

REPUBLIQUE ALGERINNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI -CONSTANTINE-

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister
En : Mathématiques

Thème :

Equivalent du Théorèmes de convergence dans le cas
conditionnel

Option :

Mathématiques appliquées

Présenté par :

Mr. ZEHROR Okba

Devant le jury :

<u>Président :</u>	Mr. M. Denche	Prof.	Univ. Constantine
<u>Rapporteur :</u>	Mr. Z. Mohdeb	M.C.	Univ. Constantine
<u>Examineur :</u>	Mr. F. L. Rahmani	M.C.	Univ. Constantine
<u>Examineur :</u>	Mr. A. Ayadi	M.C.	Univ. Constantine

Soutenu le 11/12/2003

A la mémoire de mon père et de mon frère Hichem.

A ma mère et mes sœurs.

A mes frères, Abdel Ali, Fayçal et Zoheir.

A la mémoire de El arbi Ben Mhidi.

A tous mes amis et en particulier à Brahim et Tarek.

Je tien à présenter mes remerciement à tous ceux qui m'ont aidé dans ma réussite et plus particulièrement :

- A mon professeur M^{me} F.Missaci pour son aide et ses conseils tout en m'orientant dans ce mémoire.**
- A mon professeur M^{er} Z.Mehadb qui m'a facilite ma tâche dans ce mémoire.**
- A tous mes amis qui m'ont ménagé aucun effort en particulier B.Brahim, M.Ramzi, K.Kheiredine et D.Aziz.**
- A M^{er} le président de la commission M. Denech ainsi que les membres du jurés M^{er} F. L. Rahmani et M^{er} A. Ayadi .**

Table des matières

1	Rappels	7
1.1	Intégrale de Lebesgue	7
1.2	Différents modes de convergence	10
1.2.1	Définitions :	10
1.2.2	Lien entre ces modes de convergence :	12
1.3	Espérance conditionnelle	13
1.3.1	Définition :	13
1.3.2	Propriétés :	14
1.3.3	Résultats :	15
2	Théorème de convergence dominée conditionnel Généralisé	16
2.1	Théorème de convergence dominée généralisé	16
2.2	Théorème de convergence dominée conditionnel généralisé	19
3	Théorème de convergence dominée conditionnel affiné	23
3.1	Théorème de convergence dominée affiné	23
3.2	Théorème de convergence dominée conditionnel affiné	25
4	Applications	28
4.1	T.C.D.A. dans l^p pour l'espérance conditionnelle	29
4.2	T.C.D.G. dans l^p pour l'espérance conditionnelle	31
4.3	Continuité et dérivabilité sous l'espérance conditionnelle	35

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'intégrale de Riemann, l'interversion du passage à la limite et de l'intégration est valable pour une suite uniformément convergente, ce qui assez restreignant dans les applications.

L'introduction de l'intégrale de Lebesgue a été motivée, entre autres, par la recherche de conditions "acceptables" pour cette interversion, ceci étant devenu pressant pour le maniement des séries de Fourier. Ce problème a pu trouver une solution satisfaisante puisque, dans le cadre de la théorie de l'intégrale de Lebesgue, deux théorèmes et qui sont le théorème de convergence monotone et le théorème de convergence dominée donnent des conditions acceptables d'interversion du passage à la limite et de l'intégration et se sont avérés fondamentaux dans les applications.

L'introduction, en probabilités, de la notion d'espérance conditionnelle et qui est une généralisation de la notion d'intégrale, a naturellement soulevé la question de proposer des équivalents du théorème de convergence monotone et du théorème de convergence dominée dans le cas de l'espérance conditionnelle. La réponse est classique et elle est donnée sous forme de deux théorèmes appelés théorème de convergence monotone conditionnel et théorème de convergence dominée conditionnel.

Par ailleurs d'autres versions du théorème de convergence dominée respectivement appelés théorème de convergence dominée affiné et théorème de convergence dominée généralisé sont devenus classiques dans la littérature des probabilités. Ceci nous a inspiré l'introduction de leurs équivalents dans le cas de l'espérance conditionnelle. Autrement dit nous avons cherché et introduit la généralisation du théorème de convergence dominée affiné et celle du théorème de convergence dominée généralisé au cas de l'espérance conditionnelle. Ce fut le point de départ de ce travail qui se compose de quatre chapitres. Le premier chapitre rassemble des rappels sur l'intégrale de Lebesgue, quelques modes de convergence et sur l'espérance conditionnelle, notions utiles à la suite du mémoire. Le chapitre 2 est consacré à la généralisation du théorème de convergence dominée généralisé

au cas de l'espérance conditionnelle. Quant au chapitre 3 il donne la **généralisation du** théorème de convergence dominée affiné au cas de l'espérance conditionnnelle. **Enfin le** dernier chapitre propose quelques exemples d'applications des résultats **précédemment** donnés.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Intégrale de Lebesgue

Tout notre travail se base sur l'intégrale de Lebesgue dont une des raisons importantes de son introduction a été la recherche de conditions acceptables d'interversion du passage à la limite et de l'intégration, que nous appelons continuité de l'intégrale. Nous saisissons cette opportunité pour essayer de résumer les étapes ayant conduit à la construction de cette intégrale en nous appuyant sur l'article de F. Messaci et autres (1999).

Les deux notions de mesure et d'intégrale sont intimement liées puisque la mesure d'un ensemble mesurable est l'intégrale de l'indicatrice de cet ensemble et c'est le point de départ de la définition de l'intégrale. Une fonction positive étant la limite croissante d'une suite de combinaisons linéaires d'indicatrices d'ensembles mesurables son intégrale est définie comme la limite (qui peut être finie ou infinie) des intégrales de ces combinaisons (en prenant l'intégrale d'une combinaison d'indicatrices comme étant la combinaison des intégrales de ces indicatrices, ceci permettant d'obtenir la linéarité de l'intégrale). Enfin l'intégrale d'une fonction pour laquelle l'intégrale du module est finie, appelée fonction intégrable, n'est que la différence des intégrales de sa partie positive et de sa partie négative.

En nous rappelant qu'une motivation importante est d'obtenir la continuité de l'in-

tégrale sous des conditions pas trop restrictives, il n'est pas étonnant de voir que dans la définition de la mesure a été déjà exigée sa continuité monotone, autrement dit la mesure de la réunion d'une suite croissante d'ensembles mesurables est égale à la limite des mesures de ces ensembles. Et il s'avère que justement cette propriété permet de démontrer le théorème de convergence monotone, lui même permettant de prouver le lemme de Fatou qui à son tour permet de déduire le théorème de convergence dominée. Ces deux théorèmes donnent la continuité de l'intégrale sous des conditions acceptables (suite croissante de fonctions positives pour le le théorème de convergence monotone et suite convergente et dominée par une fonction intégrable pour le théorème de convergence dominée). Ceci a eu pour conséquence de faciliter l'étude des fonctions définies par des intégrales.

