REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : . . . .
N° série : . . . . .

MEMOIRE

Présentée pour l'obtention du diplôme de
Magister en Mathématiques

Thème
Sur un Problème d'Evolution non Classique

Option
Analyse Mathématique Appliquée

Par :
Zarour Abd elouwahab

<u>Devant le jury :</u>

Président:	**Marhoune A. L.**	**Prof. Univ. Mentouri Constantine**
Rapporteur:	**Latrous C.**	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**
Examinateurs:	**Hebbeche A.**	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**
	Saidouni C.	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**
	Karrad M.	**M. C. Univ. Mentouri Constantine**

Soutenu le 08.07.2008

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser ici tous mes remerciements aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont ainsi contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Tout d'abord Madame Latrous C Maître de Conférence à l'Université de Constantine, Encadreur de ce mémoire, pour l'aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer et sans elle, ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent vivement à Monsieur le Président Le Professeur Marhoune A.L de l'Université de Constantine et Monsieur Hebbeche A , maître de Conférence à l'Université de Constantine et Saidouni C maître de Conférence à l'Université de Constantine et Kerrad M maître de Conférence à l'Université de Constantine qui ont accepté de juger mon travail.

Merci à toute ma famille, qui m'ont soutenu en toutes circonstances. J'espère qu'ils trouvent ici l'expression de mon éternelle reconnaissance.

Un remerciement très spécial à Mr Mansouri Djamel que je n'oublierai jamais, ce que vous avez fait pour moi, et j'espère de tout mon cœur que dieu vous le rendra. Aussi j'aimerai bien qu'un jour je ferai la même chose pour d'autre. En effet je vous dis un grand merci.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Sur un probléme d'évolution non classique

Le présent travail est consacré à l’étude d’un problème d’évolution non classique, combinant une condition aux limites du type Dirichlet avec une autre intégrale à borne variable.

Les démonstrations sont basées sur des estimations à priori de l’opérateur engendré par le problème en question.

Abstract

The present work is devoted to the study of a certain class of nonlocal evolution problem, in which we combine the Dirichlet boundary condition with the integral boundary condition.

The study is based on a priori estimates of operator generated by the considered probems.

ملخص

هذا العمل يتطرق إلى دراسة مسائل تقديرية بطرق غير تقليدية تحت شروط حدية من نوع دريكلي واخرى تكاملية ذات نهاية حدية متغيرة نبرهن عن وحدانية الحل وللبرهان على ذالك فإننا نعتمد على تقديرات قبلية للمسالة المطروحة

Table des matières

0.1 Introduction

Différents problèmes rencontrés en théorie de la conduction thermique. [4, 6,15,16], en thermoélasticité et en physique des plasmas [24], peuventêtre ramenés à des

problèmes aux limites avec conditions integrales .de tels problemes ont été étudiés dans [1-7, 9,16-18, 28], pour les équations paraboliques, dans [27, 36], pour les équations hyperboliques et dans [10,11], pour les équations du type mixte. La méthode utilisée dans [2, 3, 9-11, 18], est celle des inégalités énergetiques, le but de ce travail est l'extension de cette méthode aux équations paraboliques combinant une condition aux limites en deux points avec une autre du type integrale. Differents problèmes aux limites pour équations d'ordre impair en temps ont été étudiés par differentes methodes dans [3, 8, 11, 19-22, 28, 29,],. La méthode des inégalités de l'énergie appelée aussi méthode d'analyse fonctionnelle trouve son origine dans les travaux de I.G.petrovsky [20], utilisée dans la résoulution du problème de Cauchy

lié aux équationsdu type hyperbolique. Par la suite des dévloppements importants de la méthode sont dusà J.Leray [24], et L.Garding [19].

La méthode a été également utilisée et developée dansles travaux de O.A.Ladyzenskaja [18], A.A.Dezin [12], K. Friedrichs [13], et N.Yurchuk [26, 27,28], on peut egalement citer les travaux de F .Rebbani et V.I. Chesalyn [22, 23],. Le schéma de la méthode a été donné pour la première fois par A.A.Dezin [12], etpeut être résumé comme suit :

Tout d'abord on écrit le problème posé (P) sous forme d'une équation opérationnelle

$$Lu = f, \qquad u \in D(L)$$

où l'opérateur L est considéré de l'espace de banach E dans l'espace de Hilbert F convenablement choisis.

Après on établit les estimations a priori pour l'opérateur L et on montre la densité del'ensemble des valeurs de cet opérateur dans F .

Si on convient d'appeler solution généralisée du problème (P) toute fonction vérifiant :

$$Lu = f$$

alors pour avoir l'existence de la solution généralisée il est nécessaire et suffisant qu'on établisse la densité de $R(L)$ dans F . L'unicité est assurée par l'inégalité de l'énergie. Le présent travail est considéré comme le prolongement des résultats obtenus dans [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 16, 17], pour les équations paraboliques dans [10, 11], pour les équations du type mixte.

La méthode des estimations à priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problémes de la physique mathématique. Elle est fondée sur un support théorique solide et développée dans un cadre abstrait élégant, mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi lesquelles nous citons :

1. Le choix de l'espace des solutions.

2. Le choix du multiplicateur.

3.le choix de l'opérateur de régularisation

Les questions sont tellement variées et récentes, que l'élaboration d'une théorie générale

est encore prématurée. Chaque probléme nécessite une étude spéciale, d'où l'actualité du thème.

