الجمهوريــة الجزائريــة الديمقراطيــة الشعبيــة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE CONSTANTINE

THESE

Présenté a l'institut de Mathématiques pour l'Obtention du diplome de Magister
par :

Mlle Tahia ZERIZER

Option : Equations aux dérivées partielles

Thème

PROBLEMES AUX LIMITES NON REGULIERS

Soutenue Le : 05 / 11 / 1997

Devant la commission d'examen :

Présidente : Mlle REBBANI F. — **M.C Université d'Annaba**
Rapporteur : Mr DENCHE M. — **M.C Université de Constantine**
Examinateur : Mr ABBAOUI L. — **Pr. Université de Setif.**

<u>REMERCIEMENTS</u>

Ce travail a été élaboré sous la direction de M^{r} Mohamed DENCHE (M.C à l'université de Constantine).

Je lui suis très reconnaissante pour la qualité des cours qu'il m'a dispensés durant mon cursus universitaire , et pour l'efficacité des conseils qu'il m'a prodigués afin de mener à bien mon travail .

Je suis très sensible à l'honneur que me fait M^{lle}F.REBANI (M.C à l'université d'Annaba) en acceptant de juger ce travail et de présider le jury de soutenance .

Je suis également sensible à l'honneur que me fait M^{r} L.ABBAOUI (Pr. à l'université de Sétif) en acceptant d'examiner ce travail , et d'être membre de ce jury .

Dédicaces

Père , Mère , Skander , Houda , Madjed , Mohamed Ramy ce travail est aussi le vôtre.

TAHIA

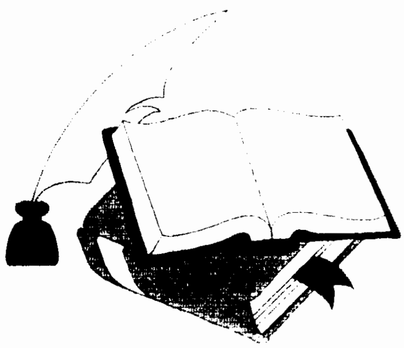

Table des Matières

Introduction

Ce travail est présenté en trois chapitres

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour équations différentielles ordinaires à coefficient discontinu auprès de la dérivée d'ordre supérieur avec des conditions aux limites non régulières contenant des fonctionnelles abstraites.

Les problèmes non réguliers pour opérateurs différentiels ont été étudiés dans plusieurs travaux, on peut citer par exemple : [9 , 10 , 11 , 12 , 13 14 , 15 , 19].

La complétude du système des fonctions radicales pour les opérateurs différentiels avec conditions aux limites fonctionnelles est étudiée dans [3 , 16 , 17 , 18].

Dans [17] et [18] le coefficient auprès de la dérivée d'ordre supérieur est constant, par contre continu dans [3].

Dans [19] on a le coefficient de la dérivée d'ordre supérieur est discontinu et les conditions aux limites sont régulières.

Différemment des problèmes réguliers [15], la résolvante de tels problèmes a un comportement en $O(|\lambda|^{-1/2})$ C'est à dire une perte en $|\lambda|^{-1/2}$ dans l'estimation de la résolvante par rapport au cas régulier [3 , 19].

Après on utilise les résultats obtenus pour montrer l'existence, l'unicité de la solution et la complétude des solutions élémentaires d'un problème mixte pour équations aux dérivées partielles paraboliques à coefficient discontinu auprès de la dérivée d'ordre supérieur avec des conditions aux limites et de transmission non régulières et contenant des fonctionnelles abstraites.

L'étude repose sur la réduction du problème posé à un problème de Cauchy pour une équation différentielle opérationnelle de type parabolique dont le coefficient opératoriel a été étudier précédemment.

Le Chapitre II est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour équation différentielle ordinaire du second ordre avec des conditions aux limites non locales et des conditions de transmission contenant le paramètre spectral.

En réalité le problème traité n'est autre que le problème spectral d'un problème aux limites pour vibration des cordes avec poids fixé à l'intérieur de la corde [20].

On établit des conditions dites de régularité qui garantissent la décroissance maximale de la résolvante ainsi que la complétude du système de fonctions radicales.

Enfin, on termine au dernier chapitre par l'étude de la résolvante d'un faisceau non linéaire en λ à coefficient discontinu auprès de la dérivée d'ordre supérieur sur tout l'axe réel.

A l'étude des faisceaux non linéaires est consacrée une vaste bibliographie ; pour les travaux importants dans ce domaine on peut voir [13]. La particularité du cas traité est que le coefficient auprès de la dérivée d'ordre supérieur est discontinu.

N.B : *Le système de numérotation adopté dans ce mémoire est le suivant par exemple le théorème (1.5.1) veut dire le théorème 1 du paragraphe 5 du chapitre 1 . Si on fait allusion dans les 3 chapitres à un théorème (ou définition) dans le même chapitre , on ne notera que le numéro de ce théorème (ou définition) et le numéro du paragraphe correspondant , et si on fait allusion à un théorème (ou définition) dans le même paragraphe on ne notera que le numéro de ce théorème (ou définition) correspondant.*

Chapitre 1

PROBLEME DE TRANSMISSION NON REGULIER

§1 - Rappels

Nous présentons ici quelques notions et résultats connus et fondamentaux pour l'étude de notre problème.

- On appelle espace de SOBOLEV $W_q^m(0,1)$; l'espace défini par :

$$W_q^m(0,1) = \left\{ u \in L_q(0,1) \,;\, D^\alpha u \in L_q(0,1) \,;\, \alpha \leq m \right\} \,;\, q \in (1, \infty)$$

pour les fonctions $u \in W_q^m(0,1)$; on a les inégalités suivantes :

Lemme : [1]

1 - $$\sup_{x \in [0,1]} \left| u^{(k)}(x) \right| \leq c \left(h^{1-\chi} \left\| u^{(m)} \right\|_{Lq(0,1)} + h^{-\chi} \left\| u \right\|_{Lq(0,1)} \right)$$

où $0 \leq K < m$; $0 < h < h_0$; $\chi = \frac{1}{m}\left(k + \frac{1}{q}\right)$; $q \in (1,\infty)$

2 - $$\left\| U^{(k)} \right\|_{Lp(0,1)} \leq c \left(\left\| U^{(m)} \right\| \right)^r_{Lq(0,1)} \left\| u \right\|^{1-r}_{Lq(0,1)} + \left\| u \right\|_{Lq(0,1)}$$

où : $0 \leq K \leq m$; $\frac{1}{q} - m \leq \frac{1}{p} - k < \frac{1}{q}$

$$r = \frac{k}{m} + \frac{1}{m}\left[\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right] \,;\, p \in (1,\infty) \,;\, q \in (1,\infty)$$

- On appelle transformée de Fourier d'une fonction u ; la fonction û définie par :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x)\, dx$$

qu'on note par : $\hat{u}(\xi) = Fu(x)$.

Théorème de MIKHLIN : [2]

Soit une application $T \in C^1(R,C)$, vérifiant les Conditions suivantes :

$$|T(\sigma)| \leq c \,;\, |T'(\sigma)| \leq c\,|\sigma|^{-1}$$

Alors $T(\sigma)$ est un multiplicateur de Fourier de type (q,q) i.e :

$$\left\| F^{-1}\, T\, F\, u \right\|_{Lq(R)} \leq c \left\| u \right\|_{Lq(R)}$$

où F^{-1} est la transformée de Fourier inverse.

§2 - Position du problème

Soit dans $L_2(0,b) \times L_2(b,1)$ le problème suivant :

$L(\lambda)\, u = f$

$$L_2\, u := \alpha_2\, u'(0) + \beta_2\, u'(1) + \gamma\, u(0) + \delta\, u(1) + \sum_{P=1}^{N_2} \delta_{2p}\, u'(x_{2p}) + T_2\, u = 0$$

$$L_3\, u := \alpha_3\, u(0) + \beta_3\, u(1) + \sum_{P=1}^{N_3} \delta_{3p}\, u(x_{3p}) + T_3\, u = 0$$

$$L_4\, u := \alpha_4\, u'(b-0) + \beta_4\, u'(b+0) + T_4\, u = 0$$

$$L_5\, u := \alpha_5\, u(b-0) + \beta_5\, u(b+0) + T_5\, u = 0$$

$$\text{et } \frac{\alpha_2\, \beta_3}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_3\, \beta_2}{\sqrt{a_1}} = 0 \text{ (Problème non régulier)}$$

où

$L(\lambda)\, u = a(x)\, u'' - \lambda\, u$

$$a(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } x \in [0,b) \\ a_1 & \text{si } x \in (b,1] \end{cases} \quad ; \; b \in (0,1)$$

$(a_0, a_1) \in C^* \times C^*$

$f = (f_1, f_3) \in L_2(0,b) \times L_2(b,1)$

$(x_{\upsilon p}) \in (0,1)$; $\upsilon = \overline{2,3}$; $p = \overline{1, N_\upsilon}$

Les T_ν sont des fonctionnels linéaires ($\nu = \overline{2,5}$).

Notre but est d'estimer la résolvante de ce problème et de donner une estimation à priori de la solution.

§3 - Estimation de la résolvante :

Dans plusieurs questions de la théorie des opérateurs différentiels et en particulier dans l'étude de la complétude du système de fonctions radicales, l'estimation de la résolvante joue un rôle fondamental.

Pour l'étude de notre problème nous introduisons l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ défini par :

$$\mathscr{L}(\lambda) : L_2(0,b) \times L_2(b,1) \longrightarrow L_2(0,b) \times L_2(b,1)$$

$$u \longmapsto \mathscr{L}(\lambda)\, u = (L_0(\lambda)\, u \,,\, L_1(\lambda)\, u)$$

avec $D(\mathscr{L}(\lambda)) = \left\{W_2^2\,(0,b) \times W_2^2\,(b,1)\ ;\ L_\upsilon u = 0\ ;\ \upsilon = \overline{2,5}\right\}$

où $L_0(\lambda) = a_0\, u'' - \lambda\, u$

$L_1(\lambda) = a_1\, u'' - \lambda\, u$

Ainsi le problème initial serait équivalent au problème suivant :

$$\mathscr{L}(\lambda)\, u = f \qquad (1.3)$$

- Soit le secteur : $S_\varepsilon = \left\{\lambda \in C\ ;\ \varepsilon - \pi + \overline{\omega} < \arg\lambda < \pi - \varepsilon + \underline{\omega}\right\}$

où $\underline{\omega} = \min(\arg a_0 \,,\, \arg a_1)$; $\overline{\omega} = \max(\arg a_0 \,,\, \arg a_1)$

On a le théorème principal suivant :

Théorème 1 :

Si le problème non régulier (1.3) $\left[\dfrac{\alpha_2\,\beta_3}{\sqrt{a_0}} + \dfrac{\alpha_3\,\beta_2}{\sqrt{a_1}} = 0\right]$

Vérifie les conditions :

$$\frac{\alpha_4\,\beta_5}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_5\,\beta_4}{\sqrt{a_1}} \neq 0 \qquad ; \qquad \delta\,\alpha_3 - \gamma\,\beta_3 \neq 0$$

Alors il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in C$ vérifiant :

$\lambda \in S_\varepsilon$ et $|\lambda| > R_\varepsilon$ on a :

$$\left\|R(\lambda, \mathscr{L}(\lambda))\right\| \leq C_\varepsilon\, |\lambda|^{-1/2} \quad ; \quad |\lambda| \to \infty \text{ dans le secteur } S_\varepsilon$$

La constante C_ε dépend de l'angle ε.

Démonstration

Cherchons une solution du problème (1.3) sous la forme :

$u = u_1 + u_2$, avec :

$u_1 = (y_1 , y_3)$; $u_2 = (y_2 , y_4)$

u_1 est la restriction sur $L_2(0,b) \times L_2(b,1)$ de la solution du problème (1) :

$$L(\lambda)\, u_1 = \tilde{f} \quad (1)$$

$$L(\lambda) : L_2(R) \times L_2(R) \longrightarrow L_2(R) \times L_2(R)$$

$$u_1 \longmapsto L(\lambda)\, u_1 = (L_0(\lambda) y_1 , L_1(\lambda)\, y_3)$$

$$\tilde{f}(x) = \left(\tilde{f}_1(x) , \tilde{f}_3(x)\right) ;$$

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{Si } x \in (0,b) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} ; \quad \tilde{f}_3(x) = \begin{cases} f_3(x) & \text{Si } x \in (b,1) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

et u_2 est la solution du problème (2) :

$$\begin{cases} L(\lambda)\, u_2 = 0 \\ \\ L_\nu\, u_2 = -L_\nu\, u_1 \quad ; \quad \nu = \overline{2,5} \end{cases} \qquad (2)$$

- Cherchons d'abord u_1 en résolvant le problème (1). Pour cela :

Soit le problème (1) :

$$L(\lambda)\, u_1 = \tilde{f} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(L_0(\lambda)\, y_1 , L_1(\lambda)\, y_3\right) = \left(\tilde{f}_1 , \tilde{f}_3\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} L_0(\lambda)\, y_1 = \tilde{f}_1 \\ L_1(\lambda)\, y_3 = \tilde{f}_3 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0\, y_1'' - \lambda\, y_1 = \tilde{f}_1 \\ a_1\, y_3'' - \lambda\, y_3 = \tilde{f}_3 \end{cases}$$

Etudions alors l'équation :

$$a_0\, y_1''(x) - \lambda\, y_1(x) = \tilde{f}_1(x) \qquad ; \quad x \in (-\infty , +\infty)$$

Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de cette équation, grâce à ses propriétés on obtient :

$$a_0 (i\sigma)^2 \, F y_1 = F \tilde{f}_1$$

$$\left[a_0 (i\sigma)^2 - \lambda\right] F y_1 = F \tilde{f}_1$$

Remarquons que :

$$a_0 y_1'' - \lambda y_1 = \tilde{f}_1 \quad \Leftrightarrow \quad y_1'' - (a_0)^{-1} \lambda y_1 = (a_0)^{-1} \tilde{f}_1 \ , \ (a_0 \neq 0)$$

Nous choisissons donc de travailler dans le secteur :

$$S_{1\varepsilon} = \left\{\lambda \in C : \varepsilon - \pi < \arg\left((a_0)^{-1} \lambda\right) < \pi - \varepsilon\right\} \ ; \ \varepsilon > 0$$

$$S_{1\varepsilon} = \{\lambda \in C : \varepsilon + \arg a_0 - \pi < \arg \lambda < \pi - \varepsilon + \arg a_0\}$$

Soit la transformation : $\lambda = a_0 \rho_0^2$,

Alors : $\arg \lambda = \arg a_0 + 2 \arg \rho_0$

Le secteur $S_{1\varepsilon}$ se transforme donc en un autre secteur $S'_{1\varepsilon}$ défini par :

$$S'_{1\varepsilon} = \left\{\rho_0 \in C : -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \rho_0 < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right\}$$

De l'équation : $\left[a_0 (i\sigma)^2 - \lambda\right] F y_1 = F \tilde{f}_1$

et de la transformation : $\lambda = a_0 \rho_0^2$, On obtient :

$$\left[a_0 \left((i\sigma)^2 - \rho_0^2\right)\right] F y_1 = F \tilde{f}_1$$

Puisque $\rho_0 \in S'_{1\varepsilon}$, donc ρ_0 ne peut pas rencontrer l'axe des imaginaires (y'y).
Etant donné que $\sigma \in R$, $(i\sigma)$ est un imaginaire pur et $(-i\sigma)$ l'est aussi. Donc on a :

$$\rho_0 \neq \pm (i\sigma) \Leftrightarrow \rho_0^2 \neq (i\sigma)^2 \Leftrightarrow (i\sigma)^2 - \rho_0^2 \neq 0$$

Alors la quantité $a_0((i\sigma)^2 - \rho^2_0)$ est inversible dans $\quad (a_0 \neq 0)$.

On peut donc écrire :

$$F y_1 = \left[a_0 \left((i\sigma)^2 - \rho_0^2\right)\right]^{-1} F \tilde{f}_1$$

$$F y_1'' = (i\sigma)^2 F y_1 = (i\sigma)^2 \left[a_0 \left((i\sigma)^2 - \rho_0^2\right)\right]^{-1} F \tilde{f}_1$$

Posons : $T(\sigma) = (i\sigma)^2 \left[a_0 \left((i\sigma)^2 - \rho_0^2\right)\right]^{-1}$

Montrons que $T(\sigma)$ est un multiplicateur de Fourier de type (2,2).

Par des raisonnements géométriques il est facile de voir que :

$$\left|(i\,\sigma)^2 - \rho_0^2\right|^{-1} \le C_\varepsilon \left(|\sigma|^2 + |\rho_0|^2\right)^{-1} \quad ; \quad |\rho_0| \to \infty \text{ dans le secteur } S'_{1\varepsilon}$$

$$|T(\sigma)| = \frac{(i\,\sigma)^2}{\left[a_0\left((i\,\sigma)^2 - \rho_0^2\right)\right]} = \frac{\sigma^2}{a_0\left(\sigma^2 + \rho_0^2\right)}$$

En utilisant l'égalité ci-dessus on obtient :

$$|T(\sigma)| \le \frac{1}{|a_0|} \cdot \frac{|\sigma|^2}{\left|\sigma^2 + \rho_0^2\right|} \le \frac{c_\varepsilon}{|a_0|} \cdot \frac{|\sigma|^2}{|\sigma|^2 + |\rho_0|^2} \le \frac{c_\varepsilon}{|a_0|} \le c_\varepsilon$$

donc on a :

$$|T(\sigma)| \le c_\varepsilon$$

$$|T'(\sigma)| = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{2\,\sigma\,\rho_0^2}{\left(\sigma^2 + \rho_0^2\right)^2} = \frac{1}{a_0} \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \rho_0^2} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2\,\rho_0^2}{\left(\sigma^2 + \rho_0^2\right)}$$

On obtient :

$$|T'(\sigma)| \le \frac{1}{|a_0|} \cdot \frac{|\sigma|^2}{\left|\sigma^2 + \rho_0^2\right|} \cdot \frac{1}{|\sigma|} \cdot \frac{2\,|\rho_0|^2}{\left|\sigma^2 + \rho_0^2\right|}$$

En utilisant toujours l'inégalité ci-dessus on obtient :

$$T'(\sigma) \le \frac{c_\varepsilon}{|a_0|} \cdot \frac{|\sigma|^2}{|\sigma|^2 + |\rho_0|^2} \cdot \frac{1}{|\sigma|} \cdot \frac{2\,|\rho_0|^2}{|\sigma|^2 + |\rho_0|^2} \le c_\varepsilon\,|\sigma|^{-1}$$

$$T'(\sigma) \le c_\varepsilon\,|\sigma|^{-1}$$

i.e. $T(\sigma)$ vérifie toutes les hypothèses du théorème de Mikhlin, par ce dernier T est un multiplicateur de Fourier de type (2,2).

$$y_1'' = F^{-1}\,F\,y_1'' = F^{-1}\,(i\,\sigma)^2\,F\,y_1 = F^{-1}\,(i\,\sigma)^2\left[a_0\left((i\,\sigma)^2 - \rho_0^2\right)\right]^{-1} F\,\tilde{f}_1$$

$y_1'' = F^{-1}\,T(\sigma)\,F\,\tilde{f}_1$; donc on a :

$$\left\|y_1''\right\|_{L_2(R)} = \left\|F^{-1}\,T(\sigma)\,F\,\tilde{f}_1\right\|_{L_2(R)} \le c_\varepsilon \left\|\tilde{f}_1\right\|_{L_2(R)} \le c_\varepsilon \left\|f_1\right\|_{L_2(0,b)}$$

mais $\|y_1''\|_{L_2(0,b)} \leq \|y_1''\|_{L_2(R)}$, alors :

$$\|y_1''\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|f_1\|_{L_2(0,b)}$$

Rappelons que y_1'' vé rifie : $a_0\, y_1'' - \lambda\, y_1 = \widetilde{f}_1$; $\lambda = a_0\, \rho_0^2$

i.e. $a_0\, y_1'' - a_0\, \rho_0^2\, y_1 = \widetilde{f}_1 \Leftrightarrow y_1'' - \rho_0^2\, y_1 = (a_0)^{-1}\, \widetilde{f}_1$; $(a_0 \neq 0)$

i.e. $\rho_0^2\, y_1 = y_1'' - (a_0)^{-1}\, \widetilde{f}_1$

d'où : $|\rho_0|^2\, \|y_1\|_{L_2(R)} \leq \|y_1''\|_{L_2(R)} + |a_0|^{-1}\, \|\widetilde{f}_1\|_{L_2(R)}$

d'où : $|\rho_0|^2\, \|y_1\|_{L_2(R)} \leq c_\varepsilon \|f_1\|_{L_2(0,b)} + |a_0|^{-1}\, \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

d'où : $|\rho_0|^2\, \|y_1\|_{L_2(R)} \leq c_\varepsilon \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

Il est évident que : $\|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq \|y_1\|_{L_2(R)}$

Alors : $\|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon\, |\rho_0|^{-2}\, \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

On a posé : $\lambda = a_0\, \rho_0^2$ donc on a : $|\lambda| = |a_0|\, |\rho_0^2| = c_0\, |\rho_0|^2$

Finalement : $\|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1}\, \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

Reste l'équation : $a_1\, y_3'' - \lambda\, y_3 = \widetilde{f}_3$

De la même manière on va poser : $\lambda = a_1\, \rho_1^2$

On choisit le secteur :

$$S_{2\varepsilon} = \{\lambda \in C : \varepsilon + \arg a_1 - \pi < \arg \lambda < \pi - \varepsilon + \arg a_1\}$$

qui se transforme en :

$$S'_{2\varepsilon} = \left\{\rho_1 : -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \rho_1 < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right\}$$

En procédant par un raisonnement analogue à celui de la première équation $\left(a_0\, y_1'' - \lambda\, y_1 = \widetilde{f}_1\right)$ on obtient les estimations :

$$\|y_3''\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

$$\|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1}\, \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

Pour y_1 et y_3 on a obtenu les estimations :

$$\|y_1''\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon\, \|f_1\|_{L_2(0,b)} \;;\; \|y_3''\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

$$\|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon\, \|\lambda\|^{-1}\, \|f_1\|_{L_2(0,b)} \;;\; \|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1}\, \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

Pour que $u_1 = (y_1\,,\, y_3)$ soit solution du problème suivant :

$$\begin{cases} a_0\, y_1'' - \lambda\, y_1 = f_1 & \text{sur } (0,b) \\ a_1\, y_3'' - \lambda\, y_3 = f_3 & \text{sur } (b,1) \end{cases}$$

Il faut que : $\lambda \in S_{1\varepsilon} \cap S_{2\varepsilon}$

i.e. $\lambda \in S_\varepsilon = \{\lambda \in C\,;\, \varepsilon - \pi + \overline{\omega} < \arg\lambda < \pi - \varepsilon + \underline{\omega}\}$

avec $\underline{\omega} = \min(\arg a_0\,,\, \arg a_1)$; $\overline{\omega} = \max(\arg a_0\,,\, \arg a_1)$

Estimons u_1 :

- $$\begin{aligned} \|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} &= \|(y_1\,,\, y_3)\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \\ &= \|y_1\|_{L_2(0,b)} + \|y_3\|_{L_2(b,1)} \\ &\leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1} \left(\|f_1\|_{L_2(0,b)} + \|f_3\|_{L_2(b,1)}\right) \end{aligned}$$

$$\|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1}\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

- $$\begin{aligned} \|u_1''\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} &= \|(y_1''\,,\, y_3'')\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \\ &= \|y_1''\|_{L_2(0,b)} + \|y_3''\|_{L_2(b,1)} \\ &\leq c_\varepsilon \left(\|f_1\|_{L_2(0,b)} + \|f_3\|_{L_2(b,1)}\right) \end{aligned}$$

$$\|u_1''\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Puisque y_1 et y_3 sont déterminés d'une manière unique, d'ici résulte l'unicité de u_1.

