REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° d'ordre : .....
Série : .....

ZER/3484

Mémoire

Présentée Pour obtenir le diplôme de **MAGISTERE**

En MATHEMATIQUES

THEME

Etude d'un modèle issu du modèle de Chua de non-linéarité particulière (type de Fourier)

OPTION

ANALYSE FONCTIONNELLE POUR LES MATHEMATIQUES APPLIQUEES

Par : Zéraoulia El-hadj

Devant le jury :

Mr.Benkafader. Nasr-eddine	*Prof*	*univ Constantine*	président
Mr..Kechkar.Nasr-eddine	*Prof*	*univ Constantine*	rapporteur
Mr..Hamri.Nasr-eddine	C.C	*univ Constantine*	Co-rapporteur
Mr.Denche.Mohemed	*Prof*	*univ Constantine*	examinateur
Mm.Djellit Ilhem	*M.C.*	*univ de annaba*	examinateur

Soutenue- le : / / 2001

DEDICACE

A mes très chères parents

A mes chères frères, sœurs et beaux frères

A mes amis et à ceux et celles qui sont très chères...

Je dédie humblement ce travail

Remerciement

Comment exprimer en quelques lignes les profondes sympathies et admiration que je témoigne à l'égard de Mr : Hamri Nasr-eddine, les mots ne suffisent pas à lui rendre hommage et lui seul sait combien ce travail n'aurait pu prendre forme sans l'énergie, l'enthousiasme et l'efficacité qu'il m'a inculqué.

Je remercie vivement monsieur le professeur Benkafader Nasr-eddine de m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à ce travail en présidant du jury.

Mes remerciement vont également à monsieur les professeurs Kechkar Nasr-eddine, Denche Mohamed, et à Mm Djellit Ilhem d'avoir accepter d'être membre du jury de ce mémoire, leur présence est un grand honneur pour moi.

Je remercie également Mr.Bibi.A, et Khenine Salim et toutes les personnes que j'ai rencontrés et qui m'ont aidé, d'une façon ou d'une autre, à mener à bien ce travail, sans toutes les nommer.

TABLE DES MATIERES

Introduction 1

Chapitre 1 : Le modèle de Chua

1-1- L'attracteur du Double-scroll 3

1-2- Construction de la diode de Chua 4

1-3- Généralisation du modèle de Chua 4

1-4- Sur quelques phénomènes observés dans le modèle de Chua 4

1-5- Outils analytiques 6

1-6- Quelques applications du circuit de Chua 6

Chapitre 2 : Les systèmes chaotiques

2-1- Introduction 9

2-2- Définitions generales 9

Chapitre 3 : La généralisation du modèle de Chua

3-1- Introduction 17

3-2- Approximation 17

3-3- Calcul des coefficients 20

3-4- Estimation de l'erreur 21

Chapitre 4 :Etude du système linéaire

4-1- Introduction 24

4-2- Les points d'équilibres 24

4-3- Les valeurs propres et les vecteurs propres 26

4-4- Stabilité des points d'équilibres 28

4-5-Variétés stable et variétés instables 28

4-6- Solution de l'équation linéaire aux voisinages des points d'équilibres 29

Chapitre 5 :Etude du système non-linéaire

5-1- Introduction 30

5-2- Les bifurcations des points d'équilibres 30

5-3- Les bifurcations globales.....32
5-4- La mise en œuvre numérique.....43
5-5- Résultats numériques 44
5-6- Discussion sur les résultats des tests numériques.....61
Chapitre 6 :Exemples supplémentaires. 86
Conclusion et perspectives 97

Annexes

Annexe A

A.1 Le programme d'intégration.....98
A.2 Un programme qui détermine la période des solutions de l'équation différentielle 106

Annexe B

B.1 La résolution d'une équation de degré 3 par la méthode de Cardan.....108
B.2 Trajectoire homocline et trajectoire heterocline.....108
B.3 Le théorème de Sharkovsky.....109
B.4 La relation entre les coefficients d'un polynôme et ces racines 110
B.5 Le théorème de Hartmann-Gobman.....110
B.6 l'application de Poincaré 110
B.7 Les exposants de Lyapunov 111
Références bibliographiques 113

INTRODUCTION

Avant 1983, aucun circuit électronique autonome n'était connu pour avoir une dynamique chaotique, mais avec le développement des recherches dans ce domaine, nous avons aujourd'hui une bonne connaissance sur les circuits électroniques chaotiques :

Matsumoto et ses étudiants réussirent à construire un circuit électronique dont le modèle mathématique est analogue à l'équation du modèle de Lorenz[4].

En 1984 T.Matsumoto et L.O.Chua [31] observeront pour la première fois un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple, construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments.

Cette observation a été le point de départ dans le développement de la théorie des circuits non linéaires, et par la suite les circuits électroniques chaotiques.

Avec les expériences numériques, Matsumoto vérifia que ce circuit est de nature chaotique, mais il vérifia aussi que les autres circuits, qu'il a appelé : Les circuits de CHUA, à cette époque Matsumoto et ses étudiants réussissent aussi à modifier les circuits de ROSENTHALL pour obtenir deux- résistances non linéaires terminales, avec une fonction linéaire par morceaux préalablement choisie. Deux ans après, Tokumasu réussit à adapter le circuit de Rosenthal pour obtenir la non-linéarité voulue [4].

LE PLAN DE TRAVAIL

L'objet de notre étude concerne l'étude de la dynamique d'un modèle mathématique d'un circuit électronique caractérisé par un ensemble de non-linéarités de type série de Fourier, le travail est divisé en deux partie une théorique et une partie de traitement numérique.

On transforme d'abord le système initial linéaire par morceaux en des systèmes non linéaires équivalents, et on étudie ensuite la dynamique des systèmes obtenus. On intègre numériquement pour démontrer que les systèmes étudiés gardent la nature chaotique.

Nous allons décrire brièvement le contenu des chapitres qui composent cette étude. Après cette introduction, où nous avons précisé le contexte et où nous donnons les motivations sur le choix du modèle.

Au **chapitre 1** nous présentons le modèle.

Au cours du **chapitre 2**, nous définissons les différents outils mathématiques qui servent à l'étude dynamique du modèle. Nous avons fait appel aux définitions et propriétés des systèmes

dynamiques, en particulier les différents critères théoriques et numériques des systèmes chaotiques.

Le **chapitre 3** est consacré à la problématique. Nous avons rappelé le principe de l'approximation par la méthode des moindres carrés, et justifier l'existence d'une meilleure approximation de la fonction caractéristique du circuit initial par un ensemble de séries de Fourrier afin de remplacer la linéarité par morceaux du circuit par cet ensemble de non-linéarités.

Après avoir transformé notre système initial linéaire par morceaux en des systèmes non linéaires. Nous abordons dans le **chapitre 4,** la dynamique de ce circuit avec cet ensemble de non-linéarités, en utilisant les éléments d'analyse cités au chapitre 2, en particulier la lineairisation des systèmes et les éléments de la géométrie de non-linéarités de type séries de Fourier (les variétés stables et les variétés instables).

Les résultats analytiques et numériques sont regroupés dans le **chapitre 5**.

Nous interprétons en particulier les figures représentant les graphes de plus de 35 attracteurs étranges.

Les solutions sont calculées par un programme à partir de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en utilisant un programme en langage FORTRAN, et les graphes sont tracés avec le logiciel, ORIGIN.

Ainsi nous donnons dans le **chapitre 6** quelques exemples supplémentaires.

Une importante bibliographie, dont plusieurs titres sont dédiés au circuit de Chua permettent au lecteur d'avoir une idée plus précise des résultats obtenus sur la dynamique de ce modèle.

I

CHAPITRE 1

LE MODELE DE CHUA

Nous donnons dans ce chapitre une description du circuit de CHUA et quelques applications.

1-1 – L'ATTRACTEUR DU DOUBLE – SCROLL

On appelle circuit de Chua un circuit électronique très simple fabriqué à partir de quatre éléments de base : une résistance, une inductance, deux capacités, et d'une résistance non linéaire, caractérisé par une courbe tension- intensité affine par morceaux (avec cinq morceaux) [26].

Le circuit inventé par L.O.Chua et T.Matsumoto en 1984 a la particularité de présenter des oscillations «chaotiques » qui ressemblent à l'attracteur de Rössler [31].

On peut les étudier grâce aux outils classiques des systèmes dynamiques, cependant en dépit de la simplicité des équations qui modélisent la dynamique de ce circuit, les demi- applications de Poincaré ne sont pas connues explicitement et il est difficile de donner des résultats précis sur la nature des oscillations de ce circuit.

La dynamique du circuit de Chua est décrite par le système suivant (système sans dimension au sens physique de ce terme) :

$$\begin{cases} \dot{x}=\alpha(y-h(x)) \\ \dot{y}=x-y+z \\ \dot{z}=-\beta y \end{cases} \qquad (1\text{-}1)$$

Où :

$$h(x)=m_1x+\frac{1}{2}(m_0-m_1)(|x+1|-|x-1|) \qquad (1\text{-}2)$$

est l'équation canonique linéaire par morceaux décrivant une courbe voltage –Intensité affine par morceaux ayant des discontinuité aux points : x=-1 et x=+1
(seul trois des cinq segments de la courbe voltage - intensité sont inclus dans l'équations (1-2) car les deux segments extérieurs de cette courbe ne jouent aucun rôle dans la formation de l'attracteur du Double-scroll).

1-2- CONSTRUCTION DE LA DIODE DE CHUA

Elle est réalisée par un IC-package (qui contient 2 Op-amps) et six résistances linéaires. Pour les applications, il est préférable de construire la diode de Chua sous forme d'une puce électronique, ce qui a été déjà réalisé par l'utilisation de 2- μm CMOS processeurs avec 39 CMOS transistors occupant une surface de 0.5 mm^2.
Dans la figure (1-1) on représente le circuit de Chua et la fonction caractéristique linéaire par morceaux à trois segments.

1-3 - GENERALISATION DU MODELE DE CHUA

La fonction caractéristique originale du circuit de Chua peut être remplacée par une fonction assez régulière comme :
La fonction originale est remplacée par un polynôme de dégré 3 [3], une fonction sigmoïde de classe C^∞ [26] etc... Ce qui permet d'obtenir quelques outils analytiques et numériques pour la théorie des systèmes dynamique non linéaires.
Dans certaines applications, le nombre de segments de la fonction h est élevé en ordre pour générer des attracteurs étranges avec des multi-scroll.

1-4- QUELQUE PHENOMENES OBSERVES DANS LE CIRCUIT DE CHUA

Le circuit de Chua est le plus simple des circuits électroniques chaotiques mais du point de vue dynamique, il est plus complexe, et plus utile dans les applications et dans explications des autres phénomènes qui ne sont pas observés dans les circuits électroniques [6].
En plus des phénomènes standards : les routes vers le chaos, c'est à dire : le doublement de période, les attracteurs étranges qui sont bien connus pour le circuit de Chua, il existe d'autres phénomènes, qui ont été observés dans le circuit de Chua, Comme par exemple:

1-4-1 la résonance stochastique

Par l'application d'un signal sinusoïdale avec une fréquence appropriée proche de la fréquence naturelle du circuit, quelques types de phénomène de chaos-chaos sont observés pour certaines valeurs des paramètres [41].

1-4-2 le gain de tension

Le mécanisme de cette tension est différent de la résonance stochastique car le premier a été observée quand le circuit de Chua est passé par le régime d'un attracteur spiroïdale qui est le résultat d'une bifurcation bornée où la résonance stochastique prend sa place [8], [37].

1-4-3 le phénomène bruit $\frac{1}{f}$

En plus des bifurcations bornées d'un attracteur spiroïdale vers un double scroll, plusieurs simulations numériques du circuit de Chua montrent que le spectre de fréquence est caractérisé par la loi de fréquence 1/f [8], [11].

1-4-4- le phénomène de l'antimonotonicite

York et ses collaborateurs montrent que l'antimonotonicite c'est à dire le dédoublement de période est un phénomène fondamental pour une grande classe de systèmes non linéaires. Certaines simulations numériques confirment l'existence de ce phénomène dans le circuit de Chua [8].

1-4-5-la periode-ajoutant

Ce phénomène est très rare dans les simulations des systèmes autonomes, il est caractérisé par la croissance des périodes des oscillations par des entiers consécutifs [1],[8].

1-5- OUTILS ANALYTIQUES

1-5-1– L'attracteur du double-Hook

Pour certaines valeurs des paramètres dans le plan $\alpha-\beta$ toutes les valeurs propres associées à l'origine du circuit de Chua sont réelles, l'attracteur associé est dit :

L'attracteur du double-hook [8].

1-5-2 - la stabilité et l'instabilité globales des oscillations du modèle de Chua

Leonov et al [4] montrent que les oscillations observées dans le modèle de Chua sont des contrôles de feed-back de système mais ils déterminent le domaine des paramètres qui permettent de caractériser la stabilité et l'instabilité globale.

Cette étude théorique est une nouvelle version de la généralisation de la conjecture de Kalman[4].

1-5-3- Le théorème du Double-fer à cheval :

Par l'utilisation d'un nouveau modèle géométrique du circuit de Chua, Belykh et Chua [13] présentent une étude théorique d'un attracteur étrange appelé le Double-fer à cheval.

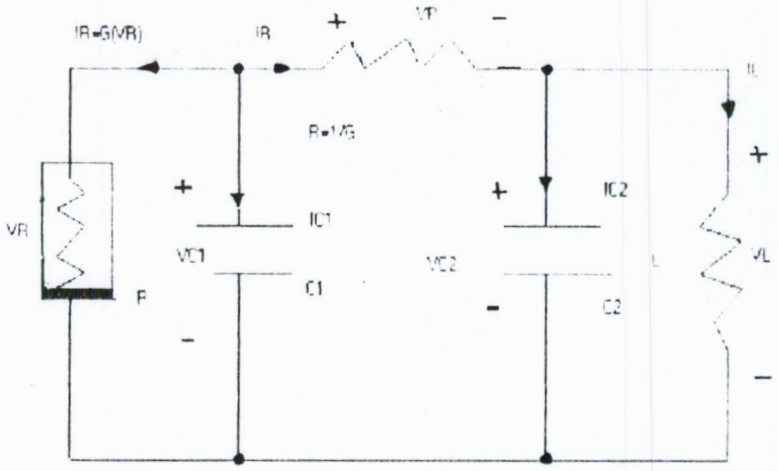
1-6- QUELQUES APPLICATIONS DU CIRCUIT DE CHUA

1-7-1- Les communications sures [33], [34].

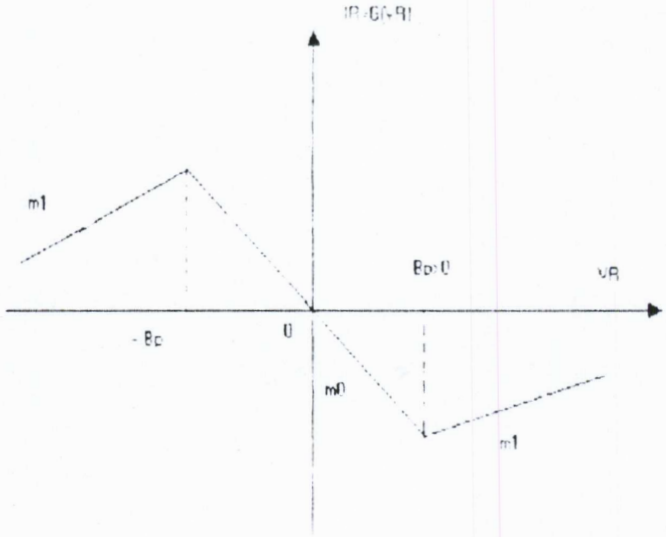
1-7-2- la lecture des algorithmes numériques [3].

1-7-3- La musique [42], [43].

Nous renvoyons à la bibliographie pour plus de détails.



(a) le circuit de CHUA avec la fonction caracteristique G



(b) la fonction caracteristique du circuit de CHUA

Fig 1-1 : le circuit de CHUA avec la fonction caracteristique lineaire par morceaux

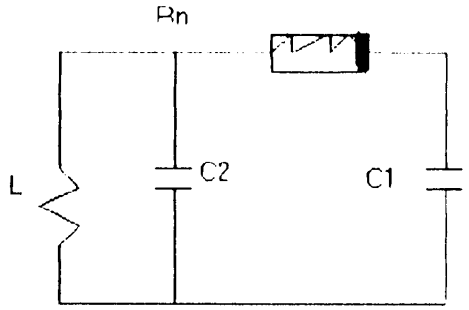


Fig1-2:le ciruit de Tore.

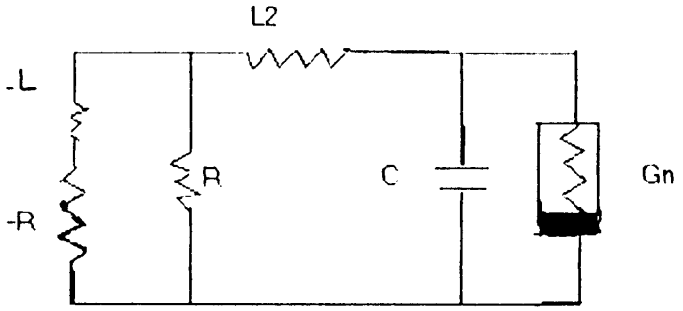


Fig1-3: le ciruit de Double-Hook

II

CHAPITRE 2

LES SYSTEMES CHAOTIQUES

2-1- INTRODUCTION

L'un des principaux résultats sur les systèmes dynamiques est la prédiction complète, c'est à dire que la donnée de la condition initiale et de l'équation du système permettent de prédire le comportement des systèmes pour tout temps donné.

La découverte des systèmes chaotiques élimine ce point de vue. Un système chaotique est un système imprédictible.

Dans les vingt dernières années, le phénomène du chaos a été observé dans beaucoup de domaines de sciences comme :

L'astronomie, la biologie, les mathématiques, la médecine, la mécanique des fluides, la météorologie, les plasmas, la physique, et dernièrement les sciences humaines, les sciences sociales : l'économie [1].

2-2- DEFINITIONS GENERALES

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2-1}$$

où : $x \in R^n$, est la variable d'état, et f une application à deux variables x et t, et soit $\phi(x_0)$ la solution de l'équation (2-1) qui passe par x_0 quand $t=t_0$.

2-2-1- POINT LIMITE POSITIF

DEFINITION

Un point $y \in \mathbb{R}^n$ et dit appartenant au point limite positif d'un point $x \in \mathbb{R}^n$, si pour tout voisinage U de y on a : $\phi(x_0)$ tend vers U quand t tend vers l'infini.

2-2-2-ENSEMBLE LIMITE POSITIF

DEFINITION

L'ensemble $L(x)$ de tous les points limites positifs de x est appelé : l'ensemble limite positif de x.

REMARQUE :

Une autre définition de l'ensemble limite positif $L(x)$ peut être donné :

$$L(x)=\left\{y \in \mathbb{R}^n, \forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}_+, \exists t \geq t_0, \quad tel \quad que \quad |f(x,t)-y| \leq \varepsilon\right\}$$

2-2-3- ENSEMBLE LIMITE ATTRACTIF

DEFINITION

Un ensemble limite L est dit attractif, s'il existe un voisinage ouvert U de L tel que : $L(x) = L$, pour tous $x \in U$.

2-2-4- LE BASSIN D'ATTRACTION

DEFINITION

On appelle bassin d'attraction d'un ensemble A de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble défini par :

$$B(A)=\left\{x \in \mathbb{R}^n - A \quad , tel \quad que : L(x) \subset A\right\}.$$

2-2-5- ENSEMBLE LIMITE POSITIF NON-STABLE

DEFINITION :

On dit qu'un ensemble limite positif L est non-stable, s'il existe au moins une trajectoire qui n'appartient pas à L, qui est attiré par L, et il existe au moins une trajectoire dans le voisinage de L qui n'est pas attirée par L.

2-2-6- ENSEMBLE INVARIANT

DEFINITION :

Un ensemble A est invariant dans R^n *sous l'action du flot si et seulement si :* $\phi(x) \in A$ *pour tout* $x \in A$.

2-2-7- ENSEMBLE INDECOMPOSABLE

DEFINITION :

Un ensemble A fermé et invariant de R^n *est indécomposable si : pour tout couple de points : (x, y) de A, et pour tout* $\varepsilon > 0$ *, il existe une suite de points :* $\{x_k\}_{k=0,m}$ *tel que :* $x_0 = x$ *et* $x_n = y$, *et une suite de temps* $\{t_k\}_{k=0,m}$, $t_k \geq 1$ *tel que :* $|f(x_{k-1}, t_k) - x_k| \leq \varepsilon$.

Cette série de définition nous permet de donner des définitions assez claires sur le phénomène du chaos.

2-3- LE CHAOS

Il n'y a pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique. On peut observer le phénomène du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser ? .

La réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce phénomène.

Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique.
Notons qu'il existe quelques définitions du chaos, mais elles restent restrictives, la plus efficace du point de vue pratique est celle donnée dans [1] : Le chaos se produit quand le comportement du système, n'est pas un point d'équilibre, n'est pas périodique, n'est pas quasi-périodique.
Donnons maintenant quelques critères physiques qui permettent de conclure qu'un système est chaotique.

2-3-1-L'existence d'une trajectoire homocline ou heterocline : (voir l'annexe B.4).

2-3-2-L'existence d'un exposant de lyapunov positif : (voir l'annexe B.2, et *la section 2-3-6.).*

2-3-3- l'existence d'une série infinie de bifurcations

Par les expériences numériques effectuées sur plusieurs systèmes, il existe des suites des bifurcations, qui influencent le comportement du système vers un comportement chaotique.

2-3-4- LA SENSIBILITE AUX CONDITIONS INITIALES

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales ; pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement ; les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.
La sensibilité aux conditions initiales est très pratique : il y a toujours une erreur dans la mesure de l'état du système. A cause de cette erreur le comportement macroscopique du système chaotique est influencé par l'accumulation des erreurs d'arrondis cela entraîne qu'un système chaotique est imprédictible.

2-3-5 -L'EXISTENCE D'UNE SOLUTION PERIODIQUE DE PERIODE TROIS

C'est l'énoncé du théorème de Sharkovsky (voir l'annexe B.3).

2-3-6- L'APPLICATION DE POINCARE

L'utilisation de l'application de Poincaré pour un système chaotique est différente de celle des systèmes prédictibles.
Un tel exemple montre la puissance de l'application de Poincaré dans l'explication de la structure d'un flot chaotique.
Pour plus de détails sur cette notion voir l'annexe(B.7) et les références citées à la fin de cette étude.

2-3-7- L'ATTRACTEUR ETRANGE OU CHAOTIQUE

Le terme attracteur étrange est introduit par Ruelle et Takens [27] (1971), pour appeler un ensemble limite d'un système dynamique qui n'est pas une variété et par suite il n'est pas un point fixe, un cycle limite, un tore invariant ou autre.
La notion de l'attracteur étrange indique la nature du modèle qui est un «objet » mathématique bien défini.

Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique mais il existe quelques essais pour définir cet «objet », mais toute ces définitions sont restrictives.
Guchenheimer et Holmes donnent une définition de l'attracteur comme suit :

2-3-7-1- DEFINITION :

Un ensemble A est un attracteur si :

i) A est fermé et invariant.

ii) A est indécomposable

iii) L'union de A avec son bassin d'attraction et de mesure de Lebesgue positive

C. Sparrow donne la définition suivante :

2-3-7-2- DEFINITION :

A est un attracteur si : A est invariant par le flot et pour tout point x suffisamment proche de A, l'orbite qui passe par x est attirée par A.

REMARQUE :

Par cette définition un attracteur est la limite asymptotique des solutions de l'équation différentielle avec un ensemble des conditions initiales B tel que :
$A \subset B$, c'est à dire : B est le bassin d'attraction de A.

Pour la définition d'un attracteur étrange il est important de noter (comme précédemment) qu'il n'existe aucune définition suffisante d'un attracteur étrange, ce concept est introduit avec l'équation de Lorenz et la transformation de Hénon.
D. Ruelle et F. Takens donnent la définition suivante :

2-3-7-3- DEFINITION:

Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales
Berge et al ; imposent une condition supplémentaire d'un type dimensionnel :

2-3-7-4- DEFINITION:

Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale (voir la section 2-3-7).

REMARQUE :

Il est clair que certains attracteurs ne sont pas généralement étranges.

Guchenheimer et Holmes définissent un attracteur étrange comme suit ;

2-3-7-5- DEFINITION :

Un attracteur étrange est un attracteur contenant une orbite homocline transversale.

Notant que l'attracteur des itérations chaotiques ne contient pas seulement un ensemble des points non-périodiques denses dans l'attracteur mais une infinité de cycles périodiques contenus dans sa fermeture .

REMARQUE :

Yorke définit le chaos par cette propriété même.

On donne maintenant l'explication du rôle des exposants de Lyapunov dans la mesure du chaos (pour la définition des exposants de Lyapunov voir l'annexe B.7)

Soit λ_k un exposant de Lyapunov positif pour un système dynamique, ce qui signifie que deux trajectoires s'éloignent de façon exponentielle (phénomène d'étirement) dans la direction d'un vecteur propre de λ_k , on aura le contraire si λ_k est négatif, c'est à dire que les deux trajectoires se rapprochent de façon exponentielle (phénomène de contraction).

On sait que le chaos est caractérisé par l'existence d'un attracteur étrange, et par suite pour cet attracteur deux points de départ initialement très proches divergent de façon exponentielle, donc au moins un exposent de Lyapunov est positif strictement, ceci élabore la notion appelé sensibilité aux conditions initiales.

REMARQUE :

Farmer prend $\lambda_k > 0$, comme définition du chaos.

La notion de dimension fractale est une caractérisation d'un attracteur étrange, cette notion nous donne une idée sur la structure fractale d'un attracteur.

Il existe deux types de dimensions fractales :

I- Celles dont la définition dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble (attracteur ou non), dimension de Hausdorf, dimension de capacité, etc...

II- Celles dont la définition, en plus des propriétés métriques tient compte de la dynamique du système, c'est à dire d'une mesure de la répartition du temps de séjour d'une trajectoire précise, dimension de corrélation, dimension d'information, dimension ponctuelle, fonction de dimension de corrélation, fonction de dimension d'information, dimension de Lyapunov...

Nous nous intéressons uniquement dans cette étude à la dimension de lyapunov que nous calculons à l'aide de l'équation variationnelle.

2-3-7-6- DEFINITION :

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ *, les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit j le grand entier naturel tel que :* $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j \geq 0$.