Signalons aussi que l'intégrale de Lebesgue a le gros avantage, par rapport à l'intégrale de Riemann qui est définie sur $\mathbb{R}^n$, d'être définie sur un ensemble quelconque ce qui a eu comme conséquence d'avoir de nombreuses applications parmi lesquelles la théorie des probabilités.

Soit (E, β, m) un espace mesuré et f une application mesurable à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$.

- Si $f = 1_A$ (indicatrice de l'ensemble mesurable A) alors

$$\int f dm = m(A).$$

- Si $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$ (combinaison linéaire d'indicatrices d'ensembles mesurables appelée fonction simple et on note $f \in S$) alors

$$\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i).$$

- Si f est positive alors on pose

$$\int f dm = \sup \left\{ \int g dm, g \in S^+, g \leq f \right\}$$

où S^+ est l'ensemble des fonctions simples et positives.

Enfin

- Si f est intégrable (i.e. $\int |f| dm < \infty$) alors

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm$$

où

$$f^+ = \sup(f, 0) \text{ et } f^- = \sup(-f, 0)$$

Si m est une mesure de probabilité notée P , $\int f dP$ est notée Ef et on l'appelle espérance de f . Une fonction mesurable est appelée une variable aléatoire.

Remarquons que les preuves des résultats de ce chapitre sont rappelées en annexe.

L'application qui à $f \mapsto \int f dm$ est linéaire et positive et vérifie en outre.

Lemme de Fatou

Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives alors

$$\int \underline{\lim} f_n dm \leq \underline{\lim} \int f_n dm$$

Théorème de convergence monotone (T.C.M.)

Si (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives alors

$$\lim_n \int f_n dm = \int \sup_n f_n dm$$

1.2 Différents modes de convergence

Nous rappelons les définitions des modes de convergence que nous utilisons dans la suite ainsi que quelques liens existant entre eux.

1.2.1 Définitions :

Convergence presque partout :

on dit que la suite (f_n) converge presque partout vers f s'il existe $A \in \beta$ avec $m(A) = 0$ tel que

$$\{x \mid f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} \subset A$$

on note :

$$f_n \xrightarrow{p.p.} f$$

Si m est une probabilité on dit que (f_n) converge presque sûrement vers f et on note

$$f_n \xrightarrow{p.s.} f$$

Convergence en mesure :

La suite de fonctions mesurables (f_n) converge en mesure vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_n m\{|f_n - f| > \varepsilon\} = 0.$$

on note :

$$f_n \xrightarrow{m} f$$

Si m est une probabilité on dit que (f_n) converge en probabilité vers f et on note

$$f_n \xrightarrow{P} f$$

Convergence dans l^p

Une fonction mesurable f est dans l^p si

$$\int |f|^p dm < \infty$$

On dit que la suite de fonctions mesurables (f_n) de l^p converge dans l^p vers la fonction mesurable f de l^p si

$$\int |f_n - f|^p dm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On note :

$$f_n \xrightarrow{l^p} f.$$

1.2.2 Lien entre ces modes de convergence :

a)

$$f_n \xrightarrow{l^p} f \implies f_n \xrightarrow{m} f.$$

b) $f_n \xrightarrow{m} f \implies \exists (f_{n_j})$ sous suite de (f_n) telle que $f_{n_j} \xrightarrow{p.p} f$.

c) Si $m(E) < \infty$ alors

$$f_n \xrightarrow{p.p} f \implies f_n \xrightarrow{m} f.$$

d) **Théorème de convergence dominée de lebesgue (T.C.D.) :**

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables convergeant p.p vers f . Supposons qu'il existe g intégrable telle que

$$\forall n \quad |f_n| \leq g \text{ p.p alors}$$

$$f_n \xrightarrow{l^1} f.$$

en particulier

$$\int f = \lim_n \int f_n.$$

e) **Lemme 1.1**

Si $f_n \xrightarrow{m} f$ et s'il existe g intégrable telle que :

$$\forall n \quad |f_n| \leq g \text{ p.p.}$$

alors f est intégrable

Une suite de fonctions (f_n) est dite équi intégrable si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| dm < \varepsilon$$

$$(\text{ou } \sup_n \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| dm \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0)$$

f) Soit m une mesure finie.

Si $f_n \xrightarrow{m} f$. et si (f_n) est équi intégrable alors

$$f_n \xrightarrow{L^1} f.$$

1.3 Espérance conditionnelle

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace de probabilité et $\mathcal{D}$ est une sous tribu de $\mathcal{A}$.

1.3.1 Définition :

Si Y est une variable aléatoire réelle intégrable (ou positive non nécessairement intégrable) sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, l'espérance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{D}$,

notée $E(Y/\mathcal{D})$ est toute variable aléatoire réelle $\mathcal{D}$ mesurable vérifiant

$$\forall D \in \mathcal{D} : \int_D Y dP = \int_D E(Y/\mathcal{D}) dP$$

Remarque :

$E(Y/\mathcal{D})$ n'est autre que la dérivée de Radon-Nykodim de la mesure

$Q(D) = \int_D Y dP$, par rapport à la restriction de P sur $\mathcal{D}$.

1.3.2 Propriétés :

- Positivité :

si $Y \geq 0 \implies E(Y/\mathcal{D}) \geq 0$ p.s

- linéarité :

l'application : $l^1(\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow l^1(\Omega, \mathcal{D}, P)$

$$Y \longrightarrow E(Y/\mathcal{D})$$

est linéaire

- Croissance :

si $X \leq Y$ alors $E(X/\mathcal{D}) \leq E(Y/\mathcal{D})$.

- $E(E(Y/\mathcal{D})) = E(Y)$.

- Inégalité de Jensen :

Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit φ une fonction $\beta(I)$ mesurable convexe sur I avec $\varphi \circ Y$ intégrable . Nous avons :

$$E(\varphi \circ Y/\mathcal{D}) \geq \varphi \circ E(Y/\mathcal{D})$$

Exemples de fonctions convexes :

$x \rightarrow |x|$ est convexe

$x \rightarrow x^p$ est convexe sur R_+ pour $p \geq 1$

Si g est convexe et si f est convexe croissante alors $f \circ g$ est convexe.