1 Chapitre I Notions Prèliminaires

1.1 Notions Prèliminaires

Opèrateurs abstraits de règularisation

Soit H un espace de Hilbert et soit A un opèrateur dèfini de $D(A) \subset H$ avec

$\overline{D(A)} = H.$

Dèfintion 1 *On dit que l'opérateur A est un opérateur dissipatif si* $\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \leq 0$

$\forall\ u \in D(A).$

Dèfinition 2 *On dit que l'opérateur A est accretif si $(-A)$ est un opérateur dissipatif i.e.*

$\operatorname{Re}\langle Au, u\rangle \geq 0 \qquad\qquad \forall u \in D(A).$

Proposition 1 [9] *Soit $A : D(A) \subset H \to H \quad (\overline{D(A)} = H)$ alors les proprietès suivantes sont équivalentes :*

- A est un opérateur dissipatif.

- $\|(A - \lambda I)\, u\| \geq \operatorname{Re}\lambda\, \|u\|\,, \forall u \in D(A)$ *et pour tout λ telle que* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

-$\|(A - \lambda I)\, u\| \geq \operatorname{Re}\|u\|\,, \forall u \in D(A)$ *et pour tout λ telle que $\lambda > 0$.*

Thèorème 1 [9] *tout opérateur dissipatif admet un prolongement fermè, ce prolongement est aussi un opérateur dissipatif.*

Coroliaire 1 *Un opèrateur dissipatif maximal est toujours fermè.*

Thèorème 2 [9] *tout opérateur dissipatif admet un prolongement maximal dissipatif.*

Proposition 2 *Soit $A : D(A) \subset H \to H \left(\overline{D(A)} = H\right)$ un opérateur dissipatif, alors les proprietès suivantes sont èquivalentes.*

- A est opèrateur maximal dissipatif.

- Im$(A - \lambda I) = A$ pour un certainλ telle que $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

- $Im(A-\lambda I)=H$ *pour tout* λ *telle que* $\lambda>0$.

Thèorème 3 [9] *Soit* $A:D(A)\subset H\to H$ $(\overline{D(A)}=H)$, *alors les propriètès suivantes sont équivalentes.*

- *A maximal dissipatif.*

- *A fermé,*$\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>0\}\subset\rho(A)$ *et* $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leq(\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$.

Tèorème 4 *Soit* $A:D(A)\subset H\to H$ $D(A)=H)$ *un opèrateur dissipatif maximal, alors*

- $A_\epsilon^{-1}\in L(H)$.

- $\|A_\epsilon^{-1}\|\leq 1$.

- $\lim A_\epsilon^{-1}u=u$,*pour tout* $u\in H$.

Dèmonstration. *Soit* $\epsilon>0$ *alors* $\{\epsilon:\epsilon>0\}\subset\rho(A)$ *donc* $(A-\lambda I)$ *est continument inversible d'ou* $(A-\lambda I)$ *existe,*

borné et défini sur H *tout entier. Puisque* $\frac{1}{\epsilon}\in\{\epsilon:\epsilon>0\}$ *on déduit que*

$(A-\frac{1}{\epsilon}I)\in L(H)$ *mais* $(A-\frac{1}{\epsilon})=-\frac{1}{\epsilon}(I-\epsilon A)$ *d'ou*

$(A-\frac{1}{\epsilon}I)^{-1}=-\epsilon(I-\epsilon A)^{-1}$,

on pose $A_\epsilon^{-1}=(I-\epsilon A)^{-1}$, *on dèduit que*

$$A_\epsilon^{-1}\in L(H)$$

et en utilisant le thèorème 2, on trouve que

$$\left\|(A-\tfrac{1}{\epsilon}I)^{-1}\right\|\leq(\tfrac{1}{\epsilon})^{-1}=\epsilon$$

donc

$\|A_\epsilon^{-1}\|\leq 1$.

Supposons tout d'abord $u\in D(A)$, *d'où*

$\|A_\epsilon^{-1}u - u\| = \|(I - \epsilon A)^{-1}u - u\| = \|\epsilon(I - \epsilon A)^{-1}Au\| \leq \epsilon \|Au\|$.

Ainsi *par passage à la limite, on a*

$\lim A_\epsilon^{-1}u = u$, *pour tout* $u \in D(A)$ *et comme on a* $\overline{D(A)} = H$

alors $\lim A_\epsilon^{-1}u = u$, *pour tout* $u \in H$.

2 Chapitre II Problèmes Paraboliques Locaux

Ce chapitre est consacré à l'étude de deux classes de problèmes. L'un mixte parabolique avec des conditions aux limites du type Newman, et l'autre parabolique abstrait.

