $u_{n,i+1} = Proj_{C(t_{n,i+1})}(u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n))$, pour tout $n \geq n_0$. Notons que de (2.19) et (2.23) on déduit pour chaque $0 \leq i < 2^n$

$$\|u_{n,i+1} - (u_{n,i} - \mu_n f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n))\| \leq l\mu_n + \epsilon_{n,i} \leq (l+1)(\mu_n + \epsilon_{n,i}). \quad (2.25)$$

Par construction on a

$$u_{n,i} \in C(t_{n,i}), \quad \forall 0 \leq i < 2^n \quad (2.26)$$

Pour chaque $n \geq n_0$, ces $(u_{n,i})_{0 \leq i \leq 2^n}$ et $(f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n))_{0 \leq i \leq 2^n}$ sont utilisés pour construire deux applications u_n et f_n de I à H en prenant leurs restrictions sur chaque intervalle $I_{n,i}$ comme suit :

$$u_n(0) := u_0^n = \varphi(0), \quad f_n(0) = f_{n,0}$$

et pour tout $t \in I_{n,i}$ ($0 \leq i \leq 2^n$), $f_n(t) := f_{n,i}$ et

$$u_n(t) := u_{n,i} + \frac{a(t) - a(t_{n,i})}{\mu_n + \epsilon_{n,i}}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + \mu_n f_{n,i}) - (t - t_{n,i})f_{n,i}, \quad (2.27)$$

où $f_{n,i} := f_0(t_{n,i}, T(t_{n,i})u_n)$ et $a(t) := v(t) + t \quad \forall t \in I$. Ainsi pour chaque t et t' dans $I_{n,i}$ ($0 \leq i \leq 2^n$) on a

$$u_n(t') - u_n(t) = \frac{a(t') - a(t)}{\mu_n + \epsilon_{n,i}}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + \mu_n f_{n,i}) - (t' - t)f_{n,i}.$$

Alors, en vertu de (2.25), si $t, t' \in I_{n,i}$ ($0 \leq i < 2^n$) avec $t \leq t'$, on obtient

$$\|u_n(t') - u_n(t)\| \leq (l+1)(a(t') - a(t)) + l(t' - t) \leq (2l+1)(a(t') - a(t)), \quad (2.28)$$

et, par addition ceci reste vrai pour tout $t, t' \in I$ avec $t \leq t'$. Cette inégalité entraîne que u_n est absolument continue.

Revenant à la définition de u_n dans (2.27), on observe que pour $0 \leq i < 2^n$

$$\dot{u}_n(t) = \frac{\dot{a}(t)}{\mu_n + \epsilon_{n,i}}(u_{n,i+1} - u_{n,i} + \mu_n f_{n,i}) - f_{n,i} \quad \text{p. p. tout } t \in I_{n,i}.$$

Alors on obtient, en vertu de (2.25), pour presque tout $t \in I$

$$\|\dot{u}_n(t) + f_n(t)\| \leq (l+1)(\dot{v}(t) + 1), \quad (2.29)$$

ce qui prouve la partie 2) du théorème.

Maintenant, soient θ_n, ρ_n définies de I vers I par $\theta_n(0) = 0, \rho_n(0) = 0$, et

$$\theta_n(t) = t_{n,i+1}, \quad \rho_n(t) = t_{n,i} \quad \text{si } t \in I_{n,i} \quad (0 \leq i < 2^n). \quad (2.30)$$

Alors, de (2.23), la construction des u_n et f_n , ainsi que des propriétés des cônes normaux proximaux aux sous ensembles, on obtient pour presque tout $t \in I$

$$f_n(t) \in F(\rho_n(t), \mathcal{T}(\rho_n(t))u_n) \quad (2.31)$$

et

$$\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in -N_{C(\theta_n(t))}^P(u_n(\theta_n(t))). \quad (2.32)$$

Ces dernières inclusions assurent la partie 1) du théorème, ce qui achève la démonstration.

A présent, nous pouvons établir l'existence de solution pour le problème (PRPR1) sous deux hypothèses différentes.

Théorème 2.5 *Supposons les hypothèses du Théorème 2.4 satisfaites. Si $C(t)$ est fortement compact pour chaque $t \in I$; alors pour chaque $\varphi \in C_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$, il existe une application continue $u : [-\tau, T] \rightarrow H$, absolument continue sur I et satisfaisant :*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, u_t) & \text{p.p. sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = \mathcal{T}(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]; \end{cases} \quad (PRPR1)$$

et

$$\|\dot{u}(t)\| \leq (l+1)(\dot{v}(t) + 1) \quad p.p. \quad \text{sur } I.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$. En vertu du Théorème 2.4, il existe une suite d'applications continues $\{u_n\}$ possédant les propriétés 1) et 2). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfaisant (2.22), alors pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in I$ on a

$$\begin{aligned} d(u_n(t), C(t)) &\leq \|u_n(t) - u_n(t_{n,i}^n)\| + \mathcal{H}(C(t_{n,i}), C(t)) \\ &\leq (2l+1)(a(t) - a(t_{n,i}) + v(t) - v(t_{n,i})) \\ &\leq (2l+1)(\epsilon_{n,i} + \mu_n) + \epsilon_{n,i} \leq 2(l+1)\epsilon_n. \end{aligned} \quad (2.33)$$

$C(t)$ étant fortement compact et $\epsilon_n \rightarrow 0$, (2.33) implique que l'ensemble $\{u_n(t) : n \geq n_0\}$ est relativement fortement compact dans H pour tout $t \in I$. D'où, en utilisant le théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut extraire une sous suite de $\{u_n\}_n$ toujours notée $\{u_n\}_n$, qui converge uniformément sur $[-\tau, T]$ vers une fonction continue u qui vérifie clairement $u_0 = \varphi$ sur $[-\tau, 0]$. Maintenant en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient pour tout $t \in I$

$$u(t) \in C(t). \quad (2.34)$$

D'une part, il résulte de notre construction dans le Théorème 2.4 que pour tout $t \in I$

$$\mathcal{H}(C(\theta_n(t)), C(t)) \leq |v(\theta_n(t)) - v(t)| \leq \epsilon_n \rightarrow 0, \quad (2.35)$$

et par (2.22), (2.28), et la convergence uniforme de $\{u_n\}_n$ vers u sur I on obtient

$$\|u_n(\theta_n(t)) - u(t)\| \leq \|u_n(\theta_n(t)) - u(\theta_n(t))\| + \|u(\theta_n(t)) - u(t)\| \rightarrow 0. \quad (2.36)$$

En utilisant la même technique dans [38] et les relations (2.22) et (2.28) on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{T}(\rho_n(t))u_n - \mathcal{T}(t)u_n\| = 0 \quad \text{dans } \mathcal{C}_0.$$

Par conséquent, comme la convergence uniforme de u_n vers u sur $[-\tau, T]$ implique que $\mathcal{T}(t)u_n$ converge uniformément vers $\mathcal{T}(t)u$ sur $[-\tau, 0]$, on conclut que

$$\mathcal{T}(\rho_n(t))u_n \longrightarrow \mathcal{T}(t)u = u_t \quad \text{dans } \mathcal{C}_0. \quad (2.37)$$

D'autre part, de (2.28) et (2.31), (f_n) et $(\dot{u}_n)$ sont des suites bornées dans $L^1(I, H, dt)$, alors par extraction de sous suites, on peut supposer que f_n

et $\dot{u}_n$ convergent faiblement dans $L^1(I, H, dt)$ vers des applications f et ω respectivement. Ainsi, pour tout $t \in I$ on a

$$\varphi(0) + \int_0^t \dot{u}(s) ds = u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = \varphi(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \dot{u}_n(s) ds = \varphi(0) + \int_0^t \omega(s) ds,$$

ce qui prouve que u est absolument continue et $\dot{u}(t) = \omega(t)$ pour presque tout $t \in I$.