1.3.3 Résultats :

Théorème 1 *Théorème de convergence monotone conditionnel (T.C.M.C)*

soit (Y_n) une suite croissante de variables aléatoires réelles positives avec

$Y_n \nearrow Y$

alors

$$\lim_n E(Y_n/\mathcal{D}) = E(Y/\mathcal{D}).$$

Théorème 2 *Théorème de convergence dominée conditionnel (T.C.D.C)*

Si (Y_n) est une suite de variables aléatoires réelles convergeant p.s vers Y et

s'il existe une variable aléatoire réelle Z intégrable tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}. |Y_n| \leq Z$ p.s.

alors :

$$E(Y/\mathcal{D}) = \lim_n E(Y_n/\mathcal{D}).$$

Théorème 3 :

Soient (f_n) et (g_n) deux suites d'applications mesurables avec :

$$f_n \xrightarrow{p.p} f \quad g_n \xrightarrow{p.p} g$$

$$g_n \text{ et } g \text{ intégrables, } \forall n \ |f_n| \leq g_n \quad \text{et} \quad \lim_n \int g_n = \int g$$

Alors :

$$\lim_n \int f_n = \int f$$

Preuve :

La suite $(|f_n|)$ étant majorée par la suite (g_n) qui est intégrable, nous déduisons que f_n est intégrable pour toute n . De plus :

$$|f| \leq g$$

Ce qui montre que f est intégrable, puisque g est intégrable.

Par ailleurs

$$f_n + g_n \geq 0$$

entraîne par le lemme de Fatou

$$\int f + g \leq \underline{\lim} \int f_n + g_n$$

Nous obtenons alors

$$\int f + \int g \leq \underline{\lim} \int f_n + \overline{\lim} \int g_n = \underline{\lim} \int f_n + \int g$$

Nous avons :

$$\underline{\lim} Y_n = \sup_k \inf_{n \geq k} Y_n$$

En posant :

$$X_k = \inf_{n \geq k} Y_n$$

nous obtenons une suite croissante vérifiant

$$X_k \leq Y_n \quad \forall n \geq k$$

Donc :

$$E(X_k/\mathcal{D}) \leq E(Y_n/\mathcal{D}) \quad \forall n \geq k$$

D'où

$$E(X_k/\mathcal{D}) \leq \inf_{n \geq k} E(Y_n/\mathcal{D}) \leq \sup_k \inf_{n \geq k} E(Y_n/\mathcal{D})$$

il vient alors

$$E(X_k/\mathcal{D}) \leq \underline{\lim} E(Y_n/\mathcal{D}) \quad \forall k \tag{2.3}$$

Par ailleurs

$$E(Y - X/\mathcal{D}) \leq \underline{\lim} E(-X_n/\mathcal{D}) + \overline{\lim} E(Y_n/\mathcal{D}) = -\overline{\lim} E(X_n/\mathcal{D}) + \overline{\lim} E(Y_n/\mathcal{D})$$

Il vient

$$\overline{\lim} E(X_n/\mathcal{D}) \leq E(X/\mathcal{D}) \quad (2.5)$$

Les inégalités (2.4) et (2.5) conduisent au résultat :

$$\lim_n E(X_n/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

Chapitre 3

Théorème de convergence dominée conditionnel affiné

Une autre version du théorème de convergence dominée de Lebesgue qui requiert la convergence en mesure plutôt que la convergence presque sûre est classique (cf par exemple Bibi ou Royden). Nous appelons cette version théorème de convergence dominée affiné et nous le notons T.C.D.A.

Nous allons suivre la même démarche qu'au chapitre précédent mais cette fois nous utiliserons cette autre version. Autrement dit nous allons introduire et prouver un théorème, que nous notons T.C.D.A.C, et qui est la généralisation du T.C.D.A au cas conditionnel.

Pour cela nous commençons par rappeler le T.C.D.A et sa preuve puis nous énonçons et prouvons le T.C.D.A.C.

3.1 Théorème de convergence dominée affiné

Dans le cas d'un espace de mesure finie le résultat suivant (T.C.D.A.) est une généralisation du T.C.D. puisque dans ce cas la convergence en mesure est plus faible que la convergence presque sûre requise au T.C.D.

Théorème 5 : (cf Bibi ou Royden)

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int f_{N_{m_j}} = \int f$$

Ceci prouve l'existence d'un entier j_0 qui vérifie :

$$\forall j > j_0 \quad : \quad \left| \int f_{N_{m_j}} - \int f \right| \leq \varepsilon$$

Ce qui contredit la relation (3.1).

D'où le résultat :

$$\lim_n \int f_n = \int f$$

3.2 Théorème de convergence dominée conditionnel affiné

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser le théorème précédent au cas de l'espérance conditionnelle

Théorème 6 :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles avec :

$$X_n \xrightarrow{P} X .$$

Et $\forall n. |X_n| \leq Y$ p.s

où Y est une variable aléatoire réelle intégrable.

Alors :

$$\lim_n E(X_n / \mathcal{D}) = E(X / \mathcal{D})$$

Preuve :

L'espérance conditionnelle possédant les mêmes propriétés que l'espérance, la preuve du théorème précédent s'avère applicable pour démontrer ce théorème en remplaçant l'espérance par l'espérance conditionnelle et le T.C.D par le T.C.D.C.

En effet :

L'inégalité $|X_n| \leq Y$ et l'intégrabilité de Y entraînent l'intégrabilité de X_n et X .

Supposons que :

$$E(X_n / \mathcal{D}) \not\rightarrow E(X / \mathcal{D})$$

Donc :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall m \quad \exists N_m > m \quad : |E(X_{N_m} / \mathcal{D}) - E(X / \mathcal{D})| > \varepsilon$$

Pour

$$m = 1 \quad \exists N_1 > 1 \quad : |E(X_{N_1} / \mathcal{D}) - E(X / \mathcal{D})| > \varepsilon$$

$$m = N_1 + 1 \quad \exists N_2 > N_1 \quad : |E(X_{N_2} / \mathcal{D}) - E(X / \mathcal{D})| > \varepsilon$$

Autrement dit

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists N_m > N_{m-1} \quad :$$

$$|E(X_{N_m} / \mathcal{D}) - E(X / \mathcal{D})| > \varepsilon \quad \forall m \geq 1 \quad (3.2)$$

Considérons la sous suite (X_{N_m}) , comme $X_n \xrightarrow{P} X$ alors $X_{N_m} \xrightarrow{P} X$

Il existe donc $(X_{N_{m_j}})$ sous suite de (X_{N_m}) tel que :

$$X_{N_{m_j}} \xrightarrow{p.s} X$$

Et par le T.C.D.C :

$$\lim_n E(X_{N_{m_j}}/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

Donc :

$$\exists j_0 : \forall j > j_0 \quad \left| E(X_{N_{m_j}}/\mathcal{D}) - E(X/\mathcal{D}) \right| \leq \varepsilon$$

Ce qui contredit la relation (3.2).