Estimons maintenant u_2 :

u_2 est la solution du problème (2) :

$$\begin{cases} L(\lambda)\, u_2 = 0 & \text{dans } L_2(0,b)xL_2(b,1) \\ & \\ L_\upsilon\, u_2 = -\, L_\upsilon\, u_1 \;\; ; \;\; \upsilon = \overline{2,5} & \end{cases} \qquad (2)$$

$$L(\lambda)\, u_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_0\, y_2'' - \lambda\, y_2 = 0 & \text{sur } (0,b) \\ a_1\, y_4'' - \lambda\, y_4 = 0 & \text{sur } (b,1) \end{cases}$$

Considérons d'abord l'équation : $a_0\, y_2'' - \lambda\, y_2 = 0$

Son équation caractéristique s'écrit :

$$a_0\, k^2 - \lambda = 0 \;\Leftrightarrow\; a_0\left(k^2 - \rho_0^2\right) = 0 \quad \left(\lambda = a_0\, \rho_0^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\; k^2 = \rho_0^2 \qquad (a_0 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\; k^2 = \rho_0^2 = (a_0)^{-1}\, \lambda$$

donc, en posant : $\rho_0 = \sqrt{(a_0)^{-1}\, \lambda}$ on obtient : $K_{1,2} = \pm\, \rho_0$

Ainsi la solution y_2 s'écrit :

$$y_2(x) = c_1\, e^{k_1(x-b)} + c_2\, e^{k_2 x} = c_1\, e^{\rho_0(x-b)} + c_2\, e^{-\rho_0 x}$$

de la même manière l'équation caractéristique de l'équation :

$a_1\, y_4'' - \lambda\, y_4 = 0$ est : $a_1\, k^2 - \lambda = 0$

$$\Leftrightarrow\; a_1\left(k^2 - \rho_1^2\right) = 0 \quad \left(\lambda = a_1\, \rho_1^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\; k^2 = \rho_1^2 \qquad (a_1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow\; k^2 = \rho_1^2 = (a_1)^{-1}\, \lambda$$

donc, si on pose : $\rho_1 = \sqrt{(a_1)^{-1}\, \lambda}$ on obtient : $k_{3,4} = \pm\, \rho_1$

donc :

$$y_4(x) = c_3\, e^{k_3(x-1)} + c_4\, e^{k_4(x-b)} = c_3\, e^{\rho_1(x-1)} + c_4\, e^{-\rho_1(x-b)}$$

- Passons maintenant aux conditions aux limites :

$L_\upsilon\, u_2 = -\, L_\upsilon\, u_1$; $\upsilon = \overline{2,5}$

$u_2 = (y_2 , y_4)$; $u_1 = (y_1 , y_3)$

On va poser : $L_\upsilon\, u = A_\upsilon\, u + T_\upsilon\, u$

Les conditions aux limites deviennent :

$A_\upsilon u_2 + T_\upsilon u_2 = - A_\upsilon u_1 - T_\upsilon u_1$

donc le problème (2) devient :

$$\begin{cases} L(\lambda)\, u_2 = 0 \\ A_\upsilon u_2 + T_\upsilon u_2 = - A_\upsilon u_1 - T_\upsilon u_1 \end{cases} \qquad (2)$$

Si on pose : $T_\upsilon = \left(T_\upsilon^2 , T_\upsilon^4\right)$; $\upsilon = \overline{2,5}$

donc : $T_\upsilon u_2 = T_\upsilon \left(y_2, y_4\right) = T_\upsilon y_2 + T_\upsilon y_4$; $\upsilon = \overline{2,5}$

où : T_υ^2 est continue dans $W_2^{m_\upsilon}(0,b)$

$m_2 = m_4 = 1$, $m_3 = m_5 = 0$

et : T_υ^4 est continue dans $W_2^{m_\upsilon}(b,1)$

On obtient les conditions aux limites suivantes :

- $\alpha_2 y_2'(0) + \beta_2 y_4'(1) + \gamma y_2(0) + \delta y_4(1) + \sum_{p=1}^{N_2'} \delta_{2p} y_2'\left(x_{2p}\right) + \sum_{P=N_2'+1}^{N_2} \delta_{2p} y_4'\left(x_{2p}\right)$
$$+ T_2^2 y_2(.) + T_2^4 y_4(.) = - A_2 u_1 - T_2 u_1$$

- $\alpha_3 y_2(0) + \beta_3 y_4(1) + \sum_{p=1}^{N_3'} \delta_{3p} y_2\left(x_{3p}\right) + \sum_{P=N_3'+1}^{N_3} \delta_{3p} y_4\left(x_{3p}\right)$
$$+ T_3^2 y_2(.) + T_3^4 y_4(.) = - A_3 u_1 - T_3 u_1$$

- $\alpha_4 y_2'(b) + \beta_4 y_4'(b) + T_4^2 y_2(.) + T_4^4 y_4(.) = - A_4 u_1 - T_4 u_1$

- $\alpha_5 y_2(b) + \beta_5 y_4(b) + T_5^2 y_2(.) + T_5^4 y_4(.) = - A_5 u_1 - T_5 u_1$

où : $(x_{\upsilon p}) \in (0,b)$ pour $p = \overline{1, N_\upsilon'}$

et $(x_{\upsilon p}) \in (b,1)$ pour $p = \overline{N_\upsilon' + 1, N_\upsilon}$; $\upsilon = \overline{2,3}$

avec :

- $A_2 u_1 = \alpha_2 y_1'(0) + \beta_2 y_3'(1) + \gamma y_1(0) + \delta y_3(1) + \sum_{P=1}^{N_2'} \delta_{2p} y_1'(x_{2p}) + \sum_{P=N_2'+1}^{N_2} \delta_{3p} y_3'(x_{2p})$

- $A_3 u_1 = \alpha_3 y_1(0) + \beta_3 y_3(1) + \sum_{P=1}^{N_3'} \delta_{3p} y_1(x_{3p}) + \sum_{P=N_3'+1}^{N_3} \delta_{3p} y_3(x_{3p})$

- $A_4 u_1 = \alpha_4 y_1'(b) + \beta_4 y_3'(b)$

- $A_5 u_1 = \alpha_5 y_1(b) + \beta_5 y_3(b)$

Puisque :

$$y_2(x) = c_1 e^{\rho_0(x-b)} + c_2 e^{-\rho_0 x}$$

$$y_4(x) = c_3 e^{\rho_1(x-1)} + c_4 e^{-\rho_1 (x-b)}$$

On en déduit que :

$$y_2'(x) = c_1 \rho_0 e^{\rho_0(x-b)} - c_2 \rho_0 e^{-\rho_0 x}$$

$$y_4'(x) = c_3 \rho_1 e^{\rho_1(x-1)} - c_4 \rho_1 e^{-\rho_1 (x-b)}$$

Alors :

$y_2(0) = c_1 e^{-b\rho_0} + c_2$ $\qquad$ $y_2(b) = c_1 + c_2 e^{-b\rho_0}$

$y_4(b) = c_3 e^{\rho_1(b-1)} + c_4$ $\qquad$ $y_4(1) = c_3 + c_4 e^{-\rho_1(1-b)}$

$y_2'(0) = c_1 \rho_0 e^{-b\rho_0} - c_2 \rho_0$ $\qquad$ $y_2'(b) = c_1 \rho_0 - c_2 \rho_0 e^{-b\rho_0}$

$y_2'(b) = c_3 \rho_1 e^{\rho_1(b-1)} - c_4 \rho_1$ $\qquad$ $y_4'(1) = c_3 \rho_1 - c_4 \rho_1 e^{-\rho_1(1-b)}$

$$T_\upsilon^2 y_2(\cdot) = T_\upsilon^2 \left(c_1 e^{\rho_0(\cdot-b)} + c_2 e^{-\rho_0 \cdot}\right) = c_1 T_\upsilon^2 e^{\rho_0(\cdot-b)} + c_2 T_\upsilon^2 e^{-\rho_0 \cdot}$$

$$T_\upsilon^4 y_4(\cdot) = T_\upsilon^4 \left(c_3 e^{\rho_1(\cdot-1)} + c_4 e^{-\rho_1(\cdot-b)}\right) = c_3 T_\upsilon^4 e^{\rho_1(\cdot-1)} + c_4 T_\upsilon^4 e^{-\rho_1(\cdot-b)}$$

En remplaçant les expressions de y_2 et y_4 dans les conditions aux limites on obtient le système suivant :

$$\bullet\left[\alpha_2\,\rho_0\,e^{-b\rho_0} + \gamma\,e^{-b\rho_0} + \sum_{P=1}^{N'_2}\delta_{2P}\,\rho_0\,e^{\rho_0(x_{2P}-b)} + T_2^2\,e^{\rho_0(\cdot\,-b)}\right]c_1$$

$$+\left[-\alpha_2\,\rho_0 + \gamma - \sum_{P=1}^{N'_2}\delta_{2P}\,\rho_0\,e^{-\rho_0 x_{2P}} + T_2^2\,e^{-\rho_0\,\cdot}\right]c_2$$

$$+\left[\beta_2\,\rho_1 + \delta + \sum_{P=N'_2+1}^{N_2}\delta_{2P}\,\rho_1\,e^{\rho_1(x_{2P}-1)} + T_2^4\,e^{\rho_1(\cdot\,-1)}\right]c_3$$

$$+\left[-\beta_2\,\rho_1\,e^{-\rho_1(1-b)} + \delta\,e^{-\rho_1(1-b)} - \sum_{P=N'_2+1}^{N_2}\delta_{2P}\,\rho_1\,e^{-\rho_1(x_{2P}-b)} + T_2^4\,e^{-\rho_1(\cdot\,-b)}\right]c_4$$

$$= -A_2\,u_1 - T_2\,u_1$$

$$\bullet\left[\alpha_3\,e^{-b\rho_0} + \sum_{P=1}^{N'_3}\delta_{3P}\,e^{\rho_0(x_{3P}-b)} + T_3^2\,e^{-\rho_0(\cdot\,-b)}\right]c_1$$

$$+\left[\alpha_3 + \sum_{P=1}^{N'_3}\delta_{3P}\,e^{-\rho_0 x_{3P}} + T_3^2\,e^{-\rho_0\,\cdot}\right]c_2 + \left[\beta_3 + \sum_{P=N'_3+1}^{N_3}\delta_{3P}\,e^{\rho_1(x_{3P}-1)} + T_3^4\,e^{\rho_1(\cdot\,-1)}\right]c_3$$

$$+\left[\beta_3\,e^{-\rho_1(1-b)} + \sum_{P=N'_3+1}^{N_3}\delta_{3P}\,e^{-\rho_1(x_{3P}-b)} + T_3^4\,e^{-\rho_1(\cdot\,-b)}\right] = -A_3\,u_1 - T_3\,u_1$$

$$\bullet\left[\alpha_4\,\rho_0 + T_4^2\,e^{\rho_0(\cdot\,-b)}\right]c_1 + \left[-\alpha_4\,\rho_0\,e^{-b\rho_0} + T_4^2\,e^{-\rho_0\,\cdot}\right]c_2 + \left[\beta_4\,\rho_1\,e^{\rho_1(b-1)} + T_4^4\,e^{\rho_1(\cdot\,-1)}\right]c_3$$

$$+\left[-\beta_4\,\rho_1 + T_4^4\,e^{-\rho_1(\cdot\,-b)}\right]c_4 = -A_4\,u_1 - T_4\,u_1$$

$$\bullet\left[\alpha_5 + T_5^2\,e^{\rho_0(\cdot\,-b)}\right]c_1 + \left[\alpha_4\,e^{-b\rho_0} + T_5^2\,e^{-\rho_0\,\cdot}\right]c_2 + \left[\beta_5\,e^{\rho_1(b-1)} + T_5^4\,e^{\rho_1(\cdot\,-1)}\right]c_3$$

$$+\left[\beta_5 + T_5^4\,e^{-\rho_1(\cdot\,-b)}\right]c_4 = -A_5\,u_1 - T_5\,u_1$$

On obtient le déterminant $D(\rho_0\,,\,\rho_1)$ qu'on peut écrire sous la forme :

$$D(\rho_0,\rho_1) = \theta(\rho_0,\rho_1) + R(\rho_0,\rho_1)$$

où :

$$\theta(\rho_0,\rho_1) = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_2\rho_0+\gamma & \beta_2\rho_1+\delta & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 \\ \alpha_4\rho_0 & 0 & 0 & -\beta_4\rho_1 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & \beta_5 \end{vmatrix}$$

$$\theta(\rho_0,\rho_1) = (\alpha_4\,\beta_5\,\rho_0 + \alpha_5\,\beta_4\,\rho_1)\,(-\alpha_2\,\beta_3\,\rho_0 - \alpha_3\,\beta_2\,\rho_1 + \gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3)$$

Or : $$- \alpha_2 \beta_3 \rho_0 - \alpha_3 \beta_2 \rho_1 = - \alpha_2 \beta_3 \sqrt{\frac{\lambda}{a_0}} - \alpha_3 \beta_2 \sqrt{\frac{\lambda}{a_1}}$$

$$= - \sqrt{\lambda} \left(\frac{\alpha_2 \beta_3}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_3 \beta_2}{\sqrt{a_1}} \right) = 0 \quad \text{Par hypothèse}$$

car notre problème est non régulier.

D'où : $\theta(\rho_0,\rho_1) = (\alpha_4 \beta_5 \rho_0 + \alpha_5 \beta_4 \rho_1)(\gamma \beta_3 - \delta \alpha_3)$

aussi : $$\alpha_4 \beta_5 \rho_0 + \alpha_5 \beta_4 = \alpha_4 \beta_5 \sqrt{\frac{\lambda}{a_0}} + \alpha_5 \beta_4 \sqrt{\frac{\lambda}{a_1}} = \sqrt{\lambda} \left(\frac{\alpha_4 \beta_5}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_5 \beta_4}{\sqrt{a_1}} \right) \neq 0$$

par hypothèse

Toujours par hypothèse on a : $\gamma \beta_3 - \delta \alpha_3 \neq 0$

d'où : $\theta(\rho_0,\rho_1) = (\alpha_4 \beta_5 \rho_0 + \alpha_5 \beta_4 \rho_1)(\gamma \beta_3 - \delta \alpha_3) \neq 0$ dans S'_ε

et $$|R(\rho_0,\rho_1)| \to 0 \text{ quand } \left. \begin{array}{l} |\rho_0| \to +\infty \\ |\rho_1| \to +\infty \end{array} \right\} \text{dans } S'_\varepsilon$$

où $$S'_\varepsilon = \left\{ \rho \in C : -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \rho < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}$$

Nous avons :

$$y_2(x) = c_1 e^{\rho_0 (x-b)} + c_2 e^{-\rho_0 x}$$

$$y_4(x) = c_3 e^{\rho_1 (x-1)} + c_4 e^{-\rho_1 (x-b)}$$

où :

$$C_i = \frac{D_i(\rho_0,\rho_1)}{D(\rho_0,\rho_1)} \quad ; \quad i = \overline{1,4}$$

Puisque $\theta(\rho_0,\rho_1) \neq 0$ et $|R(\rho_0,\rho_1)| \to 0$ dans S'_ε donc les constantes C_i ; $i = \overline{1,4}$ sont déterminées d'une manière unique, et puisque $u_2 = (y_2 , y_4)$, d'ici résulte l'unicité de la solution u_2.

Déterminons maintenant les constantes Ci ; $i = \overline{1,4}$. On a :

$$D_i(\rho_0,\rho_1) = \theta_i(\rho_0,\rho_1) + R_i(\rho_0,\rho_1) \text{, où :}$$

$$\left|R_i(\rho_0,\rho_1)\right| \to 0 \quad \text{quand} \quad \left.\begin{matrix} |\rho_0| \to \infty \\ |\rho_1| \to \infty \end{matrix}\right\} \text{ dans } S'_\varepsilon \; ; \; i = \overline{1,4}$$

avec :

$$\theta_1(\rho_0,\rho_1) = \begin{vmatrix} -L_2 u_1 & -\alpha_2 \rho_0 + \gamma & -\beta_2 \rho_1 + \delta & 0 \\ -L_3 u_1 & \alpha_3 & \beta_3 & 0 \\ -L_4 u_1 & 0 & 0 & -\beta_4 \rho_1 \\ -L_5 u_1 & 0 & 0 & \beta_5 \end{vmatrix}$$

$$\theta_1(\rho_0,\rho_1) = -(\gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3)(\beta_5 L_4 u_1 + \beta_4 \rho_1 L_5 u_1)$$

$$\theta_2(\rho_0,\rho_1) = \begin{vmatrix} 0 & -L_2 u_1 & \beta_2 \rho_1 + \delta & 0 \\ 0 & -L_3 u_1 & \beta_3 & 0 \\ \alpha_4 \rho_0 & -L_4 u_1 & 0 & -\beta_4 \rho_1 \\ \alpha_5 & -L_5 u_1 & 0 & \beta_5 \end{vmatrix}$$

$$\theta_2(\rho_0,\rho_1) = (\alpha_4 \beta_5 \rho_0 + \alpha_5 \beta_4 \rho_1)(-\beta_3 L_2 u_1 + (\beta_{11} \rho_1 + \delta) L_3 u_1)$$

$$\theta_3(\rho_0,\rho_1) = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_2 \rho_0 + \gamma & -L_2 u_1 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & -L_3 u_1 & 0 \\ \alpha_4 \rho_0 & 0 & -L_4 u_1 & -\beta_4 \rho_1 \\ \alpha_5 & 0 & -L_5 u_1 & \beta_5 \end{vmatrix}$$

$$\theta_3(\rho_0,\rho_1) = (\alpha_4 \beta_5 \rho_0 + \alpha_5 \beta_4 \rho_1)(\alpha_3 L_2 u_1 - (-\alpha_{11} \rho_0 + \gamma) L_3 u_1)$$

$$\theta_4(\rho_0,\rho_1) = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_2 \rho_0 + \gamma & \beta_2 \rho_1 + \delta & -L_2 u_1 \\ 0 & \alpha_3 & \beta_3 & -L_3 u_1 \\ \alpha_4 \rho_0 & 0 & 0 & -L_4 u_1 \\ \alpha_5 & 0 & 0 & -L_5 u_1 \end{vmatrix}$$

$$\theta_4(\rho_0,\rho_1) = (\alpha_5 L_4 u_1 - \alpha_4 \rho_0 L_5 u_1)\big(\underbrace{\alpha_3 \beta_2 \rho_1 + \alpha_2 \beta_3 \rho_0}_{=0} + \alpha_3 \delta - \beta_3 \gamma\big)$$

$$\theta_4(\rho_0,\rho_1) = (\alpha_3 \delta - \beta_3 \gamma)(\alpha_5 L_4 u_1 - \alpha_4 \rho_0 L_5 u_1)$$

Estimation des opérateurs frontières :

Utilisons l'inégalité (1) du lemme [1] :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left|u^{(k)}(x)\right| \leq c\left(h^{1-\chi} \left\|u^{(m)}\right\|_{L_q(0,1)} + h^{-\chi} \left\|u\right\|_{L_q(0,1)}\right)$$

où $0 \leq k < m$; $0 < h < h_0$; $\chi = \frac{1}{m}\left(k + \frac{1}{q}\right)$ $\quad q \in (1, \infty)$

Appliquons cette inégalité à u_1 pour le cas où $m = 2$, $k = \overline{0,1}$, $q = 2$

Pour $k = 0$, on a : $\chi = 1/4$

$$\sup_{x \in [0,b] \times [b,1]} \left|u_1(x)\right| \leq c\left(h^{3/4} \left\|u_1''\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} + h^{-1/4} \left\|u_1\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}\right)$$

Pour $k = 1$, on a : $\chi = 3/4$

$$\sup_{x \in [0,b] \times [b,1]} \left|u_1'(x)\right| \leq c\left(h^{1/4} \left\|u_1''\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} + h^{-3/4} \left\|u_1\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}\right)$$

h étant un nombre positif assez petit, on va poser :

$h = |\lambda|^{-1}$, d'où :

$$\sup_{x \in [0,b] \times [b,1]} \left|u_1(x)\right| \leq c\left(|\lambda|^{-3/4} \left\|u_1''\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} + |\lambda|^{1/4} \left\|u_1\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}\right)$$

$$\sup_{x \in [0,b] \times [b,1]} \left|u_1'(x)\right| \leq c\left(|\lambda|^{-1/4} \left\|u_1''\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} + |\lambda|^{3/4} \left\|u_1\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}\right)$$

D'après les estimations de u_1 :

$$\left\|u_1''\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left\|f\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$\left\|u_1\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

Donc on obtient :

$$\sup_{x \in [0,b] \times [b,1]} \left|u_1(x)\right| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-3/4} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$\sup_{x \in [0,b] \times [b,1]} \left|u_1'(x)\right| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

De ces estimations on obtient :

$$|A_2 u_1| \le c \left\{ \operatorname*{Sup}_{x\in[0,b]x[b,1]} |u_1'(x)| + \operatorname*{Sup}_{x\in[0,b]x[b,1]} |u_1(x)| \right\} \le c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|A_3 u_1| \le c \operatorname*{Sup}_{x\in[0,b]x[b,1]} |u_1(x)| \le c_\varepsilon |\lambda|^{-3/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|A_4 u_1| \le c \operatorname*{Sup}_{x\in[0,b]x[b,1]} |u_1'(x)| \le c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|A_5 u_1| \le c \operatorname*{Sup}_{x\in[0,b]x[b,1]} |u_1(x)| \le c_\varepsilon |\lambda|^{-3/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Et puisque les fonctionnelles T_υ sont continues dans $W_2^{m_\upsilon}(0,b) \text{ x } W_2^{m_\upsilon}(b,1)$ on a :

Pour $m_\upsilon = 0$ ($\upsilon = 3,5$) :

$$|T_\upsilon u_1| \le c \|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(0,b)} \le c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Pour $m_\upsilon = 1$ ($\upsilon = 2,4$) :

$$|T_\upsilon u_1| \le c \|u_1\|_{w_2^1(0,b) \text{ x } w_2^1(b,1)}$$

$$\le c \left[\|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} + \|u_1'\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \right]$$

Estimons alors u_1', pour cela utilisons l'inégalité (2) du lemme [1].