En utilisant alors le lemme de Mazur (Théorème 1.5), on obtient :

$$\dot{u}(t) + f(t) \in \bigcap_n \overline{\text{co}} \{ \dot{u}_k(t) + f_k(t) : k \geq n \} \quad p.p. \quad \text{on } I.$$

Fixons un t dans I et un ξ dans H , la dernière relation donne

$$\langle \dot{u}(t) + f(t), \xi \rangle \leq \inf_n \sup_{k \geq n} \langle \dot{u}_k(t) + f_k(t), \xi \rangle.$$

Par (2.29), (2.32), et la Proposition 1.1 on obtient pour presque tout $t \in I$

$$\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in N_{C(\theta_n(t))}^P(u_n(\theta_n(t))) \cap \delta(t)B = \partial^P d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))),$$

où $\delta(t) := (l+1)(\dot{v}(t)+1)$. Par suite, en vertu de cette dernière inclusion et de la remarque 1.1 de la Proposition 1.4 on obtient

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}(t) + f(t), \xi \rangle &\leq \delta(t) \limsup_n \sigma(-\partial^P d_{C(\theta_n(t))}(u_n(\theta_n(t))); \xi) \\ &\leq \delta(t) \sigma(-\partial^P d_{C(t)}(u(t)); \mu) \end{aligned}$$

Puisque $\partial^P d_{C(t)}(u(t))$ est convexe fermé, on obtient

$$\dot{u}(t) + f(t) \in -\delta \partial^P d_{C(t)}(u(t)) \subset -N_{C(t)}^P(u(t)),$$

et alors

$$-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}^P(u(t)) + f(t),$$

puisque $u(t) \in C(t)$. Finalement, de (2.37) et de la semi-continuité supérieure globale de F ainsi que de la convexité de ses valeurs, et avec les mêmes techniques utilisées précédemment, on montre que

$$f(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u) = F(t, u_t) \quad p.p. \quad \text{sur } I.$$

Ainsi, l'existence est démontrée.

On obtient un résultat similaire, si on remplace l'hypothèse de compacité sur C par une condition sur F

Théorème 2.6 *Supposons les hypothèses du Théorème 2.4 satisfaites et supposons $F(t, \varphi) \subset \mathcal{K} \subset lB$ pour chaque $(t, \varphi) \in I \times \mathcal{C}_0$, où $\mathcal{K}$ est un ensemble fortement compact dans H ; alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$, il existe une application continue $u : [-\tau, T] \rightarrow H$ telle que u est absolument continue sur I et satisfait :*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, u_t) & \text{p.p. sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = T(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]; \end{cases}$$

and

$$\|\dot{u}(t)\| \leq (l+1)(\dot{v}(t) + 1) \quad \text{p.p. sur } I.$$

Preuve. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$. Du Théorème 2.4, il existe une suite d'applications continues $\{u_n\}$ possédant les propriétés 1) et 2) du théorème. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfaisant (2.22). Montrons que la suite $(u_n)_n$ vérifie la propriété de Cauchy dans l'espace des applications continues $\mathcal{C}(I, H)$ muni de la norme de la convergence uniforme. Fixons $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \geq n \geq n_0$ et fixons aussi $t \in I$ avec $t \neq t_{m,i}$ pour $i = 0, \dots, 2^m$ et $t \neq t_{n,j}$ pour $j = 0, \dots, 2^n$. Observons en vertu de (2.19), (2.21), et (2.28) que

$$\begin{aligned} d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) &= d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) - d_{C(\theta_m(t))}(u_m(\theta_m(t))) \\ &\leq v(\theta_n(t)) - v(\theta_m(t)) + \|u_m(\theta_m(t)) - u_m(t)\| \\ &\leq \int_{\theta_m(t)}^{\theta_n(t)} \dot{v}(s) ds + (2l+1) \left[\int_t^{\theta_m(t)} \dot{v}(s) ds + (\theta_m(t) - t) \right] \\ &\leq \epsilon_n + (2l+1)\epsilon_m \end{aligned} \quad (2.38)$$

et donc, de (2.22) on a $d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) < r$. Posons $\delta(t) := (l+1)\dot{a}(t)$. Alors, les relations (2.32) et (2.38), et la Proposition 1.3 entraînent

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t) \rangle &\leq \frac{2\delta(t)}{r} \|u_n(\theta_n(t)) - u_m(t)\|^2 + \delta(t) d_{C(\theta_n(t))}(u_m(t)) \\ &\leq \frac{2\delta(t)}{r} \left[\|u_n(t) - u_m(t)\| + \|u_n(\theta_n(t)) - u_n(t)\| \right]^2 \\ &\quad + \delta(t)(\epsilon_n + (2l+1)\epsilon_m), \end{aligned}$$

et ceci implique, en vertu de (2.21) et (2.28)

$$\langle \dot{u}_n(t) + f_n(t), u_n(\theta_n(t)) - u_m(t) \rangle \leq \frac{2\delta(t)}{r} \left[\|u_n(t) - u_m(t)\| + (2l+1)\epsilon_n \right]^2$$

De la même manière, on a aussi

$$\begin{aligned} \langle \dot{w}_m(t), w_m(t) - w_n(t) \rangle &\leq 4\delta(2l+1)(\eta_n + \eta_m) \\ &+ \frac{2\delta(t)}{r} \left[\|w_n(t) - w_m(t)\| + (\eta_n + \eta_m) + (2l+1)\eta_m \right]^2. \end{aligned}$$

Il résulte alors des deux dernières inégalités que pour une certaine constante positive α indépendante de m, n , et t , on a (noter que $\|w_n(t)\| \leq lT + \|\varphi(0)\| + \int_0^T \dot{v}(s)ds$)

$$2\langle \dot{w}_m(t) - \dot{w}_n(t), w_m(t) - w_n(t) \rangle \leq \alpha\delta(t)(\eta_n + \eta_m) + 8\frac{\delta(t)}{r} \|w_m(t) - w_n(t)\|^2,$$

et donc, pour des constantes positives β et γ indépendantes de m, n , et t

$$\frac{d}{dt} (\|w_m(t) - w_n(t)\|^2) \leq \beta\dot{\alpha}(t)\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 + \gamma\dot{\alpha}(t)(\eta_n + \eta_m).$$

Comme $\|w_m(0) - w_n(0)\|^2 = 0$, le lemme 1.2 entraîne pour tout $t \in I$

$$\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 \leq \gamma(\eta_n + \eta_m) \int_0^t [\dot{\alpha}(s) \exp(\beta \int_s^t \dot{\alpha}(u)du)] ds$$

et par suite, pour une certaine constante positive K indépendante de m, n , et t on a

$$\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 \leq K(\eta_n + \eta_m).$$

La propriété de Cauchy dans $\mathcal{C}(I, H)$ de la suite $(w_n)_n = (u_n + g_n)_n$ est ainsi établie, par conséquent cette suite converge uniformément vers une application w . On déduit que la suite $(u_n)_n$ construite dans le Théorème 2.4 converge uniformément vers $u := w - g$. En suivant les mêmes arguments de la démonstration du Théorème 2.5, on montre la conclusion du théorème, c.a.d. l'application limite u est continue sur $[-\tau, T]$, absolument continue sur I et satisfait

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, u_t) & p.p. \text{ sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = T(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]; \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{u}(t)\| \leq (l+1)(\dot{v}(t) + 1) \quad p.p. \text{ sur } I.$$

Remarque 2.1 1. Les résultats de ce chapitre généralisent les résultats obtenus dans [38, 40, 114]. Le Théorème 2.5 étend celui donné dans [38] au cas des multifonctions absolument continues à valeurs non convexes, et le Théorème 2.6 élargit le Théorème 3.1 de [114] et le Théorème 2.1 dans [40] obtenus en dimension finie. Notons que la démonstration ici est complètement différente que celles données dans [40, 114] et permet d'obtenir le résultat en dimension infinie. Il est aussi intéressant de noter que les hypothèses prises sur F sont différentes que celles dans le Théorème 2.1 de [40], où F est supposée à compactes et satisfaisant une condition de croissance linéaire alors que dans notre Théorème 2.6, F est contenue dans un ensemble compact; et que ce résultat reste valable en remplaçant les conditions sur F .

