RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI - CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :.............................
Série :.....................................

THESE

Présentée pour obtenir

Le GRADE de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En: Mathématiques

Sujet:

Le problème de Kirchhoff avec différents type de dissipations (Existence locale et globale, comportement asymptotique et explosion en temps fini des solutions).

Option :

Equations aux Dérivées Partielles

Présentée par :

Zaraï Abderrahmane

Devant le jury :

Président : Denche Mohammed	Professeur	Université de Constantine.
Rapporteur : Tatar Nasser-eddine	Professeur	King Fahd University.
Examinateurs:		
1. Mesloub Said	Professeur	King Saud University.
2. Marhoune A. Lakhdar	Professeur	Université de Constantine.
3. Mazouzi Said	Professeur	Université de Annaba.
4. Hamri Nasserddine	Professeur	C.U. Mila.

Soutenue le :… … … ...

Remerciements

Tout d’abord nous rendons grâce à Dieu tout puissant qui nous a permis d’achever ce travail dans de bonnes conditions.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse **Prof. TatarNasser-eddine**, professeur au King Fahd University, qui m'a initié à la recherche. Ses enseignements et son analyse des problèmes mathématiques sont des savoirs inestimables, qu'il m'a fait partager sans ménager son temps. Je le remercie pour la confiance constante qu'il m'a accordée, sa disponibilité et ses encouragements pour me guider dans mes recherches.

Je remercie **Prof. DencheMouhamed**, pour l’honneur qu’il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également **Prof.MesloubSaid**, **Prof. Marhoune A. Lakhdar**,**Prof. MazouziSaid**, et**Prof. HamriNasserddine**, d’avoir accepté d’examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Je souhaite aussi saluer en cette occasion mes amis Toufik, Bilal, Djamel, Faouzi, Ridha, Badrou, Ilias, Salah-Eddine, Samir, Noury, Fayçal, Ismail, Kamel, Abdessadek, Haouem, Salim, et les autres . . .

Je voudrais aussi rendre hommage àMesloub Brahim et son famille.

J'ai une pensée très affectueuse pour ma famille, et une profonde reconnaissance pour mes parents et mes frères « Boumediene, Younes, Abderraouf », mes sœurs et ma femme et ces parents et Zoubida, qui ont toujours été d'un grand réconfort.

Table des matières

Introduction

L'équation unidimensionnelle de déplacement d'une fine poutre fixée aux deux extrémités peut être écrite comme suit

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - \left(\xi_0 + \xi_1 \int_\Omega |u_x(t)|^2\, dx + \sigma \int_\Omega u_x(t)\, u_{xt}(t)\, dx\right) u_{xx}(x,t) \\ + u_{xxxx}(x,t) + \nu u_{xxxxt}(x,t) = 0 \ dans\ Q \end{gathered} \tag{1}$$

où u est le déplacement transversale de la poutre, x est la coordonnée spatiale et t est le temps. Les coefficients des termes dissipatifs de Balakrishnan-Taylor est viscoélastique structurel sont désignés par σ et ν respectivement. ξ_1 est la rigidité non linéaire de la poutre, ξ_0 est une charge de traction dans le plan, (x,t) appartient à $Q = \Omega \times [0, +\infty)$ avec $\Omega = (0,1)$. Toutes les constantes ξ_1, σ et ν sont fixés positives et ξ_0 est fixé non-négatif.

L'équation (1) est liée à l'équation de vibrations aéroélastiques,

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - \left(\xi_0 + \xi_1 \int_\Omega |u_x(t)|^2\, dx + \sigma \int_\Omega u_x(t)\, u_{xt}(t)\, dx\right) u_{xx}(x,t) \\ + \sqrt{\rho}\delta u_t(x,t) + \rho u_x(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + \nu u_{xxxxt}(x,t) = 0 \ dans\ Q \end{gathered} \tag{2}$$

lorsque la pression aérodynamique interne du mouvement des poutres est supposée négligeable. Dans l'équation (2), cela signifie que la somme $\sqrt{\rho}\delta u_t + \rho u_x$ est négligeable. Du point de vue mathématique, cette hypothèse n'a pas une importante influence dans la formule (2) lorsque l'intérêt est d'obtenir l'existence et le comportement asymptotique des solutions, parce que la somme d'ordre plus haut $u_{xxxx} + \nu u_{xxxxt}$ a une performance dominante sur $\sqrt{\rho}\delta u_t + \rho u_x$.

L'équation (2) découle d'une expérience de soufflerie sur un panneau à des vitesses supersoniques. Pour une dérivation de ce modèle voir, par exemple, Dowell [19] et Holmes [27].

L'existence globale de solutions pour le problème mixte associé à l'équation (2) a été étudiée par Hughes & Marsden [29], et en ce qui concerne la stabilité asymptotique des solutions, Holmes & Marsden [28] en supposant quelques hypothèses restrictives sur la pression aérodynamique ρ les auteurs ont conclu que la dérivée de la solution est négative.

L'équation (1) comporte certaines situations particulières d'élasticité. Notamment, en omettant les termes dissipatifs, nous avons l'équation de la poutre

$$u_{tt}(x,t) - \left(\xi_0 + \xi_1 \int_\Omega |u_x(t)|^2 \, dx\right) u_{xx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = 0 \ dans \ Q \tag{3}$$

L'équation de la poutre (3) a été étudiée par plusieurs auteurs, parmi eux, Ball [5, 6], Biler [7], Brito [8, 9] et Medeiros [43]. Le dernier travail discute l'équation dans plusieurs contextes. Par omission du terme u_{xxxx} dans (3) nous avons la célèbre équation de Kirchhoff

$$u_{tt}(x,t) - \left(\xi_0 + \xi_1 \int_\Omega |u_x(t)|^2 \, dx\right) u_{xx}(x,t) = 0 \ dans \ Q \tag{4}$$

L'équation (4) a été largement étudiée par plusieurs auteurs dans les cas (1,2,..., n)-dimensionnelle et en général des modèles mathématiques dans un espace de Hilbert H. L'existence locale et globale a été mise en évidence dans plusieurs contextes physico-mathématiques. On cite les travaux de Arosio-Spagnolo [3], Clark [16, 17], Kirchhoff [36], Narashinham [47], Pohozaev [70], Ono [51, 52,53], et un certain nombre de références intéressantes citées dans les documents mentionnés précédemment, notamment celui de Medeiros et al. [44].

Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques fournissent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux à garder une certaine mémoire. Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiels $\int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds$, h représente le noyau dans l'expression de la mémoire qui est supposée décroître. Si on l'ajoute à l'équation (4) avec une dissipation de la forme $g(u_t)$, on obtient

$$u_{tt}(x,t) - \left(\xi_0 + \xi_1 \int_\Omega |u_x(t)|^2 \, dx\right) u_{xx}(x,t) + \int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds + g(u_t) = 0 \ dans \ Q \tag{5}$$

Il existe une littérature riche sur les problèmes de Kirchhoff viscoélastiques dans tout le domaine. Parmi les nombreux travaux dans ce sens, on peut citer Rivera [46] pour le cas où $\xi_0 = 1$, et $\xi_1 = 0$. Cavalcanti et al. [13] ont traité (5) avec $g(u_t) = a(x)u_t$, ici $a(x)$ peut être nulle sur une partie du domaine. En supposant que le noyau h dans la mémoire décroît de façon exponentielle, ils ont obtenu la décroissance exponentielle de l'énergie. Ce travail étend le résultat de Zuazua [77] dans lequel il a examiné (5) avec $h = 0$ et l'amortissement est localisé. D'autre part, lorsque $g = 0$, Jiang et Rivera [30] ont prouvé, dans le cadre de la viscoélasticité non linéaire, que la solution décroit exponentiellement à condition que la noyau h décroit de façon exponentielle. Nous pouvons également ajouter dans ce sens l'article de Tatar [70] où il a démontré que les solutions décroissent d'une manière exponentielle sous de nouvelles hypothèses sur la fonction de relaxation h dans le terme mémoire. Particulièrement, il a examiné une nouvelle famille de noyaux qui n'est pas nécessairement décroissante. Nous pouvons citer aussi l'article de S. Berrimi et S. Messaoudi [11] dans le cas où $g(u_t) = |u_t|^m u_t$ est en interaction avec $|u|^p u$. Récemment, Wu et Tsai [73] ont discuté l'existence globale ainsi que la décroissance de l'énergie, et l'explosion des solutions. L'équation (5) a d'abord été étudiée par Torrejon et Young [71] pour des conditions initiales analytiques. Plus tard, Rivera [46] a montré l'existence globales des solutions et la décroissance d'énergie vers zéro de façon exponentielle sous certaines restrictions. Ensuite, Shun-Tang Wu and Long-Yi Tsai [74] pour $g(t) = -\Delta u$ ont démontré l'existence locale et globale des solutions et la stabilité exponentielle d'énergie avant de prouver l'explosion des solutions.

Le modèle entre les mains, avec $\sigma \neq 0$, a été initialement proposé par Balakrishnan et Taylor en 1989 [4]. Il n'a pas été bien étudié. On peut citer les articles de Y. You [76] et R. H. Clark [15]. Dans [76], un problème analogue pour une équation non linéaire d'une poutre extensible et élastique avec un amortissement structurel a été étudié. Un résultat d'existence globale et un résultat de décroissance exponentielle vers un ensemble attractif ont été obtenus. Dans [15], le même problème que le nôtre, a été envisagé, mais à nouveau sans le terme source non linéaire. L'auteur a étudié le comportement asymptotique des solutions. Notamment, un résultat de décroissance exponentielle a été prouvé mais nous soulignons ici ceci a été établi sans aucune source non linéaire en competition avec une dissipation forte ou faible dans l'équation.

L'objet de cette thèse est d'étendre les travaux de Y. You [76] et R. H. Clark [15]. On s'intéressera au comportement asymptotique des solutions du problème (1) dans le cas où le système est soumis à une force extérieure (source de type polynomiale). Il est connu pour l'équation des ondes que cette source empêche l'existence globale (en temps) de la solution du problème ; c'est-à-dire que la solution (ou plus précisément l'énergie du problème) tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand t s'approche d'une valeur finie T appelée temps d'explosion. Pour cette raison on appelle le terme source terme d'explosion. Les termes de dissipations sont par contre des termes qui ont tendance à stabiliser la solution du problème. Il est facile de voir qu'en l'absence de termes sources, si la solution existe localement alors on peut toujours la prolonger en une solution globale.

Cette interaction entre terme source et terme dissipatif a été une question centrale dans de nombreux travaux et elle l'est toujours. Il est important de savoir quel terme l'emporte sur l'autre.

La stabilisation du problème par des dissipations fortes de la forme $\nu\Delta^2 u_t$ est peu considérée dans la littérature, on peut se référer aux articles [15, 67] c'est une dissipation très forte. Quand la dissipation est de type mémoire impliquant un noyau régulier, il y a deux travaux mentionnés dans la bibliographie [68, 69]. Ce terme mémoire intervient dans plusieurs domaines, et peut modéliser différents phénomènes tels que les phénomènes héréditaires par des modèles viscoélastiques, voir [13, 14].

Nous déterminerons le comportement asymptotique de la solution à l'aide de deux méthodes :

Méthode de M. Nakao [48] Cette méthode est basée principalement sur l'établissement d'une inégalité de la forme

$$E(t) \leq \omega_0 \left(E(t) - E(t+1) \right) \ sur \ [0, T], \ \omega_0 > 1,$$

et l'applicaion du Lemme de Nakao en tenant compte de la décroissance de l'énergie.

Inégalités intégrales. Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes dissipatifs sont basés sur le lemme de V. Komornik

[32] ; qui consister à montrer des inégalités de la forme

$$\begin{aligned}
\int_S^\infty E(t)dt &\leq CE(S),\ \forall S \geq S_0, \\
\int_S^\infty E^{1+\lambda}(t)dt &\leq CE^\lambda(0)E(S),\ \forall S \geq S_0,
\end{aligned}$$

pour conclure certaines types de décroissances.

Pour montrer l'explosion de la solution en temps fini, nous utilisons trois techniques : La méthode de concavité de Levine, une méthode directe utilisé dans Li [38] et un argument utilisé par Tatar [67]. Ces méthodes ont été développées pour l'équation des ondes avec une dissipation non linéaire et une source polynomiale. Elles consistent à construire une inéquation différentielle. L'explosion en temps fini découle alors de la résolution de cette inéquation différentielle.

Afin de prouver la non-existence dans l'espace entier, on utilise la «méthode des fonctions test" développée par Mitidieri et Pohozaev [45]. Notre preuve est basée sur un argument par l'absurde, en passant par des estimations a priori pour les solutions faibles de (4,1), un choix adéquat d'une fonction test et un changement d'échelle.

Ce travail comporte six chapitres. Nos contributions se trouvent dans les chapitres 1, 2, 3, 4 et 5.

Chapitre 0 : Dans ce chapitre nous rappelons les outils nécessaires qui sont utiles dans les chapitres ultérieurs.

Dans un premier temps, nous étudions l'équation de la poutre élastique avec source externe non linéaire, nous formulons ce problème comme un problème d'évolution semi-linéaire abstraite et envisager l'existence, l'unicité et la régularité des solutions locales par la théorie des semi-groupes standard et nous établissons des conditions suffisantes assurant une décroissance exponentielle de la solution en utilisant l'inégalité de Nakao [48]. En outre, en utilisant un type d'argument dû à Levine [37] et généralisé par V.K. Kalantarov et O.A. Ladyzhenskaya [31] (voir aussi [51, 52, 53]), nous prouvons que la solution du problème n'existe pas globalement en temps.

Ceci constitue une première contribution acceptée dans DCDIS. Sous le titre "On a Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and source term".

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude d'une équation non linéaire de Kirchhoff viscoélastique avec une dissipation de Balakrishnan- Taylor. Nous montrons que la solution décroit de façon exponentielle. Notre approche est basée sur les inégalités intégrales et les techniques de multiplicateurs de Komornik [32]. De plus, nous montrons que la solution explose en temps fini en présence de source non linéaire de type polynomiale malgré la présence d'une dissipation extrememement forte. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans Demonstratio Math Vol 44 No 1, 67-90. Sous le titre "Exponential stability and blow up for a problem with Balakrishnan-Taylor damping".

Le chapitre 3, concerne aussi le cas d'une dissipation viscoelastique mais sous des conditions beaucoup plus faibles. Un résultat d'existence globale et de décroissence polynomiale est prouvé en utilisant les ensembles stables dans le cas d'un terme non-linéaire. Les résultats obtenus dans ce chapitre étendent le résultat de décroissance exponentielle dans le Chapitre 2. Ici, nous étudions le cas où la décroissance de noyau h est polynomiale. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans. Arch. Math. (Brno) 46 (2010), No. 3, 157–176. Sous le titre "Global existence and polynomial decay for a problem with Balakrishnan-Taylor damping".

Dans le Chapitre 4, nous établissons un résultat de non-existence d'un problème viscoélastique avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et une source non linéaire dans tout l'espace. Ce résultat est basé sur la méthode des fonctions test développée par Mitidieri et Pohozaev [45]. Nous établissons aussi des conditions nécessaires d'existence locale et globale.

Dans le Chapitre 5 nous donnons des conditions suffisantes d'explosion de la solution d'équation non dégénérée non linéaire de Kirchhoff avec une dissipation fractionnaire faible en temps fini, l'outil principal utilisé repose sur la méthode de Georgiev et Todorova et sur une technique du traitement de terme fractionnaire utilisé par Tatar [66].

Chapitre 0

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les notions essentielles, de même que les résultats fondamentaux, qui concernent les espaces L^p ; les espaces de Sobolev, et certains Théorèmes d'existence pour des problèmes d'évolution.

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i.Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit

$$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^T \ et \ |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2$$

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x).$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(C(\Omega))^m$ est l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $C_b\left(\overline{\Omega}\right)$ l'espace des fonctions continues et bornées sur $\overline{\Omega}$, on le munit de la norme $\|.\|_\infty$;

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|$$

Pour $k \geq 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.

$C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$, dont le support est compact et contenu dans Ω.

Nous définissons aussi $C^k\left(\overline{\Omega}\right)$, comme l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des éléments de $C^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ ou bien comme étant l'espace des fonctions de $C^k\left(\Omega\right)$, telle que pour tous $0 \leq j \leq k$, et tout $x_0 \in \partial\Omega$, la limite $\lim\limits_{x \to x_0} D^j u\left(x\right)$ existe et dépend uniquement de x_0.
$C_0^\infty\left(\Omega\right)$ ou bien $\mathfrak{D}\left(\Omega\right)$, est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

0.1 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue dx. On désigne par $L^1\left(\Omega\right)$ l'espace des classes de fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u\left(x\right)|\, dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p\left(\Omega\right)$ par

$$L^p\left(\Omega\right) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \textit{ mesurable et } \int_\Omega |f\left(x\right)|^p\, dx < +\infty\right\}$$

Sa norme est

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u\left(x\right)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

On dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}\left(\Omega\right)$ si $f\mathbf{1}_K \in L^p\left(\Omega\right)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Remarque 0.1 *L'espace L^2 muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega fg dx,\ \ f, g \in L^2\left(\Omega\right)$$

est un espace de Hilbert.

Définition 0.1 *Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on note $L^p\left(0,T;X\right)$ l'espace des fonctions $f :]0,T[\to X$,* *mesurables qui vérifient*

$$i) \text{ Si } 1 \leq p < \infty, \ \left(\int_0^T \|f\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} := \|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty.$$

$$ii) \text{ Si } p = \infty, \ \sup ess_{t\in]0,T[} \|f\|_X := \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} < \infty.$$

Proposition 0.1 *$L^p(0,T;X)$ muni de la norme $\|f\|_{L^p(0,T;X)}$, $1 \leq p \leq \infty$ est un espace de Banach.*

0.2 Espaces de Sobolev

0.2.1 Dérivée faible

Définition 0.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et $1 \leq i \leq n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\,\partial_i\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega f_i(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens des distributions,on écrira

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

0.2.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) ; \ tel \ que \ \partial_i u \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

0.2.3 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n, m \geq 2$ et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ \ tel\ que\ \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\,,\ \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens de la Définition 0.1.

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)\,.$$

Remarque 0.2 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \ \ pour\ \ u,v \in H^m(\Omega)\,.$$

0.2.4 Formule d'intégration par parties et formule de Green

Définition 0.3 *Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} v u n_i ds,$$

où $n_i(x) = \cos(n, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point x et l'axe des x_i.

Définition 0.4 *Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $v \in H^2(\Omega)$. Alors on a*

$$\int_\Omega v \Delta u dx - \int_\Omega u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u\right) ds.$$

Notation 0.1 *Soit* $1 \leq p \leq \infty$. *On note par* q *l'exposant conjugué de* p *i.e.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

0.3 Inégalités

Lemme 0.1 *(Inégalité de Hölder). Soit* p *un nombre avec* $1 \leq p \leq +\infty$ *et soient* $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$. *Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)} .$$

Si $p = q = 2$ *on aura l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Lemme 0.2 *(Inégalité de Poincaré). Soit* Ω *un ouvert borné de* R^n *de frontière assez régulière. Alors*

$$\|u\|_2 \leq B \|\nabla u\|_2 , \text{ pour } u \in H_0^1(\Omega),$$

où $B^{-1} = \inf_{\|u\| \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$.

Lemme 0.3 *(Inégalité de Sobolev-Poincaré [40]). Soit* p *un nombre avec* $0 \leq p < +\infty$ $(n = 1, 2)$ *ou* $0 \leq p \leq \frac{4}{n-2}$ $(n > 2)$. *Alors il existe une constante* $C(p, \Omega)$ *telle que*

$$\|u\|_{p+1} \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_2 , \text{ pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 0.4 *(Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev) Soit* $u \in L^p(R)(p > 1)$, $0 < \lambda < 1$ *et* $\lambda > 1 - \frac{1}{p}$, *alors* $(1/|x|^\lambda) * u \in L^q(R)$ *avec* $\frac{1}{q} = \lambda + \frac{1}{p} - 1$ *et l'application* $u \to (1/|x|^\lambda) * u \in L^q(R)$ *définie de* $L^p(R)$ *dans* $L^q(R)$ *est continue.*

0.4 Semi-groupes

Soit $(H, |.|)$ un espace de Hilbert réel.

Définition 0.5 *Une famille* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *d'opérateurs linéaires continus est dite semi-groupe for-*

tement continu sur H si elle satisfait les propriétés suivantes

$$
\begin{aligned}
&i) \quad S(0) = Id \\
&ii) \quad S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0 \\
&iii) \quad \lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\|_H = 0, \forall x \in H.
\end{aligned}
$$

Définition 0.6 *Un semi-groupe fortement continue $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sur H est dit de contractions si $\|S(t)\|_{L(H)} \leq 1$, $\forall t \geq 0$, où $L(H)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de l'espace de Hilbert H dans H.*

Définition 0.7 *Le générateur infinitésimal A d'un semi-groupe fortement continu $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ dans H est défini par*

$$
\begin{aligned}
&D(A) = \left\{ x \in H, \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h} \left[S(h)x - x \right] existe \right\} \\
&Ax = \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h} \left[S(h)x - x \right], \quad \forall x \in D(A).
\end{aligned}
$$

Théorème 0.1 *Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur H de générateur infinitésimal A. Alors*

$$
\begin{aligned}
&i) \quad D(A) \text{ est dense dans } H \\
&ii) \quad A \text{ est fermé} \\
&iii) \quad \forall x \in D(A), S(.)x \in C^1 \left([0, +\infty[\, , H \right) \cap C \left([0, +\infty[\, , D(A) \right)
\end{aligned}
$$

et on a

$$
\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \ \forall t \geq 0.
$$

On en déduit

Corollaire 0.1 *Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur H de générateur infinité-*

simal $(A, D(A))$ *.Alors, pour tout* $y_0 \in D(A)$ *le problème d'évolution homogène*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay, \ \forall t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

a une solution unique $y \in C^1([0, +\infty[\, , H) \cap C([0, +\infty[\, , D(A))$ *donnée par*

$$y(t) = S(t)y_0.$$

Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur H de générateur infinitésimal $(A, D(A))$et soit le problème d'évolution non homogène

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = Ay + f, \ \forall t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

où f une fonction donnée définie sur $[0, T]$ à valeurs dans H.

Définition 0.8 *Soit f*$\in L^1([0, T]\,; H)$ *et* $y_0 \in H$*. On appelle solution généralisée (mild) de (2) la fonction*

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \ \forall t \in [0, T] \tag{3}$$

On appelle solution classique de (2) toute solution $y \in C^1([0, +\infty[\, , H) \cap C([0, +\infty[\, , D(A))$ *et vérifiant (2) dans* $[0, T]$ *.*

Théorème 0.2 *Soit f*$\in L^1([0, T]\,; H)$ *alors pour tout* $y_0 \in H$ *le problème (2) admet une solution classique unique donnée par (3).*

Chapitre 1

Sur une équation de Kirchhoff avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et une source polynomiale

1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'étudier le problème aux limites à valeurs initiales suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))\right)\Delta u \\ +\Delta^2 u + \nu\Delta^2 u_t = |u|^p u \ dans\ \Omega \times [0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x)\ \ dans\ \Omega \\ u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0\ sur\ \Gamma \end{cases} \tag{1.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. Ici $u(t,x)$ est le déplacement vertical du point x à l' instant t sur la poutre. Tous les paramètres ξ_0, ξ_1, σ, ν et p sont supposés être des constantes positives. Lorsque $\xi_1 = \sigma = \nu = 0$, et sans $\Delta^2 u$, l'équation (1.1) se réduit à une équation d'onde non linéaire qui a été largement étudiée, et plusieurs résultats concernant l'existence et la non-existence ont été établis [10,21,25,31,34,37]. Lorsque ξ_0, $\xi_1 \neq 0$, $\sigma = \nu = 0$

et sans $\Delta^2 u$, l'équation (1,1) se réduit à l'équation bien connue de Kirchhoff qui a été introduite dans [36] pour décrire les vibrations non linéaires d'une corde élastique. L'équation d'origine de Kirchhoff est

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{ p_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

où $0 < x < L$, $t \geq 0$, $u(x,t)$ est le déplacement vertical du point x à l' instant t, E le module de Young de matériel, ρ la masse volumique, h la surface de la section de la corde, L la longueur de la corde, p_0 la tension initiale de la corde et f la force extérieure. Kirchhoff [36] a été le premier qui a étudié les oscillations des cordes tendues et les plaques. La question de l'existence et non-existence de solutions a été discutée par de nombreux auteurs (voir [47,50,51,52]).

Le modèle entre les mains, avec $\sigma \neq 0$, a été initialement proposé par Balakrishnan et Taylor en 1989 [4]. Il n'a pas été bien étudié. On peut citer les articles de Y. You [76] et R. H. Clark [15]. Dans [76], un problème analogue pour une équation non linéaire d'une poutre extensible et élastique avec un amortissement structural a été étudié. Un résultat d'existence globale et un résultat de décroissance exponentielle ver un ensemble attractif ont été obtenus. Dans [15], le même problème que le nôtre a été envisagé, mais à nouveau sans le terme source non linéaire. L'auteur a étudié le comportement asymptotique des solutions. Notamment, un résultat de décroissance exponentielle a été prouvé mais nous soulignons ici que ce qui a été établi est sans une source non linéaire en interaction avec l'amortissement forte dans l'équation.

Dans ce chapitre, nous allons établi des conditions suffisantes donnant la décroissance exponentielle des solutions et des conditions suffisantes assurant l'explosion en temps fini. Plus précisément, en utilisant les ensembles "stable" de données initiales, donc les solutions décroissent de manière exponentielle à l'état stationnaire. Deuxième partie du chapitre est consacrée a l'etablissement de conditions suffisentes assurant l'explosion en temps fini.