Pour $k = 1$, $m = 2$, $p = q = 2$ on a :

$$\|u_1'\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \le c \left(\|u_1''\|^{1/2}_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \cdot \|u_1\|^{1/2}_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \right)$$

En utilisant les résultats obtenus :

$$|u_1|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \le c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|u_1''|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \le c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

On a :

$$|u_1'|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \le c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1/2} + |\lambda|^{-1} \right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$\le c_\varepsilon |\lambda|^{-1/2} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Donc pour $m_\upsilon = 1$ ($\upsilon = 2,4$) on a :

$$|T_\upsilon\, u_1| \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{-1/2}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

i.e.

$$|T_\upsilon\, u_1| \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1/2}\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Les résultats ci-dessus nous donnent les estimations :

$$|L_2\, u_1| \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1/4} + |\lambda|^{-1/2}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1/4}\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|L_3\, u_1| \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-3/4} + |\lambda|^{-1}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-3/4}\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|L_4\, u_1| \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1/4} + |\lambda|^{-1/2}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-1/4}\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|L_5\, u_1| \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-3/4} + |\lambda|^{-1}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-3/4}\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Estimons maintenant les constantes C_i ; $i = \overline{1,4}$

$$\bullet\ |C_1| = \frac{|\theta_1(\rho_0,\rho_1) + R_1(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1) + R(\rho_0,\rho_1)|} \leq c\, \frac{|\theta_1(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1)|}$$

$$|C_1| \leq c\, \frac{|-(\gamma\,\beta_3 - \alpha_3\,\delta)(\beta_5\, L_4\, u_1 + \beta_4\, \rho_1\, L_5\, u_1)|}{|(\alpha_4\, \beta_5\, \rho_0 + \alpha_5\, \beta_4\, \rho_1)(\gamma\, \beta_3 - \delta\, \alpha_3)|}$$

$$|C_1| \leq c\, \frac{|\beta_5\, L_4\, u_1 + \beta_4\, \rho_1\, L_5\, u_1|}{|\alpha_4\, \beta_5\, \rho_0 + \alpha_5\, \beta_4\, \rho_1|} \qquad \text{car } \theta(\rho_0,\rho_1) \neq 0$$

On va diviser par ρ_1 on obtient :

$$|C_1| \leq c\left(|L_5\, u_1| + \frac{1}{|\rho_1|}\, |L_4\, u_1|\right) \qquad \text{puisque} \quad |\rho_0| = c_0\, |\lambda|^{1/2}$$

$$|\rho_1| = c_1\, |\lambda|^{1/2}$$

donc :

$$|C_1| \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-3/4} + |\lambda|^{-1/2} \cdot |\lambda|^{-1/4}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|C_1| \leq c_\varepsilon\, |\lambda|^{-3/4}\, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$\bullet\ |C_2| = \frac{|\theta_2(\rho_0,\rho_1) + R_2(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1) + R(\rho_0,\rho_1)|} \leq c\,\frac{|\theta_2(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1)|}$$

$$|C_2| \leq c\,\frac{|(\alpha_4\,\beta_5\,\rho_0 + \alpha_5\,\beta_4\,\rho_1)(-\beta_3\,L_2\,u_1 + (\beta_2\,\rho_1 + \delta)\,L_3\,u_1)|}{|(\alpha_4\,\beta_5\,\rho_0 + \alpha_5\,\beta_4\,\rho_1)(\gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3)|}$$

$$|C_2| \leq c\,\frac{|-\beta_3\,L_2\,u_1 + (\beta_2\,\rho_1 + \delta)\,L_3\,u_1|}{|\gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3|} \qquad \text{puisque } \theta(\rho_0,\rho_1) \neq 0$$

$$|C_2| \leq c\left(|L_2\,u_1| + |\lambda|^{1/2}\,|L_3\,u_1|\right)$$

$$|C_2| \leq c\left(|\lambda|^{-1/4} + |\lambda|^{1/2}\cdot|\lambda|^{-3/4}\right)\|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$|C_2| \leq c_\varepsilon\,|\lambda|^{-1/4}\,\|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$\bullet\ |C_3| = \frac{|\theta_3(\rho_0,\rho_1) + R_3(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1) + R(\rho_0,\rho_1)|} \leq c\,\frac{|\theta_3(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1)|}$$

$$|C_3| \leq c\,\frac{|(\alpha_4\,\beta_5\,\rho_0 + \alpha_5\,\beta_4\,\rho_1)(\alpha_3\,L_2\,u_1 - (-\alpha_2\,\rho_0 + \gamma)\,L_3\,u_1)|}{|(\alpha_4\,\beta_5\,\rho_0 + \alpha_5\,\beta_4\,\rho_1)(\gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3)|}$$

$$|C_3| \leq c\,\frac{|\alpha_3\,L_2\,u_1 - (-\alpha_2\,\rho_0 + \gamma)\,L_3\,u_1|}{|\gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3|} \qquad ;\ \theta(\rho_0,\rho_1) \neq 0$$

$$|C_3| \leq c\left(|L_2\,u_1| + |\lambda|^{1/2}\,|L_3\,u_1|\right)$$

$$|C_3| \leq c_\varepsilon\left(|\lambda|^{-1/4} + |\lambda|^{1/2}\cdot|\lambda|^{-3/4}\right)\|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$|C_3| \leq c_\varepsilon\,|\lambda|^{-1/4}\,\|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$\bullet\ |C_4| = \frac{|\theta_4(\rho_0,\rho_1) + R_4(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1) + R(\rho_0,\rho_1)|} \leq c\,\frac{|\theta_4(\rho_0,\rho_1)|}{|\theta(\rho_0,\rho_1)|}$$

$$|C_4| \leq c\,\frac{|(\alpha_3\,\delta - \beta_3\,\gamma)(\alpha_5\,L_4\,u_1 - \alpha_4\,\rho_0\,L_5\,u_1)|}{|(\alpha_4\,\beta_5\,\rho_0 + \alpha_5\,\beta_4\,\rho_1)(\gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3)|}$$

$$|C_4| \leq c\,\frac{|\alpha_5\,L_4\,u_1 - \alpha_4\,\rho_0\,L_5\,u_1|}{|\alpha_4\,\beta_5\,\rho_0 + \alpha_5\,\beta_4\,\rho_1|} \qquad ;\ \theta(\rho_0,\rho_1) \neq 0$$

En divisant par ρ_0 on obtient :

$$|C_4| \leq c\left(|\lambda|^{-1/2} \, |L_4 u_1| + |L_5 u_1|\right)$$

$$|C_4| \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1/2} \cdot |\lambda|^{-1/4} + |\lambda|^{-3/4}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|C_4| \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-3/4} \, \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Revenons maintenant à y_2 et y_4 :

$$\|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq |c_1| \, \left\|e^{\rho_0(x-b)}\right\|_{L_2(0,b)} + |c_2| \, \left\|e^{-\rho_0 x}\right\|_{L_2(0,b)}$$

$$\|y_4\|_{L_2(b,1)} \leq |c_3| \, \left\|e^{\rho_1(x-1)}\right\|_{L_2(b,1)} + |c_4| \, \left\|e^{-\rho_1(x-b)}\right\|_{L_2(b,1)}$$

Utilisons l'estimation suivante :

$$\left\|e^{-\rho x}\right\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \, |\rho|^{-1/2} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/4} \quad ; |\lambda| \to \infty \quad \text{dans } \delta_\varepsilon \, .$$

En effet , on a :

$$\left\|e^{-\rho x}\right\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 \left|e^{-\rho x}\right|^2 dx = \int_0^1 e^{-2x \operatorname{Re}\rho} \, dx$$

$$= \frac{1}{-2 \operatorname{Re}\rho} \cdot e^{-2x \operatorname{Re}\rho}\Big|_0^1 = \frac{1}{2 \operatorname{Re}} \left[e^{-2\operatorname{Re}\rho} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{Re}\rho} \left(1 - e^{-2\operatorname{Re}\rho}\right)$$

Mais $\quad \rho \in S'_\varepsilon = \left\{\rho : \varepsilon - \frac{\pi}{2} < \arg\rho < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right\}$

donc $R_e \, \rho = |\rho| \, \operatorname{Cos}(\arg\rho) > 0$

d'où :

$$\left\|e^{-\rho x}\right\|^2_{L_2(0,1)} = \frac{1}{2 \operatorname{Re}\rho} \left(1 - e^{-2\operatorname{Re}\rho}\right)$$

Puisque $R_e \, \rho > 0$ dans S'_ε, donc $e^{-2 \operatorname{Re}\rho} \to 0$ lorsque $|\rho| \to \infty$ dans S'_ε

donc : $\left\|e^{-\rho x}\right\|^2_{L_2(0,1)} \leq \dfrac{c_\varepsilon}{|\rho|} = \dfrac{c_\varepsilon}{\operatorname{Cos}\theta \, |\rho|}$; avec $\theta = \arg\rho$

$\rho \in S'_\varepsilon \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta \neq 0$ de plus $\begin{cases} |\operatorname{Cos}\theta| \not\to 0 \\ |\rho| \to \infty \text{ dans } S'_\varepsilon \end{cases}$

Alors $\qquad \left\| e^{-\rho x} \right\|^2_{L_2(0,1)} \leq c_\varepsilon \, |\rho|^{-1}$

$$\left\| e^{-\rho x} \right\|^2_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \, |\rho|^{-1/2}$$

On va appliquer l'estimation ci-dessus pour $\rho = \rho_0$ et $\rho = \rho_1$ respectivement sur les intervalles respectifs (0,b) et (b,1).

Puisque $|\rho_0| = c_0 \, |\lambda|^{1/2}$; $|\rho_1| = c_1 \, |\lambda|^{1/2}$ on a :

$$\left\| e^{\rho_0 (x-b)} \right\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \, |\rho_0|^{1/2} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/4}$$

$$\left\| e^{-\rho_0 x} \right\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \, |\rho_0|^{1/2} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/4}$$

$$\left\| e^{\rho_1 (x-1)} \right\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \, |\rho_1|^{1/2} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/4}$$

$$\left\| e^{-\rho_1 (x-b)} \right\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \, |\rho_1|^{1/2} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/4}$$

Donc on obtient :

- $\|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \left(|c_1| + |c_2|\right) |\lambda|^{-1/4} \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-3/4} + |\lambda|^{-1/4}\right) |\lambda|^{-1/4} \cdot \|f\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)}$

  $\|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/2} \, \|f\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)}$

- $\|y_4\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \left(|c_3| + |c_4|\right) |\lambda|^{-1/4} \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1/4} + |\lambda|^{-3/4}\right) |\lambda|^{-1/4} \cdot \|f\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)}$

  $\|y_4\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/2} \, \|f\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)}$

Donc : $\quad \|u_2\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)} = \left\|(y_2, y_4)\right\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)}$

$$= \|y_2\|_{L_2(0,b)} + \|y_4\|_{L_2(b,1)}$$

$$\leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1/2} \, \|f\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} &= \| u_1 + u_2\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}\\ &\leq \|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} + \|u_2\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}\\ &\leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1} + |\lambda|^{-1/2}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}\end{aligned}$$

$$\|u\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/2} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

et $\|R(\lambda, L(\lambda))\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/2}$

Puisque u_1 et u_2 sont uniques ; d'ici résulte l'unicité de la solution u.

Le théorème (1) est démontré.

Considérons maintenant l'opérateur $\mathcal{L}(\lambda)$ défini comme suit :

$$\mathcal{L}(\lambda) : w_2^2(0,b) \text{ x } w_2^2(b,1) \to L_2(0,b)xL_2(b,1)$$
$$u \to \mathcal{L}(\lambda)\, u = \left(L_0(\lambda)\, u \ ,\ L_1(\lambda)\, u\right)$$

avec $D(\mathcal{L}(\lambda)) = \left\{W_2^2(0,b) \text{ x } W_2^2(b,1)\ ;\ L_\upsilon u = 0\ ;\ \upsilon = \overline{2,5}\right\}$

Soit le problème :

(2.3) $\mathcal{L}(\lambda)\, u = f$

On a le théorème principal suivant :

<u>Théorème 2</u> :

Supposons que le problème (2.3) est non régulier i.e. on a : la condition :

$\dfrac{\alpha_2 \beta_3}{\sqrt{a_0}} + \dfrac{\alpha_3 \beta_2}{\sqrt{a_1}} = 0$ vérifiée

Alors : Si les conditions : $\dfrac{\alpha_4 \beta_5}{\sqrt{a_0}} + \dfrac{\alpha_5 \beta_4}{\sqrt{a_1}} \neq 0$; $\delta \alpha_3 - \gamma \beta_3 \neq 0$ sont satisfaites

Il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in C$ vérifiant :

$\lambda \in S_\varepsilon$ et $|\lambda| > R_\varepsilon$;

$$\|R(\lambda, \mathcal{L}(\lambda))\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{1/2} \quad ; \quad |\lambda| \to \infty \text{ dans } S_\varepsilon$$

La constante C_ε dépend de l'angle ε.

Démonstration :

$u = u_1 + u_2$; $u_1 = (y_1 , y_3)$; $u_2 = (y_2 , y_4)$

$$\|u_1\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} = \|(y_1 , y_3)\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)}$$
$$= \|y_1\|_{W_2^2(0,b)} + \|y_3\|_{W_2^2(b,1)}$$

$$\|y_1\|^2_{W_2^2(0,b)} = \|y_1\|^2_{L_2(0,b)} + \|y_1''\|^2_{L_2(0,b)}$$

donc on a :

$$\|y_1\|_{W_2^2(0,b)} \leq \|y_1\|_{L_2(0,b)} + \|y_1''\|_{L_2(0,b)}$$

D'où : $\|y_1\|_{W_2^2(0,b)} \leq c_\varepsilon \left(1 + |\lambda|^{-1}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$\|y_1\|_{W_2^2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Aussi : $\|y_3\|_{W_2^2(0,b)} \leq \|y_3\|_{L_2(0,b)} + \|y_3''\|_{L_2(0,b)}$

$$\leq c_\varepsilon \left(1 + |\lambda|^{-1}\right) \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$\|y_3\|_{W_2^2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

D'où :

$$\|u_1\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

D'autre part, on a :

$$\|u_2\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} = \|y_2\|_{W_2^2(0,b)} + \|y_4\|_{W_2^2(b,1)}$$

$$y_2(x) = c_1 e^{\rho_0(x-b)} + c_2 e^{-\rho_0 x}$$

$$y_2'(x) = c_1 \rho_0 e^{\rho_0(x-b)} - c_2 \rho_0 e^{-\rho_0 x}$$

$$y_2''(x) = c_1 \rho_0^2 e^{\rho_0(x-b)} + c_2 \rho_0^2 e^{-\rho_0 x} = \rho_0^2 y_2(x)$$

De même on a : $y_4''(x) = \rho_1^2 y_4(x)$

d'où :

$$\|y_2''\|_{L_2(0,b)} = |\rho_0|^2 \|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\lambda| \cdot |\lambda|^{-1/2} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

- $\|y_2''\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{1/2} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$\left\|y_4''\right\|_{L_2(b,1)} = \left|\rho_1\right|^2 \left\|y_4\right\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left|\lambda\right| \cdot \left|\lambda\right|^{-1/2} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

- $\left\|y_4''\right\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left|\lambda\right|^{1/2} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$\left\|y_2\right\|_{W_2^2(0,b)} \leq \left\|y_2\right\|_{L_2(0,b)} + \left\|y_2''\right\|_{L_2(0,b)}$$

$$\leq c_\varepsilon \left(\left|\lambda\right|^{-1/2} + \left|\lambda\right|^{1/2}\right) \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

donc $\left\|y_2\right\|_{W_2^2(0,b)} \leq c_\varepsilon \left|\lambda\right|^{1/2} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

De même on a : $\left\|y_4\right\|_{W_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left|\lambda\right|^{1/2} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

D'où $\left\|u_2\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} = \left\|y_2\right\|_{W_2^2(0,b)} + \left\|y_4\right\|_{W_2^2(b,1)}$

i.e $\left\|u_2\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left|\lambda\right|^{1/2} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

Finalement :

$$\left\|u\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} = \left\|u_1 + u_2\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)}$$

$$\leq \left\|u_1\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} + \left\|u_2\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)}$$

$$\leq c_\varepsilon \left(1 + \left|\lambda\right|\right)^{1/2} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

- $\left\|u\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left|\lambda\right|^{1/2} \left\|f\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

et

$$\left\|R(\lambda, \mathscr{L}(\lambda))\right\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left|\lambda\right|^{1/2}$$

Puisque u_1 et u_2 sont uniques, d'ici résulte l'unicité de la solution u, ce qui achève la démonstration du théorème (2).

§4 - Ensembles denses dans les espaces de SOBOLEV

On présente dans ce paragraphe un résultat fondamental pour le paragraphe qui suit :

Lemme 1 :

1/ Supposons données les conditions aux limites et les conditions de transmission suivantes :

$$L_2\, u := \alpha_2\, u'(0) + \beta_2\, u'(1) + \sum_{P=1}^{N_2} \delta_{2p}\, u'(x_{2p}) + T_2\, u = 0$$

$$L_3\, u := \alpha_3\, u(0) + \beta_3\, u(1) + \sum_{P=1}^{N_3} \delta_{3p}\, u(x_{3p}) + T_3\, u = 0$$

$$L_4\, u := \alpha_4\, u'(b-0) + \beta_4\, u'(b+0) + T_4\, u = 0$$

$$L_5\, u := \alpha_5\, u(b-0) + \beta_5\, u(b-0) + T_5\, u = 0$$

où $x_{kp} \in (0,1)$; $k = \overline{2,3}$; $p = \overline{1,N_k}$

2/ il existe des nombres complexes $S_1 \neq 0$ et $S_2 \neq 0$ tels que :

$$\alpha_2\, \beta_3\, S_1 + \alpha_3\, \beta_2\, S_2 \neq 0$$

$$\alpha_4\, \beta_5\, S_1 + \alpha_5\, \beta_4\, S_2 \neq 0$$

3/ Les fonctionnelles T_υ sont continues dans $W_q^{K_\upsilon}(0,b) x W_q^{K_\upsilon}(b,1)$

$$K_2 = K_4 = 1 \quad ; \quad K_3 = K_5 = 0 \quad (\upsilon = \overline{2,5})$$

Alors :

$$(1) \qquad \overline{\left(W_2^2(0,b) x W_2^2(b,1)\ ;\ L_\upsilon u = 0\ ;\ \upsilon = \overline{2,5}\right)}\Big|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} = L_2(0,b) x L_2(b,1)$$

Démonstration :

Pour démontrer (1) démontrons d'abord (2)

$$\overline{\left(C^\infty[0,b] x C^\infty[b,1]\ L_\upsilon u=0; m_\upsilon \leq k\right)}\Big|_{W_2^k(0,b) x W_2^k(b,1)} = \left(W_2^s(0,b) x W_2^s(b,1)\, L_\upsilon u=0;\ m_\upsilon \leq s-1\right)$$

$$0 \leq s \leq k \leq 1$$

1ère étape : démontrons d'abord l'égalité (2) pour k = s i.e : (3)

$$\overline{\left(C^{\infty}[0,b]\times C^{\infty}[b,1]\ L_{\nu}u=0;m_{\nu}\leq k\right)}_{W_2^s(0,b)\times W_2^s(b,1)}=\left(W_2^k(0,b)\times W_2^k(b,1)\ L_{\nu}u=0;\ m_{\nu}\leq k-1\right)$$
$$0\leq k\leq 1$$

1er cas : Démontrons (3) pour k = 1 i.e : (4)

$$(4)\ \overline{\left(C^{\infty}[0,b]\times C^{\infty}[b,1];\ L_{\nu}u=0;m_{\nu}\leq 1\right)}_{W_2^1(0,b)\times W_2^1(b,1)}=\left(W_2^1(0,b)\times W_2^1(b,1);L_{\nu}u=0;\ m_{\nu}=0\right)$$

Soit $u\in\left(W_2^1(0,b)\times W_2^1(b,1)\ ;\ L_{\nu}u=0\ ;\ m_{\nu}=0\right)$

alors $u'\in L_2(0,b)\times L_2(b,1)$

Posons $u=(u_1,u_2)$, donc $u'=(u_1',u_2')$ avec $u_1'\in L_2(0,b)$, $u_2'\in L_2(b,1)$

OR $(x_{\nu p})\in(0,1)$ pour $p=\overline{1,N_{\nu}}$. Notons par N_{ν}' le plus grand entier tel que :

$(x_{\nu p})\in(0,b)$ pour $p=\overline{1,N_{\nu}'}$

$(x_{\nu p})\in(b,1)$ pour $p=\overline{N_{\nu}'+1,N_{\nu}}$

On peut alors écrire :

$$L_2(0,b)=\bigcup_{p=1}^{N_{\nu}'-1}L_2\left(x_{\nu p},x_{\nu p+1}\right)$$

$$L_2(b,1)=\bigcup_{p=N_{\nu}'+1}^{N_{\nu}-1}L_2\left(x_{\nu p},x_{\nu p+1}\right)$$