2.1 Problème Parabolique en deux Points

Dans le rectangle $\Omega = \{(t,x).0 < t < T, 0 < x < 1\}$ ou $T < \infty$

on considére l'èquation aux déerivés partielles

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{2.1}$$

A l'équation (2.1) on associe la condition initiale

$$lu = u(x,0) = \varphi(x)\ , \qquad x \in (0,1), \tag{2.2}$$

la condition de Dirichlet

$$u'(1,t) = u'(0,t) = 0\ , \qquad t \in (0,t)\ . \tag{2.3}$$

Pour l'étude du problème posé on a besoin des espaces fonctionnels suivants :

l'espace E de Banach des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ vérifiant les conditons initiales et Dirichlet :

$$\|u\|_E^2 = \int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + \max_{x\in(0,t)} \int_0^1 u^2(x,t)dx$$

et l'espace F de Hilbert composè des fonctions vectorielles $F = (f,\varphi)$ obtenu

comme completé de l'èspace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0,l)$ par rapport à la norme :

$$\|F\|_F^2 = \int_0^\tau \int_0^1 (\mathcal{L}u)^2\, dxdt + \int_0^1 u^2(x,0)dx$$

lemme 1. *Pour tout $u \in E$ on a l'éstimation suivante :*

$$\|u\|_E^2 \leq C\, \|\mathcal{L}u\|_F^2 \tag{2.4}$$

Dèmonstration : on pose

$$Mu = 2u$$

En multipliant l'èquation (2.1) par Mu il devient

$$\int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}uMudxdt = 2\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} udxdt - 2\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} udxdt \tag{2.5}$$

en inéègrant le premier terme du membre droit par rapport à t de inégalité

(2.5) on obtient

$$\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} udxdt = \int_0^1 u^2(x,\tau)dx\Big]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} udxdt$$

d'où

$$2\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} udxdt = \int_0^1 u^2(x,t)dx - \int_0^1 u^2(x,0)dx \tag{2.6}$$

en intégrant le deuxiéme terme de membre droit par rapport à x, on obtient

$$2\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} udxdt = 2\int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial x} udt\Big]_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt$$

d'où

$$2\int_0^\tau \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} udxdt = -2\int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt \tag{2.7}$$

en remplaçant les inégalitès (2.6) et (2.7) dans (2.5) il vient

$$\int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}uMudxdt + \int_0^1 u^2(x,0)dx = \int_0^1 u^2(x,t)dx + 2\int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt \tag{2.8}$$

en estimant le premier terme à gauche de cette égalité

on a

$$|\mathcal{L}uMu| \leq |\mathcal{L}u|\,|Mu|$$

en utilisant l-ε inégalité on obtient

$$\int_0^\tau \int_0^1 \mathcal{L}uMudxdt \leq \int_0^\tau \int_0^1 (\mathcal{L}u)^2\, dxdt + \int_0^\tau \int_0^1 (u)^2\, dxdt$$

En combinant cette inégalité avec l'inégalité (2.8) on obtient

$$\int_0^1 u^2(x,t)dx + 2\int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt \leq \int_0^\tau \int_0^1 (\mathcal{L}u)^2\, dxdt + \int_0^\tau \int_0^1 (u)^2\, dxdt$$

$$+\int_0^1 u^2(x,0)dx$$

en utilisant l'inégalité de Gronwall, il vient

$$\int_0^\tau \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dxdt + \max_{x\in(0,x)} \int_0^1 u^2(x,t)dx \leq C\left[\int_0^\tau \int_0^1 (\mathcal{L}u)^2\, dxdt + \int_0^1 u^2(x,0)dx\right]$$

d'où le résultat (1.4).

2.2 Problème parabolique abstrait

Soit H est un espace de Hilbert separable,et V un autre espace de Hilbert continu et dense totalement dans H .

Soit $A \in \mathcal{L}(V, V^*)$ et considérons la forme quadratique

$$a(t, u, v) = -(A(t)u, v)$$

telle que a verifie :

a est coercive

$$a(t, u, v) \geq a \|u\|_V^2 - b \|u\|_H^2$$

où a et b deux constantes positives.

On considére le probleme suivant :

$$\frac{du}{dt} = A(t)u + f(t) \tag{2.9}$$

$$u(0) = u_0$$

Thèorème 5. soit H, V et $A(t)$ verifiant les conditions ci -dessus, où la fonction

$f \in L^2((0,t), v^*)$ et $u_0 \in H$. Alors le problème (2.9) admet une unique solution

$u \in L^2((0,T), V) \cap H^1((0,T), V^*)$.

lemme 2. En supposant que $u \in L^2((0,t), V) \cap H^1((0,t), V^*)$ alors $u \in \mathsf{C}([0,T], H)$.

preuve :soit $u \in \mathsf{C}^1([0.T], H)$ on obtient l'éstimation suivante :

$$\|u(t)\|_H^2 = \|u(t^*)\|^2 + 2\int_{t^*}^{t} (\frac{\partial u}{\partial s}, u(s))ds \tag{2.10}$$

en choisissant t^* et en estimant $\|u(t^*)\|^2$ par $\|u(t)\|^2$

et $(\frac{\partial u}{\partial t}, u)$ par $\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{V^*} \|u\|_V$, on obtient

$$\|u(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T \|u(t)\|_H^2 dt + 2\int_0^T \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{V^*} \|u\|_V dt \tag{2.11}$$

en utilisant l'inégalité Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\max_{t\in[0.T]} \|u(t)\|_H^2 \leq \frac{1}{T} \|u\|^2_{L^2((0,t),H)} + 2 \|u\|_{H^1((0,t),v_*)} \|u\|_{L^2((0,T),V)} \tag{2.12}$$