Nous pouvons donc conclure que :

$$\lim_n E(X_n/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

Corollaire :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles vérifiant :

$$\exists M \geq 0, \forall n \quad |X_n| \leq M \quad \text{ps}$$

$$\text{Et} \quad X_n \xrightarrow{P} X$$

Alors :

$$\lim_n E(X_n/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

Preuve :

comme dans un espace de probabilité toute constante est intégrable, il suffit de prendre $Y = M$ et d'appliquer le théorème précédent.

Chapitre 4

Applications

Partons de résultats classiques nous proposons des exemples d'applications du T.C.D.A, T.C.D.C. $\mathfrak{A}$, T.C.D.G et T.C.D.C.G.

Lemme 4.1

Si $X_n \xrightarrow{lp} X$ alors

$$E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{lp} E(X/\mathcal{D})$$

Preuve

L'inégalité de Jensen entraine

$$\begin{aligned} |E(X_n/\mathcal{D}) - E(X/\mathcal{D})|^p &= |E(X_n - X/\mathcal{D})|^p \\ &\leq E(|X_n - X|^p/\mathcal{D}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

par application de l'inégalité (4.1), nous obtenons

$$\int |E(X_n - X/\mathcal{D})|^p \leq \int E(|X_n - X|^p/\mathcal{D}) = E|X_n - X|^p$$

puisque $E(E(X/\mathcal{D})) = E(X)$

Ce qui veut dire que $E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{lp} E(X/\mathcal{D})$ si $X_n \xrightarrow{lp} X$

Exemple 1

Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et si (X_n) est équi-intégrable
alors

$$E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{I^1} E(X/\mathcal{D})$$

Preuve

D'après la propriété f) de 1.2.2, $X_n \xrightarrow{I^1} X$ et il suffit d'appliquer le lemme 4.1 pour avoir

$$E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{I^1} E(X/\mathcal{D})$$

4.1 T.C.D.A. dans l^p pour l'espérance conditionnelle

La proposition suivante est une généralisation du T.C.D.A, que nous retrouvons pour $p = 1$

Proposition 4.1 (cf par exemple Bouziad et calbrix)

Supposons que la suite (f_n) soit dans $l^p (p \geq 1)$ que $f_n \xrightarrow{m} f$ et qu'il existe g de l^p telle que

$$\forall n \quad |f_n| \leq g \text{ p.p}$$

Alors :

$f \in l^p$ et

$$f_n \xrightarrow{l^p} f$$

Preuve :

Nous donnons une preuve immédiate, plus facile que celle proposée par Bouziad et Calbrix et qui se base sur le T.C.D.A.

On a $f_n \xrightarrow{m} f$ donc $\exists (f_{n_j})$ sous suite de (f_n) telle que

$$f_{n_j} \xrightarrow{p,p} f$$

comme $|f_{n_j}| \leq g$ alors $f \leq g$, d'où $f \in l^p$

On a $f_n \xrightarrow{m} f$ donc

$$|f_n - f|^p \xrightarrow{m} 0$$

De plus $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p \in l^1$ puisque $g \in l^p$

Le T.C.D.A entraîne alors

$$\int |f_n - f|^p \longrightarrow 0$$

Autrement dit

$$f_n \xrightarrow{l^p} f$$

Exemple2

Supposons que, la suite (X_n) soit dans $l^p (p \geq 1)$

que $X_n \xrightarrow{P} X$ et qu'il existe Y de l^p telle que

$\forall n \quad |X_n| \leq Y$ p.s.

Alors

$X \in l^p$ et

$$\lim_n E(X_n/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

et on a

$$E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{l^p} E(X/\mathcal{D})$$

Preuve

Nous avons $X_n \xrightarrow{P} X$, $|X_n| \leq Y$

avec $Y \in l^1$ (car $l^p \subset l^1$)

Le T.C.D.C.A entraine alors que

$$\lim_n E(X_n/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

Par ailleurs les conditions de la proposition(4.1).

étant satisfaites pour la suite (X_n) , nous en déduisons

$$X_n \xrightarrow{l^p} X$$

l'application du lemme(4.1) donne alors

$$E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{l^p} E(X/\mathcal{D})$$

4.2 T.C.D.G. dans l^p pour l'espérance conditionnelle

La proposition suivante n'est que le T.C.D dans l^p

Proposition 4.2 (cf Bouziad et Calbrix)

Supposons que la suite (f_n) soit dans $l^p (p \geq 1)$

que $f_n \xrightarrow{p.p} f$ et qu'il existe $g \in l^p$ telle que :

$$\forall n \quad |f_n| \leq g \text{ p.p.}$$

Alors

$$f \in l^p \text{ et}$$

$$f_n \xrightarrow{l^p} f$$

Preuve

$$\forall n \quad |f_n| \leq g \text{ p.p. et } f_n \xrightarrow{p.p} f \text{ impliquent } |f| \leq g \text{ p.p.}$$

D'où

$$f \in l^p \text{ puisque } g \in l^p$$

Par ailleurs

$$|f - f_n|^p \leq 2^p g^p \text{ p.p.}$$

avec $g^p \in l^1$ puisque $g \in l^p$

De plus

$$|f - f_n|^p \xrightarrow{p.p} 0$$

Le T.C.D entraine que

$$\int |f - f_n|^p \longrightarrow 0$$

C'est à dire

$$f_n \xrightarrow{l^p} f$$

L'exemple suivant généralise la proposition 4.2

Exemple3

Supposons que la suite (f_n) soit dans $l^p (p \geq 1)$

que $f_n \xrightarrow{p.p} f$ et qu'il existe g_n et g dans l^p , telle que

$$\forall n \quad |f_n| \leq g_n \text{ p.p, } g_n \xrightarrow{p.p} g \text{ et } \lim_n \int (g_n + g)^p = 2^p \int g^p$$

Alors

$$f \in l^p \text{ et}$$

$$f_n \xrightarrow{l^p} f$$

Preuve

$$f_n \longrightarrow f \text{ et } |f_n| \leq g_n \implies f \leq g \implies f \in l^p \text{ puisque } g \in l^p$$

$$\text{On a } f_n \xrightarrow{p.p} f \implies |f_n - f|^p \xrightarrow{p.p} 0$$

De plus

$$|f_n - f|^p \leq (g_n + g)^p \in l^1 \text{ car } g_n \text{ et } g \text{ dans } l^p$$

avec

$$\lim_n \int (g_n + g)^p = \int \lim_n (g_n + g)^p$$

Les conditions d'application du T.C.D.G étant remplies, nous obtenons

$$\lim_n \int |f_n - f|^p = 0$$

Nous allons donner l'équivalent de l'exemple 3 pour l'espérance conditionnelle.