On rappelle que :

$$\overline{C_0^{\infty}\left[x_{\nu p},x_{\nu p+1}\right]}_{L_2(x_{\nu p},x_{\nu p+1})}=L_2\left(x_{\nu p},x_{\nu p+1}\right)\quad\text{pour }p=1,N_{\nu}-1$$

donc il existe respectivement deux suites de fonctions :

$$\psi_{1h}^{(\nu_p)}\in C_0^{\infty}\left[x_{\nu p},x_{\nu p+1}\right]\ ;\ p=\overline{1,N_{\nu}'-1}$$

et $$\psi_{2h}^{(\nu_p)}\in C_0^{\infty}\left[x_{\nu p},x_{\nu p+1}\right]\ ;\ p=\overline{N_{\nu}'+1,N_{\nu}-1}$$

telles que :

$$\left\|u_1'-\psi_{1h}^{(\nu p)}\right\|_{L_2(x_{\nu p},x_{\nu p+1})}\xrightarrow{h\to\infty}0\ ;\ p=\overline{1,N_{\nu}'-1}$$

$$\left\| u_2' - \psi_{2h}^{(\nu p)} \right\|_{L_2(x_{\nu p}, x_{\nu p+1})} \xrightarrow{h \to \infty} 0 \quad ; p = \overline{N'_{\nu+1}, N_{\nu - 1}}$$

Posons :

$$\psi_{1h}(x) = \begin{cases} \psi_{1h}^{(\nu p)}(x) & \text{si } x \in (x_{\nu p}, x_{\nu p+1}) \; ; \; p = \overline{1, N'_{\nu-1}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\psi_{2h}(x) = \begin{cases} \psi_{2h}^{(\nu p)}(x) & \text{si } x \in (x_{\nu p}, x_{\nu p+1}) \; ; \; p = \overline{N'_{\nu+1}, N_{\nu-1}} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\psi_{1h} \in C^{\infty}[0,b] \; ; \; \psi_{1h}(0) = \psi_{1h}(b) = \psi_{1h}(x_{\nu p}) = 0 \; ; \; p = \overline{1, N'_{\nu}}$$

$$\psi_{2h} \in C^{\infty}[b,1] \; ; \; \psi_{2h}(b) = \psi_{2h}(1) = \psi_{2h}(x_{\nu p}) = 0 \; ; \; p = \overline{N'_{\nu+1}, N_{\nu}}$$

Si on pose $\psi_h = (\psi_{1h}, \psi_{2h})$ alors $\psi_h \in C_0^{\infty}[0,b] x C_0^{\infty}[b,1]$

et s'annule aussi au voisinage de x_{2p} et x_{3p}

$$\left\| u_1' - \psi_{1h} \right\|^2_{L_2(0,b)} = \sum_{p=1}^{N'_{\nu-1}} \left\| u_1' - \psi_{1h}^{(\nu p)} \right\|^2_{L_2(x_{\nu p}, x_{\nu p+1})} \xrightarrow{h \to \infty} 0$$

$$\left\| u_2' - \psi_{2h} \right\|^2_{L_2(b,1)} = \sum_{p=N'_{\nu+1}}^{N_{\nu-1}} \left\| u_2' - \psi_{2h}^{(\nu p)} \right\|^2_{L_2(x_{\nu p}, x_{\nu p+1})} \xrightarrow{h \to \infty} 0$$

Donc : $\left\| u_1' - \psi_{1h} \right\|_{L_2(0,b)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$

$$\left\| u_2' - \psi_{2h} \right\|_{L_2(b,1)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$$

$$\left\| u' - \psi_h \right\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)} = \left\| u_1' - \psi_{1h} \right\|_{L_2(0,b)} + \left\| u_2' - \psi_{2h} \right\|_{L_2(b,1)}$$

donc $\left\| u' - \psi_h \right\|_{L_2(0,b) x L_2(b,1)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$

Trouvons maintenant les fonctions φ_h telles que :

$$\left\| u - \varphi_h \right\|_{W_2^1(0,b) x W_2^1(b,1)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$$

Sur l'intervalle $(0,b)$:

- pour $k = 0$, on pose : $\varphi_{1h}(x) = \psi_{1h}(x)$; $x \in (0,b)$

- Pour $k = 1$, on doit avoir $\psi_{1h}(x) \xrightarrow{h \to \infty} u_1'(x)$

  donc $\int_0^x \psi_{1h}(\tau)\,d\tau \xrightarrow{h \to \infty} \int_0^x u_1'(\tau)\,d\tau = u_1(x) - u_1(0)$

  d'où $\int_0^x \psi_{1h}(\tau)\,d\tau + u_1(0) \xrightarrow{h \to \infty} u_1(x)$

On pose donc : $\varphi_{1h}(x) = \int_0^x \psi_{1h}(\tau)\,d\tau + u_1(0)$

Sur l'intervalle (b,1) :

- Pour $k = 0$, on pose : $\varphi_{2h}(x) = \Psi_{2h}(x)$; $x \in (b,1)$
- Pour $k = 1$, on doit avoir $\psi_{2h}(x) \xrightarrow{h \to \infty} u_2'(x)$

  donc $\int_b^x \psi_{2h}(\tau)\,d\tau \xrightarrow{h \to \infty} \int_b^x u_2'(\tau)\,d\tau = u_2(x) - u_2(b+0)$

  d'où $\int_b^x \psi_{2h}(\tau)\,d\tau + u_2(b+0) \xrightarrow{h \to \infty} u_2(x)$; $x \in (b,1)$

On pose donc : $\varphi_{2h} = \int_b^x \psi_{2h}(\tau)\,d\tau + u_2(b+0)$

D'où on a : $\varphi_{1h}'(x) = \psi_{1h}(x)$; $\varphi_{2h}'(x) = \psi_{2h}(x)$

Donc, $\|u_1 - \varphi_{1h}\|_{W_2^1(0,b)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$ et $\|u_2 - \varphi_{2h}\|_{W_2^1(b,1)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$

Si on pose : $\varphi_h = (\varphi_{1h}, \varphi_{2h})$; alors on a :

$$\|u - \varphi_h\|_{W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)} = \|u_1 - \varphi_{1h}\|_{W_2^1(0,b)} + \|u_2 - \varphi_{2h}\|_{W_2^1(b,1)}$$

ainsi $\|u - \varphi_h\|_{W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$ et $\varphi_h \in C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1]$

Les fonctionnelles T_υ sont continues dans $W_2^{m_\upsilon}(0,b)xW_2^{m_\upsilon}(b,1)$, donc :

pour $m_\upsilon = 0$ on a :

$$\begin{aligned} |L_\upsilon\varphi_h - L_\upsilon u| &\le \|\varphi_h - u\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \\ &\le c\,\|\varphi_h - u\|_{W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)} \xrightarrow{h \to \infty} 0 \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{h \to \infty} L_\upsilon\varphi_h = L_\upsilon u = 0$; $m_\upsilon = 0$

Notons par $Q_h = \max\limits_{m_\upsilon = 0} |L_\upsilon\varphi_h|$

et si pour un certain $h \geq h_0$: $L_\upsilon \varphi_h = 0$, on pose : $Q_h = 1/h$

Puisque $\lim\limits_{h \to \infty} L_\upsilon \varphi_h = 0$ alors $\lim\limits_{h \to \infty} Q_h = 0$

Pour $m_\upsilon = 1$, on a : $|L_\upsilon \varphi_h| = |L_\upsilon \varphi_h|$ car :

$$\varphi'_{1h}(0) = \varphi'_{1h}(b) = \varphi'_{1h}(x_{\upsilon p}) = 0 \quad , \quad p = \overline{1, N'_\upsilon}$$

$$\varphi'_{2h}(b) = \varphi'_{2h}(1) = \varphi'_{2h}(x_{\upsilon p}) = 0 \quad , \quad p = \overline{N'_\upsilon + 1, N_\upsilon}$$

donc $|L_\upsilon \varphi_h| = |T_\upsilon \varphi_h| \leq c \, \|\varphi_h\|_{W_2^1(0,b) x W_2^1(b,1)} \leq c$

car $\|\varphi_h\|_{W_2^1(0,b) x W_2^1(b,1)} \leq +\infty$

$$\left(\varphi_h \in C^\infty[0,b] x C^\infty[b,1] \subset W_2^1(0,b) x W_2^1(b,1)\right)$$

Regardons le problème suivant :

$$\begin{cases} L_0\left(\varphi_h^{-\delta} \, e^{-i\varphi}\right) g_{1h} = 0 \\ L_1\left(\varphi_h^{-\delta} \, e^{-i\varphi}\right) g_{2h} = 0 \\ L_\upsilon \, g_h = - L_\upsilon \, \varphi_h \end{cases} \qquad (1.4)$$

où : $L_0(\lambda)\, u = C_0\, u'' - \lambda\, u$, $L_1(\lambda)\, u = c_1\, u'' - \lambda\, u$

Les constantes C_0 et C_1 sont choisies telles que S_1 et S_2 soient les racines respectives des équations caractéristiques des opérateurs L_0 et L_1 , i.e $S_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda}{C_0}}$ et $S_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda}{C_1}}$

Par l'hypothèse (2) du lemme 1 , les constantes S_i , i =1,2 vérifient :

$$\alpha_2\, \beta_3\, S_1 + \alpha_3\, \beta_2\, S_2 \neq 0 \qquad (a)$$

$$\alpha_4\, \beta_5\, S_1 + \alpha_5\, \beta_4\, S_2 \neq 0 \qquad (b)$$

$$(a) \Leftrightarrow \alpha_2\, \beta_3 \sqrt{\frac{\lambda}{C_0}} + \alpha_3\, \beta_2 \sqrt{\frac{\lambda}{C_1}} \neq 0$$

$\Leftrightarrow \dfrac{\alpha_2\, \beta_3}{\sqrt{C_0}} + \dfrac{\alpha_3\, \beta_2}{\sqrt{C_1}} \neq 0$ et c'est la définition même d'un problème régulier.

$$(b) \Leftrightarrow \alpha_4\, \beta_5 \sqrt{\frac{\lambda}{C_0}} + \alpha_5\, \beta_4 \sqrt{\frac{\lambda}{C_1}} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_4\, \beta_5}{\sqrt{C_0}} + \frac{\alpha_5\, \beta_4}{\sqrt{C_1}} \neq 0$$

et cette condition prouve l'existence d'une solution unique ; voir [19]

Ainsi dans le secteur : $-\frac{\pi}{2}-\underline{\omega}<\varphi<\frac{\pi}{2}-\overline{\omega}$

$\underline{\omega}=\min(\arg c_0, \arg c_1)$; $\overline{\omega}=\max(\arg c_0, \arg c_1)$

de [4] le problème (1.4) admet une seule solution g_h telle que :

$g_h=(g_{1h}, g_{2h})$, $g_h \in \quad W_q^l(0,b)xW_q^l(b;1)$; $l \geq 2$

et pour l entier tel que $l \geq 2$ on a l'inégalité valable dans ce cas :

$$\sum_{j=0}^{2} Q_h^{-\delta 2(l-j)} \|g_h\|_{j,2} \leq c \sum_{m_\upsilon \leq 1} Q_h^{-\delta 2(l-m_\upsilon-1\,2)} |L_\upsilon \varphi_h|$$

En particulier pour $j=1$:

$$Q^{-\delta 2(l-1)} \|g_h\|_{1,2} \leq c\left(\sum_{m_\upsilon=0} Q_h^{-\delta 2(l-m_\upsilon-1\,2)} |L_\upsilon \varphi_h| + \sum_{m_\upsilon=1} Q_h^{-\delta 2(l-m_\upsilon-1\,2)} |L_\upsilon \varphi_h|\right)$$

Pour $m_\upsilon=0$ on a $|L_\upsilon \varphi_h| \leq \varphi$

Pour $m_\upsilon=1$ on a $|L_\upsilon \varphi_h| \leq c$

Donc $\|g_h\|_{1,2} \leq c\left(Q_h^{1-\delta 4}+Q_h^{\delta 4}\right)$; $\delta>0$

puisque $\lim\limits_{h\to\infty} Q_h=0$ et δ un nombre positif assez petit donc $\lim\limits_{h\to\infty} \| g_h \|_{1,2}=0$

On va poser : $u_h=\varphi_h+g_h$, donc $u_h \in C^\infty[0,b]x\, C^\infty[b,1]$

de plus $L_\upsilon u_h=L_\upsilon \varphi_h+L_\upsilon g_h=0$ $(L_\upsilon g_h=-L_\upsilon \varphi_h)$

donc $u_h \in (C^\infty[0,b]x\, C^\infty[b,1]$; $L_\upsilon u=0$; $m_\upsilon \leq 1)$

et $\| u-u_h \|_{1,2} \leq \| u-\varphi_h \|_{1,2}+\| g_h \|_{1,2}$

i.e $\lim\limits_{h\to\infty} \| u-u_h \|_{1,2}=0$

on a ainsi montré que :

$$\left(W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1) ; L_\upsilon u=0 ; m_\upsilon=0\right) \subset \left.\overline{\left(C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1] ; L_\upsilon u=0 ; m_\upsilon \leq 1\right)}\right|_{W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)}$$

L'inclusion inverse est évidente , donc l'égalité (4) est démontrée.

<u>2^e Cas</u> : Démontrons maintenant l'égalité (3) pour $k=0$ i.e :

$$\left.\overline{\left(C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1] ; L_\upsilon u=0 ; m_\upsilon=0\right)}\right|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}=L_2(0,b)xL_2(b,1) \qquad (5)$$

Soit $u \in L_2(0,b)xL_2(b,1)$; en faisant un raisonnement analogue à celui du premier cas, on montre l'existence d'une suite de fonctions $\Psi_h \in C_0^\infty[0,b] \times C_0^\infty[b,1]$ telle que :

$$\|u - \psi_h\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \xrightarrow{h \to \infty} 0$$

On va poser : $\varphi_h = \Psi_h$; donc $\varphi_h \in C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1]$,

$Q_h = \max\limits_{m_\upsilon \leq k-1} |L_\upsilon \varphi_h|$; pour $k = 0$ on a : $L_\upsilon \varphi_h = 0$

donc on pose : $Q_h = 1/h$

Pour $m_\upsilon = 0$ on a : $|L_\upsilon \varphi_h| \leq c$

Regardons le problème suivant :

$$\begin{cases} L_0\left(Q_h^{-\delta} e^{-i\varphi}\right) g_{1h} = 0 \\ L_1\left(Q_h^{-\delta} e^{-i\varphi}\right) g_{2h} = 0 \\ L_\upsilon g_h = - L_\upsilon \varphi_h \text{ ; pour } m_\upsilon = 0 \\ L_\upsilon g_h = 0 \text{ ; pour } m_\upsilon \geq 1 \end{cases} \qquad (2.4)$$

où $L_0(\lambda) = C_0 u'' - \lambda u$; $\quad L_1(\lambda) = C_1 u'' - \lambda u$

$C_0 = \dfrac{\lambda}{S_1^2}$, $C_1 = \dfrac{\lambda}{S_2^2}$ (Ainsi ce problème est régulier ; voir le problème (1.4))

et $\quad -\dfrac{\pi}{2} - \underline{\omega} < \varphi < \dfrac{\pi}{2} - \overline{\omega}$

$\underline{\omega} = \min(\arg C_0 , \arg C_1)$; $\overline{\omega} = \max(\arg C_0 , \arg C_1)$

De [4] résulte que le problème (2.4) admet pour $h \to \infty$ une solution unique $g_h=(g_{1h},g_{2h})$

$g_h \in C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1]$ et ℓ entier tel que $\ell \geq 2$ on a :

$$\sum_{j=0}^{2} Q_h^{-\delta(l-j)\,2} \|g_h\|_{j,2} \leq c \sum_{m_\upsilon=0} Q_h^{-\delta(l-1/2)\,2} |L_\upsilon \varphi_h|$$

En particulier pour $j = 0$ on a :

$$Q_h^{-\delta l\,2} \|g_h\|_{0,2} \leq c \sum_{m_\upsilon=0} Q_h^{-\delta(l-1/2)\,2} |L_\upsilon \varphi_h|$$

et puisque $|L_\upsilon \varphi_h| \leq c$ pour $m_\upsilon = 0$ donc on a :

$Q_h^{-\delta l\,2} \|g_h\|_{0,2} \leq c\, Q_h^{-\delta(l-1/2)\,2}$; donc :

$\|g_h\|_{0,2} \leq c\, Q_h^{\delta/4}$; et puisque $\lim\limits_{h \to \infty} Q_h = 0$; et $\delta > 0$

alors : $\lim\limits_{h \to \infty} \|g_h\|_{0,2} = 0$

Si on pose : $u_h = \varphi_h + g_h$; alors :

$\|u - u_h\|_{0,2} \leq \|u - \varphi_h\|_{0,2} + \|g_h\|_{0,2}$

donc : $\lim\limits_{h \to \infty} \|u - u_h\|_{0,2} = 0$

et $L_0 u_h = L_0 \varphi_h + L_0 g_h = 0$; pour $m_0 = 0$

i.e. $u_h \in (C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1]$; $L_0 u = 0$; $m_0 = 0)$

donc l'égalité (5) est démontrée.

D'où l'égalité (3) est démontrée.

<u>2e étape</u> :

Démontrons maintenant l'égalité (2) pour $S < K$ i.e : $S = 0$, $K = 1$ c'est-à-dire :

$$\overline{\left(C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1] \;;\; L_0 u = 0 \;;\; m_0 \leq 1\right)}\Big|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} = L_2(0,b)xL_2(b,1) \qquad (6)$$

Soit $u \in L_2(0,b)xL_2(b,1)$; utilisons l'égalité (5) :

donc : $(\exists)\, u_1 \in (C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1]$; $L_0\, u = 0$; $m_0 = 0)$ tel que :

$\|u - u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$; et puisque :

$$\left(C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1] \;;\; L_0\, u = 0 \;;\; m_0 = 0\right) \subset \left(W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1) \;;\; L_0 u = 0 \;;\; m_0 = 0\right)$$

Alors $u_1 \in \left(W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1) \;;\; L_0 u = 0 \;;\; m_0 = 0\right)$

D'après l'égalité (4) :

$(\exists)$ $u_1 \in (C^\infty[0,b]xC^\infty[b,1]$; $L_0\, u = 0$; $m_0 \leq 1$) tel que :

$\|u_1 - u_2\|_{W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

Puisque $W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)$ s'injecte continûment dans $L_2(0,b)$ x $L_2(b,1)$, donc on a :

$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c\, \|u_1 - u_2\|_{W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

On a donc obtenu : $\|u - u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi $\|u - u_2\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq \|u - u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} + \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$\|u - u_2\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

L'égalité (6) est démontrée , et par suite on a l'égalité (2)

Démontrons maintenant l'égalité (1) :

Nous avons prouvé l'égalité (6) suivante :

$$\overline{\left(C^{\infty}[0,b]xC^{\infty}[b,1]\ ;\ L_{\upsilon}u = 0\ ;\ m_{\upsilon} \leq 1\right)}\Big|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} = L_2(0,b)xL_2(b,1) \qquad (6)$$

et puisque :

$$\left(C^{\infty}[0,b]xC^{\infty}[b,1]\ ;\ L_{\upsilon}u = 0\ ;\ m_{\upsilon} \leq 1\right) \subset \left(W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)\ ;\ L_{\upsilon}u = 0;\ m_{\upsilon} \leq 1\right) \subset L_2(0,b)xL_2(b,1)$$

Alors, en prenant la fermeture par rapport à $L_2(0,b)xL_2(b,1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} L_2(0,b)xL_2(b,1) &= \overline{\left(C^{\infty}[0,b]xC^{\infty}[b,1]\ ;\ L_{\upsilon}u = 0\ ;\ m_{\upsilon} \leq 1\right)}\Big|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \\ &\subset \overline{\left(W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)\ ;\ L_{\upsilon}u = 0\ ;\ m_{\upsilon} \leq 1\right)}\Big|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \\ &\subset L_2(0,b)\ x\ L_2(b,1) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\overline{\left(W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)\ ;\ L_{\upsilon}u = 0\ ;\ m_{\upsilon} \leq 1\right)}\Big|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} = L_2(0,b)\ x\ L_2(b,1)$$

Ce qui démontre l'égalité (1) et par suite le lemme.

§5 - Complétude du système de fonctions radicales :

Dans ce paragraphe on montre la complétude du système de fonctions radicales (théorème 2).

Dans ce but on commence tout d'abord par rappeler certaines notions sur les S-nombres d'un opérateur linéaire et on montre un lemme concernant les opérateurs de classe σ_p dans les espaces produit (lemme 2).

Notions sur les S-nombres d'un opérateur linéaire compact :

Soit A un opérateur linéaire compact ($A \in \sigma_r$) , donc A^* l'adjoint de l'opérateur A l'est aussi i.e ; $A^* \in \sigma_r$; d'où l'opérateur $(A^*A) \in \sigma_r$ et donc $H = (A^*A)^{1/2} \in \sigma_r$

Définition 1 : [5]

On appelle valeurs singulières ou s-nombres de l'opérateur compact A , les valeurs propres de l'opérateur compact H ; et on note :

$S_j(A) = \lambda_j(A)$; $j = 1, 2, \ldots\ldots, \infty$

- Si C est un opérateur continûment inversible dans un espace de Hilbert H , alors notons par H(C) l'espace de Hilbert suivant :

$$H(C) = \left\{ u \in D(C) : (u,v)_{H(C)} = (Cu , Cv)_H \right\}$$

Lemme 1 :

Soient C_1 et C_2 deux opérateurs continûment inversibles dans un espace de Hilbert H ; alors on a :

$$S_j\left(A , H(C_1) , H(C_2)\right) = S_j\left(C_2AC_1^{-1} , H , H\right) \quad j = \overline{1,\infty}$$

Démonstration : voir YAKUBOV [3]

Notons par $\sigma_p(H , H_1)$; $p > 0$, l'ensemble des opérateurs :

$A : H \rightarrow H_1$ compacts pour lesquels :

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_j^p\left(A , H , H_1\right) < \infty$$

Soient H_i , $\mathscr{H}_i$ (i = 1,2) quatre espaces de Hilbert

et $I_i : H_i \rightarrow \mathscr{H}_i$ continues i.e ; l'opérateur d'immersion correspondant.

Il est facile de voir que si I_1 et I_2 sont compacts, alors l'opérateur d'immersion $\widetilde{I}$ de $H = H_1 \oplus H_2$ dans $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ est compact.

Lemme 2 :

Soit $I_i \in \sigma_p(H_i, \mathscr{H}_i)$ $(i = 1,2)$

Alors $\widetilde{I} \in \sigma_p(H, \mathscr{H})$.