Alors la dimension de Lyapunov définit par Karlan et Yorke (1979) est donné par :

$$D_l = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}$$

REMARQUE :

Si aucun j existe (comme le cas d'un point hyperbolique stable) alors D_l *est égale à 0.*

REMARQUE :

Si l'attracteur est chaotique alors D_l *est un nombre fractionnaire.*

2-4- Quelques exemples d'attracteurs étranges

Dans toute les références qui traitent les systèmes dynamiques on trouve beaucoup d'exemples sur les attracteurs étranges, par exemple :

l'attracteur de Lorenz, la transformation de Hénon, la récurrence de Myrberg, l'attracteur du Double-scroll observée dans le circuit de Chua, etc...

Pour plus de détails voir les références cités à la fin de cette étude, en particulier [1],[3],[5] [31],[40],[42],[46].

III

CHAPITRE 3

LA GENERALISATION DU MODELE DE CHUA

3-1- INTRODUCTION :

La diode de Chua peut être généralisée pour obtenir des équations régulières, dans ce chapitre on donne une approximation de la fonction caractéristique de l'équation de Chua par des séries de Fourier d'ordre compris entre 1 et 10, et on va étudier les nouvelles équations du modèle de Chua avec cet ensemble de non-linéarités.

3-2- APPROXIMATION :

Considérons l'équation de Chua suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - h(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \qquad (3\text{-}1)$$

Où :

$$h(x) = m_1 x + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|) \qquad (3\text{-}2)$$

Le système (3-1) est une modélisation d'un ensemble de circuits appelés : la famille des circuits de Chua caractérisée par la fonction h qui est linéaire par morceaux, continue, et n'est pas différentiable aux points x=1, x=-1.

Cette dernière propriété crée une grande difficulté dans l'étude de ce modèle, car il n'y a pas d'outils analytiques qui permette d'étudier ce genre de modèles.

Il existe un grand développement dans l'étude de ce modèle basé sur l'analyse numérique essentiellement.

Plusieurs chercheurs approchent la fonction h par des fonctions régulières, par exemple : la fonction h est remplacée par un polynôme de degré trois, une fonction sigmoidale de classe C^{∞}, une fonction discontinue, etc...., c'est ce qu'on appelle : la généralisation de la diode de Chua, c'est à dire la description du voltage non linéaire dans la résistance associée à cette famille de circuits, les nouveaux modèles obtenus préservent les propriétés du circuit original, de plus il existe de nouveaux phénomènes qui sont observés dans les nouveaux modèles.

Nous proposons une approximation de la fonction h par des séries de Fourrier dans chacun des sous espaces de polynômes trigonométriques de degrés n, où : n compris entre 1 et 10.
Pour $n \in \{1,2,3,\ldots,10\}$, on considère un prolongement périodique continue f de période 2ω de la fonction h tel que la restriction de f sur l'intervalle $[-\omega,\omega]$, est égale à h et nous écrivons la série de Fourier pour f qui est la série de Fourier de la fonction h sur l'intervalle $[-\omega,\omega]$.

Par la suite on prend cette série de fourrier comme étant la non-linéarité du modèle(3-1).

Rappelons quelques théorèmes que nous utilisions par la suite.

Soit :

$C_{2\omega}$ *:l'espace des fonctions périodiques continues de période* 2ω.

Théorème 3-1- (existence)

Pour tout f dans $C_{2\omega}$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique q_n de degré n tel que :

$$\|f - q_n\| \leq \varepsilon \qquad (3\text{-}3)$$

Théorème3-2- (minimisation des coefficients)

On a l'équivalence suivante :

q_n minimise la distance

$$D(f,g) = \left(\int_{-\omega}^{\omega} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \qquad (3\text{-}4)$$

au sens des moindres carrées

si et seulement si

les coefficients de q_n *sont donnés par*

$$a_i = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\cos\left(\frac{i\pi x}{\omega}\right)dx, i = 0,1,2,\ldots,n \qquad (3\text{-}5)$$

$$b_i = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} f(x)\sin\left(\frac{i\pi x}{\omega}\right)dx, \qquad i = 0,1,2,\ldots,n. \qquad (3\text{-}6)$$

Théorème 3-3

Soit g *une fonction définie sur un intervalle* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1- g *Intégrable.*

2- $g(x+0), g(x-0)$ *existent.*

3- $g'(x+0), g'(x-0)$ *existent.*

Alors

$\forall x \in [a,b]$ *On a :*

$$\frac{g(x+0)+g(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{i=\infty} a_i\cos\left(\frac{i\pi x}{\omega}\right) + b_i\sin\left(\frac{i\pi x}{\omega}\right) \qquad (3\text{-}7)$$

Pour chaque n compris entre *1* et *10*, prolongeant la fonction h par périodicité sur $\mathbb{R}$ par une fonction f périodique continue de période, f est définit par exemple par :

$$f(x) = h\left(x+\omega-\left\lfloor\frac{x+\omega}{2\omega}\right\rfloor 2\omega\right) \qquad (3\text{-}8)$$

Pour tout $x \in [-\omega,\omega[$, où $[.]$ désigne la partie entière.

On peut prolonger h définie sur $[-\omega,\omega]$ par périodicité de période 2ω sur $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$h(\omega) = h(-\omega) \qquad (3\text{-}9)$$

C'est pourquoi on considère l'intervalle $[-\omega,\omega[$ au lieu de $[-\omega,\omega]$, pour éviter ce problème on peut toujours choisir f de sorte que :

$$f(-\omega-0) = h(-\omega+0) \qquad (3\text{-}10)$$

Et

$$f(\omega+0) = h(\omega-0) \qquad (3\text{-}11)$$

On obtient pour tout $x \in [-\omega,\omega]$:

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\omega}\right) \qquad (3\text{-}12)$$

(Car h est impaire et l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à l'origine.)

Où q_n est le polynôme trigonométrique qui approche h.

REMARQUE :

L'existence de q_n est liée à la périodicité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ ce qui est garanti par le théorème 3-1, et comme la fonction h vérifie les conditions du théorème 3-3 on peut écrire :

$$h(x) \approx q_n(x)\ ,\ \forall x \in [-\omega, \omega] \qquad (3\text{-}13)$$

Comme les coefficients $(b_k)_{1\le k\le n}$ sont calculés selon la formule(3-6), il en résulte que q_n est la meilleure approximation de h dans le sous espace des polynômes trigonométriques de degré n.

3-3- CALCUL DES COEFFICIENTS $(b_k)_{1\le k\le n}$:

On a:

$$b_k = \frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{\omega} h(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{\omega}\right)dx \qquad (3\text{-}14)$$

Le calcul donne :

$$bi = \frac{2}{(i\pi)^2}\left[-\omega\sin\left(\frac{i\pi}{\omega}\right) - i\pi\omega(-1)^i + i\pi(-1)^i\right]m_1 + \frac{2}{(i\pi)^2}\left[\omega\sin\left(\frac{i\pi}{\omega}\right) - i\pi(-1)^i\right]m_0, i = 1,2,\ldots,n$$

(3-15)

REMARQUE :

Si $\omega \le 1$

Alors on a :

$$b_k = \frac{2}{k\pi}(-1)^k m_0, k = 1,2,\ldots,n \qquad (3\text{-}16)$$

qui ne dépend pas de la valeur de m_1.

3-4- ESTIMATION DE L'ERREUR

On a toujours la relation suivante :

$$\|f-q_n\|_2^2=\|f\|_2^2-\|q_n\|_2^2 \tag{3-17}$$

Où $\|.\|_2$ désigne la norme associée au produit scalaire :

$$(g_1|g_2)=\int_{-\omega}^{\omega} g_1(x)g_2(x)dx \tag{3-18}$$

Comme q_n est périodique de période 2ω, on peut estimer l'erreur commise par l'approximation de h par q_n sur R seulement sur l'intervalle $[-\omega,\omega]$.

On a :

$$\sup\{|f(x)-h(x)|, x\in[-\omega,\omega]\}=\sup\{|h(x)-q_n(x)|, x\in[-\omega,\omega]\}\leq\|f-q_n\|_2 \tag{3-19}$$

Donc :

$$\sup\{|h(x)-q_n(x)|, x\in[-\omega,\omega]\}\leq\left(\|f\|_2^2-\|q_n\|_2^2\right)^{1/2} \tag{3-20}$$

Posons :

$$\varphi_i=\frac{2}{(i\pi)^2}\left[-\omega\sin\left(\frac{i\pi}{\omega}\right)-i\pi\omega(-1)^i+i\pi(-1)^i\right],\quad i=1,2,\ldots,n \tag{3-21}$$

$$\psi_i=\frac{2}{(i\pi)^2}\left[\omega\sin\left(\frac{i\pi}{\omega}\right)-i\pi(-1)^i\right],\quad i=1,2,\ldots,n \tag{3-22}$$

Alors :

$$b_k=\varphi_k m_h+\psi_k m_b,\quad k=1,2,\ldots,n \tag{3-23}$$

Comme :

$$\|q_n\|_2^2=\pi\sum_{k=1}^{k=n} b_k^2 \tag{3-24}$$

$$\|q_n\|_2^2=\gamma_n m_h^2+\eta_n m_b^2+\zeta_n m_b m_h \tag{3-25}$$

$$\gamma_n = \pi \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k^2, \quad \eta_n = \pi \sum_{k=1}^{k=n} \psi_k^2, \quad \zeta_n = \pi \sum_{k=1}^{k=n} \varphi_k \psi_k \tag{3-26}$$

Comme :

$$f(x) = h\left(x + \omega - \left\lfloor \frac{x+\omega}{2\omega} \right\rfloor 2\omega\right) \tag{3-27}$$

On a :

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\omega}^{\omega} h^2\left(x + \omega - \left\lfloor \frac{x+\omega}{2\omega} \right\rfloor 2\omega\right) dx \tag{3-28}$$

Car la fonction h est continue et la fonction :

$$x \to \left(x + \omega - \left\lfloor \frac{x+\omega}{2\omega} \right\rfloor 2\omega\right) \tag{3-29}$$

est intégrable donc l'intégrale précédente existe.

Un calcul simple donne :

$$\|f\|_2^2 = A m_n^2 + B m_n^2 + C m_n m_n \tag{3-30}$$

Où :

$$A = \frac{8}{3}\omega^3 - 4\omega^2 + 2\omega - \frac{1}{3} \tag{3-31}$$

$$B = 2\omega - \frac{2}{3} \tag{3-32}$$

$$C = 4\omega^2 - 4\omega + 1 \tag{3-33}$$

Enfin on a :

$$\|f - q_n\|_2^2 = (A - \gamma_n) m_n^2 + (B - \eta_n) m_n^2 + (C - \zeta_n) m_n m_n \tag{3-34}$$

On remarque que cette estimation de l'erreur dépendra continûment des valeurs de m_n et m_n, et par suite on a la majoration suivante :

$$\sup\{|f(x) - q_n(x)|, x \in [-\omega, \omega]\} \leq \sqrt{(A - \gamma_n) m_n^2 + (B - \eta_n) m_n^2 + (C - \zeta_n) m_n m_n} \tag{3-35}$$

Si on veut que :

$$\sup\{|f(x) - q_n(x)|, x \in [-\omega, \omega]\} \leq \varepsilon \tag{3-36}$$

On suppose que :

$$(A - \gamma_n) m_n^2 + (B - \eta_n) m_n^2 + (C - \zeta_n) m_n m_n \leq \varepsilon^2 \tag{3-37}$$

Et on considère la surface suivante :

$$(A - \gamma_n) x^2 + (B - \eta_n) y^2 + (C - \zeta_n) xy \leq \varepsilon^2. \tag{3-38}$$

Où on peut déterminer les valeurs de m_0 .et, m_1 .graphiquement.

Notons que les valeurs de m_0 et m_1 qui satisfont la condition (3-38), sont infinies, et par suite il est préférable de choisir les valeurs de m_0 et m_1, suivant les autres critères physiques par exemple : $m_0 \leq 0$,et $m_1 \geq 0$ .où on choisi m_0 et m_1 pour que le modèle (3-1) soit proche de celui du circuit original.

IV

CHAPITRE IV

ETUDE DU SYSTEME LINEARISE

4-1- INTRODUCTION :

Il est préférable dans l'étude d'un système dynamique d'étudier le système linéairisé autour des points d'équilibres car par cet lineairisation on peut ramener l'étude du système non linéaire à un voisinage d'un point d'équilibre et sous certaines conditions il existe un homéomorphisme entre les deux systèmes (Théorème de Hartmann -Grobman voir l'annexe B.5).

4-2- LES POINTS D'EQUILIBRES

Considérons le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha(y - q_n(x)) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = -\beta y \end{cases} \qquad (4\text{-}1)$$

Les points d'équilibres pour le système (4-1) vérifient :

$$q_n = 0, y = 0, x = -z \qquad (4\text{-}2)$$

Donc tout point d'équilibre de (4-1) est donné par :

$$X_{eq} = (x, 0, -x) \qquad (4\text{-}3)$$

tel que :

$$q_n(x)=0 \tag{4-4}$$

Pour résoudre l'équation(4-4).On peut écrire :

$$q_n(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)g_n(x) \tag{4-5}$$

Où :

$$g_n(x)=g_n\left(\cos\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)....\cos^{n-1}\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)b_1,b_2,....,b_n\right) \tag{4-6}$$

La relation (4-6) est le résultat des expressions suivantes :

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi x}{\omega}\right)=2\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{\omega}\right). \\ \sin\left(\frac{3\pi x}{\omega}\right)=\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)\left(3-4\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)\right). \\ ..... \\ \sin\left(\frac{k\pi x}{\omega}\right)=\sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)T\left(\cos\left(\frac{\pi x}{\omega}\right)....,\cos\left(\frac{k\pi x}{\omega}\right)\right). \end{cases} \tag{4-7}$$

Pour tout k, et T est une fonction.

L'équation (4-5) implique que q_n admet une infinité de racines de la forme :

$$x_i = i\omega, i \in \mathbf{Z} \tag{4-8}$$

Posons donc :

$$X_{eq(k)}=(k\omega,0,-k\omega)^T \tag{4-9}$$

Alors : $X_{eq(k)}$ est un point d'équilibre de (4-1).

Notons que les racines de l'équation

$$g_n(x)=0 \tag{4-10}$$

dépendent des valeurs de m_0,m_1,n. Tenant compte du changement de variable :

$$y=\cos\left(\frac{\pi x}{\omega}\right) \tag{4-11}$$

On peut résoudre l'équation (4-10) comme étant un polynôme de degré $(n-1)$ en y. Si (4-10) admet une solution y_1,alors : $x_1=arcos(y_1)$, est solution de l'équation (4-4) si et seulement si : $|y_1|\leq 1$, pour $n\in\{1,2,....,10\}$. pour cela on utilise un calcul numérique pour résoudre l'équation (4-10).

4-3 - LES VALEURS PROPRES ET LES VECTEURS PROPRES

La matrice jacobienne du système (4-1) est donné par :

$$DF(X)=\begin{pmatrix} \alpha q_n'(x) & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} \tag{4-12}$$

Où :

$$q_n'(x)=\frac{\pi}{\omega}\sum_{k=1}^{k=n} kb_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\omega}\right) \tag{4-13}$$

On remarque que q_n' est une fonction paire, et $DF(X)$ dépend seulement de x et des paramètres de contrôle :

Soit :

$$p_3(\lambda)=\lambda^3+p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3 \tag{4-14}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne aux points d'équilibre de (4-1) on a :

$$\begin{cases} p_1=\alpha q_n'+1 \\ p_2=\beta+\alpha\left(q_n'-1\right) \\ p_3=\alpha\beta q_n' \end{cases} \tag{4-15}$$

Où q_n' désigne la dérivée de q_n aux points d'équilibres.

De l'équations (4-15) il résulte que :

$$p_3(\lambda)=\lambda^3+p_1\lambda^2+p_2\lambda+p_3 \tag{4-16}$$

Posons :

$$\Delta=\left(\alpha\beta q_n'\right)^2+4/27\left(\beta+\alpha\left(q_n'-1\right)\right)^3 \tag{4-17}$$

et soient z_1, z_2 les racines de l'équation :

$$p_3(\lambda)=0 \tag{4-18}$$

et u, v les racines cubiques de z_1, z_2 respectivement tel que :

$$uv=\frac{-\left(\beta+\alpha\left(q_n'-1\right)\right)}{3} \tag{4-19}$$

Alors les solutions de l'équation (4-19) sont donnés par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = u + v - \dfrac{\left(\alpha q_n' + 1\right)}{3} \\ \lambda_2 = uj + v j^2 - \left(\dfrac{\alpha q_n' + 1}{3}\right) \\ \lambda_3 = u j^2 + vj - \left(\dfrac{\alpha q_n' + 1}{3}\right) \end{cases} \tag{4-20}$$

Où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ est la racine cubique de 1.

On a les expressions suivantes pour u, v, z_1, et, z_2 suivant le signe de Δ :

(I) Si $\Delta > 0$ alors :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-\alpha\beta q_n' + \sqrt{\Delta}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-\alpha\beta q_n' - \sqrt{\Delta}}{2} \\ u = \sqrt[3]{z_1}\ , v = \sqrt[3]{\Delta} \end{cases} \tag{4-21}$$

et l'équation (4-18) admet deux racines complexes conjuguées et une réelle.

(II) si $\Delta = 0$ alors :

$$z_1 = z_2 = \frac{-\alpha\beta q_n'}{2}\ , u = v = \sqrt[3]{\Delta} \tag{4-22}$$

Dans ce cas il existe une racine triple si $q_n' = 0$, une racine réelle double et une racine simple si $q_n' \neq 0$.

(III) $\Delta < 0$:il existe trois racines réelles.

Par un calcul numérique on peut trouver toutes les valeurs propres en tenant compte les relations précédentes.

Pour chaque valeur propre on a l'expression suivante pour le vecteur propre correspond :

$$X_\lambda = \left(\frac{\lambda^2 + \lambda + \beta}{\beta}, \frac{\lambda}{\beta}, -1\right)^T \tag{4-23}$$

Notons que les vecteurs propres sont utilisés pour déterminer les variétés invariantes au voisinage des points d'équilibre.

4-4 - STABILITE DES POINTS D'EQUILIBRES

Considérons les points d'équilibre:

$$X_{eq(k)} = (k\omega, 0, -k\omega)^T \quad k \in Z \tag{4-24}$$

O n a deux cas possibles :

(I) j est paire :

Alors :

$$q_n'(j\omega) = \frac{\pi}{\omega}\sum_{k=1}^{k=n} kb_k \tag{4-25}$$

(II) j est impaire

Alors :

$$q_n'(j\omega) = \frac{\pi}{\omega}\sum_{k=1}^{k=n} kb_k(-1)^k \tag{4-26}$$

La valeur de q_n' aux points d'équilibre ne dépend pas des points indiqués, elle dépend uniquement de l'indice de ce point (aux sens de la dépendance du point de l'indice j). Par conséquent tous les points d'indice paire possèdent les mêmes valeurs propres, tous les points d'indice impaire possédant les mêmes valeurs propres. Il suffit donc de connaître le type de stabilité de deux points représentatifs : $X_{eq}^1=(0,0,0)^T, X_{eq}^2=(\omega,0,-\omega)^T$.

On peut déterminer le type topologique de chaque point par l'étude du signe du produit suivant :

$$T_n = q_n'(0) \quad q_n'(\omega) \tag{4-27}$$

On obtient le résultat suivant :

Si $T_n<0$, alors X_{eq}^1 et X_{eq}^2 ayant des types de stabilité différents. L'un des deux est instable et par suite la matrice jacobienne admet une valeur propre réelle positive.

4-5 - VARIETES ASSOCIEES A CHAQUE POINT D'EQUILIBRE

Suivant les signes des valeurs propres, on peut déterminer les équations des variétés ou les sous espaces invariants propres au voisinage des points d'équilibre comme étant les sous espaces vectoriels de R^3 engendrées par les parties réelles et imaginaires des vecteurs propres.

4-6 - SOLUTIONS DE L'EQUATION LINEAIRE AU VOISINAGE DES POINTS D'EQUILIBRE

Soient X_{eq} un point d'équilibre, et $X_0=(c_1,c_2,c_3)^T$ un vecteur arbitraire dans $\mathbb{R}^3$. $(\lambda)_{1\le i\le 3}$ Les valeurs propres de $DF(X_{eq})$, $(V_i)_{1\le i\le 3}$ les vecteurs propres associées aux valeurs propres $(\lambda)_{1\le i\le 3}$, et supposons que les valeurs propres sont distinctes (par exemple si $\Delta>0$).

Alors :

Toutes les solutions de l'équation linéaire qui passe par X_0 quand $t=0$ sont données par :

$$X(t,X_0)=X_{eq}+c_1\exp(\lambda_1 t)\ V_1+c_2\exp(\lambda_2 t)\ V_2+c_3\exp(\lambda_3 t)\ V_3 \qquad (4\text{-}27)$$

Où c_1,c_2,c_3 sont des constants.

V

CHAPITRE V

ETUDE DU SYSTEME NONLINEAIRE

5-1- INTRODUCTION

Dans ce chapitre on va étudier le système non linéaire d'une façon générale c'est-à-dire : les valeurs de m_0, m_1 et w, sont arbitraires, on donne ensuite un cadre général pour les phénomènes de Bifurcations possibles dans ce système.

On montre que les bifurcations des points d'équilibres dépendent du signe de q_n' : la dérivée de q_n aux points d'équilibre.

Pour les bifurcations globales, c'est à dire : le changement de la forme du flot, on traite quelques exemples pour les valeurs de n comprises entre 1 et 10, ensuite on donne des conditions pour que le système admet des solutions périodiques, d'autres conditions confirment l'inexistence des solutions périodiques dans un domaine du plan $\alpha-\beta$. Par l'utilisation du théorème de la forme normale, et les théorèmes sur les bifurcations de Hopf, on montre numériquement l'existence d'une solution périodique de période *3*, qui entraîne d'après le théorème de Sharkovsky que le système est chaotique.

5-2- BIFURCATIONS DES POINTS D'EQUILIBRES

Soit l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x}=\alpha(y-q_n(x)) \\ \dot{y}=x-y+z \\ \dot{z}=-\beta y \end{cases} \qquad (5\text{-}1)$$

Où :

$$q_n(x) = \sum_{i=1}^{i=n} b_i \sin(\frac{i\pi x}{\omega}), n=1,2,\ldots,10 \qquad (5\text{-}2)$$

Et pour chaque $i \in \{1,2,..,n\}$ on a :

$$b_i = \frac{2}{(i\pi)^2}\left[-\omega\sin\left(\frac{i\pi}{\omega}\right) - \omega i\pi(-1)^i + i\pi(-1)^i\right]m_1 + \frac{2}{(i\pi)^2}\left[\omega\sin\left(\frac{i\pi}{\omega}\right) - \omega i\pi(-1)^i\right]m_0 \qquad (5\text{-}3)$$

Où les $(\varphi_k)_{1\le k\le n}$ sont choisie telles que q_n soit la meilleure approximation de la fonction caractéristique h dans le sous espace des polynômes trigonométriques de degré n .

Comme q_n est impaire le modèle (5-1)reste invariant sous l'action de la transformation :

$$(x \quad , \quad y, z) \to (-x, -y, -z) \qquad (5\text{-}4)$$

En outre q_n est périodique de période 2ω. Si on introduit la transformation:

$$(x,y,z) \to (x+2\omega, y, z-2\omega) \qquad (5\text{-}5)$$

On a aussi que le modèle (5-1)est invariant sous l'action de cette transformation, et par suite le modèle (5-1)est invariant sous l'action de la famille $(\tau_k)_k$ définie par :

$$(x,y,z) \to (x+2k\omega, y, z-2k\omega) \qquad (5\text{-}6)$$

Ces deux propriétés éliminent l'existence de certains types de bifurcations dans le modèle (5-1)par exemple :

Comme le modèle est symétrique par rapport à l'origine ceci implique qu'il n'existe pas de bifurcations Nœud -col dans ce système, et comme le point $(0,0,0)$est un point d'équilibre de ce système implique l'inexistence des bifurcations transcritiques.

Pour tout n, et pour toutes les valeurs de ω, m_0 et m_1 on a les deux points caractéristiques: $X^1_{eq}=(0,0,0)$ et $X^2_{eq} = (\omega, 0, -\omega)$ en plus de ça celles qui vérifiant :

$$g_n(x)=0 \qquad (5\text{-}7)$$

(voir le chapitre 3) .

La stabilité des points d'équilibres dépend seulement des valeurs des paramètres de contrôle α, et β, que nous supposerons positives.

Soit : $$p_3(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3 \qquad (5\text{-}8)$$

Le polynôme caractéristique de la matrice jacobienne aux points d'équilibres du modèle. On a (Voir l'annexe B.4) :

$$\begin{cases} p_1 = \alpha q_n' + 1 \\ p_2 = \beta + \alpha\left(q_n' - 1\right) \\ p_3 = \alpha\beta q_n' \end{cases} \tag{5-9}$$

Où q_n' est la dérivée de q_n aux points d'équilibres, nous allons comparer le type topologique des points d'équilibres, pour cela posons :

$$T_n = q_n'(0) \quad q_n'(\omega) \tag{5-10}$$

Alors on a le résultat suivant :

Si : $T_n < 0$ alors les deux points représentatifs sont de types topologiques différents.

En effet :

Le coefficient p_3 représente le produit des valeurs propres au point indiqué c'est -a- dire :

$$p_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \tag{5-11}$$

Ce qui implique que $q_n'(0)$, $q_n'(\omega)$ ont des signes différents et par suite le signe de p_3, alors les signes des valeurs propres en chaque point sont différents.

Soit par exemple : $x \in \{0, \omega\}$, alors le point d'équilibre correspondant :

$X_{eq} = (x, 0, -x)$, est instable car, $\alpha, \beta > 0$,et par suite, il existe au moins une valeur propre de la matrice jacobienne au point, $X_{eq} = (x, 0, -x)$, qui est réel et positif.

S'il existe d'autres points d'équilibres c'est à dire : ceux qui vérifient l'équation (5-7) en appliquant la même méthode de comparaison entre eux et les autres point d'équilibres, contrairement on conclue que les deux points ont le même type de stabilité.

5-3- LES BIFURCATIONS GLOBALES

La bifurcation globale s'exprime par le changement de la forme du flot. Un exemple sur ce phénomène est la création d'un attracteur étrange après une trajectoire qui convergente ver un point d'équilibre.

Le traitement de ce type de bifurcations se fait numériquement sur quelques valeurs différentes des paramètres du système (Voir la section4-5).

Condition nécessaire pour obtenir une bifurcation de Hopf :

On sait que la bifurcation de Andronov-Hopf correspond à l'existence de deux valeurs propres imaginaires pures conjuguées, et une autre valeurs propre réelle.