1.2 Préliminaires

Dans cette section, nous formulons le problème (1.1) sous forme d'un problème abstrait à valeur initiale de Cauchy. On désigne par H l'espace de Hilbert, $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable muni du produit scalaire (.,.) et de la norme.$\|.\|_2$. Nous définissons l'opérateur linéaire $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to H$ par :

$$\mathcal{A}u = \Delta^2 u \quad pour \quad u \in D(\mathcal{A})$$

où

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ u \in H^4(\Omega) : u\,(x,t)\,|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\,(x,t)\,|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

et les dérivés sont prises au sens des distributions. Cet opérateur linéaire fermé $\mathcal{A}$ est auto-adjoint et défini positif.

Notre problème (1.1) peut être écrit de manière abstraite comme suite

$$\begin{cases} u'' + \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\mathcal{A}^{1/4} u\,(t)\right\|_2^2 + \sigma \left(\mathcal{A}^{1/4} u\,(t)\,, \mathcal{A}^{1/4} u'\,(t)\right)\right) \mathcal{A}^{1/2} u \\ +\mathcal{A}u + \nu \mathcal{A}u' = |u|^p\, u, \quad t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u\,(x,t)\,|_{\Gamma} = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,(x,t)\,|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ensuite, nous réécrivons (1.2) comme un système de premier ordre. À cette fin, on désigne par V le sous espace fermé $D(\mathcal{A})$ de l'espace hilbertien $H^4(\Omega)$. et nous définissons l'espace produit de Hilbert $X = V \times H$. Nous considérerons aussi l'espace $\tilde{X} = V \times V = D(\mathcal{A}) \times D(\mathcal{A})$ avec la norme du graphe. Enfin, nous définissons l'opérateur linéaire A par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{A} & -\nu\mathcal{A} \end{pmatrix} : D(A) \to X, \ avec \ D(A) = V \times V,$$

où I est l'opérateur identité sur V, et F par

$$F \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^p\, u - \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\mathcal{A}^{\frac{1}{4}} u\,(t)\right\|_2^2 + \sigma \left(\mathcal{A}^{\frac{1}{4}} u\,(t)\,, \mathcal{A}^{\frac{1}{4}} u'\,(t)\right)\right) \mathcal{A}^{\frac{1}{2}} u \end{pmatrix}$$

(bien sûr $|u|^p\, u$ doit avoir un sens, des conditions seront imposées par l'inégalité de Sobolev-Poincaré, voir le lemme 0.3 ci-dessous, nous verrons que u est dans L^{p+2}). Il est maintenant clair que le problème (1.2) peut encore être formulé comme un problème à valeur initiale du premier ordre semi-linéaire.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in X \end{cases} \tag{1.3}$$

où $v_0 = u_1$. Soit $w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ et $w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Alors le problème (1,3) peut être réécrit comme suit

$$\frac{d}{dt}w = Aw + F(w), \quad t \geq 0, \quad w(0) = w_0 \in X. \tag{1.4}$$

On peut démontrer que l'opérateur $-A$ est un opérateur sectoriel (voir D. Henry [25]) et que A engendre un semi-groupe de contractions analytique qui sera désigné par $\{S(t) : t \geq 0\}$. En outre, A a une résolvante compacte. $F : X \to X$ est localement lipchitzienne et bornée. Par conséquent, par la théorie des semi-groupes standard, nous avons l'existence locale suivants et la régularité (voir [55,57,72,76]).

Lemme 1.1 *Pour tout $w_0 \in X$, il existe un $T = T(w_0) > 0$ tel que la solution généralisée $w(t)$ de l'équation (1.4) avec la condition initiale $w(0) = 0$ existe et est unique pour $t \in [0,T]$, et*

$$w \in C([0,T]; X) \cap C^1((0,T); X) \cap C((0,T); \tilde{X}).$$

Si $w_0 \in \tilde{X}$, alors cette solution généralisée est une solution classique du problème (1.4) pour $t \in [0,T]$.

Ensuite, nous présentons les lemmes bien connus suivants qui seront nécessaires plus tard

Lemme 1.2 *(Nakao [49]). Soit $\Phi(t)$ une fonction non croissante et positive sur $[0,T]$, telle que*

$$\Phi(t) \leq \omega_0 \left(\Phi(t) - \Phi(t+1)\right) \text{ sur } [0,T],\ \omega_0 > 1.$$

Alors, nous avons

$$\Phi(t) \leq \Phi(0)\, e^{-\omega_1 t} \text{ sur } [0, T],$$

où

$$\omega_1 = \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 - 1}\right).$$

1.3 Décroissance exponentielle

Dans cette section, nous allons démontrer la décroissance exponentielle des solutions du problème (1.1). Nous définissons l'énergie du problème (1.1) par

$$E(t) = \|u'\|^2 + (\xi_0 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}. \tag{1.5}$$

Lemme 1.3 *$E(t)$ est une fonction non croissante sur $[0, \infty)$ et*

$$E'(t) = -2\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 - 2\nu\|\Delta u'\|^2. \tag{1.6}$$

Preuve: En multipliant l'équation (1.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient (1.6). ■

Maintenant soit

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \xi_0\|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2}, \\ I_2(t) &= \xi_0\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4 - \|u\|_{p+2}^{p+2}, \\ J(t) &= \xi_0\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4 - \frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

alors

$$E(t) = \|u'\|^2 + J(t) \tag{1.8}$$

et

$$\begin{aligned} J(t) &\geq \xi_0\|\nabla u\|^2 + \tfrac{2}{p+2}I_1 - \tfrac{2\xi_0}{p+2}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \\ &\geq \tfrac{p\xi_0}{p+2}\|\nabla u\|^2 + \tfrac{2}{p+2}I_1 + \|\Delta u\|^2. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Nous définissons le puits de potentiel par

$$\mathcal{W} = \left\{ u \;/\; I_1(u(t)) = \xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} > 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Lemme 1.4 *Soit u la solution de (1.1). Si $u_0 \in \mathcal{W}$ et*

$$\alpha = \frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\xi_0^{\frac{p+2}{2}}} \left(\frac{p+2}{p} E(0) \right)^{p/2} < 1, \tag{1.10}$$

alors $u(t) \in \mathcal{W}$, pour chaque $t \in [0,T]$. Ici $C(p,\Omega)$ est la constante de Sobolev-Poincaré.

Preuve: Soit $u_0 \in \mathcal{W}$, alors $I_1(u_0) > 0$. Par continuité, il existe $T_m \leq T$ telle que $I_1(u(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T_m]$. Par conséquent, à partir de (1.8), (1.9) et le lemme 1.3, nous avons

$$\xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2 \leq \frac{p+2}{p} J(t) \leq \frac{p+2}{p} E(t) \leq \frac{p+2}{p} E(0).$$

Cette relation, ainsi que le lemme 0.3, implique que, pour $t \in [0,T_m]$,

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq C\left(p,\Omega\right)^{p+2} \left\|\nabla u\right\|^{p+2} \leq \frac{C\left(p,\Omega\right)^{p+2}}{\xi_0} \left(\frac{p+2}{p\xi_0} E(0) \right)^{p/2} \xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2.$$

Il vient de notre hypothèse sur α que

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq \alpha \xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2 < \xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2, \ \forall t \in [0,T_m]. \tag{1.11}$$

Donc $I_1(t) > 0$, $\forall t \in [0,T_m]$, ce qui signifie que $u(t) \in \mathcal{W}$, $\forall t \in [0,T_m]$. En répétant la procédure, T_m s'étend à T. ■

Lemme 1.5 *Si u vérifie les hypothèses du lemme 1.5, alors il existe η tel que $0 < \eta < 1$ et*

$$\xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2 \leq \frac{1}{\eta} I_1 \leq \frac{1}{\eta} I_2.$$

En réalité, nous pouvons prendre $\eta = 1 - \alpha$.

Preuve: On peut écrire

$$\xi_0 \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} = (1-\eta)\xi_0 \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} + \eta\xi_0 \|\nabla u\|^2 = I_1.$$

Donc si $\eta = 1 - \alpha$, l'identité $\left\{\alpha\xi_0 \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\right\} + \eta\xi_0 \|\nabla u\|^2 = I_1$, la définition de I_2 et (1.11) nous donnent : $\xi_0 \|\nabla u\|^2 \leq \dfrac{1}{\eta} I_1 \leq \dfrac{1}{\eta} I_2$. ■

Maintenant, nous sommes en position de prouver notre premier résultat

Théorème 1.1 *Supposons $u_0 \in \mathcal{W}$ et (1.10) est vérifiée, alors nous avons l'estimation suivant*

$$E(t) \leq E(0)e^{-ct} \ sur \ [0, \infty),$$

pou une constante appropriée $c > 0$.

Preuve: En intégrant (1.6) sur $[t, t+1]$, nous obtenons

$$E(t) - E(t+1) = 2\sigma \int_t^{t+1} \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2\right)^2 ds + 2\nu \int_t^{t+1} \|\Delta u'\|^2 ds. \tag{1.12}$$

Posons

$$E(t) - E(t+1) = D(t)^2. \tag{1.13}$$

Il existe $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$ et $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$ telles que

$$2\nu \|\Delta u'(t_i)\|^2 + 2\sigma \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|\nabla u(t_i)\|^2\right)^2 \leq 4D(t)^2 \quad i = 1, 2. \tag{1.14}$$

En multipliant (1.1) par u et en intégrant les deux membres de l'équation obtenue sur $\Omega \times [t_1, t_2]$, on trouve

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\xi_0 \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \xi_1 \|\nabla u\|^4 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\} dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_{tt} u \, dxdt - \sigma \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \nabla u'.\nabla u. \|\nabla u\|^2 \, dxdt - \nu \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Delta u'.\Delta u \, dxdt.$$

La définition (1.7) nous permet d'écrire

$$\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \leq -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_{tt}udxdt - \nu\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Delta u'.\Delta udxdt \\ -\sigma\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u\|^2\int_\Omega \nabla u'.\nabla udxdt.\end{gathered} \tag{1.15}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité ε-Young, on obtient

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \Delta u'.\Delta u\ dxdt \leq \int_{t_1}^{t_2}\|\Delta u'\|\,\|\Delta u\|\ dt \tag{1.16}$$

et pour $\varepsilon_1 > 0$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u\|^2\int_\Omega \nabla u'.\nabla u.dxdt \leq \varepsilon_1\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u\|^4 dt + \frac{1}{4\varepsilon_1}\int_{t_1}^{t_2}(\nabla u',\nabla u)^2 dt. \tag{1.17}$$

Ensuite, par intégration par parties et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{gathered}-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_{tt}u\ dxdt \leq \left|\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_{tt}u\ dxdt\right| \\ = \left|\int_\Omega\{u'(t_2)\,u(t_2) - u'(t_1)\,u(t_1)\}\,dx - \int_{t_1}^{t_2}\|u'\|^2\ dx\right| \\ \leq \int_\Omega\{|u'(t_2)|\,|u(t_2)| + |u'(t_1)|\,|u(t_1)|\}\,dx + \int_t^{t+1}\|u'\|^2\ dx \\ \leq \left(\int_\Omega |u'(t_2)|^2 dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega |u(t_2)|^2 dx\right)^{\frac12} \\ + \left(\int_\Omega |u'(t_1)|^2 dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega |u(t_1)|^2 dx\right)^{\frac12} + \int_t^{t+1}\|u'\|^2\ dx\end{gathered}$$

et par l'inégalité de Poincaré, nous voyons que

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u_{tt}u\ dxdt \leq B^2\sum_{i=1}^2\|\nabla u'(t_i)\|\,\|\nabla u(t_i)\| + B^2\int_t^{t+1}\|\nabla u'\|^2 dt \tag{1.18}$$

où $B^{-1} = \max\left\{\inf_{\|u\|\neq 0}\frac{\|\nabla u\|}{\|u\|}, \inf_{\|u'\|\neq 0}\frac{\|\nabla u'\|}{\|u'\|}, \inf_{\|\nabla u'\|\neq 0}\frac{\|\Delta u'\|}{\|\nabla u'\|}\right\}$. De (1.15)-(1.18) il résulte que

$$\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \leq B^2\sum_{i=1}^2\|\nabla u'(t_i)\|\,\|\nabla u(t_i)\| + B^2\int_t^{t+1}\|\nabla u'\|^2 dt \\ +\nu\int_{t_1}^{t_2}\|\Delta u'\|\,\|\Delta u\|\,dt + \sigma\varepsilon_1\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u\|^4 dt + \frac{\sigma}{4\varepsilon_1}\int_{t_1}^{t_2}(\nabla u',\nabla u)^2 dt.\end{gathered} \tag{1.19}$$

Notons qu'en vertu de (1.8) et (1.9) nous avons $E(t) \geq 0$.

En outre, nous avons par l'inégalité de Poincaré, (1.8), (1.9), (1.14) et le fait que $E(t)$ est non-croissante que

$$\begin{aligned} \|\nabla u'(t_i)\| \, \|\nabla u(t_i)\| &\leq B^2 \|\Delta u'(t_i)\| \, \|\Delta u(t_i)\| \leq B^2 \sqrt{\frac{2}{\nu}} D(t) \sup_{s \in [t, t+1]} \sqrt{E(s)} \\ &\leq B^2 \sqrt{\frac{2}{\nu}} D(t) E(t)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, par l'inégalité $\varepsilon-$Young, on peut écrire

$$B^2 \sum_{i=1}^{2} \|\nabla u'(t_i)\| \, \|\nabla u(t_i)\| \leq 2B^4 \sqrt{\frac{2}{\nu}} D(t) E(t)^{1/2} \leq \frac{2B^8}{\nu \varepsilon_0} D(t)^2 + \varepsilon_0 E(t).$$

En outre, en vertu de l'inégalité de Poincaré, (1.12) et (1.13), nous voyons que

$$B^2 \int_t^{t+1} \|\nabla u'\|^2 \, dt \leq B^4 \int_t^{t+1} \|\Delta u'\|^2 \, dt \leq \frac{B^4}{2\nu} D(t)^2.$$

En outre, comme $1/2 \leq t_2 - t_1 \leq 1$, les relations (1.12), (1.13) et (1.5) impliquent que

$$\sigma \varepsilon_1 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\|^4 \, dt + \frac{\sigma}{4\varepsilon_1} \int_{t_1}^{t_2} (\nabla u', \nabla u)^2 \, dt \leq \frac{1}{8\varepsilon_1} D(t)^2 + \frac{2\sigma\varepsilon_1}{\xi_1} E(t)$$

et par (1.8), (1.9), (1.12) et le fait que $E(t)$ est non-croissante, pour $\varepsilon_2 > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \nu \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u'\| \, \|\Delta u\| \, dt &\leq \frac{\nu}{4\varepsilon_2} \int_t^{t+1} \|\Delta u'\|^2 \, dt + \nu \varepsilon_2 \sup_{s \in [t, t+1]} \|\Delta u(s)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{8\varepsilon_2} D(t)^2 + \nu \varepsilon_2 E(t). \end{aligned}$$

Tenant compte de toutes ces estimations dans (1.19) on obtient

$$\int_{t_1}^{t_2} I_2(t) dt \leq c_1 D(t)^2 + c_2 E(t) \tag{1.20}$$

où

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{2B^8}{\nu\varepsilon_0} + \frac{B^4}{2\nu} + \frac{1}{8\varepsilon_1} + \frac{1}{8\varepsilon_2} \\
c_2 &= \varepsilon_0 + \frac{2\sigma\varepsilon_1}{\xi_1} + \nu\varepsilon_2.
\end{aligned}
$$

D'autre part, de (1.5) et (1.7) nous avons

$$
E(t) \leq \|u'\|^2 + (\frac{p+4}{p+2})I_2 + \frac{p\xi_0}{p+2}\|\nabla u\|^2
$$

et avec l'aide du lemme 1.5, nous avons

$$
E(t) \leq \|u'\|^2 + \frac{(p+4)\,\eta + p}{(p+2)\,\eta} I_2. \tag{1.21}
$$

Intégration (1.21) de t_1 à t_2, on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|u'\|^2 dt + \frac{(p+4)\,\eta + p}{(p+2)\,\eta} \int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \\
&\leq \frac{B^4}{2\nu} D(t)^2 + \frac{(p+4)\,\eta + p}{(p+2)\,\eta} \int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt.
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Il est clair que, l'intégration de (1.6) sur $[t, t_2]$ donne

$$
E(t) = E(t_2) + 2\sigma \int_t^{t_2} \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + 2\nu \int_t^{t_2} \|\Delta u'\|^2, \tag{1.23}
$$

et puisque $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2}$, alors

$$
\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \geq \frac{1}{2}E(t_2). \tag{1.24}
$$

Puis, à partir de (1.12) - (1.13) et les deux dernières relations (1.23) - (1.24), nous avons

$$
E(t) \leq 2\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt + D(t)^2. \tag{1.25}
$$

Cette relation (1.25), à son tour avec (1.20) et (1.22), donne

$$
\begin{aligned}
E(t) \;\; \leq \;\; & (\frac{B^4}{\nu}+1)D(t)^2+2c_1\frac{(p+4)\,\eta+p}{(p+2)\,\eta}D(t)^2 \\
& +2c_2\frac{(p+4)\,\eta+p}{(p+2)\,\eta}E(t)
\end{aligned}
$$

et donc

$$
\left(1-2c_2\frac{(p+4)\,\eta+p}{(p+2)\,\eta}\right)E(t)\leq\left(\frac{B^4}{\nu}+2c_1\frac{(p+4)\,\eta+p}{(p+2)\,\eta}+1\right)D(t)^2.
$$

Ainsi, en choisissant

$$
\varepsilon_0=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon=\left(1+\frac{2\sigma}{\xi_1}+\nu\right)^{-1}\frac{(p+2)\,(1-\alpha)}{4\,(p+4)\,(1-\alpha)+2p}
$$

nous arrivons à

$$
E(t)\leq c_3D(t)^2
$$

où $c_3=2\left(\frac{B^4}{\nu}+c_1\frac{(p+4)\,\eta+p}{(p+2)\,\eta}+1\right)>1$. C'est-à-dire

$$
E(t)\leq c_3\,(E(t)-E(t+1)) \;\; pour \;\; t\geq 0.
$$

Ainsi, en appliquant le lemme 1.2 avec $\Phi(t)=E(t)$, il s'ensuit que

$$
E(t)\leq E(0)e^{-c_4t} \;\; sur \;\; [0,\infty)\,, \tag{1.26}
$$

où $c_4=\ln\left(\frac{c_3}{c_3-1}\right)$. ■

1.4 Phénomène d'explosion

Dans cette section, nous montrons que la solution du problème (1.1) explose en temps fini. À cette fin, nous utilisons la méthode de "Concavité" de Levine (voir [31, 37,51]). Nous définissons la fonction $G(t)$ par

$$\begin{aligned} G(t) &= \|u(t)\|^2 + \nu \left\{ \int_0^t \|\Delta u\|^2 ds + (T_0 - t) \|\Delta u_0\|^2 \right\} \\ &+ \tfrac{\sigma}{2} \left\{ \int_0^t \|\nabla u\|^4 ds + (T_0 - t) \|\nabla u_0\|^4 \right\} + \beta (t+\tau)^2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

pour $t \in [0, T_0]$, où $T_0 > 0$, $\beta \geq 0$, et $\tau > 0$ sont des constantes positives qui seront précisées plus tard. Nous commençons par démontrer la propriété suivante

Proposition 1.1 *Si $E(0) < 0$ et $p > 2$, la fonctionnelle $G(t)$ satisfait*

$$G(t)G''(t) - \left(\frac{p-2}{4} + 1 \right) G'(t)^2 \geq 0 \text{ on } [0, T_0].$$

Preuve: Dérivant la fonction (1.27) par rapport à t le long des solutions de (1.1), on obtient

$$G'(t) = 2 \left\{ (u, u') + \nu \int_0^t (\Delta u, \Delta u') ds + \frac{\sigma}{4} \int_0^t \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^4 ds + \beta (t+\tau) \right\}$$

et

$$G''(t) = 2 \left\{ \|u'\|^2 + \|u\|_{p+2}^{p+2} - \xi_0 \|\nabla u\|^2 - \xi_1 \|\nabla u\|^4 - \|\Delta u\|^2 + \beta \right\}. \tag{1.28}$$

En vertu des expressions (1.5) et (1.6) nous avons

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} = \frac{p+2}{2} \left(\|u'\|^2 + \xi_0 \|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2} \|\nabla u\|^4 + \|\Delta u\|^2 - E(t) \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \|u\|_{p+2}^{p+2} &= \frac{p+2}{2} \left(\|u'\|^2 + \xi_0 \|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2} \|\nabla u\|^4 + \|\Delta u\|^2 - E(0) \right. \\ &\left. + \int_0^t \left\{ \frac{\sigma}{2} \left(\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right)^2 + 2\nu \|\Delta u'\|^2 \right\} ds \right). \end{aligned} \tag{1.29}$$

Tenant compte de (1.29) dans (1.28) on obtient

$$\tfrac{1}{2}G''(t) = \tfrac{p+2}{2}\int_0^t \left\{ \tfrac{\sigma}{2}\left(\tfrac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + 2\nu\|\Delta u'\|^2 \right\} ds + \left(\tfrac{p}{2}+2\right)\|u'\|^2$$
$$+\tfrac{p}{2}\xi_0\|\nabla u\|^2 + \tfrac{p-2}{4}\xi_1\|\nabla u\|^4 + \tfrac{p}{2}\|\Delta u\|^2 + \beta - \left(\tfrac{p}{2}+1\right)E(0).$$

Soit $\beta = -E(0)$ et $p > 2$ alors

$$\tfrac{1}{2}G''(t) = \left(\tfrac{p}{2}+1\right)\int_0^t \left\{ \tfrac{\sigma}{2}\left(\tfrac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + 2\nu\|\Delta u'\|^2 \right\} ds + \left(\tfrac{p}{2}+2\right)\|u'\|^2$$
$$+\tfrac{p}{2}\xi_0\|\nabla u\|^2 + \tfrac{p-2}{4}\xi_1\|\nabla u\|^4 + \tfrac{p}{2}\|\Delta u\|^2 + \left(\tfrac{p}{2}+2\right)\beta.$$

Ainsi on trouve

$$\frac{1}{2}G''(t) \geq \left(\frac{p}{2}+1\right)\left\{ \|u'\|^2 + \beta + \int_0^t \left[\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + \nu\|\Delta u'\|^2 \right] ds \right\} \geq 0.$$

Si nous choisissons τ assez grande de sorte que $G'(0) = 2\{(u_0, u_1) + \beta\tau\} > 0$. Alors G'', $G'G$ et G sont strictement positives. Désignons par

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \|u(t)\|^2 + \int_0^t \left\{ \frac{\sigma}{2}\|\nabla u\|^4 + \nu\|\Delta u'\|^2 \right\} ds + \beta(t+\tau)^2, \\
\mathbb{B} &= (u, u') + \nu\int_0^t (\Delta u, \Delta u')\, ds + \frac{\sigma}{4}\int_0^t \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^4 ds + \beta(t+\tau), \\
\mathbb{C} &= \|u'\|^2 + \nu\int_0^t \|\Delta u'\|^2 ds + \frac{\sigma}{2}\int_0^t \left(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 ds + \beta.
\end{aligned}$$

De toute évidence,

$$\mathbb{A} \leq G(t) \;\; et \;\; \mathbb{C} \leq G''(t)/(p+2) \;\; et \;\; \mathbb{B} = G'(t)/2. \tag{1.30}$$

Maintenant, nous observons que, pour tous $(\rho, \eta) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$

$$\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2$$

$$= \rho^2 \|u(t)\|^2 + \tfrac{\rho^2\sigma}{2} \int_0^t \|\nabla u\|^4 ds + \rho^2 \int_0^t \nu \|\Delta u\|^2 ds + \rho^2 \beta (t+\tau)^2$$

$$+2\rho\eta (u, u') + 2\rho\eta\nu \int_0^t (\Delta u, \Delta u') ds + \tfrac{\rho\eta\sigma}{2} \int_0^t \tfrac{d}{dt} \|\nabla u\|^4 ds + 2\rho\eta\beta (t+\tau)$$

$$+\eta^2 \|u'\|^2 + \eta^2 \nu \int_0^t \|\Delta u'\|^2 ds + \tfrac{\eta^2\sigma}{2} \int_0^t \left(\tfrac{d}{dt} \|\nabla u\|^2\right)^2 ds + \eta^2 \beta$$

ou

$$\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2 = \left\{\rho^2 \|u(t)\|^2 + 2(\rho u, \eta u') + \eta^2 \|u'\|^2\right\}$$

$$+\nu \int_0^t \left\{\rho^2 \|\Delta u\|^2 + 2(\rho\Delta u, \eta\Delta u') + \eta^2 \|\Delta u'\|^2\right\} ds$$

$$+\tfrac{\sigma}{2} \int_0^t \left\{\rho^2 \|\nabla u\|^4 + 2\rho \|\nabla u\|^2 \eta(\tfrac{d}{dt} \|\nabla u\|^2) + \eta^2(\tfrac{d}{dt} \|\nabla u\|^2)^2\right\} ds$$

$$+\beta \left\{\rho^2 (t+\tau)^2 + 2\rho\eta (t+\tau) + \eta^2\right\}.$$

Cette identité peut être écrit sous la forme

$$\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2 = \int_\Omega [\rho u(t) + \eta u'(t)]^2 dx + \beta [\rho (t+\tau) + \eta]^2$$

$$+\nu \int_0^t \int_\Omega [\rho\Delta u(t) + \eta\Delta u'(t)]^2 dxds + \tfrac{\sigma}{2} \int_0^t \left[\rho \|\nabla u\|^2 + \eta(\tfrac{d}{dt} \|\nabla u\|^2)\right]^2 ds.$$

Il est facile de voir que $\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2 \geq 0$ et

$$\mathbb{B}^2 - \mathbb{A}\mathbb{C} \leq 0. \tag{1.31}$$

Ainsi, on obtient de (1.30) et (1.31) que $\frac{G(t)G''(t)}{p+2} - \frac{1}{4}G'(t)^2 \geq 0$ ou

$$G(t)G''(t) - (\frac{p-2}{4} + 1)G'(t)^2 \geq 0 \; sur \; [0, T_0] \tag{1.32}$$

La preuve de la proposition 1.1 est maintenant complète. ■

Ensuite, nous avons le théorème suivant.