.

soit u la solution. En utilisant (2.9)

on a

$$(\frac{du}{dt}, u) = (A(t)u, u) + (f(t), u),$$

en intégrant par parties cette forme de 0 a T on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\frac{du}{dt}, u)dt &= \int_0^T (A(t)u, u)dt + \int_0^T (f(t), u)dt, \\ \frac{1}{2}(u, u)\Big]_{t=0}^{t=T} &= -\int_0^T a(t, u, u)dt + \int_0^T (f(t), u)dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2}(\|u(T)\|_H^2 - \|u_0\|_H^2) + \int_0^T a(t, u, u)dt = \int_0^T (f, t)dt. \tag{2.13}$$

En combinant (2.13) et la condition (2.9) on obtient

$$\|u\|_{L^2((0,t),V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2((0,t),V^*)} + \|u_0\|_H \right). \tag{2.14}$$

.

Ainsi le théorème est démontré.

2.3 Unicité de la solution

On a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial A(t)}{\partial t}u + \frac{\partial f(t)}{\partial t} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = A(0)u_0 + f(0)$$

on pose $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, on obtient

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A(t)v + (\frac{\partial A(t)}{\partial t}u + \frac{\partial f(t)}{\partial t}) \tag{2.16}$$

$$v(0) = A(0)u_0 + f(0).$$

De nouveau en posant

$$z(t) = u_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau \tag{2.17}$$

on obtient

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = v$$

et

$$A(t)z(t) = A(t)u_0 + \int_0^t A(t)v(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t A(\tau)v(\tau)d\tau + \int_0^t (A(t) - A(\tau))v(t)d\tau + A(t)u_0$$

$$= v(t) - v(0) - f(t) + f(0) - \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial t}u(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial t}z(\tau)d\tau - (A(t) - A(0))u_0 + A(t)u_0$$

$$= v(t) - f(t) + \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}(z(\tau) - u(\tau))d\tau$$

et en posant $\omega = z - u$ il devient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = A(t)\omega - \int_0^t \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}\omega(\tau)d\tau, \omega(0) = 0 \tag{2.18}$$

on a

$$(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \omega) = (A(t)\omega, \omega) - \int_0^t (\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}\omega(\tau), \omega)d\tau$$

en intégrant cette forme par rapport a t on obtient

$$\frac{1}{2}(\omega(t), \omega(t)) + \int_0^t a(s, \omega(s), \omega(s)ds = -\int_0^t \left(\int_0^s \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau}\omega(\tau)d\tau, \omega(s)\right) ds \tag{2.19}$$

pour tout $t \in [0, T]$. Ainsi on obtient que $\omega = 0$

3 Chapitre III Problème mixte parabolique non local combinant une condition aux limites en deux points avec une autre intégrale.

Le but de ce chapitre est l'étude d'un problème aux limites parabolique combinant une condition aux limites en deux points avec une autre intégrale. On établit une estimation à priori pour la solution. La méthode est un certain développement de celle des inégalités énergétiques adaptée à ce type de problèmes.

3.1 Position du problème

Dans le rectangle $\Omega = \{(t,x).0 < t < T, 0 < x < 1\}$, où $T < \infty$

on considère l'èquation aux dèrivès partielles

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t). \tag{3.1}$$

ou $a(t)$ est une fonction bornèe et dèrivable sur l'intervalle

$[0,T]$ et verifiant les conditions (H) suivantes :

$$0 < a_0 < a(t) \leq a_1,$$

$$0 < a_2 \leq \frac{\partial a(t)}{\partial t} \leq a_3.$$

A l'équation (3.1), on associe la condition initiale

$$lu = u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \in (0,1). \tag{3.2}$$

la condition aux limtes

$$u(1,t) = ku(0,t) \qquad t \in (0,t)\ ,\ \text{où } k > 0. \tag{3.3}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0. \tag{3.4}$$

3.2 Espaces fonctionnels

Pour l'étude du probleme posè on a besion des espace fonctionnels suivants :

l'espace E est l'espace de Banach des fonctions $u \in L_2(\Omega)$ vérifiant les conditions (3.3) $-$(3.4)

et muni de la norme :

$$\|u\|_E^2 = \int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right) dxdt + \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dxdt +$$
$$+ \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} |u|^2\, dx + \sup_{0\leq t\leq T}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 |u|^2\, dx \qquad (3.5)$$

et l'éspace F est l'espace de Hilbert composé de fonctions véctorielles $F = (f, \varphi)$ obtenu

comme complété de l'éspace $L_2(\Omega) \times W_2^2(0, l)$

par rapport à la norme :

$$\|F\|_F^2 = \int_\Omega \frac{\theta(x)}{2} |f|^2\, dxdt + \int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} |\varphi|^2\, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 |\varphi|^2\, dx, \qquad (3.6)$$

où

$$\theta(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \\ (1-x)^2 & \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq x < 1. \end{cases}$$

Au problème $(3.1) - (3.4)$ on associe l'opérateur $L = (\mathcal{L}, \ell)$ difinit de E dans F