Cette condition est formalisé par les étapes suivantes :

Soit :

$$\lambda^3 - \lambda_3 \lambda^2 + \gamma_0^2 \lambda - \gamma_0^2 \lambda_3 = 0 \qquad (5\text{-}12)$$

La forme générale d'un polynôme du degré 3 ayant une racine réelle, et deux autres complexes purs :

$$\lambda_{1,2} = \pm i\gamma_0 \qquad (5\text{-}13)$$

Par identification on obtient :

$$\lambda_3 = -\left(1 + \alpha q_n'\right) \qquad (5\text{-}14)$$

$$\gamma_0^2 = \beta + \alpha\left(q_n' - 1\right) \qquad (5\text{-}15)$$

Au point critique β_c on a :

$$\lambda_{1,2} = \pm i \left(\beta_c + \alpha\left(q_n' - 1\right)\right)^{1/2} \qquad (5\text{-}16)$$

On considère la condition de Hurwitz de stabilité :

$$\beta \succ -q_n'\left(q_n' - 1\right)\left(\alpha q_n' + 1\right) \qquad (5\text{-}17)$$

Alors :

$$\beta_c = \alpha\left(1 - q_n'\right)\left(\alpha q_n' + 1\right) \qquad (5\text{-}18)$$

La relation (5-16) a un sens si :

$$\beta_c > \alpha \left(1 - q_n'\right) \qquad (5\text{-}19)$$

C'est à dire :

$$0 < q_n' < 1 \qquad (5\text{-}20)$$

Car : $\alpha \succ 0$

On dérive l'équation :

$$p_3(\lambda) = 0 \qquad (5\text{-}21)$$

par rapport à β on obtient :

$$\acute{\lambda}(\beta) = \frac{-\lambda(\beta) - \alpha q_n'}{3\lambda^2(\beta) + 2\left(1 + \alpha q_n'\right)\lambda(\beta) + \beta + \alpha\left(q_n' - 1\right)} \qquad (5\text{-}22)$$

Alors :

$$\lambda_3'(\beta_c) = 2\gamma_0^2\left(1+2\alpha q_n'\right) \tag{5-23}$$

Donc on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5-1 :

On suppose que :

$$0 < q_n' < 1 \tag{5-24}$$

Alors il existe une valeur critique β_c de β tel que pour : $\beta = \beta_c$, on ait une bifurcation de Hopf pour tout point X_{eq} vérifiant (5-24), et par suite il existe une solution périodique du système (5-1) pour une valeur de β proche de β_c.

PROPOSITION 5-2 :

Si

$$q_n' \geq 1 \quad ou \quad q_n' \leq 0 \tag{5-25}$$

Alors : il n'existe aucune bifurcation de Hopf, et par suite il n'existe aucune solution périodique dans ce cas pour tous les paramètres α et β.

En effet : il n'existe aucun ensemble de valeurs propres qui vérifie les relations (5-16).

Soit :

$$\Delta(\alpha,\beta) = \left(\alpha\beta q_n'\right)^2 + 4/27\left(\beta + \alpha\left(q_n' - 1\right)\right) \tag{5-26}$$

Le discriminant de Cardan pour l'équation :

$$p_3(\lambda) = 0 \tag{5-27}$$

et soit l'ensemble :

$$E_{\alpha,\beta} = \left\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 / \Delta(\alpha,\beta) > 0, et\, \lambda_3(\alpha,\beta) \leq -1/9\left(\alpha q_n' + 1\right)\right\} \tag{5-28}$$

Dans cet ensemble on a les formules suivantes des valeurs propres :

$$\lambda_3=\left(\frac{-\alpha\beta q_n'+(\Delta)^{1/2}}{2}\right)-\left(\frac{\alpha\beta q_n'+(\Delta)^{1/2}}{2}\right)-\frac{\left(\alpha q_n'+1\right)}{3} \tag{5-29}$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})=-\frac{1}{2}\lambda_3-\frac{1}{6}\left(\alpha q_n'+1\right) \tag{5-30}$$

$$\mathrm{Im}(\lambda_{1,2})=\pm\sqrt{3}/2\left[\left(\frac{-\alpha\beta q_n'+(\Delta)^{1/2}}{2}\right)+\left(\frac{\alpha\beta q_n'+(\Delta)^{1/2}}{2}\right)\right] \tag{5-31}$$

Et l'inégalité suivante :

$$\mathrm{Re}(\lambda_{1,2})\geq\lambda_3 \tag{5-32}$$

Soit : $X_{eq}=(x_0,0,-x_0)$ un point d'équilibre de l'équation (5-1), tel que :

$$q_n'(x_0)\in]0,1[\tag{5-33}$$

Alors :

$$\begin{cases}\lambda_3<0\\ Re(\lambda_{1,2})>0\end{cases} \tag{5-34}$$

Et soit :

$$\beta_1(\alpha)=-\frac{\left(q_n'\right)^2}{3}\alpha^2+\left(1-q_n'\right)(A+4/27)\alpha \tag{5-35}$$

Où :

$$\begin{cases}A=\sqrt[3]{A_1}-\sqrt[3]{A_2}\\ A_1=4/27+\sqrt{\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\right)}\\ A_2=-4/27+\sqrt{\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\right)}\end{cases} \tag{5-36}$$

Pour $\beta>\beta_1(\alpha)$, on a :

$$\Delta(\alpha,\beta)>0 \tag{5-37}$$

Donc $E_{\alpha,\beta}$ se réduit à l'ensemble :

$$E_{\alpha,\beta}=\{\alpha/\alpha>0\}X\{\beta/\beta>\beta_1(\alpha)\} \tag{5-38}$$

Et soit :

$$DF(X_{eq})=\begin{pmatrix} -\alpha q_n'(x_0) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{5-39}$$

La matrice jacobienne au point d'équilibre X_{eq}.

Pour $\beta=\beta_c(\alpha)$,on a :

$$DF(X_{eq})=\begin{pmatrix} -\alpha q_n' & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta_c & 0 \end{pmatrix} \tag{5-40}$$

Et

$$\mathrm{Re}(\lambda_1)(\alpha,\beta_c)=0 \tag{5-41}$$

Elle peut se mettre sous la forme canonique suivante :

$$DF(X_{eq})=\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_0 & 0 \\ \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1+\alpha q_n'\right) \end{pmatrix} \tag{5-42}$$

Où

$$\gamma_0=\mathrm{Im}\lambda_1(\alpha,\beta_c)=\alpha\sqrt{\left(1-q_n'\right)q_n}>0 \tag{5-43}$$

Soit la matrice P définie par :

$$P=\begin{pmatrix} \frac{\beta_c-\gamma_0^2}{\beta_c} & \frac{-\gamma_0}{\beta_c} & 0 \\ 0 & \frac{-\gamma_0}{\beta_c} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5-44}$$

Alors p^{-1} est inversible (Car $Det(p)=-\frac{1}{\left(\alpha q_n'+1\right)}\sqrt{\frac{q_n'}{1-q_n'}}\neq 0$) et on a :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\beta_c}{\beta_c-\gamma_0^2} & \frac{-\beta_c}{\beta_c-\gamma_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\beta_c}{\gamma_0} & 0 \\ \frac{\beta_c}{\beta_c-\gamma_0^2} & \frac{-\beta_c}{\beta_c-\gamma_0^2} & 1 \end{pmatrix} \tag{5-45}$$

On considère le changement de variable suivant :

$$X=X_{eq}+PY \tag{5-46}$$

et le système d'équation différentielle :

$$\dot{X}=P\dot{Y} \tag{5-47}$$

est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{y}_1=f_1(Y) \\ \dot{y}_2=\gamma_0 y_1-\frac{\beta_c}{\gamma_0}y_3 \\ \dot{y}_3=f_1(Y)+\gamma_0 y_2 \end{cases} \tag{5-48}$$

Où : $Y=(y_1,y_2,y_3)$.

$$f_1(Y)=\frac{\gamma_0^2}{\beta_c-\gamma_0^2}y_1-\frac{\alpha\gamma_0}{\beta_c-\gamma_0^2}y_2-\frac{\beta_c}{\beta_c-\gamma_0^2}y_3-\frac{\alpha\beta_c}{\beta_c-\gamma_0^2}q_n\left(x_0+\frac{\beta_c-\gamma_0^2}{\beta_c}y_1-\frac{\gamma_0}{\beta_c}y_2\right) \tag{5-49}$$

Et soit finalement les coefficients de la forme normale suivants :

$$g_{11}=\frac{\alpha q_n''(x_0)}{4\beta_c(\beta_c-\gamma_0^2)}\left(\gamma_0^2-(\beta_c-\gamma_0^2)^2\right) \tag{5-50}$$

$$g_{02}=g_{20}=\frac{-\alpha q_n''(x_0)}{4\beta_c(\beta_c-\gamma_0^2)}\left(\left(\gamma_0^2-(\beta_c-\gamma_0^2)^2\right)\right)-i\frac{\alpha q_n''(x_0)\gamma_0}{2\beta_c} \tag{5-51}$$

$$g_{21}=\frac{\alpha q_n^{(3)}(x_0)}{4\beta_c(\beta_c-\gamma_0^2)}\left(\beta_c\gamma_0^3-(\beta_c-\gamma_0^2)^2\right)+i\frac{\alpha q_n^{(3)}(x_0)\gamma_0}{8\beta_c^2(\beta_c-\gamma_0^2)}\left(\beta_c-(\beta_c-\gamma_0^2)^2\right) \tag{5-52}$$

$$D=-\left(\alpha q_n' +1\right) \tag{5-53}$$

$$C_1(0)=\frac{i}{2\gamma_0}\left[g_{20}g_{11}-2\left|g_{11}^{2}\right|-1/3\left|g_{20}\right|\right]+\frac{g_{21}}{2} \tag{5-54}$$

$$\mu_2=-\mathrm{Re}\,c_1(0)/\alpha'(0) \tag{5-55}$$

(qui détermine la direction des bifurcations)

$$\tau_2=-\left(\mathrm{Im}\,c_1(0)+\mu_2\omega'(0)\right)/\gamma_0 \tag{5-56}$$

$$\beta_2=2\mathrm{Re}\,c_1(0) \tag{5-57}$$

(qui détermine la stabilité des solutions périodiques)

Où :

$$\alpha'(0)=\varphi_4(\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3(\varphi_2-\varphi_1)>0 \tag{5-58}$$

$$\omega'(0)=\sqrt{3}\varphi_4(-\varphi_1+\varphi_2)+\sqrt{3}\varphi_3(\varphi_2+\varphi_1)>0 \tag{5-59}$$

Où :

$$\begin{cases} \varphi_1(\alpha)=\left(\dfrac{-\alpha\beta_c q_n' +\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{-2/3} \\ \varphi_2(\alpha)=\left(\dfrac{\alpha\beta_c q_n' +\sqrt{\Delta}}{2}\right)^{-2/3} \end{cases} \tag{5-60}$$

$$\varphi_3(\alpha)=\frac{1}{12\sqrt{\Delta}}\left((\alpha)^2 q_n'\left(1-q_n'\right)\left(\left(\alpha q_n' +1\right)+2/9\right)\right) \tag{5-61}$$

$$\varphi_4(\alpha)=\frac{\alpha q_n'}{12} \tag{5-62}$$

Alors la période de la solution obtenue pour le couple (α,β) est donnée par :

$$T(\alpha,\beta)=\frac{2\pi}{\gamma_0}\left(1+\tau_2\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^4\right)\right) \tag{5-63}$$

Où :

$$\varepsilon^2 = \frac{\beta - \beta_c(\alpha)}{\mu_2} + o\left((\beta - \beta_c)^2\right) \tag{5-64}$$

Posons :

$$g_1(\alpha) = \frac{2\pi}{\gamma_0} - \frac{2\pi\tau_2}{\gamma_0\mu_2}\beta_c \tag{5-65}$$

$$g_2(\alpha) = \frac{2\pi\tau_2}{\gamma_0\mu_2} \tag{5-66}$$

Alors :

$$T(\alpha,\beta) = g_1(\alpha) + g_2(\alpha)\beta \tag{5-67}$$

Nous obtenons une solution périodique de période *3*, par l'utilisation de cette méthode bien connu dans la théorie des bifurcations de Hopf et ses applications basées sur le théorème de la forme normale .

L'obtention d'une solution périodique de période 3 indique d'après le théorème de Sharkovsky que cette solution est chaotique (Voir l'annexe B.3).

PROPOSITION -5-3:

(A)

Soit

$$\alpha_1 = \frac{3\left(1 - q_n'\right)\left(A + 4/27\right)}{\left(q_n'\right)^2} \tag{5-68}$$

$$\alpha_2 = 1 + \frac{\left(1 - q_n'\right)^{1/2}\left(q_n'\right)^{3/2}}{3} \tag{5-69}$$

$$q_n' = q_n'(j\omega) \in]0,1[,\ j \in Z \tag{5-70}$$

$$q_n^{(3)} = q_n^{(3)}(j\omega),\ j \in Z \tag{5-72}$$

Supposons que :

$$\beta > \beta_1(\alpha) \tag{5-73}$$

$$\alpha > \alpha_2 \left(\alpha < \alpha_2\right) \tag{5-74}$$

$$q_n^{(3)} > 0 \quad \left(q_n^{(3)} < 0\right) \tag{5-75}$$

Alors il existe une solution périodique pour $\beta \leq \beta_c$, et cette solution est instable.

(B)

Supposons que :

$$\beta > \beta_1(\alpha) \tag{5-76}$$

$$\alpha > \alpha_2 (\alpha < \alpha_2) \tag{5-77}$$

$$q_n^{(3)} < 0 \quad \left(q_n^{(3)} > 0\right) \tag{5-78}$$

Alors il existe une solution périodique pour $\beta \geq \beta_c$, et cette solution est stable.

DEMONSTRATION :

Soit

$$\beta > \beta_1(\alpha)$$

Alors

$$\Delta > 0$$

Donc

$$(\alpha, \beta) \in E_{\alpha,\beta} \tag{5-79}$$

D'autre part comme on a :

$$ReC_1(0) = \frac{q_n^{(3)}\alpha^2\left(1-q_n'\right)}{16\left(\alpha q_n'+1\right)}\left[2\alpha^2\left(\alpha q_n'+1\right)\left(1-q_n'\right)^{1/2}\left(q_n'\right)^{3/2}-2\right] \tag{5-80}$$

Donc

$$ReC_1(0) > 0 \Leftrightarrow \left(\alpha > \alpha_2, et\ q_n^{(3)} > 0\right), \text{ou } \left(\alpha < \alpha_2, et\ q_n^{(3)} < 0\right) \tag{5-81}$$

Donc :

$\mu_2 < 0$ et $\beta_2 > 0$ alors : $\beta < \beta_c$, et la solution périodique est instable.

Notons que si : $\alpha \in]0, \alpha_1[$ on a : $0 < \beta_1(\alpha) < \beta < \beta_c$, et si : $\alpha > \alpha_1$ on a : $0 < \beta < \beta_c$

Posons donc :

$$I_\beta^1 =]\beta_1(\alpha), \beta_c[\, (resp.\ ]0, \beta_c[) \tag{5-82}$$

Alors pour $\beta \geq \beta_c$ on garantit l'existence de solutions périodiques instables.

Posons :

$$D^{1}_{\alpha,\beta} = \{\alpha : \alpha > \alpha_2\} \times I^{1}_{\beta} \quad \left(\{\alpha : \alpha < \alpha_2\} \times I_{\beta}.resp\right) \tag{5-83}$$

Donc $D^{1}_{\alpha,\beta}$ contient le rang des paramètres où nous obtenons les solutions périodiques instables pour tout les valeurs de n tel que :

$$q_n'(j\omega) \in]0,1[, et \quad q_n^{(3)}(j\omega) > 0, \quad \left(resp. \quad q_n^{(3)}(j\omega) < 0\right) \tag{5-84}$$

Par le même raisonnement en peut prouver la partie (B) de la proposition.

Posons :

$$D_{\alpha,\beta}^{2} = \{\alpha / \alpha > \alpha_2\} \times I_{\beta}^{2}\left(resp. \quad \{\alpha / \alpha < \alpha_2\} \times I_{\beta}^{2}\right) \tag{5-85}$$

Où :

$$I_{\beta}^{2} = \{\beta / \beta > \beta_c\} \tag{5-86}$$

est le domaine qui contient le rang des paramètres où nous obtenons des solutions périodiques stables associées aux points qui satisfont:

$$q_n'(j\omega) \in]0,1[, et \quad q_n^{(3)}(j\omega) < 0 \quad \left(resp. q_n^{(3)}(j\omega) > 0\right) \tag{5-87}$$

On donne maintenant une condition pour l'inexistence des solutions quasi-périodiques :

PROPOSITION -5-4:

Soient :

$$n \in \{1,2,\ldots,10\}. \; M_n = \frac{\pi}{\omega}\sum_{k=1}^{k=n} k|b_k| \tag{5-88}$$

supposons que :

$$\alpha < \frac{1}{M_n}, \quad et\, \beta\, quelconque. \tag{5-89}$$

Alors :

Il n'existe aucune solution quasi-périodique du modèle (5-1).

DEMONSTRATION :

On a :

$$div(F) = -\left(\alpha q_n' + 1\right) \tag{5-90}$$

(F est le champ de vecteur du modèle (5-1)).

Comme :

$$\forall x \in R : \quad |q_n'(x)| \leq M_n \tag{5-91}$$

On a :

$$\forall x \in R : \alpha M_n - 1 \geq -(\alpha q_n'(x) - 1) \geq -(\alpha M_n + 1) \tag{5-92}$$

Alors il suffit de choisir :

$$\alpha M_n - 1 \leq 0 \tag{5-93}$$

C'est à dire :

$$\alpha < \frac{1}{M_n} \tag{5-94}$$

Par conséquent l'attracteur associé à ces valeurs de α *et* β est un point ou une courbe, et par suite le comportement n'est pas quasi-périodique, car la solution quasi-périodique reste dans la surface du Tore.

Si on considère un ensemble de conditions initiales reparties sur la surface du tore, et si pour le complémentaire de cet ensemble le volume occupé par les conditions initiales disparaisse, dans ce cas le Tore se réduit à un point et par suite le tore disparaît.

Cet argument est utilisé pour montrer que le modèle de Lorenz n'admet aucune solution quasi-périodique pour tous les points dans le plan de phase.

COROLLAIRE 5-5:

Si :

$$\alpha < \frac{1}{M} \tag{5-95}$$

Où :

$$M = \sup\{M_n, n \in \{1, 2, \ldots, 10\}\} \tag{5-96}$$

Alors pour tout n il n'existe aucune solution quasi-périodique du modèle (5-1).

REMARQUE :

A l'aide du programme A.1, on peut calculer : $\frac{1}{M_n}, \frac{1}{M}$ *pour déterminer l'intervalle de paramètre* α *, où il n'existe pas des solutions quasi-périodiques.*

5-4- LA MISE EN OEUVRE NUMERIQUE

Nous utilisons les méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles pour obtenir des solutions approchées.

La méthode la plus sophistiquée est celle de Runge –Kutta d'ordre 4 (voir l'annexe. A.1), car elle minimise les erreurs d'arrondis.

L'équation (5-1) représente une équation différentielle autonome dans l'espace de phase de dimension 3 où les paramètres du système varient dans l'ensemble suivant:

$$E = \{(m_0, m_1, \omega, n, \alpha, \beta) \in R \times R \times W \times \mathbb{N} \times R \times R\} \qquad (5\text{-}97)$$

Où :

$$W = \{\omega \in R : \omega > 0\} \qquad (5\text{-}98)$$

Nous fixons une fois pour toute les valeurs de $\{m_0, m_1\}$ comme suit :

$$m_0 = -0.43, m_1 = 0.41$$

Pour ω on choisit les valeurs : ω=5 puis ω=1 .

Ce choix dépend de la nature physique du circuit.

Les valeurs de n sont comprises entre 1 et 10 et comme les paramètres de contrôles α et β sont positifs l'ensemble E se réduit à l'ensemble :

$$E_1 = \{m_0\} \times \{m_1\} \times \{1,5\} \times \{1,2,\ldots,10\} \times R_+ \times R_+ \qquad (5\text{-}99)$$

Et comme pour chaque système les valeurs de n, ω sont fixées posons :

$$E_2 = \{m_0\} \times \{m_1\} \times \{\omega\} \times \{n\} \times R_+ \times R_+ \qquad (5\text{-}100)$$

Il reste donc pour déterminer le comportement du système, le choix des paramètres de contrôle, et les données initiales dans l'ensemble suivant :

$$E_3 = R_+^{\,3} \times (R_+^{\,*})^2 \qquad (5\text{-}101)$$

Pour simplifier la recherche des valeurs des paramètres du contrôle qui nous donne certains résultats désirés comme les solutions chaotiques ,on fixe par exemple β ou α et on fait varier l'autre paramètre.

On sait que le choix des conditions initiales influence la vitesse de convergence de la solution vers un attracteur si la donnée initiale est très proche de l'attracteur alors la solution

converge rapidement vers cet attracteur, le contraire si la condition initiale est très éloigné de cet attracteur.

Si pour une certaine donnée initiale et certaines valeurs des paramètres de contrôle on trouve que la solution converge vers un certain «objet » alors il préférable de choisir la donnée initiale au voisinage de cette «objet » pour assurer la vitesse de convergence.

Par la projection sur les différents plans on peut déterminer la nature de chaque solution. Pour l'intégration des solutions chaotiques on sait que les solutions chaotiques sont caractérisées par la sensibilité aux conditions initiales.

Si on représente chaque composante de la solution obtenue dans le plan, et si les composantes ayant une nature continue, c'est à dire la trajectoire obtenue forme une bande large avec des oscillations différentes alors on peut conclure que la trajectoire est chaotique.

Notons que l'intégration d'un système chaotique est très sensible aux erreurs de calcul et de temps d'intégration, pour cela il est préférable de donner les valeurs calculées dans la partie qui concerne l'intégration dans le programme A.1

5-5 -RESULTATS NUMERIQUES

Nous avons utilisé la méthode de Runge –Kutta d'ordre 4 en Fortran où les solutions des systèmes sont calculées et les graphes de ces solutions sont dessinés en utilisant le logiciel Origin.

Dans cette partie numérique, nous fixons les paramètres m_0, m_1, ω ($m_0=-0.43, m_1=0.41, \omega=5$), puis $\omega = 1$ afin d'avoir un circuit de Chua avec des fonctions régulières données pour chaque intégration pour des valeurs des paramètres, et les valeurs de n.

Nous résumons dans les tableaux suivant les résultats numériques obtenus.

• cycle limite

Les solutions stables (cycles limites)sont obtenues pour les valeurs de $\{\alpha,\beta,\omega,n\}$ données par :

N	ω	β	α
1	5	14	$8.72 \rightarrow 9.700$
4	5	14	6.500
6	5	13	6.500
8	5	14	6.700
8	5	15	6.700
8	5	15	7.300
10	5	14	$6 \rightarrow 7.555$
10	5	15	6.500

Tableau -5-1-

(voir les figures à la fin de ce chapitre)

•Attracteurs étranges

Nous trouvons dans le modèle étudié, avec l'ensemble de non-linéarités, plus de 37 attracteurs chaotiques de type : « scroll », « Double –scroll », « p-simple-scrolls », « q-Double – scrolls » où $p \in \{1,2,3,5,7,...\}$ et $q \in \{2,3,4,5,...\}$

•simple-scroll

N	ω	β	α
1	1	19	8.123
1	1	19	8.333
1	1	19	8.393
1	5	14	9.850
2	5	13.5	7.000
3	5	13.5	8.750

3	5	16	8.462
4	5	14	6.700
4	5	14	8.714
5	5	14	7.000
6	5	14	7.010
7	5	13	7.320
8	5	14	7.100
8	5	13	7.500
9	5	12	6.400
9	5	13	6.500
10	5	15	7.500

Tableau -5-2-

- **Double-scroll**

N	ω	β	α
1	1	19	6.900
1	1	19	7.000
1	1	19	7.500
1	1	19	8.100
1	1	19	8.200
1	1	19	8.300
1	1	19	8.400
2	5	13.5	7.453
2	5	14	8.765
2	5	14	9.999
2	5	14	10.000
2	5	15	8.790
2	5	15	9.100
2	5	15	9.600
2	5	15	9.855
2	5	15	10.000
2	5	15	10.200
3	5	13.5	8.900

3	5	16	9.732
3	5	15	8.777
3	5	15	9.566
3	5	15	10.200
3	5	15	10.400
3	5	15	10.800
3	5	15	10.999
4	5	12.5	8.256
4	5	14	6.900
4	5	16	9.456
5	5	12	7.895
5	5	14	8.390
5	5	14	8.900
5	5	14	9.000
5	5	14	9.600
6	5	14	8.497
6	5	14.2	7.425
6	5	14.2	8.956
7	5	13	8.753
7	5	14.2	9.000
7	5	14.2	9.600
7	5	14.2	7.425
7	5	14.2	8.956
7	5	14.2	10.000
8	5	13	8.369
8	5	13	8.482
8	5	13	8.485
8	5	15	7.800
8	5	15	9.600
8	5	15	10.000
9	5	12	7.000
9	5	12	8.200
9	5	12	8.300

9	5	12	8.400
9	5	13	6.800
9	5	13	7.000
9	5	13	7.800
9	5	13	8.453
10	5	13	8.540
10	5	13	8.900
10	5	13	8.900
10	5	13.5	7.452
10	5	13.5	8.456

Tableau –5-3-

- **2-Double-scroll**

N	ω	β	α
1	5	14	8.878
1	1	19	8.954
1	1	19	9.959
1	5	14	9.870
9	5	13	9.322
9	5	13	9.323
9	5	13	9.328
10	5	13.5	9.460

Tableau –5-4-

- **5-scroll**

n	ω	β	α
1	5	14	8.879
1	5	14	9.885
1	5	14	9.900

Tableau –5-5-

- **3-Double-scroll**

- **9-scroll**

N	ω	β	α
1	5	14	9.880
1	5	14	9.881
1	5	14	9.882
1	5	14	9.883
1	5	14	9.895
1	5	14	9.889
1	5	14	9.891
1	5	14	9.912
1	5	14	9.9141
2	5	14	10.696

Tableau -5-9-

- **4-Double-scroll**

n	ω	β	α
1	1	19	12.000
1	5	14	9.885
1	5	14	9.886
1	5	14	9.898
1	5	14	9.902
1	5	14	9.903
10	5	14	10.060

Tableau -5-10-

- **11-scrolls**

n	ω	β	α
1	5	14	9.901
1	5	14	9.906
1	5	14	9.913

1	5	14	9.916
1	5	14	9.893

Tableau -5-11-

- **6-Double-scrolls**

n	w	β	α
1	5	14	9.890
1	5	14	9.905
1	5	14	9.911
1	5	14	9.917
1	5	14	9.989
1	5	14	10
5	5	14	10.555
10	5	14	10.04

Tableau -5-12-

- **13-scrolls**

n	w	β	α
1	5	14	9.899
1	5	14	9.904
1	5	14	9.907
1	5	14	9.908
1	5	14	9.918

Tableau -5-13-

- **7-Double-scrolls**

n	w	β	α
1	5	14	9.896
1	5	14	9.897
1	5	14	9.915
6	5	14.2	10.617

Tableau -5-14-

10	5	14	10.08

Tableau -5-18-

- 21-scrolls

N	w	β	α
2	5	15	10.587
6	5	14.2	9.999
6	5	14.2	10.953
8	5	15	10.500
9	5	12	9.000

Tableau -5-19-

- 11-Double-scrolls

N	w	β	α
2	5	15	10.555
9	5	12	9.200

Tableau -5-20-

- 23-scrolls

n	w	β	α
2	5	15	10.617
3	5	15	11.500
3	5	15	11.677
6	5	14.2	10.254
6	5	14.2	10.991

Tableau -5-21-

- 12-Double-scrolls

n	w	β	α

3	5	15	11.900
7	5	14.2	10.122
7	5	14.2	11
8	5	15	10.999

Tableau -5-22-

- 25-scrolls

n	w	β	α
4	5	13.5	10.589

Tableau -5-23-

- 13-Double-scrolls

N	w	β	α
6	5	14.2	10.984
10	5	14	10.300

Tableau -5-24-

- 27-scrolls

N	w	β	α
6	5	14.2	10.819
7	5	14.2	10.877
7	5	14.2	10.425

Tableau -5-25-

- 14-double-scrolls

N	w	β	α
10	5	14	10.200

Tableau -5-26-

- 14-double-scrolls

N	w	β	α
5	5	14	11.222
10	5	14	10.1

Tableau -5-27-

- 31-scrolls

N	w	β	α
6	5	14.2	11.222
10	5	14	10.100

Tableau. -5-28-

- 16-Double-scrolls

N	w	β	α
1	5	14	11.000
6	5	14.2	10.564

Tableau. -5-29-

- 18-Double-scrolls

N	w	β	α
5	5	14	10.899

Tableau -5-30-

- 39-simple-scrolls

N	w	β	α
8	5	15	12.000

Tableau -5-31-

- **21-double-scrolls**

N	w	β	α
10	5	14	10.400

Tableau -5-32-

- **Les grands multi-scroll**

n	ω	β	α
1	5	14	12
1	5	14	13
1	5	14	13.9
2	5	15	13.897
3	5	15	12.899
7	5	14.2	15-14.2

Tableau -5-33-

(Voir les figures a la fin de ce chapitre).