Démonstration :

Notons les opérateurs $\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$ définis de $H = H_1 \oplus H_2$ dans $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2$ respectivement par $\widetilde{I}_1$ et $\widetilde{I}_2$. Il est clair que :

$$\widetilde{I}_1^* = \begin{pmatrix} I_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{I}_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2^* \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{I}_1^* \widetilde{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1^* I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{I}_2^* \widetilde{I}_2 = \begin{pmatrix} I_2^* I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'ici on a :

$$S_n^2(\widetilde{I}_i, H, \mathscr{H}) = \lambda_n(\widetilde{I}_i^* \widetilde{I}_i) = \lambda_n(I_i^* I_i) = S_n^2(I_i, H_i, \mathscr{H}_i)$$

i.e. $\widetilde{I}_i \in \sigma_p(H, \mathscr{H})$; $i = 1,2$

Alors : $\widetilde{I} = \widetilde{I}_1 + \widetilde{I}_2 \in \sigma_p(H, \mathscr{H})$; car de : $A, B \in \sigma_p(H, \mathscr{H})$ résulte que $A + B \in \sigma p(H, \mathscr{H})$.

En effet, en vertu de [6] il existe un opérateur auto-adjoint positif dans $\mathscr{H}$ à domaine de définition $D(C) = H$ tel que les normes de $\mathscr{H}(C)$ est H sont équivalentes. En vertu du lemme (1) et de [5] :

$S_{n+m-1}(A+B, H, \mathscr{H}) = S_{n+m-1}(A+B, \mathscr{H}(C), \mathscr{H})$

$= S_{n+m-1}((A+B)C^{-1}, \mathscr{H}, \mathscr{H}) = S_{n+m-1}(AC^{-1} + BC^{-1}, \mathscr{H}, \mathscr{H})$

$\leq S_n(AC^{-1}, \mathscr{H}, \mathscr{H}) + S_m(BC^{-1}, \mathscr{H}, \mathscr{H})$

$= S_n(A, H, \mathscr{H}) + S_m(B, H, \mathscr{H})$

d'ici résulte que si A , B $\in \sigma_p(H, \mathscr{H})$; alors A + B $\in \sigma_p(H, \mathscr{H})$

Définition 2 :

Le spectre d'un opérateur A est dit discret si :

1/ tous les points λ qui ne sont pas valeurs propres de A sont des valeurs régulières.

2/ Les valeurs propres de A sont isolées et sont de multiplicités algébriques finies.

3/ L'infini est le seul point d'accumulation de l'ensemble des valeurs propres.

Pour montrer maintenant la complétude du système de fonctions radicales de notre problème ; on utilise le théorème apparu dans [3] (théorème 3.6 p 71 pour le cas n = 1).

Ce problème est une version actuelle du théorème bien connu de N. DUNFORD et J.TSCHWARTZ tome 2 (chap II §9.31 , ref [7].

Théorème 1 : [3]

Supposons que :

1/ Il existe deux espaces de Hilbert H et H_1 pour lesquels on a l'immersion compacte : $H1 \subset H$

2/ $\overline{H_1}|_H = H$

3/ pour un certain p > 0 : $I \in \sigma p\,(H_1, H)$

4/ A est borné de H_1 dans H

5/ Il existe des rayons $l_k(a)$ ayant pour origine le point a formant des angles entre des rayons consécutifs ne dépassant pas $\frac{\pi}{P}$, et il existe $m \in R$ tel que :

$$\|R(\lambda, A)\|_{B(H,H_1)} \leq C\,|\lambda|^m \ ; \ \lambda \in l_k(a)\ ;\ |\lambda| \to \infty$$

Alors le spectre de A est discret, et le système des fonctions radicales de A est complet dans H_1.

Soit maintenant dans l'espace $L_2(0,b)xL_2(b,1)$ le problème suivant :

$\mathscr{L}\,u(x) = a(x)\,u''(x)$

$$D(\mathscr{L}) = \left\{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,l)\ ;\ L_\upsilon\, u = 0\ ;\ \upsilon = \overline{2,5}\right\}$$

Les fonctions radicales de l'opérateur $\mathscr{L}$ sont dites fonctions radicales du problème suivant :

$$\begin{cases} L(\lambda) = \lambda u \\ L_\upsilon u = 0 \quad ; \quad \upsilon = \overline{2,5} \end{cases} \qquad (1.5)$$

où : $L(\lambda) = a(x)\, u''(x)$

on a alors le théorème.

Théorème 2 :

Supposons que le problème (1.5) soit faiblement régulier i.e :

$$a_0\,,\, a_1 \neq 0 \;;\; \alpha_2\,\beta_3 \neq 0 \;;\; \frac{\alpha_2\,\beta_3}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_3\,\beta_2}{\sqrt{a_1}} = 0$$

$$\frac{\alpha_4\,\beta_5}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_5\,\beta_4}{\sqrt{a_1}} \neq 0 \quad \text{et} \quad \gamma\,\beta_3 - \delta\,\alpha_3 \neq 0$$

et les fonctionnelles :

- T_υ ; $\upsilon = 2,4$, continues dans $W_2^1(0,b)xW_2^1(b,1)$
- T_υ ; $\upsilon = 3,5$, continues dans $L_2(0,b)xL_2(b,1)$

Alors, le spectre du problème (1.5) est discret et le système des vecteurs radicaux est complet dans l'espace $W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)$; $L\upsilon\, u = 0$, $\upsilon = \overline{2,5}$

Démonstration :

On doit vérifier toutes les hypothèses du théorème 1 de YAKUBOV [3].

Prenons : $H = L_2(0,b) \times L_2(b,1)$

$$H_1 = \left(W_2^2(0,b) \times W_2^2(b,1) \;;\; L_\upsilon u = 0 \;;\; \upsilon = \overline{2,5}\right)$$

Condition 1 : comme les immersions

$$W_2^2(0,b) \hookrightarrow L_2(0,b)$$

$$W_2^2(b,1) \hookrightarrow L_2(b,1)$$

sont compactes, donc l'immersion : $W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1) \hookrightarrow L_2(0,b)xL_2(b,1)$ est compacte aussi , i.e : $H_1 \hookrightarrow H$ compactement. L'hypothèse - 1 - du théorème est vérifiée.

Condition 2 :

L'égalité : $\overline{\left(W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)\ ;\ L_\upsilon u = 0\ ,\ \upsilon = \overline{2,5}\right)}\Big|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} = L_2(0,b)xL_2(b,1)$

$$\text{i.e.}\quad \overline{H_1}\big|_H = H$$

est le résultat du lemme (1.4)

En effet ; il existe $S_1 \neq 0$ et $S_2 \neq 0$ tels que :

$$\alpha_2\,\beta_3\,S_1 + \alpha_3\,\beta_2\,S_2 \neq 0$$

et

$$\alpha_4\,\beta_5\,S_1 + \alpha_5\,\beta_4\,S_2 \neq 0$$

car il suffit de prendre :

$S_1 = \dfrac{1+\delta}{\sqrt{a_0}}$ et $S_2 = \dfrac{1+\delta}{\sqrt{a_1}}$ où δ est un réel différent de 0 et de -1. Ainsi :

$$\bullet\ \alpha_2\,\beta_3\left(\frac{1+\delta}{\sqrt{a_0}}\right) + \alpha_3\,\beta_2\left(\frac{1+\delta}{\sqrt{a_1}}\right) = \frac{\alpha_2\,\beta_3}{\sqrt{a_0}} + \delta\underbrace{\left[\frac{\alpha_2\,\beta_3}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_3\,\beta_2}{\sqrt{a_1}}\right]}_{=\,0\ \text{par hypothèse}}$$

$$= \frac{\alpha_2\,\beta_3}{\sqrt{a_0}} \neq 0 \quad \text{par hypothèse}$$

$$\bullet\ \alpha_4\,\beta_5\left(\frac{1+\delta}{\sqrt{a_0}}\right) + \alpha_5\,\beta_4\left(\frac{\delta}{\sqrt{a_1}}\right) = \frac{\alpha_4\,\beta_5}{\sqrt{a_0}} + \delta\underbrace{\left[\frac{\alpha_4\,\beta_5}{\sqrt{a_0}} + \frac{\alpha_5\,\beta_4}{\sqrt{a_1}}\right]}_{\neq\,0\ \text{par hypothèse}}$$

δ étant arbitraire, il suffit de prendre :

$$\delta \neq \frac{\dfrac{-\alpha_4\,\beta_5}{\sqrt{a_0}}}{\dfrac{\alpha_4\,\beta_5}{\sqrt{a_0}} + \dfrac{\alpha_5\,\beta_4}{\sqrt{a_1}}}$$

l'hypothèse - 2 - du théorème 1 est vérifiée.

Condition 3 :

Prenons p = ½ + δ où δ > 0 un nombre arbitraire

On rappelle un résultat connu :

$$S_j\left(I\,,\ W_2^2(0,b)\,,\ L_2(0,b)\right) \sim j^{-2} \quad [8]$$

et $$S_j\left(I\,,\ W_2^2(b,l)\,,\ L_2(b,l)\right) \sim j^{-2} \quad [8]$$

i.e. $I \in \sigma_{1/2+\delta}\left(W_2^2(0,b)\,,\ L_2(0,b)\right)$

et $I \in \sigma_{1/2+\delta}\left(W_2^2(b,l)\,,\ L_2(b,l)\right)$

Alors d'après le lemme 2 on a :

$$I \in \sigma_{1/2+\delta}\left(W_2^2(0,b)\mathrm{x}W_2^2(b,l)\,,\ L_2(0,b)\mathrm{x}L_2(b,l)\right)$$

D'ici comme H_1 est un sous espace fermé de $W_2^2(0,b)\mathrm{x}\,W_2^2(b,1)$ alors :

$$I \in \sigma_{1/2+\delta} \qquad (H_1,H)$$

L'hypothèse 3 du théorème 1 est satisfaite.

Condition 4 :

Soit l'opérateur L défini ci-dessus :

$$\mathcal{L} : H_1 \to H \quad \text{où} \quad H_1 = D(\mathcal{L})$$

puisque la norme $\|u\|_{H_1}$ est équivalente à la norme du graphe : $\|u\|_{H_1} + \|\mathcal{L}\, u\|_H$;

donc l'opérateur $\mathcal{L}$ devient borné de H_1 dans H.

L'hypothèse 4 du théorème 1 est satisfaite.

Condition 5 :

En vertu du théorème (2.3) , dans le secteur S_ε :

$$S_\varepsilon = \left\{\lambda : \varepsilon + \overline{\omega} - \pi < \arg\lambda < \pi + \underline{\omega} - \varepsilon\right\}$$

on a :

$$\|R(\lambda,\mathcal{L})\|_{B(H,H_1)} = \|R(\lambda,\mathcal{L})\|_{W_2^2(0,b)\mathrm{x}W_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon\,|\lambda|^{1/2} \quad ; \ |\lambda| \to \infty \text{ dans } S_\varepsilon$$

i.e. $$\|R(\lambda,\mathcal{L})\|_{B(H,H_1)} \leq c_\varepsilon\,|\lambda|^{m} \quad ; \ m = \frac{1}{2}\ , \ |\lambda| \to \infty \text{ dans } S_\varepsilon$$

Et dans le secteur S_ε il est toujours possible de choisir des rayons d'origine (0,0) formant des angles entre les rayons consécutifs inférieurs à

$$\frac{\pi}{\frac{1}{2}+\delta} \quad \left(p = \frac{1}{2} + \delta \ : \text{condition } 3\right)$$ L'hypothèse 5 du théorème est vérifiée.

Ainsi, en vertu du théorème 1 [3], le spectre du problème est discret et le système des fonctions radicales est complet dans $\left(W_2^2(0,b) \times W_2^2(b,1)\ ,\ L_\nu u = 0\ ;\ \nu = \overline{2,5}\right)$
Le théorème 2 est démontré.

§6 - <u>Problème de transmission parabolique non local</u> :

Dans ce paragraphe, à l'aide des résultats précédents on montre l'existence, l'unicité et l'approximation par des combinaisons linéaires de solutions élémentaires d'un problème mixte pour une équation aux dérivées partielles paraboliques à coefficient discontinu auprès de la dérivée d'ordre supérieur avec des conditions aux limites et de transmission non régulières et contenant des fonctionnelles abstraites.

L'étude repose sur la réduction du problème posé à un problème de Cauchy pour une équation différentielle opérationnelle de type parabolique dont le coefficient opératoriel a été étudié précédemment.

<u>Notion de solution élémentaire</u> :

Soit E un espace de Banach ; soit : (1) $L(D)\,u := u'(t) + A\,u(t) = 0$

où A est un opérateur non borné ; u(t) est la fonction cherchée.

Posons $L(\lambda) = A - \lambda I$. Alors on a le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> :

La fonction u(t) de la forme :

$$(2) \qquad u(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(\frac{t^k}{k!}u_0 + \frac{t^{k-1}}{(k-1)\,!}u_1 + \ldots\ldots + \frac{t}{1\,!}u_{k-1} + u_k\right)$$

où $u_j \in E$; $j = \overline{0,k}$, $u_0 \neq 0$ est solution de l'équation (1) si et seulement si sont vérifiées les relations suivantes :

$$(3) \qquad L(\lambda_0)\,u_p + \frac{1}{1\,!}L'(\lambda_0)\,u_{p-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{P\,!}L^{(p)}(\lambda_0)\,u_0 = 0 \qquad \left(P = \overline{0,k}\right)$$

Preuve

u(t) solution de (1) $\Leftrightarrow$ u'(t) + A u(t) = 0 pour t quelconque

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\lambda_0 \, e^{-\lambda_0 t} \left(\dfrac{t^k}{k\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) \\ + e^{-\lambda_0 t} \left(\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) \\ + A \, e^{-\lambda_0 t} \left(\dfrac{t^k}{k\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) \end{array} \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda_0 t} \left\{ -\lambda_0 \left(\frac{t^k}{k\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) + \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) + A \left(\frac{t^k}{k\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) \right\} = 0$$

ceci $\forall$ t.

D'où :

$$-\lambda_0 \left\{ \left(\frac{t^k}{k\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) + \left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) + A \left(\frac{t^k}{k\,!} u_0 + \ldots + u_k \right) \right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^k}{k\,!} \left(A\,u_0 - \lambda\,u_0 \right) + \frac{t^{k-1}}{(k-1)\,!} \left(Au_1 - \lambda_0 u_1 + u_0 \right) + \frac{t^{k-2}}{(k-2)\,!} \left(A\,u_2 - \lambda_0\,u_2 + u_1 \right)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{t}{1\,!} \left(A\,u_{k-1} - \lambda_0\,u_{k-1} + u_{k-2} \right) + \left(A\,u_k - \lambda_0\,u_k + u_{k-1} \right) = 0$$

c'est une équation du k^{ieme} degré en t vérifiée pour ($\forall$) t $\Leftrightarrow$ tous les coefficients sont nuls.

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} Au_0 - \lambda_0\,u_0 = 0 \\ Au_1 - \lambda_0\,u_1 + u_0 = 0 \\ Au_2 - \lambda_0\,u_2 + u_1 = 0 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ Au_{k-1} - \lambda_0\,u_{k-1} + u_{k-2} = 0 \\ Au_k - \lambda_0\,u_k + u_{k-1} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda_0\,I)\,u_0 = 0 \\ (A - \lambda_0\,I)\,u_1 + u_0 = 0 \\ (A - \lambda_0\,I)\,u_2 + u_1 = 0 \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ (A - \lambda_0\,I)\,u_{k-1} + u_{k-2} = 0 \\ (A - \lambda_0\,I)\,u_k + u_{k-1} = 0 \end{array} \right\}$$

On rappelle que $L(\lambda) = A - \lambda I$ d'où :

$$L'(\lambda) = I \;;\; L''(\lambda) = 0 \;;\; L^{(p)}(\lambda) = 0 \text{ pour } p \geq 2$$

Donc :

$$\begin{cases} L(\lambda_0)\,u_0 = 0 \\ L(\lambda_0)\,u_1 + \dfrac{1}{1\,!} L'(\lambda_0)\,u_0 = 0 \\ L(\lambda_0)\,u_2 + \dfrac{1}{1\,!} L'(\lambda_0)\,u_1 + \dfrac{1}{2\,!} L''(\lambda_0)\,u_0 = 0 \\ \quad\vdots \\ L(\lambda_0)\,u_{k-1} + \dfrac{1}{1\,!} L'(\lambda_0)\,u_{k-2} + \dots + \dfrac{1}{(k-1)\,!} L^{(k-1)}(\lambda_0)\,u_1 = 0 \\ L(\lambda_0)\,u_k + \dfrac{1}{1\,!} L'(\lambda_0)\,u_{k-1} + \dots + \dfrac{1}{k\,!} L^{(k)}(\lambda_0)\,u_0 = 0 \end{cases}$$

i.e. $\quad L(\lambda_0)\,u_p + \dfrac{1}{1\,!} L'(\lambda_0)\,u_{p-1} + \dots + \dfrac{1}{P\,!} L^{(p)}(\lambda_0)\,u_0 = 0 \;;\; p = \overline{0,k}$

c.q.f.d.

Regardons maintenant dans l'espace de Banach E le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (4) \quad L(D)\,u = u'(t) + A\,u(t) = 0 \\ (5) \quad u(0) = \varphi_0 \end{cases}$$

du lemme 1 résulte que la fonction u(t) de la forme :

$$(6) \qquad u(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(\frac{t^k}{k!}\,u_0 + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,u_1 + \dots + \frac{t}{1\,!}\,u_{k-1} + u_k\right)$$

est solution de (3) si et seulement si u_0 , $u_1, \dots,$ u_k sont des fonctions radicales correspondant à la valeur propre λ_0 de $L(\lambda)$.

<u>Définition 1</u> :

La solution de la forme (6) est dite solution élémentaire de (4).

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = -A\,u(t) & (7) \\ u(0) = \varphi_0 & (8) \end{cases}$$

On a le théorème principal suivant :

Théorème 1 :

Supposons que :

1 - D(A) est dense dans H (H espace de Hilbert).

2 - Pour un certain $p > 0$ et $\lambda_0 \in \rho(A)$; $R(\lambda_0,A) \in \sigma_p(H)$

3 - Il existe des rayons $l_k(a)$ ayant pour origine le point a dont l'angle entre deux rayons consécutifs ne dépassant pas π/p et des nombres $\alpha > 0$, $\beta \in (0,1]$

$\|R(\lambda,A)\| \leq c\,|\lambda|^{-\beta}$; $-\pi/2 - \alpha < \arg\lambda < \pi/2 + \alpha$

4 - $\varphi_0 \in D(A)$

Alors le problème (7) - (8) admet une solution unique u ;

$u \in C([0,T], E) \cap C^1([0,T], E(A), E)$ et il existe des nombres c_{jn} tels que :

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \left\| u(t) - \sum_{j=1}^{n} C_{jn}\, u_j(t) \right\|_E = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}_{t\in[0,T]} t \left\| u'(t) - \sum_{j=1}^{n} C_{jn}\, u_j'(t) \right\|_E + \left\| A\,u(t) - \sum_{j=1}^{n} C_{jn}\, A\,u_j(t) \right\|_E = 0$$

où u(t) est la solution du problème (7) - (8), et $u_j(t)$ sont des solutions élémentaires de l'équation (7) et E(A) = D(A) muni de la norme du graphe.

Position du problème :

Dans $[0, T] \times \{(0,1) \setminus \{b\}\}$; regardons l'équation :

$$(9) \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a(x) \cdot \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0$$

avec les conditions fonctionnelles :

$$(10) \begin{cases} L_2 u := \alpha_2 u_1'(t,o) + \beta_2 u_2'(t,1) + \gamma u(t,o) + \delta u(t,1) \\ \qquad + \sum_{P=1}^{N_2} \delta_{2P} u'(t,x_{2P}) + T_2 u(t,\cdot) = 0 \\ L_3 u := \alpha_3 u(t,o) + \beta_3 u(t,1) + \sum_{P=1}^{N_3} \delta_{3P} u(t,x_{3P}) + T_3 u(t,\cdot) = 0 \end{cases}$$

et les conditions de transmission :

$$(11) \begin{cases} L_4 u := \alpha_4 u'(t, b-o) + \beta_4 u'(t, b+0) + T_4 u(t,\cdot) = 0 \\ L_5 u := \alpha_5 u(t, b-o) + \beta_5 u(t, b+0) + T_5 u(t,\cdot) = 0 \end{cases}$$

et les conditions initiales :

(12) $u(0,x) = \varphi_0(x)$

où :

- $a(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } x \in (0,b) \\ a_1 & \text{si } x \in (b,1) \end{cases}$
- T_υ ; $\upsilon = 2, 5$ sont des fonctionnelles linéaires.
- α_i ; β_i ; $i = 2, 5 \in C$

et la condition fondamentale de non régularité : $\dfrac{\alpha_2 \beta_3}{\sqrt{a_0}} + \dfrac{\alpha_3 \beta_2}{\sqrt{a_1}} = 0$

Ecriture opérationnelle du problème :

Considérons dans $L_2(0,b) \times L_2(b,1)$ l'opérateur :

$$A : L_2(0,b) \times L_2(b,1) \longrightarrow L_2(0,b) \times L_2(b,1)$$

$$u(x) \longrightarrow A\, u(x) = a(x)\, u''(x)$$

$$D(A) = \left\{ W_2^2(0,b) \times W_2^2(b,1) \;;\; L_\upsilon u = 0 \;;\; \upsilon = \overline{2,5} \right\}$$

(9) - (10) - (11) - (12) est équivalent à (7) - (8).

On a le théorème suivant :

Théorème 2 :

Supposons que les conditions :

- (a) $\dfrac{\alpha_4 \beta_5}{\sqrt{a_0}} + \dfrac{\alpha_5 \beta_4}{\sqrt{a_1}} \neq 0$; (b) $\delta \alpha_3 - \gamma \beta_3 \neq 0$

- Il existe deux nombres complexes S_1 et S_2 non nuls tels que :

$$\begin{cases} \alpha_2 \beta_3 S_1 + \alpha_3 \beta_2 S_2 \neq 0 & \text{(c)} \\ \alpha_4 \beta_5 S_2 + \alpha_5 \beta_4 S_1 \neq 0 & \text{(d)} \end{cases}$$

soient vérifiées et que $|\arg a_i| < \pi/2$; i $0,1$

Alors le problème (9) - (10) - (11) - (12) admet une solution unique :

$u(t,x) \in C([0,T], L_2(0,b)xL_2(b,1)) \cap C^1([0,T], E(A), L_2(0,b)xL_2(b,1))$

et il existe des nombres c_{jn} tels que :

$$(13) \quad \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \left\| u(t,x) - \sum_{j=1}^{n} C_{jn}\, u_j(t,x) \right\| = 0$$

$$(14) \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}_{t\in[0,T]} t \left(\left\| \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} C_{jn} \frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} + \left\| a(x) \cdot \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - a(x) \sum_{j=1}^{n} C_{jn} \frac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \right) = 0$$

où $u_j(t,x)$ est la fonction à deux variables engendrée par $u_j(t)$ qui sont les solutions élémentaires de l'équation (7) , et E(A) est le domaine de A muni de la norme de graphe.