Dèfinition 3.- On appelle solution du problème$(3.1) - (3.4)$ toute solution

du probleme de l'équation opérationnelle

$$Lu = F$$

Lemme 3.- pour $u \in E$, on a

$$\frac{k}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \left|\jmath_1 \frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \left|\jmath_2 \frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \leq \int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

Dèmonstration.- Partant de l'expression

$$\mathrm{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \exp(-ct) kx \frac{\partial u}{\partial t} \jmath_1 \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} dx = \frac{k}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \exp(-ct)\left|\jmath_1 \frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

et en utilisant l'$\varepsilon-$ inègalité on a

$$\exp(-ct)k\left|x\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right| \leq \exp(-ct)kx^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 +$$

$$+\frac{k}{4}\exp(-ct)\left|\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right|^2,$$

d'où

$$\frac{k}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} kx^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

En partant de l'expression

$$\operatorname{Re}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

et utilisant l'$\varepsilon-$inégalité on a

$$\exp(-ct)\left|(1-x)\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right| \leq \exp(-ct)(1-x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\exp(-ct)\left|\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right|^2,$$

d'où

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 (1-x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

Ainsi

$$\frac{k}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \leq \int_0^1 \theta(x)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

D'où la démonstration du lemme.

3.3 Estimation à priori bilatérale

Théoreme 6.- *Pour toute fonction $u \in E$ on a l'éstimation à priori suivante :*

$$\|Lu\|_F \leq \vartheta\,\|u\|_E \tag{3.7}$$

Où

$$\vartheta = \max(2, a_1^2, T).$$

Dèmonstration .- De l'èquation (3.1) on a

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

d'où

$$|\mathcal{L}u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 \leq \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + |a(t)|^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2$$

en multipliant les deux membres de cette inégalitè a $\theta(x)$ et intègrant sur Ω

on obtient

$$\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}|\mathcal{L}u|^2 dxdt \leq 2\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + a_1^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt. \tag{3.8}$$

De la condition initiale (3.2) on a

$$\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx, \tag{3.9}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} |\varphi|^2 dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{K}+1}} |u|^2 dx, \tag{3.10}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 |\varphi|^2 dx \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 |u|^2 dx. \tag{3.11}$$

En faisant la somme des inègalitès$(3.8)-(3.9)-(3.10)-(3.11)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}|\mathcal{L}u|^2 dxdt + \int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} |\varphi|^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 |\varphi|^2 dx \leq \\
&\leq 2\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + a_1^2\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt + \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{dx}\right|^2 dx + \\
&+ \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} |u|^2 dx + \sup_{0\leq t\leq T}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 |u|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

De cela on déduit que

$$\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}|\mathcal{L}u|^2 dxdt + \int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} |\varphi|^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 |\varphi|^2 dx \leq$$

$$\leq \vartheta\left[\int_\Omega \frac{\theta(x)}{2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt+\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^1 \frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}|u|^2\,dx+\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1|u|^2\,dx\right].$$

D'où le résultat (3.7).

Thèoreme 7.- *pour toute fonction $u \in E$ ona l'estimation suivante :*

$$\|u\|_E \leq \eta\,\|Lu\|_F\,, \tag{3.13}$$

où

$$\eta=\frac{\exp cT \max\left(33, \frac{(k+1)}{2}a_0\right)}{\min(\frac{7}{16}, \frac{a_0^2}{2}, \frac{(k+1)}{2}a_0)},$$

avec la constante c vèrifiant

$$ca_0 \geq a_3. \tag{3.14}$$

preuve : Posons

$$Mu=\begin{cases} kx^2\frac{\partial u}{\partial t}+2kx\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t} & 0<x\leq\frac{1}{\sqrt{k+1}},\\ (1-x)^2\frac{\partial u}{\partial t}+2(1-x)\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t} & \frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq x<1.\end{cases}$$

où

$$\jmath_1 u=\int_x^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}u(\xi,t)d\xi,$$
$$\jmath_2 u=\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^x u(\xi,t)d\xi.$$

Et considérons la forme quadratique suivante :

$$\operatorname{Re}\int_\Omega \exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt,$$

avec la constante c vérifiant (3.14). Cette forme est obtenue en multipliant l'équation (3.1) par $\exp(-ct)\overline{Mu}$. En remplacant $\mathcal{L}u$ et Mu par leur expréssions on obtient

$$\int_{\Omega} \exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt = \operatorname{Re}\int_{\Omega} \exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{Mu}dxdt - \operatorname{Re}\int_{\Omega} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{Mu}dxdt. \tag{3.15}$$

En intégrant chaque terme du deuxieme membre de (3.15) par parties par rapport à x

on obtient

$$\int_0^1 \exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{Mu}dx = \int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx +$$

$$+2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

On a

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -2\left[xk\exp(-ct)\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{k}+1}} +$$

$$+2k\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-t)kx\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}dx,$$

donc

$$2\operatorname{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = \frac{k}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = 2\left[\exp(-ct)(1-x)\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right]_{x=\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^{x=1} +$$

$$+2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx - 2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

Alors

$$2\operatorname{Re}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)\frac{\partial u}{\partial t}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

d'où on trouve

$$\int_0^1 \exp(-ct)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{Mu}dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \frac{k}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^{1} \exp(-ct)\left|\jmath_2 \frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \tag{3.16}$$

$$-\int_0^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{Mu}dx = -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx-$$

$$-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^{1} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x)^2\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx-$$