5-6- EXEMPLES SUR LES BIFURCATIONS GLOBALES DANS LE MODELE

PROPOSITION 5-6 :

Pour :

$N=1, \omega=5, \beta=14$ et α variant entre 8,720 et 14.000 on obtient le schéma suivant :

Une suite des cycles limite. $8.720 \rightarrow 9.700$

Un simple scroll pour $\alpha=9.850$

Un Double-scroll pour $\alpha=9.855$

Une suite des multi-scrolls pour $\alpha \in [9.870, 11]$

(Cette suite contient des attracteurs de type : 2-Double-scroll, 3-Double-scroll, 7-simple scroll,...,16-Double-scroll pour $\alpha = 11$ *).*

Pour $\alpha > 11$ *nous obtenant des attracteurs avec des grands nombres des scrolls, par exemple :* $\alpha = 12$, 13 , 13.9 , 14.

Pour $\alpha > 14$, *il existe des solutions infinies.*

PROPOSITION 5-7:

Pour :

$N=1$, $\beta=19, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour $\alpha=6.600$

Un scroll pour $\alpha=6.710$

Un Double-scroll pour $\alpha=6.900$

Un cycle limite pour $\alpha=9.666$

PROPOSITION 5-8:

Pour :

$N=2$, $\beta=14, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour. $\alpha=6.500$

Un scroll pour $\alpha=6.700$

Un Double-scroll pour $\alpha=7.453$

Ensuite une suite des multi-scroll.

PROPOSITION 5-9:

Pour :

$N=2$, $\beta=15, \omega=5$, *on a :*

Un Double-scroll pour $\alpha=8.700$

Un 4-Double-scroll pou $\alpha=10.400$

Un7-simple-scroll.pour $\alpha=10.401$

Un 4-Double-scroll. pou $\alpha=10.402$

Un 8-Double- scroll pou $\alpha=10.546$

Un 11-Double- scroll pou $\alpha=10.555$

Un21-simple-scroll.pour α=10.587

Un 10-Double-scroll pour α=10.599

Un 23-simple scroll. pour α=10.617

Un 14-simple scroll pour α=10.666

Un 9-simple scroll pour α=10.696

Un 8-Double-scroll. pour α=10.710

... ...

... ...

Un 18-Double-scroll. pour α=13.000

... ...

Un grand multi-scroll pour α=13.597

PROPOSITION 5-10:

Pour :

N=3, β=15,ω=5, *on a :*

Un scroll pour α=8.01

Un- Double-scroll pour α=8.777

Un 23-simple scroll pour α=11.500

Un 8-Double- scroll α=11.600

Un 23-simple scroll pour α=11.677

Un 14-simple scroll pour α=11.777

Un 12-Double- scroll pour α=11.900

Un grand multi-scroll pour α=12.899

PROPOSITION 5-11:

Pour :

N=4, β=12.5,ω=5, *on a :*

Un cycle limite pour α = 6.100

Un simple scroll pour α=7.600

Un Double- scroll pour α=8.256

Ensuite une suite des multi-scroll.

PROPOSITION 5-12:

pour :

N=4, $\beta=14, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour $\alpha=6.500$

Un simple scroll pour $\alpha = 6.700$

Un Double- scroll pour $\alpha = 6.900$

Ensuite une suite des multi-scroll.

PROPOSITION 5-13:

Pour :

N=5, $\beta=14, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour $\alpha=6.000$

Un simple-scroll pour $\alpha=7.000$

Un Double –scroll pour $\alpha=8.390$

Un 3-Double- scroll pour $\alpha=10.000$

Un 6-Double-scroll pour $\alpha=10.555$

Un 5-Double-scroll pour $\alpha=11.222$

……

Ensuite une suite des multi-scrolls.

PROPOSITION 5-14:

Pour :

N=6, $\beta=14, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour $\alpha=6.500$

Un simple-scroll pour $\alpha=7.010$

Un Double –scroll pour $\alpha=8.497$

Ensuite une suite des multi-scrolls.

PROPOSITION 5-15:

Pour :

N=7, $\beta=13, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour $\alpha=6.500$

Un simple-scroll pour $\alpha=7.320$

Un Double –scroll pour $\alpha=8.753$

Ensuite une suite des multi-scrolls.

PROPOSITION 5-16:

Pour :

N=8, $\beta=13, \omega=5$, *on a :*

Un Double –scroll pour $\alpha=8.369$

Une trajectoire périodique de période 3 pour $\alpha \in [8.462, 8.481]$

un Double –scroll pour $\alpha \in [8.482, 8.485]$

PROPOSITION 5-17:

Pour :

N=9, $\beta=13, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour $\alpha=6.200$

Un simple-scroll pour $\alpha=6.500$

Un Double –scroll pour $\alpha=6.800$

Un 2-Double –scroll pour $\alpha=9.322$

Ensuite une suite des multi-scrolls.

PROPOSITION 5-18:

Pour :

N=10, $\beta=15, \omega=5$, *on a :*

Un cycle limite pour $\alpha=6.500$

Un simple-scroll pour $\alpha=7.500$

Un Double –scroll pour α=8.000

Un 2-double –scroll pour α=9.322

Ensuite une suite des multi-scrolls.

5-6-DISCUTION DES RESULTATS NUMERUQUES

Avec cet ensemble de non-linéarités régulières de type série de Fourier, nous obtenons de nouveaux résultats concernant les multi-scroll, ainsi que des attracteurs chaotiques classiques comme les simples-scroll, et les Double-scroll.

Les bifurcations des points d'équilibres dépendent seulement du signe de q_n', la dérive de q_n au point d'équilibre, car on a toujours :

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \alpha\beta q_n' \text{ ,et } \alpha, \beta > 0$$

Le circuit avec cet ensemble de non-linéarités a un régime chaotique, ce régime est caractériser par les bifurcations globales du flot comme suit :

Un point d'équilibre → un cycle limite → un attracteur spiroïdale → un Double scroll → une série des p-simple-scrolls, et q-Double-scrolls.

Pour toutes les non-linéarités considérés pour certain rang des paramètres.

Notons que ces suites de bifurcations ne contient pas un multi-scroll avant l'apparition d'un scroll, ou d'un Double-scroll. Il semble que le nombre de scrolls croit dans la direction de la croissance de α quand β est fixé.

Ce phénomène semble s'arrête quand la valeur de α proche de la valeur de β, où on obtient des solutions infinies car le programme ne peut plus calculer les trajectoires correspondantes.

Pour les grandes valeurs de β (β = 25,26,...) on observe que le système converge vers des solutions périodiques pour les valeurs de $\alpha \leq \beta$.

Nos modèles sont chaotiques car entre deux valeurs de α très proches on observe différents attracteurs chaotiques, quand la valeur de β est inclue dans le domaine du chaos des systèmes étudiés.

La comparaison de notre systèmes avec le système original montre une différence entre eux, car les premiers admettent différents attracteurs étranges avec des multi- scrolls, et le deuxième admet seulement des attracteurs avec au plus 2-scrolls.

Un Double –scroll «entoure » seulement les trois points d'équilibres, du système originale, mais les multi -scrolls "entourent" un nombre considérable de points d'équilibres selon les valeurs des paramètres de contrôle.

D'autres comparaisons confirment que notre système garde la nature chaotique .

Notons que dans le circuit original, le nombre de segments de la fonction caractéristique peut être évaluer pour obtenir des attracteurs chaotiques avec des multi-scroll.

Ainsi nous remplaçons la fonction h, par des fonctions de la forme:

$$\frac{\omega}{\pi}\sum_{i=1}^{i=n} ib_i \cos\left(\frac{i\pi x}{\omega}\right), n = 1,2,\ldots,10$$

et nous obtenons les même résultats décrit ci-dessus, mais il faut noter que le domaine de persistance des simples scrolls est grand par rapport à celui où nous remplaçons h par les fonctions q_n.

Au contraire le domaine de persistance des Doubles-scrolls avec ces derniers est grand par rapport à celui des premiers.

Il semble que pour les valeurs de $\beta \in [10,19]$, le régime des modèle peut être divisé en 7 sous intervalles selon les valeurs de α ,comme suit:

$I_1 = \left]0, \frac{1}{M_n}\right[$: le domaine où il n'existe aucune solution quasi-périodique.

I_2 : Caractérisé par des solutions qui convergent où divergent pour un point d'équilibre.

I_3 :Le domaine des solutions périodiques.

I_4 : Le domaine des simples scrolls.

I_5 : Le domaine des Doubles - scrolls.

I_6 : Le domaine des multi - scrolls.

I_7 : Caractériser par des solutions qui convergent où divergent pour un point d'équilibres.

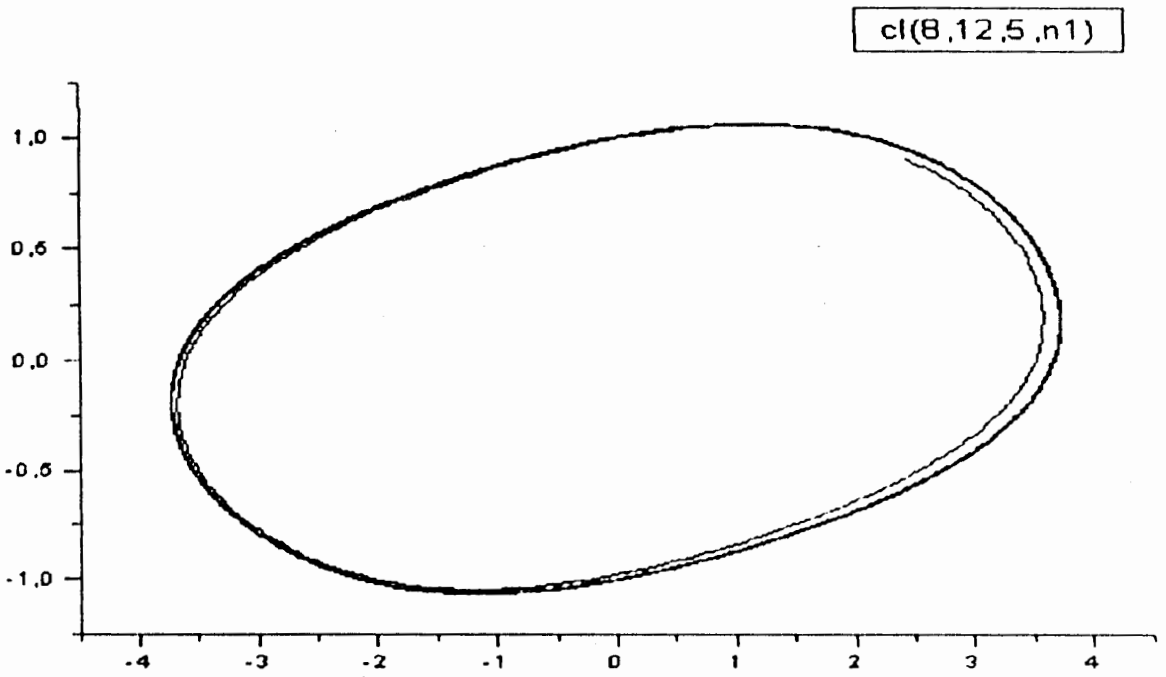


Fig.5-1 un cycle limite.

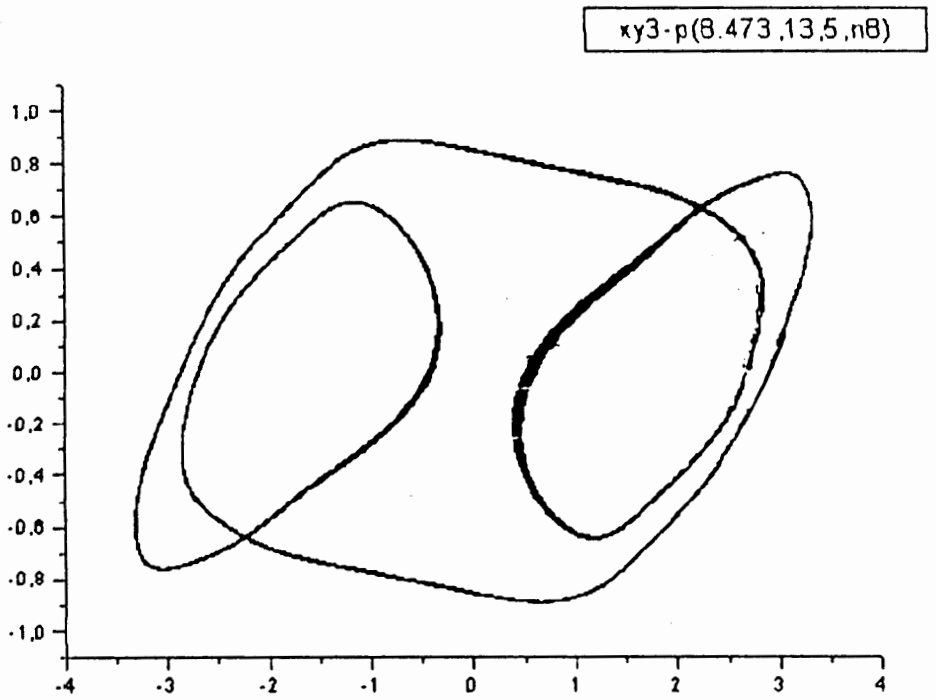


Fig.5-2 une trajectoire périodique de période 3.

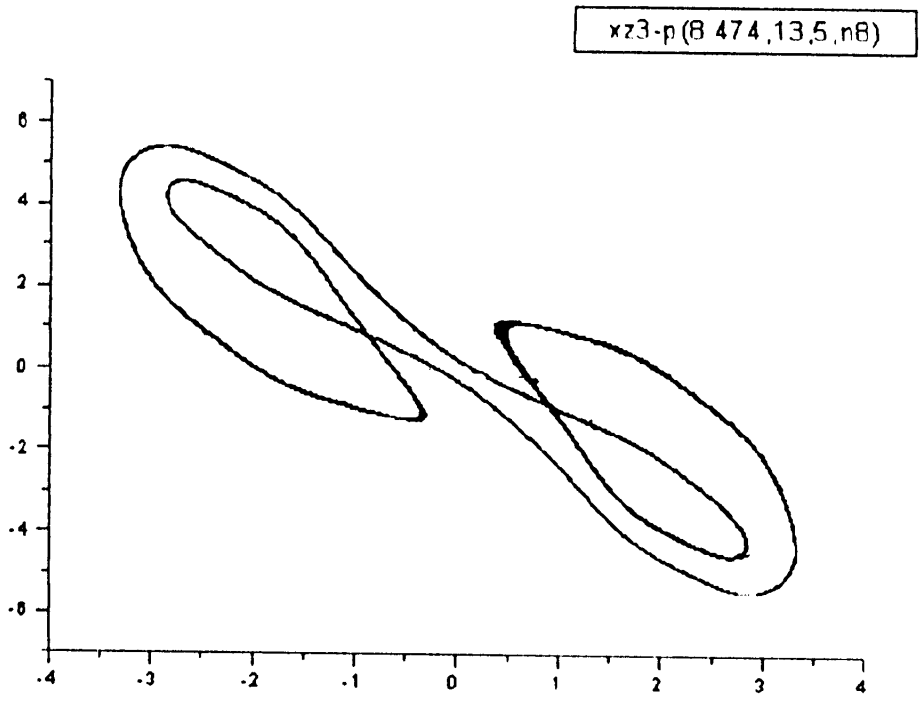


Fig.5-3 une trajectoire périodique de période 3.

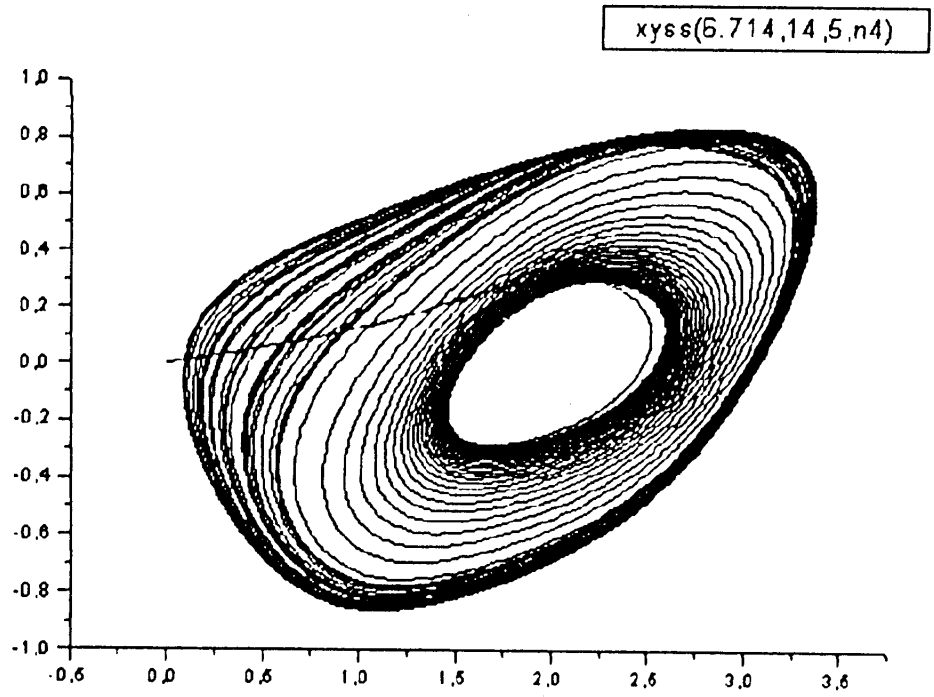


Fig.5-4 un scroll.

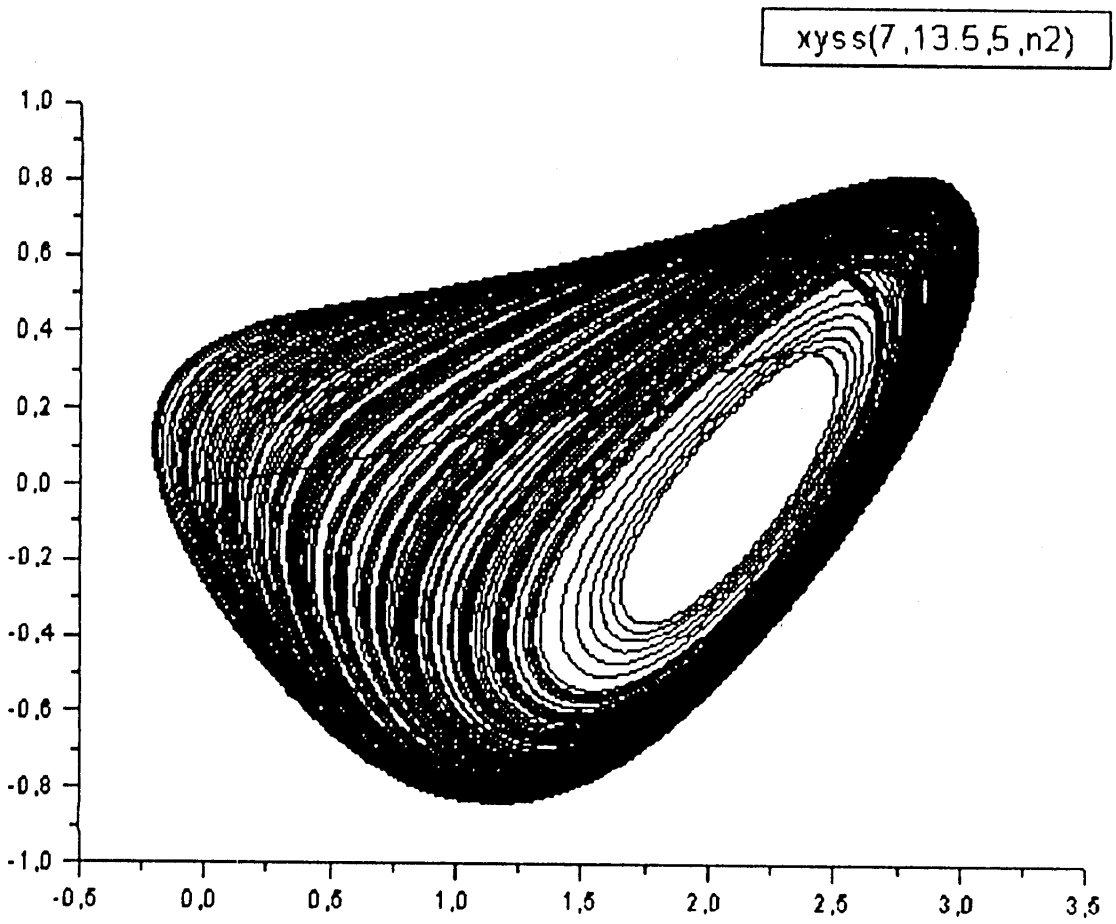


Fig.5-5 un scroll.

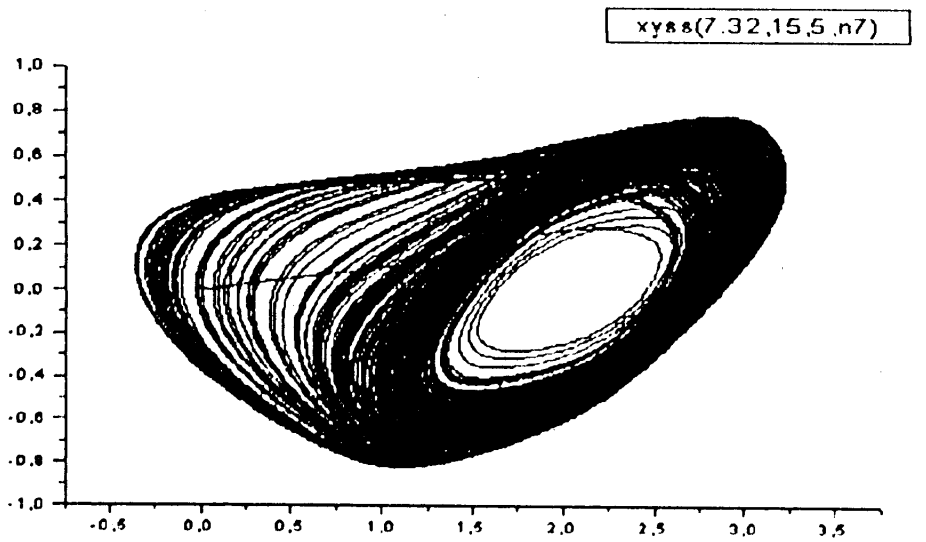


Fig.5-6 un scroll.

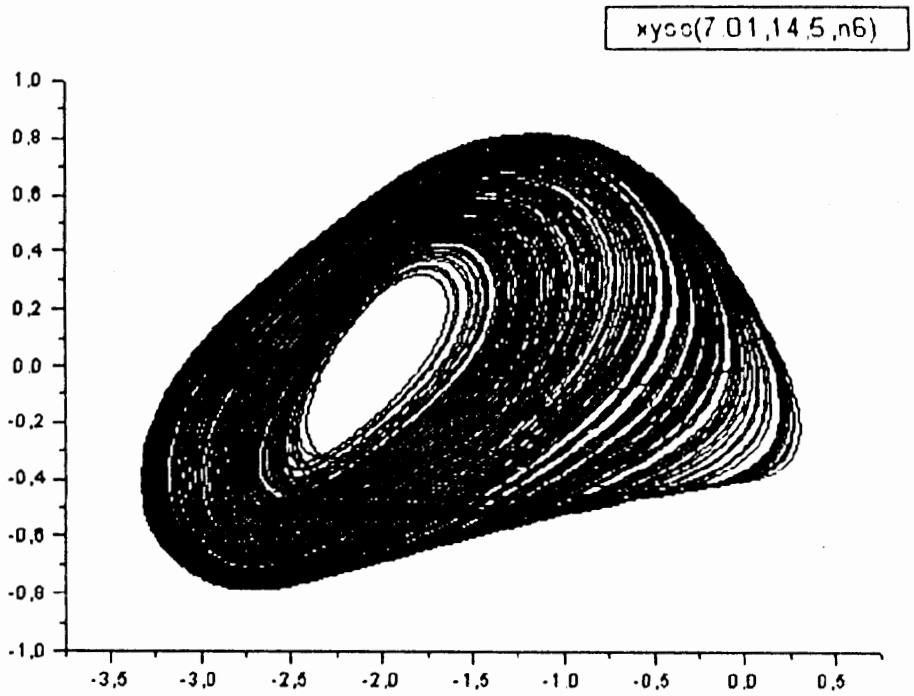


Fig.5-7 un scroll.