Exemple 4

Soit (X_n) dans l^p ($p \geq 1$) avec $X_n \xrightarrow{p.s} X$

Supposons qu'il existe (Y_n) et Y dans l^p telles que

$$\forall n \quad |X_n| \leq Y_n \text{ p.s, } Y_n \xrightarrow{p.s} Y, \lim_n \int (Y_n + Y)^p = 2^p \int Y^p \text{ et } \lim_n E(Y_n/\mathcal{D}) = E(Y/\mathcal{D})$$

Alors

$$X \in l^p,$$

$$\lim_n E(X_n/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

et

$$E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{l^p} E(X/\mathcal{D})$$

Preuve

On a $|X_n| \leq Y_n \text{ p.s} \implies |X| \leq Y \in l^p$ donc

$$X \in l^p$$

De plus, nous avons

$$X_n \xrightarrow{p.s} X, Y_n \xrightarrow{p.s} Y$$

Y_n et Y intégrables (car $l^p \subset l^1$)

et

$$E(Y_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{p.s} E(Y/\mathcal{D})$$

Autrement dit les conditions d'application du T.C.D.C.G, sont remplies et nous obtenons

$$\lim_n E(X_n/\mathcal{D}) = E(X/\mathcal{D})$$

Par ailleurs les hypothèses d'application de l'exemple (2) sont satisfaites pour la suite (X_n) nous en déduisons

$$X_n \xrightarrow{lp} X$$

Reste alors à appliquer le lemme (4.1) pour obtenir

$$E(X_n/\mathcal{D}) \xrightarrow{lp} E(X/\mathcal{D})$$

4.3 Continuité et dérivabilité sous l'espérance conditionnelle

Les résultats classiques concernant la continuité et la dérivabilité des fonctions définies par des intégrales sont déduits par application du T.C.D.(cf par exemple Revuz page 72). Aussi est il naturel de proposer leurs équivalents pour l'espérance conditionnelle en s'attendant à ce qu'ils soient prouvés par application du T.C.D.C. puis de généraliser encore en se basant sur le T.C.D.C.G.

Proposition 4.3 (cf D. Revuz page 72)

Soit Λ un espace métrique $(\mathbb{E}, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré et f une fonction à valeurs réelles définie sur $\Lambda \times \mathbb{E}$ et telle que

i) Les fonctions $f(t, \cdot)$, $t \in \Lambda$, sont mesurables et toutes dominées en module par une même fonction $g \in l^1$,

ii) pour toute x de $\mathbb{E}$, la fonction $f(\cdot, x)$ est continue sur Λ .

Alors, la fonction F :

$$t \longrightarrow \int f(t, x) dm(x)$$

est continue sur Λ .

Exemple 5 (continuité sous l'espérance conditionnelle)

Soit Λ un espace métrique, $(\mathbb{E}, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et f une fonction à valeurs réelles définie sur $\Lambda \times \mathbb{E}$ et telle que

i) Pour tout t de Λ , l'application $x \longmapsto f(t, x)$ est mesurable et dominée en module par une application $x \longmapsto g(x)$ P intégrable,

ii) Pour tout x de $\mathbb{E}$, l'application $t \longmapsto f(t, x)$ est continue sur Λ .

Alors pour tout x de $\mathbb{E}$ l'application :

$$t \longmapsto F(t, x) = E(f(t, \cdot)/\mathcal{D})(x)$$

est continue sur Λ

Remarque

La notation $E(f(t, \cdot)/\mathcal{D})$ veut dire que l'espérance conditionnelle est prise par rapport à la variable x

Preuve

Soit $x \in \mathbb{E}$ et (t_n) une suite convergeant vers t , d'après la condition ii)

$$f(t_n, x) \longmapsto f(t, x)$$

de plus la condition i) montre que :

$$|f(t_n, x)| \leq g(x)$$

avec g P intégrable.

Le T.C.D.C. entraîne alors que

$$\lim F(t_n, x) = E(f(t, \cdot)/\mathcal{D})(x) = F(t, x).$$

Ce qui montre la continuité de l'application $t \longmapsto F(t, x)$.

Proposition 4.4 (cf D. Revuz page 72)

Si Λ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et si on suppose que toutes les fonctions $f(t, \cdot)$, $t \in \Lambda$, sont intégrables et que de plus

- i) $f(\cdot, x)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ pour tout x de E ,
- ii) Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$, $t \in \Lambda$, sont toutes majorées en module par une même fonction g de l^1 ,

alors F est dérivable sur Λ et sa dérivée vaut

$$\int \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mathbf{m}(x)$$

Exemple 6 (dérivation sous l'espérance conditionnelle)

Si Λ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et si on suppose que toutes les fonctions $f(t, \cdot)$, $t \in \Lambda$, sont

intégrables et que de plus

- i) Pour tout t de Λ , l'application $x \mapsto f(t, x)$ est P intégrable,
- ii) Pour tout x de $\mathbb{E}$, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ majorée en module pour tout t de Λ par une application $x \mapsto g(x)$ P intégrable.

Alors pour tout x de $\mathbb{E}$ l'application :

$$t \mapsto F(t, x) = E(f(t, \cdot)/\mathcal{D})(x)$$

est dérivable pour tout t de Λ et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = E\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)/\mathcal{D}\right)(x).$$

Preuve

Soit (h_n) une suite tendant vers 0 quand n tend vers ∞ , la propriété de linéarité de l'espérance conditionnelle entraîne

$$\lim \frac{F(t + h_n, x) - F(t, x)}{h_n} = \lim E\left(\frac{f(t + h_n, \cdot) - f(t, \cdot)}{h_n}/\mathcal{D}\right)(x).$$

D'après le théorème des accroissements finis il existe t'_n vérifiant $t < t'_n < t + h_n$ tel que

$$\left| \frac{f(t + h_n, x) - f(t, x)}{h_n} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t'_n, x) \right|$$

Or la condition ii) montre que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t'_n, x) \right| \leq g(x)$$

avec g P intégrable

Le T.C.D.C. entraîne alors que

$$\lim \frac{F(t + h_n, x) - F(t, x)}{h_n} = E(\lim \frac{f(t + h_n, \cdot) - f(t, \cdot)}{h_n} / \mathcal{D})(x) = E(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) / \mathcal{D})(x)$$