Théorème 1.2 *Supposons que $p > 2$ et que $E(0) < 0$, alors la solution u locale du problème (1.1) ne peut être continuée au delà d'un temps fini $T > 0$. En outre, le temps final T_m est* *estimée par*

$$
\begin{aligned}
& T_m \leq [(2-p)E(0)]^{-1} \\
& \times \left[\{(2\nu \|\Delta u_0\|^2 - \sigma \|\nabla u_0\|^4 - (p-2))^2 + (p-2)(-E(0)) \|u_0\|^2\}^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. + 2\nu \|\Delta u_0\|^2 + \sigma \|\nabla u_0\|^4 - (p-2)(u_0, u_1) \right].
\end{aligned} \tag{1.33}
$$

Preuve: L'inégalité (1.32) nous permet de déduire que $\left(G(t)^{-\frac{p-2}{4}-1}G'(t)\right)' \geq 0$. Ainsi, par intégration on obtient

$$
0 \leq G(t)^{-\frac{p-2}{4}} \leq \frac{4G(0) - (p-2)G'(0)t}{4G(0)^{\frac{p-2}{4}+1}}
$$

d'où on tire

$$
G(t) \geq \left\{ \frac{4G(0)^{\frac{p-2}{4}+1}}{4G(0) - (p-2)G'(0)t} \right\}^{\frac{4}{p-2}}.
$$

Si nous choisissons τ comme dans la Proposition 1.1 et T_0 de telle sorte que $0 < \dfrac{4G(0)}{(p-2)G'(0)} \leq T_0$, alors $\lim_{t \to T_0 -} G(t) = +\infty$, c'est à dire

$$
\lim_{t \to T_0 -} \left\{ \|u(t)\|^2 + \int_0^t \left\{ \frac{\sigma}{2} \|\nabla u\|^4 + \nu \|\Delta u\|^2 \right\} ds \right\} = +\infty. \tag{1.34}
$$

Ainsi, il existe un T tel que

$$
0 < T \leq T_0 \textit{ et } \lim_{t \to T-} \left\{ \|\nabla u\|^4 + \|\Delta u\|^2 \right\} = +\infty. \tag{1.35}
$$

En effet, si $\lim_{t \to T-} \|u(t)\|^2 = +\infty$ alors $\lim_{t \to T-} \left\{ \|\nabla u\|^4 + \|\Delta u\|^2 \right\} = +\infty$. D'autre part, si $\lim_{t \to T-} \|u(t)\|^2 < +\infty$, alors nous voyons de (1.34) que

$$
\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ \|\nabla u\|^4 + \|\Delta u\|^2 \right\} T_0 \geq \lim_{t \to T-} \int_0^t \left\{ \|\nabla u\|^4 + \|\Delta u\|^2 \right\} ds = +\infty,
$$

ce qui établit (1.35). Enfin, il nous reste à démontrer l'estimation (1.33) énoncée dans le théorème. Comme $E(0) < 0$ et τ est suffisamment grand, nous avons

$$G'(0) = 2\left\{(u_0, u_1) + (-E(0))\,\tau\right\} > 0$$

et $0 < \dfrac{4G(0)}{(p-2)G'(0)} \leq T_0$ si

$$T_0 \geq \frac{2\left\{\|u_0\|^2 + (-E(0))\,\tau^2\right\}}{(p-2)\left\{(u_0, u_1) + (-E(0))\,\tau\right\} - 2\nu\left\|\Delta u_0\right\|^2 - \sigma\left\|\nabla u_0\right\|^4} \equiv T\left(\tau\right).$$

En outre, on trouve $T\left(\tau\right)$ puis on prend son minimum sur l'intervalle $(0, +\infty)$ atteint en

$$\begin{aligned}\tau = \tau_0 = \tfrac{(-E(0))^{-1}}{(p-2)} &\left[\left\{\left(2\nu\left\|\Delta u_0\right\|^2 + \sigma\left\|\nabla u_0\right\|^4 - (p-2)\left(u_0, u_1\right)\right)^2\right.\right. \\ &\left.\left.+ (p-2)\left(-E(0)\right)\|u_0\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} + 2\nu\left\|\Delta u_0\right\|^2 + \sigma\left\|\nabla u_0\right\|^4 - (p-2)\left(u_0, u_1\right)\right].\end{aligned}$$

Donc, si nous prenons $T = T\left(\tau_0\right)$, nous arrivons à la conclusion que l'énoncé (1.33) dans le théorème est vrai. La preuve du théorème 1.2 est maintenant terminée. ■

Chapitre 2

Stabilité exponentielle et explosion en temps fini pour un problème avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor

2.1 Introduction

Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques présentent un amortissement naturel qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux pour garder la mémoire initiale. De point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiele. L'objet de ce chapitre est d'étudier le problème à valeurs initiales suivantes

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u(t)\right\|^2 + \sigma\left(\nabla u(t), \nabla u_t(t)\right)\right)\Delta u \\ + \int_0^t h(t-s)\,\Delta u\, ds = |u|^p u \; dans\; \Omega \times [0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \;\; et \; u_t(x,0) = u_1(x) \;\; dans\; \Omega \\ u(x,t) = 0 \; sur \; \Gamma \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. Ici h représente le noyau de la mémoire. Tous les paramètres ξ_0, ξ_1, σ et p sont supposés être des constantes positives.

Lorsque $\xi_1 = \sigma = h = 0$, l'équation (2.1) se réduit à une équation d'onde non linéaire qui a été largement étudiée, et plusieurs résultats concernant l'existence et la non-existence ont été établis $[5, 21, 25, 31, 34]$. Lorsque ξ_0,$\xi_1 \neq 0$, $\sigma = h = 0$, l'équation (2.1) se réduit à l'équation bien connue de Kirchhoff qui a été introduite dans [36] pour décrire les vibrations non linéaires d'une corde élastique. L'équation d'origine de Kirchhoff est

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left\{ p_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

où $0 < x < L$, $t \geq 0$, $u(x,t)$ est le déplacement vertical du point x à l' instant t, E le module de Young de matériau, ρ la masse volumique, h la surface de la section de la corde, L la longueur de la corde, p_0 la tension initiale de la corde et f la force extérieure. Kirchhoff [36] a été le premier qui a étudié les oscillations des cordes tendues et les plaques. La question de l'existence et non-existence de solutions a été discutée par de nombreux auteurs (voir $[38, 40, 47, 48, 50-51]$).

Le modèle entre les mains, avec $\sigma \neq 0$ et $h = 0$, a été initialement proposé par Balakrishnan et Taylor en 1989 [4] et Bass et Zes [10]. Elle est liée à l'équation de vibrations aéroélastiques et au problème de débordement. Jusqu'à présent, il a été étudié par Y. You [71], RH Clark [15] et Ne. Tatar et A. Zaraï [66]. Dans le cas où $\sigma = 0$ l'équation (2.1) décrit le mouvement d'un solide déformable avec un effet héréditaire. Ce phénomène se produit dans de nombreuses situations pratiques telles qu'en viscoélasticité. Encore une fois, on peut trouver plusieurs articles dans la littérature en particulier sur la stabilité polynomiale, exponentielle, voir [2,11,13,14,21,25,16,40,42,53].

Une question importante du comportement asymptotique des solutions a été soulevée par Clark dans [15]. Il a prouvé que la solution décroit exponentiellement à l'état d'équilibre à condition que nous ayons une dissipation forte de la forme Δu_t. Dans ce chapitre nous avons amélioré ce résultat en établissant des conditions suffisantes donnant la stabilité exponentielle des solutions sous une dissipation faible, notamment la dissipation viscoélastique due à la matière elle-même et en présence d'une source non linéaire. Cette source non linéaire, bien sûr, sera en concurrence avec les deux types de dissipation. En outre des conditions suffisantes assurant l'explosion en temps fini sont établis. Plus précisément, en utilisant les ensembles stables on montre que la solution décroît de manière exponentielle à l'état stationnaire. Pour le second résultat, on montrera que la solution explose en un temps fini pour des données initiales assez grandes.

2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons des lemmes bien connus qui seront nécessaires plus tard. Premièrement, nous allons simplifier la notation comme suit $\|.\|_p = \|.\|_{L^p(\Omega)}$ où $L^p(\Omega)$ est l'espace habituel de Lebesgue et pour $p = 2$, nous allons omettre l'indice 2, qui est $\|.\| = \|.\|_2$. Le produit scalaire dans L^2 est noté par $(.,.)$.

Lemme 2.1 *(Voir [32]). Soit $E(t)$ une fonction non croissante et non négative définie sur $[0, \infty)$, si*

$$\int_S^\infty E(t)dt = CE(S), \ \forall S \geq S_0,$$

pour des constantes S_0, $C > 0$, alors

$$E(t) \leq E(0) \exp\left(1 - \frac{t}{S_0 + C}\right), \ \forall t \geq 0.$$

Lemme 2.2 [38] *Si $J(t)$ est une fonction non-croissante sur $[t_0, \infty)$; $t_0 \geq 0$ et satisfait l'inégalité différentielle*

$$J'(t)^2 \geq a + bJ(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} \ \text{pour } t_0 \geq 0 \text{ et } \gamma > 0,$$

où $a > 0$, $b < 0$, alors il existe un temps fini T tel que

$$\lim_{t\to T} J(t) = 0$$

et la borne supérieure de T est estimée par

$$T \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln\left[\sqrt{\frac{a}{-b}}\left(\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)\right)^{-1}\right].$$

ici $J(t_0) < \min\left\{1, \ \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$.

Maintenant, nous énonçons les hypothèses générales

(A1) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction bornée de classe C^1 satisfaisant

$$\xi_0 - \int_0^\infty h(s)\, ds = \ell > 0,$$

(A2) Il existe une constante positive k telle que

$$h'(t) \leq -kh(t), \ t > 0.$$

2.3 Décroissance exponentielle

Dans cette section nous allons démontrer la décroissance exponentielle des solutions du problème (2.1). Nous définissons l'énergie du problème (2.1) par

$$\begin{aligned} E(t) &= \|u'\|^2 + (\xi_0 + \tfrac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 + (h\square\nabla u)(t) \\ &- \textstyle\int_0^t h(s)\|\nabla u(t)\|^2 ds - \frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}, \ t > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

où

$$(h\square\nabla u)(t) = \int_0^t h(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2\, dxds.$$

Lemme 2.3 *$E(t)$ est une fonction non-croissante sur $[0, \infty)$ et*

$$E'(t) = -2\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + (h'\square\nabla u)(t) - h(t)\|\nabla u\|^2 \leq 0, \ t > 0. \tag{2.3}$$

Preuve: En multipliant l'équation (2.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{\|u'\|^2 + (\xi_0 + \tfrac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 - \tfrac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}\right\} \\ &+\sigma\left(\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 - \textstyle\int_\Omega \nabla u' \int_0^t h(t-s)\nabla u\, dsdx = 0. \end{aligned}$$

On remarque que

$$-\int_\Omega \nabla u' \int_0^t h(t-s)\nabla u \, dsdx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(h\Box\nabla u)(t) - \int_0^t h(s)\,ds \, \|\nabla u(t)\|^2\right]$$
$$-\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) + \frac{1}{2}h(t)\|\nabla u\|^2$$

où

$$(h\Box\nabla u)(t) = \int_0^t h(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 \, dxds.$$

La relation (2.3) suit à la fois. ■

Maintenant, soit

$$F(t) = (\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4 + (h\Box\nabla u)(t) - \frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2} \tag{2.4}$$

alors

$$E(t) = \|u'\|^2 + F(t). \tag{2.5}$$

Nous définissons le puits de potentiel par

$$\mathcal{W} = \left\{u \;/\; I(u(t)) := \ell\|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} > 0\right\} \cup \{0\}.$$

Lemme 2.4 *Soit u la solution de (1.1). Si $u_0 \in \mathcal{W}$ et*

$$\alpha = \frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\ell^{\frac{p+2}{2}}}\left(\frac{p+2}{p}E(0)\right)^{p/2} < 1, \tag{2.6}$$

alors $u(t) \in \mathcal{W}$, pour $t \in [0,T]$. Ici $C(p,\Omega)$ est la constante de Sobolev-Poincaré.

Preuve: Soit $u_0 \in \mathcal{W}$, alors $I(u_0) > 0$. Par continuité, il existe $T_m \leq T$ telle que $I(u(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T_m]$. Par conséquent, à partir de (2.4), (2.5) et le lemme 2.3, nous avons

$$\ell\|\nabla u\|^2 \leq (\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\|\nabla u\|^2 \leq \frac{p+2}{p}F(t) \leq \frac{p+2}{p}E(t) \leq \frac{p+2}{p}E(0). \tag{2.7}$$

Cette relation avec le lemme 0.3, impliquent que, pour $t \in [0, T_m]$,

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq C(p, \Omega)^{p+2} \|\nabla u\|^{p+2} \leq \frac{C(p, \Omega)^{p+2}}{\ell} \left(\frac{p+2}{p\ell} E(0)\right)^{p/2} \ell \|\nabla u\|^2.$$

Il vient de notre hypothèse sur α que

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq \alpha\ell \|\nabla u\|^2 < \alpha(\xi_0 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u\|^2 < \ell \|\nabla u\|^2, \ \forall t \in [0, T_m]. \tag{2.8}$$

Donc

$$I(t) > 0, \forall t \in [0, T_m],$$

(inégalité stricte) ce qui signifie que $u(t) \in \mathcal{W}, \ \forall t \in [0, T_m]$. En répétant la procédure, T_m s'étend de manière croissante jusqu'à ce qu'il atteigne T. ■

Maintenant, oon démontre notre théorème.

Théorème 2.1 *Supposons $u_0 \in \mathcal{W}$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ et (2.6) est vérifiée, alors nous avons l'estimation suivante*

$$E(t) \leq E(0) \exp\left(1 - \bar{C}t\right), \ \forall t \geq 0.$$

pou une constante appropriée $\bar{C} > 0$.

Preuve: Intégrons (2.2) sur $[S, T]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_S^T E(t)dt = \int_S^T \|u'\|^2 dt + \tfrac{\xi_1}{2} \int_S^T \|\nabla u\|^4 dt + \int_S^T (h\Box\nabla u)(t)\, dt \\ + \int_S^T (\xi_0 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u(t)\|^2 dt - \tfrac{2}{p+2} \int_S^T \|u\|_{p+2}^{p+2} dt. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nous allons maintenant utiliser des techniques de multiplicateurs pour estimer tous les termes de (2.9). Multipliant les deux membres de l'équation (2.1) par u et intégrant sur $\Omega \times [S, T]$, nous obtenons

$$\int_S^T \{(\xi_0 - \int_0^t h(s)\, ds) \|\nabla u\|^2 + \xi_1 \|\nabla u\|^4 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\} dt$$

$$= -\int_S^T \int_\Omega u'' u dx dt - \sigma \int_S^T \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \nabla u'. \nabla u. dx dt$$

$$+ \int_S^T \int_\Omega \nabla u(t). \int_0^t h(t-s) [\nabla u(s) - \nabla u(t)]\, ds dx dt.$$

par intégration par parties on obtient

$$-\int_S^T \int_\Omega u'' u dx dt = \int_S^T \|u'\|^2 dt - \int_\Omega u'(t) u(t)|_S^T dx$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \int_S^T (\xi_0 - \int_0^t h(s) ds) \|\nabla u(t)\|^2 dt = \int_S^T \|u'\|^2 dt \\ -\sigma \int_S^T \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \nabla u' . \nabla u dx dt - \int_\Omega u'(t) u(t)|_S^T dx + \int_S^T \|u\|_{p+2}^{p+2} dt \\ -\xi_1 \int_S^T \|\nabla u\|^4 dt + \int_S^T \int_\Omega \nabla u(t) . \int_0^t h(t-s) [\nabla u(s) - \nabla u(t)] ds dx dt. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Nous commençons par le terme mémoire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité ε-Young, on obtient

$$\begin{aligned} \int_S^T \int_\Omega \nabla u(t) . \int_0^t h(t-s) [\nabla u(s) - \nabla u(t)] ds dx dt \\ \leq \int_S^T \|\nabla u(t)\| \int_0^t h(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\| ds dx dt \\ \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \int_S^T \|\nabla u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_S^T \left(\int_0^t h(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\| ds \right)^2 dt \end{aligned} \tag{2.11}$$

pour un certain $\varepsilon_0 > 0$.

Rappelant que $h'(t) \leq -kh(t)$, et en utilisant (2.3), nous voyons que

$$\begin{aligned} \int_S^T \left(\int_0^t h(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\| ds \right)^2 dt \\ \leq \int_S^T \left(\int_0^t h(s) ds \right) \left(\int_0^t h(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds \right) dt \\ \leq \left(\int_0^\infty h(s) ds \right) \int_S^T \left(\int_0^t h(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds \right) dt \\ \leq -\frac{1}{k} \left(\int_0^\infty h(s) ds \right) \int_S^T \left(\int_0^t h'(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds \right) dt \\ \leq -\frac{1}{k} \left(\int_0^\infty h(s) ds \right) \int_S^T E'(t) dt \leq \frac{\xi_0 - \ell}{k} E(S). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Par conséquent, de (2.11) et (2.12) il en découle que

$$\begin{aligned} &\int_S^T \int_\Omega \int_0^t h\,(t-s)\,\nabla u\,(t)\,[\nabla u\,(s) - \nabla u\,(t)]\,dsdxdt \\ &\quad \leq \tfrac{\varepsilon_0}{2} \int_S^T \|\nabla u(t)\|^2\,dt + \tfrac{\xi_0-\ell}{2\varepsilon_0 k} E(S). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ensuite, nous notons que de (2.4) nous avons

$$F(t) \geq \frac{p}{p+2}\left\{(\xi_0 - \int_0^t h\,(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2 + (h\Box\nabla u)\,(t)\right\} + \frac{\xi_1}{2}\,\|\nabla u\|^4 \tag{2.14}$$

ce qu'il implique

$$\|\nabla u\|^2 \leq \frac{(p+2)}{p(\xi_0 - \int_0^t h\,(s)\,ds)} E(t) \tag{2.15}$$

et par conséquent, à l'aide de l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|^2 \leq B\,\|\nabla u\|^2 \leq \frac{(p+2)B}{p\ell} E(t) \tag{2.16}$$

où B est la constante de Poincaré.

Par application de l'inégalité (2.16) sachant que $F(t) \geq 0$, il vient

$$\left|\int_\Omega u'\,(t)\,u\,(t)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}\,\|u'\|^2 + \frac{(p+2)B}{2p\ell} E(t) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(p+2)B}{p\ell}\right) E(t). \tag{2.17}$$

Ensuite, à partir de (2.17) et le fait que $E(t)$ est non-croissante, on déduit que

$$-\int_\Omega u'\,(t)\,u\,(t)|_S^T\,dx \leq \left(1 + \frac{(p+2)B}{p\ell}\right) E(S). \tag{2.18}$$

Maintenant, en utilisant (2.8), il est facile de voir que

$$\int_S^T \|u\|_{p+2}^{p+2}\,dt \leq \alpha \int_S^T \ell\,\|\nabla u\|^2\,dt < \alpha \int_S^T (\xi_0 - \int_0^t h\,(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2\,dt \tag{2.19}$$

et pour $\varepsilon_1 > 0$

$$-\sigma \int_S^T \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \nabla u'.\nabla u.dxdt \leq \frac{\sigma\varepsilon_1}{2} \int_S^T \|\nabla u\|^4\,dt + \frac{\sigma}{2\varepsilon_1} \int_S^T (\nabla u', \nabla u)^2\,dt.$$

Grâsse à la formule (2.3) on a

$$-\sigma \int_S^T \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \nabla u'.\nabla u dx dt \leq \frac{\sigma\varepsilon_1}{2} \int_S^T \|\nabla u\|^4 dt + \frac{1}{4\varepsilon_1} E(S). \tag{2.20}$$

Tenant compte des estimations (2.13) et (2.18) - (2.21) dans (2.10), il vient

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_S^T (\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds) \|\nabla u(t)\|^2 dt \\
&\leq \textstyle\int_S^T \|u'\|^2 dt + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_S^T \|\nabla u(t)\|^2 dt + \alpha \int_S^T (\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds) \|\nabla u\|^2 dt \\
&+ \textstyle\frac{\sigma\varepsilon_1}{2} \int_S^T \|\nabla u\|^4 dt + \dfrac{1}{4\varepsilon_1} E(S) + \left(1 + \frac{(p+2)B}{p\ell} + \frac{\xi_0 - \ell}{2\varepsilon_0 k}\right) E(S) - \xi_1 \int_S^T \|\nabla u\|^4 dt.
\end{aligned}$$

Si on pose $\varepsilon_0 = (1-\alpha)(\xi_0 - \int_0^\infty h(s)\,ds)$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_S^T (\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds) \|\nabla u(t)\|^2 dt \\
&\leq \textstyle\frac{2}{1-\alpha} \int_S^T \|u'\|^2 dt + \frac{2}{1-\alpha}(\frac{\sigma\varepsilon_1}{2} - \xi_1) \int_S^T \|\nabla u\|^4 dt \\
&+ \textstyle\frac{2}{1-\alpha} \left(1 + \dfrac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{(p+2)B}{p\ell} + \frac{\xi_0 - \ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right) E(S).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Maintenant, en multipliant les deux membres de l'équation (2.1) par $\int_0^t h(t-s)[u(s) - u(t)]\,ds$ et en intégrant sur $\Omega \times [S, T]$, on trouve

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_S^T \int_\Omega u'' \int_0^t h(t-s)[u(s) - u(t)]\,ds dx dt \\
&- \textstyle\int_S^T \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))\right) \\
&\times \textstyle\int_\Omega \Delta u \int_0^t h(t-s)[u(s) - u(t)]\,ds dx dt \\
&+ \textstyle\int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\Delta u\ ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)[u(s) - u(t)]\,ds\right) dx dt \\
&= \textstyle\int_S^T \int_\Omega |u|^p u \int_0^t h(t-s)[u(s) - u(t)]\,ds dx dt.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_S^T \int_\Omega u'' \int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt \\
&\textstyle= \int_\Omega u'(t) \int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdx\Big|_S^T \\
&\textstyle- \int_S^T \int_\Omega u'(t) \int_0^t h'(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt + \int_S^T \left(\int_0^t h(s)\,ds\right) \|u'(t)\|^2\,dt
\end{aligned}$$

et une substitution de (2.22) donne

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int_S^T \left(\int_0^t h(s)\,ds\right) \|u'(t)\|^2\,dt = \int_S^T \int_\Omega |u|^p\, u \int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt \\
&\textstyle- \int_\Omega u'(t) \int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdx\Big|_S^T \\
&\textstyle+ \int_S^T \int_\Omega u'(t) \int_0^t h'(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt \\
&\textstyle+ \int_S^T \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))\right) \\
&\textstyle\times \int_\Omega \Delta u \int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt \\
&\textstyle- \int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta u\ ds\right) \left(\int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,ds\right) dxdt.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

En outre, en vertu de (2,5) et (2,14), nous avons

$$\begin{aligned}
&\textstyle\left|\int_\Omega u'(t) \int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdx\right| \\
&\textstyle\leq \frac{\varepsilon_2}{2} \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\,|u(s)-u(t)|\,ds\right)^2 dx \\
&\textstyle\leq \frac{\varepsilon_2}{2} E(t) + \frac{B^2}{2\varepsilon_2} \left(\int_0^t h(s)\,ds\right) \int_0^t h(t-s)\,\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2\,ds \\
&\textstyle\leq \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2 + \frac{B^2(\xi_0-\ell)}{k\varepsilon_2}\right) E(t) \leq \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2 + \frac{B^2(\xi_0-\ell)}{k\varepsilon_2}\right) E(S)
\end{aligned}$$

pour un certain $\varepsilon_2 > 0$. Alors,

$$\int_\Omega u'(t) \int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdx\Big|_S^T \leq \left(\varepsilon_2 + \frac{B^2(\xi_0-\ell)}{k\varepsilon_2}\right) E(S). \tag{2.24}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega u'(t) \int_0^t h'(t-s)\left[u(s)-u(t)\right] dsdxdt \\
&\leq \tfrac{\varepsilon_3}{2} \int_S^T \left\|u'(t)\right\|^2 dt + \tfrac{1}{2\varepsilon_3} \int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t \left|h'(t-s)\right| \left|u(s)-u(t)\right| ds\right)^2 dxdt
\end{aligned}$$

pour un certain $\varepsilon_3 > 0$. Puisque $h'(t) \leq 0$, la relation (2.3) implique que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\int_0^t \left|h'(t-s)\right| \left|u(s)-u(t)\right| ds\right)^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^t \sqrt{-h'(t-s)}\sqrt{-h'(t-s)} \left|u(s)-u(t)\right| ds\right)^2 dx \\
&\leq -\int_0^t h'(s)\, ds \int_0^t \left(-h'(t-s)\right) \left\|u(s)-u(t)\right\|^2 ds \\
&\leq -h(0) \int_0^t h'(t-s) \left\|u(s)-u(t)\right\|^2 ds \\
&\leq -h(0)B \int_0^t h'(t-s) \left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds \\
&\leq -h(0)B \left(h' \square \nabla u\right)(t) \leq -h(0)BE'(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega u'(t) \int_0^t h'(t-s)\left[u(s)-u(t)\right] dsdxdt \\
&\leq \tfrac{\varepsilon_3}{2} \int_S^T \left\|u'(t)\right\|^2 dt + \tfrac{h(0)B}{2\varepsilon_3} E(S).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u(t)\right\|^2 + \sigma\left(\nabla u(t), \nabla u_t(t)\right)\right) \\
&\times \int_\Omega \Delta u \int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right] dsdxdt \\
&= -\xi_0 \int_S^T \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right] dsdxdt \\
&- \int_S^T \xi_1 \left\|\nabla u(t)\right\|^2 \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right] dsdxdt \\
&- \int_S^T \sigma\left(\nabla u(t), \nabla u_t(t)\right) \int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right] dsdxdt.
\end{aligned}$$