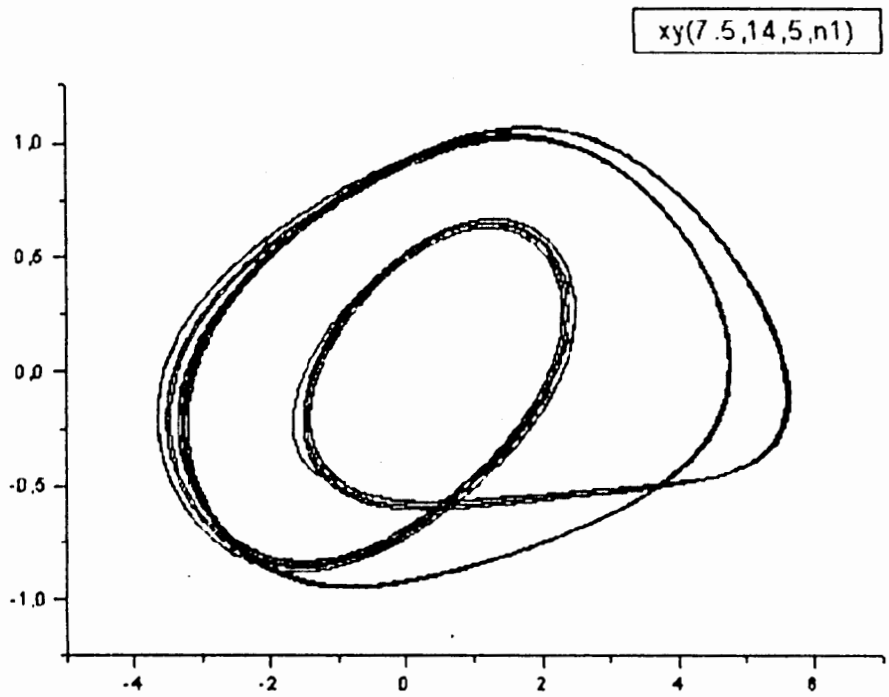


Fig.5-8 un scroll.

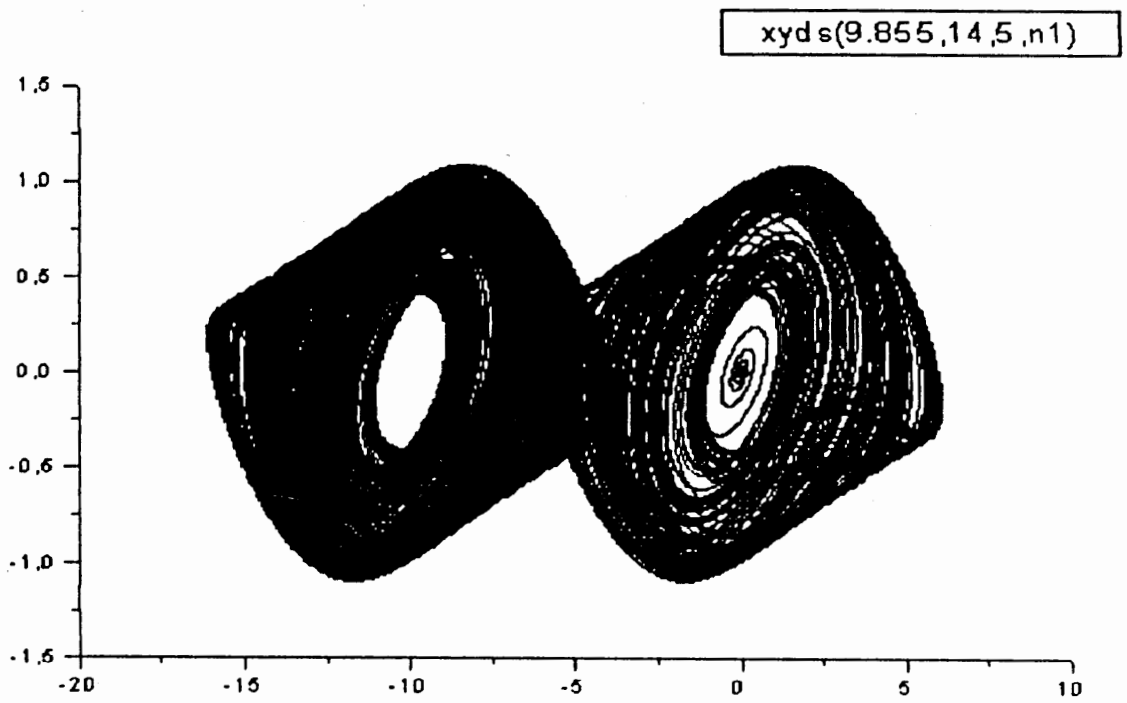


Fig.5-9 un Double-scroll.

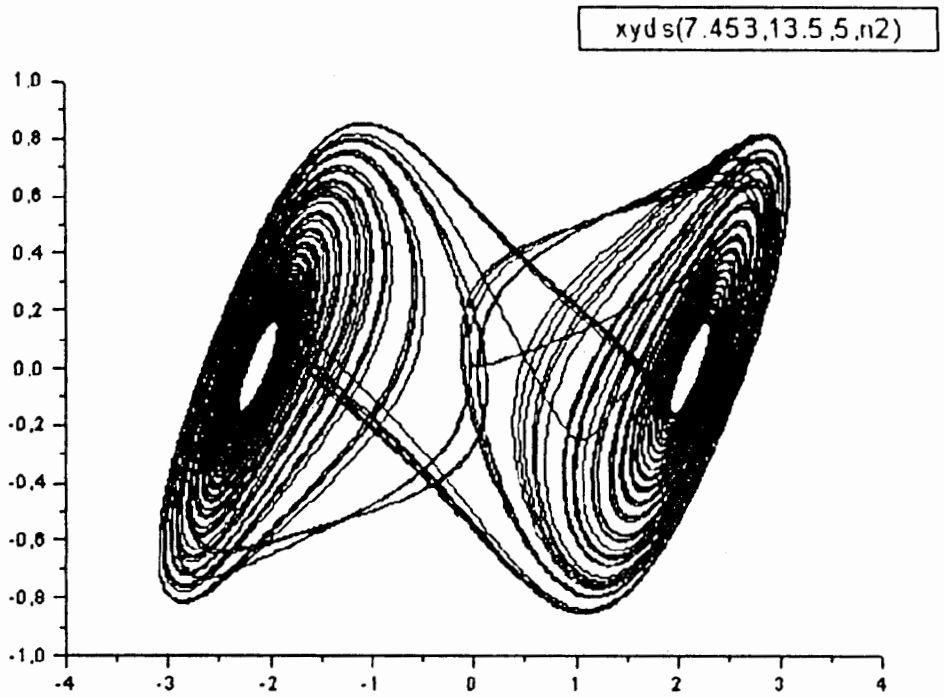


Fig.5-10 un Double-scroll.

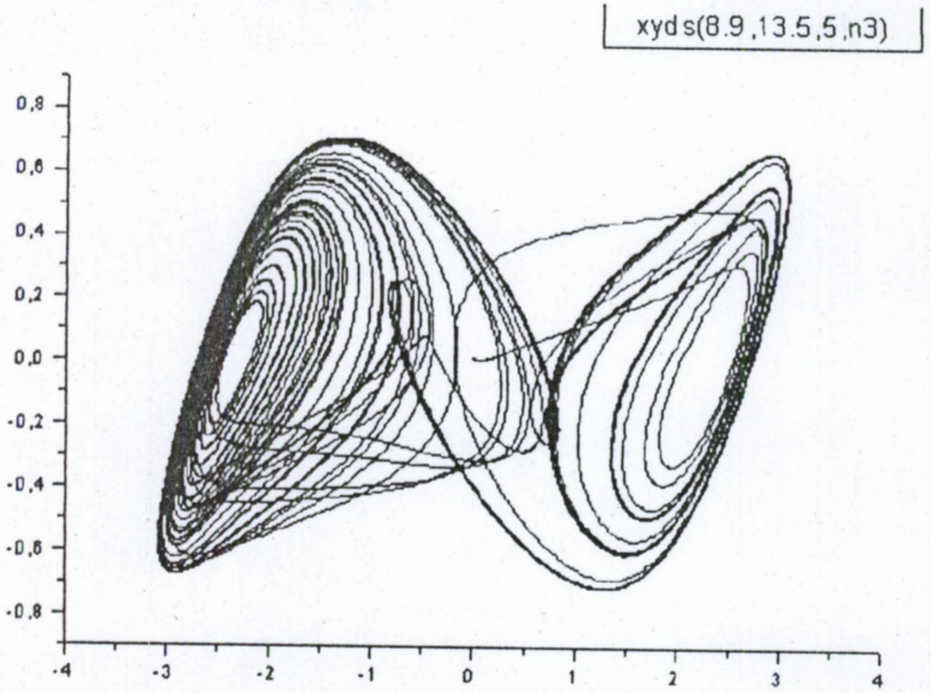


Fig.5-11 un Double-scroll.

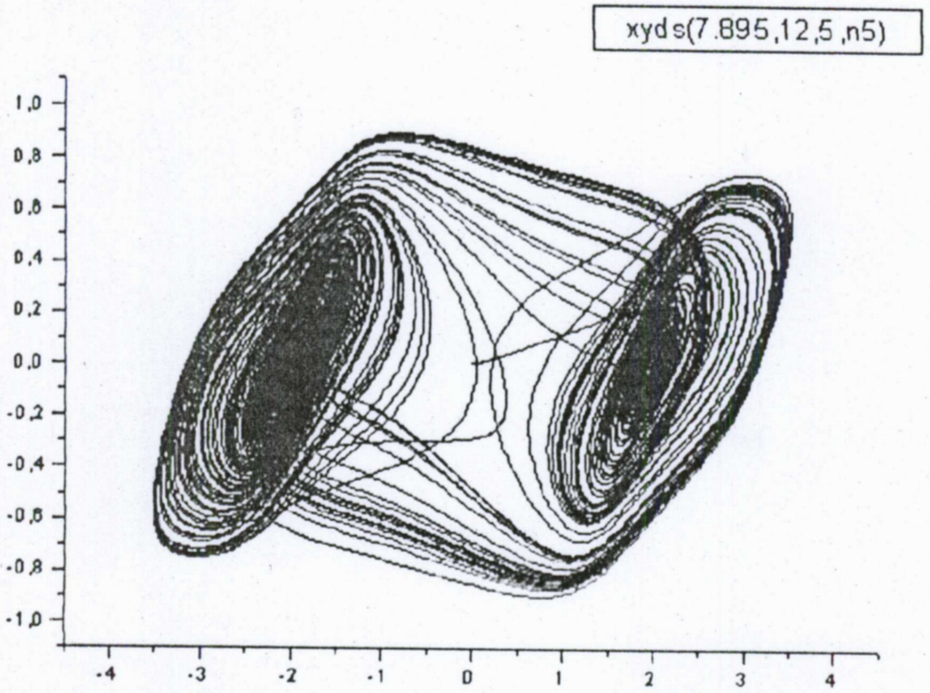


Fig.5-12 un Double-scroll.

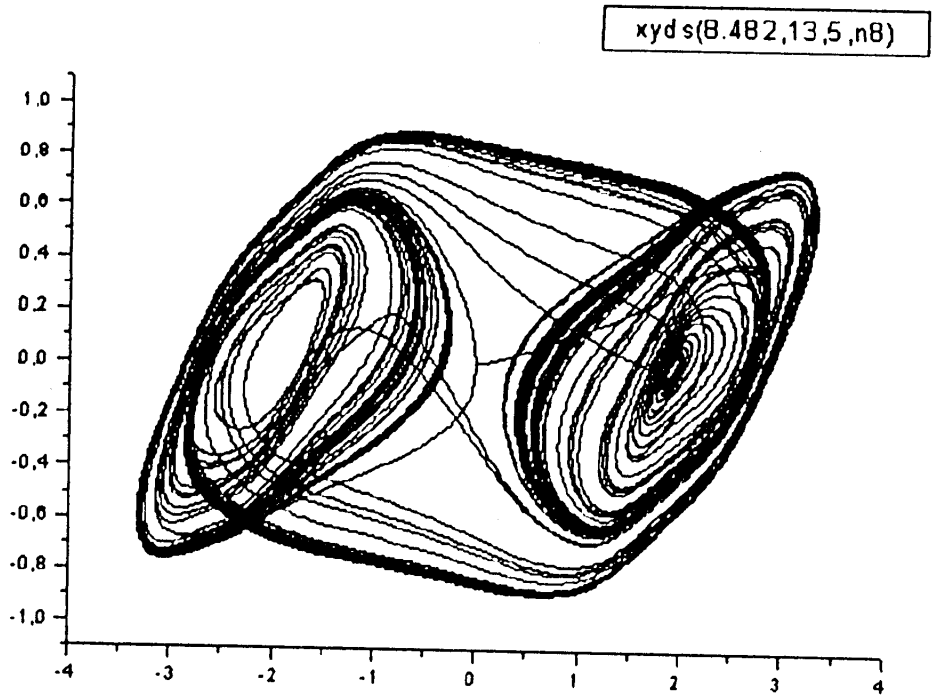


Fig.5-13 un Double-scroll.

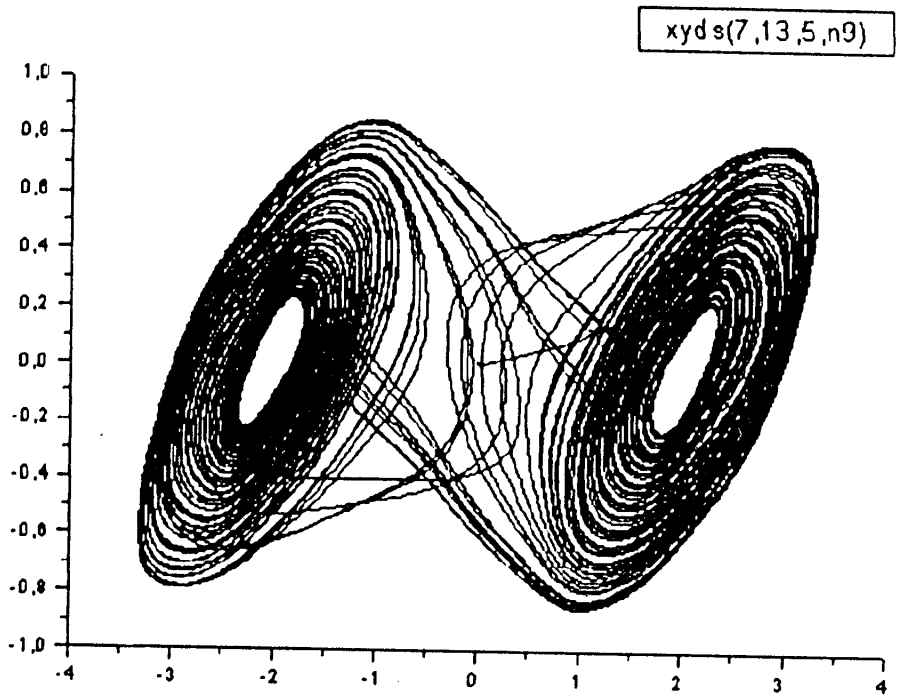


Fig.5-14 un Double-scroll.

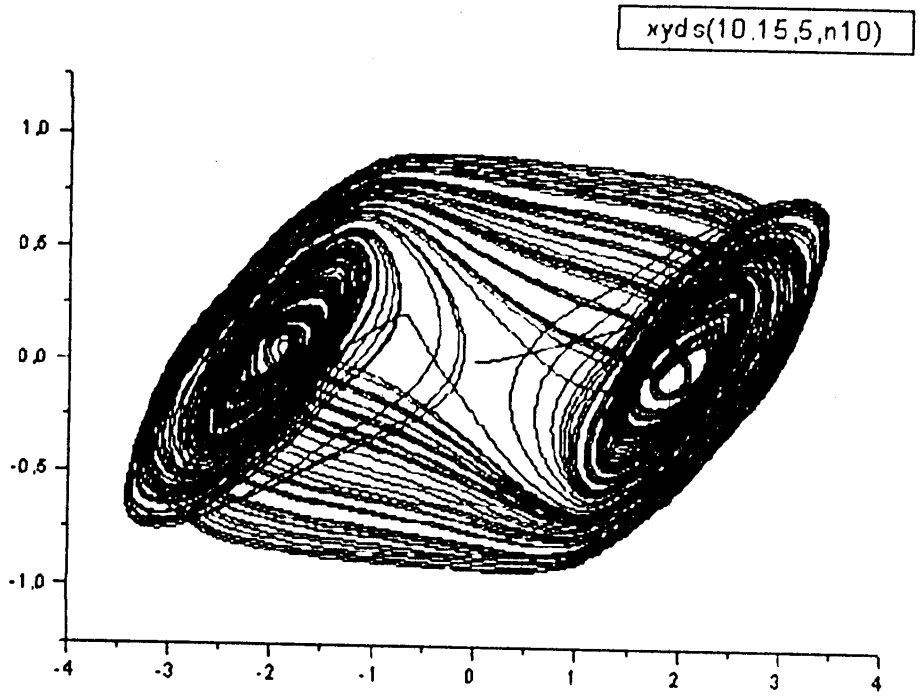


Fig.5-15 un Double-scroll.

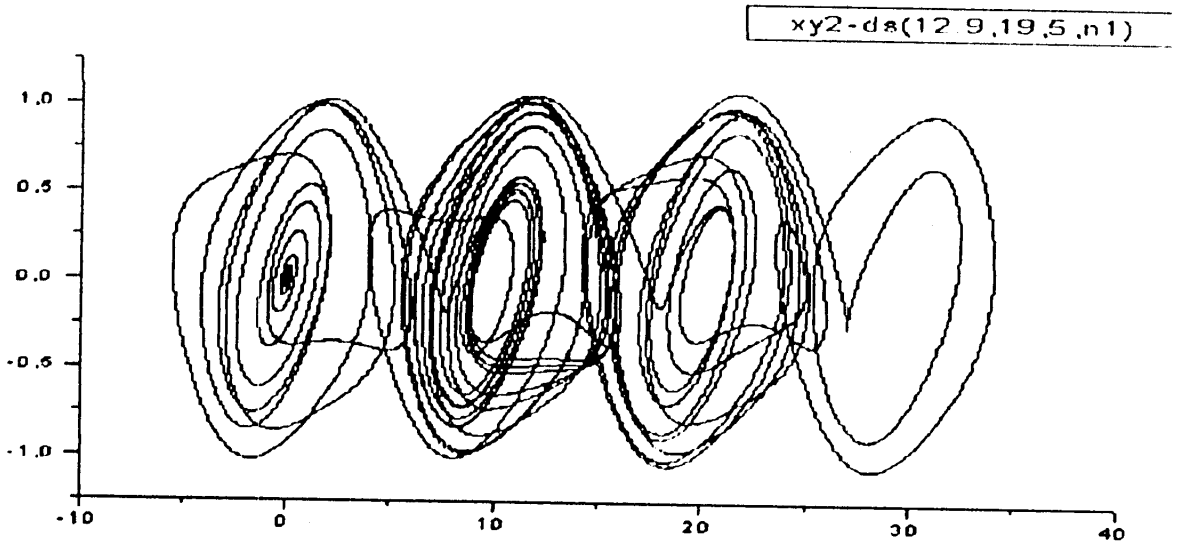


Fig.5-16 un 2-Double-scroll.

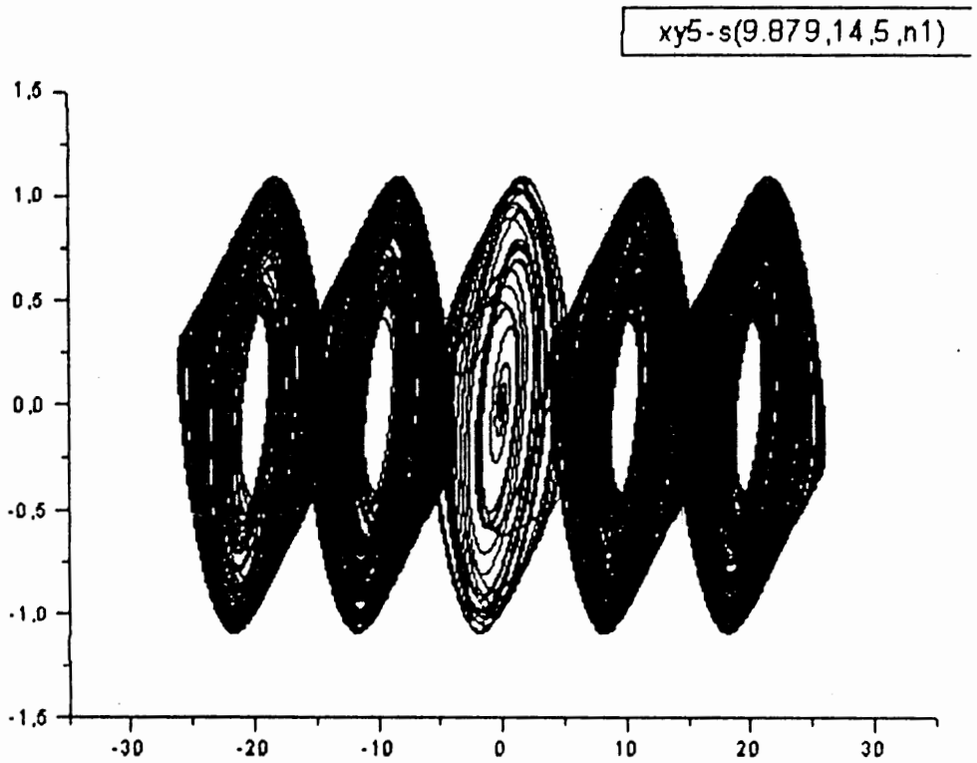


Fig.5-17 un 5-scroll ·

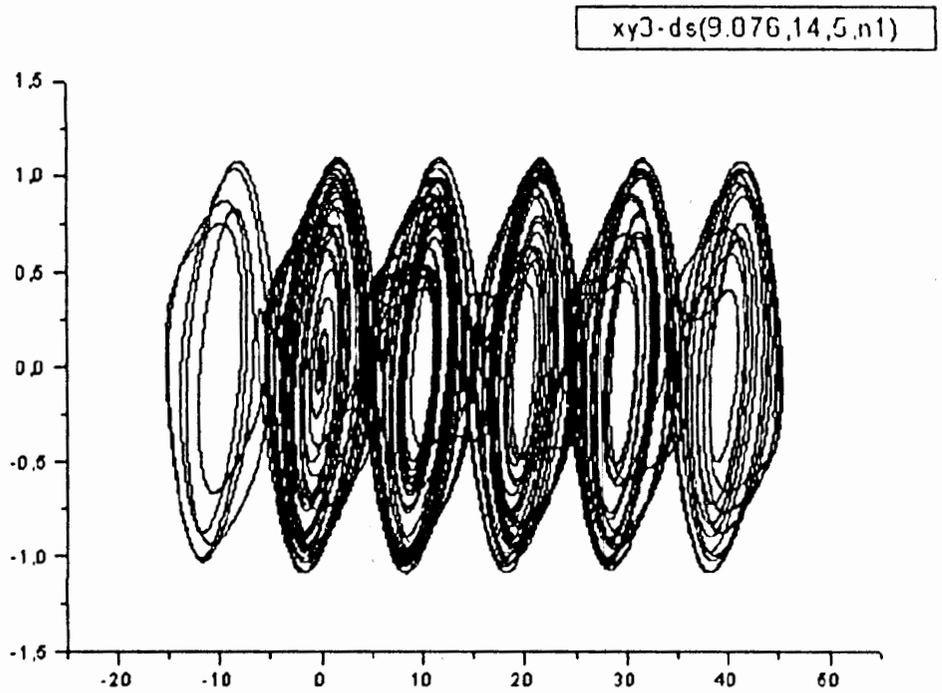


Fig.5-18 un 3-Double-scroll ·

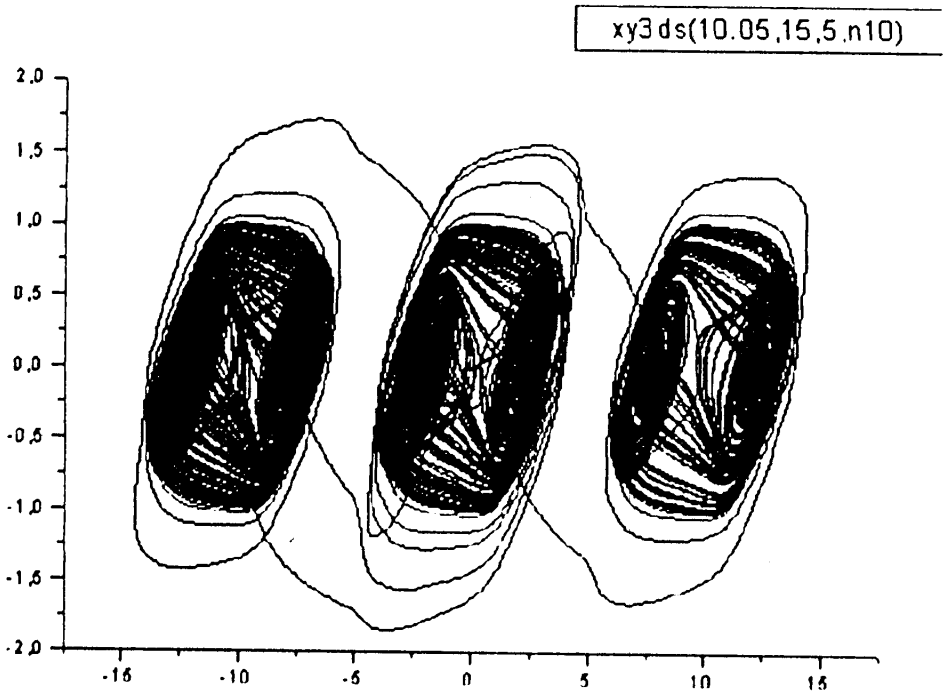


Fig.5-19 un 3-Double-scroll.