Extensions

L'exemple 5 peut être généralisé comme suit :

Exemple 7

Soit Λ un espace métrique, $(\mathbb{E}, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et f une fonction à valeurs réelles définie sur $\Lambda \times \mathbb{E}$ et telle que

- i) Pour tout t de Λ , l'application $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable et il existe une application g de $\Lambda \times \mathbb{E} \mapsto \mathbb{R}$

$$(t, x) \mapsto g(t, x)$$

vérifiant :

Pour tout t de Λ , l'application $x \mapsto g(t, x)$ est P intégrable.

pour tout x et toute suite u_n convergeant vers u , on a

- $|f(u_n, x)| \leq g(u_n, x)$
- $g(u_n, x) \longrightarrow g(u, x)$
- $E(g(u_n, \cdot) / \mathcal{D}) \longrightarrow E(g(u, \cdot) / \mathcal{D})$

- ii) Pour tout x de $\mathbb{E}$, l'application $t \mapsto f(t, x)$ est continue sur Λ .

Alors pour tout x de $\mathbb{E}$ l'application :

$$t \longmapsto F(t, x) = E(f(t, \cdot)/\mathcal{D})(x)$$

est continue sur Λ

Preuve

La preuve est identique à celle de l'exemple 5 sauf qu'il faut remplacer le T.C.D.C par le T.C.D.C.G.

De même L'exemple 6 peut être généralisé comme suit :

Exemple 8

Si Λ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et si on suppose que toutes les fonctions $f(t, \cdot)$, $t \in \Lambda$, sont intégrables et que de plus

- i) Pour tout t de Λ , l'application $x \longmapsto f(t, x)$ est P intégrable.
- ii) Pour tout x de $\mathbb{E}$, f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ et il existe une application g de $\Lambda \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t, x) \longmapsto g(t, x)$$

vérifiant :

Pour tout t de Λ , l'application $x \longmapsto g(t, x)$ est P intégrable, pour tout x et toute suite u_n convergeant vers u , on a

- $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(u_n, x) \right| \leq g(u_n, x)$
- $g(u_n, x) \longrightarrow g(u, x)$
- $E(g(u_n, \cdot)/\mathcal{D}) \longmapsto E(g(u, \cdot)/\mathcal{D})$.

Alors pour tout x de $\mathbb{E}$ l'application :

$$t \longmapsto F(t, x) = E(f(t, \cdot)/\mathcal{D})(x)$$

est dérivable pour tout t de Λ et on a :

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = E\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)/\mathcal{D}\right)(x).$$

Preuve

Elle est identique à celle de l'exemple 6 sauf qu'il faut faire appel au T.C.D.C.G. à la place du T.C.D.C.

Chapitre 5

Annexe

Preuve du T.C.M.

Posons $f = \lim_n f_n$

L'inégalité

$$\lim_n \int f_n dm \leq \int f dm$$

est évidente.

Reste à montrer l'inégalité inverse.

Si $g \in S^+$ avec $g \leq f$ alors nous allons montrer que

$$\int g dm \leq \lim_n \int f_n dm$$

En effet, soit $a \in [0, 1[$ posons

$$E_n = \{x : ag(x) \leq f_n(x)\}$$

Soit $x \in E$, puisque $g(x) \leq f(x)$ tout x vérifiant $f(x) > 0$ satisfait

$$ag(x) < f(x)$$

Comme $f_n(x) \nearrow f(x)$, il vient

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad ag(x) \leq f_n(x)$$

Ce qui veut dire que $x \in \bigcup_n E_n$.

D'autre part on a

$$ag1_{E_n} \leq f_n$$

D'où

$$a \int g1_{E_n} dm \leq \int f_n dm \leq \lim_n \int f_n dm$$

$g \in S^+$ donc $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}$, puisque la suite d'ensembles (E_n) est croissante la propriété de continuité monotone de la mesure donne :

$$\int g1_{E_n} dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i m(A_i) = \int g dm$$

Nous avons donc obtenu

$$a \int g dm \leq \lim_n \int f_n dm \quad \forall a \in [0, 1[$$

En faisant tendre a vers 1, il vient

$$\int g dm \leq \lim_n \int f_n dm$$

Or $\int f dm = \sup_{g \leq f} \int g dm$, ce qui montre que

$$\int f dm \leq \lim_n \int f_n dm.$$

Preuve du lemme de Fatou

On a :

$$\underline{\lim} f_n = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n = \sup_k g_k$$

où $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$

Puisque $\forall n \geq k$ $g_k \leq f_n$ alors $\int g_k dm \leq \int f_n dm \forall n \geq k$

Il vient alors

$$\int g_k dm \leq \inf_{n \geq k} \int f_n dm \leq \sup_k \inf_{n \geq k} \int f_n dm = \underline{\lim} \int f_n dm$$

D'où

$$\int g_k dm \leq \underline{\lim} \int f_n dm$$

Or

$$\int \underline{\lim} f_n dm = \int \lim_k \nearrow g_k dm$$

L'application du T.C.M. donne alors

$$\int \underline{\lim} f_n dm = \lim_k \int g_k dm \leq \underline{\lim} \int f_n dm$$

Preuve des propriétés de 1.2.2

a) Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$E_n = \{|f_n - f| > \varepsilon\}$$

Nous obtenons :

$$\int |f - f_n|^p dm \geq \int_{E_n} |f - f_n|^p dm \geq \int_{E_n} \varepsilon^p dm = \varepsilon^p m(E_n)$$

Ce qui montre que

$$m(E_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ si } \int |f - f_n|^p dm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

b) $f_n \xrightarrow{m} f$ veut dire que

$$\forall \varepsilon > 0, m\{|f_n - f| > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad m\{|f_n - f| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

En particulier en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2^j}$, $\exists N_j$ tel que

$$\forall n \geq N_j \quad m\{|f_n - f| > \frac{1}{2^j}\} < \frac{1}{2^j}$$

En posant

$$n_1 = N_1, \quad n_2 = \sup(N_2, n_1 + 1), \dots, \quad n_j = \sup(N_j, n_{j-1} + 1)$$

nous obtenons une suite croissante d'indices n_j telle que

$$m\{|f_{n_j} - f| > \frac{1}{2^j}\} < \frac{1}{2^j}$$

Il reste à voir que $f_{n_j} \xrightarrow{p.p.} f$

Soit

$$A_j = \{|f_{n_j} - f| > \frac{1}{2^j}\}$$

On a :

$$\sum_j m(A_j) < \sum_j \frac{1}{2^j} < \infty$$

Le lemme de Borel Cantelli entraîne

$$m(\overline{\lim A_j}) = 0$$

Soit $x \notin \overline{\lim A_j}$ alors

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} / \forall j \geq j_0 \quad |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^j}$$

Ce qui montre que $\forall x \in \overline{\lim A_j} \quad f_{n_j}(x) \xrightarrow{p.p.} f(x)$

c) Nous nous contentons pour cette preuve de signaler qu'elle se base sur le lemme d'Egoroff, pour les détails se reporter à Calbrix et Bouziad.

d) Preuve du T.C.D.