L'application de l'inégalité ε-Young et la relation (2.7) et (2.3) donne

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2 + \sigma\left(\nabla u\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right)\right) \\
&\times \int_\Omega \Delta u \int_0^t h\left(t-s\right)\left[u\left(s\right) - u\left(t\right)\right] dsdxdt \\
&\leq -\xi_0 \int_S^T \int_\Omega \nabla u \int_0^t h\left(t-s\right)\left[\nabla u\left(s\right) - \nabla u\left(t\right)\right] dsdxdt + \tfrac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T \left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt \\
&+ \frac{\xi_1^2 E(0)^2 (p+2)^2 (\xi_0 - \ell)}{2(p\ell)^2 \varepsilon_4 k} E(S) + \sigma^2 \tfrac{\varepsilon_5}{2}\int_S^T \left(\nabla u, \nabla u'\right)^2 \left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt \\
&+ \tfrac{1}{2\varepsilon_5}\int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h\left(t-s\right)\left[\nabla u\left(s\right) - \nabla u\left(t\right)\right] ds\right)^2 dxdt
\end{aligned} \tag{2.26}$$

pour ε_4, $\varepsilon_5 > 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2 + \sigma\left(\nabla u\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right)\right) \\
&\times \int_\Omega \Delta u \int_0^t h\left(t-s\right)\left[u\left(s\right) - u\left(t\right)\right] dsdxdt \\
&\leq -\xi_0 \int_S^T \int_\Omega \nabla u \int_0^t h\left(t-s\right)\left[\nabla u\left(s\right) - \nabla u\left(t\right)\right] dsdxdt + \tfrac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T \left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt \\
&+ \frac{\xi_1^2 E(0)^2 (p+2)^2 (\xi_0 - \ell)}{2(p\ell)^2 \varepsilon_4 k} E(S) + \left(\frac{\varepsilon_5 \sigma (p+2) E(0)}{4p\ell} + \frac{(\xi_0 - \ell)}{2\varepsilon_5 k}\right) E(S).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
&-\int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h\left(t-s\right)\Delta u ds\right)\left(\int_0^t h\left(t-s\right)\left[u\left(s\right) - u\left(t\right)\right] ds\right) dxdt \\
&= \int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h\left(t-s\right)\nabla u ds\right).\left(\int_0^t h\left(t-s\right)\left[\nabla u\left(s\right) - \nabla u\left(t\right)\right] ds\right) dxdt \\
&= \int_S^T \left(\int_0^t h\left(s\right) ds\right)\int_\Omega \nabla u.\left(\int_0^t h\left(t-s\right)\left[\nabla u\left(s\right) - \nabla u\left(t\right)\right] ds\right) dxdt \\
&\quad + \int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h\left(t-s\right)\left[\nabla u\left(s\right) - \nabla u\left(t\right)\right] ds\right)^2 dxdt.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ainsi, grâce à (2.12) nous avons

$$\begin{aligned}
&-\int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h\left(t-s\right)\Delta u ds\right)\left(\int_0^t h\left(t-s\right)\left[u\left(s\right) - u\left(t\right)\right] ds\right) dxdt \\
&\leq \int_S^T \left(\int_0^t h\left(s\right) ds\right)\int_\Omega \nabla u\left(t\right)\left(\int_0^t h\left(t-s\right)\left[\nabla u\left(s\right) - \nabla u\left(t\right)\right] ds\right) dxdt \\
&\quad + \tfrac{(\xi_0 - \ell)}{k} E(S).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Le premier terme du membre droit de (2.29) avec le premier terme du membre droit de (2.27), peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\int_0^t h(s)\,ds-\xi_0\right)\int_\Omega \nabla u(t)\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&\le \int_S^T \left(\xi_0-\int_0^t h(s)\,ds\right)\left|\int_\Omega \nabla u(t)\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dx\right|dt\\
&\le \xi_0\int_S^T \left|\int_\Omega \nabla u(t)\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dx\right|dt
\end{aligned}$$

et par (2.13) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\int_0^t h(s)\,ds-\xi_0\right)\int_\Omega \nabla u(t)\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&\le \tfrac{\xi_0\varepsilon_4}{2}\int_S^T \|\nabla u(t)\|^2\,dt+\tfrac{\xi_0(\xi_0-\ell)}{2\varepsilon_4 k}E(S).
\end{aligned}\tag{2.30}$$

Maintenant, de (2.27) - (2.30), nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2+\sigma\left(\nabla u(t),\nabla u_t(t)\right)\right)\\
&\times\int_\Omega \Delta u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\
&-\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&\le(\xi_0-\ell)\left(\frac{1}{k}+\frac{\xi_1^2E(0)^2(p+2)^2}{2(p\ell)^2\varepsilon_4 k}+\frac{\varepsilon_5\sigma(p+2)E(0)}{4p\ell(\xi_0-\ell)}+\frac{1}{2\varepsilon_5 k}+\frac{\xi_0}{2\varepsilon_4 k}\right)E(S)\\
&+\varepsilon_4\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\xi_0}{2}\right)\int_S^T\|\nabla u(t)\|^2\,dt.
\end{aligned}\tag{2.31}$$

En plus de cela, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega |u|^p\,u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\
&\le\int_S^T\left(\int_\Omega |u|^{2p+2}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \tfrac{\varepsilon_4}{2} \int_S^T \|u\|_{2p+2}^{2p+2} dt + \tfrac{1}{2\varepsilon_4} \int_S^T \int_\Omega \left(\int_0^t h(s)\, ds \right) \\
&\times \left(\int_0^t h(t-s) \left[u(s) - u(t) \right]^2 ds \right) dxdt \\
&\leq \tfrac{\varepsilon_4}{2} \int_S^T \|u\|_{2p+2}^{2p+2} dt + \tfrac{B \int_0^\infty h(s) ds}{2\varepsilon_4} \\
&\times \int_S^T \int_\Omega \int_0^t h(t-s) \|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 dsdxdt \\
&\leq \tfrac{\varepsilon_4}{2} \int_S^T \|u\|_{2p+2}^{2p+2} dt + \tfrac{B(\xi_0 - \ell)}{2\varepsilon_4 k} E(S).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Pour estimer le terme $\int_S^T \|u\|_{2p+2}^{2p+2} dt$, nous utilisons l'inégalité de Sobolev-Poincaré

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{2p+2}^{2p+2} \leq C_*(p,\Omega)^{2p+2} \|\nabla u\|_2^{2p+2} \\
&\leq C(p,\Omega)^{p+2} \left(\tfrac{p+2}{p\ell} E(0) \right)^p \|\nabla u\|^2 = \beta \|\nabla u\|^2 .
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Ici $C_*(p,\Omega)$ est la constante de Sobolev-Poincaré, avec $0 < p < +\infty$ $(n = 1,2)$ or $0 < p \leq \frac{2}{n-2}$ $(n > 2)$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \int_\Omega |u|^p u \int_0^t h(t-s) \left[u(s) - u(t) \right] dsdxdt \\
&\quad \leq \tfrac{\beta \varepsilon_4}{2} \int_S^T \|\nabla u\|^2 dt + \tfrac{B(\xi_0 - \ell)}{2\varepsilon_4 k} E(S).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Maintenant, en combinant les formules (2.24), (2.25), (2.31) et (2.34) avec (2.23), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\int_0^t h(s)\, ds \right) \|u'(t)\|^2 dt \\
&\leq CE(S) + \frac{\varepsilon_3}{2} \int_S^T \|u'(t)\|^2 dt + \varepsilon_4 \left(\frac{1 + \xi_0 + \beta}{2} \right) \int_S^T \|\nabla u\|^2 dt,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C = (\xi_0 - \ell) &\left[\frac{\varepsilon_2}{(\xi_0 - \ell)} + \frac{B^2}{k\varepsilon_2} + \frac{h(0)B}{2\varepsilon_3 (\xi_0 - \ell)} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2\varepsilon_5 k} \right. \\
&\left. + \frac{\xi_1^2 E(0)^2 (p+2)^2 + (p\ell)^2 (\xi_0 + B)}{2(p\ell)^2 \varepsilon_4 k} + \frac{\varepsilon_5 \sigma (p+2) E(0)}{4p\ell (\xi_0 - \ell)} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_S^T \left(\int_0^t h(s)\, ds - \frac{\varepsilon_3}{2} \right) \|u'(t)\|^2 dt \leq CE(S) + \varepsilon_4 \left(\frac{1 + \xi_0 + \beta}{2} \right) \int_S^T \|\nabla u\|^2 dt. \tag{2.35}$$

Il est clair que

$$\int_0^S h(s)\,ds \geq \int_0^{S_0} h(s)\,ds > 0,\ S \geq S_0$$

et en choisissant

$$\varepsilon_3 < \int_0^{S_0} h(s)\,ds,$$

nous avons

$$\frac{1}{2}\int_0^{S_0} h(s)\,ds \int_S^T \|u'(t)\|^2\,dt \leq CE(S) + (1+\xi_0+\beta)\,\frac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T \|\nabla u\|^2\,dt.$$

Alors

$$\int_S^T \|u'(t)\|^2\,dt \leq \frac{2C}{\int_0^{S_0} h(s)\,ds}E(S) + \varepsilon_4\left(\frac{1+\xi_0+\beta}{\int_0^{S_0} h(s)\,ds}\right)\int_S^T \|\nabla u\|^2\,dt. \tag{2.36}$$

Substituant l'estimation (2.36) dans (2.21) on obtient

$$\begin{gathered}\int_S^T(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt \\ \leq \tfrac{2}{1-\alpha}\left[1 + \frac{1}{4\varepsilon_1} + \tfrac{(p+2)B}{p\ell} + \tfrac{\xi_0-\ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right. \\ \left. +(\tfrac{\sigma\varepsilon_1}{2} - \xi_1)\int_S^T \|\nabla u\|^4\,dt\right]E(S) + \tfrac{4C}{1-\alpha}(\int_0^{S_0} h(s)\,ds)^{-1}E(S) \\ +\tfrac{2\varepsilon_4(1+\xi_0+\beta)}{1-\alpha}(\int_0^{S_0} h(s)\,ds)^{-1}\int_S^T \|\nabla u\|^2\,dt.\end{gathered} \tag{2.37}$$

Le choix $\varepsilon_4 = \frac{(1-\alpha)}{4(1+\xi_0+\beta)}\left(\int_0^{S_0} h(s)\,ds\right)\left(\xi_0 - \int_0^\infty h(s)\,ds\right)$ nous permet d'écrire

$$\begin{gathered}\int_S^T(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt \\ \leq \tfrac{4}{1-\alpha}\left\{\left[2C(\int_0^{S_0} h(s)\,ds)^{-1} + 1 + \frac{1}{4\varepsilon_1} + \tfrac{(p+2)B}{p\ell} + \tfrac{\xi_0-\ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right]E(S)\right. \\ \left. +(\tfrac{\sigma\varepsilon_1}{2} - \xi_1)\int_S^T \|\nabla u\|^4\,dt\right\}\end{gathered}$$

et si nous choisissons $\varepsilon_1 = \dfrac{7+\alpha}{4\sigma}\xi_1$, nous aurons

$$\int_S^T(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt + \frac{\xi_1}{2}\int_S^T \|\nabla u\|^4\,dt \leq \tilde{C}E(S) \tag{2.38}$$

où $\tilde{C}=\frac{4}{1-\alpha}\left\{2C(\int_0^{S_0} h\left(s\right)ds)^{-1}+\left(1+\dfrac{1}{4\varepsilon_1}+\frac{(p+2)B}{p\ell}+\frac{\xi_0-\ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right)\right\}$.

Ensuite, (2.36) et (2.38) impliquent

$$\begin{aligned}\int_S^T \left\|u'(t)\right\|^2 dt &\leq 2C(\int_0^{S_0} h\left(s\right)ds)^{-1}E(S)+\tfrac{1}{2}\int_S^T(\xi_0-\int_0^t h\left(s\right)ds)\left\|\nabla u\right\|^2 dt\\ &\leq 2C(\int_0^{S_0} h\left(s\right)ds)^{-1}E(S)+\tfrac{\tilde{C}}{2}E(S)\leq \tilde{C}E(S)\end{aligned} \tag{2.39}$$

et clairement

$$\int_S^T\left(h\Box\nabla u\right)(t)\,dt\leq-\frac{1}{k}\int_S^T\left(h'\Box\nabla u\right)(t)\,dt\leq\frac{E(S)}{k}\leq\tilde{C}E(S). \tag{2.40}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{p+2}\int_S^T\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}dt &\leq \tfrac{2\alpha}{p+2}\int_S^T(\xi_0-\int_0^t h\left(s\right)ds)\left\|\nabla u\right\|^2 dt\\ &\leq \tfrac{2\alpha\tilde{C}}{p+2}E(S)\leq\tilde{C}E(S).\end{aligned} \tag{2.41}$$

Donc, combinant (2.38) - (2.41), on obtient

$$\int_S^T E\left(t\right)dt\leq 4\tilde{C}E(S).$$

La limite quand $T\to\infty$ donne

$$\int_S^\infty E\left(t\right)dt\leq 4\tilde{C}E(S),\ \forall S\geq S_0>0. \tag{2.42}$$

Par conséquent, le lemme 2.1 donne

$$E(t)\leq E(0)\exp\left(1-\frac{t}{S_0+4\tilde{C}}\right),\ \forall t\geq 0. \tag{2.43}$$

■

2.4 Phénomène d'explosion

Dans cette section, nous considérons la propriété d'explosion de la solution du problème (2.1). Nous ajoutons à l'équation (2.1) le terme $\Delta^2 u+\nu\Delta^2 u_t$ pour rendre la compétition plus importante. Ce terme intervient dans des applications où la relation constitutive (contrainte-déformation) dépend du gradient du déplacement ainsi que sur la vitesse du gradient du déplacement. Lorsque nous utilisons la technique de multiplicateur, ce dernier terme nous donne la L^2-norme du laplacien de u_t avec un coefficient négatif. Ceci, à son tour, nous donne la L^2-norme du gradient de u_t avec un coefficient négatif. Il semble donc que ce terme est un terme dissipatif qui permet de stabiliser le système. Il va essayer d'arrêter ou de réduire l'effet de la source non linéaire qui tend à exploser le système en temps fini. Plus précisément, nous considérons

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2 + \sigma\left(\nabla u\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right)\right)\Delta u + \Delta^2 u \\ +\nu\Delta^2 u_t + \int_0^t h\left(t-s\right)\Delta u\, ds = \left|u\right|^p u \ dans\ \Omega\times[0,+\infty) \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right)\ \ and\ u_t\left(x,0\right) = u_1\left(x\right)\ \ dans\ \Omega \\ u\left(x,t\right) = \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\left(x,t\right) = 0\ sur\ \Gamma \end{cases} \tag{2.44}$$

Pour prouver notre résultat, nous utilisons la méthode directe [38]. Dans ce cas, nous définissons la fonctionnelle d'énergie de (2.44) par

$$\begin{aligned} E(t) = \tfrac{1}{2}\left\|u'\right\|^2 + \tfrac{1}{2}(\xi_0 + \tfrac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2)\left\|\nabla u\right\|^2 + \left\|\Delta u\right\|^2 \\ +\tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla u\right)(t) - \tfrac{1}{2}\int_0^t h\left(s\right)ds \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2 - \tfrac{1}{p+2}\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} E(t) = E(0) - \sigma\int_0^t \left(\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2 ds - \nu\int_0^t \left\|\Delta u'\right\|^2 \\ +\tfrac{1}{2}\int_0^t \left(h'\Box\nabla u\right)(s)\, ds - \tfrac{1}{2}\int_0^t h\left(s\right)\left\|\nabla u\left(s\right)\right\|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Maintenant, soit u une solution de (2.44) ; définissons

$$H\left(t\right) := \left\|u\right\|^2 + \nu\int_0^t \left\|\Delta u\right\|^2 dt + \frac{\sigma}{2}\left\{\int_0^t \left\|\nabla u\right\|^4 ds + \left(T-t\right)\left\|\nabla u_0\right\|^4\right\}. \tag{2.47}$$

Proposition 2.1 *Supposons que $p > 2$ alors nous avons*

$$\begin{aligned} &H''(t) - (p+4)\|u'\|^2 \\ &\geq 2(p+2)\left\{-E(0) + \nu \int_0^t \|\Delta u'\|^2 ds + \tfrac{\sigma}{4}\int_0^t \left(\tfrac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 ds\right\}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Preuve: Dérivant la fonction (2.47)par rapport à t le long des solutions de (2.44), on obtient

$$H'(t) = 2(u, u') + \nu \|\Delta u\|^2 + \frac{\sigma}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|\nabla u\|^4 ds. \tag{2.49}$$

Alors nous avons de (2.45) et (2.46)

$$\begin{aligned} &H''(t) - (p+4)\|u'\|^2 \\ &= 2(p+2)\left\{-E(0) + \nu \int_0^t \|\Delta u'\|^2 ds + \tfrac{\sigma}{4}\int_0^t \left(\tfrac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 ds\right\} + 2(p+2)\|\Delta u\|^2 \\ &+(p+2)(h\Box\nabla u)(t) - (p+2)\int_0^t (h'\Box\nabla u)(t) + (p+2)\int_0^t h(s)\|\nabla u(s)\|^2 ds \\ &+(p+2)\left[(\xi_0 + \tfrac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^2) - \left[\tfrac{2}{(p+2)}(\xi_0 + \xi_1\|\nabla u\|^2) + \int_0^t h(s)\, ds\right]\right]\|\nabla u\|^2 \\ &+2\int_\Omega \nabla u(t) . \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)\, dsdx. \end{aligned} \tag{2.50}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et l'inégalité ε-Young, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)\, dsdx \\ &= \int_\Omega \int_0^t \sqrt{h(t-s)}\sqrt{h(t-s)}\nabla u(t)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdx \\ &+ \int_0^t h(s)\, ds\|\nabla u(t)\|^2 \geq -\tfrac{\varepsilon}{2}(h\Box\nabla u)(t) + (1 - \tfrac{1}{2\varepsilon})\int_0^t h(s)\, ds\|\nabla u(t)\|^2. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Prenons $\varepsilon = p+2$ dans (2.51), on obtient

$$\begin{aligned} &H''(t) - (p+4)\|u'\|^2 \geq 2(p+2) \\ &\times\left\{-E(0) + \nu \int_0^t \|\Delta u'\|^2 ds + \tfrac{\sigma}{4}\int_0^t \left(\tfrac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 ds\right\} + (p+2) \\ &\left\{(\xi_0 + \tfrac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^2) - \left[\tfrac{2}{(p+2)}(\xi_0 + \xi_1\|\nabla u\|^2) + \frac{2p+3}{(p+2)^2}\int_0^t h(s)\, ds\right]\right\}\|\nabla u\|^2. \end{aligned}$$

Le dernier coefficient de cette relation est positif puisque, pour $p > 2$

$$\int_0^t h(s)\,ds < \int_0^\infty h(s)\,ds < \xi_0 < \frac{p(p+2)}{2p+3}\xi_0. \tag{2.52}$$

Par conséquent, dû à (2.52), nous arrivons à (2.48). La preuve de la proposition 2.1 est maintenant terminée. ■

A présent, nous démontrons le lemme suivant

Lemme 2.5 *Si $E(0) < 0$, alors $H'(t) > \nu \|\Delta u_0\|^2$ pour $t > t_0$ où*

$$t_0 = \max\left\{0, \frac{(u_0, u_1)}{(p+2)E(0)}\right\}.$$

Preuve: De (2.48), nous avons

$$H''(t) \geq -2(p+2)E(0),$$

et donc

$$H'(t) \geq H'(0) - 2(p+2)E(0)t,\ t \geq 0.$$

Cela implique

$$H'(t) \geq \nu \|\Delta u_0\|^2 + 2(u_0, u_1) - 2(p+2)E(0)t$$

alors pour $t > \dfrac{(u_0, u_1)}{(p+2)E(0)}$, nous avons $H'(t) > \nu \|\Delta u_0\|^2$. ■

Nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Supposons que $u_0, u_1 \in H_0^2(\Omega)$ sont telles que $E(0) < 0$ et $p > 2$, alors la solution u du problème (2.44) ne peut être continuée à tout moment $T_m > 0$. En outre, le temps final T est estimé par*

$$T \leq T_m \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln\left[\sqrt{\frac{a}{-b}}\left(\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0)\right)^{-1}\right] \tag{2.53}$$

si

$$J(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\} \tag{2.54}$$

où $J(t)$, a et b sont donnés par (2.55), (2.62) et (2.63) respectivement.

Preuve: Soit

$$J(t) = \left[H(t) + \nu(T-t)\left\|\Delta u_0\right\|^2\right]^{-\gamma}, \ pour\ t \in [0, T] \tag{2.55}$$

où $\gamma = \frac{p}{4} - \frac{1}{2}$ et $T > 0$ est une certaine constante qui sera précisée ultérieurement.