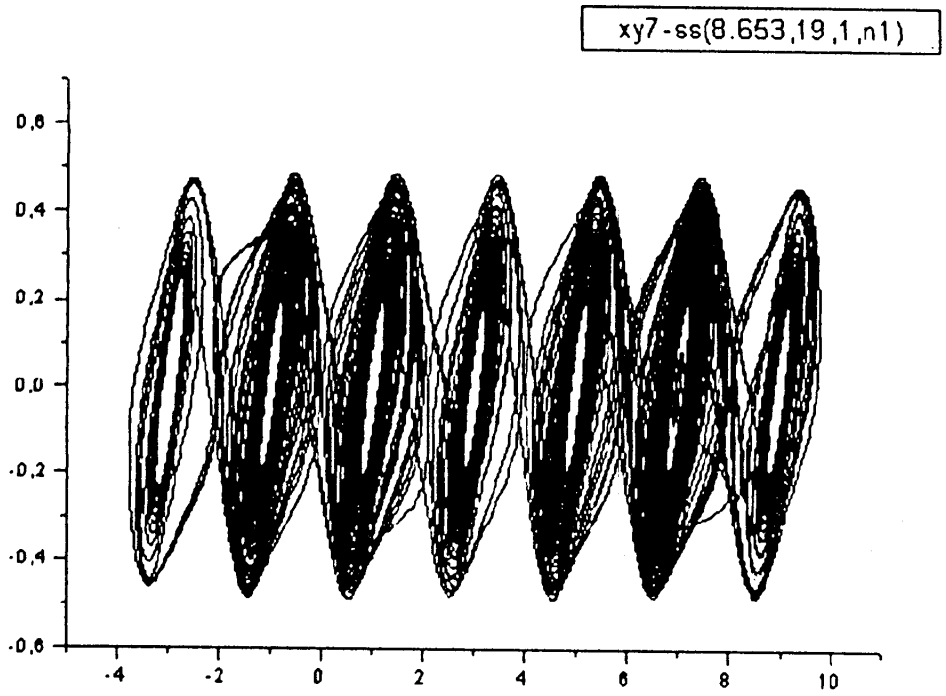


Fig.5-20 un 7-scroll.

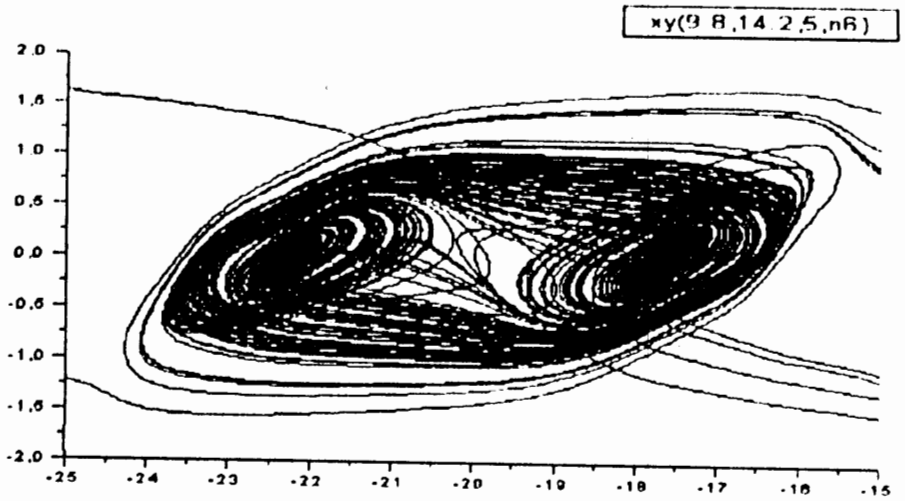


Fig.5-21 un Double-scroll.

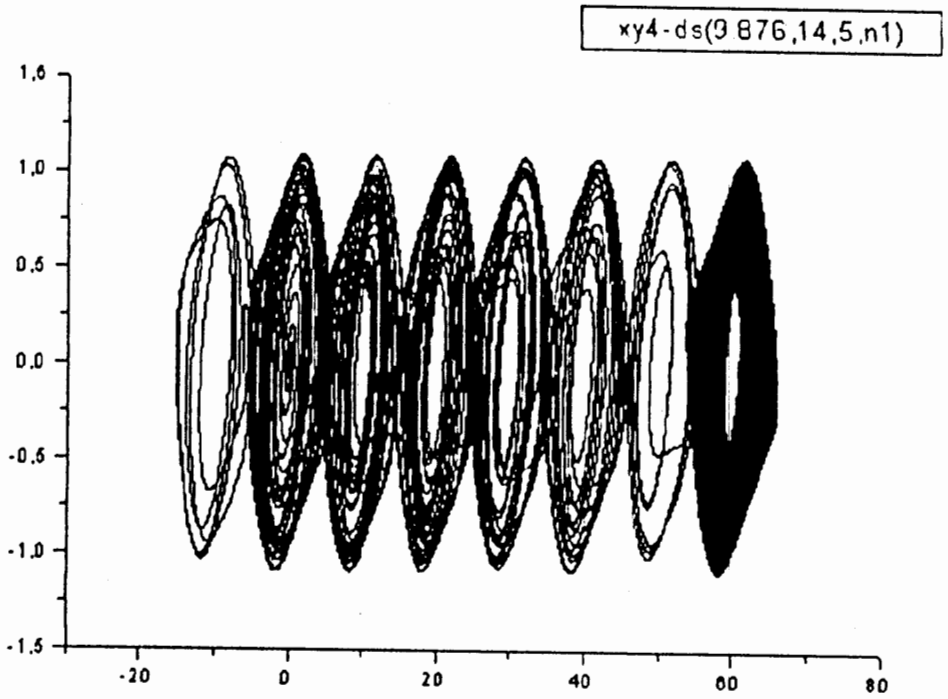


Fig.5-22 un 4-Double-scroll.

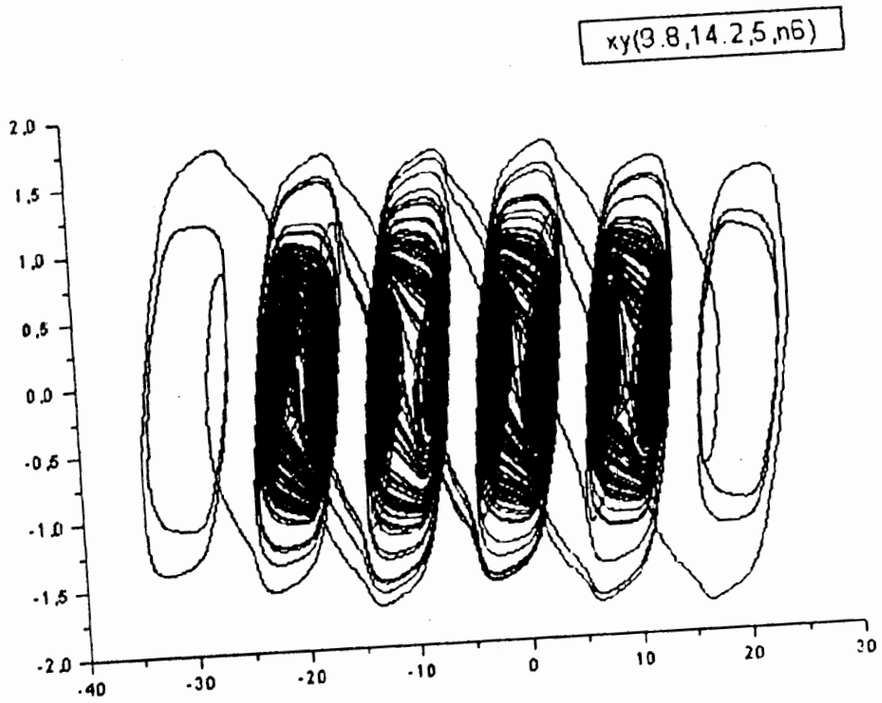


Fig.5-23 un 4-Double-scroll.

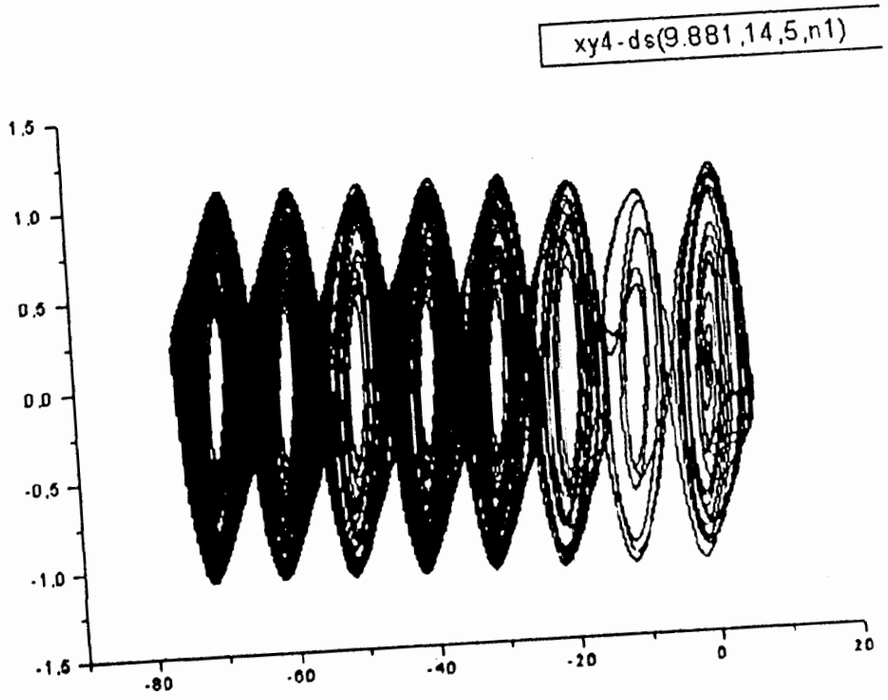


Fig.5-24 un 4-Double-scroll.

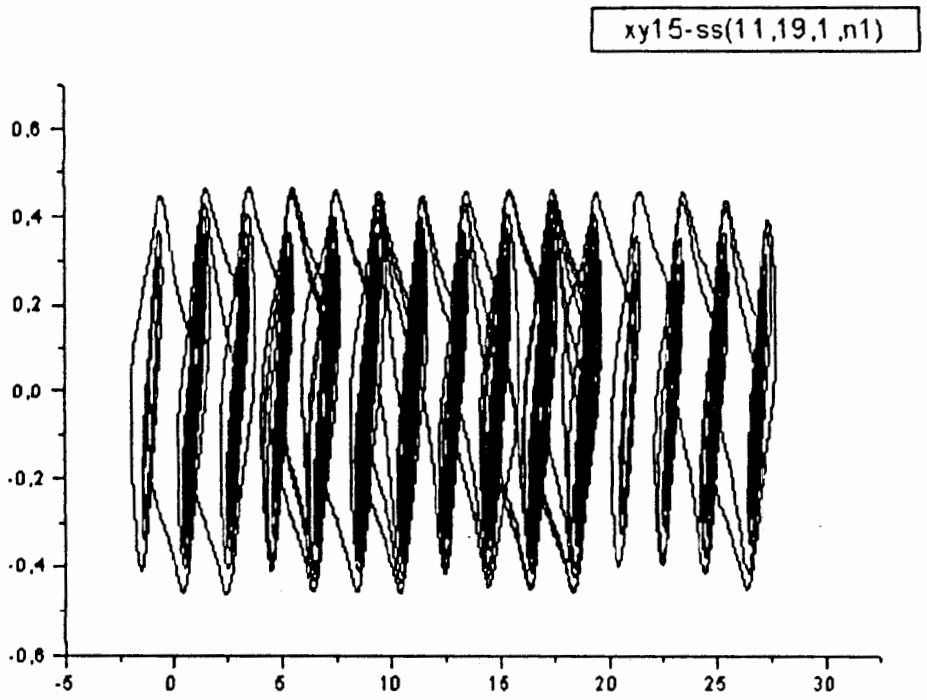


Fig.5-25 un 15-scroll .

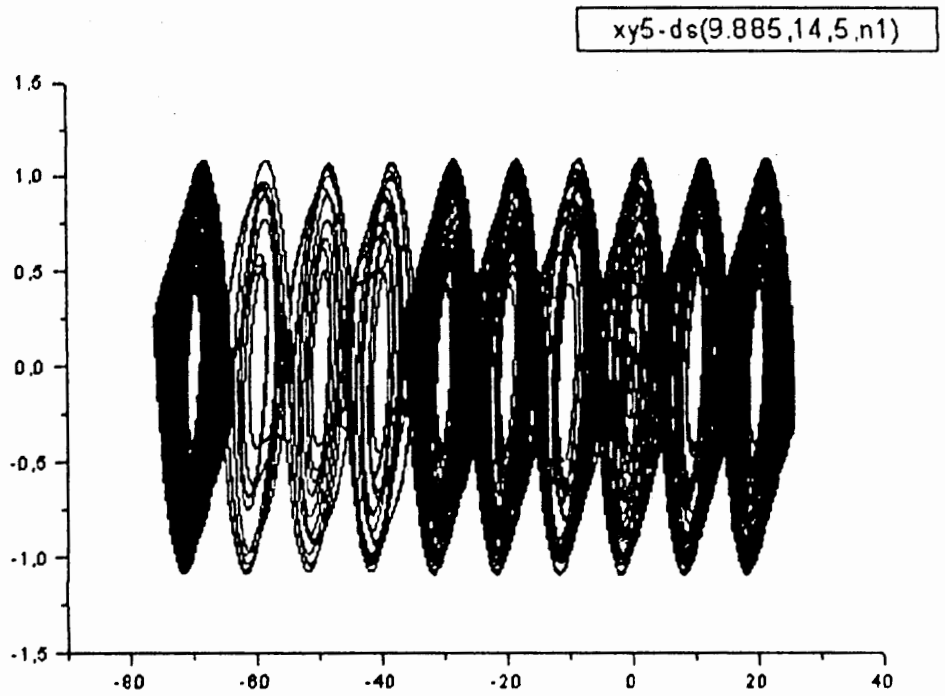


Fig.5-26 un 5-Double-scroll .

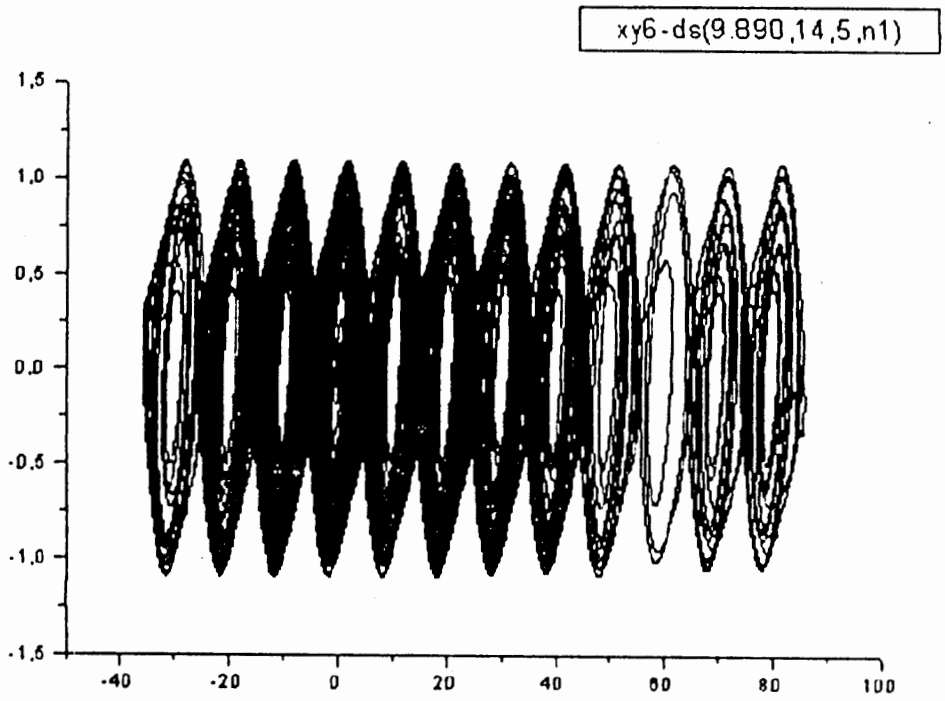


Fig.5-27 un 6-Double-scroll.

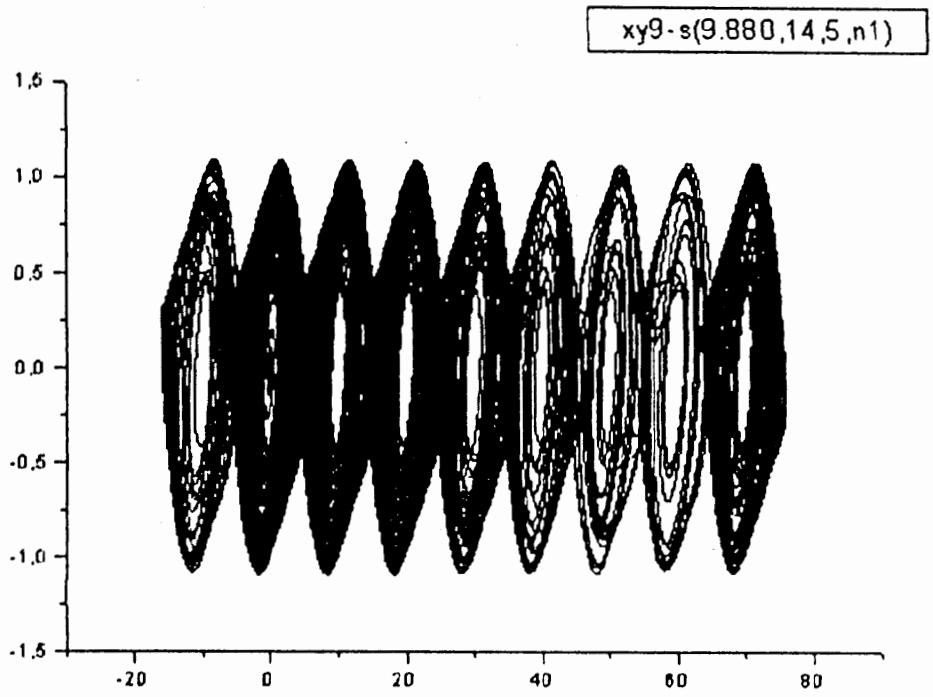


Fig.5-28 un 9-scroll.

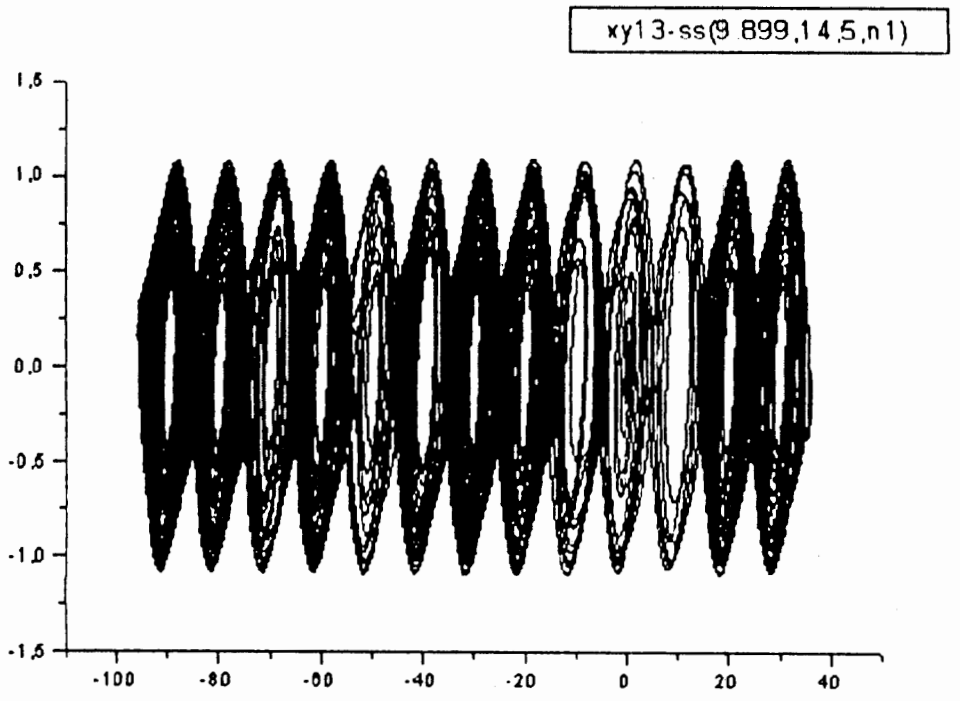


Fig.5-29 un 13-scroll .

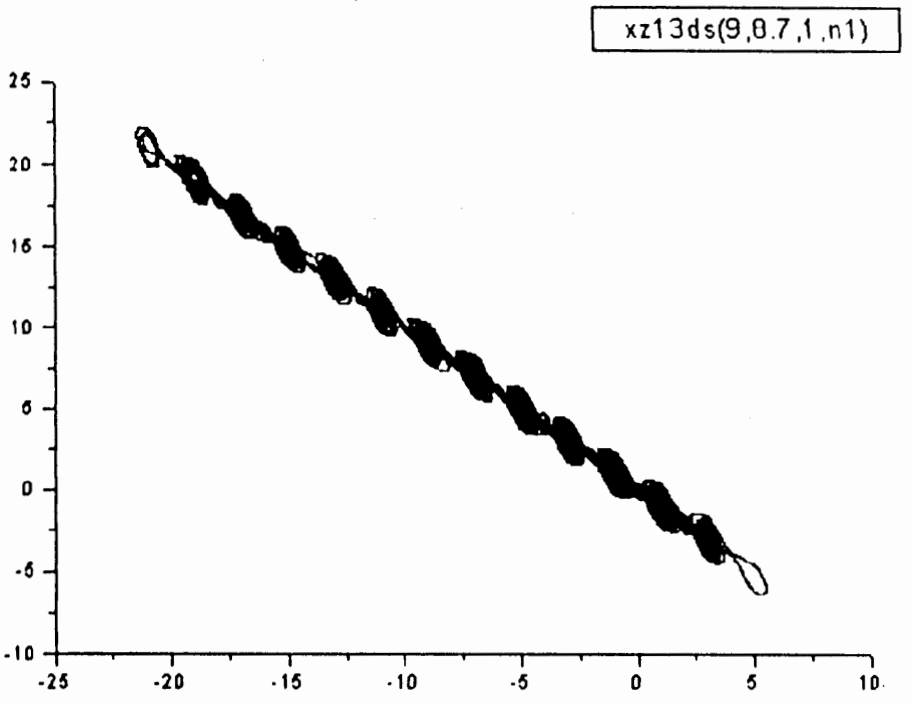


Fig.5-30 un 13-Double-scroll .

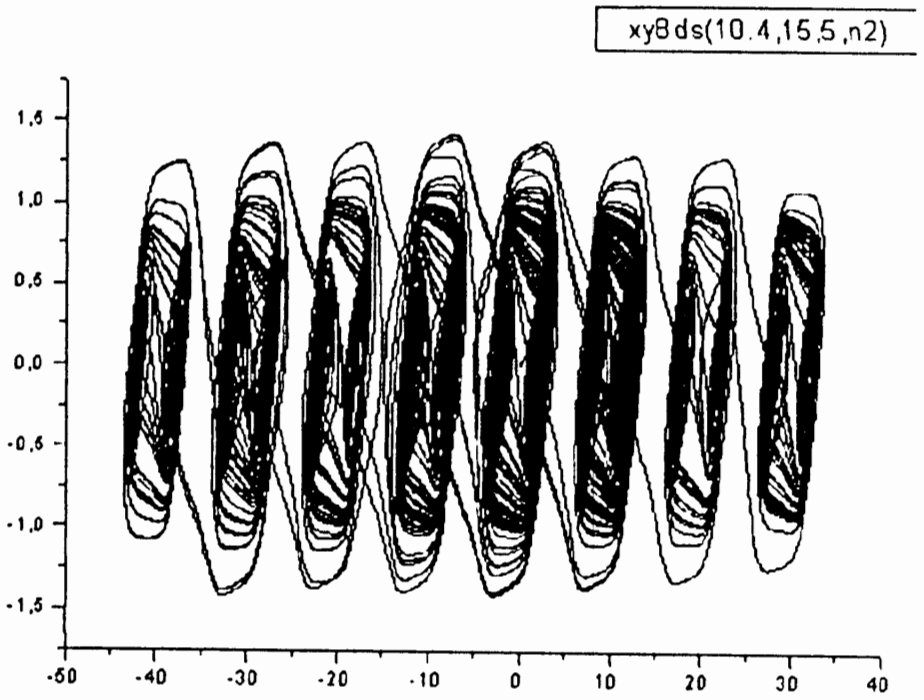


Fig.5-31 un 8-Double-scroll .

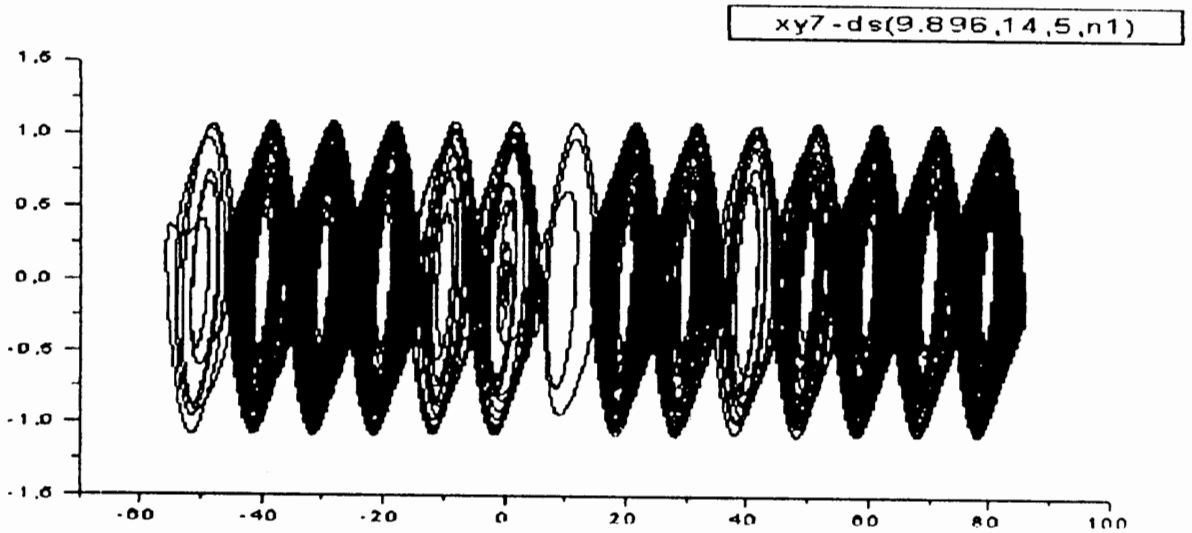


Fig.5-32 un 7-Double-scroll .