On peut se ramener au cas où les relations sont vraies partout.

Puisque $\forall n \quad |f_n| \leq g$ on a $|f| \leq g$ donc $f \in l^1$.

Par ailleurs la relation $|f_n - f| \leq 2g$ montre que

$$2g - |f_n - f| \geq 0$$

De plus $\lim_n |f_n - f| = 0$ entraîne que

$$\int 2g dm = \int \lim_n (2g - |f_n - f|) dm$$

Le lemme de Fatou permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \int 2g dm &\leq \underline{\lim} \int (2g - |f_n - f|) dm = \int 2g dm - \underline{\lim} \int |f_n - f| dm \\ &\leq \int 2g dm - \overline{\lim} \int |f_n - f| dm. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que

$$\lim_n \int |f_n - f| dm = 0$$

Par ailleurs

$$|\int f dm - \int f_n dm| = |\int (f - f_n) dm| \leq \int |f_n - f| dm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce qui montre que

$$\lim_n \int f_n dm = \int f dm$$

e) On a $f_n \xrightarrow{m} f$ alors il existe une sous suite (f_{n_j}) de (f_n) telle que

$$f_{n_j} \xrightarrow{p.p} f \text{ avec } |f_{n_j}| \leq g \text{ p.p.}$$

Le lemme de Fatou entraine

$$\int |f| dm = \int \liminf |f_{n_j}| dm \leq \liminf \int |f_{n_j}| \leq \int g < \infty$$

f est donc intégrable.

f) $f_n \xrightarrow{m} f$ donc il existe (f_{n_k}) sous suite de (f_n) telle que $f_{n_k} \xrightarrow{p.p} f$.

Le lemme de Fatou et l'équi intégrabilité de la suite (f_n) entraînent que

$$\int |f| dm \leq \liminf \int |f_{n_k}| dm \leq \sup_{n_k} \int |f_{n_k}| dm < \infty.$$

Par ailleurs soit $\delta > 0$, on a

$$\int |f - f_n| dm \leq \int_{|f - f_n| < \delta} |f - f_n| dm + \int_{|f - f_n| \geq \delta} |f - f_n| dm \leq \delta + \int_{|f - f_n| \geq \delta} |f| dm +$$

$$\begin{aligned}
& \int_{|f-f_n| \geq \delta} |f_n| dm \\
& \leq \delta + \int_{|f-f_n| \geq \delta} |f| dm + \int_{\{|f-f_n| \geq \delta\} \cap \{|f_n| < M\}} |f_n| dm + \int_{\{|f-f_n| \geq \delta\} \cap \{|f_n| \geq M\}} |f_n| dm. \\
& \leq \delta + \int_{|f-f_n| \geq \delta} |f| dm + M m\{|f-f_n| \geq \delta\} + \int_{\{|f_n| \geq M\}} |f_n| dm.
\end{aligned}$$

l'équi intégrabilité de la suite (f_n) entraîne

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 / \int_{\{|f_n| \geq M\}} |f_n| dm < \varepsilon$$

D'autre part puisque $f_n \xrightarrow{m} f$, $\exists n_1$ tel que si $n \geq n_1$ alors

$$m\{|f-f_n| \geq \delta\} < \frac{\varepsilon}{4M}$$

De plus la continuité absolue de l'intégrale donne l'existence de γ tel que

$$\int_{|f-f_n| \geq \delta} |f| dm < \frac{\varepsilon}{4}$$

si $m\{|f-f_n| \geq \delta\} < \gamma$

Or puisque $f_n \xrightarrow{m} f$, $\exists n_2$ tel que si $n \geq n_2$ alors

$$m\{|f-f_n| \geq \delta\} < \gamma$$

En conclusion pour un choix de $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$, on obtient

$$\forall n \geq \sup(n_1, n_2), \int |f-f_n| dm < \varepsilon$$

Ce qui montre que $f_n \xrightarrow{I^1} f$

Preuve des propriétés de l'espérance conditionnelle :

·Positivité

On a $Y \geq 0$, posons

$$D = \{\omega / E(Y/\mathcal{D}) < 0\} \in \mathcal{D}$$

On a :

$$0 \leq \int_D Y dP = \int_D E(Y/\mathcal{D}) dP \leq 0 \text{ (puisque } Y \geq 0 \text{)}$$

Donc $P(D) = 0$, p.s d'où

$$E(Y/\mathcal{D}) \geq 0$$

·Linéarité

Soit a et b deux constants alors

$aE(X/\mathcal{D}) + bE(Y/\mathcal{D})$ est intégrable et $\mathcal{D}$ mesurable, et soit $D \in \mathcal{D}$, la linéarité de de l'intégrale donne

$$\begin{aligned} \int_D (aE(X/\mathcal{D}) + bE(Y/\mathcal{D})) dP &= a \int_D E(X/\mathcal{D}) dP + b \int_D E(Y/\mathcal{D}) dP \\ &= a \int_D X dP + b \int_D Y dP \\ &= \int_D (aX + bY) dP \end{aligned}$$

Donc

$$E(aX + bY/\mathcal{D}) = aE(X/\mathcal{D}) + bE(Y/\mathcal{D})$$

·Croissance

On a : $X \leq Y$ alors $Y - X \geq 0$

La positivité de l'espérance conditionnelle donne :

$$E((Y - X)/\mathcal{D}) \geq 0$$

et d'autre part l'espérance conditionnelle est linéaire alors

$$E(Y/\mathcal{D}) - E(X/\mathcal{D}) \geq 0$$

D'où

$$E(Y/\mathcal{D}) \geq E(X/\mathcal{D})$$

$E(E(Y/\mathcal{D})) = E(Y)$, en effet

$\Omega \in \mathcal{D}$ alors

$$E(Y) = \int_{\Omega} Y dP = \int_{\Omega} E(Y/\mathcal{D}) dP = E(E(Y/\mathcal{D}))$$

Preuve de l'inégalité de Jensen :

Commençons par remarquer que si $Y \in I$ alors $E(Y/\mathcal{D}) \in I$, en effet

Si $Y > a$ alors $E(Y/\mathcal{D}) - a = E(Y - a/\mathcal{D}) > 0$.

par ailleurs φ étant convexe on peut écrire :

$$\forall x, \zeta \in I, \varphi(x) - \varphi(\zeta) \geq \varphi'_d(\zeta)(x - \zeta)$$

(où φ'_d est la dérivé à droite de φ).