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^{1} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x)\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

En intégrant le terme du deuxieme membre de cette forme et en utilisant les conditions

(3.3) et (3.4) on obtient

$$-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}kx^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\Big]_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{k}+1}}+$$

$$+2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}kx\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx.$$

Il devient

$$-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx =$$

$$-\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{k}+1},t\right)\frac{k}{\left(\sqrt{k}+1\right)^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{k}+1},t\right)+$$

$$+2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}kx\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}$$

$$-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -2\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}kx\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\Big]_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{k}+1}}+$$

$$+2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}k\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}kx\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

Ainsi on a

$$+2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}k\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -2\exp(-ct)a(t)ku(0,t)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(x,t)dx+$$

$$+2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)ku\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

Donc on obtient

$$-2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}kx\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -2\exp(-ct)a(t)ku(0,t)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}(x,t)dx+$$

$$+2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)uk\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}kx\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx$$

$$-\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\Bigg]_{x=0}^{x=\frac{1}{\sqrt{k}+1}} -$$

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx.$$

Il devient

$$-\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x)^2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \quad =$$

$$= \exp(-ct)a(t)\frac{k}{\left(\sqrt{k}+1\right)^2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{k}+1},t\right)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\left(\frac{1}{\sqrt{k}+1},t\right) -$$

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)^2\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx$$

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x)\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -2\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\Bigg]_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^{x=1} -$$

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

D'autre part on a

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx = -2\exp(-ct)a(t)u\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\Bigg]_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^{x=1} +$$

$$+2\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)a(t)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

Donc on trouve

$$-2\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1-x)\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx \;=\; -2\exp(-ct)a(t)u(1,t)\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx+$$

$$+2\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\exp(-ct)a(t)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx+2\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1-x)\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx.$$

En sommant cette forme on obtient

$$\int_0^1\exp(-ct)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\overline{Mu}dx=\int_0^1\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\theta(x)\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx+$$

$$+2\operatorname{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\exp(-ct)a(t)ku\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx+2\operatorname{Re}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\exp(-ct)a(t)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx. \qquad (3.17)$$

En sommant les inégalités (3.16) et (3.17), il devient

$$\operatorname{Re}\int_0^1\exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}dx \;=\; \int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx+\frac{k}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\exp(-ct)\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\exp(-ct)\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx+\operatorname{Re}\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dx+$$

$$+2\operatorname{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\exp(-ct)a(t)ku\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx+2\operatorname{Re}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\exp(-ct)a(t)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx. \qquad (3.18)$$

En utilisant l' inégalité élémentaire suivante :

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx \;\le\; \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}x^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx$$

$$\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx\le\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^{1}(1-x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx.$$

On obtient

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt\ge\int_0^\tau\int_0^1\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dxdt+$$

$$+\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\theta(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt+2\operatorname{Re}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\exp(-ct)a(t)ku\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dx+$$

$$+2\operatorname{Re}\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^{1}\exp(-ct)a(t)u\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dx. \tag{3.19}$$

En intégrant selon t le second, le troisieme et le quatrième termes du membre droit de l'inégalité(3.19) et en utilisant les conditions(3.2) et (3.14) on aura

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\theta(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt=\int_0^1\left[\exp(-ct)\theta(x)a(t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2\right]_{t=0}^{t=\tau}dx+$$

$$+\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\theta(x)ca(t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2dxdt-\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\theta(x)\frac{\partial a}{\partial t}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2dxdt-$$

$$-\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\theta(x)a(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt.$$

Donc

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^1\exp(-ct)\theta(x)a(t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x\partial t}dxdt\geq\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x)\exp(-c\tau)a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\theta(x)a(0)\left|\frac{d\ell u}{dx}\right|^2dx \tag{3.20}$$

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\exp(-ct)a(t)ku\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt=k\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\left[\exp(-ct)a(t)\left|u(x,t)\right|^2\right]_{t=0}^{t=\tau}dx-$$

$$-k\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\exp(-ct)\frac{\partial a}{\partial t}\left|u(x,t)\right|^2dxdt+k\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\exp(-ct)ca(t)\left|u(x,t)\right|^2dxdt-$$

$$-\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\exp(-ct)a(t)k\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}dxdt.$$

Ainsi

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\exp(-ct)a(t)ku\frac{\partial\overline{u}}{\partial t}dxdt\geq\frac{k}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}\exp(-c\tau)a(\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2dx-\frac{k}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}a(0)\left|\ell u\right|^2dx \tag{3.21}$$

$$\int_0^\tau \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-ct)a(t)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt = \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \left[\exp(-ct)a(t)\left|u(x,t)\right|^2\right]_{t=0}^{t=\tau} dx+$$

$$+\int_0^\tau \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 ca(t)\left|u(x,t)\right|^2 dxdt - \int_0^\tau \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-ct)\frac{\partial a}{\partial t}\left|u(x,t)\right|^2 dxd-$$

$$-\int_0^\tau \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-ct)a(t)\frac{\partial u}{\partial t}\overline{u}dxdt.$$

Donc

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-ct)a(t)u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}dxdt \geq \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-c\tau)a(\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 a(0)\left|\ell u\right|^2 dx. \tag{3.22}$$