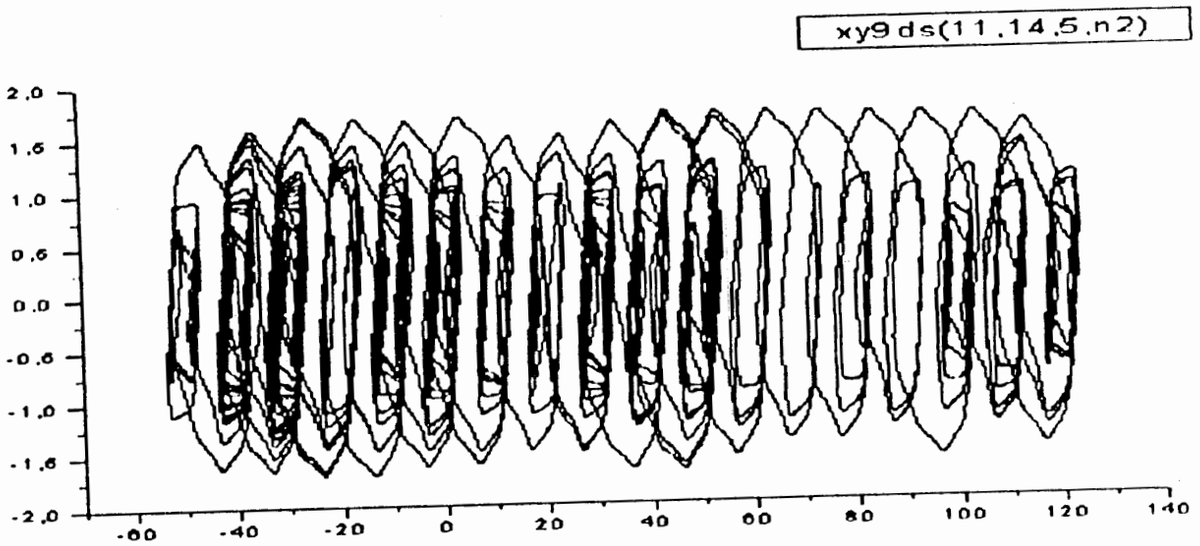


Fig.5-33 un 9-Double-scroll .

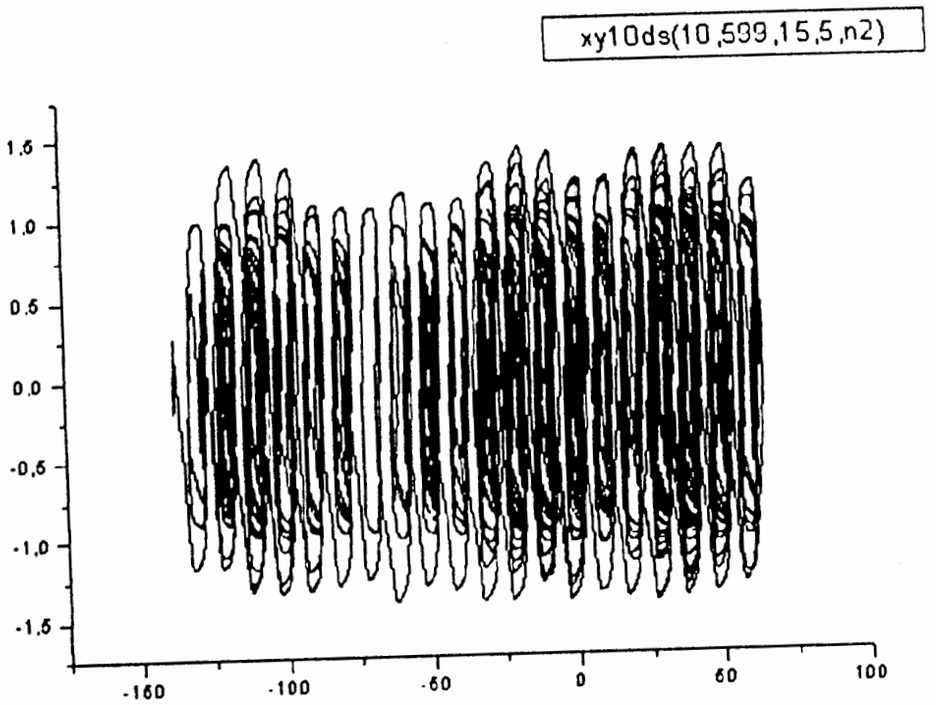


Fig.5-34 un 10-Double-scroll .

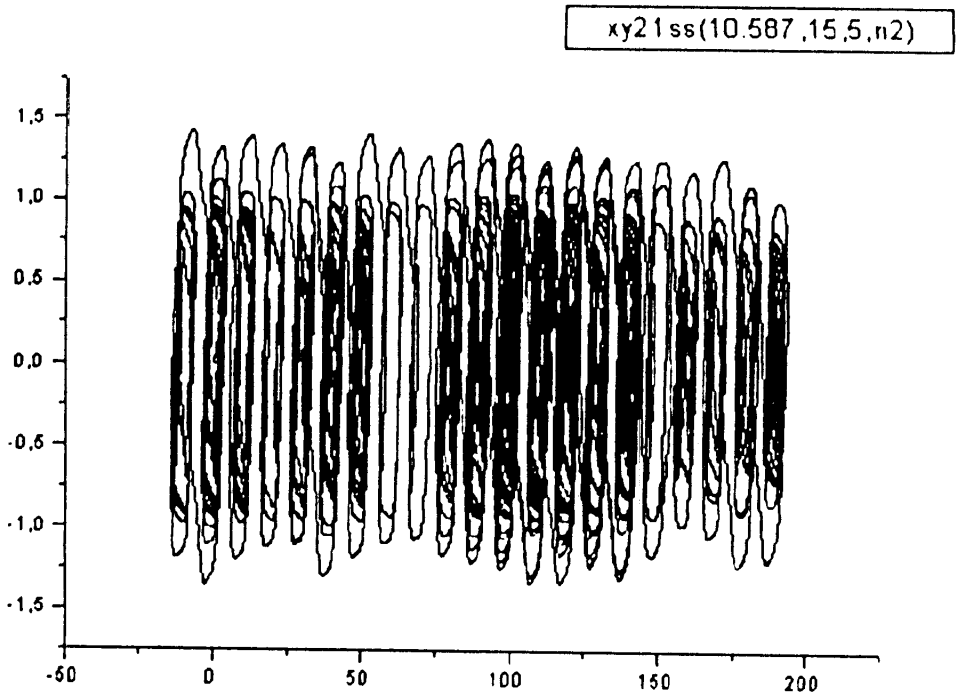


Fig.35-5 un 21-scroll.

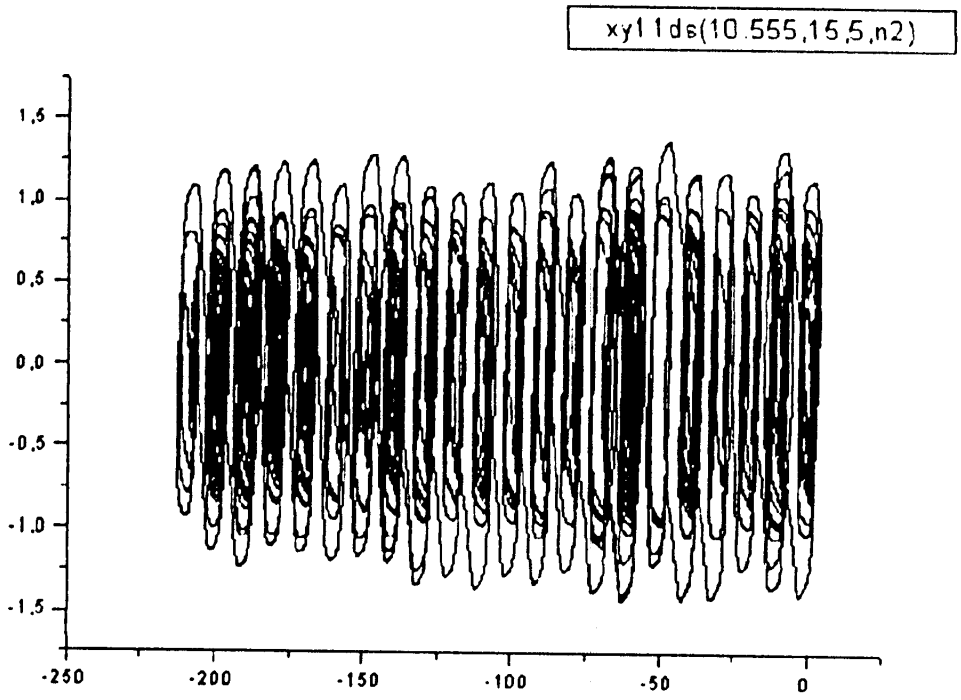


Fig.5-36 un 11-Double-scroll.

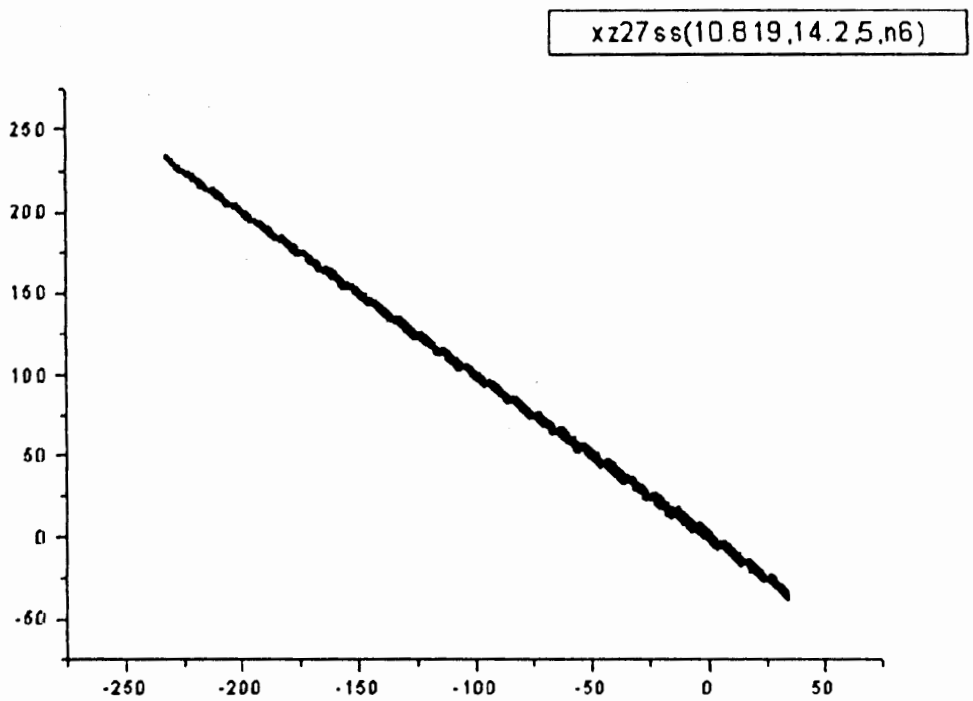


Fig.5-37 un 27-scroll.

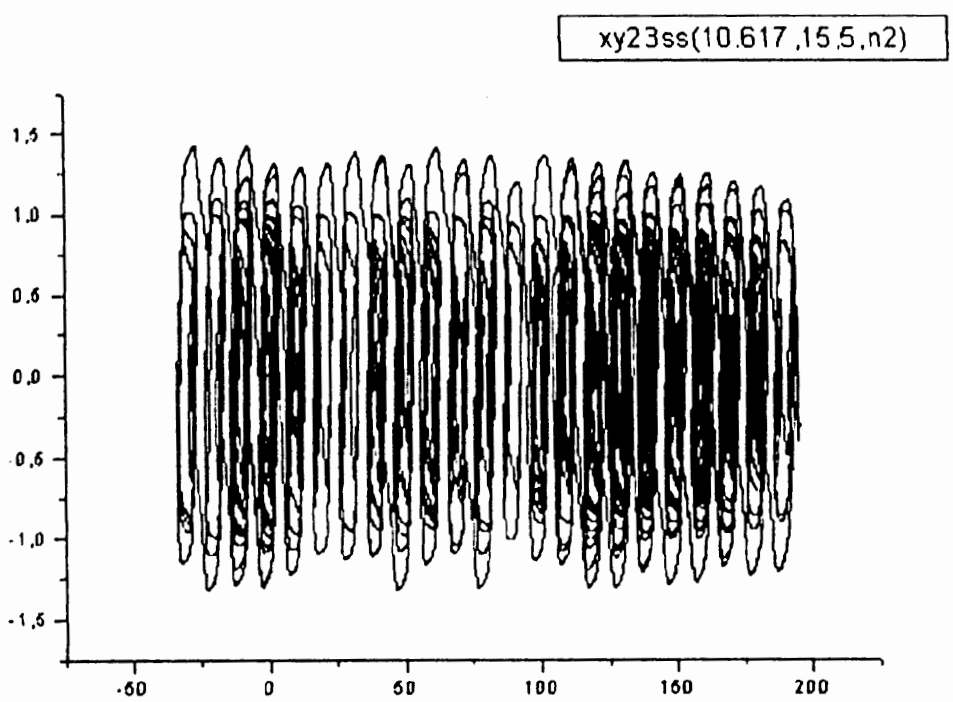


Fig.5-38 un 23-scroll.

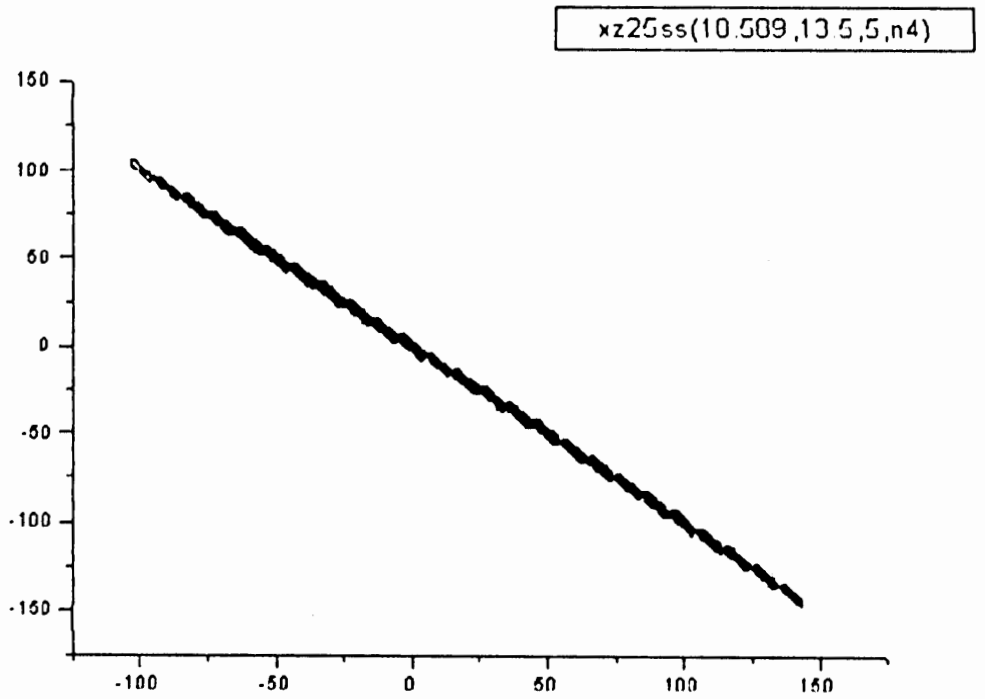


Fig.5-39 un 25-scroll .

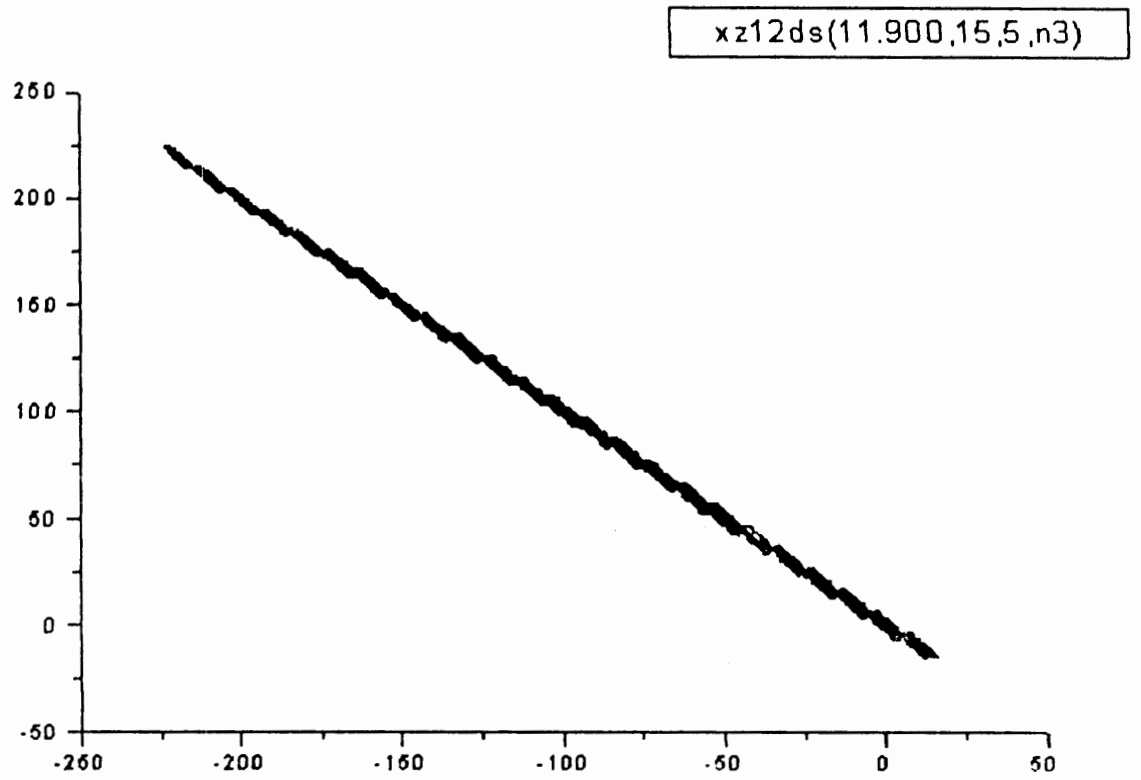


Fig.5-40 un 12-Double-scroll .

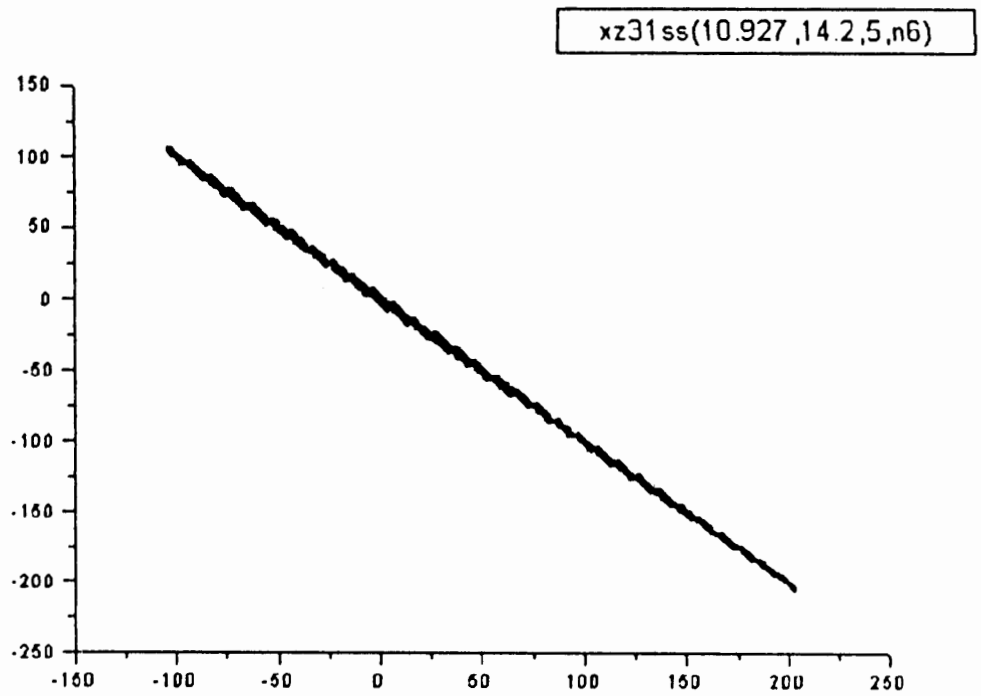


Fig.5-41 un 31-scroll .

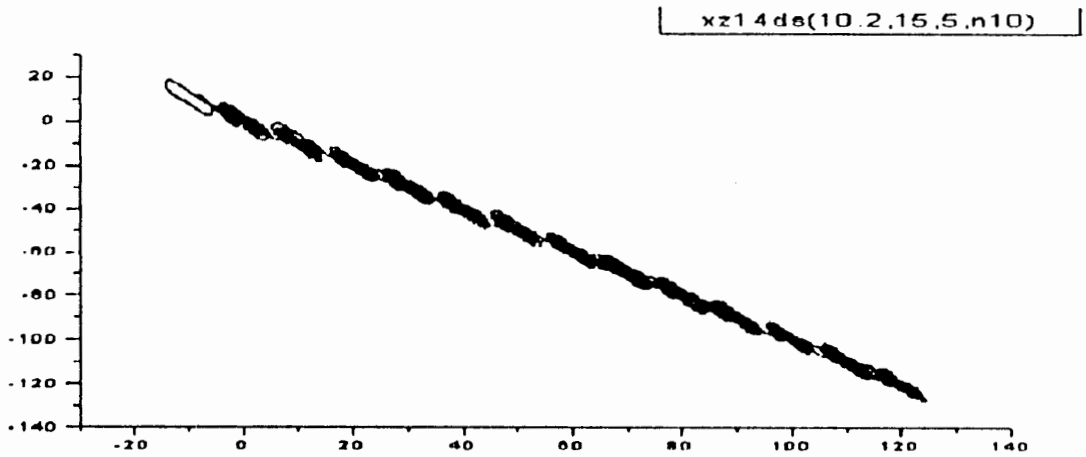


Fig.5-42 un 14-Double-scroll .

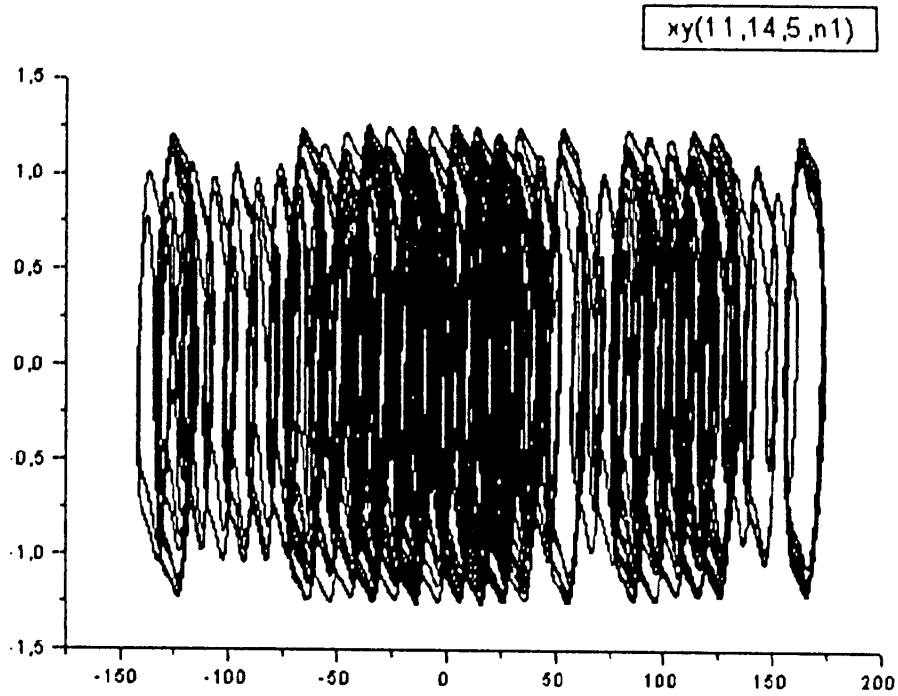


Fig.5-43 un grand multi-scroll .

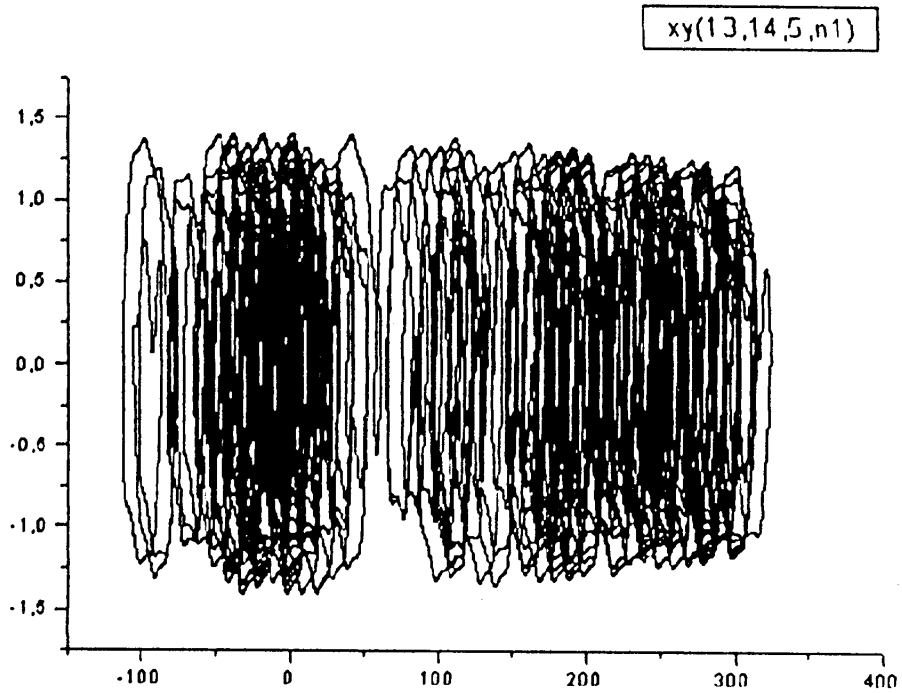


Fig.5-44 un grand multi-scroll .