Posons $x = Y(\omega)$, $\zeta = E(Y/\mathcal{D})(\omega)$ on obtient :

$$\varphi(Y(\omega)) - \varphi(E(Y/\mathcal{D})(\omega)) \geq \varphi'_d(E(Y/\mathcal{D})(\omega))(Y(\omega) - E(Y/\mathcal{D})(\omega)) \forall \omega \in \Omega$$

Alors

$$\varphi(Y(\omega)) - \varphi'_d(E(Y/\mathcal{D})(\omega))(Y(\omega) - (E(Y/\mathcal{D})(\omega))) \geq \varphi(E(Y/\mathcal{D})(\omega))$$

Les propriétés de l'espérance conditionnelle donnent

$$E(\varphi(Y) - \varphi'_d(E(Y/\mathcal{D}))(Y - E(Y/\mathcal{D}))) \geq E(\varphi(E(Y/\mathcal{D}))/\mathcal{D}) = \varphi(E(Y/\mathcal{D}))$$

Or

$$E(\varphi'_d(E(Y/\mathcal{D}))(Y - E(Y/\mathcal{D}))) = \varphi'_d(E(Y/\mathcal{D}))(E(Y - E(Y/\mathcal{D}))/\mathcal{D}) = 0$$

D'où

$$E(\varphi(Y/\mathcal{D})) \geq \varphi(E(Y/\mathcal{D}))$$

Preuve du T.C.M.C.

On a par définition

$$\forall D \in \mathcal{D}, \int_D E(Y/\mathcal{D})dP = \int_D YdP = \int_D \lim_n \nearrow Y_n dP.$$

(Y_n) étant une suite croissante de variables positives, l'application du T.C.M. entraîne que

$$\int_D E(Y/\mathcal{D})dP = \int_D YdP = \lim_n \int_D Y_n dP = \lim_n \int_D E(Y_n/\mathcal{D})dP$$

$E(Y_n/\mathcal{D})$ étant aussi une suite croissante de variables positives, une deuxième appli-

cation du T.C.M. donne

$$\forall D \in \mathcal{D}, \int_D Y dP = \int_D \lim_n E(Y_n/\mathcal{D}) dP$$

Ce qui montre que

$$\lim_n E(Y_n/\mathcal{D}) = E(Y/\mathcal{D})$$

Preuve du T.C.D.C.

Posons $X_n = \sup_{k \geq n} |Y_k - Y|$, on a $X_n \xrightarrow{p.s} 0$ et

$$|E(Y_n/\mathcal{D}) - E(Y/\mathcal{D})| = |E(Y_n - Y/\mathcal{D})| \leq E(|Y_n - Y|/\mathcal{D}) \leq E(X_n/\mathcal{D})$$

la suite (X_n) étant décroissante et positive, il en est de même de $E(X_n/\mathcal{D})$,
appelons X sa limite puisqu'elle existe on a :

$$E(X) = \int \lim_n E(X_n/\mathcal{D}) dP = \lim_n \int E(X_n/\mathcal{D}) dP$$

car $E(X_n/\mathcal{D}) \leq 2E(Z/\mathcal{D})$ qui est intégrable

or

$$\lim_n \int E(X_n/\mathcal{D}) dP = \lim_n \int X_n dP = \int \lim_n X_n dP = 0$$

On obtient

$$\{X \geq 0\}_{E(X)=0} \implies X = 0 \text{ p.s}$$

Ce qui veut dire que

$$E(Y/\mathcal{D}) = \lim_n E(Y_n/\mathcal{D})$$

Bibliographie

- [1] A. Bibi. *Mesure et intégration*, 1994.
- [2] P. Billingsley. *Probability and measur.* Wily. New York, 1979.
- [3] A. Bouziad et J. Calbrix. *Théorie de la mesure et de l'intégration*. Publications de L'université de Rouen. n° 185, 1993.
- [4] W. Feller. *An introduction to probability and its applications*. vol I et II. Wiley. New York, 1966 et 1971.
- [5] B. Fristedt et L. Gray. *A modern Approach to Probability Theory*. Birkhauser Boston, 1997.
- [6] F. Messaci, K. Boudraa, D. Boudaa et A. Chibat. Sur une méthode d'enseignement. *C N M 99*. 1999, Annaba.
- [7] F. Messaci. *Notions Fondamentales de la théorie de probabilités*. les éditions de L'université Mentouri Constantine, 2001.
- [8] D. Revuz. *Mesure et intégration*. Hermann. Paris, 1994.
- [9] H. L. Royden. *Real Analysis*. The Macmillan Company, New York, 1968.

ملخص

نظرية التقارب المهيمن للوبيغ أساسية في نظرية المكاملة للوبيغ ، ولها مكافئتها في إطار الإحتمالات الشرطية والمسماة نظرية التقارب المهيمن الشرطية .

بالإضافة هناك أطروحات أخرى لهذه النظرية وهما نظرية التقارب المهيمن الهشة ونظرية التقارب المهيمن المعمة .

هدف هذا البحث هو تقديم و البرهان على مكافئات هاتين الأخيرتين في إطار الإحتمالات الشرطية .

وفي الأخير هذا العمل مدعم بأمثلة تطبيقية لهذه النتائج .

Abstract

The dominated convergence theorem is fundamental in Lebesgue integral theory. It has its equivalent in the conditional expectation setting. Furthermore there are other versions of this theorem, that is refined dominated convergence theorem and generalized dominated convergence theorem.

This study is devoted to yield and prove the equivalent of these last results in the conditional expectation setting. Then some examples of applications of the previous results are given.

Résumé

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue est fondamental en théorie de l'intégrale de Lebesgue. Il possède son équivalent dans le cadre de l'espérance conditionnelle appelé théorème de convergence dominée conditionnelle. En outre d'autres versions de ce théorème et qui sont le théorème de convergence dominée généralisé et le théorème de convergence dominée affiné existent.

L'objet de ce mémoire est d'énoncer et de démontrer les équivalents de ces deux derniers théorèmes dans le cadre de l'espérance conditionnelle. En fin ce travail est illustré par exemples d'application de ces résultats.