Démonstration

Pour démontrer le théorème 2 on va utiliser le théorème 1. Pour cela on vérifie pour $H = L_2(0,b) \times L_2(b,1)$; $H_1 = D(A)$

Condition 1 :

Par les conditions (c) et (d) du théorème 2 , on vérifie les hypothèses du lemme de densité (1.4).

Ce dernier prouve la densité du domaine :

$$D(A) = \left\{W_2^2(0,b) \times W_2^2(b,1) \ ; \ L_\nu u = 0 \ ; \ \nu = \overline{2,5}\right\}$$ Dans $L_2(0,b) \times L_2(b,1)$ par

rapport à la norme de $L_2(0,b \times L_2(b,1)$.

i.e $\quad \overline{H_1}|_H = H$

Condition 2 :

En raisonnant de la même manière que le théorème (2.5) on montre l'existence d'un p>0 et $\lambda_0 \in \rho(A) \,/\, R(\lambda_0\ , A) \in \sigma_p\,(L_2\,(0,b) \times L_2\,(b,1))$.

L'hypothèse 2 est satisfaite.

Condition 3 :

D'après le théorème 1.3 on a :

$||R(\lambda,A)|| \leq c_\varepsilon\,|\lambda|^{-1/2}$; donc si on pose $\beta = ½ \in (0,1]$ on a :

$||R(\lambda,A)|| \leq c_\varepsilon\,|\lambda|^{-\beta}$; $|\lambda| \to \infty$ dans s_ε ;

$$S_\varepsilon = \left\{\lambda \in C : \varepsilon + \overline{\omega} - \pi < \arg\lambda < \pi + \underline{\omega} - \varepsilon\right\}$$

Soit le secteur suivant : $S_\alpha = \left\{\lambda : -\dfrac{\pi}{2} - \alpha < \arg\lambda < \dfrac{\pi}{2} + \alpha\right\}$

Déterminons les nombres α , $\arg a_0$, $\arg a_1$ pour que $S_\alpha \subset S_\varepsilon$

On va poser $\alpha = \varepsilon$

$$S_\alpha \subset S_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon + \overline{\omega} - \pi < -\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \alpha < \pi + \underline{\omega} - \varepsilon$$

On obtient : $\varepsilon + \overline{\omega} - \pi < -\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon < \pi + \underline{\omega} - \varepsilon$

donc si on pose : $\overline{\omega} < \dfrac{\pi}{2}$ et $\underline{\omega} > -\dfrac{\pi}{2}$

on peut choisir ε suffisamment petit pour que l'on ait :

$$S_\alpha \subset S_\varepsilon \quad \left(\text{prendre } \varepsilon < \min\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\overline{\omega}}{2}\ ,\ \frac{\pi}{4} + \frac{\underline{\omega}}{2}\right)\right)$$

Puisque $\underline{\omega} = \min(\arg a_0\ , \arg a_1)$; $\overline{\omega} = \max(\arg a_0\ , \arg a_1)$

donc $\overline{\omega} < \frac{\pi}{2}$ et $\underline{\omega} > -\frac{\pi}{2}$ i.e $|\arg a_i| < \frac{\pi}{2}$ $i = 1,2$

OR : $\|R(\lambda,A)\| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/2}$; $|\lambda| \to \infty$ dans S_ε

donc : $\|R(\lambda,A)\| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/2}$; $|\lambda| \to \infty$ dans S_α (car $S_\alpha \subset S_\varepsilon$)

De plus on prend deux rayons ρ_1 et ρ_2 centrés à l'origine et on choisit le nombre $\delta > 0$ assez petit tel que l'angle entre ces deux rayons soit inférieur à $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}+\delta}$, ce qui est tout à fait possible dans S_α.

d'où ρ_1 et ρ_2 vérifient l'hypothèse 3 du théorème 1.

<u>Condition 4</u> :

Par l'hypothèse (12) on a : $u(0,x) = \varphi_0(x)$, donc $\varphi_0 \in D(A)$

l'hypothèse - 4 du théorème 1 est satisfaite.

D'où : d'après le théorème 1 ; le problème (7) - (8) admet une solution unique :

$u \in C([0,T], L_2(0,b)xL_2(b,1)) \cap C^1([0,T], E(A), L_2(0,b)xL_2(b,1)))$

et il existe des nombres c_{jn} tels que :

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \left\| u(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{jn}\, u_j(t) \right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} = 0 \qquad \text{et}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} t \left(\left\| u'(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{jn}\, u_j'(t) \right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} + \left\| A\,u(t) - \sum_{j=1}^{n} c_{jn}\, A\,u_j(t) \right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \right) = 0$$

et puisque le problème (7) - (8) est équivalent au problème : (9) - (10) - (11) - (12) ; donc le problème (9) - (10) - (11) - (12) admet une solution unique $u(t,x)$ /

$u(t,x) \in C([0,T], L_2(0,b)xL_2(b,1)) \cap C^1([0,T], E(A), L_2(0,b)xL_2(b,1))$ et vérifient les égalités (13) et (14).

Le théorème 2 est démontré.

Chapitre 2

PROBLEME AUX LIMITES POUR EQUATION DIFFERENTIELLE ORDINAIRE DU SECOND ORDRE AVEC PARAMETRE SPECTRAL DANS LES CONDITIONS DE TRANSMISSION

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème aux limites pour équation différentielle ordinaire du second ordre avec des conditions aux limites non locales et des conditions de transmission contenant le paramètre spectral. De tels problèmes surgissent en résolvant par la méthode de séparation des variables dans le problème de vibration des cordes avec poids fixé à l'intérieur de la corde (voir par exemple [20]).

On établit des conditions dites de régularité qui garantissent la complétude du système de fonctions radicales.

1 - <u>position du problème</u> :

Soit dans $L_2(0,b) \times L_2(b,1)$ le problème suivant :

$$\begin{cases} L(\lambda)\, u = f_1(x) & \text{sur } (0,b) \\ L(\lambda)\, u = f_3(x) & \text{sur } (b,1) \\ L_2\, u := \alpha_2\, u'(0) + \beta_2\, u'(1) = 0 \\ L_3\, u := \alpha_3\, u(0) + \beta_3\, u(1) = 0 \\ L_4\, u := u(b-0) - u(b+0) = 0 \\ L_5\, u := \alpha_5\, u'(b+0) - \beta_5\, u'(b-0) + \lambda\, u(b) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1.1)}$$

où $L(\lambda)\, u = u'' - \lambda\, u$

$b \in (0,1)$

$f = (f_1, f_3) \in L_2(0,b) \times L_2(b,1)$

Notre but est d'estimer la résolvante de ce problème et de donner une estimation 0 priori de la solution.

2 - <u>Estimation de la résolvante</u> :

Définissons l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ comme suit :

$$\mathscr{L}(\lambda) : L_2(0,b) \times L_2(b,1) \longrightarrow L_2(0,b) \times L_2(b,1)$$

$$u \longrightarrow \mathscr{L}(\lambda)\, u = (L(\lambda)\, u\, ,\, L(\lambda)\, u)$$

avec $D(\mathscr{L}(\lambda)) = \left\{ W_2^2(0,b) \times W_2^2(b,1)\ ;\ L_\upsilon u = 0\ ;\ \upsilon = \overline{2,5} \right\}$

Donc le problème initial serait équivalent au problème :

$$\mathscr{L}(\lambda)\, u = f \quad (1.2)$$

Soit le secteur $S_\varepsilon = \{\lambda : -\pi + \varepsilon < \arg\lambda < \pi - \varepsilon\}$; $\varepsilon > 0$

On a le théorème principal suivant :

Théorème 1 :

Supposons que le problème (1.2) vérifie la condition :

$\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \neq 0$

Alors pour tout $\lambda \in C$ vérifiant : $\lambda \in S_\varepsilon$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que $|\lambda| > R_\varepsilon$ on a :

$$\left\| R\left(\lambda, \mathscr{L}(\lambda)\right)\right\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \quad ; \quad |\lambda| \to \infty \text{ dans } S_\varepsilon$$

la constante c_ε dépend de l'angle ε.

Démonstration :

Cherchons une solution du problème (1.2) sous la forme $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 = (y_1, y_3)$; $u_2 = (y_2, y_4)$ où :

- u_1 est la restriction à $L_2(0,b) \times L_2(b,1)$ de la solution du problème (1)

$$\mathscr{L}(\lambda)\, u_1 = \tilde{f} \qquad (1)$$

où $\mathscr{L}(\lambda) : L_2(R) \times L_2(R) \longrightarrow L_2(R) \times L_2(R)$

$$u_1 \longrightarrow \mathscr{L}(\lambda)\, u_1 = (L(\lambda) y_1 , L(\lambda)\, y_3)$$

$$\tilde{f}(x) = \left(\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_3(x)\right)$$

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in (0,b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_2(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{si } x \in (b,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- u_2 est la solution du problème (2)

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\lambda)\, u_2 = 0 & (2) \\ L_\upsilon u_2 = -L_\upsilon u_1 \ ; \ \upsilon = \overline{2,5} \end{cases}$$

Cherchons d'abord u_1 en résolvant le problème (1).

Soit le problème (1) :

$$(1) \quad \mathscr{L}(\lambda)\, u_1 = \tilde{f} \quad \Leftrightarrow \quad \left(L(\lambda)\, y_1 , L(\lambda)\, y_3\right) = \left(\tilde{f}_1 , \tilde{f}_3\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} L(\lambda)\, y_1 = \widetilde{f}_1 \\ L(\lambda)\, y_3 = \widetilde{f}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1'' - \lambda\, y_1 = \widetilde{f}_1 \\ y_3'' - \lambda\, y_3 = \widetilde{f}_3 \end{cases}$$

i.e. $y_i'' - \lambda\, y_i = \widetilde{f}_i \;\; ; \;\; i = 1,3 \quad$ (a)

Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de cette équation (a) , on obtient :

$$(i\,\sigma)^2\, F\, y_i - \lambda\, F\, y_i = F\, \widetilde{f}_i \;\; ; \;\; i = 1,3$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(i\,\sigma)^2 - \lambda\right] F\, y_i = F\, \widetilde{f}_i \;\; ; \;\; i = 1,3$$

- Soit la transformation : $\lambda = \rho^2$,

on a donc $\arg \lambda = 2 \arg \rho$

Puisque $\lambda \in S_\varepsilon = \{\lambda : \; -\pi + \varepsilon < \arg \lambda < \pi - \varepsilon\}$ on a :

$-\pi + \varepsilon < 2 \arg \rho < \pi - \varepsilon$

i.e. $\quad -\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \rho < \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$

Donc le secteur S_ε se transforme en un autre secteur S_ε' défini par :

$$S_\varepsilon' = \left\{\rho : \; -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \rho < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right\}$$

Appliquons la transformation $\lambda = \rho^2$ à l'équation (a) , on obtient :

$$\text{(a)} \quad \left[(i\,\sigma)^2 - \lambda\right] F\, y_i = F\, \widetilde{f}_i \;\; ; \;\; i = 1,3$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[(i\,\sigma)^2 - \rho^2\right] F\, y_i = F\, \widetilde{f}_i \;\; ; \;\; i = 1,3$$

Mais $\rho \in S_\varepsilon'$ donc ρ ne peut pas rencontrer l'axe des imaginaires (y'y).

Puisque $\sigma \in R$, $(i\,\sigma)$ est un imaginaire pur et $(-\,i\,\sigma)$ l'est aussi.

Donc : $\rho \neq \pm\, i\,\sigma \Leftrightarrow \rho^2 \neq (i\,\sigma)^2 \Leftrightarrow (i\,\sigma)^2 - \rho^2 \neq 0$

Ainsi l'expression $[(i\,\sigma)^2 - \rho^2]$ est inversible dans S_ε'

On peut alors écrire : $Fy_i = [(i\,\sigma)^2 - \rho^2]^{-1}\, F\, \widetilde{f}_i \;\; ; \;\; i = 1,3$

OR : $Fy_1'' = (i\,\sigma)^2\, Fy_i$ (propriété de la transformée de Fourier)

donc $Fy_i'' = (i\,\sigma)^2\, [(i\,\sigma)^2 - \rho^2]^{-1}\, F\, \widetilde{f}_i \quad , \; i = 1,3$

posons : $T(\sigma) = (i\,\sigma)^2\,[(i\,\sigma)^2 - \rho^2]^{-1}$

Montrons que T est un multiplicateur de Fourier de type (2,2)

$$|T(\sigma)| = \frac{\left|(i\,\sigma)^2\right|}{\left|(i\,\sigma)^2 - \rho^2\right|} = \frac{\left|(\sigma)^2\right|}{\left|(\sigma)^2 + \rho^2\right|}$$

Par des raisonnements géométriques il est facile de voir que :

$|(i\,\sigma)^2 - \rho^2|^{-1} \le c_\varepsilon (|\sigma|^2 + |\rho|^2)^{-1}$, $|\rho| \to \infty$ dans S'_ε

Alors :

$$|T(\sigma)| \le c_\varepsilon \frac{|\sigma|^2}{|\sigma|^2 + |\rho|^2} \le c_\varepsilon$$

- $|T(\sigma)| \le c_\varepsilon$

$$T'(\sigma) = \frac{2\,\sigma\,\rho^2}{\left(\sigma^2 + \rho^2\right)} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \rho^2} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{2\,\rho^2}{\left(\sigma^2 + \rho^2\right)}$$

En utilisant toujours l'inégalité ci-dessus on a :

$$|T'(\sigma)| = \frac{|\sigma|^2}{|\sigma^2 + \rho^2|} \cdot \frac{1}{|\sigma|} \cdot \frac{2\,|\rho|^2}{|\sigma^2 + \rho^2|} \le c_\varepsilon \cdot \frac{|\sigma|^2}{|\sigma|^2 + |\rho|^2} \cdot \frac{1}{|\sigma|} \cdot \frac{2\,|\rho|^2}{|\sigma|^2 + |\rho|^2}$$

- $|T'(\sigma)| \le c_\varepsilon\, |\sigma|^{-1}$

Alors d'après le théorème de Mikhlin , T est un multiplicateur de Fourier de type (2,2) et on a :

$$\|y_i''\|_{L_2(R)} = \|F^{-1}\,T(\sigma)\,F\,\tilde{f}_i\|_{L_2(R)} \le c_\varepsilon \|\tilde{f}_i\|_{L_2(R)} \quad ; \; i = 1,3$$

$$\|y_i''\|_{L_2(R)} \le c_\varepsilon \|\tilde{f}_i\|_{L_2(R)} \quad ; \; i = 1,3$$

Puisque $\|y_1''\|_{L_2(0,b)} \le \|y_1''\|_{L_2(R)}$ et $\|\tilde{f}_1\|_{L_2(R)} = \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

$\|y_3''\|_{L_2(b,1)} \le \|y_3''\|_{L_2(R)}$ et $\|\tilde{f}_3\|_{L_2(R)} = \|f_3\|_{L_2(b,1)}$

On a :

$$\|y_1''\|_{L_2(0,b)} \le c_\varepsilon \|f_1\|_{L_2(0,b)}$$

$$\|y_3''\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

- De l'équation : $y_i'' - \lambda y_i = \tilde{f}_i \quad ; i = 1,3 \ , \ x \in R,$

et en posant $\lambda = \rho^2$ on a : $y_i'' - \rho^2 y_i = \tilde{f}_i$

d'où $\quad \rho^2 y_i = y_i'' - \tilde{f}_i$

Donc $\quad |\rho|^2 \|y_i\|_{L_2(R)} \leq \|y_i''\|_{L_2(R)} + \|\tilde{f}_i\|_{L_2(R)} \quad ; i = 1,3$

Pour $i = 1$ on a : $\quad |\rho|^2 \|y_1\|_{L_2(R)} \leq \|y_1''\|_{L_2(R)} + \|\tilde{f}_1\|_{L_2(R)}$

Du fait que $\|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq \|y_1\|_{L_2(R)}$ et $\|\tilde{f}_1\|_{L_2(R)} = \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

on a : $\quad |\rho|^2 \|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|y_1''\|_{L_2(R)} + \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

d'où : $\quad |\rho|^2 \|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|f_1\|_{L_2(0,b)} + \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

i.e. $\quad |\rho|^2 \|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

donc $\quad \|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\rho|^{-2} \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

Puisque $\lambda = \rho^2$

$$\|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f_1\|_{L_2(0,b)}$$

Pour $i = 3$ on a :

$|\rho|^2 \|y_3\|_{L_2(R)} \leq \|y_3''\|_{L_2(R)} + \|\tilde{f}_3\|_{L_2(R)}$

Puisque $\|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq \|y_3\|_{L_2(R)}$ et $\|\tilde{f}_3\|_{L_2(R)} = \|f_3\|_{L_2(b,1)}$

on a : $\quad |\rho|^2 \|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq \|y_3''\|_{L_2(R)} + \|f_3\|_{L_2(b,1)}$

d'où $\quad |\rho|^2 \|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f_3\|_{L_2(b,1)} + \|f_3\|_{L_2(b,1)}$

i.e. $\quad |\rho|^2 \|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f_3\|_{L_2(b,1)}$

$$\|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \ |\rho|^{-2} \ \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

OR $\lambda = \rho^2$ donc

$$\|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \ |\lambda|^{-1} \ \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

Résultat :

$$\|y_1\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \ |\lambda|^{-1} \ \|f_1\|_{L_2(0,b)} \quad ; \quad \|y_1''\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \ \|f_1\|_{L_2(0,b)}$$

$$\|y_3\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \ |\lambda|^{-1} \ \|f_3\|_{L_2(0,b)} \quad ; \quad \|y_3''\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \ \|f_3\|_{L_2(b,1)}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} &= \|(y_1 , y_3)\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \\
&= \|y_1\|_{L_2(0,b)} + \|y_3\|_{L_2(b,1)} \\
&\leq c_\varepsilon \ |\lambda|^{-1} \left(\|f_1\|_{L_2(0,b)} + \|f_3\|_{L_2(b,1)}\right)
\end{aligned}$$

$$\|u_1\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \ |\lambda|^{-1} \ \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$\begin{aligned}
\|u_1''\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} &= \|(y_1'' , y_3'')\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \\
&= \|y_1''\|_{L_2(0,b)} + \|y_3''\|_{L_2(b,1)} \\
&\leq c_\varepsilon \left(\|f_1\|_{L_2(0,b)} + \|f_3\|_{L_2(b,1)}\right)
\end{aligned}$$

$$\|u_1''\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \ \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

Puisque y_1 et y_3 sont déterminés d'une manière unique, d'ici résulte l'unicité de u_1.