2. Les problèmes avec retard sont souvent liés à la question de viabilité, c'est à dire au problème d'invariance d'un ensemble donné, du fait que l'on cherche des solutions qui soient viables dans cet ensemble. Dans le cas du processus de rafle, ceci est assuré par la condition de vacuité du cône $u(t) \in C(t)$. Dans la section suivante, nous allons étudier l'invariance d'un ensemble "naturel" pour une inclusion différentielle générale.

2.4 Existence de solution viable.

Dans cette section, nous allons considérer seulement la perturbation F sur laquelle est définie le retard et pour laquelle nous allons établir l'existence de solutions viables; il serait facile après, en ajoutant le cône normal, de déduire le résultat pour le (PRPR1) et même pour le (PRPR2), ceci sera démontré dans le Chapitre 3 pour le second ordre, et on se limitera ici à exposer la méthode de démonstration, *méthode de discrétisation*, dans le cas simple de la perturbation F seulement. Celle ci consiste à ramener le problème avec retard à un problème sans retard et appliquer les résultats obtenus pour ce cas. Soit donc E un espace de Banach séparable, $\mathcal{C}_T := \mathcal{C}([-\tau, T], E)$ l'espace des fonctions continues de $[-\tau, T]$ vers E , pour $T \geq 0$ et l'inclusion différentielle avec retard

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t) \quad p.p. \quad t \in [0, T]. \quad (2.40)$$

De la même manière, on a aussi

$$\begin{aligned} \langle \dot{w}_m(t), w_m(t) - w_n(t) \rangle &\leq 4\delta(2l+1)(\eta_n + \eta_m) \\ &+ \frac{2\delta(t)}{r} \left[\|w_n(t) - w_m(t)\| + (\eta_n + \eta_m) + (2l+1)\eta_m \right]^2. \end{aligned}$$

Il résulte alors des deux dernières inégalités que pour une certaine constante positive α indépendante de m, n , et t , on a (noter que $\|w_n(t)\| \leq lT + \|\varphi(0)\| + \int_0^T \dot{v}(s)ds$)

$$2\langle \dot{w}_m(t) - \dot{w}_n(t), w_m(t) - w_n(t) \rangle \leq \alpha\delta(t)(\eta_n + \eta_m) + 8\frac{\delta(t)}{r} \|w_m(t) - w_n(t)\|^2,$$

et donc, pour des constantes positives β et γ indépendantes de m, n , et t

$$\frac{d}{dt} (\|w_m(t) - w_n(t)\|^2) \leq \beta\dot{a}(t)\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 + \gamma\dot{a}(t)(\eta_n + \eta_m).$$

Comme $\|w_m(0) - w_n(0)\|^2 = 0$, le lemme 1.2 entraîne pour tout $t \in I$

$$\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 \leq \gamma(\eta_n + \eta_m) \int_0^t [\dot{a}(s) \exp(\beta \int_s^t \dot{a}(u)du)] ds$$

et par suite, pour une certaine constante positive K indépendante de m, n , et t on a

$$\|w_m(t) - w_n(t)\|^2 \leq K(\eta_n + \eta_m).$$

La propriété de Cauchy dans $\mathcal{C}(I, H)$ de la suite $(w_n)_n = (u_n + g_n)_n$ est ainsi établie, par conséquent cette suite converge uniformément vers une application w . On déduit que la suite $(u_n)_n$ construite dans le Théorème 2.4 converge uniformément vers $u := w - g$. En suivant les mêmes arguments de la démonstration du Théorème 2.5, on montre la conclusion du théorème, c.a.d. l'application limite u est continue sur $[-\tau, T]$, absolument continue sur I et satisfait

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, u_t) & p.p. \text{ sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = T(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]; \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{u}(t)\| \leq (l+1)(\dot{v}(t) + 1) \quad p.p. \text{ sur } I.$$

- Remarque 2.1** 1. *Les résultats de ce chapitre généralisent les résultats obtenus dans [38, 40, 114]. Le Théorème 2.5 étend celui donné dans [38] au cas des multifonctions absolument continues à valeurs non convexes, et le Théorème 2.6 élargit le Théorème 3.1 de [114] et le Théorème 2.1 dans [40] obtenus en dimension finie. Notons que la démonstration ici est complètement différente que celles données dans [40, 114] et permet d'obtenir le résultat en dimension infinie. Il est aussi intéressant de noter que les hypothèses prises sur F sont différentes que celles dans le Théorème 2.1 de [40], où F est supposée à compactes et satisfaisant une condition de croissance linéaire alors que dans notre Théorème 2.6, F est contenue dans un ensemble compact ; et que ce résultat reste valable en remplaçant les conditions sur F .*
2. *Les problèmes avec retard sont souvent liés à la question de viabilité, c'est à dire au problème d'invariance d'un ensemble donné, du fait que l'on cherche des solutions qui soient viables dans cet ensemble. Dans le cas du processus de rafle, ceci est assuré par la condition de vacuité du cône $u(t) \in C(t)$. Dans la section suivante, nous allons étudier l'invariance d'un ensemble "naturel" pour une inclusion différentielle générale.*

2.4 Existence de solution viable.

Dans cette section, nous allons considérer seulement la perturbation F sur laquelle est définie le retard et pour laquelle nous allons établir l'existence de solutions viables ; il serait facile après, en ajoutant le cône normal, de déduire le résultat pour le (PRPR1) et même pour le (PRPR2), ceci sera démontré dans le Chapitre 3 pour le second ordre, et on se limitera ici à exposer la méthode de démonstration, *méthode de discrétisation*, dans le cas simple de la perturbation F seulement. Celle ci consiste à ramener le problème avec retard à un problème sans retard et appliquer les résultats obtenus pour ce cas. Soit donc E un espace de Banach séparable, $C_T := \mathcal{C}([-\tau, T], E)$ l'espace des fonctions continues de $[-\tau, T]$ vers E , pour $T \geq 0$ et l'inclusion différentielle avec retard

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t) \quad p.p. \quad t \in [0, T]. \quad (2.40)$$

où pour tout $x \in \mathcal{C}_T$ et $t \in [0, T]$, on définit la fonction $x_t \in \mathcal{C}_0$ par

$$x_t(s) = T(t)x(s) = x(t+s) \quad \forall s \in [-\tau, 0]$$

et la multifonction F définie sur $[0, T] \times \mathcal{C}_0$ à valeurs non vides convexes compactes dans E .