En utilisant les inégalités (3.20) - (3.21) et (3.22) dans (3.19) on obtient

$$\operatorname{Re}\int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)a(0)\left|\frac{d\ell u}{dx}\right|^2 dx+$$

$$+k\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} a(0)k\left|\ell u\right|^2 dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 a(0)\left|\ell u\right|^2 dx \geq \int_0^\tau \int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \theta(x)\exp(-c\tau)a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2 dx + k\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \exp(-c\tau)a(\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2 dx+$$

$$+\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-c\tau)a(\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2 dx. \tag{3.23}$$

En estimant le premier terme du membre de gauche de (3.23) on a

alors

$$\int_0^\tau \int_0^1 \exp(-ct)kx^2\left|\mathcal{L}u\right|\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right| dxdt + 2k\int_0^\tau \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} \exp(-ct)\left|x\mathcal{L}u\right|\left|\jmath_1\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right| dxdt+$$

$$+\int_0^\tau \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-ct)(1-x)^2\left|\mathcal{L}u\right|\left|\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right| dxdt + 2\int_0^\tau \int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 \exp(-ct)\left|(1-x)\mathcal{L}u\right|\left|\jmath_2\frac{\partial \overline{u}}{\partial t}\right| dxdt.$$

En utilisant l'$-\epsilon$ inégalité et le **lemme 3** on obtient

$$\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\mathcal{L}u\right|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dxdt \leq 8\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+$$

$$+\frac{1}{32}\int_0^\tau\int_0^1 \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)\left|x\mathcal{L}u\right|\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right| dxdt \leq 16\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx^2\left|\mathcal{L}u\right| dxdt+$$

$$+\frac{1}{16}\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)\left|\jmath_1\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq 16\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-ct)kx^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$\int_0^\tau\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)\left|(1-x)\mathcal{L}u\right|\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right| dxdt \leq 16\int_0^\tau\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+$$

$$+\frac{1}{16}\int_0^\tau\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)\left|\jmath_2\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq 16\int_0^\tau\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)^2\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\tau\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-ct)(1-x)^2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt,$$

d'où

$$\mathrm{Re}\int_\Omega \exp(-ct)\mathcal{L}u\overline{Mu}dxdt \leq 16\int_\Omega \theta(x)\exp(-ct)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{9}{32}\int_\Omega \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt.$$

En utilisant cette inégalité dans (3.23) on obtient

$$\frac{23}{32}\int_\Omega \theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 \theta(x)\exp(-c\tau)a(\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x;\tau)\right|^2 dx+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}+1}} \exp(-c\tau)ka(\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2 dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{k}+1}}^1 \exp(-c\tau)a(\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2 dx$$

$$\leq 16\int_\Omega \theta(x)\exp(-ct)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_0^1 \theta(x)a(0)\left|\frac{d\ell u}{dx}\right|^2 dx+$$

$$+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}} ka(0)\left|\ell u\right|^2 dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1 a(0)\left|\ell u\right|^2 dx. \tag{3.24}$$

De l'équation (3.1) on a

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\mathcal{L}u-\frac{\partial u}{\partial t}$$

ce qui implique

$$\frac{a_0^2}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\leq\frac{1}{2}\left|\mathcal{L}u\right|^2-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2.$$

En multipliant cette forme par $\theta(x)$ et intégrant sur Ω on obtient

$$\frac{a_0^2}{2}\int_\Omega\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dxdt-\frac{1}{2}\int_\Omega\theta(x)\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt\leq\frac{1}{2}\int_\Omega\theta(x)\exp(-ct)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt.$$

En combinant cette dérniére inégalité avec inégalité (3.24) on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{7}{16}\int_\Omega\frac{\theta(x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+a_0^2\int_\Omega\frac{\theta(x)}{2}\exp(-ct)\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2 dxdt+\\&+\int_0^1\frac{\theta(x)}{2}\exp(-c\tau)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\right|^2 dx+a_0k\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\exp(-c\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2 dx+\\&+a_0\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1\exp(-c\tau)\left|u(x,\tau)\right|^2 dx\leq 33\int_\Omega\frac{\theta(x)}{2}\exp(-ct)\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\\&+\frac{a_0}{2}\int_0^1\theta(x)\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx+ka_0\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\left|\varphi\right|^2 dx+a_0\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1\left|\varphi\right|^2 dx.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Comme le membre de gauche de l'inégalité ainsi obtenue (3.25) ne dépend pas de τ

en passant au sup par rapport à τ de 0 à T on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\frac{\theta(x)}{2}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt+\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|^2\right)dxdt+\\&+\int_0^1\frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx+\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\left|u\right|^2 dx+\\&+\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1\left|u\right|^2 dx\leq\eta\Bigg\{\int_\Omega\frac{\theta(x)}{2}\left|\mathcal{L}u\right|^2 dxdt+\\&+\int_0^1\frac{\theta(x)}{2}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|^2 dx+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\left|\varphi\right|^2 dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}^1\left|\varphi\right|^2 dx\Bigg\}.\end{aligned}$$

Où

$$\eta = \frac{\exp cT \max\left(33, \frac{(k+1)}{2} a_0\right)}{\min(\frac{7}{16}, \frac{a_0^2}{2}, \frac{(k+1)}{2} a_0)}.$$

4 Bibliographie

[1] Batten G.W.Jr, *Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of mixed boundary problem for parabolic equations*, math. comp.,17 (1963). 405-413.