Estimons maintenant u_2 :

u_2 est la solution du problème (2) :

$$(2) \begin{cases} \mathscr{L}(\lambda)\, u_2 = 0 & \text{dans } L_2(0,b)xL_2(b,1) \\ L_\upsilon\, u_2 = - L_\upsilon\, u_1 \ ; \ \upsilon = \overline{2,5} \end{cases}$$

$$\mathscr{L}(\lambda)\, u_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_2'' - \lambda\, y_2 = 0 & \text{sur } (0,b) \\ y_4'' - \lambda\, y_4 = 0 & \text{sur } (b,1) \end{cases}$$

Nous avons donc $y_i'' - \lambda\, y_i = 0 \ ; \ i = 2,4$

son équation caractéristique s'écrit :

$r^2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow r^2 - \rho^2 = 0 \quad (\lambda = \rho^2)$

$\Leftrightarrow r^2 = \rho^2 = \lambda$

en posant $\rho = \sqrt{\lambda}$; $r_{1,2} = \pm\rho$ on a les solutions :

$$y_2(x) = c_1 e^{r_1(x-b)} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{\rho(x-b)} + c_2 e^{-\rho x}$$

$$y_4(x) = c_3 e^{r_1(x-1)} + c_4 e^{r_2(x-b)} = c_3 e^{\rho(x-1)} + c_4 e^{-\rho(x-b)}$$

Passons maintenant aux conditions aux limites :

$L_\upsilon u_2 = - L_\upsilon u_1$; $\upsilon = \overline{2,5}$

$u_2 = (y_2, y_4)$; $u_1 = (y_1, y_3)$

On a alors le système :

$$\begin{cases} \alpha_2 y_2'(0) + \beta_4 y_4'(1) = - L_2 u_1 \\ \alpha_3 y_2(0) + \beta_3 y_4(1) = - L_3 u_1 \\ y_2(b) - y_4(b) = - L_4 u_1 \\ \alpha_5 y_4'(b) - \beta_5 y_2'(b) + \lambda y_4(b) = - L_5 u_1 \end{cases}$$

Puisque : $y_2(x) = c_1 e^{\rho(x-b)} + c_2 e^{-\rho x}$; $y_4(x) = c_3 e^{\rho(x-1)} + c_4 e^{-\rho(x-b)}$

on a :

$$y_2'(x) = c_1 \rho e^{\rho(x-b)} - c_2 \rho e^{-\rho x} \quad ; \quad y_4'(x) = c_3 \rho e^{\rho(x-1)} - c_4 \rho e^{-\rho(x-b)}$$

et

$$y_2(0) = c_1 e^{-b\rho} + c_2 \quad ; \quad y_4(1) = c_4 e^{-b\rho} + c_3$$

$$y_2(b) = c_1 + c_2 e^{-b\rho} \quad ; \quad y_4(b) = c_3 e^{-b\rho} + c_4$$

$$y_2'(0) = c_1 \rho e^{-b\rho} - c_2 \rho \quad ; \quad y_4'(1) = c_3 \rho - c_4 \rho e^{-b\rho}$$

$$y_2'(b) = c_1 \rho - c_2 \rho e^{-b\rho} \quad ; \quad y_4'(b) = c_3 \rho e^{-b\rho} - c_4 \rho$$

En remplaçant les expressions de y_2 et y_4 dans les conditions aux limites on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_2\,\rho\, e^{-b\rho}\cdot c_1 - \alpha_2\,\rho\cdot c_2 + \beta_2\,\rho\cdot c_3 - \beta_2\,\rho\, e^{-b\rho}\cdot c_4 = -L_2\, u_1 \\ \alpha_3\, e^{-b\rho}\cdot c_1 - \alpha_3\cdot c_2 + \beta_3\cdot c_3 + \beta_3\, e^{-b\rho}\cdot c_4 = -L_3\, u_1 \\ 1\cdot c_1 + e^{-b\rho}\cdot c_2 - e^{-b\rho}\cdot c_3 - 1\cdot c_4 = -L_4\, u_1 \\ -\beta_5\,\rho\cdot c_1 + \beta_5\,\rho\, e^{-b\rho}\cdot c_2 + \left(\alpha_5\,\rho\, e^{-b\rho} + \rho^2\, e^{-b\rho}\right)\cdot c_3 + \left(\rho^2 - \alpha_5\,\rho\right)\cdot c_4 = -L_5\, u_1 \end{cases}$$

On obtient le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_2\,\rho\, e^{-b\rho} & -\alpha_2\,\rho & \beta_2\,\rho & -\beta_2\,\rho\, e^{-b\rho} \\ \alpha_3\, e^{-b\rho} & -\alpha_3 & \beta_3 & \beta_3\, e^{-b\rho} \\ 1 & e^{-b\rho} & -e^{-b\rho} & -1 \\ -\beta_5\,\rho & \beta_5\,\rho\, e^{-b\rho} & \left(\alpha_5\,\rho\, e^{-b\rho} + \rho^2\, e^{-b\rho}\right) & \left(\rho^2 - \alpha_5\,\rho\right) \end{vmatrix}$$

$D(\rho) = \theta'(\rho) + R'(\rho)$

où $\theta'(\rho) = (\alpha_3\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_3)\,\rho^2\,(\rho - (\beta_5 + \alpha_5))$

quand $|\rho| \to +\infty$, $|\rho|$ est très grand :

$$\rho - (\beta_5 + \alpha_5) = \rho\left[1 - \frac{\beta_5 + \alpha_5}{\rho}\right] \cong \rho$$

D'où $D(\rho) = \theta(\rho) + R(\rho)$

où $\theta(\rho) = \rho^3\,(\alpha_3\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_3)$ et $\begin{cases} |R(\rho)| \to \infty \\ \\ |\rho| \to \infty \end{cases}$ dans S'_ε

Il est clair que $\theta(\rho) \neq 0$ (par hypothèse $\alpha_3\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_3 \neq 0$)

Donc $D(\rho) = \theta(\rho) + R(\rho)$; $\theta(\rho) \neq 0$ et $\begin{cases} |R(\rho)| \to \infty \\ \\ |\rho| \to \infty \end{cases}$ dans S'_ε

où $S'_\varepsilon = \left\{\rho \in C : -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg\rho < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right\}$

- Nous avons $y_2(x) = c_1\, e^{\rho(x-b)} + c_2\, e^{-\rho x}$; $y_4(x) = c_3\, e^{\rho(x-1)} + c_4\, e^{-\rho(x-b)}$

$$C_i = \frac{D_i(\rho)}{D(\rho)} \quad ; \; i = \overline{1,4}$$

Puisque $\theta(\rho) \neq 0$ et $|R(\rho)| \to 0$ dans S_i' , les constantes c_i ; $i = \overline{1,4}$ sont déterminés d'une manière unique.

Et puisque $u_2 = (y_2 , y_4)$,d'ici résulte l'unicité de la solution u_2.

Déterminons maintenant les constantes C_i ; $i = \overline{1,4}$

$$\text{On a : } D_i(\rho) = \theta_i(\rho) + R_i(\rho) \quad \text{avec} \begin{cases} |R_i(\rho) \to 0| \\ \\ |\rho| \to \infty \end{cases} \text{dans } S_\varepsilon'$$
$$i = \overline{1,4}$$

$$\theta_1(\rho) = \begin{vmatrix} -L_2u_1 & -\alpha_2\rho & \beta_2\rho & 0 \\ -L_3u_1 & -\alpha_3 & -\alpha_3 & 0 \\ -L_4u_1 & 0 & 0 & -1 \\ -L_5u_1 & 0 & 0 & (\rho^2 - \alpha_5\,\rho) \end{vmatrix}$$

$$\theta_1(\rho) = -\,\rho\,(\alpha_3\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_3)\,(L_5\,u_1 + \rho\,(\rho - \alpha_5)\,L_4\,u_1)$$

$$\theta_2(\rho) = \begin{vmatrix} 0 & -L_2u_1 & \beta_2\rho & 0 \\ 0 & -L_3u_1 & \beta_3 & 0 \\ 1 & -L_4u_1 & 0 & -1 \\ -\beta_5\rho & -L_5u_1 & 0 & (\rho^2 - \alpha_5\,\rho) \end{vmatrix}$$

$$\theta_2(\rho) = \rho\,(\rho - (\alpha_5 + \beta_5))\,(-\,\beta_2\,L_2\,u_1 + \beta_2\,\rho\,L_3\,u_1)$$

$$\alpha_3(\rho) = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_2\rho & -L_2u_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & -L_3u_1 & 0 \\ 1 & 0 & -L_4u_1 & -1 \\ -\beta_5\rho & 0 & -L_5u_1 & (\rho^2 - \alpha_5\,\rho) \end{vmatrix}$$

$$\alpha_3(\rho) = -\rho\,(\rho - \alpha_5 + \beta_5)\,(\alpha_2\,\rho\,L_3\,u_1 - \alpha_3\,L_2\,u_1)$$

$$\theta_4(\rho) = \begin{vmatrix} 0 & -\alpha_2\rho & \beta_2\rho & -L_2u_1 \\ 0 & -\alpha_3 & \beta_3 & -L_3u_1 \\ -1 & 0 & 0 & -L_4u_1 \\ -\beta_5\rho & 0 & 0 & -L_5u_1 \end{vmatrix}$$

$$\theta_4(\rho) = \rho\,(\alpha_2\,\beta_3 - \alpha_3\,\beta_2)\,(L_5\,u_1 - \beta_5\,L_4\,u_1)$$

Estimation des opérateurs frontières :

Rappel : Application de l'inégalité (1) du lemme [1] :

$$\sup_{x \in [0,b]x[b,1]} |u_1(x)| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-3/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$\sup_{x \in [0,b]x[b,1]} |u_1'(x)| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

De ces estimations on déduit que :

- $|L_2 u_1| \leq c \sup\limits_{x \in [0,b]x[b,1]} |u_1'(x)| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

- $|L_3 u_1| \leq c \sup\limits_{x \in [0,b]x[b,1]} |u_1(x)| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-3/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

- $|L_4 u_1| \leq c \sup\limits_{x \in [0,b]x[b,1]} |u_1(x)| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-3/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

- $|L_5 u_1| \leq c \left\{ \sup\limits_{x \in [0,b]x[b,1]} |u_1'(x)| + |\lambda| \cdot \sup\limits_{x \in [0,b]x[b,1]} |u_1(x)| \right\}$

$$\leq c_\varepsilon \left\{ |\lambda|^{-1/4} + |\lambda| \cdot |\lambda|^{-3/4} \right\} \cdot \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)} \qquad |\lambda| \text{ très grand } (\lambda \in S_\varepsilon)$$

- $|L_5 u_1| \leq c_\varepsilon |\lambda|^{1/4} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

Estimons maintenant les constantes C_i ; $i = \overline{1,4}$:

$$|c_1| = \frac{|\theta_1(\rho) + R_1(\rho)|}{|\theta(\rho) + R(\rho)|} \leq c \frac{|\theta_1(\rho)|}{|\theta(\rho)|} \quad ; \quad \theta(\rho) \neq 0$$

$$|c_1| \leq c \frac{|-\rho(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)(L_5 u_1 + \rho(\rho - \alpha_5) L_4 u_1)|}{|\rho^3 \cdot (\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)|}$$

$$|c_1| \leq c \left(|\rho|^{-2} \cdot |L_5 u_1| + |L_4 u_1| \right)$$

Puisque $|\rho| = |\lambda|^{1/2}$ donc :

$$|c_1| \le c_\varepsilon\left(|\lambda|^{-1}\cdot|\lambda|^{1/4} + |\lambda|^{-3/4}\right)\|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

- $|c_1| \le c_\varepsilon\,|\lambda|^{-3/4}\|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$|c_2| = \frac{|\theta_2(\rho)+R_2(\rho)|}{|\theta(\rho)+R(\rho)|} \le c\,\frac{|\theta_2(\rho)|}{|\theta(\rho)|} \quad ; \quad \theta(\rho)\neq 0$$

$$|c_2| \le c\cdot\frac{|\rho(\rho-(\alpha_5+\beta_5))(-\beta_3L_2u_1+\beta_2\rho L_3u_1)|}{|\rho^3(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)|}$$

$$|c_2| \le c\left(|\rho|^{-1}|L_2u_1|+|L_3u_1|\right) \quad ; \quad |\rho|=|\lambda|^{1/2}$$

$$|c_2| \le c_\varepsilon\left(|\lambda|^{-1/2}\cdot|\lambda|^{-1/4}+|\lambda|^{-3/4}\right)\|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

- $|c_2| \le c_\varepsilon\,|\lambda|^{-3/4}\ \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$|c_3| = \frac{|\theta_3(\rho)+R_3(\rho)|}{|\theta(\rho)+R(\rho)|} \le c\,\frac{|\theta_3(\rho)|}{|\theta(\rho)|} \quad ; \quad \theta(\rho)\neq 0$$

$$|c_3| \le c\,\frac{|-\rho(\rho-\alpha_5\ +\ \beta_5)(\alpha_2\rho L_3u_1-\alpha_3L_2u_1)|}{|\rho(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)|}$$

$$|c_3| \le c\left(|L_3u_1|+|\rho|^{-1}|L_2u_1|\right) \quad ; \quad |\rho|=|\lambda|^{1/2}$$

$$|c_3| \le c_\varepsilon\left(|\lambda|^{-3/4}+|\lambda|^{-1/2}|\lambda|^{-1/4}\right)\|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

- $|c_3| \le c_\varepsilon\,|\lambda|^{-3/4}\ \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$|c_4| = \frac{|\theta_4(\rho)+R_4(\rho)|}{|\theta(\rho)+R(\rho)|} \le c\,\frac{|\theta_4(\rho)|}{|\theta(\rho)|} \quad ; \theta(\rho)\neq 0$$

$$|c_4| \le c\,\frac{|\rho(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)(L_5u_1-\beta_5\rho L_4u_1)|}{|\rho^3(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)|}$$

$$|c_4| \le c\left(|\rho|^{-2}|L_5u_1|+|\rho|^{-1}|L_4u_1|\right)$$

$$|c_4| \le c_\varepsilon\left(|\lambda|^{-1}\cdot|\lambda|^{1/4}+|\lambda|^{-1/2}|\lambda|^{-3/4}\right)\|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$|c_4| \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-3/4} \, \|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

Résultat :

$$|C_i| \leq c_\varepsilon \cdot |\lambda|^{-3/4} \cdot \|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} \quad ; \quad i = \overline{1,4}$$

Revenons maintenant à y_2 et y_4 :

$$\|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq |c_1| \left\|e^{\rho(x-b)}\right\|_{L_2(0,b)} + |c_2| \left\|e^{-\rho x}\right\|_{L_2(0,b)}$$

$$\|y_4\|_{L_2(0,b)} \leq |c_3| \left\|e^{\rho(x-1)}\right\|_{L_2(b,1)} + |c_4| \left\|e^{-\rho(x-b)}\right\|_{L_2(b,1)}$$

Utilisons l'estimation suivante :

$$\left\|e^{\rho(x-b)}\right\|_{L_2(0,1)} \leq c_\varepsilon |\rho|^{-1/2} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \quad ; \quad |\lambda| \to \infty \quad \text{dans } S_\varepsilon$$

Preuve : voir Chapitre I § 3

Donc $\left\|e^{\rho(x-b)}\right\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \cdot \quad ; \quad \left\|e^{\rho(x-1)}\right\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4}$

$$\left\|e^{-\rho x}\right\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4} \cdot \quad ; \quad \left\|e^{-\rho(x-b)}\right\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1/4}$$

Ainsi :

$$\|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \left\{|\lambda|^{-3/4} \cdot |\lambda|^{-1/4} + |\lambda|^{-3/4} \cdot |\lambda|^{-1/4}\right\} \|f_1\|_{L_2(0,b)}$$

- $\|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1} \|f_1\|_{L_2(0,b)}$

De meme : • $\|y_4\|_{L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1} \|f_3\|_{L_2(b,1)}$

Estimons alors $u_2 = (y_2 , y_4)$.

$$\|u_2\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} = \|(y_2 , y_4)\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$= \|y_2\|_{L_2(0,b)} + \|y_4\|_{L_2(b,1)}$$

$$\|u_2\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1} \left\{\|f_1\|_{L_2(0,b)} + \|f_3\|_{L_2(b,1)}\right\}$$

$$\|u_2\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-1} \, \|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

Nous arrivons maintenant à notre but :

$$\|u\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} = \|u_1 + u_2\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$\leq \|u_1\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} + \|u_2\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

- $\|u\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$

On en déduit :

$$\|R(\lambda,\mathscr{L})\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \; ; \quad |\lambda| \to \infty \quad \text{dans } S_\varepsilon$$

Considérons maintenant l'opérateur $\mathscr{L}(\lambda)$ défini comme suit :

$$\mathscr{L}(\lambda) : w_2^2(0,b)xw_2^2(b,1) \to L_2(0,b) \times L_2(b,1)$$
$$u \to \mathscr{L}(\lambda)u = (L(\lambda)u \, , \, L(\lambda)u)$$

Avec $D(\mathscr{L}(\lambda)) = \{w_2^2(0,b)xw_2^2(b,1) \, ; \, L_\nu u = 0 \quad ; \quad \nu = \overline{2,5}\}$

Soit le pobléme suivant : $\mathscr{L}(\lambda)u = f$ (2.2)

On a alors le théorème :

Théorème 2 :

Supposons que le problème (2.2) vérifie la condition :

$\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$; alors $\exists\, R_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in C$ vérifiant :

$\lambda \in S_\varepsilon$ et $|\lambda| > R_\varepsilon$ on a :

$$\|R(\lambda \, , \, \mathscr{L}(\lambda))\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \quad ; |\lambda| \to \infty \quad \text{dans } S_\varepsilon$$

La constante c_ε dépend de l'angle ε.

Démonstration :

$u = u_1 + u_2$; $u_1 = (y_1 \, , y_3)$; $u_2 = (y_2 \, , y_4)$

- $\|u_1\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)} = \|(y_1 \, , \, y_3)\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)} = \|y_1\|_{W_2^2(0,b)} + \|y_3\|_{W_2^2(b,1)}$

$\|y_1\|^2_{W_2^2(0,b)} = \|y_1\|^2_{L_2(0,b)} + \|y_1''\|^2_{L_2(0,b)}$ donc :

$$\|y_1\|_{W_2^2(0,b)} \leq \|y_1\|_{L_2(0,b)} + \|y_1''\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon\left(1+|\lambda|^{-1}\right)\|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

$$\|y_1\|_{W_2^2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

De la même manière on a :

$$\|y_3\|_{W_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

On en déduit que :

$$\|u_1\|_{W_2^2(0,b)xW_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

D'autre part :

$$\|u_2\|_{w_2^2(0,b)x\,w_2^2(b,1)} = \|y_2\|_{w_2^2(0,b)} + \|y_4\|_{w_2^2(b,1)}$$

$$y_2(x) = c_1 e^{\rho(x-b)} + c_2 e^{-\rho x} \quad ; \quad y_4(x) = c_3 e^{\rho(x-1)} + c_4 e^{-\rho(x-b)}$$

$$y_2''(x) = c_1\rho^2 e^{\rho(x-b)} + c_2\rho^2 e^{-\rho x} \quad ; \quad y_4''(x) = c_3\rho^2 e^{\rho(x-1)} + c_4\rho^2 e^{-\rho(x-b)}$$

$$y_2''(x) = \rho^2 y_2(x) = \lambda\, y_2(x) \quad ; \quad y_4''(x) = \rho^2 y_4(x) = \lambda\, y_4(x)$$

Or : $\|y_2\|^2_{w^2_{2(0,b)}} = \|y_2\|^2_{L_{2(0,b)}} + \|y_2''\|^2_{L_{2(0,b)}}$

Et grâce à l'égalité ci-dessus :

$$\|y_2\|^2_{w^2_{2(0,b)}} = \|y_2\|^2_{L_{2(0,b)}} + |\lambda|^2 \|y_2\|^2_{L_{2(0,b)}}$$

Donc $\|y_2\|_{w^2_{2(0,b)}} \leq \|y_2\|_{L_{2(0,b)}} + |\lambda| \|y_2\|_{L_{2(0,b)}}$

De la même manière :

$$\|y_4\|_{w^2_{2(b,1)}} \leq \|y_4\|_{L_{2(b,1)}} + |\lambda| \|y_4\|_{L_{2(b,1)}}$$

Puisque $\|y_2\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

$$\|y_4\|_{L_2(0,b)} \leq c_\varepsilon |\lambda|^{-1} \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

On en déduit que :

$$\|y_2\|_{w_2^2(0,b)} \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1} + |\lambda|\,|\lambda|^{-1}\right)\|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

$$\|y_4\|_{w_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \left(|\lambda|^{-1} + |\lambda|\,|\lambda|^{-1}\right)\|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$$

i-e : $\|y_2\|_{w_2^2(0,b)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$ et $\|y_4\|_{w_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

Donc : $\|u_2\|_{w_2^2(0,b)xw_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)xL_2(b,1)}$

Finalement : $\|u\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)} \leq \|u_1\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)} + \|u_2\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)}$

$$\|u\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon \|f\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$$

Et donc $\quad \|R(\lambda, \mathcal{L}(\lambda))\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)} \leq c_\varepsilon$

§3 - Complétude du système de fonctions radicales :

Nous montrons dans ce paragraphe que le système de fonctions radicales de notre problème (1.2) est complet dans le domaine de l'opérateur .

Théorème 1 :

Soit le problème (1.2)

Supposons que la condition $\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \neq 0$ soit vérifiée .

Alors le spectre du problème est discret et le système des vecteurs radicaux est complet dans : $\left(W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1) \quad ; \quad L_\nu u = 0 \,;\, \nu = \overline{2,5}\right)$

Démonstration :

Basons nous sur le théorème de YAKUBOV [3] (chap I , §5)

posons : $H = L_2(0,b) \times L_2(b,1)$

$$H_1 = \left(W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1) \quad ; \quad L_\nu u = 0 \;;\; \nu = \overline{2,5}\right)$$

On vérifie alors facilement :

1 - L'immersion $H_1 \subset H$ est compacte car les immersions :

$W_2^2(0,b) \subset L_2(0,b)$

$W_2^2(b,1) \subset L_2(b,1)$

Sont compactes et par conséquent l'immersion :

$W_2^2(0,b) \times W_2^2(b,1) \subset L_2(0,b) \times L_2(b,1)$ et aussi compacte.

2 - $\overline{H}_{1_H} = H$ car :

Soit $u \in C_0^\infty[0,b] \times C_0^\infty[b,1) \Rightarrow u(0) = u(1) = u(b) = 0$

$\Rightarrow u\left(\in W_2^2(0,b) \times \in W_2^2(b,1) \quad ; \quad L_\nu u = 0 \;;\; \nu = \overline{2,5}\right)$

i-e. $C_0^\infty[0,b]\times C_0^\infty[b,1]\subset\left(W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)\ ;\ L_\upsilon u=0\ ;\ \upsilon=\overline{2,5}\right)\subset L_2(0,b)\times L_2(b,1)$

Mais $\overline{C_0^\infty[0,b]\times C_0^\infty[b,1]}\Big|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}=L_2(0,b)\times L_2(b,1)$

Alors : $\overline{(W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)\ ;L_\nu u=0\ ;\ \nu=\overline{2,5})}\Big|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}=L_2(0,b)\times L_2(b,1)$

3 - Pour $p=1/2+\delta$; $\delta>0$ arbitraire on a :

$I\in\sigma_P(H_1,H)$ .pour la preuve voir la démonstration du théorème (.2.5.I.) (Condition 3)

4 - Soit $\mathscr{L}: H_1\to H$ où $H_1=D(\mathscr{L})$.

puisque la norme $\|\ \|_{H1}$ est équivalente à la norme graphe

$\|u\|_{H_1}+\|\mathscr{L}u\|_{L_2(0,b)\times L_2(b,1)}$

Alors $\mathscr{L}$ devient borné de H_1 dans H.

5 - D'après le théorème 2.2 , dans le secteur S_ε :

$S_\varepsilon=\left\{\lambda:\varepsilon+\overline{\omega}<\arg\lambda<2\pi-\underline{\omega}-\varepsilon\right\}$ on a :

$\|R(\lambda,\mathscr{L})\|_{B(H,H_1)}=\|R(\lambda,\mathscr{L})\|_{W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)}\le c_\varepsilon$; $|\lambda|\to\infty$ dans S_ε

i-e. $\|R(\lambda,\mathscr{L})\|_{B(H,H_1)}\le c_\varepsilon|\lambda|^0$; $m=0$; $|\lambda|\to\infty$ dans S_ε

et dans ce secteur on peut toujours choisir deux rayons centrés à l'origine ρ_1 et ρ_2 consécutifs faisant entre eux un angle inférieur à : $\dfrac{\pi}{\frac{1}{2}+}$ ($p=½+\delta$, $\delta>0$)

On a ainsi vérifié toutes les hypothèses du théorème [3] , et donc le spectre de ce problème est discret et le système des fonctions radicales ets complet dans :

$\left(W_2^2(0,b)\times W_2^2(b,1)\ ;\ L_\nu u=0\ ;\ \nu=\overline{2,5}\right)$

Chapitre 3

ETUDE D'UN FAISCEAU QUADRATIQUE SUR $\mathbb{R}$

Ce chapitre est consacré à l'étude de la résolvante d'un faisceau quadratique en λ et à coefficient discontinu auprès de la dérivée d'ordre supérieur sur tout l'axe réel .

Théorème : La résolvante de ce problème a un comportement en $O(|\lambda|^{-2})$.

Démonstration : On Présente ci-dessous la démonstration de ce résultat.