Dérivant $J(t)$ deux fois, on trouve

$$J'(t) = -\gamma J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}\left[H'(t) - \nu\left\|\Delta u_0\right\|^2\right] \tag{2.56}$$

et

$$J''(t) = -\gamma J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}} Q(t) \tag{2.57}$$

où

$$Q(t) = H''(t)\left[H(t) + \nu(T-t)\left\|\Delta u_0\right\|^2\right] - (1+\gamma)(H'(t) - \nu\left\|\Delta u_0\right\|^2)^2.$$

Nous avons de (2.48)

$$H''(t) \geq (p+4)\left\|u'\right\|^2 - 2(p+2)E(0) + 2(p+2)\int_0^t \left\{\nu\left\|\Delta u'\right\|^2 + \frac{\sigma}{4}(\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2)^2\right\} ds,$$

par conséquent, on trouve

$$H''(t) \geq -2(p+2)E(0) + (p+2)\left\{\left\|u'\right\|^2 + \int_0^t \left\{\nu\left\|\Delta u'\right\|^2 + \frac{\sigma}{2}(\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2)^2\right\} ds\right\}.$$

Maintenant, en dérivant la relation (2.47) par rapport à t le long de la solution de (2.44), on obtient

$$H'(t) = 2\left\{(u, u') + \nu\int_0^t (\Delta u, \Delta u')\, ds + \frac{\sigma}{4}\int_0^t \frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^4 ds\right\} + \nu\left\|\Delta u_0\right\|^2.$$

Clairement

$$Q(t) \geq -2(p+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}} + (p+2)$$
$$\times \left\{ \|u'\|^2 + \int_0^t \left\{ \nu \|\Delta u'\|^2 + \frac{\sigma}{2} \left(\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right)^2 \right\} ds \right\}$$
$$\times \left\{ \|u\|^2 + \int_0^t \left\{ \nu \|\Delta u\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\nabla u\|^4 \right\} ds \right\}$$
$$-4(1+\gamma) \left\{ (u,u') + \nu \int_0^t (\Delta u, \Delta u')\, ds + \frac{\sigma}{4} \int_0^t \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^4 ds \right\}^2.$$

Désignant par

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= \|u(t)\|^2 + \int_0^t \left\{ \nu \|\Delta u\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\nabla u\|^4 \right\} ds, \\
\mathbb{B} &= (u,u') + \nu \int_0^t (\Delta u, \Delta u')\, ds + \frac{\sigma}{4} \int_0^t \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^4 ds, \\
\mathbb{C} &= \|u'\|^2 + \nu \int_0^t \|\Delta u'\|^2 ds + \frac{\sigma}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right)^2 ds.
\end{aligned}$$

On obtient

$$Q(t) \geq -2(p+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}} + (p+2) \left\{ \mathbb{A}\mathbb{C} - \mathbb{B}^2 \right\}$$

Maintenant, nous observons que, pour tous $(\rho,\eta) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$

$$\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2$$

$$\begin{aligned}
= \;& \rho^2 \|u(t)\|^2 + \rho^2 \frac{\sigma}{2} \int_0^t \|\nabla u\|^4 ds + \rho^2 \nu \int_0^t \|\Delta u\|^2 ds \\
& + 2\rho\eta\, (u,u') + 2\rho\eta\nu \int_0^t (\Delta u, \Delta u')\, ds + \rho\eta \frac{\sigma}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^4 ds \\
& + \eta^2 \|u'\|^2 + \eta^2 \nu \int_0^t \|\Delta u'\|^2 ds + \eta^2 \frac{\sigma}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right)^2 ds
\end{aligned}$$

ou

$$\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2$$

$$
\begin{aligned}
= & \left\{\rho^2 \|u(t)\|^2 + 2(\rho u, \eta u') + \eta^2 \|u'\|^2\right\} \\
& + \nu \int_0^t \left\{\rho^2 \|\Delta u\|^2 + 2(\rho\Delta u, \eta\Delta u') + \eta^2 \|\Delta u'\|^2\right\} ds \\
& + \frac{\sigma}{2}\int_0^t \left\{\rho^2 \|\nabla u\|^4 + 2\rho \|\nabla u\|^2 \eta(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2) + \eta^2(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2)^2\right\} ds.
\end{aligned}
$$

Cette identité peut être écrite sous la forme

$$
\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2
$$

$$
= \int_\Omega [\rho u(t) + \eta u'(t)]^2 \, dx + \nu \int_0^t \int_\Omega [\rho\Delta u(t) + \eta\Delta u'(t)]^2 \, dx ds
$$

$$
+ \frac{\sigma}{2}\int_0^t \left[\rho \|\nabla u\|^2 + \eta(\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2)\right]^2 ds
$$

Il est facile de voir que

$$
\mathbb{A}\rho^2 + 2\mathbb{B}\rho\eta + \mathbb{C}\eta^2 \geq 0
$$

et

$$
\mathbb{B}^2 - \mathbb{A}\mathbb{C} \leq 0. \tag{2.58}
$$

Alors, on obtient de (2.58)

$$
Q(t) \geq -2(p+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}}, \ t \geq t_0. \tag{2.59}
$$

Donc de (2.57) et (2.59), on obtient

$$
J''(t) \leq (\frac{p^2}{2} - 2)E(0)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}, \ t \geq t_0. \tag{2.60}
$$

Notez que d'après le lemme 2.9 $J(t) < 0$ pour $t \geq t_0$. En multipliant (2.60) par $J'(t)$ et en intégrant de t_0 à t, nous aurons

$$
J'(t)^2 \geq a + bJ(t)^{2+\frac{1}{\gamma}} \tag{2.61}
$$

où

$$a = \left[(\tfrac{p}{4} - \tfrac{1}{2})^2 \left[H'(t_0) - \nu \left\| \Delta u_0 \right\|^2 \right]^2 - (p^2 - 4)(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{p}) E(0) J(t_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \right] \times J\left(t_0\right)^{2+\frac{1}{\gamma}} > 0, \tag{2.62}$$

et

$$b = (p^2 - 4)(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) E(0) < 0. \tag{2.63}$$

Ensuite par le lemme 2.3, il existe un temps fini T tel que $\lim_{t \to T-} J\left(t\right) = 0$. Cela implique que

$$\lim_{t \to T-} \left\{ \left\| u(t) \right\|^2 + \int_0^t \left\{ \nu \left\| \Delta u \right\|^2 + \frac{\sigma}{2} \left\| \nabla u \right\|^4 \right\} ds \right\}^{-1} = 0.$$

c'est à dire

$$\lim_{t \to T_0 -} \left\{ \left\| u(t) \right\|^2 + \int_0^t \left\{ \frac{\sigma}{2} \left\| \nabla u \right\|^4 + \nu \left\| \Delta u \right\|^2 \right\} ds \right\} = +\infty, \tag{2.64}$$

Ainsi, il existe un T tel que

$$0 < T \leq T_0 \; et \; \lim_{t \to T-} \left\{ \left\| \nabla u \right\|^4 + \left\| \Delta u \right\|^2 \right\} = +\infty. \tag{2.65}$$

En effet, si $\lim_{t \to T-} \left\| u(t) \right\|^2 = +\infty$ alors il est clair $\lim_{t \to T-} \left\{ \left\| \nabla u \right\|^4 + \left\| \Delta u \right\|^2 \right\} = +\infty$. D'autre part, si $\lim_{t \to T-} \left\| u(t) \right\|^2 < +\infty$, nous voyons de (2.64) que

$$\sup_{0 \leq t \leq T_0} \left\{ \left\| \nabla u \right\|^4 + \left\| \Delta u \right\|^2 \right\} T_0 \geq \lim_{t \to T-} \int_0^t \left\{ \left\| \nabla u \right\|^4 + \left\| \Delta u \right\|^2 \right\} ds = +\infty,$$

donc on obtient (2.65). Finalement, il vient du lemme 2.3, sachant que $J(t_0) < \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{a}{-b}} \right\}$, que la borne supérieure de T est estimée par

$$T \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \sqrt{\frac{a}{-b}} \left(\sqrt{\frac{a}{-b}} - J\left(t_0\right) \right)^{-1}.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 2.2. ∎

Chapitre 3

Existence globale et décroissance polynomiale pour un problème avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor

3.1 Introduction

Le chapitre 3 concerne aussi le cas d'une dissipation viscoélastique mais sous des conditions beaucoup plus faibls. Ici nous étudions le cas où le noyau h décroit polynomialement. Notamment, nous étudions le problème à valeurs initiales suivants

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u(t)\right\|_2^2 + \sigma\left(\nabla u(t), \nabla u_t(t)\right)\right)\Delta u \\ + \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\,ds = |u|^p u \ dans\ \Omega \times [0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ et\ u_t(x,0) = u_1(x) \ \ dans\ \Omega \\ u(x,t) = 0\ sur\ \Gamma \times [0, +\infty) \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. Ici h représente le noyau de la mémoire. Tous les paramètres ξ_0, ξ_1, σ et p sont supposés être des constantes positives.

Une question importante du comportement asymptotique des solutions a été soulevée par

Clark dans [15]. Il a été prouvé que la solution décroit de façon exponentielle à l'état d'équilibre à condition qu'on ait une dissipation de la forme Δu_t qui est une dissipation forte. D'autre part tatar et Zaraï [68] ont montré la décroissance exponentielle de l'énergie à condition que la noyau h décroisse exponentiellement. Dans ce chapitre nous allons améliorer ce résultat en établissant des conditions suffisantes de stabilité polynômiale de la solution sous une dissipation faible, et en présence d'une source non linéaire.

3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons des lemmes bien connus qui seront nécessaires pour notr étude.

Lemme 3.1 *(Voir* [1, 32]*). Soit $E(t)$ une fonction non-croissante et positive sur $[0,\infty[$. Supposons qu'il existe des constantes positives λ, C et S_0 telles que si*

$$\int_S^\infty E^{1+\lambda}(t)dt = CE^\lambda(0)E(S),\ \forall S \geq S_0,$$

alors

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{(S_0+C)(1+\lambda)}{\lambda t + S_0 + C}\right)^{\frac{1}{\lambda}},\ \forall t \geq 0.$$

Maintenant, nous énonçons les hypothèses générales

(A1) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction bornée de C^1 satisfaisant

$$\xi_0 - \int_0^\infty h(s)\,ds = \ell > 0,$$

(A2) Il existe des constantes positives k et $\rho \in (2,\infty)$ telles que

$$h'(t) \leq -kh^{1+\frac{1}{\rho}}(t),\ t > 0.$$

Il résulte de (**A2**)

$$h(t) \leq \frac{K}{(1+t)^{\rho}},\ t \geq 0,$$

pour une certaine constante $K > 0$. Par conséquent, nous avons

$$h^{\eta} \in L^1(0,\infty),\ pour\ tout\ \eta > \frac{1}{\rho}.$$

3.3 Existence globale

Nous définissons l'énergie du problème (3.1) par

$$\begin{aligned} E(t) &= \|u'\|^2 + (\xi_0 + \tfrac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 + (h\square\nabla u)(t) \\ &- \textstyle\int_0^t h(s)\|\nabla u(t)\|^2 ds - \frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2},\ t > 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

où

$$(h\square\nabla u)(t) = \int_0^t h(t-s)\int_{\Omega}|\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 dxds.$$

Lemme 3.2 *$E(t)$ est une fonction non croissante sur $[0,\infty)$ et*

$$E'(t) = -2\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + (h'\square\nabla u)(t) - h(t)\|\nabla u\|^2 \leq 0,\ t > 0. \tag{3.3}$$

Preuve: La démonstration s'effectue comme pour le lemme 2.4. ■

Soit, maintenant

$$F(t) = (\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4 + (h\square\nabla u)(t) - \frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2} \tag{3.4}$$

alors

$$E(t) = \|u'\|^2 + F(t). \tag{3.5}$$

Nous définissons le puits de potentiel par

$$\mathcal{W} = \left\{u\ /\ I(u(t)) := \ell\|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} > 0\right\} \cup \{0\}.$$

Lemme 3.3 *Soit u la solution de (3.1). Si $u_0 \in \mathcal{W}$ et*

$$\alpha = \frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\ell^{\frac{p+2}{2}}} \left(\frac{p+2}{p} E(0) \right)^{p/2} < 1, \tag{3.6}$$

alors $u(t) \in \mathcal{W}$, pour chaque $t \in [0,T]$. Ici $C(p,\Omega)$ est la constante de Sobolev-Poincaré.

Preuve: Soit $u_0 \in \mathcal{W}$, alors $I(u_0) > 0$. Par continuité, il existe $T_m \leq T$ telle que $I(u(t)) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T_m]$. Par conséquent, à partir de (3.4), (3.5) et le lemme 3.3, nous avons

$$\ell \left\| \nabla u \right\|^2 \leq (\xi_0 - \int_0^t h(s)\, ds) \left\| \nabla u \right\|^2 \leq \frac{p+2}{p} F(t) \leq \frac{p+2}{p} E(t) \leq \frac{p+2}{p} E(0). \tag{3.7}$$

Cette relation avec le lemme 0.3 impliquent que, pour $t \in [0,T_m]$,

$$\left\| u \right\|_{p+2}^{p+2} \leq C(p,\Omega)^{p+2} \left\| \nabla u \right\|^{p+2} \leq \frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\ell} \left(\frac{p+2}{p\ell} E(0) \right)^{p/2} \ell \left\| \nabla u \right\|^2.$$

C'est, de notre hypothèse sur α que

$$\left\| u \right\|_{p+2}^{p+2} \leq \alpha \ell \left\| \nabla u \right\|^2 < \alpha(\xi_0 - \int_0^t h(s)\, ds) \left\| \nabla u \right\|^2 < \ell \left\| \nabla u \right\|^2, \ \forall t \in [0,T_m]. \tag{3.8}$$

Donc

$$I(t) > 0, \forall t \in [0,T_m],$$

ce qui signifie que $u(t) \in \mathcal{W}$, $\forall t \in [0,T_m]$. En répétant la procédure, on se rend compte que T_m s'étend à T. ■

Théorème 3.1 *Supposons que $u_0 \in \mathcal{W}$ et (3.6) est vérifiée, alors la solution du probleme (3.1) est globale en temps.*

Preuve: Il suffit de montrer que $\left\| u' \right\|^2 + \left\| \nabla u \right\|^2$ est uniformément bornée en t. En vertu du lemme 3.3 et du lemme 3.4 nous obtenons

$$E(0) \geq E(t) \geq \left\| u' \right\|^2 + \ell \left\| \nabla u \right\|^2 - \frac{2}{p+2} \left\| u \right\|_{p+1}^{p+1}$$

$$\geq \left\|u'\right\|^2 + \frac{p\ell}{p+2}\left\|\nabla u\right\|^2 + \frac{2}{p+2}I(t)$$

Par conséquent, comme $I(t) > 0$, on voit que

$$\left\|u_t\right\|^2 + \left\|\nabla u\right\|^2 \leq cE(0) \ \forall t > 0$$

pour une constante positive c. ■

3.4 Décroissance polynomiale

Dans cette section, nous allons démontrer la décroissance polynomiale de solutions du problème (3.1).

Proposition 3.1 *Supposons $u_0 \in \mathcal{W}$ et (3.6) est vérifiée, alors on a pour tout $T \geq S \geq 0$*

$$\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\{(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|^4 - \frac{2}{p+2}\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}\right\}dt$$

$$\leq C_1 E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)$$

pour une constante positive C_1.

Preuve: Tout d'abord on multiplie les deux membres de l'équation (3.1) par $E^{\frac{m}{\rho}}(t)u$ et on intègre sur $\Omega \times [S,T]$ pour obtenir

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\{(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u\right\|^2 + \xi_1\left\|\nabla u\right\|^4 - \left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}\}dt \\ &= -\textstyle\int_S^T\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u''udxdt - \sigma\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^2\int_\Omega \nabla u'.\nabla udxdt \\ &\quad + \textstyle\int_S^T\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)\nabla u(t)\,.\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s) - \nabla u(t)\right]dsdxdt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Par intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} -\int_S^T\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u''udxdt &= \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'\right\|^2 dt - \int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u'(t)\,u(t)\Big|_S^T dx \\ &\quad + \int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dxdt \end{aligned}$$

et (3.9) devient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0-\int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'\right\|^2 dt\\
&-\sigma\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^2\int_\Omega \nabla u'.\nabla u dxdt-\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u'(t)\,u(t)\Big|_S^T dx\\
&+\int_S^T\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)\nabla u(t)\,.\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dsdxdt\\
&-\xi_1\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^4 dt+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}dt\\
&+\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dxdt.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

Nous commençons par le terme mémoire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité ε-Young, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)\nabla u(t)\,.\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dsdxdt\\
&\le\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u(t)\right\|\left[\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right|ds\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}dt\\
&\le\frac{1}{2\varepsilon_0}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|ds\right)^2 dt\\
&+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt
\end{aligned}\tag{3.11}$$

pour un certain $\varepsilon_0>0$.

Rappelant que $h'(t)\le -kh^{1+\frac{1}{\rho}}(t)$, et en utilisant (3.3), nous voyons que

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left[\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right|ds\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}dt\\
&=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)}(t-s)\,h^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|ds\right)^2 dt\\
&\le\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h^{1-\frac{1}{\rho}}(s)\,ds\right)\left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right)dt\\
&\le\left(\int_0^\infty h^{1-\frac{1}{\rho}}(s)\,ds\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right)dt\\
&\le-\frac{\bar{h}_\rho}{k}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h'(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right)dt\\
&\le-\frac{1}{k}\bar{h}_\rho\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)E'(t)dt\le\frac{\bar{h}_\rho}{k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S),
\end{aligned}\tag{3.12}$$

où

$$\int_0^\infty h^{1-\frac{1}{\rho}}(s)\,ds = \bar{h}_\rho.$$

Par conséquent, il résulte de (3.11) et (3.12) que

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\nabla u(t)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dsdxdt\\ &\le \tfrac{\varepsilon_0}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt+\tfrac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Ensuite, nous notons que de (3.4) nous avons

$$F(t)\ge \frac{p}{p+2}\left\{(\xi_0-\int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u\right\|^2+(h\Box\nabla u)(t)\right\}+\frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|^4 \tag{3.14}$$

d'où on tire

$$\left\|\nabla u\right\|^2\le\frac{p+2}{p(\xi_0-\int_0^t h(s)\,ds)}E(t) \tag{3.15}$$

et par conséquent, grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\left\|u\right\|^2\le B\left\|\nabla u\right\|^2\le\frac{(p+2)B}{p\ell}E(t) \tag{3.16}$$

où B est la constante de Poincaré.

Par application de l'inégalité (3.16) et puisque $F(t)\ge 0$, il vient

$$\left|\int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dx\right|\le\frac{1}{2}\left\|u'\right\|^2+\frac{(p+2)B}{2p\ell}E(t)\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E(t). \tag{3.17}$$

Par ailleurs, à partir de (3.17) et le fait que $E(t)$ est non-croissante, on déduit que

$$-\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u'(t)\,u(t)\Big|_S^T dx\le\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \tag{3.18}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dxdt\le-\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\left|\int_\Omega u'(t)\,u(t)\,dx\right|dt\\ &\le-\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{(p+2)B}{p\ell}\right)\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'E(t)dt\le\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{(p+2)B}{p\ell}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned} \tag{3.19}$$

De (3.8) on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{p+2}^{p+2}\,dt \leq \alpha\int_S^T \ell E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt \\ &< \alpha\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0-\int_0^t h\,(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2\,dt \end{aligned} \tag{3.20}$$

pour $\varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} &-\sigma\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\int_\Omega \nabla u'.\nabla u.dxdt \\ &\leq \tfrac{\sigma\varepsilon_1}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^4\,dt+\tfrac{\sigma}{2\varepsilon_1}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,(\nabla u',\nabla u)^2\,dt. \end{aligned}$$

Grâce à (3.3) on déduit que

$$\begin{aligned} &-\sigma\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\int_\Omega \nabla u'.\nabla u.dxdt \\ &\leq \tfrac{\sigma\varepsilon_1}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^4\,dt+\tfrac{1}{4\varepsilon_1}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Tenant compte des estimations (3.13) et (3.18) - (3.21) dans (3.10), il vient

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0-\int_0^t h\,(s)\,ds)\,\|\nabla u\,(t)\|^2\,dt \\ &\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'\|^2\,dt+\tfrac{\varepsilon_0}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt+\tfrac{\sigma\varepsilon_1}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^4\,dt \\ &+\alpha\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0-\int_0^t h\,(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2\,dt+\tfrac{3}{2}\left(1+\tfrac{(p+2)B}{p\ell}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \\ &+\tfrac{1}{4\varepsilon_1}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)-\xi_1\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^4\,dt+\tfrac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned}$$

Si on pose $\varepsilon_0 = (1-\alpha)(\xi_0-\int_0^\infty h\,(s)\,ds)$, alors il vient

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0-\int_0^t h\,(s)\,ds)\,\|\nabla u\,(t)\|^2\,dt \\ &\leq \tfrac{2}{1-\alpha}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'\|^2\,dt+\tfrac{2}{1-\alpha}(\tfrac{\sigma\varepsilon_1}{2}-\xi_1)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^4\,dt \\ &+\tfrac{2}{1-\alpha}\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{4\varepsilon_1}+\tfrac{3(p+2)B}{2p\ell}+\tfrac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Maintenant, on multiplie les deux membres de l'équation (3.1) par $E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h(t-s)[u(s)-u(t)]\,ds$ et on integre sur $\Omega\times[S,T]$, on trouve

$$\begin{aligned}(h\diamond u)(t) &= \int_0^t h(t-s)[u(s)-u(t)]\,ds,\\ (h\diamond\nabla u)(t) &= \int_0^t h(t-s)[\nabla u(s)-\nabla u(t)]\,ds,\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u''(h\diamond u)(t)dxdt\\ &-\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|_2^2+\sigma(\nabla u(t),\nabla u_t(t))\right)\\ &\times\textstyle\int_\Omega \Delta u\,(h\diamond u)(t)dxdt\\ &+\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\,ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt\\ &=\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p u\,(h\diamond u)(t)dxdt.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u''(h\diamond u)(t)dxdt = E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dx\Big|_S^T\\ &-\textstyle\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dxdt-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)(h'\diamond u)(t)dxdt\\ &+\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|u'(t)\|^2\,dt.\end{aligned}$$

et une substitution de (3.23) donne

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|u'(t)\|^2\,dt=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p u\,(h\diamond u)(t)dxdt\\ &-E^{\frac{m}{\rho}}(t)\textstyle\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dx\Big|_S^T+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)(h'\diamond u)(t)dxdt\\ &+\textstyle\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)(h\diamond u)(t)dxdt\\ &+\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|_2^2+\sigma(\nabla u(t),\nabla u_t(t))\right)\\ &\times\textstyle\int_\Omega \Delta u\,(h\diamond u)(t)dxdt\\ &-\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u(s)\,ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt.\end{aligned}\tag{3.24}$$

En outre, en vertu de (3,5) et (3,14), nous avons

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega u'(t)\left(h\diamond u\right)(t)dx\right| &\leq \tfrac{\varepsilon_2}{2}\left\|u'(t)\right\|^2+\tfrac{1}{2\varepsilon_2}\int_\Omega \left(\left(h\diamond u\right)(t)\right)^2dx\\ &\leq \tfrac{\varepsilon_2}{2}E(t)+\tfrac{B^2}{2\varepsilon_2}\left(\int_0^t h\left(s\right)ds\right)\left(h\Box\nabla u\right)(t)\\ &\leq \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_2+\tfrac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_2}\right)E(t)\leq \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_2+\tfrac{B^2(\xi_0-\ell)}{k\varepsilon_2}\right)E(S)\end{aligned}$$

pour certains $\varepsilon_2>0$ et $t\geq S$. D'où,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega E^{\frac{m}{\rho}}(t)u'(t)\int_0^t h\left(t-s\right)\left[u\left(s\right)-u\left(t\right)\right]dsdx\Big|_S^T\\ &\leq \left(\varepsilon_2+\tfrac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_2}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned}\tag{3.25}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)\left(h'\diamond u\right)(t)dxdt\leq \tfrac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2dt\\ &+\tfrac{1}{2\varepsilon_3}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t\left|h'\left(t-s\right)\right|\left|u\left(s\right)-u\left(t\right)\right|ds\right)^2dxdt\end{aligned}$$

et pour $\varepsilon_3>0$

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'\int_\Omega u'(t)\left(h\diamond u\right)(t)dxdt\\ &\leq -\left(\varepsilon_2+\tfrac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_2}\right)\int_S^T\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\right)'E(t)dt\\ &\leq -\left(\varepsilon_2+\tfrac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_2}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned}$$

Puisque $h'(t)\leq 0$, la relation (3.3) implique que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(\int_0^t\left|h'\left(t-s\right)\right|\left|u\left(s\right)-u\left(t\right)\right|ds\right)^2dx\\ &\leq -\int_0^t h'\left(s\right)ds\int_0^t\left|h'\left(t-s\right)\right|\left\|u\left(s\right)-u\left(t\right)\right\|^2ds\\ &\leq -h(0)B\left(h'\Box\nabla u\right)(t)\leq -h(0)BE'(t).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega u'(t)\int_0^t h'\left(t-s\right)\left[u\left(s\right)-u\left(t\right)\right]dsdxdt\\ &\leq \tfrac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2dt+\tfrac{h(0)B}{2\varepsilon_3}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).\end{aligned}\tag{3.26}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|_2^2+\sigma(\nabla u(t),\nabla u_t(t))\right)\int_\Omega \Delta u.(h\diamond u)(t)dxdt\\
&=-\xi_0\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \nabla u.(h\diamond\nabla u)(t)dxdt\\
&-\int_S^T \xi_1 E^{\frac{m}{\rho}}(t)\|\nabla u(t)\|_2^2\int_\Omega \nabla u.(h\diamond\nabla u)(t)dxdt\\
&-\int_S^T \sigma E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\nabla u(t),\nabla u_t(t))\int_\Omega \nabla u.(h\diamond\nabla u)(t)dxdt
\end{aligned}$$

l'application de l'inégalité ε-Young et la relation (3.7) et (3.3) donnent

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|_2^2+\sigma(\nabla u(t),\nabla u'(t))\right)\int_\Omega \Delta u.(h\diamond u)(t)dxdt\\
&\leq -\xi_0\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \nabla u.(h\diamond\nabla u)(t)dxdt+\tfrac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\|\nabla u(t)\|^2dt\\
&+\sigma^2\tfrac{\varepsilon_5}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\nabla u,\nabla u')^2\|\nabla u(t)\|^2dt\\
&+\tfrac{1}{2\varepsilon_5}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega((h\diamond\nabla u)(t))^2dxdt+\tfrac{\xi_1^2E(0)^2(p+2)^2\bar{h}_\rho}{2(p\ell)^2\varepsilon_4 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)
\end{aligned}\tag{3.27}$$

pour ε_4, $\varepsilon_5>0$. Ainsi, (3.27) et (3.3) impliquent

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|_2^2+\sigma(\nabla u(t),\nabla u'(t))\right)\int_\Omega \Delta u(h\diamond u)(t)dxdt\\
&\leq -\xi_0\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega \nabla u.(h\diamond\nabla u)(t)dxdt\\
&+\tfrac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\|\nabla u(t)\|^2dt+\tfrac{\xi_1^2E(0)^2(p+2)^2\bar{h}_\rho}{2(p\ell)^2\varepsilon_4 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)\\
&+\left(\tfrac{\varepsilon_5\sigma(p+2)E(0)}{4p\ell}+\tfrac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_5 k}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned}\tag{3.28}$$

En outre, nous avons

$$\begin{aligned}
&-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt\\
&=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\nabla u ds\right).(h\diamond\nabla u)(t)dxdt\\
&=\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega \nabla u.(h\diamond\nabla u)(t)dxdt\\
&+\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega((h\diamond\nabla u)(t))^2dxdt.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

D'où, grâce à (3.12) on obtient

$$\begin{aligned} &-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt \\ &\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\int_\Omega \nabla u(t)\,.\,(h\diamond\nabla u)(t)dxdt+\tfrac{\bar{h}_\rho}{k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Le premier terme du membre droit de (3.30) avec le premier terme du membre droit de (3.28), peut être estimée comme suit

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds-\xi_0\right)\int_\Omega \nabla u(t)\,.\,(h\diamond\nabla u)(t)dxdt \\ &\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\xi_0-\int_0^t h(s)\,ds\right)\left|\int_\Omega \nabla u(t)\,.\,(h\diamond\nabla u)(t)dx\right|dt \\ &\leq \xi_0\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left|\int_\Omega \nabla u(t)\,.\,(h\diamond\nabla u)(t)dx\right|dt \end{aligned}$$

et par (3.13) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds-\xi_0\right)\int_\Omega \nabla u(t)\,.\,(h\diamond\nabla u)(t)dxdt \\ &\leq \tfrac{\xi_0\varepsilon_4}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt+\tfrac{\xi_0\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_4 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Maintenant, par (3.28)-(3.31) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\xi_0+\xi_1\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2+\sigma\left(\nabla u(t)\,,\nabla u_t(t)\right)\right)\int_\Omega \Delta u.\,(h\diamond u)(t)dxdt \\ &-\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\,\Delta u ds\right)(h\diamond u)(t)dxdt \\ &\leq \bar{h}_\rho\left(\frac{1}{k}+\frac{\xi_1^2E(0)^2(p+2)^2}{2(p\ell)^2\varepsilon_4 k}+\frac{\varepsilon_5\sigma(p+2)E(0)}{4p\ell\bar{h}_\rho}+\frac{1}{2\varepsilon_5 k}+\frac{\xi_0}{2\varepsilon_4 k}\right) \\ &\times E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)+\varepsilon_4\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\xi_0}{2}\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt. \end{aligned} \tag{3.32}$$