L'existence de solutions viables pour de tels problèmes a été étudiée par de nombreux auteurs ([9], [33], [52], [62], [63], [73], [80], [112], [122]). Nous allons montrer l'invariance pour l'ensemble

$$E_s = \{\varphi \in \mathcal{C}_0, \varphi(s) \in D\}. \quad (2.41)$$

pour tout s fixé dans $[-\tau, 0]$, D étant un sous ensemble fermé convexe de E . Rappelons d'abord le résultat suivant obtenu dans [39] pour le problème sans retard

Théorème 2.7 *Soit D un ensemble non vide fermé convexe de E , $F : [0, T] \times D \rightarrow ck(E)$ une multifonction satisfaisant :*

- (i) F est $\tau_\lambda(I) \otimes \mathcal{B}(D)$ -mesurable,
- (ii) Pour tout t fixé dans $[0, T]$, $F(t, \cdot)$ est scalairement s.c.s sur D ,
- (iii) Il existe un ensemble équilibré $K \in ck(E)$ tel que pour tout $(t, x) \in [0, T] \times D$,

$$F(t, x) \subset (1 + \|x\|) K,$$

- (iv) $F(t, x) \cap T_D(x) \neq \emptyset, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times D$,

Alors, pour chaque $x_0 \in D$, il existe une fonction absolument continue $x : [0, T] \rightarrow E$, vérifiant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) & \text{p.p. sur } [0, T] \\ x(t) \in D & \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Enonçons maintenant notre résultat concernant l'existence de solutions viables pour E_s .

Théorème 2.8 *Soit s fixé dans $[-\tau, 0]$, D un ensemble non vide fermé convexe de E , $F : [0, T] \times \mathcal{C}_0 \rightarrow ck(E)$ telle que :*

- (i) F est $\tau_\lambda(I) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{E}_s)$ -mesurable;
- (ii) Pour tout t fixé dans $[0, T]$, $F(t, \cdot)$ est s.c.s sur E_s ;

(iii) Il existe un ensemble équilibré $K \in ck(E)$ tel que pour tout $(t, \theta) \in [0, T] \times E_s$

$$F(t, \theta) \subset (1 + \|\theta(0)\|) K;$$

(iv) $F(t, \theta) \cap T_D \theta(0) \neq \emptyset, \quad \forall (t, \theta) \in [0, T] \times E_s;$

Alors, pour chaque $\varphi_0 \in D$, il existe une fonction continue $x^s : [-\tau, T] \rightarrow E$, absolument continue sur $[0, T]$ vérifiant :

$$\begin{cases} x^s(t) \in F(t, T(t-s)x^s) & \text{p.p. sur } [0, T] \\ x^s(t) \in D & \forall t \in [0, T] \\ x^s(t) = \varphi_0(t) & \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.43)$$

Preuve. Soit $(\mathcal{P}_n)$ une subdivision de $[0, T]$ définie par :

$$\mathcal{P}_n = \left\{ t_i^n = T \frac{i}{2^n}, \quad i = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$$

Sans perdre la généralité, on peut prendre $T = 1$. Soit $x \in D$, définissons la fonction $f_1^x : [-\tau, t_1^n] \rightarrow E$ par :

$$f_1^x(u) = \begin{cases} \varphi_0(u) & u \in [-\tau, s] \\ \varphi_0(s) + \frac{u-s}{2^{-n}}(x - \varphi_0(s)) & u \in [s, s + t_1^n] \\ x & u \in [s + t_1^n, t_1^n] \end{cases} \quad (2.44)$$

et $T(t_1^n) : \mathcal{C}_{t_1^n} \rightarrow \mathcal{C}_0$ par

$$T(t_1^n)f_1^x(u) = f_1^x(u + t_1^n) \quad u \in [-\tau, 0]. \quad (2.45)$$

Par construction, on a $f_1^x \in \mathcal{C}_{t_1^n}$ et $T(t_1^n)f_1^x(s) = x \in D$, donc $T(t_1^n)f_1^x \in E_s \subset \mathcal{C}_0$. De plus la fonction $x \mapsto T(t_1^n)f_1^x$ est 1-Lipschitz, en effet

$$\begin{aligned} \|T(t_1^n)f_1^x - T(t_1^n)f_1^y\|_s &= \sup_{-\tau \leq u \leq s} \|f_1^x(u + t_1^n) - f_1^y(u + t_1^n)\| \\ &= \sup_{s-t_1^n \leq u \leq s} \left\| \frac{u + t_1^n - s}{2^{-n}} x - y \right\| = \|x - y\| \end{aligned}$$

Définissons maintenant la multifonction $S_1^n : [0, t_1^n] \times D \rightarrow ck(E)$ par :

$$S_1^n(t, x) = F(t, T(t_1^n)f_1^x) \quad \forall (t, x) \in [0, t_1^n] \times D. \quad (2.46)$$

Puisque F est mesurable et $x \mapsto T(t_1^n)f_1^x$ est 1-Lipschitz, S_1^n est donc globalement mesurable. De plus, $S_1^n(t, \cdot)$ est semi continue supérieurement sur D

puisque $F(t, \cdot)$ l'est sur E_s , $\forall t \in [0, T]$. La condition (iii) donne pour tout $t \in [0, t_1^n]$ et $x \in D$,

$$S_1^n(t, x) = F(t, T(t_1^n)f_1^x) \subset (1 + \|f_1^x(t_1^n)\|) K = (1 + \|x\|) K,$$

et

$$S_1^n(t, x) \cap T_D(x) = F(t, T(t_1^n)f_1^x) \cap T_D(T(t_1^n)f_1^x(0)) \neq \emptyset.$$

Par conséquent S_1^n vérifie les hypothèses du Théorème 2.7, d'où pour tout $\varphi_0 \in D$ il existe une application absolument continue x_1^n de $[0, t_1^n]$ vers E telle que

$$\begin{cases} \dot{x}_1^n(t) \in S_1^n(t, x_1^n(t)) & p.p \text{ sur } [0, t_1^n] \\ x_1^n(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_1^n(u) du & \forall t \in [0, t_1^n] \\ x_1^n(t) \in D & \forall t \in [0, t_1^n] \\ x_1^n(0) = \varphi_0(0) \end{cases} \quad (2.47)$$

x_1^n est donc une solution viable dans D de $\dot{x}_1^n(t) \in F(t, T(t_1^n)f_1^{x_1^n(t)})$ presque partout dans $[0, t_1^n]$.

Posons :

$$x_n^s(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & \text{for } t \in [-\tau, 0] \\ x_1^n(t) & \text{for } t \in [0, t_1^n] \end{cases} \quad (2.48)$$

Alors, $x_n^s : [-\tau, t_1^n] \rightarrow E$, $x_n^s \in C_{t_1^n}$, x_n^s est absolument continue dans $[0, t_1^n]$, et $x_n^s(t) \in D$. Par induction, on définit l'application $x_n^s : [-\tau, t_k^n] \rightarrow E$, $x_n^s \in C_{t_k^n}$, x_n^s est absolument continue dans $[0, t_k^n]$, $x_n^s(t) \in D$ telle que

$$x_n^s(t) = \begin{cases} \varphi_0(t) & \forall t \in [-\tau, 0] \\ x_1^n(t) & \forall t \in [0, t_1^n] \\ \dots\dots\dots \\ x_k^n(t) & \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n] \end{cases} \quad (2.49)$$

et

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in F(t, T(t_k^n)f_k^{x_n^s(t)}) & p.p \text{ sur } [t_{k-1}^n, t_k^n] \\ x_n^s(t) = x_n^s(t_{k-1}^n) + \int_{t_{k-1}^n}^t \dot{x}_n^s(u) du & \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n] \\ x_n^s(t) \in D & \forall t \in [t_{k-1}^n, t_k^n] \end{cases} \quad (2.50)$$

et construisons une solution sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$:

Pour tout $x \in D$, définissons les fonctions $f_{k+1}^x : [-\tau, t_{k+1}^n] \rightarrow E$, $T(t_{k+1}^n) : \mathcal{C}_{t_{k+1}^n} \rightarrow \mathcal{C}_0$, et la multifonction $S_{k+1}^n : [t_k^n, t_{k+1}^n] \times D \rightarrow ck(E)$ comme suit :

$$f_{k+1}^x(u) = \begin{cases} x_n^s(u-s) & u \in [-\tau, t_k^n + s] \\ x_n^s(t_k^n) + \frac{u-t_k^n-s}{2^{-n}}(x - x_n^s(t_k^n)) & u \in [t_k^n + s, t_{k+1}^n + s] \\ x & u \in [t_{k+1}^n + s, t_{k+1}^n] \end{cases} \quad (2.51)$$

$$T(t_{k+1}^n)f_{k+1}^x(u) = f_{k+1}^x(u + t_{k+1}^n). \quad (2.52)$$

$$S_{k+1}^n(t, x) = F(t, T(t_{k+1}^n)f_{k+1}^n) \quad (2.53)$$

Alors S_{k+1}^n vérifie les hypothèses du Théorème 2.7, par conséquent il existe une fonction absolument continue $x_{k+1}^n : [t_k^n, t_{k+1}^n] \rightarrow E$ telle que

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1}^n(t) \in S_{k+1}^n(t, x_{k+1}^n(t)) \quad p.p \quad sur \quad [t_k^n, t_{k+1}^n] \\ x_{k+1}^n(t) = x_n^s(t_k^n) + \int_{t_k^n}^t \dot{x}_{k+1}^n(u) du \quad \forall t \in [t_k^n, t_{k+1}^n] \\ x_{k+1}^n(t) \in D \quad \forall t \in [t_k^n, t_{k+1}^n] \\ x_{k+1}^n(t_k^n) = x_n^s(t_k^n) \end{cases} \quad (2.54)$$

Posons $x_n^s(t) = x_{k+1}^n(t)$ sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$, et pour $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$, $\theta_n(t) = t_i^n$, $\delta_n(t) = t_{i+1}^n$, $\theta_n(T) = T$. Alors, x_n^s est continue sur $[-\tau, T]$, absolument continue sur $[0, T]$ et satisfait

$$\begin{cases} \dot{x}_n^s(t) \in F(t, T(\delta_n(t))f_n^{x_n^s(t)}) \quad p.p \quad sur \quad [0, T] \\ x_n^s(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t \dot{x}_n^s(u) du \quad \forall t \in [0, T] \\ x_n^s(t) \in D \quad \forall t \in [0, T] \\ x_n^s(t) = \varphi_0(t) \quad \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (2.55)$$

où pour tout $t \in [0, T]$, $f_n^{x_n^s(t)} \in \mathcal{C}_{\delta_n(t)}$

$$f_n^{x_n^s(t)}(u) = \begin{cases} x_n^s(u-s) & u \in [-\tau, \theta_n(t) + s] \\ x_n^s(\theta_n(t)) + \frac{u-\theta_n(t)-s}{2^{-n}}(x_n^s(t) - x_n^s(\theta_n(t))) & u \in [\theta_n(t) + s, \delta_n(t) + s] \\ x_n^s(t) & u \in [\delta_n(t) + s, \delta_n(t)] \end{cases} \quad (2.56)$$

Montrons que la suite $(x_n^s)_n$ converge uniformément vers une fonction absolument continue sur $[0, T]$. Nous avons pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\dot{x}_n^s(t) \in F(t, T(\delta_n(t))f_n^{x_n^s(t)}) \subset \left(1 + \|T(\delta_n(t))f_n^{x_n^s(t)}(s)\|\right) K$$

Puisque K est compact, il existe un nombre strictement positif M tel que

$$F(t, T(\delta_n(t))f_n^{x_n^s(t)}) \leq (1 + \|x_n^s(t)\|) M$$

Comme x_n^s est absolument continue sur $[0, T]$ alors

$$\|x_n^s(t) - \varphi_0(0)\| \leq \int_0^t M(1 + \|x_n^s(u)\|) du$$

$$\|x_n^s(t)\| \leq \|\varphi_0(0)\| + MT + M \int_0^t \|x_n^s(u)\| du \quad \forall t \in [0, T]$$

En appliquant l'inégalité de Gronwall (Lemme 1.2), on obtient

$$\|x_n^s(t)\| \leq (\|\varphi_0(0)\| + MT) \exp^{MT}$$

et alors pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\dot{x}_n^s(t) \in F(t, T(\delta_n(t))f_n^{x_n^s(t)}) \subset (1 + e) K \quad (2.57)$$

avec $e = (\|\varphi_0(0)\| + MT) \exp^{MT}$. K étant convexe compact, de (2.57) $(\dot{x}_n^s)_n$ est relativement compacte dans $L_E^1([0, T])$, on peut donc extraire une sous suite, toujours notée $(\dot{x}_n^s)$, qui converge $\sigma(L^1, L^\infty)$ vers une fonction $y^s \in L_E^1$. De plus, puisque (x_n^s) est absolument continue sur $[0, T]$, de (2.57) on a

$$\|\dot{x}_n^s(t)\| \leq (1 + e) M$$

ainsi la suite est équicontinue, en appliquant le théorème d'Arzela-Ascoli (Théorème 1.1) (x_n^s) converge uniformément sur $[0, T]$ vers x^s avec

$$x^s(t) = \varphi_0(0) + \int_0^t y^s(u) du \quad \forall t \in [0, T]$$

et puisque D est fermé,

$$x^s(t) \in D \quad \forall t \in [0, T]$$

et

$$T(t-s)x^s = (x^s)_{t-s} \in E_s.$$

Comme $x_n^s = \varphi_0$ sur $[-\tau, 0]$, on pose $x^s = \varphi_0$ sur $[-\tau, 0]$. Pour compléter la démonstration, il reste à montrer que pour presque tout $t \in [0, T]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(\delta_n(t))f_n^{x_n^s(t)} = T(t-s)x^s$$

dans E_s .

$$\begin{aligned}
& \|T(\delta_n(t)f_n^{x_n^s(t)} - T(t-s)x^s\|_s = \sup_{-\tau \leq u \leq s} \|f_n^{x_n^s(t)}(u + \delta_n(t)) - x^s(u + t - s)\| \\
& \sup_{-\tau \leq u \leq s - \frac{1}{2^n}} \|f_n^{x_n^s(t)}(u + \delta_n(t)) - x^s(u + t - s)\| = \sup_{-\tau \leq u \leq s - \frac{1}{2^n}} \|x_n^s(u + \delta_n(t) - s) - x^s(u + t - s)\| \leq \\
& \leq \sup_{-\tau \leq u \leq s - \frac{1}{2^n}} \{ \|x_n^s(u + \delta_n(t) - s) - x^s(u + \delta_n(t) - s)\| + \|x^s(u + \delta_n(t) - s) - x^s(u + t - s)\| \} \\
& \text{et} \\
& \sup_{s - \frac{1}{2^n} \leq u \leq s} \|f_n^{x_n^s(t)}(u + \delta_n(t)) - x^s(u + t - s)\| = \\
& = \sup_{s - \frac{1}{2^n} \leq u \leq s} \|x_n^s(\theta_n(t) + \frac{u + \delta_n(t) - \theta_n(t) - s}{2^{-n}}(x_n^s(t) - x_n^s(\theta_n(t))) - x^s(u + t - s)\| \\
& \leq \sup_{s - \frac{1}{2^n} \leq u \leq s} \|x_n^s(t) - x^s(u + t - s)\| + \sup_{-\frac{1}{2^n} \leq u - s \leq 0} \|\frac{u - s}{2^{-n}}(x_n^s(t) - x_n^s(\theta_n(t)))\|
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n(t) = t$, x^s et x_n^s sont continues, on conclut que $T(\delta_n(t)f_n^{x_n^s(t)})$ converge vers $T(t-s)x^s$. En appliquant le Théorème 1.3 on obtient (2.43), ie. x^s satisfait

$$\begin{cases} \dot{x}^s(t) \in F(t, T(t-s)x^s) & p.p. \text{ sur } [0, T] \\ x^s(t) \in D & \forall t \in [0, T] \\ x^s(t) = \varphi_0(t) & \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