Position du problème :

On veut étudier l'équation :

$$L(\lambda)u = \lambda^2 u(x) + \lambda\big(a_1 u'(x) + b_1 u(x)\big)$$
$$+ a_2(x) u''(x) + b_2 u'(x) = f(x) \quad ; \ x \in R .$$

$$a_2(x) = \begin{cases} c_0 & \text{Si} \quad x > b \\ c_1 & \text{Si} \quad x < b \end{cases} \qquad (c_0, c_1) \in C^* x C^*$$

Pour cela soit le problème :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\lambda)u = \tilde{f} \quad \text{où} \quad u = (y_0, y_1) \qquad (1) \\ \qquad \mathcal{L}(\lambda) : L_2(R) \times L_2(R) \to L_2(R) \times L_2(R) \\ \qquad\qquad u \to \mathcal{L}(\lambda)u = \big(L_0(\lambda)y_0 \ , \ L_1(\lambda)y_1\big) \\ \qquad \tilde{f}(x) = \big(f_0(x) \ , \ f_1(x)\big) \ \text{où} \ f_0(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \qquad\qquad f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ L_i(\lambda)u = \lambda^2 u(x) + \lambda\big[a_1 u'(x) + b_1 u(x)\big] + c_i u''(x) + b_2 u'(x) \ ; \quad i = 0,1 \end{cases}$$

alors : (1) $\mathcal{L}(\lambda)u = \tilde{f} \Leftrightarrow \big(L_0(\lambda)y_0 \ , \ L_1(\lambda)y_1\big) = (f_0 \ , \ f_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_0(\lambda)y_0 = f_0 \ . \\ L_1(\lambda)y_1 = f_1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \lambda^2 y_i(x) + \lambda\big(a_1 y_i'(x) + b_1 y_i(x)\big) + c_i y_i''(x) + b_2 y_i'(x) = f_i(x) \qquad i = 0,1$$

Appliquons la transformée de Fourier aux deux membres de cette équation ; on obtient :

$$\lambda^2 Fy_i + \lambda a_1 Fy_i' + \lambda b_1 Fy_i + c_i Fy_i'' + b_2 Fy_i' = Ff_i \quad ; \quad i = 0,1$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 Fy_i + \lambda a_1 (i\sigma) Fy_i + \lambda b_1 Fy_i + c_i (i\sigma)^2 Fy_i + b_2 (i\sigma) Fy_i = Ff_i \quad ; \quad i = 0,1$$

$$\text{i.e. } \left[\lambda^2 + \lambda b_1 + (\lambda a_1 + b_2)(i\sigma) + c_i (i\sigma)^2\right] Fy_i = Ff_i \quad ; \quad i = 0,1 \quad (2)$$

Remarquons qu'on peut écrire :

$$(3).\ \lambda^2 + \lambda b_1 + (\lambda a_1 + b_2)(i\sigma) + c_i (i\sigma)^2 = c_i (i\sigma - \mu_1^i)(i\sigma - \mu_2^i) \quad ; \quad i = 0,1$$

où μ_1^i et μ_2^i sont les racines de l'équation caractéristique :

(4) $c_i \ \mu^2 + (\lambda a_1 + b_2) \mu + \lambda_2 + b_1\lambda = 0$

En effet ; la dernière équation (4) est une équation du second degré en μ ($\mu = i\sigma$) et elle admet la décomposition (c_i coefficient de μ^2) :

$c_i(\mu - \mu_1^i)(\mu - \mu_2^i)$ où μ_1^i et μ_2^i sont les racines éventuelles de cette équation .

Montrons la relation (5) suivante qui sera utile pour choisir notre secteur :

$$(5) \quad \mu_{1,2}^i = \lambda\omega_{1,2}^i \pm \frac{b_1 + b_2\omega_{1,2}^i}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}} + 0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

où ω_1^i et ω_2^i sont les racines de l'équation

$$(6) \quad c_i\omega^2 + a_1\omega + 1 = 0 \qquad i = 0,1$$

Preuve :

Soient ω_1^i et ω_2^i les solutions de l'équation (6) alors :

$$\omega_{1,2}^i = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4c_i}}{2c_i}$$

$$\text{d'où} \qquad \lambda\,\omega_{1,2}^i = \frac{-\lambda a_1 \pm \lambda\sqrt{a_1^2 - 4c_i}}{2c_i} \qquad i = 0,1 \qquad (7)$$

$\rightarrow \mu_1^i$ et μ_2^i étant les solutions de (4) , on a alors :

$$\mu_{1,2}^i = \frac{-(\lambda a_1 + b_2) \pm \sqrt{(\lambda a_1 + b_2)^2 - 4c_i(\lambda^2 + b_1\lambda)}}{2c_i} \quad ; \quad i = 0,1$$

$$\mu^i_{1,2} = \frac{-\lambda a_1 - b_2 \pm \sqrt{\lambda^2\left(a_1^2 - 4c_i\right) + \lambda\left(2a_1 b_2 - 4c_i b_1\right) + b_2^2}}{2c_i} \quad ; \quad i = 0,1$$

Or :

$$\sqrt{\lambda^2\left(a_1^2 - 4c_i\right) + \lambda\left(2a_1 b_2 - 4c_i b_1\right) + b_2^2}$$

$$\sqrt{\lambda^2\left(a_1^2 - 4c_i\right)\left[1 + \lambda^{-1}\left(a_1^2 - 4c_i\right)^{-1}\left(2a_1 b_2 - 4c_i b_1\right) + \lambda^{-2}\left(a_1^2 - 4c_i\right)^{-1} b_2^2\right]} \quad ; \quad i = 0,1 \qquad (8)$$

Utilisons alors l'approximation : $(1+x)^{1/2} = 1 + 1/2\, x + 0(x^2)$

x très petit .

Puisque $x = \left|\lambda^{-1}\left(a_1^2 - 4c_i\right)^{-1}\left(2a_1 b_2 - 4c_i b_1\right) + \lambda^{-2}\left(a_1^2 - 4c_i\right)^{-1} b_2^2\right| \to 0 \quad |\lambda| \to \infty$

On a :

$$(8) = \lambda\sqrt{a_1^2 - 4c_i}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{a_1^2 - 4c_i}\cdot\left(2a_1 b_2 - 4c_i b_1\right) + \frac{b_2^2}{\lambda^2\left(a_1^2 - 4c_i\right)}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]$$

$$= \lambda\sqrt{a_1^2 - 4c_i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2a_1 b_2 - 4c_i b_1}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{b_2^2}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \lambda\sqrt{a_1^2 - 4c_i} + \frac{a_1 b_2 - 2c_i b_1}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Donc : $$\mu^i_{1,2} = \frac{-\lambda a_1 - b_2 \pm \left(\lambda\sqrt{a_1^2 - 4c_i} + \dfrac{a_1 b_2 - 2c_i b_1}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)\right)}{2c_i}$$

$$\mu^i_{1,2} = \frac{-\lambda a_1 \pm \lambda\sqrt{a_1^2 - 4c_i}}{2c_i} + \frac{-b_2 \pm \dfrac{a_1 b_2 - 2c_i b_1}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}}}{2c_i} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

$$\mu^i_{1,2} = \lambda\,\omega^i_{1,2} + \frac{-b_2\left(\pm a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4c_i}\right)}{2c_i\cdot\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + \frac{2c_i b_1}{2c_i\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

$$\mu^i_{1,2} = \lambda\omega^i_{1,2} \pm \frac{b_2\omega^i_{1,2}}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} \pm \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

$$\mu_{1,2}^{i} = \lambda\omega_{1,2}^{i} \pm \frac{b_2\omega_{1,2}^{i} + b_1}{\sqrt{a_1^2 - 4c_i}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \qquad \text{cqfd}$$

On déduit de cette relation que pour $|\lambda|$ très grand on a $\left|\mu_{1,2}^{i}\right| \cong \left|\lambda\, \omega_{1,2}^{i}\right|$.

Soit le secteur :

$$S_\varepsilon = \left\{\lambda : \frac{\pi}{2} - \underline{\omega}^{i} + \varepsilon < \arg\lambda < \frac{3\pi}{2} - \varpi^{i} - \varepsilon\right\}$$

Où $\arg\omega_1^i \neq \arg\omega_2^i$; $i = 0{,}1$

$$\underline{\omega}^{i} = \min\left(\arg\omega_1^i\, ,\, \arg\omega_2^i + \pi\right)$$

$$\overline{\omega}^{i} = \max\left(\arg\omega_1^i\, ,\, \arg\omega_2^i + \pi\right)$$

Si $\lambda \in S_\varepsilon$ alors :

$\arg\lambda > \pi/2 - \underline{\omega}^{i} + \varepsilon$ et $\arg\lambda < 3\pi/2 - \overline{\omega}^{i} - \varepsilon$

$\arg\lambda + \underline{\omega}^{i} > \pi/2 + \varepsilon$ et $\arg\lambda + \overline{\omega}^{i} < 3\pi/2 - \varepsilon$.

i.e. $\arg\lambda + \min\left(\arg\omega_1^i\, ,\, \arg\omega_2^i + \pi\right) > \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$

et $\arg\lambda + \max\left(\arg\omega_1^i\, ,\, \arg\omega_2^i + \pi\right) < 3\,\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$

c à d :

$$\begin{cases} \arg\lambda + \arg\omega_1^i > \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon \\ \arg\lambda + \arg\omega_2^i + \pi > \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \arg\lambda + \arg\omega_1^i < 3\,\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \\ \arg\lambda + \arg\omega_2^i + \pi < 3\,\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\lambda\,\omega_1^i\right) > \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon \\ \arg\left(\lambda\,\omega_2^i + \pi\right) > \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \arg\left(\lambda\,\omega_1^i\right) < 3\,\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \\ \arg\left(\lambda\,\omega_2^i + \pi\right) < 3\,\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg\left(\lambda\,\omega_1^i\right) < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

$$i = 0{,}1$$

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg\left(\lambda\,\omega_2^i\right) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in S_\varepsilon$, pour $|\lambda|$ très grand on sait que $\mu^i_{1,2} \cong \lambda\, \omega^i_2$ donc :

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \mu^i_1 < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$$

$$i = 0,1$$

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \mu^i_2 < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

i.e. $\arg \mu^i_{1,2} \neq \dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$.

Donc μ^i_1, μ^i_2 ; $i = 0,1$ n'appartiennent pas à l'axe des imaginaires purs . Mais $\sigma \in R$ implique que $(i\sigma)$ est imaginaire pur .

D'où $\mu^i_1 \neq i\sigma$ et $\mu^i_2 \neq i\sigma$; $i = 0,1$.

$\Leftrightarrow i\sigma - \mu^i_1 \neq 0$ et $i\sigma - \mu^i_2 \neq 0$; $i = 0,1$.

$\Leftrightarrow \quad c_i(i\sigma)^2 + (\lambda a_1 + b_2)(i\sigma) + \lambda^2 + \lambda b_1 \neq 0$; $i = 0,1$

$\Leftrightarrow$ l'expression $c_i(i\sigma)^2 + (\lambda a_1 + b_2)(i\sigma) + \lambda^2 + \lambda b_1$ est inversible dans S_ε

Donc on peut écrire :

$$Fu_1 = \left[\lambda^2 + \lambda b_1 + (\lambda a_1 + b_2)(i\sigma) + c_i(i\sigma)^2\right]^{-1} F\tilde{f}$$

$$Fu_1'' = (i\sigma)^2 Fu_1 = (i\sigma)^2\left[\lambda^2 + \lambda b_1 + (\lambda a_1 + b_2)(i\sigma) + c_i(i\sigma)^2\right]^{-1} F\tilde{f}$$

Montrons que $T_i(\sigma) := (i\sigma)^2\left[\lambda^2 + \lambda b_1 + (\lambda a_1 + b_2)(i\sigma) + c_i(i\sigma)^2\right]^{-1} F\tilde{f}$

est un multiplicateur de Fourier

$$|T_i(\sigma)| = \frac{\left|(i\sigma)^2\right|}{\left|c_i(i\sigma)^2 + (\lambda\, a_1 + b_2)(i\sigma) + \lambda^2 + \lambda\, b_1\right|} = \frac{|\sigma|^2}{|c_i|\left|i\sigma - \mu^i_1\right|\left|i\sigma - \mu^i_2\right|}$$

$|\lambda|$ très grand ; on remplace $\mu^i_{1,2}$ par $\lambda\, \omega^i_{1,2}$

$$|T_i(\sigma)| \leq c \cdot \frac{\left|\sigma^2\right|}{|c_i|\left|i\sigma - \lambda\omega^i_1\right|\left|i\sigma - \lambda\omega^i_2\right|}$$

On peut montrer par des raisonnements géométriques que :

(9) $\quad \left|i\sigma - \lambda\, \omega^i_{1,2}\right|^{-1} \leq c_\varepsilon\, \left(|\sigma| + |\lambda|\right)^{-1}$ qd $|\lambda| \to \infty$ dans $S_\varepsilon \quad i = 0,1$

Donc : $\left|T_i(\sigma)\right| \le c_\varepsilon \dfrac{|\sigma|^2}{\left(|\sigma|+|\lambda|\right)^2} \le c_\varepsilon \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+|\lambda|^2} \le c_\varepsilon \cdot \left|T_i(\sigma)\right| \le c_\varepsilon \cdot \; i = 0,1$

$$T_i'(\sigma) = \frac{-2\sigma\left(i\sigma-\mu_1^i\right)\left(i\sigma-\mu_2^i\right)+(i\sigma)^2\left(2i\sigma-\left(\mu_1^i+\mu_2^i\right)\right)}{c_i\left(i\sigma-\mu_1^i\right)^2\left(i\sigma-\mu_2^i\right)^2} \quad ; \; i = 0,1$$

$$\left|T_i'(\sigma)\right| = \frac{\left|-2\sigma\left(i\sigma-\mu_1^i\right)\left(i\sigma-\mu_2^i\right)+(i\sigma)^2\left(2i\sigma-\left(\mu_1^i+\mu_2^i\right)\right)\right|}{|c_i|\left|i\sigma-\mu_1^i\right|^2\left|i\sigma-\mu_2^i\right|^2}$$

Grâce à l'inégalité ci-dessus (9) et en remplaçant $\mu^i_{1,2}$ par $\lambda\,\omega^i_{1,2}$

($|\lambda|$ très grand) on obtient :

$$\left|T_i'(\sigma)\right| \le c\cdot\frac{|\sigma|\left(|\sigma|+|\lambda|\right)^2+|\sigma|^2\left(|\sigma|+|\lambda|\right)}{\left(|\sigma|+|\lambda|\right)^4} \quad ; \quad i = 0,1$$

$$\left|T_i'(\sigma)\right| \le c\cdot\frac{|\sigma|^3+|\lambda|\,|\sigma|^2+|\lambda|^2\,|\sigma|}{|\sigma|^4+|\lambda|^4} \quad ; \quad i = 0,1$$

$$\le c\left(\frac{|\sigma|^3}{|\sigma|^4+|\lambda|^4}+\frac{|\lambda|\,|\sigma|^2}{|\sigma|^4+|\lambda|^4}+\frac{|\lambda|^2|\sigma|}{|\sigma|^4+|\lambda|^4}\right)$$

$$\le c_\varepsilon\cdot\frac{|\sigma|^3}{|\sigma|^4} = c_\varepsilon|\sigma|^{-1}$$

- $\left|T_i'(\sigma)\right| \le c_\varepsilon\,|\sigma|^{-1} \quad ; \; i = 0,1$

Or : $\quad y_i'' = F^{-1}\,Fy_i'' = F^{-1}(i\sigma)^2\,Fy_i$

$\quad y_i'' = F^{-1}\,T_i(\sigma)\,Ff_i \quad ; \; i = 0,1$

Par le théorème de MIKHLIN , T_i étant un multiplicateur de Fourier , on a :

$$\left\|y_i''\right\|_{L_2(R)} = \left\|F^{-1}T_i(\sigma)Ff_i\right\|_{L_2(R)} \le c_\varepsilon\left\|f_i\right\|_{L_2(R)} \quad ; \; i = 0,1$$

$$\left\|y_i''\right\|_{L_2(R)} \le c_\varepsilon\left\|f_i\right\|_{L_2(R)} \quad ; \; i = 0,1$$

→ Puisque y_i vérifie :

$$\lambda^2 y_i + \lambda\left(a_1 y_i' + b_1 y_i\right) + c_i y_i'' + b_2 y_i' = f_i \quad ; \; i = 0,1$$

$$\Leftrightarrow \; y_i\left(\lambda^2+\lambda b_1\right) + y_i'\left(\lambda a_1+b_2\right) + c_i y_i'' = f_i \quad ; i = 0,1$$

Donc $\quad \left(\lambda^2+\lambda b_1\right)y_i = f_i - \left(\lambda a_1+b_2\right)y_i' - c_i y_i''$

Quand $|\lambda| \to \infty$ dans S_ε on a :

$$|\lambda|^2 \, \|y_i\|_{L_2(R)} \leq \|f_i\|_{L_2(R)} + |\lambda| \, \|y_i'\|_{L_2(R)} + \|y_i''\|_{L_2(R)}$$

Puisque $\quad \|y_i''\|_{L_2(R)} \leq c_\varepsilon \, \|f_i\|_{L_2(R)}$

Alors : $\quad |\lambda|^2 \|y_i\|_{L_2(R)} \leq c_\varepsilon \, \|f_i\|_{L_2(R)} + |\lambda| \|y_i'\|_{L_2(R)}$

L'inégalité 2 du lemme (1.1.I) [1] nous permet d'avoir l'estimation :

$$\|y_i'\| \leq c \left(\|y_i''\|^{1/2} \|y_i\|^{1/2} + \|y_i\| \right)$$

Donc :

$$|\lambda|^2 \|y_i\| \leq c_\varepsilon \, \|f_i\| + c \cdot |\lambda| \cdot \left(\|y_i''\|^{1/2} \|y_i\|^{1/2} + \|y_i\|\right)$$

$$\leq c_\varepsilon \, \|f_i\| + c_\varepsilon |\lambda| \left(\|f_i\| \, \|y_i\|^{1/2} + \|y_i\|\right)$$

d'où : $\quad |\lambda|^2 \|y_i\| - c_\varepsilon |\lambda| \, \|f_i\| \, \|y_i\|^{1/2} - c_\varepsilon |\lambda| \, \|y_i\| \leq c_\varepsilon \, \|f_i\|$

$$\left(|\lambda|^2 - |\lambda|\right) \|y_i\| - |\lambda| \, \|y_i\|^{1/2} \leq c_\varepsilon \|f_i\|$$

$|\lambda|$ très grand alors :

$$|\lambda|^2 \, \|y_i\| - |\lambda| \, \|y_i\|^{1/2} \leq c_\varepsilon \|f_i\|$$

Toujours parce que $|\lambda|$ est très grand on a :

$$|\lambda|^2 \, \|y_i\|_{L_2(R)} \leq c_\varepsilon \|f_i\|_{L_2(R)}$$

Soit $\quad \|y_i\|_{L_2(R)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-2} \|f_i\|_{L_2(R)} \qquad i = 0,1$

- $u = (y_0 , y_1)$ donc :

$$\|u\|_{L_2(R)\times L_2(R)} = \|y_0\|_{L_2(R)} + \|y_1\|_{L_2(R)}$$

$$\leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-2} \left(\|f_1\|_{L_2(R)} + \|f_2\|_{L_2(R)}\right)$$

$$\|u\|_{L_2(R)\times L_2(R)} \leq c_\varepsilon \, |\lambda|^{-2} \|f\|_{L_2(R)}$$

Bibliographie

1- BESOV O.V , ILIN V.P and NIKOLSKI S.M. : Intégral représentation Of functions and Embedding therms, (Moscow), (1975), (in russian).

2- TERRY Mc CONELL : On Fourier Multiplier Transformations of Banach -Valued functions Transaction of the american Mathematical Society , Volume 285 Number 2. October 1984, (739-757).

3- YACUBOV S Ya. : Completness of root functions of regular differential operators. (Lomgman, 1994).

4- DENCHE M. : Résolubilité coercitive d'un problème de transmission. (Soumis pour publication)

5- GOHBERG I.C. , KREJN M.G. : operateurs liméaires non auto- adjoints dans un espace hilbertien.

Dunod - Paris (1971).

6- LIONS J-L. , MAGENES E . : Problème aux limites non homogènes et applications. Volume 1. Dunod - Paris (1968).

7- DUNFORD N. , SCHWARTZ J.T. :Linear operators Part II . Spectral theory (Intersciences , 1963).

8- TRIEBEL H : Interpolation theory. Functions spaces Differential operators. (North - Holland , 1978).

9- M.N. Stone , Irregular differential system of order two and related expansion problems, Trans.Amer. Marh. Soc., 1927, V. 29 , pp. 23-53

10- A.A Shkalikov, Boundary value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary condition , J.soviet .Mat 33 (1986), 1311-1342.

11- M.V. KELDYS , On the eigenvalues and eigenfunctions of cetain class of non self- adjoint equations Dokl. akad . Nauk SSSR 77 (1951) , 11-14.

12- Ya.S. Yakubov , coercive boundary value problems with a defect , candidate Dissertation ;Baku ; 1986 ;115 p p .

13- A . I . Vagabov ..Introduction to spectral theory of Differential operators . (In Russian) .Russia (1994) .

14- A ..P .khromov : Eigenfunction expansions for ordinary differential operators with non regular divised boundary conditions. Mat . Sbornik ; 1966 , T. 70 ; N° 3. ;p. 310- 329 (In Russian)

15- yakubov ;S.Y. ; Linear Differential Equations and applications ;Baku ; Elm (1985) (InRussian)

16- A .A .Dezin ;General questions of the boundary value problem theory (Nauka , Moskow , 1980).

17- G.M . Goureev , A.I. kovalenko, critére de complétude des sous espaces radicaux de l'opérateur de dérivation avec condition aux limites abstraites, Mat. Zametki, 4,T.30 (1981), 543-552.

18- A .A . Shkalikov, Sur les propriétés de base des fonction propres des opérateurs différentiels ordinaires avec conditions aux limites intégrales, vestnik Moslovskovo universitéta , série Math-mécanique , 6 (1982), 12-21.

19- M.E.H. BENDJAOUAHDOU , problèmes non locaux pour équations différentielles - cas régulier-
Thèse - Magister - Université de Constantine (1997).

20- Tichonov A . N., Samarski A.A : Equation de la physique mathématique Editions Nauka, moscow, 1977 (En russe).