En plus de cela, il est facile de voir que la relation (3.12) implique que

$$\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p\,u.\,(h\diamond u)(t)dxdt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_S^T \left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^{2p+2}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega ((h\diamond u)(t))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}dt\\
&\leq \tfrac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\,dt + \tfrac{1}{2\varepsilon_4}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega\left(\int_0^t h^{1-\frac{1}{\rho}}(s)\,ds\right)\\
&\times\left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\,[u(s)-u(t)]^2\,ds\right)dxdt\\
&\leq \tfrac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\,dt + \tfrac{B\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_4}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned}\tag{3.33}$$

Pour estimer le terme $\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{2p+2}^{2p+2}\,dt$, nous utilisons l'inégalité de Sobolev-Poincaré

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{2p+2}^{2p+2} \leq C_*(p,\Omega)^{2p+2}\,\|\nabla u\|_2^{2p+2}\\
&\leq C(p,\Omega)^{p+2}\left(\tfrac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^p\|\nabla u\|^2 =: \beta\,\|\nabla u\|^2.
\end{aligned}\tag{3.34}$$

Ici $C_*(p,\Omega)$ est la constante de Sobolev-Poincaré, avec $0<p<+\infty$ $(n=1,2)$ ou $0<p\leq\frac{2}{n-2}$ $(n>2)$

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\int_\Omega |u|^p\,u.\,(h\diamond u)(t)dxdt\\
&\leq \tfrac{\beta\varepsilon_4}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt + \tfrac{B\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_4 k}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S).
\end{aligned}\tag{3.35}$$

Maintenant, en combinant les relations (3.25), (3.26), (3.32) et (3.35) avec (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds\right)\|u'(t)\|^2\,dt\\
&\leq CE^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) + \tfrac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'(t)\|^2\,dt\\
&+\varepsilon_4\left(\tfrac{1+\xi_0+\beta}{2}\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
C = \bar{h}_\rho\Big[&\tfrac{1}{k} + \tfrac{\xi_1^2E(0)^2(p+2)^2}{2(p\ell)^2\varepsilon_4 k} + \tfrac{\varepsilon_5\sigma(p+2)E(0)}{4p\ell\bar{h}_\rho} + \tfrac{\xi_0}{2\varepsilon_4 k}\\
&+\tfrac{1}{2\varepsilon_5 k} + \tfrac{B}{2\varepsilon_4 k} + \tfrac{2\varepsilon_2}{\bar{h}_\rho} + \tfrac{2B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_2\bar{h}_\rho} + \tfrac{h(0)B}{2\varepsilon_3\bar{h}_\rho}\Big]
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h(s)\,ds - \tfrac{\varepsilon_3}{2}\right)\|u'(t)\|^2\,dt\\
&\leq CE^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) + \varepsilon_4\left(\tfrac{1+\xi_0+\beta}{2}\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^2\,dt.
\end{aligned}\tag{3.36}$$

Il est clair que

$$\int_0^S h(s)\,ds \geq \int_0^{S_0} h(s)\,ds > 0,\ S \geq S_0$$

et en choisissant

$$\varepsilon_3 < \int_0^{S_0} h(s)\,ds =: h_0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\left(\int_0^{S_0} h(s)\,ds\right)\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2 dt \\ \leq\ & CE^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) + (1+\xi_0+\beta)\,\frac{\varepsilon_4}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^2 dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|u'(t)\right\|^2 dt \leq \frac{2C}{\int_0^{S_0} h(s)ds} E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \\ & +\varepsilon_4\left(\frac{1+\xi_0+\beta}{h_0}\right)\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^2 dt. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Tenant compte de (3.37) dans (3.22) on obtient

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt \\ & \leq \frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4\varepsilon_1}+\frac{3(p+2)B}{2p\ell}+\frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}\right)E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \\ & +\frac{2}{1-\alpha}\left(\frac{\sigma\varepsilon_1}{2}-\xi_1\right)\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^4 dt + \frac{4C}{(1-\alpha)h_0}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \\ & +\frac{2\varepsilon_4(1+\xi_0+\beta)}{(1-\alpha)h_0}\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^2 dt. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Le choix $\varepsilon_4 = \frac{(1-\alpha)h_0\ell}{4(1+\xi_0+\beta)}$ nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt \\ & \leq \frac{4}{1-\alpha}\left\{\left[\frac{2C}{h_0}+\frac{3}{2}+\frac{1}{4\varepsilon_1}+\frac{3(p+2)B}{2p\ell}+\frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}\right]\right. \\ & \left.\times E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) + \left(\frac{\sigma\varepsilon_1}{2}-\xi_1\right)\textstyle\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left\|\nabla u\right\|^4 dt\right\} \end{aligned}$$

et si nous choisissons $\varepsilon_1 = \frac{7+\alpha}{4\sigma}\xi_1$, puisque $\alpha < 1$, la dernière relation se réduit à

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt \\ &+\tfrac{\xi_1}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^4\,dt \le \tfrac{4\tilde{C}}{1-\alpha}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \end{aligned} \tag{3.39}$$

où $\tilde{C} = \frac{2C}{h_0} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4\varepsilon_1} + \frac{3(p+2)B}{2p\ell} + \frac{\bar{h}_\rho}{2\varepsilon_0 k}$.

Ensuite, les relations (3.37) et (3.39) impliquent

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'(t)\|^2\,dt \le \tfrac{2C}{h_0}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \\ &+\tfrac{1-\alpha}{4}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2\,dt \le 2\tilde{C}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Finalement, en vertu de (3.8) et (3.39), on obtient

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{p+2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{p+2}^{p+2}\,dt &\le \tfrac{2\alpha}{p+2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u\|^2\,dt \\ &\le \tfrac{2\alpha\tilde{C}}{p+2}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S) \le \tilde{C}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Donc, en combinant (3.39) - (3.41) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u'(t)\|^2\,dt + \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(\xi_0 - \int_0^t h(s)\,ds)\,\|\nabla u(t)\|^2\,dt \\ &+\tfrac{\xi_1}{2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|\nabla u\|^4\,dt - \tfrac{2}{p+2}\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,\|u\|_{p+2}^{p+2}\,dt \\ &\le \left(3 + \tfrac{4}{1-\alpha}\right)\tilde{C}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S). \end{aligned} \tag{3.42}$$

■

Théorème 3.2 *Supposons $u_0 \in \mathcal{W}$ et (3.6) est vérifiée, alors nous avons l'estimation suivant*

$$E(t) \le E(0)\left(\frac{c(1+\rho)}{t+c\rho}\right)^\rho, \qquad \forall t \ge 0$$

pour une constante positive c.

Preuve: Tout d'abord, l'application de l'inégalité de Hölder, nous donne

$$(h\Box\nabla u)(t) = \int_0^t h^{\frac{m-1}{\rho+m}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^{\frac{2m}{\rho+m}}$$
$$\times h^{1-\frac{m-1}{\rho+m}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^{\frac{2\rho}{\rho+m}} ds$$
$$\leq \left(\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds\right)^{\frac{m}{\rho+m}}$$
$$\times \left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}.$$

Par conséquent,

$$\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(h\Box\nabla u)(t)\,dt$$
$$\leq \int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\left(\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds\right)^{\frac{m}{\rho+m}}$$
$$\times \left(\int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 ds\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}} dt.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder à nouveau pour avoir

$$\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)(h\Box\nabla u)(t)\,dt$$
$$\leq \left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \tag{3.43}$$
$$\times \left(\int_S^T \int_0^t h^{1+\frac{1}{\rho}}(t-s)\|\nabla u(s) - \nabla u(t)\|^2 dsdt\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}.$$

En vertu de la condition $h'(t) \leq -kh^{1+\frac{1}{\rho}}(t)$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,(h\square\nabla u)(t)\,dt \\
&\leq \left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \\
&\times\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}\left(-\int_S^T\int_0^t h'(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,dsdt\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}} \\
&\leq \left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \\
&\times\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}\left(-\int_S^T E'(t)dt\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}} \\
&\leq \left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,dsdt\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \\
&\times\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{\rho}{\rho+m}}E^{\frac{\rho}{\rho+m}}(S).
\end{aligned}$$

En outre, par l'inégalité de Young, nous avons pour $\varepsilon_6 > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{\frac{m}{\rho}}(t)\,(h\square\nabla u)(t)\,dt \\
&\leq C\left(\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt\right)^{\frac{m}{\rho+m}} \\
&\times\left\|\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,ds\right\|_\infty^{\frac{m}{\rho+m}}E^{\frac{\rho}{\rho+m}}(S) \\
&\leq C(\varepsilon_6)\left\|\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,ds\right\|_\infty^{\frac{m}{\rho}}E(S) \\
&+\varepsilon_6\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt
\end{aligned} \tag{3.44}$$

pour une certaine constante $C(\varepsilon_6) > 0$.

Donc, en combinant (3.42) et (3.44) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt \leq \left(3+\frac{4}{1-\alpha}\right)\tilde{C}E^{\frac{m}{\rho}}(0)E(S)+\varepsilon_6\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt \\
&+C(\varepsilon_6)\left\|\int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,ds\right\|_\infty^{\frac{m}{\rho}}E(S)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

or

$$\int_S^T E^{1+\frac{m}{\rho}}(t)dt$$

$$\leq C_2 \left(E^{\frac{m}{\rho}}(0) + \left\| \int_0^t h^{1-\frac{1}{m}}(t-s) \left\| \nabla u(s) - \nabla u(t) \right\|^2 ds \right\|_{\infty}^{\frac{m}{\rho}} \right) E(S) \tag{3.46}$$

pour une certaine constante positive C_2.

D'autre part, nous avons quand $m = 2$

$$\int_0^t h^{\frac{1}{2}}(t-s) \left\| \nabla u(s) - \nabla u(t) \right\|^2 ds \leq \frac{2(p+2)}{p\ell} \int_0^t h^{\frac{1}{2}}(t-s)\left(E(s) + E(t)\right) ds$$

$$\leq \frac{4(p+2)}{p\ell} \int_0^t h^{\frac{1}{2}}(s)\, ds E(0), \qquad \forall t \geq 0.$$

Donc

$$\int_S^T E^{1+\frac{2}{\rho}}(t)dt \leq C_3 E^{\frac{2}{\rho}}(0) E(S), \qquad \forall S \geq S_0. \tag{3.47}$$

Ainsi, en appliquant le lemme 3.1 avec $\lambda = \frac{2}{\rho}$, on obtient

$$E(t) \leq E(0) \left(\frac{(S_0 + C_3)(1+\lambda)}{\lambda t + S_0 + C_3} \right)^{\frac{\rho}{2}}, \ \forall t \geq 0.$$

Maintenant, si $m = 1$, à partir de

$$\int_0^t \left\| \nabla u(s) - \nabla u(t) \right\|^2 ds \leq 2\frac{p+2}{p\ell} \left(\int_0^t E(s) ds + \sup_{t \geq 0} tE(t) \right) \leq C_3 E(0), \ \forall t \geq 0$$

et (3.46), nous pouvons écrire

$$\int_S^T E^{1+\frac{1}{\rho}}(t)dt \leq C_4 E^{\frac{1}{\rho}}(0) E(S), \qquad \forall S \geq S_0.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 3.1 avec $\lambda = \frac{1}{\rho}$, on obtient

$$E(t) \leq E(0) \left(\frac{(S_0 + C_4)(1+\rho)}{t + \rho(S_0 + C_4)} \right)^{\rho}, \ \forall t \geq 0.$$

■

Chapitre 4

Non-solvabilité de l'équation de Balakrishnan-Taylor avec un terme mémoire dans R^N

4.1 Introduction

Dans les quarante-cinq dernières années, l'explosion en temps fini et la non-existence de solutions pour les équations aux dérivées partielles et les systèmes ont reçu une attention croissante. On peut trouver une bibliographie assez vaste sur les travaux concernant les équations paraboliques et hyperboliques et des systèmes sur un domaine borné.

Sur l'espace $\mathbf{R}^N$ entier, le travail magnifique réalisé pour l'équation de la chaleur avec une non-linéarité de puissance est dû à Fujita [20] (1966). Pour l'équation des ondes on peut citer Glassey [22,23] et Kirane et Tatar [35]. Leurs travaux ont été étendus et généralisés à des équations dégénéré et singulières et sur différents domaines non bornés (comme domaines extérieurs et les cônes).

La question de la non-solvabilité des équations d'évolution a été traitée et discutée sous différents angles en utilisant différentes méthodes et techniques. L'idée de base dans la plupart de ces travaux est de comparer les solutions avec des sous-solutions qui explosent en temps fini.

Notre préoccupation, dans ce chapitre, est un problème viscoélastique à une source d'une force extérieure sur l'espace $\mathbf{R}^N$ entier, $N \geq 1$. Ici, nous étudions le cas où le noyau h décroît polynomialement juste pour fixer les idées, mais le résultat reste valable pour de nombreux autres types de noyaux tels que les noyaux qui décroîssent de façon exponentielle. Notamment, on va étudier le problème aux valeurs initiales suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\nabla u\left(t\right)\right\|_2^2 + \sigma\left(\nabla u\left(t\right), \nabla u_t\left(t\right)\right)\right) \Delta u \\ + \int_0^t h\left(t-s\right) \Delta u ds + \delta u_t = \left|u\right|^p \;\; dans\; \mathbf{R}^N \times [0, +\infty) \\ u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right) \in L^1_{loc}\left(\mathbf{R}^N\right) \\ u_t\left(0, x\right) = u_1\left(x\right) \in L^1_{loc}\left(\mathbf{R}^N\right), \end{cases} \tag{4.1}$$

où $p > 1$ et $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont les données initiales. Ici h représente le noyau dans l'expression de la mémoire. Tous les paramètres ξ_0, ξ_1 et σ sont supposés être des constantes positives. Le modèle entre les mains dans un domaine borné Ω de $\mathbf{R}^N$, avec la dissipation de Balakrishnan-Taylor ($\sigma > 0$) et $h = 0$, a été initialement proposé par Balakrishnan et Taylor en 1989 [4] and Bass et Zes [10]. Il est lié à l'équation de vibrations aéroélectriques. Jusqu'à présent, il a été étudié par Y. You [76], R. H Clark [15] et Tatar et Zaraï [67, 68,69], plusieurs résultats sur la décroissance (exponentielle, polynomial) et l'explosion en temps fini ont été obtenus.

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'obtention des conditions de non-solvabilité du problème (4.1). La méthode que nous utilisons est la méthode des fonctions test développé par Mitidieri et Pohozaev [45]. Notre preuve est basée sur un argument d'absurde, ce qui implique des estimations a priori pour les solutions faibles de (4.1) et un choix subtil d'une fonction test et un argument d'échelle.

L'objet principal dans ce chapitre est de trouver des valeurs de p pour lesquelles nous avons la non-existence des solutions sous des hypothèses minimales sur h.

4.2 Préliminaires

Nous désignerons par Q_T l'ensemble $Q_T := (0,T) \times \mathbf{R}^N$ et $Q := Q_\infty$

Nous allons ensuite préciser ce qu'on entend par une solution faible du problème (4.1).

Définition 4.1 *Une solution faible du problème (4.1) est une fonction continue u : $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |u|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx + \delta \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx \\ &= \int_{Q_T} u\varphi_{tt}dxdt - \int_{Q_T} M(t)u\Delta\varphi dxdt - \delta \int_{Q_T} u\varphi_t dxdt \\ &+ \int_{Q_T} u(s,x)\left(\int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right)dsdx \end{aligned} \tag{4.2}$$

pour tout $\varphi \in C_0^2(Q_T), \varphi \geq 0$ satisfaisant

$$\varphi(T,x) = \varphi_t(T,x) = \varphi_t(0,x) = 0,$$

où

$$M(t) = \xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t)).$$

$\varphi \in C_0^2(Q_T)$ i. e $\varphi \in C_{t,x}^{2,2}$ et à support compact.

Maintenant, nous posons l'hypothèse

(H) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction bornée de C^1 satisfaisant

$$h(t) \leq \frac{K}{(1+t)^\rho},\ t \geq 0,$$

pour une certaine constante $K > 0$ et $\rho \in (2,\infty)$.

4.3 Un résultat de non-existence

Dans cette section, nous prouvons notre résultat. On donne toutes les valeurs de p pour lesquels aucune solution faible ne peut exister globalement en temps.

Théorème 4.1 *Supposons que* $\int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\,dx + \delta \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\,dx > 0$ *et (H) est vérifiée. Supposons que* θ, N *et* $\tilde{p}$ *sont tels que dans le tableau suivant*

$N = 1$	$\theta = 2,\ \tilde{p} = 2$
$N = 2$	$\theta = 2,\ \tilde{p} = 1$
$N = 3$	$\theta = 1,\ \tilde{p} = \frac{1}{3}$

Alors, il n'existe pas de solution globale faible pour (4.1) pour tous $1 < p < 1 + \tilde{p}$.

Preuve: La preuve est par contradiction. Supposons qu'une solution faible (4.1) existe globalement en temps. On introduit la fonction test

$$\varphi(t,x) := \phi\left(\frac{|x|}{R}\right)\mu\left(\frac{t}{R^\theta}\right) \tag{4.3}$$

avec $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\phi \geq 0$, $\mu \in C^2(\mathbf{R}^+)$, $\mu \geq 0$ telles que

$$\phi(w), \mu(w) = \begin{cases} 1, & |w| \leq 1 \\ 0, & |w| > 2 \end{cases}$$

et μ satisfait $-C \leq \mu'(t) \leq 0$, $\mu'(2R^\theta) = 0$ pour $R >> 1$. Nous supposons que

$$\begin{gathered}\int_{supp\Delta\varphi} M(t)\,|\Delta\varphi|^q\,(\varphi)^{1-q}dxdt \\ + \int_{supp\varphi_{tt}} |\varphi_{tt}|^q\,(\varphi)^{1-q}dxdt + \int_{supp\varphi_t} |\varphi_t|^q\,(\varphi)^{1-q}dxdt < \infty\end{gathered} \tag{4.4}$$

où q est l'exposant conjugué de p. Si cette condition n'est pas satisfaite par notre fonction $\varphi(t,x)$, alors nous choisissons $\varphi^\lambda(t,x)$ avec $\lambda > 0$ suffisamment grande. On choisit cette fonction test dans la définition de la solution faible et on commence à estimer les différents termes de cette définition. En multipliant et en divisant par $\varphi^{1/p}$, puis en appliquant l'inégalité ε-Young, nous aurons

$$\begin{gathered}\int_Q u\varphi_{tt}dtdx \leq \int_{supp\varphi_{tt}} u\varphi^{1/p}\varphi^{-1/p}\varphi_{tt}dtdx \\ \leq \varepsilon \int_{supp\varphi_{tt}} |u|^p\,\varphi dtdx + C_\varepsilon \int_{supp\varphi_{tt}} \varphi^{-q/p}\,|\varphi_{tt}|^q\,dtdx.\end{gathered} \tag{4.5}$$

De même manière, on trouve

$$-\int_Q M(t)u\Delta\varphi dxdt$$

$$\leq \varepsilon \int_{supp\Delta\varphi} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \int_{supp\Delta\varphi} |M(t)|^q (\varphi)^{-q/p} |\Delta\varphi|^q dxdt, \tag{4.6}$$

$$-\delta \int_Q u\varphi_t dxdt$$

$$\leq \varepsilon \int_{supp\varphi_t} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \int_{supp\varphi_t} \delta^q (\varphi)^{-q/p} |\varphi_t|^q dxdt \tag{4.7}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_Q u \left(\int_s^{+\infty} h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right) dsdx \\ &\leq \varepsilon \int_{supp\Delta\varphi} |u|^p \varphi dsdx + C_\varepsilon \int_{supp\Delta\varphi} (\varphi)^{-q/p} \left|\int_s^{+\infty} h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right|^q dsdx. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Tenant compte des trois dernières estimations (4.5) - (4.8) dans (4.2), nous voyons que, pour ε petit (par exemple $\varepsilon \leq 1/5$)

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{5} \int_Q |u|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)dx + \delta \int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)dx \\ &\leq C_{1/5} \int_{supp\varphi} (\varphi)^{-q/p} \left[|\varphi_{tt}|^q + |M(t)|^q |\Delta\varphi|^q \right. \\ &\left. +\delta^q |\varphi_t|^q + \left|\int_s^{+\infty} h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right|^q\right] dsdx. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Considérons maintenant l'échelle suivante : $t = R^\theta \tau$ et $x = Ry$. Alors, il est clair que

$$\int_{supp\varphi_{tt}} (\varphi)^{-q/p} |\varphi_{tt}|^q dtdx \leq CR^{N+\theta-2\theta q} \int_\Omega (\varphi)^{-q/p} |\varphi_{\tau\tau}|^q d\tau dy, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} &\int_{supp\Delta\varphi} (\varphi)^{-q/p} |M(t)|^q |\Delta\varphi|^q dtdx \\ &\leq CR^{N+\theta-2q} \int_\Omega (\varphi)^{-q/p} |\Delta\varphi|^q \left\{\xi_0 + \xi_1 R^{N-2} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_* u|^2 dy \right. \\ &\left. +R^{N-\theta-2} \tfrac{\sigma d}{2d\tau} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_* u|^2 dy\right\}^q d\tau dy \\ &\leq CR^{(q+1)N+\theta-4q} \int_\Omega (\varphi)^{-q/p} |\Delta\varphi|^q \left\{\xi_0 + \xi_1 \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_* u|^2 dy \right. \\ &\left. +\tfrac{\sigma d}{2d\tau} \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_* u|^2 dy\right\}^q d\tau dy \end{aligned} \tag{4.11}$$

où $\nabla_* u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial y_i}$, et

$$\int_{supp\varphi_t} \delta^q (\varphi)^{-q/p} |\varphi_t|^q \, dxdt \leq C\delta^q R^{N+\theta-\theta q} \int_{\Omega} (\varphi)^{-q/p} |\varphi_\tau|^q \, d\tau dy. \tag{4.12}$$

Ici et dans le reste de la preuve C est une constante positive qui peut être différent à différentes occurrences. Pour le terme contenant la mémoire nous réécrire comme suite

$$\int_{supp\Delta\varphi} (\varphi)^{-q/p} \left| \int_t^{+\infty} h(\nu - t)\Delta\varphi(\nu)d\nu \right|^q dtdx$$

et le changement d'échelle donne

$$\begin{aligned} &\int_{supp\Delta\varphi} (\varphi)^{-q/p} \left| \int_t^{+\infty} h(\nu - t)\Delta\varphi(\nu)d\nu \right|^q dtdx \\ &= \int_{D_R} |\Delta\phi|^q \, \phi^{-q/p} \int_0^{2R} (\mu)^{-q/p} \left| \int_t^{+\infty} h(\nu - t)\mu(\nu)d\nu \right|^q dtdx \\ &\leq CR^{N+\theta-2q} \int_\Omega |\Delta\phi|^q \, \varphi^{-\frac{q}{p}} \left| \int_{R^\theta\tau}^{+\infty} h(\nu - R^\theta\tau)\mu(\nu)d\nu \right|^q d\tau dy. \end{aligned} \tag{4.13}$$

où $\Omega := \{(\tau, y) : 1 \leq \tau, |y| \leq 2\}$ et $D_R := \{x \in \mathbf{R}^N : R < |x| < 2R\}$. En vertu d'hypothèse **(H)** et par le changement de variable $1 + \nu - R^\theta\tau = \eta$ et le fait que μ est décroissante on a

$$\int_{R^\theta\tau}^{+\infty} h(\nu - R^\theta\tau)\mu(\nu)d\nu \leq K \int_1^{+\infty} \frac{\mu(\eta + R^\theta\tau - 1)}{\eta^\rho} d\eta$$

comme $R^\theta\tau \geq 1$ et $\mu(\eta) = 0$ pour $\eta \geq 2$ et $\mu(\eta) \leq 1$ nous avons

$$\int_{R^\theta\tau}^{+\infty} h(\nu - R^\theta\tau)\mu(\nu)d\nu \leq K \int_1^2 \frac{1}{\eta^\rho} d\eta \leq C$$

donc

$$\begin{aligned} &\int_{supp\Delta\varphi} (\varphi)^{-q/p} \left| \int_t^{+\infty} h(\nu - t)\Delta\varphi(\nu)d\nu \right|^q dtdx \\ &\leq CR^{N+\theta-2q} \int_\Omega |\Delta\varphi|^q \, (\varphi)^{-q/p} d\tau dy. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Les relations (4.9) et (4.4) avec les estimations (4.10) - (4.14) nous donnent

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{5}\int_Q |u|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx + \delta\int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx \\ &\leq C\Big\{R^{N+\theta-2\theta q} + R^{(q+1)N+\theta-4q}\int_\Omega (\varphi)^{-q/p}|\Delta\varphi|^q \tilde{M}^q(\tau)d\tau dy \\ &\qquad +R^{N+\theta-\theta q} + R^{N+\theta-2q}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

où

$$\tilde{M}(\tau) = \xi_0 + \xi_1\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_* u|^2\,dy + \frac{\sigma d}{2d\tau}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla_* u|^2\,dy.$$

maintenant si $1 < p < 1+\tilde{p}$, où $\tilde{p}$ est comme dans le tableau, alors à partir de (4.15) on déduit ci-haut