Remarque 2.2 Dans le cas d'une contrainte variable ($D = \Gamma(t)$), Γ une multifonction de graphe fermé G , il suffit de remplacer la condition tangentielle (iv), ceci a été obtenu par [9] pour le problème sans retard comme suit
(iv)' $\forall t \in [0, T[, \forall x \in \Gamma(t), \forall \varepsilon > 0, \exists (t_\varepsilon, x_\varepsilon) \in G$

$$0 < t_\varepsilon - t \leq \varepsilon, \quad \frac{x_\varepsilon - x}{t_\varepsilon - t} \in F(t, x) + \varepsilon B_E$$

Définissons pour tout $t \in [0, T]$ et $s \in [-\tau, 0]$ l'ensemble $H_s(t) = \{\varphi \in \mathcal{C}_0, \varphi(s) \in \Gamma(t)\}$, on peut déduire le résultat suivant

Théorème 2.9 Soit $\Gamma : [0, T] \rightarrow f(E)$ une multifonction de graphe fermé, $F : [0, T] \times]_0 \rightarrow ck(E)$ vérifiant

(i) F est semi-continue supérieurement sur $[0, T] \times H_s(t)$,

(ii) Il existe un ensemble équilibré $K \in ck(E)$ tel que

$$F(t, \varphi) \subset (1 + \|\varphi(s)\|) K; \quad \forall (t, \varphi) \in [0, T] \times H_s(t)$$

(iii) $\forall t \in [0, T[, \forall \varphi \in H_s(t), \forall \varepsilon > 0, \exists (t_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \in gr(H_s)$ tel que

$$0 < t_\varepsilon - t \leq \varepsilon, \quad \frac{\varphi_\varepsilon(s) - \varphi(s)}{t_\varepsilon - t} \in F(t, \varphi) + \varepsilon B_E$$

Alors, pour tout $\varphi_0 \in H_s(0)$, il existe une fonction continue $x^s : [-\tau, T] \rightarrow E$, absolument continue sur $[0, T]$, telle que

$$\begin{cases} \dot{x}^s(t) \in F(t, T(t-s)x^s) & p.p. \quad \text{sur} \quad [0, T] \\ x^s(t) \in \Gamma(t) & \forall t \in [0, T] \\ x^s(t) = \varphi_0(t) & \forall t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

Chapitre 3

Résultats d'existence concernant le processus de raffle non convexe du second ordre avec perturbations retardées

3.1 Introduction.

Dans la littérature, peu de résultats ont été obtenus concernant *le processus de raffle du second ordre*. Dans le cas convexe, ce problème, qui s'écrit

$$\begin{cases} x(t) = x^0 + \int_0^t u(s)ds, & \forall t \in I; \\ u(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(x(t))}^P(u(t)) & p.p. \quad t \in I. \end{cases}$$

a été résolu par [30] et [31] en utilisant l'algorithme de rattrapage, et dans [112] en utilisant un théorème du point fixe et l'existence pour la raffle du premier ordre. Ces résultats ont été généralisés pour le cas non convexe et en utilisant la caractérisation des ensembles uniformément r -prox réguliers par [14], où de plus le problème avec perturbation a été aussi abordé ; enfin [12] a considéré un problème du processus de raffle perturbé plus général avec deux perturbations, l'une scalairement s.c.s à valeurs convexes et l'autre uniformément continue à valeurs non convexes.

Le processus de raffle perturbé avec retard n'a été étudié jusqu'à présent que par [54] dans le cas convexe, en dimension finie et avec perturbation non convexe uniformément continue. Dans ce chapitre, nous allons étendre ces résultats au cas non convexe, en exposant deux méthodes différentes pour l'obtention de résultats d'existence pour le processus de raffle non convexe du second ordre avec perturbation et avec retard. La première consiste à utiliser un résultat d'existence du premier ordre (Théorème 2.2, chap.2) et des méthodes standards pour le théorème du point fixe (Kakutani Ky Fan); la seconde requière l'existence de solution pour le problème du second ordre sans retard et en dérive l'existence dans le cas avec retard via une technique de discrétisation développée dans [32], [33].

3.2 Méthode du point fixe

Soit Ω un sous ensemble ouvert d'un espace de Hilbert séparable H , $r \in]0, +\infty]$, $\tau > 0$, et $K : \Omega \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs non vides fermées uniformément r -prox régulières vérifiant :

$\mathcal{H}(K) : K$ est Lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$, et $m = \sup_{x \in \Omega} |K(x)| < +\infty$.

Et soit une perturbation $F : \mathbb{R}^+ \times C_0 \rightrightarrows H$ multifonction à valeurs non vides fermées convexes compactes dans H vérifiant :

$$\mathcal{H}(F) : \begin{cases} (i) F(t, \cdot) \text{ est semi-continue supérieurement sur } C_0, \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ (ii) F \text{ est } \mathcal{L}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{B}(C_0) \text{-mesurable sur } \mathbb{R}^+ \times C_0 \\ (iii) \exists l > 0 : |F(t, \varphi)| \leq l, \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_0 \end{cases}$$

Rappelons d'abord le résultat d'existence du premier ordre que nous allons utiliser, considérons par exemple le Théorème 2.2 du Chapitre 2 pour le cas Lipschitz, le cas absolument continu se traite de la même manière.

Théorème 3.1 Soit $C : I \rightrightarrows H$ une multifonction telle que $C(t)$ est un ensemble uniformément r -prox-régulier, fortement compact pour chaque $t \in I := [0, T]$ et Lipschitz-continue de rapport $\lambda > 0$; et soit $F : I \times C_0 \rightrightarrows H$ une multifonction à valeurs convexes compactes dans H tel que $F(t, \cdot)$ est s.c.s sur C_0 pour tout t fixé dans I , $F(\cdot, \varphi)$ admet une sélection mesurable dans I pour chaque φ fixé dans C_0 et $F(t, \varphi) \subset lB$, $\forall (t, \varphi) \in I \times C_0$, pour un certain $l > 0$;

alors pour chaque $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $\varphi(0) \in C(0)$, il existe une application continue $u : [-\tau, T] \rightarrow H$ telle que u soit Lipschitzienne sur I de rapport $2l + \lambda$ et satisfait :

$$\begin{cases} \dot{u}(t) \in -N_{C(t)}^P(u(t)) + F(t, u_t) & \text{p.p. sur } I; \\ u(t) \in C(t), & \forall t \in I; \\ u(s) = T(0)u(s) = \varphi(s), & \forall s \in [-\tau, 0]; \end{cases} \quad (PRPR1)$$

Enonçons maintenant le premier résultat d'existence de solution Lipschitzienne pour le processus de rafle non convexe avec perturbation retardée du second ordre que nous notons (PRPR2)