[2] Benuar N.E., Yurchuk N.I., *Mixed Problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessl operator* , Differential Equation, 27 (1991) , 12,1482-1487.

[3] Bouziani A, Benouar N. E, *Mixed Problem with an integral condition for A third ordre parabolic equation*, kobe J.Math,15. (1998), 47-58.

[4] Cahlon B ., Kulkarni D.M , Shi P., *Stepwise stability for the heat equation with nonlocal constraint*, Siam J. Numer. Anal., 32 (1995) 2,.571-593.

[5] Cannon J.R., *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart Appl .Math, vol.21 (1963), 155-160.

[6] Cannon J.R, *The One-dimensional heat equation*. Encyclopedia of mathematics ant its applications, vol. 23, Addison-Wesley Mento Park, CA (1984).

[7] Choi Y,S., Chan K.Y., *A parabolic equaion with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry*, Nonlinear Anal,18 (1992), 317-331.

[8] Chouiter F., *Problèmes mixte avec conditions aux limites du type non classique.*

Mémoire de magistère. Département de Mathématique, Faculté des Sciences , Université Mentouri Constantine, Mars (2001).

[9] Denche M., Marhoune A.L., *A three-point boundary value problem with an integral condition for parrbolic aquation with the Bessel operator*, Applied Mathematics Letters,13 (2000), 85-89.

[10] Denche M., Marhoune A.L., *High order mixed -type differential equations with weigthed integral boundary conditions* , Electronic Journal of differential equations. N 60 (2000), 1-10.

[11] Denche M., Marhoune A.L., *Mixed problem with nonlocal boundary conditions for third order partial differential equation of mixed type* , International Journal of mathematics and mathematical sciences, 26 (2001), n°7, 417-426.

[12] Dezin A.A., *Théorème d'existence et d'unicité de la solution pour les problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles dans les aspace fonctionnels*, Usp. math naouk (en Russe), T.14.N°3 (1987), 22-73.

[13] Fridrichs K., *Symetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. pure. Appl. math., 7. N°2 (1954), 345-392.

[14] Garding L., *Cauchy's problem for hyperbolic equations.* University of Chicago Lecture notes,1957.

[15] Ionkin N.I., *Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a*

non-classical boundary condition, differentialnye Uraveniya (en Russe), 13 (1977), 294-304.

[16] Kamynin N.I., *A boundary value problem in the theory of the heat condition with non classical boundary condition*, U.S.S.R. Comput. Math. Phys., 4 (1964), 33-59.

[17] Kartynnik A.V.,*Three-point boundary-value problem with an integral space-variable condition for a second-order parabolic equation,* Differential equations, 26 (1990), N°.9, 1160-1166.

[18] Ladyzhenskaja O.A., *Mixed problem for hyerbolic equations.* Edition Nauka, 1974.

[19] Leray J., *Lecture on hyperbplic differential equations with variable coefficients* ,Princeton, Just for adr, Study,1952.

[20] Petrovsky I.G., *Uber das cauchyshe problem fur system von linearen partiallen diferen tialgeichungen in gebit der niehtanalystischen funktionen*, bull. Univ. d'etat. moscow, N°7 (1938), 1-74.

[21] Pulkina L.S., *A non-local problem with integral conditions for hyperbolic equations* , Electronic Journal of Differential Equations, 45 (1999), 1-6.

[22] Rebani F,Chesalyn V.I., *Problèmes aux limites pour equations différentièlles*

d'ordre impair dans le rectangle, Doklady acad. Nauk B.S.S.R (en Russe) Sien. phys. Math. Nauk, N°3 (1985).

[23] Rebani F, Chesalyn V.I., *Problèmes aux limites pour equations différentièlles d'ordre impair dans le rectangle*, Doklady acad. Nauk. B.S.S.R (en Russe), T.30, N°12, 1061-1063.

[24] Samarski A.A., *Some problem in the modern theory of differential equations*, differentsialnye Uravn. (en Russe), 16 (1980), N°.11, 1221-1228.

[25] Shi P. , Shillor M., *Design of Contact Patterns in One Dimentional Thermoelasticity*, in theoretical Aspects of industrial Design ,Socity for industrial and applied Mathematics, Philadelphia, PA. 1992.

[26] Yurhuk,N.I.,*the energy inequality method in the investigation of certain degenerate linear operational differential equation* . Diff. Equa. 14(1978), no 12 ,1558-1567

[27] Yurhuk,N.I.,*Mixed problem for parabolic equation of variable order. Soviet.Math. Dokl.,*26, no 12 (1982) , pp. 39-41

[28] Yurhuk,N.I.,*Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equation* ,Differ.Equ.,22 (1982) , 1457-1463

[29] Latrous C.,*Mixed problem with integral boundary conditions for a third order*

partial differential equation,Tr.Inst.,Minsk,2004,6,115-119

[30] Zarour A., *Sur un probléme d'évolution non classique*

mèmoire de magistére,*Département de Mathématiques,Facultè des Sciences.*

Université Mentouri Constantine, Jun (2008)