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{5}\int_Q |u|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\varphi(0,x)\,dx + \delta\int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx\right] \leq 0.$$

En effet, le paramètre θ a été choisi, après quelques calculs simples, aussi large que possible et pour que les quatre exposants de (4.15) sont non positifs. Autrement dit,

$$\begin{cases} N+\theta-2\theta q < 0 \\ (q+1)N+\theta-4q < 0 \\ N+\theta-\theta q < 0 \\ N+\theta-2q < 0 \end{cases}$$

D'autre part, côté gauche de (4.15) est égal à $\frac{1}{5}\int_Q |u|^p\,dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\,dx + \delta\int_{\mathbf{R}^N} u_0(x)\,dx$. C'est une contradiction, puisque nous avons supposé que$\int_{\mathbf{R}^N} u_1(x)\,dx + \delta\int_{\mathbf{R}^N} u_0(x) > 0$. Le théorème est ainsi démontré. ■

4.4 Conditions nécessaires pour l'existence locale et globale des solutions

Théorème 4.2 *Soit u une solution locale de (4.1), où $T < +\infty$ et $p > 1$. Alors, il existe des constantes α et β telles que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf \left(u_1(x) + \delta u_0(x)\right) \leq C_{1/5} T^{1-q} \left(\frac{\alpha}{T^q} + \beta\right)$$

Preuve: Par définition de la solution faible, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$, $\varphi \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{Q_T} |u|^p \varphi dxdt + \int_{\mathbf{R}^N} \left(u_1(x) + \delta u_0(x)\right) \varphi(0,x)\, dx \\ &\leq \textstyle\int_{Q_T} |u| \left|\varphi_{tt}\right| dxdt + \int_{Q_T} |M(t)| \, |u| \, |\Delta\varphi| \, dxdt + \delta \int_{Q_T} |u| \left|\varphi_t\right| dxdt \\ &+ \textstyle\int_{Q_T} |u(s,x)| \left|\int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right| dsdx. \end{aligned} \tag{4.16}$$

En utilisant l'inégalité ε-Young, on peut estimer tous les termes dans le membre droit (4.16). En effet, si $|u| \left|\varphi_{tt}\right| = |u| \varphi^{1/p} \varphi^{-1/p} \left|\varphi_{tt}\right|$, nous trouvons pour $\varepsilon > 0$

$$\int_{Q_T} |u| \left|\varphi_{tt}\right| dtdx \leq \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi dtdx + C_\varepsilon \int_{Q_T} (\varphi)^{-q/p} \left|\varphi_{tt}\right|^q dtdx. \tag{4.17}$$

D'une manière similaire, on trouve

$$\int_{Q_T} |M(t)| \, |u| \, |\Delta\varphi| \, dtdx$$

$$\leq \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \int_{Q_T} |M(t)|^q (\varphi)^{-q/p} |\Delta\varphi|^q \, dxdt, \tag{4.18}$$

$$\delta \int_{Q_T} |u| \left|\varphi_t\right| dtdx$$

$$\leq \varepsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi dxdt + C_\varepsilon \delta^q \int_{Q_T} (\varphi)^{-q/p} \left|\varphi_t\right|^q dxdt \tag{4.19}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_{Q_T}|u(s,x)|\left|\int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right|dsdx\\ &\leq \varepsilon\int_{Q_T}|u|^p\varphi dsdx + C_\varepsilon\int_{Q_T}(\varphi)^{-q/p}\left|\int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right|^q dsdx.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Prenant $\varepsilon \leq 1/5$, on déduit de (4.17) - (4.20) et (4.16) que

$$J := \int_{\mathbf{R}^N}(u_1(x)+\delta u_0(x))\,\varphi\,(0,x)\,dx$$

$$\begin{aligned}&\leq C_{1/5}\int_{Q_T}\Big(|\varphi_{tt}|^q + |M(t)|^q(\varphi)^{-q/p}|\Delta\varphi|^q\\ &+|\varphi_t|^q + \left|\int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right|^q\Big)(\varphi)^{-q/p}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

On choisit la fonction test

$$\varphi(t,x) := \phi\left(\frac{|x|}{R}\right)\mu\left(\frac{t}{T}\right)$$

où $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $\phi \geq 0$, $supp\phi \subset \left\{x\in\mathbf{R}^N : 1<|x|<2\right\}$, $|\Delta\phi| \leq k\phi$, et nous prenons

$$\mu\left(\frac{t}{T}\right) := \begin{cases} 1, & 0\leqslant t\leqslant T/2\\ 1-\frac{(t-T/2)^3}{(T/2)^3}, & T/2\leqslant t\leqslant T\\ 0, & t\geqslant T.\end{cases}.$$

Ensuite, nous estimons les quatre termes dans la côté droit de (4.16). En effectuant le changement de variable $t=\tau T$ et en utilisant l'hypothèse sur φ, on trouve,

$$\int_{Q_T}(\varphi)^{-q/p}|\varphi_{tt}|^q \leq \alpha T^{1-2q}\int_{\mathbf{R}^N}\phi, \tag{4.22}$$

$$\int_{Q_T}|M(t)|^q(\varphi)^{-q/p}|\Delta\varphi|^q \leq \frac{3}{4}M^q k^q R^{-2q}T\int_{\mathbf{R}^N}\phi, \tag{4.23}$$

$$\delta^q\int_{Q_T}(\varphi)^{-q/p}|\varphi_t|^q \leq \beta T^{1-q}\int_{\mathbf{R}^N}\phi \tag{4.24}$$

et

$$\int_{Q_T}(\varphi)^{-q/p}\left|\int_s^T h(t-s)\Delta\varphi(t)dt\right|^q \leq Ck^qR^{-2q}T^2\left(\int_0^\infty h^p(t)dt\right)^{q/p}\int_{\mathbf{R}^N}\phi. \tag{4.25}$$

De (4.21)-(4.25), on déduit que

$$\inf_{|x|>R}(u_1(x)+\delta u_0(x))\int_{\mathbf{R}^N}\phi dx$$

$$\leq C_{1/5}\left[\alpha T^{1-2q}+\frac{3}{4}M^q k^q R^{-2q}T+\beta T^{1-q}+Ck^q R^{-2q}T^2\right]\int_{\mathbf{R}^N}\phi dx. \tag{4.26}$$

Prenant le sup par rapport à t des deux membres de (4.26) et laissant $R\to+\infty$, on obtient

$$\liminf_{|x|\to\infty}(u_1(x)+\delta u_0(x))\leq C_{1/5}\left[\alpha T^{1-2q}+\beta T^{1-q}\right]. \tag{4.27}$$

D'où le résultat voulu. ■

Nous déduisons immédiatement le résultat suivant

Corollaire 4.1 *Supposons que* $p>1$ *et* $u_1(x)+\delta u_0(x)\geq 0$. *Si (4.1) admet une solution globale faible, alors*

$$\liminf_{|x|\to\infty}(u_1(x)+\delta u_0(x))=0.$$

Preuve: Supposons que (4.1) a une solution globale faible et que

$$S:=\liminf_{|x|\to\infty}(u_1(x)+\delta u_0(x))>0.$$

Alors de (4.27) on obtient

$$T\leq\max\left\{\left(\frac{\alpha+\beta}{S}C_{1/5}\right)^{1/(q-1)},\left(\frac{\alpha+\beta}{S}C_{1/5}\right)^{1/(2q-1)}\right\}.$$

C'est une contradiction. ■

Chapitre 5

Existence globale et explosion des solutions d'équations non linéaires de type Kirchhoff avec une dissipation fractionnaire faible

5.1 Introduction

Nous nous proposons d'étudier le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|_2^{2\gamma}\right) \Delta u & \\ + \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+1)} u_s(s)\, ds = |u|^{p-1} u & \textit{dans } \Omega \times [0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \;\; \textit{et } u_t(x,0) = u_1(x) & \textit{dans } \Omega \\ u(x,t) = 0 & \textit{sur } \Gamma \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont données. Tous les paramètres ξ_0, ξ_1, γ et p sont supposées être des constantes positives telles que $p > 1$ et $-1 < \alpha < 0$. Lorsque $\xi_1 = 0$, et sans la dissipation fractionnaire faible, l'équation

(5,1) se réduit à l'équation d'onde non linéaire qui a été largement étudiée, et plusieurs résultats concernant l'existence et la non-existence ont été établis [7,21,25,31]. Lorsque ξ_0,$\xi_1 \neq 0$ et sans la dissipation fractionnaire faible, l'équation (5.1) se réduit à l'équation de Kirchhoff bien connue introduite dans [36] pour décrire les vibrations non linéaires d'une corde élastique.

Le problème (avec $\xi_1 = 0$ et $\xi_0 = 1$) a été étudié par Tatar [64-66]. Dans ce travail, nous verrons que la méthode introduite et développée par Sattinger [62], Payne et Sattinger [56] est efficace dans notre cas. En combinant cette méthode avec une certaine estimation de [67], nous déterminerons un ensemble stable de telle sorte que si nous y commençons nous y restons là pour tous les temps ultérieurs. Ceci assure l'existence globale. En ce qui nous concerne, on démontre que la solution explose en temps fini à condition que les conditions initiales soient assez grandes. Cela veut dire que la dissipation fractionnaire n'est pas assez forte pour stabiliser le système en présence d'une source polynomiale et pour de grandes conditions initiales. Afin de montrer ce résultat, nous nous basons sur l'argument de Georgiev et Todorova.

Les difficultés rencontrées dues à l'opérateur fractionnaire, sont contournés par l'utilisation de la transformée de Fourier, et l'injection de Hardy-Littlewood-Sobolev. Cette technique a été utilisée par Tatar pour les problèmes d'ondes avec dissipation fractionnaire interne [66]. L'idée de la preuve consiste à établir une certaine inégalité qui nous conduisons à conclure l'explosion de la solution.

5.2 Préliminaires

Définition 5.1 *On dit qu'une fonction $k(t) \in L^1_{loc}[0,+\infty)$ est définie positive si*

$$\int_0^t w(s) \int_0^s k(s-z)\, w(z)dzds \geq 0,\ t \geq 0$$

pour toute $w \in C[0,+\infty)$.

Définition 5.2 *Une fonction $k(t)$ est dite fortement définie positive s'il existe une constante positive $\hat{c}$ telle que $t \to k(t) - \hat{c}e^{-t}$ est définie positive.*

Remarque 5.1 *En général, il n'est pas facile de vérifier directement la conditions dans les définitions 5.1 et 5.2. Nous savons, cependant, de Nohel et Shea [49] (voir aussi Tatar [63-65]) qu'une fonction deux fois dérivable $k \neq 0$ vérifiant $(-1)^n k^{(n)}(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et $n = 0, 1, 2$ est fortement définie positive. Par conséquent, $\frac{(t-s)^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(-\alpha)}$ est évidemment fortement définie positive pour $-1 < \alpha < 0$.*

5.3 Existence globale

Nous définissons l'énergie du problème (5.1) par

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}, \ t > 0. \tag{5.2}$$

Lemme 5.1 *$E(t)$ est uniformément bornée par $E(0)$ et*

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\Omega u_t \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+1)} u_t(s)dsdx \leq 0, \ t > 0. \tag{5.3}$$

Preuve: En multipliant l'équation (5.1) par u_t et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}\|u_t\|^2 + \tfrac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^2 + \tfrac{\xi_1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \tfrac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\right\}\\ &+\tfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\textstyle\int_\Omega u_t \int_0^t (t-s)^{-(\alpha+1)} u_t(s)dsdx = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant t par z et en intégrant de 0 à t, on obtient

$$E(t) - E(0) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t \int_\Omega u_t \int_0^z (z-s)^{-(\alpha+1)} u_t(s)dsdxdz \leq 0. \tag{5.4}$$

Ainsi, $E(t)$ est uniformément bornée par $E(0)$

$$E(t) \leq E(0) \textit{ pour tout } t \geq 0.$$

■

Soit maintenant

$$J(t) = \frac{\xi_0}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2(\gamma+1)} \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \tag{5.5}$$

Alors

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + J(t). \tag{5.6}$$

Nous définissons le puits de potentiel par

$$\mathcal{W} = \left\{ u \;/\; I(u(t)) := \frac{\xi_0}{2} \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1} > 0 \right\} \cup \{0\}.$$

Lemme 5.2 *Soit u une solution de (5.1). Si $u_0 \in \mathcal{W}$ et*

$$\beta = \frac{2C(p,\Omega)^{p+1}}{\xi_0^{\frac{p+1}{2}}} \left(\frac{2(p+1)}{p} E(0) \right)^{(p-1)/2} < 1, \tag{5.7}$$

alors $u(t) \in \mathcal{W}$, pour chaque $t \in [0,T]$. Ici $C(p,\Omega)$ est la constante de Sobolev-Poincaré.

Preuve: La démonstration s'effectue comme pour les lemmes 1.2, 2.4. ■

Théorème 5.1 *Supposons que $u_0 \in \mathcal{W}$ et (5.7) est vérifiée, alors la solution du probleme (5.1) est globale en temps.*

Preuve: Il suffit de montrer que $\|u'\|^2 + \|\nabla u\|^2$ est bornée indépendamment de t. En vertu du lemme 5.3 et le lemme 5.4 nous obtenons

$$E(0) \geq E(t) \geq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{\xi_0}{2} \|\nabla u\|^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$\geq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{p\xi_0}{2(p+1)} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{p+1} I(t)$$

Par conséquent, comme $I(t) > 0$, on voit que

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leq cE(0) \;\forall t > 0 \tag{5.8}$$

pour une certaine constante positive c. ■

5.4 Explosion en temps fini

Théorème 5.2 *Soit $u(x,t)$ une solution régulière du problème (5.1) avec $-1 < \alpha < 0$ et $p > 2\gamma + 1$. Alors, pour tout $T > 0$ fixé, il existe des conditions initiales $u_0(x)$ et $u_1(x)$ assez grandes et $T^* \leq T$ pour lesquelles $u(x,t)$ explose au temps T^*.*

Preuve: Soit la fonctionnelle $H(t)$ définie ainsi

$$H(t) = -\int_0^t E(s)ds + (dt + l)\left\|u_0\right\|^2. \tag{5.9}$$

où d et l sont des constantes positives à déterminer par la suite. En dérivant $H(t)$ et de la définition de $E(t)$, il est clair que

$$H'(t) = -E(t) + d\left\|u_0\right\|^2 \geq -E(0) + d\left\|u_0\right\|^2.$$

Nous supposons que d est tel que

$$-E(0) + d\left\|u_0\right\|^2 = H'(0) > 0. \tag{5.10}$$

Alors $H(t) > 0$ et

$$H'(0) - H'(t) = -\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t \int_\Omega u_t \int_0^s (s-z)^{-(\alpha+1)} u_t(s) dz dx ds \leq 0. \tag{5.11}$$

On définit la fonctionnelle $Q(t)$ par

$$Q(t) = H(t)^{1-\theta} + \frac{\varepsilon}{2}\left(\left\|u\right\|^2 - \left\|u_0\right\|^2\right) \tag{5.12}$$

avec $\varepsilon > 0$, $0 < \theta = \frac{p-1}{2(p+1)} < 1$, on a

$$Q(0) = H(0)^{1-\theta} = l^{1-\theta}\left\|u_0\right\|^{2(1-\theta)} \tag{5.13}$$

et

$$Q'(t) = (1-\theta)H(t)^{-\theta}H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_t u dx. \tag{5.14}$$

Par dérivation suivie de l'intégration de (5.14), il résulte

$$Q'(t) = (1-\theta)H(t)^{-\theta}H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \varepsilon \int_0^t \|u_t\|^2 ds + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} u_{tt} u dx ds. \tag{5.15}$$

Pour évaluer le dernier terme de (5.15), on multiplie la première équation du problème (5.1) par u et on intègre l'expression obtenue sur $\Omega \times (0,t)$ on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\Omega} u_{tt} u dx ds = -\xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds + \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds \\ &-\tfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \int_{\Omega} u \int_0^z (z-s)^{-(\alpha+1)} u_t(s) ds dx dz. \end{aligned} \tag{5.16}$$

On désigne $\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} t^{-\beta}$ par $k_\beta(t)$ et pour t fixé, on définit les prolongements suivants sur tout le domaine R

$$L_t w(\tau) := \begin{cases} w(\tau), & \tau \in [0,t] \\ 0, & \tau \in R \setminus [0,t] \end{cases}$$

et

$$\tilde{L} k_\beta(\tau) := \begin{cases} k_\beta, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases}$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t u(s) \int_0^s (s-z)^{-(\alpha+1)} u_t(z) dz ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L} k_{\alpha+1}(s-z) L_t u_t(z) dz ds. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Parseval (voir [75]), on peut écrire

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L} k_{\alpha+1}(s-z) L_t u_t(z) dz ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(L_t u)(\sigma) \overline{F(\tilde{L} k_{\alpha+1_t} * L_t u_t)}(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

où $F(f)$ désigne la transformée de Fourier usuelle de f. Maintenant, comme k_β possède la propriété de convolution (voir [75])

$$k_{\beta+\eta-1}(t) = (k_\beta * k_\eta)(t),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}k_{\alpha+1}(s-z)\, L_t u_t(z) dz ds \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(L_t u_t) F(\tilde{L}k_{\frac{\alpha+1}{2}})\right|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(L_t u) F(\tilde{L}k_{\frac{\alpha+1}{2}})\right|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \delta \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(L_t u_t) F(\tilde{L}k_{\frac{\alpha+1}{2}})\right|^2 d\sigma + \tfrac{1}{4\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F(L_t u) F(\tilde{L}k_{\frac{\alpha+1}{2}})\right|^2 d\sigma,
\end{aligned}$$

pour certains $\delta > 0$. De la relation dans [24, Théorème 16.5.1], on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{L}k_{\alpha+1}(s-z)\, L_t u_t(z) dz ds \leq \tfrac{1}{\cos(\alpha\pi/2)} \\
&\times \left[\delta \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u_t(s) (\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u_t)(s)\, ds\right. \\
&\left. + \tfrac{1}{4\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) (\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u)(s)\, ds\right].
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Ainsi, en tenant compte de (5.15), (5.16) et (5.17), on obtient

$$\begin{aligned}
&Q'(t) \geq (1-\theta) H^{-\theta}(t) H'(t) + \varepsilon \int_\Omega u_0 u_1 dx + \varepsilon \int_0^t \|u_t\|^2 ds \\
&-\varepsilon\xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \varepsilon\xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds \\
&-\tfrac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)} \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u_t(s) (\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u_t)(s)\, ds \\
&-\tfrac{\varepsilon}{4\delta\cos(\alpha\pi/2)} \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) (\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u)(s)\, ds.
\end{aligned}$$

De (5,11), on a

$$
\begin{aligned}
Q'(t) \geq & \left[(1-\theta)H^{-\theta}(t) - \tfrac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)}\right] H'(t) + \tfrac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)} H'(0) + \varepsilon \textstyle\int_\Omega u_0 u_1 dx \\
& + \varepsilon \textstyle\int_0^t \|u_t\|^2 ds - \varepsilon\xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \varepsilon\xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds \\
& - \tfrac{\varepsilon}{4\delta\cos(\alpha\pi/2)} \textstyle\int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)(\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u)(s)\, ds.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Maintenant, on va estimer le dernier terme du membre droit de (5.18) que nous désignons par J d'abord, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$
\begin{aligned}
J &= \textstyle\int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)(\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u)(s)\, ds \\
&\leq \textstyle\int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |L_t u|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} dx.
\end{aligned}
$$

Ensuite, nous considérons trois cas :

1. Si $\alpha > -\frac{1}{2}$, alors l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev (appliqué avec $q = 2$, $\lambda = \alpha + 1$ et $p = r$) implique

$$
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\tilde{L}k_{\alpha+1_t} * L_t u\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |L_t u|^r ds\right)^{\frac{1}{r}},
$$

avec $r = \frac{2}{1-2\alpha} > 1$ et C est une constante dépendant de α. Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
J &\leq C \textstyle\int_\Omega \left(\int_0^t |u|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |L_t u|^r ds\right)^{\frac{1}{r}} dx \\
&\leq C \left\{ \textstyle\int_\Omega \int_0^t |u|^2 ds dx + \int_\Omega \left(\int_0^t |u|^r ds\right)^{\frac{2}{r}} dx \right\},
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Dans la reste de la preuve C notera une constante générique qui peut dépendre de p, $|\Omega|$ et T et peut changer de ligne en ligne. Notez que $r < 2$. Il s'ensuit donc

$$
\int_\Omega \left(\int_0^t |u|^r ds\right)^{\frac{2}{r}} dx \leq \int_\Omega \left(t^{\frac{2-r}{2}} \left(\int_0^t |u|^2 ds\right)^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{2}{r}} dx \leq t^{\frac{2-r}{r}} \int_\Omega \int_0^t |u|^2 ds dx \tag{5.20}
$$

Substituant les estimations (5,19) et (5,20) dans (5,18), on trouve

$$
\begin{aligned}
&Q'(t) \geq \left[(1-\theta)H(t)^{-\theta} - \tfrac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)}\right] H'(t) + \tfrac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)} H'(0) + \varepsilon \textstyle\int_\Omega u_0 u_1 dx \\
&+\varepsilon \textstyle\int_0^t \|u_t\|^2 ds - \varepsilon\xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \varepsilon\xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds \\
&-\tfrac{\varepsilon}{4\delta\cos(\alpha\pi/2)} C(1+t^{\frac{2-r}{r}}) \textstyle\int_0^t \|u\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

soit $\delta = M\cos(\alpha\pi/2)H(t)^{-\theta}$, (On remarque que $H(t) \neq 0$ pour tout t, en fait $H(t) \geq H(0) > l\|u_0\|^2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&Q'(t) \geq \left[(1-\theta) - \varepsilon M\right] H(t)^{-\theta} H'(t) + \varepsilon M H(t)^{-\theta} H'(0) + \varepsilon \textstyle\int_\Omega u_0 u_1 dx \\
&+\varepsilon \textstyle\int_0^t \|u_t\|^2 ds - \varepsilon\xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \varepsilon\xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds \\
&-\tfrac{\varepsilon}{4M\cos^2(\alpha\pi/2)} C(1+t^{\frac{2-r}{r}}) H^\theta(t) \textstyle\int_0^t \|u\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Nous avons besoin d'estimer le terme $H(t)^\theta \int_0^t \|u\|^2 ds$

$$
\begin{aligned}
H(t)^\theta \int_0^t \|u\|^2 ds &\leq \left[\frac{1}{1+p}\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds + (dt+l)\|u_0\|^2\right]^\theta \times \int_0^t \|u\|^2 ds \\
&\leq \left[\frac{1}{(1+p)^\theta}\left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^\theta + (dt+l)^\theta \|u_0\|^{2\theta}\right] \times \int_0^t \|u\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

L'inégalité de Hölder implique

$$
H(t)^\theta \int_0^t \|u\|^2 ds
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \left[\frac{1}{(1+p)^\theta}\left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^\theta + (dt+l)^\theta \|u_0\|^{2\theta}\right] \\
& \times C t^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^{\frac{2}{p+1}}.
\end{aligned}
$$

Comme $\frac{p-1}{p+1} < 1$, on obtient

$$H(t)^{\theta} \int_0^t \|u\|^2 ds \leq \frac{C}{(1+p)^{\theta}} \left(1 + \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^{\theta+\frac{2}{p+1}} (1+T)$$
$$+C(dt+l)^{\theta} \|u_0\|^{2\theta} \left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^{\frac{2}{p+1}} (1+T).$$

En outre, comme $\theta + \frac{2}{p+1} = \frac{p+3}{2(p+1)} < 1$, on peut écrire

$$H(t)^{\theta} \int_0^t \|u\|^2 ds \leq \frac{C}{(1+p)^{\theta}} \left(1 + \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right) (1+T)$$
$$+C(dt+l)^{\theta} \|u_0\|^{2\theta} \left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right) (1+T).$$

Donc

$$Q'(t) \geq \left[(1-\theta) - \varepsilon M\right] H(t)^{-\theta} H'(t) + \varepsilon M H(t)^{-\theta} H'(0)$$
$$+\varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \varepsilon \int_0^t \|u_t\|^2 ds - \varepsilon \xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds$$
$$-\varepsilon \xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds - \frac{A\varepsilon}{M \cos^2(\alpha\pi/2)} \left(1 + \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right).$$

avec $A = \frac{C}{4}(2+T)^2 \left[\frac{1}{(1+p)^{\theta}} + (dT+l)^{\theta} \|u_0\|^{2\theta}\right]$.