Théorème 3.2 *Supposons les multifonctions K et F vérifiant les conditions $\mathcal{H}(K)$ et $\mathcal{H}(F)$, alors pour tout $x^0 \in \Omega$, $u^0 \in K(x^0)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0$ avec $u^0 = \varphi(0)$ il existe $T > 0$, et deux applications continues $x : [-\tau, T] \rightarrow \Omega$ et $u : [-\tau, T] \rightarrow \Omega$ Lipschitziennes sur $I := [0, T]$ de rapports m et $\lambda m + 2l$ respectivement telles que :*

$$\begin{cases} x(t) = x^0 + \int_0^t u(s)ds, & \forall t \in I; \\ T(0)u = \varphi, & \text{sur } [-\tau, 0]; \\ u(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I; \\ -\dot{u}(t) \in N_{K(x(t))}^P(u(t)) + F(t, T(t)u) & \text{p.p. } t \in I. \end{cases} \quad (PRPR2)$$

En d'autres termes

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}^P(\dot{x}(t)) + F(t, T(t)\dot{x}) & \text{p.p. } t \in I; \\ T(0)\dot{x} = \varphi, & \text{sur } [-\tau, 0]; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I. \end{cases}$$

Preuve. Soit $x^0 \in \Omega$ et $T \in \mathbb{R}_+$ tels que $x^0 + mTB \subset \Omega$. Définissons l'application différentiable $\phi(t) := \int_0^t \varphi(s)ds$ pour tout $t \in I_\tau := [-\tau, 0]$ et posons

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{C}_T : x \equiv \phi \text{ sur } I_\tau; x(t) = x^0 + \int_0^t \dot{x}(s)ds, \text{ sur } I, \|\dot{x}(t)\| \leq m \text{ p.p. sur } I\}$$

$$\mathcal{U} := \{u \in \mathcal{C}_T : u \equiv \varphi \text{ sur } I_\tau; u(t) = u^0 + \int_0^t \dot{u}(s)ds, \text{ sur } I, \|\dot{u}(t)\| \leq \lambda m + 2l \text{ p.p. sur } I\}.$$

Alors, le théorème d'Arzelà-Ascoli assure que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U}$ sont des ensembles convexes compacts dans $\mathcal{C}_T$, et à cause du choix de x^0 et T on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad x(t) \in \Omega, \quad \forall t \in I.$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathcal{X}$, la multifonction $K \circ x : I \rightrightarrows H$ est Lipschitzienne de rapport λm à valeurs non vides fermés bornées uniformément r -prox-régulières. Par suite, en utilisant le Théorème 3.1, pour chaque $x \in \mathcal{X}$, il existe une application intégrable $f \in L^1(I, H)$ et une application continue $u_x : [-\tau, T] \rightarrow H$ Lipschitzienne sur $[0, T]$ de rapport $\lambda m + 2l$ satisfaisant

$$\begin{cases} \dot{u}_x(t) \in -N_{K(x(t))}^P(u_x(t)) + f(t), & p.p. \text{ on } I; \\ f(t) \in F(t, T(t)u_x), & p.p. \text{ on } I; \\ u_x(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I; \\ T(0)u_x = \varphi & \text{dans } [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Considérons la multifonction $\Phi : \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{U}$ telle que

$$\Phi(x) = \{u_x \in \mathcal{U} : u_x \text{ est une solution de (3.1)}\},$$

et montrons que son graphe $\text{gph}(\Phi) = \{(x, u_x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} : u_x \in \Phi(x)\}$ est séquentiellement fermé dans $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$. Soit (x_n, u_n) une suite d'éléments de $\text{gph}(\Phi)$ convergeant uniformément vers $(x, \omega) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$. Montrons que $(x, \omega) \in \Phi(x)$. De (3.1), il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application intégrable $f_n \in L^1(I, H)$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \dot{u}_n \in -N_{K(x_n(t))}^P(u_n(t)) + f_n(t), & p.p. \text{ sur } I; \\ f_n(t) \in F(t, T(t)u_n), & p.p. \text{ sur } I; \\ u_n(t) \in K(x_n(t)), & \forall t \in I; \\ T(0)u_n = \varphi & \text{dans } [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (3.2)$$

avec

$$\|\dot{u}_n(t)\| \leq \lambda m + 2l.$$

Ainsi, puisque $u_n(t) \in K(x_n(t)) \subset mB$, pour tout $t \in I$, et tout $n \in \mathbb{N}$, du Théorème 1.1, il existe une sous suite de $(\dot{u}_n)$ encore notée $(\dot{u}_n)$ telle que $\dot{u}_n$ converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{\omega}$ et $\omega(t) = u_0 + \int_0^t \dot{\omega}(s)ds$.

De plus, il est clair que si $\omega \in \mathcal{C}_T$, alors $\omega_t = T(t)\omega \in \mathcal{C}_0$ et l'application $\omega \mapsto \omega_t$ est continue de $\mathcal{C}_T$ vers $\mathcal{C}_0$. Par suite la convergence uniforme de u_n vers ω implique la convergence uniforme de $T(t)u_n$ vers $T(t)\omega$ sur $[-\tau, 0]$.

Maintenant, nous allons montrer que ω vérifie 3.1 c'est à dire $\omega = u_x$. De (3.2) on a pour presque tout t dans I

$$-\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in N_{K(x_n(t))}^P(u_n(t)) \quad (3.3)$$

Puisque f_n est uniformément bornée dans $L^1(I, H)$, en prenant une suite extraite si nécessaire, f_n converge faiblement dans $L^1(I, H)$ vers une application f . Et comme $F(t, \cdot)$ est semi-continue supérieurement à valeurs compactes, le corollaire 2.4.1 de [3] assure la semi-continuité supérieure de la fonction support $\varphi \mapsto \sigma(F(t, \varphi), \cdot)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_0$, on obtient alors pour chaque $\zeta \in H$ et chaque $t \in I$

$$\langle f(t), \zeta \rangle = \lim_n \langle f_n, \zeta \rangle \leq \limsup_n \sigma(F(t, T(t)u_n), \zeta) \leq \sigma(F(t, T(t)\omega), \zeta).$$

En tenant compte de la fermeture et la convexité de $F(t, T(t)\omega)$ on a

$$f(t) \in F(t, T(t)\omega) \quad (3.4)$$

De (3.2) encore, on a $u_n(t) \in K(x_n(t)), \forall t \in I$. K étant Lipschitzienne, on a $d_{K(x(t))}(u_n(t)) \leq \lambda \|x(t) - x_n(t)\| \rightarrow 0$, ainsi on obtient

$$\omega(t) \in K(x(t))$$

puisque l'ensemble $K(x(t))$ est fermé.

D'autre part, nous avons :

$$\| -\dot{u}_n(t) + f_n(t) \| \leq \lambda m + 3l =: \alpha \quad (3.5)$$

c'est à dire $-\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in \alpha B$, alors de (3.3) et la Proposition 1.1, on obtient

$$-\dot{u}_n(t) + f_n(t) \in \alpha \partial d_{K(x_n(t))}(u_n(t)) \quad p.p. \quad sur \quad I$$

A présent, comme $(\dot{u}_n - f_n)$ converge faiblement vers $\dot{\omega} - f$ dans $L^1(I, H)$, le lemme de Mazur assure que pour presque tout t dans I

$$-\dot{\omega}(t) + f(t) \in \bigcap_n \overline{\text{co}} \{ -\dot{u}_k(t) + f_k(t) : k \geq n \}$$

Pour un tel t dans I et pour chaque μ dans H , la dernière relation donne

$$\langle -\dot{\omega}(t) + f(t), \mu \rangle \leq \inf_n \sup_{k \geq n} \langle -\dot{u}_k(t) + f_k(t), \mu \rangle$$

et donc en tenant compte de (3.3), on obtient

$$\langle -\dot{\omega}(t) + f(t), \mu \rangle \leq \limsup_n \sigma(\alpha \partial^P d_{K(x_n(t))}(u_n(t)), \mu) \leq \sigma(\alpha \partial^P d_{K(x(t))}(\omega(t)), \mu)$$

que la multifonction A admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $x \in A(x)$ et donc

$$\begin{cases} \dot{u}_x \in -N_{K(x(t))}^P(u_x(t)) + f(t), & p.p. \text{ sur } I; \\ f(t) \in F(t, \mathcal{T}(t)u_x), & p.p. \text{ sur } I; \\ u_x(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I \\ \mathcal{T}(0)u_x = \varphi, & \text{dans } [-\tau, 0]; \\ x(t) = x^0 + \int_0^t u_x(s)ds, & \forall t \in I. \end{cases}$$

En d'autres termes

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) \in N_{K(x(t))}^P(\dot{x}(t)) + F(t, \mathcal{T}(t)\dot{x}) & p.p. \quad t \in I; \\ \mathcal{T}(0)\dot{x} = \varphi, & \text{sur } [-\tau, 0]; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I. \end{cases}$$

Ceci complète la démonstration.

Remarque 3.1 1. On obtient des résultats similaires pour des solutions absolument continues en utilisant les résultats correspondants du premier ordre (Théorèmes 2.5 et 2.6).

2. Dans le cas où la perturbation ne dépend pas de la troisième variable, ie. de la forme $F(t, \mathcal{T}(t)x)$, on peut combiner les techniques que nous avons utilisé ici et la démonstration du Théorème (1.1) dans [54] pour obtenir un résultat d'existence pour le processus de rafle non convexe du second ordre avec des perturbations convexes et non convexes.

3. Dans le cas où la perturbation dépend des trois variables, c'est à dire de la forme $F(t, \mathcal{T}(t)x, \mathcal{T}(t)\dot{x})$, nous allons présenter dans ce qui suit une méthode différente pour l'obtention d'un résultat d'existence.

3.3 Méthode de discrétisation

Soient $r \in]0, \infty]$, $x_0 \in H$, $u_0 \in K(x_0)$, $\mathcal{V}_0$ un voisinage ouvert de x_0 dans H , $\zeta > 0$ tels que $x_0 + \zeta B \subset \mathcal{V}_0$, et soit $K : cl(\mathcal{V}_0) \rightrightarrows H$ une multifonction Lipschitzienne de rapport $\lambda > 0$ à valeurs non vides fermées uniformément r -prox-régulières dans H .

Commençons par établir un résultat d'existence pour le cas d'une perturbation $F : [0, \infty[\times H \times H \rightrightarrows H$ sans retard et dépendant de t, x , et $\dot{x}$. Nous utiliserons ensuite une technique développée dans [32], [33], [60], [112] qui discrétise l'intervalle du temps et ramène le problème considéré dans chaque sous-intervalle à un problème sans retard et appliquer le théorème suivant.

Remarquons que dans [8], ce résultat d'existence (sans retard) est démontré pour un problème plus général avec une deuxième perturbation : $\ddot{x}(t) \in -N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)) + G(t, x, \dot{x})$.

Théorème 3.3 *Supposons que :*

(i)- $\forall x \in cl(\mathcal{V}_0), K(x) \subset \mathcal{K}_1 \subset lB, \mathcal{K}_1$ est un ensemble convexe compact dans H , et $l > 0$;

(ii)- $F : [0, \infty[\times H \times H \rightrightarrows H$ est scalairement semi-continue supérieurement sur $[0, \frac{\zeta}{l}] \times gph(K)$ à valeurs non vides convexes faiblement compactes ;

(iii)- $F(t, x, u) \subset \varrho(1 + \|x\| + \|u\|)B, \forall (t, x, u) \in [0, \frac{\zeta}{l}] \times gph(K)$.

Alors, pour chaque $T \in]0, \frac{\zeta}{l}]$, il existe une application Lipschitzienne $x : I := [0, T] \rightarrow cl(\mathcal{V}_0)$ telle que :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) \in -N_{K(x(t))}(\dot{x}(t)) + F(t, x(t), \dot{x}(t)), & p.p. \text{ sur } I; \\ \dot{x}(t) \in K(x(t)), & \forall t \in I; \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = u_0, \end{cases}$$

avec

$$\|\dot{x}(t)\| \leq l, \|\ddot{x}(t)\| \leq l\lambda + 2(1 + \alpha + l)\varrho \quad p.p. \text{ sur } I.$$

Preuve. La démonstration se fait en trois étapes.

Etape 1. *Construction de suites approximantes :*

Soit $T \in]0, \frac{\zeta}{l}]$ et posons $I := [0, T]$ et $\mathcal{K} := I \times \alpha B \times lB$. Alors, de l'hypothèse (iii), on a

$$\|F(t, x, u)\| \leq \rho_1(1 + \|x\| + \|u\|) \leq \rho_1(1 + \alpha + l) =: \eta \quad (3.7)$$

pour tout $(t, x, u) \in \mathcal{K} \cap (I \times \text{gph} K)$ notons que $\mathcal{K} \cap (I \times \text{gph} K) \neq \emptyset$ puisque $(x_0, u_0) \in (\alpha B \times lB) \cap \text{gph} K$. Soit $\epsilon_n = \frac{1}{2^n}$, $(n = 1, 2, \dots)$ et rappelons le lemme suivant démontré dans [58] qui nous permet de partitionner l'intervalle de la façon suivante

Lemme 3.1 *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et $h : X \rightarrow Y$ une application uniformément continue. Alors pour toute suite $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ de nombres positifs, il existe une suite strictement décroissante de nombres positifs $(e_n)_{n \geq 1}$ convergeant vers 0 telle que*

- 1- pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{e_{n-1}}$ et $\frac{e_{n-1}}{e_n}$ sont des entiers ≥ 2 :
- 2- pour tout $n \geq 1$, et tout $x_1, x_2 \in X$, on a

$$d_X(x_1, x_2) \leq e_n \Rightarrow d_Y(h(x_1), h(x_2)) \leq \epsilon_n.$$

(Ceci est vrai dans notre cas pour l'application constante nulle, ie. en prenant une perturbation $G \equiv \{0\}$, voir preuve dans [58]).

Comme la suite $e_n \rightarrow 0^+$, on peut fixer un entier positif n_0 tel que

$$(\lambda l + \eta)e_{n_0} \leq \frac{r}{2}. \quad (3.8)$$

Pour tout $n \geq n_0$, considérons la partition de I donnée par

$$P_n = t_{n,i} = ie_n : i = 0, 1, \dots, \mu_n = \frac{T}{e_n}. \quad (3.9)$$

Rappelons quelques propriétés importantes de la suite de partitions $(P_n)_n$ utilisées dans la suite (voir [58]).

$$(Pr_1) \quad P_n \subset P_{n+1}, \text{ pour tout } n \geq n_0;$$

(Pr_2) Pour chaque $n \geq n_0$ et pour chaque $t_{n,i} \in P_n \setminus P_1$ il existe un unique couple (m, j) d'entiers positifs dépendant de $t_{n,i}$, tel que $n_0 \leq m < n$, $t_{n,i}$ ne