Choisissons ε tel que $\varepsilon \leq \frac{1-\theta}{M}$ et notons que $\cos^2(\alpha\pi/2) > 1/2$, il résulte que

$$Q'(t) \geq \varepsilon M H(t)^{-\theta} H'(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \varepsilon \int_0^t \|u_t\|^2 ds$$
$$-\varepsilon \xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \varepsilon \xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds$$
$$+\varepsilon(1 - \frac{2A}{M}) \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds - \frac{2A\varepsilon}{M}.$$

En outre, il est clair que pour une constante C_1 à déterminer, en ajoutant et en soustrayant $C_1 H(t)$, nous avons

$$Q'(t) \geq C_1 H(t) + \left(\frac{C_1}{2} + \varepsilon\right) \int_0^t \|u_t\|^2 ds + \xi_0 \left(\frac{C_1}{2} - \varepsilon\right) \int_0^t \|\nabla u\|^2 ds$$
$$+\xi_1 \left(\frac{C_1}{2(\gamma+1)} - \varepsilon\right) \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds - C_1(dt+l) \|u_0\|^2$$
$$+\varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \left[\varepsilon(1 - \frac{2A}{M}) - \frac{C_1}{p+1}\right] \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds - \frac{2A\varepsilon}{M}.$$

On choisit $C_1 = 2(\gamma+1)\varepsilon$, u_0 et u_1 tels que

$$\begin{cases} \int_\Omega u_0 u_1 dx - 2(\gamma+1)(dT+l)\|u_0\|^2 - \frac{2A}{M} \geq 0 \\ 1 - \frac{2A}{M} - \frac{2(\gamma+1)}{p+1} \geq b, \text{ for some } b > 0. \end{cases}$$

Il suffit de sélectionner u_0 et u_1 tels que

$$\int_\Omega u_0 u_1 dx - 2(\gamma+1)(dT+l)\|u_0\|^2 > 0 \tag{5.21}$$

puis on choisit M assez grand pour que

$$\int_\Omega u_0 u_1 dx - 2(\gamma+1)(dT+l)\|u_0\|^2 \geq \frac{2A}{M} > 0.$$

En outre, pour la seconde condition, que nous imposons sur M d'être assez grandes pour que

$$\frac{p-(2\gamma+1)}{p+1} - \frac{2A}{M} > 0$$

Nous rappelons ici que $p > 2\gamma+1$ et puis on choisit $b > 0$. On obtient

$$Q'(t) \geq 2(\gamma+1)\varepsilon H(t) + (\gamma+2)\varepsilon \int_0^t \|u_t\|^2 ds + \varepsilon b \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds \tag{5.22}$$

D'autre part, nous avons de (5.12)

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq 2^{\frac{1}{1-\theta}} \left\{ H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} \left(\int_0^t \int_\Omega |u_t u| \, dxds \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right\} \tag{5.23}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t \int_\Omega |u_t u| \, dxds\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq \left[\int_0^t \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_t^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ds\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \\ &\leq C(\Omega) \left[\int_0^t \left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{1}{p+1}} \left(\int_\Omega u_t^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} ds\right]^{\frac{1}{1-\theta}} \\ &\leq C(\Omega) \left[\int_0^t \left(\int_\Omega |u|^{p+1} dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\right]^{\frac{1}{2(1-\theta)}} \left[\int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxds\right]^{\frac{1}{2(1-\theta)}} \end{aligned}$$

Par notre choix de $\theta = \frac{p-1}{2(p+1)}$ on peut appliquer l'inégalité de Young et une fois de plus l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\left(\int_0^t \int_\Omega |u_t u| \, dxds\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq B \left\{ \int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxds + \left[\int_0^t \left(\int_\Omega |u|^{p+1} \, dx \right)^{\frac{2}{p+1}} \right]^{\frac{1}{1-2\theta}} \right\}$$

$$\leq B \left\{ \int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxds + \left(\int_0^t \int_\Omega |u|^{p+1} \, dxds \right)^{2/(p+1)(1-2\theta)} t^{(p-1)/(p+1)(1-2\theta)} \right\}$$

pour un certain $B > 0$. Soit $\beta = \frac{p-1}{2} > 0$, il découle que

$$\left(\int_0^t \int_\Omega |u_t u| \, dxds\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq B \left\{ \int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxds + T^\beta \int_0^t \int_\Omega |u|^{p+1} \, dxds \right\}.$$

Par conséquent, en tenant compte de cette estimation dans (5.23), nous avons

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq 2^{\frac{1}{1-\theta}} \left\{ H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} B \left(\int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxds + T^\beta \int_0^t \int_\Omega |u|^{p+1} \, dxds \right) \right\}.$$

Nous arriverons à

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq K\varepsilon \left\{ 2(\theta+1)H(t) + 2(\theta+1) \int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxds + b \int_0^t \int_\Omega |u|^{p+1} \, dx \right\}$$

pour un certain $K > 0$, ce qui implique par (5.22) que

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq KQ'(t) \tag{5.24}$$

si K est choisi assez grande pour que

$$\begin{cases} 2^{\frac{1}{1-\theta}} \leq 2K\varepsilon(\theta+1) \\ 2^{\frac{1}{1-\theta}} \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} B \leq 2K\varepsilon(\theta+1) \\ 2^{\frac{1}{1-\theta}} \varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}} B T^\beta \leq bK\varepsilon. \end{cases}$$

En intégrant (5.16) sur $(0, t)$ on obtient

$$Q(t)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \geq \frac{1}{Q(0)^{\frac{-\theta}{1-\theta}} - \frac{\theta}{(1-\theta)K}t}.$$

Par conséquent, $Q(t)$ explose en $T^* \leq \frac{(1-\theta)KQ(0)^{\frac{-\theta}{1-\theta}}}{\theta}$. Cette inégalité est vérifiée si $Q(0)$ est choisi de sorte que $Q(0)^{\frac{\theta}{1-\theta}} > \frac{(1-\theta)K}{\theta T}$ ceci est équivalent à choisir l satisfaisant $l^\theta > \frac{(1-\theta)K}{\theta T\|u_0\|^{2\theta}}$.

2. Si .$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ alors on utilise l'estimation

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left|\int_0^s (s-z)^{-(\alpha+1)} u(z)dz\right|^2 ds \\
&\leq \int_0^t \left(\int_0^s (s-z)^{-2(\alpha+1)}dz\right) \left(\int_0^s u^2(z)dz\right) \\
&\leq \int_0^t \frac{s^{1-2(\alpha+1)}}{1-2(\alpha+1)} \left(\int_0^s u^2(z)dz\right) \leq Ct^{-2\alpha} \int_0^s u^2(z)dz.
\end{aligned}$$

Donc,

$$J(t) \leq C\left(2+T^2\right) \int_0^s \int_\Omega u^2(z)dxdz.$$

Ici un bon choix de δ soit $\delta = MH^{-\theta}(t)/cos(\alpha\pi/2)$.Le reste de la preuve est similaire à celui du cas 1

3. Si $\alpha = -\frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[\left(\int_0^s (s-z)^{-\frac{p+1}{2p}}dz\right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_0^s |u|^{p+1}dz\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]^2 ds \\
&\leq C\int_0^t \left[s^{\frac{p}{p+1}-\frac{1}{2}} \left(\int_0^s |u|^{p+1}dz\right)^{\frac{1}{p+1}}\right]^2 ds \\
&\leq C\int_0^t s^{\frac{2p}{p+1}-1}ds \left(\int_0^s |u|^{p+1}dz\right)^{\frac{2}{p+1}}
\end{aligned}$$

et nous procédons comme dans le cas 1. La preuve est terminée. ■

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons traité l'interaction entre la source polynomiale non-linéaire et les termes de dissipation dans le cas d'une dissipation du type Balakrishnan-Taylor, une dissipation viscoélastique et une dissipation fractionnaire. Plusieurs résultats d'existence, existence globale, décroissance polynomiale et décroissance exponentielle sont prouvés. De plus, nous avons établit des conditions suffisantes assurant la non-existence de solutions pour un problème viscoélastique avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et une source non linéaire dans tout l'espace. Les méthodes utilisées sont principalement: la méthode des multiplicateurs, la méthode de Georgiev et Todorova, une technique de traitement du terme fractionnaire, la méthode des fonctions test développée par Mitidieri et Pohozaevet et plusieurs estimations.

Notre objectif ultime après ce travail de thèse est démontrer la décroissance exponentiel des solutions du l'équation de Kirchhoff avec une dissipation fractionnaire faible.

Bibliographie

[1] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, D. Sforza, Decay estimates for second order evolution equations with memory, J. Funct. Anal. (2007).

[2] J. A. D. Appleby, M. Fabrizio, B. Lazzari and D. W. Reynolds, On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity, Math. Models Methods Appl. Sci., 16 (2006), 1677-1694.

[3] A. Arosio, S. Spagnolo., Global solution of the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation, Nonlinear Partial Di. Eq. and their Applications, Coll ege de France Seminar, Vol. 6 (ed. by H. Breziz and J. L. Lions), Pitman, London, (1984).

[4] A. V. Balakrishnan.and L. W, Taylor, Distributed parameter nonlinear damping models for flight structures, in Proceedings "Damping 89", Flight Dynamics Laband Air Force Wright Aeronautical Labs, WPAFB, 1989.

[5] J. M. Ball, Initial-boundary value problems for an extensible beam, J. Math. Analysis and Applications, 42, (1973), pp. 61-90.

[6] J. M. Ball, Stability theory for an extensible beam, J. Di . Equations, 14, (1973), pp. 399-418.

[7] P. Biler., Remark on the decay for damped string and beam equations, Nonlinear Analysis, TMA 10, (1986), pp. 839-842.

[8] E. H. Brito, Decay estimates for generalized damped extensible string and beam equations, Nonlinear Analysis, TMA 8, (1984), pp. 1489-1496.

[9] E. H. Brito, Nonlinear initial-boundary value problems, Nonlinear Analysis, TMA 11, (1987), pp. 125-137.

[10] R. W. Bass and D. Zes, Spillover, nonlinearity, and flexible structures, in The Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, NASA Conference Publication 10065 (ed. L.W.Taylor), 1991, 1-14.

[11] S. Berrimi and S. Messaoudi, Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonl. Anal. T. M. A. 64 (2006), 2314-2331.

[12] C. E. Carrier, On the vibration problem of elastic string, Q. J. Appl. Math., (1953), pp. 151-165.

[13] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho and J. A. Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlocal boundary damping, *Diff. Integral Eqs.,* **14** (2001), no. 1, 85-116.

[14] M. M. Cavalcanti and H. P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, SIAM J. Control Optim., Vol. 42 No. 4 (2003), 1310-1324.

[15] H. R. Clark, Elastic membrane equation in bounded and unbounded domains, Elect. J. Qualit. Th. Diff. Eds, 2002 No. 11, p. 1-21.

[16] H. R. Clark, Asymptotic and smoothness properties of a nonlinear equation with damping, Communication and Applied Analysis, 4 (2000),N0 3, pp. .321-337

[17] H. R. Clark, Global classical solutions to the Cauchy problem for a nonlinear wave equation, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 21, N0 3, (1998), pp. 533-548.

[18] R. W., Dickey, The initial value problem for a nonlinear semi-infinite string, Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, 82 A (1978), pp. 19-26.

[19] E. H. Dowell, Aeroelasticity of plates and shells, Groninger, NL, Noordho Int. Publishing Co. (1975).

[20] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A Math. 16 (1966), 105-113.

[21] R. T. Glassey, Blow-up theorems for nonlinear wave equations, Math. Z., 132 (1973), 183-203.

[22] R. T. Glassey, Finite time blow up for solutions of nonlinear wave equations, Math. Z., 177 (1981), 323-340.

[23] R. T. Glassey, Existence in the large for $\Box u = F(u)$ in two space dimensions, Mat. Z., 178 (1981), 233-261.

[24] S.O. Gripenberg, O. Londen, Staffans, Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

[25] A. Haraux and E. Zuazua, Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. Rational Mech. Anal., 100 (1988), 191-206.

[26] D. Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics No. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[27] P. Holmes, Bifurcations to divergence and utter in flow-induced oscillations a fnite dimensional analysis, Journal of Sound and Vibration, 53(1977), pp. 471-503.

[28] P. Holmes, J.E. Marsden, Bifurcation to divergence and utterflow induced oscillations ; an in nite dimensional analysis, Automatica, Vol. 14 (1978).

[29] T. J. Hughes, J.E. Marsden, ., Mathematical foundation of elasticity, Englewood C. Prentice-Hall (1983).

[30] S. Jiang and J. E. Munoz Rivera, A global existence theorem for the Dirichlet problem in nonlinear n-dimensional viscoelastic, Differential and Integral Equations, 9 (1996), 791-810.

[31] V. K. Kalantarov and O. A. Ladyzhenskaya, The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic type, J. Soviet Math., 10 (1978), 53-70.

[32] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, Res. Appl. Math., Masson/Wiley, Paris/Chichester, 1994.

[33] V. Komornik, E, Zuazua, A direct method for boundary stabilization of the wave equation, Journal Math. Pure et Appl., 69 (1990), pp. 33-54.

[34] M. Kopackova, Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation, Comment. Math. Univ. Carolina. 30 (1989), 713-719.

[35] M. Kirane and N.-e. Tatar, Nonexistence of solutions to a hyperbolic equation with a time fractional damping. Zeitschrift fur Analysis undihre Anwendungen (J, Anal, Appl) No. 25 (2006), 131-42.

[36] G. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, Tauber, Leipzig (1883).

[37] H.A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form $Du_{tt} = Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., 192 (1974), 1-21.

[38] MR. Li and L. Y. Tsai, Existence and nonexistence of global solutions of some systems of semilinear wave equations, Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 54 (2003) 13971415.

[39] D. Matignon, J. Audounet, G. Montseny, Energy decay for wave equations with damping of fractional order, Proc. Fourth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena, INRIA-SIAM, Golden, CO, 1998, pp. 638–640.

[40] T. Matsuyama and R. Ikehata, On global solutions and energy decay for the wave equation of Kirchhoff type with nonlinear damping terms, J. Math. Anal. Appl. 204 (1996), no. 3, 729–753.

[41] P. M. Matos, Mathematical analysis of the nonlinear model for the vibrations of a string, Nonlinear Analysis, TMA, Vol. 17, 12 (1991),pp. 1125-1137.

[42] M. Mejden and N-e, Tatar, On the wave equation with a temporal non-local term.

[43] L. A, Medeiros, On a new class of nonlinear wave equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 69, 1 (1979), pp. 252-262.

[44] L. A. Medeiros, J. L, Ferrel, S. B, Menezes, Vibrations of elastic strings Mathematical aspects I and II, J. Computational Analysis and Applications.

[45] E. Mitidieri and S. Pohozaev, A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities, Proc. Steklov Inst. Math., V. 234 (2001), 1-383.

[46] J. E. Munoz Rivera, Global solution on a quasilinear wave equation with memory, Bolletino U.M.I., 7(8B) (1994), 289-303.

[47] R. Narashinham, Nonlinear vibrations of elastic strings, Journal of Sound and Vibration, 8(1968), pp. 134-136.

[48] K. Nishihara and Y. Yamada, On global solutions of some degenerate quasilinear hyperbolic equations with dissipative terms, Funkcial. Ekvac., 33 (1990), 151-159.

[49] M. Nakao, Decay of solutions of some nonlinear evolution equation, J. Math. Anal. Appl. 60 (1977), 542-549.

[50] J.A. Nohel, D.F. Shea, Frequency domain methods for Volterra equations, Adv. Math. 22 (1976) 278304.

[51] K. Ono, Global existence, decay, and blowup of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings, J. Diff. Eqs. 137 (1997), no. 2, 273–301.

[52] K. Ono, On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate nonlinear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation, Math. Meth. Appl. Sci., 20 (1997), 151-177.

[53] K. Ono, On global solutions and blow-up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation, J. Math. Anal. Appl., 216 (1997), 321-342.

[54] V. Pata, Exponential stability in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math. Volume LXIV, No. 3 (2006), 499-513.

[55] J. Y. Park and J. Ja. Baeon The existence of solutions of strongly damped nonlinear wave equations. Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. 23 No. 6 (2000), 369–382.

[56] L. Payne, D.H. Sattinger, Saddle points and instability on nonlinear hyperbolic equations, Israel J. Math. 22 (1975) 273303.

[57] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[58] D. C, Pereira, Existence, uniqueness and asymptotic behavior for solutions of the nonlinear beam equation, Nonlinear Analysis, 8, (1990), pp. 613-623.

[59] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Sciences and Engineering, vol. 198, Academic Press, 1999.

[60] S. I, Pohozaev, On a class of quasilinear hyperbolic equations, Math. USSR Sbornik, 25 (1975), pp. 145-158

[61] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach, 1987 (Trans. from Russian 1993).

[62] D.H. Sattinger, On global solutions for nonlinear hyperbolic equations, Arch. Rational Mech. Anal. 30 (1968) 148172.

[63] O. Staffans, On a nonlinear hyperbolic Volterra equations, SIAM J. Math. Anal 11 (1980) 793812.

[64] N.-e. Tatar, A wave equation with fractional damping, Zeit. Anal. Anw. (J. Anal. Appl.) 22 (3) (2003) 110.

[65] N.-e. Tatar, The decay rate for a fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 295 (2004) 303314.

[66] N.-e. Tatar, A blow up result for a fractionally damped wave equation, Nonl. Diff. Eqs. Appl. (NoDEA) 12 (2) (2005) 215226.

[67] N.-e. Tatar and A. Zaraï, On a Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and source term, To appear in DCDIS.

[68] N.-e. Tatar and A. Zaraï, Exponential stability and blow up for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, Demonstratio Math Vol 44 No 1, 67-90.

[69] N.-e. Tatar and A. Zaraï, Global existence and polynomial decay for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, Arch. Math. (Brno) 46 (2010), no. 3, 157–176.

[70] N.-e. Tatar : Long time behavior for a viscoelastic problem with a positive definite kernel, Australian J. Math. Anal. Appl. Vol. 1 Issue 1, Article 5, (2004), 1-11.

[71] R. M. Torrejon and J. Young, On a quasilinear wave equation with memory, Nonlinear Anal., Theory, Methods & Applications, 16 1991), 61-78.

[72] G. F. Webb, Existence and asymptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation, Canad. J. Math., 32 No. 3(1980), 631-643.

[73] S. T. Wu and L. Y. Tsai, On global solutions and blow-up solutions for a nonlinear viscoelastic wave equation with nonlinear damping, National Chengchi University, preprint, 2004.

[74] S. T. Wu and L. Y. Tsai, On global existence and blow-up of solutions for an integro-differential equation with strong damping. Taiwanese J. Math. 10 (2006), no. 4, 979-1014.

[75] Vo-Khac-Khoan, Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux Deérriveées Partielles II, Librairie Vuibert, Paris, 1972.

[76] Y. You, Inertial manifolds and stabilization of nonlinear beam equatons with Balakrishnan-Taylor damping, Abstract and Applied Analysis, Vol. 1 Issue 1, (1996) pp 83-102.

[77] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, Comm. PDE., 15 (1990), 205-235.

Résumé

L'objet de notre travail porte essentiellement sur la détermination de conditions suffisantes pouvant mener la solution à tendre vers zéro lorsque t tend vers l'infini ou à exploser en temps fini pour certains problèmes de Kirchhoff avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor en présence d'un terme source de type polynomiale. Il est déja connu que cette source empêche l'existence globale (en temps) de la solution du problème. En fait, la solution (ou plus précisément l'énergie du problème) tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand s'approche d'une valeur finie appelée temps d'explosion. Pour cette raison on appelle le terme source terme d'explosion. Les termes de dissipations sont par contre des termes qui ont tendance à stabiliser la solution du problème. En effet, Il est facile de voir qu'en absence de termes sources, si la solution existe localement alors on peut toujours la prolonger en une solution globale. De plus, ces termes de dissipations forcent la solution à tendre vers l'état d'équilibre. Cette interaction entre terme source et terme dissipatif a été une question centrale dans de nombreux travaux et elle l'est toujours. Il est important de savoir quel terme l'emporte sur l'autre.

En plus d'une Introduction, une Section Préliminaire et une section contenant un grand nombre de références, le document comprend cinq chapitres formant le corps de la thèse et nos contributions se trouvent dans les Chapitres 1, 2, 3, 4 et 5.

Le contenu du Chapitre 1 traite la décroissance exponentielle des solutions d'un problème de type Kirchhoff avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor sous l'effet d'une force polynomial. La deuxième partie du chapitre est consacrée à l'établissement de conditions suffisantes assurant l'explosion en temps fini.

Dans le Chapitre 2, la dissipation frictionnelle forte est remplacée par une dissipation extrêmement faible qui est la dissipation viscoélastique. On montre que cette dissipation est capable de stabiliser le système d'une façon exponentielle. Ceci améliore considérablement le premier chapitre.

Le chapitre 3, concerne aussi le cas d'une dissipation viscoélastique mais sous des conditions beaucoup plus faibles. Un résultat d'existence globale et de décroissance polynomiale est prouvé en utilisant les ensembles stables dans le cas d'une source non-linéaire. Les résultats obtenus dans ce chapitre étendent le résultat de décroissance exponentielle présenté dans le Chapitre 2. Ici, nous étudions le cas où la décroissance du noyau est polynomiale.

Dans le Chapitre 4, nous établissons un résultat de non-existence d'un problème viscoélastique avec une dissipation de Balakrishnan-Taylor et une source non linéaire dans tout l'espace. La preuve de ce résultat est basée sur la méthode des fonctions test développées par Mitidieri et Pohozaev. Nous présenterons aussi des conditions nécessaires d'existence locale et globale.

Dans le Chapitre 5 nous donnons des conditions suffisantes d'explosion de la solution d'une équation non dégénérée non linéaire de Kirchhoff avec une dissipation fractionnaire faible en temps fini. L'outil principal utilisé dans la preuve repose sur la méthode de Georgiev et Todorova et sur une technique de traitement du terme fractionnaire.

Abstract

The purpose of our work focuses on the determination of sufficient conditions that can lead the solution to tend to zero when t goes to infinity or blow-up in finite time for some problems of Kirchhoff with Balakrishnan-Taylor damping in presence of a source term of polynomial type. It appears that this source prevents the global existence (in time) of the solution of the problem is to say that the solution (or more precisely the energy of the problem) tends to infinity for the space norm when t tend to a finite time T. The damping term stabilizes the solution of the problem. It is easy to see that in the absence of source terms, if the solution exists locally then we can always extend it into a global solution. This interaction between source term and damping term has been purpose in many studies and it's still. It is important to know what term outweighs the other. .

In addition to an introduction, a preliminary section and a section containing a large number of references, the document includes five chapters forming the thesis and our contributions are found in Chapters 1, 2, 3, 4 and 5. .

First, we establish sufficient conditions yielding exponential decay of solutions for a Kirchhoff problem. The equation is subject to a damping of Balakrishnan-Taylor type and a nonlinear forcing term. Moreover, we prove a blow up infinite time result.

Chapter 2, is devoted to the study of a nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping. We show that the weak dissipation produced by the memory term is strong enough to stabilize solutions exponentially. Also, we show that a nonlinear source of polynomial type is able to force solutions to blow up in finite time even in presence of a stronger damping kernel.

In Chapter 3, a viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping is considered. Using integral inequalities and multiplier techniques we prove polynomial decay estimates for the energy of this equation. The results obtained in this Chapter extended Chapter 2. .

In Chapter 4, we establish a nonexistence result for a viscoelastic problem with Balakrishnan-Taylor damping and a nonlinear source in the whole space. The nonexistence result is based on the test function method developed by Mitidieri and Pohozaev. We establish some necessary conditions for local existence and global existence as well.

In Chapter 5, we give sufficient conditions of blow-up of the solution of a non-degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a weak fractional damping in finite time, we use an argument due to Tatar and proves the global solution of this problem.

الملخص

الغرض من عملنا هو تحديد شروط كافية يمكن في ظلها أن تؤول الحلول الى الصفر عندما يؤول الزمن الى ما لا نهاية أو تضمحل الحلول في وقت منته لبعض مسائل كيرشوف مع تخامد بالاكريشنان-تايلور في وجود قوة خارجية تعمل على تبديد الحلول بمعنى ان الحلول تؤول الى مالانهاية عندما يقترب الزمن من زمن منته والذي يسمى زمن الانفجار. قوى التخامد هي التي تحقق الاستقرار في حلول المسالة، فمن السهل أن نرى أن في غياب القوى الخارجية، إذا كان هذا الحل موجودا محليا يمكننا دائما تمديده الى حل كلي. ان التفاعل بين القوى الخارجية وقوى التخامد قضية مركزية في العديد من الدراسات و لا تزال كذلك. ومن المهم أن نعرف من المتفوق.

بالإضافة إلى مقدمة، وقسم المفاهيم الاولية وقسم يحتوي على عدد كبير من المراجع، وتتضمن الاطروحة خمسة فصول حيث توجد مساهماتنا في الفصول 1 ، 2 ، 3 ، 4 و 5.

في محتويات الفصل 1 نثبت ان الحلول تؤول الى الصفر أسيا عندما يؤول الزمن الى ما لانهاية ثم نبين ان الحلول تضمحل تحت شروط معينة.

في الفصل 2، يتم استبدال قوى التخامد القوية بقوى المرونة اللزجة وهي قوى ضعيفة للغاية. و نبين أنه بإمكانها ان تجعل المسالة مستقرة. هذا يحسن كثيرا من نتائج الفصل الأول.

كذلك نبين ان الحلول تضمحل تحت شروط معينة رغم اضافة قوى تخامد قوية الى المعادلة وهذا باستخدام طريقة توفيقية بين طريقة لفين والطريقة المباشرة.

في الفصل 3 نعالج نفس المسالة المطروحة في الفصل الثاني. ونثبت نتيجة وجود حلول كلية باستخدام المجموعات المستقرة في حالة وجود قوة خارجية. النتائج المتحصل عليها في هذا الفصل تعمم نتائج الفصل 2.

في الفصل 4، نبين عدم وجود الحلول لمعادلة كيرشوف في الفضاء بكامله ولهذا الغرض نستخدم طريقة دوال الاختبار كما اننا نعطي شروطا كافية لوجود الحلول.

في الفصل 5 نعطي شروطا كافية لاضمحلال الحلول لمعادلة كيرشوف مع قوة تخامد شاذة ضعيفة ويستند البرهان الى طريقة جورجييف و تودوروفا وتقنية تطار في علاج المشتقات ذات الرتب الكسرية.