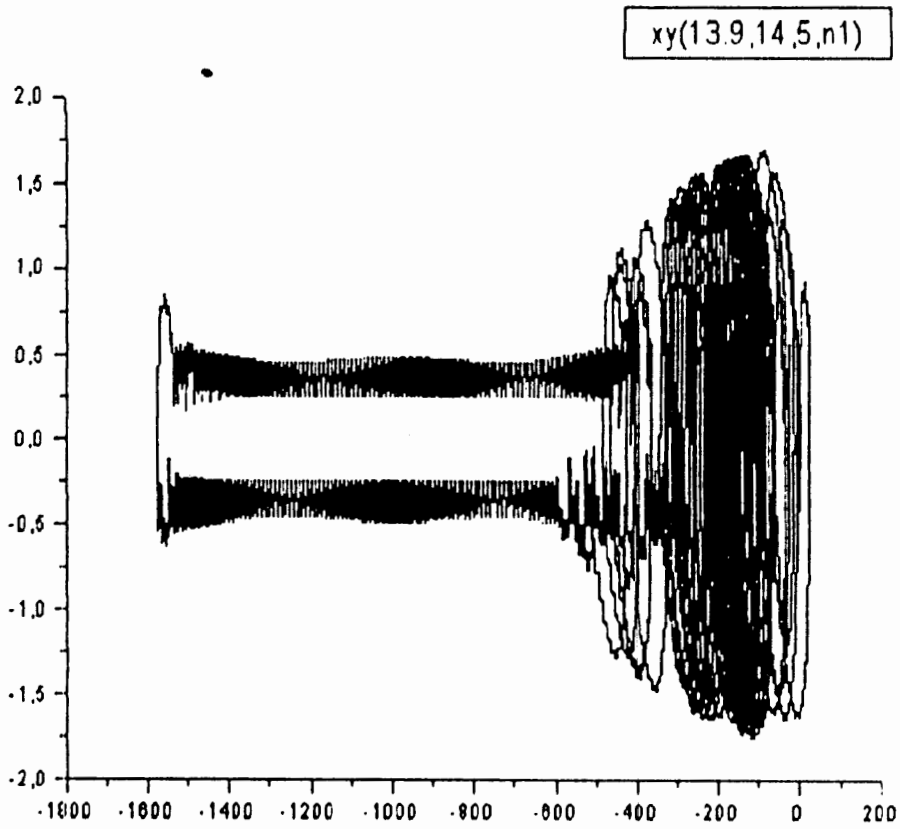


Fig.5-45 un grand multi-scroll.

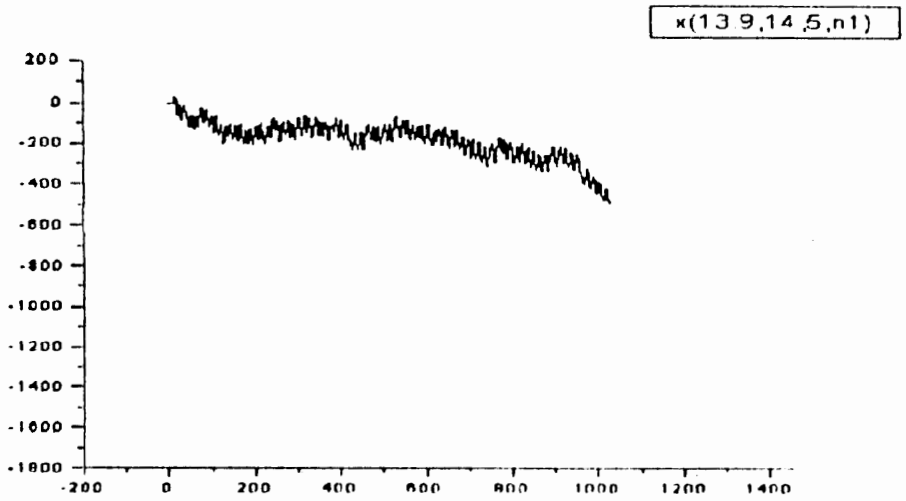


Fig.5-46 le diagramme de la composante x .

VI

CHAPITRE 6

Dans ce chapitre on représente quelques exemple des solutions du système où la fonction h est remplacée par les fonctions : $\frac{\omega}{\pi}\sum_{i=1}^{i=n} ib_i \cos\left(\frac{i\pi x}{\omega}\right), n \in \{1,2,...,10\}$.

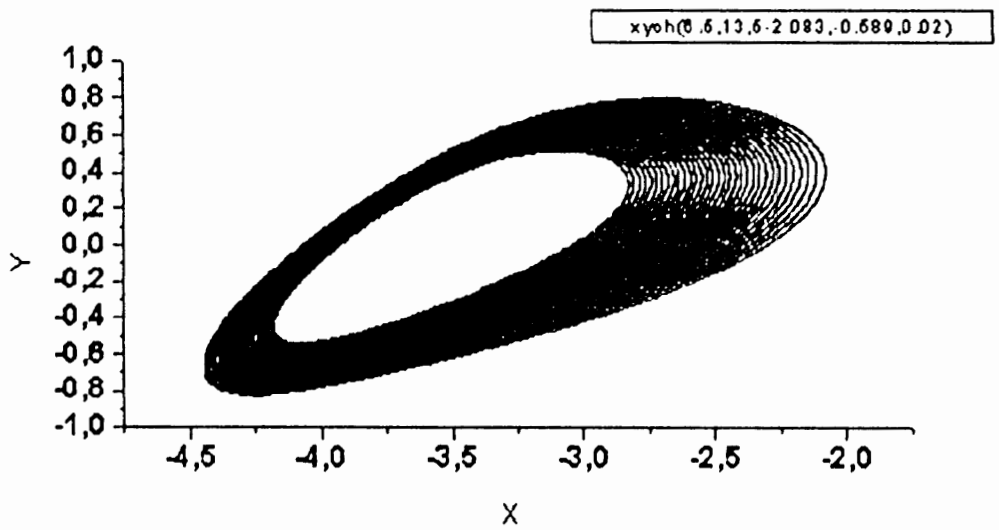


Fig. 6-1 un cycle limite.

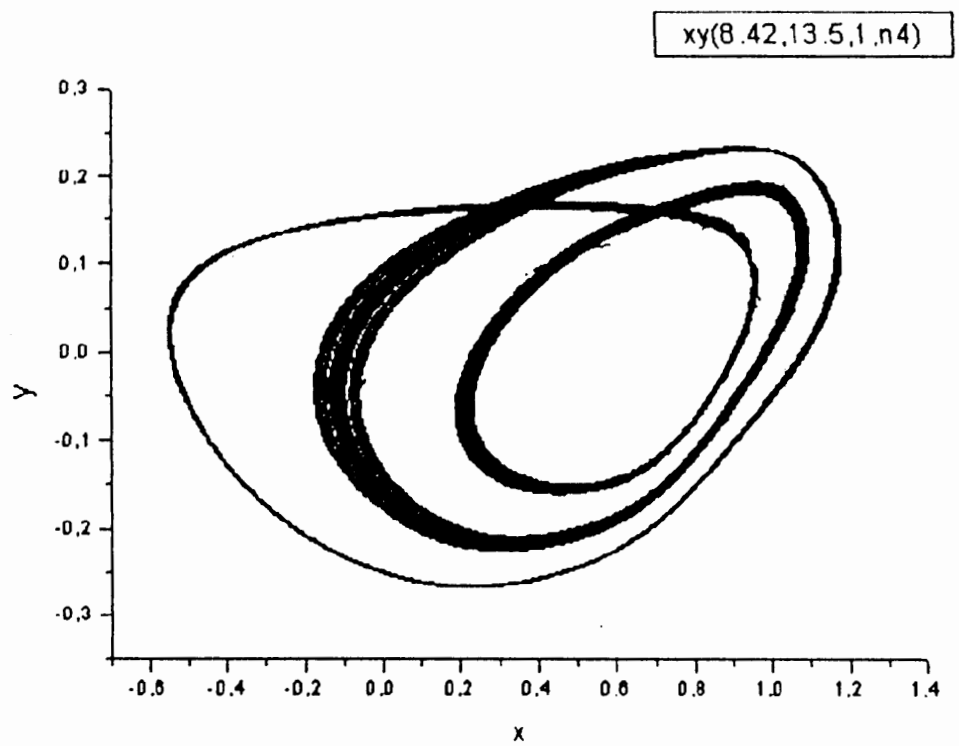


Fig. 6-2:un scroll .

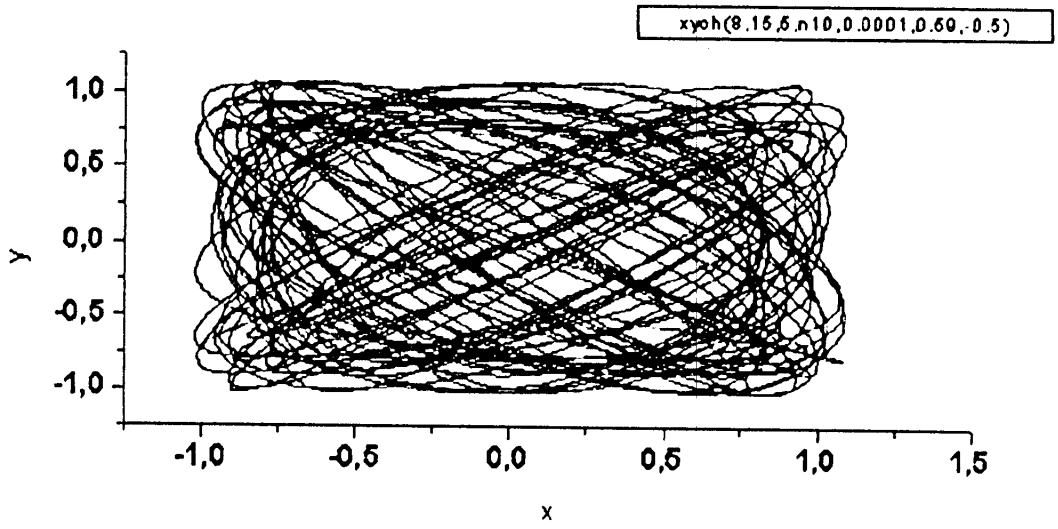


Fig.6-3 :un scroll .

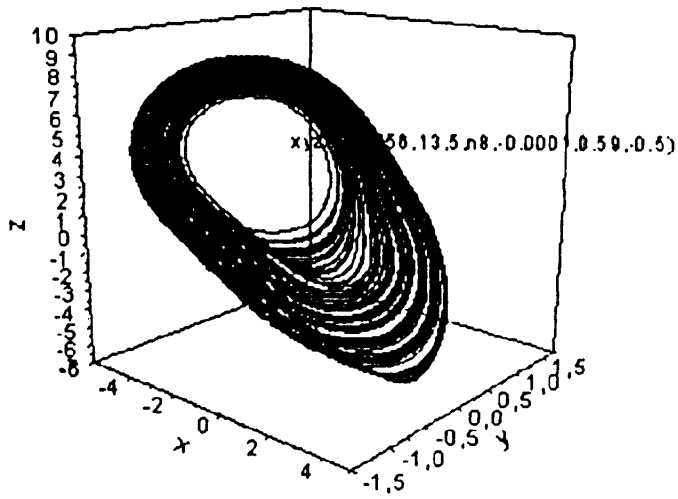


Fig. 6-4 : un scroll .

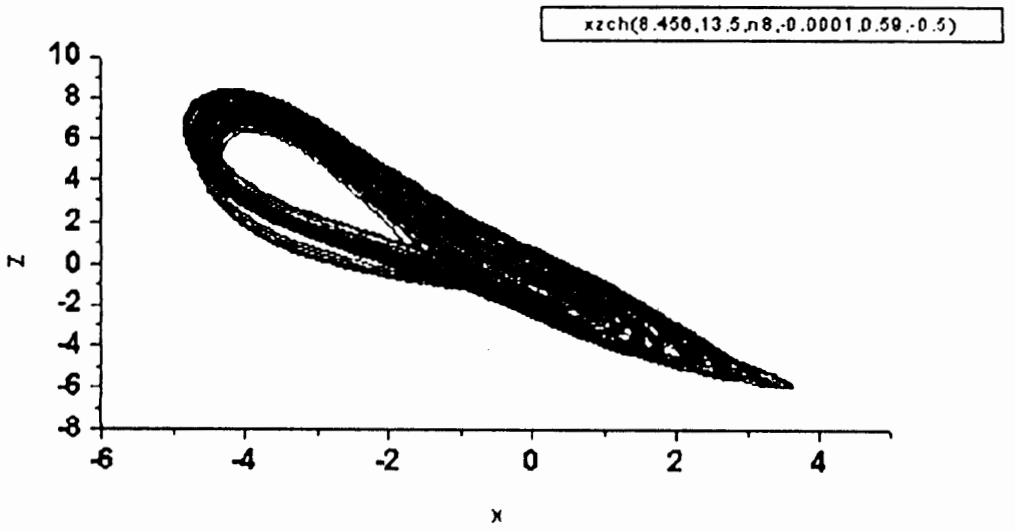


Fig.6-5 : un scroll .

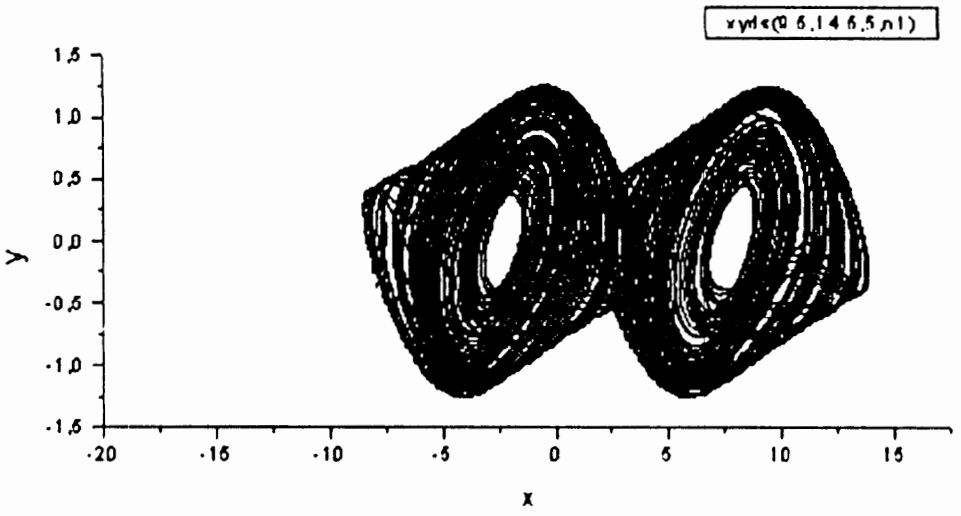


Fig.6-6: un Double-scroll .

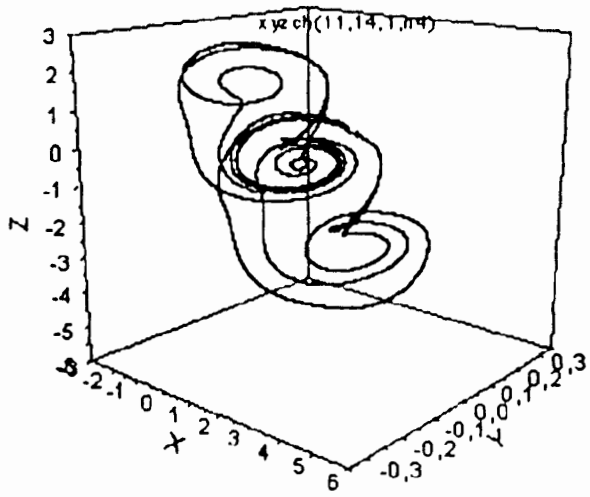


Fig.6-7

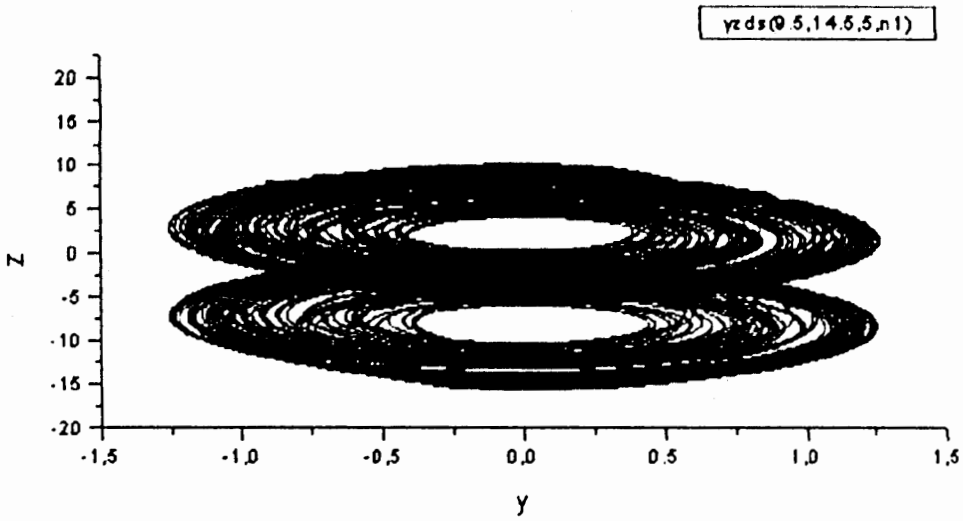


Fig.6-8 :un Double-scroll .

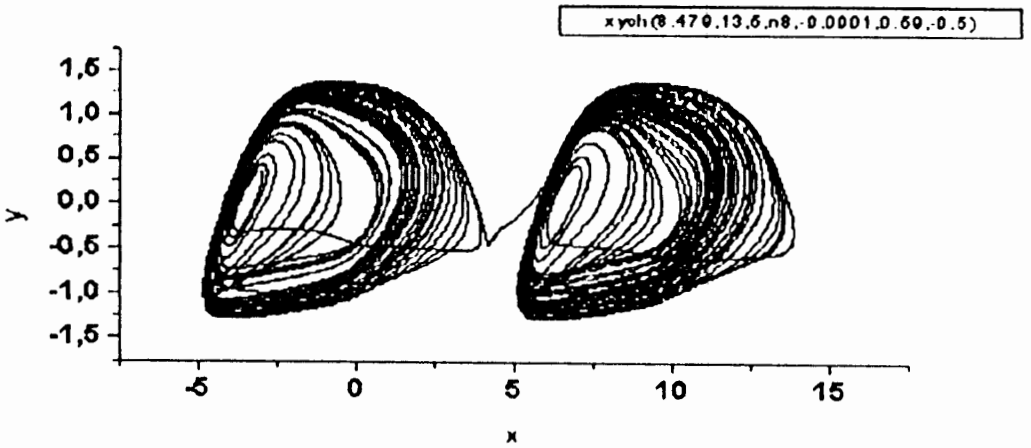


Fig.6-9:un Double-scroll .

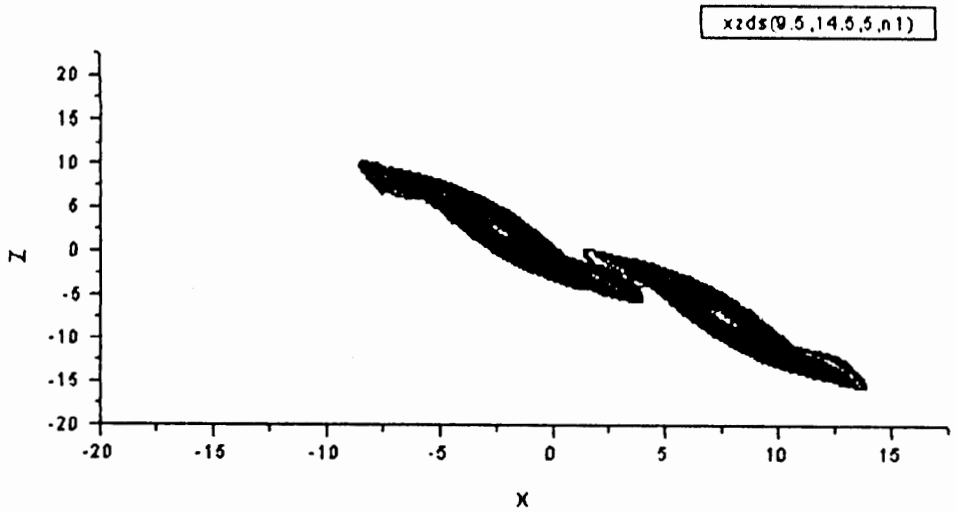


Fig.6-10 :un Double-scroll .

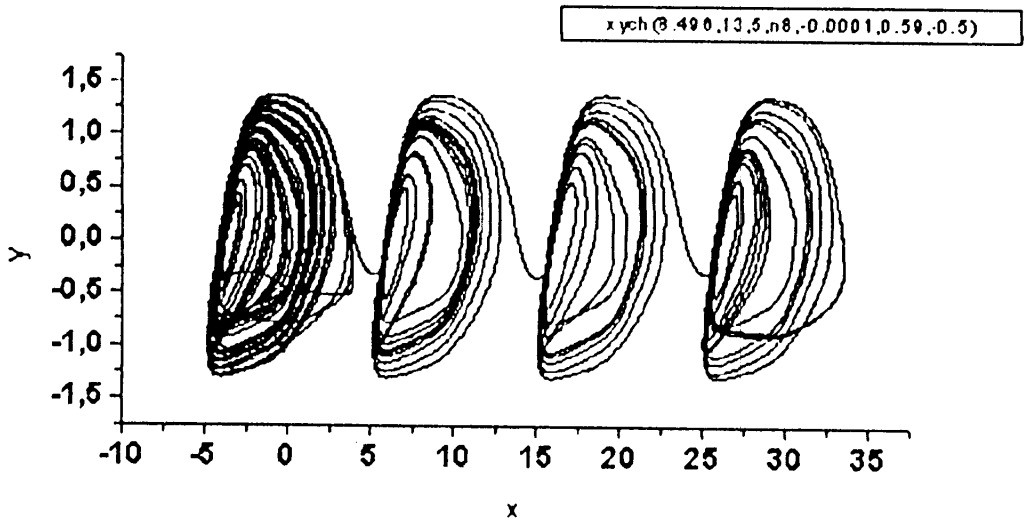


Fig.6-11 :un Double-scroll .

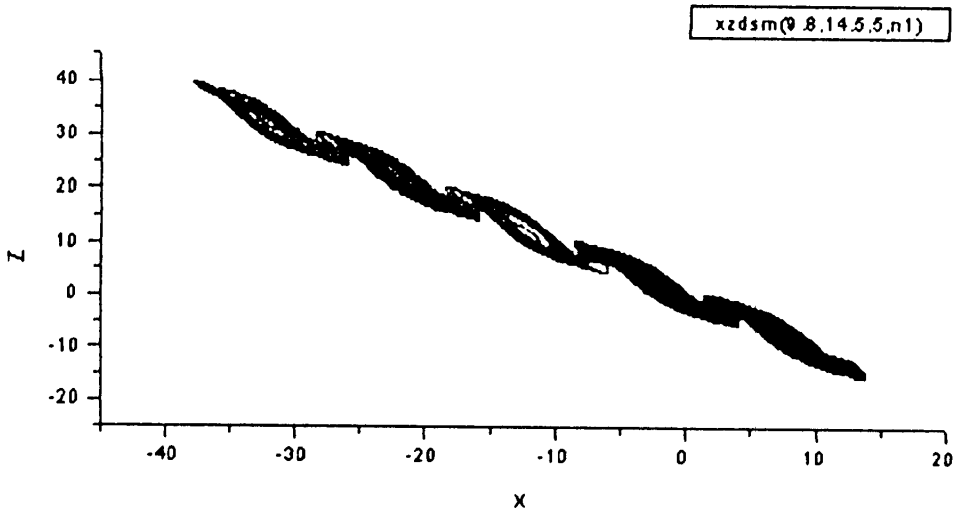


Fig.6-12:un 5-scrolls .

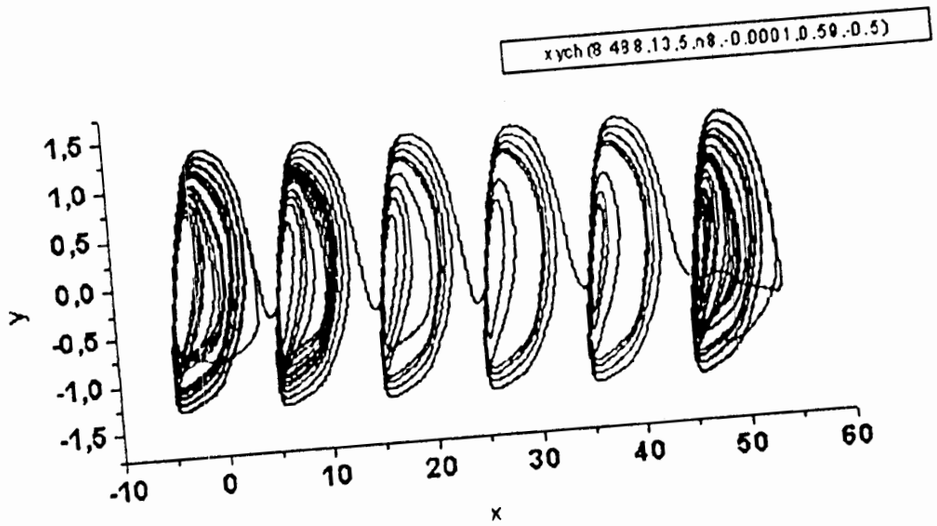


Fig.6-13 :un 3-Double-scroll.

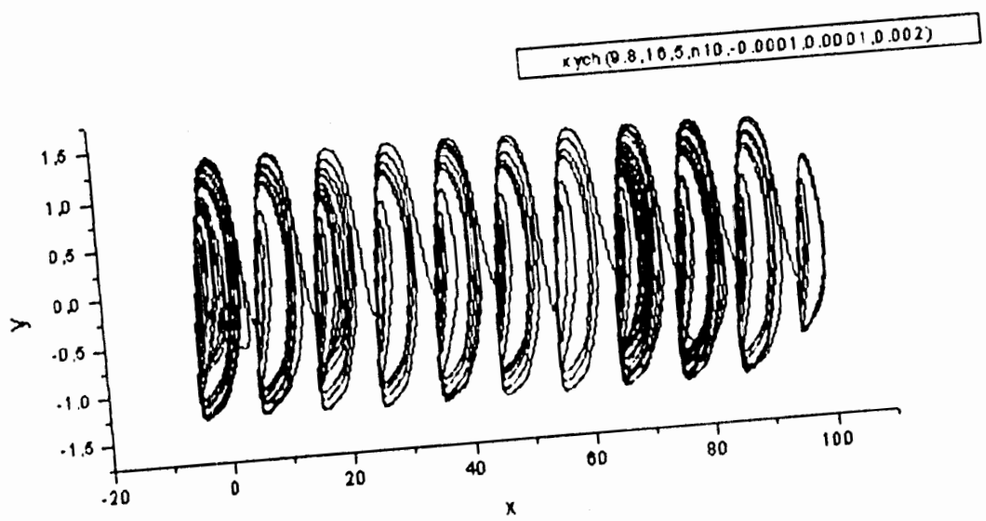


Fig.6-14: un 11-scrolls.

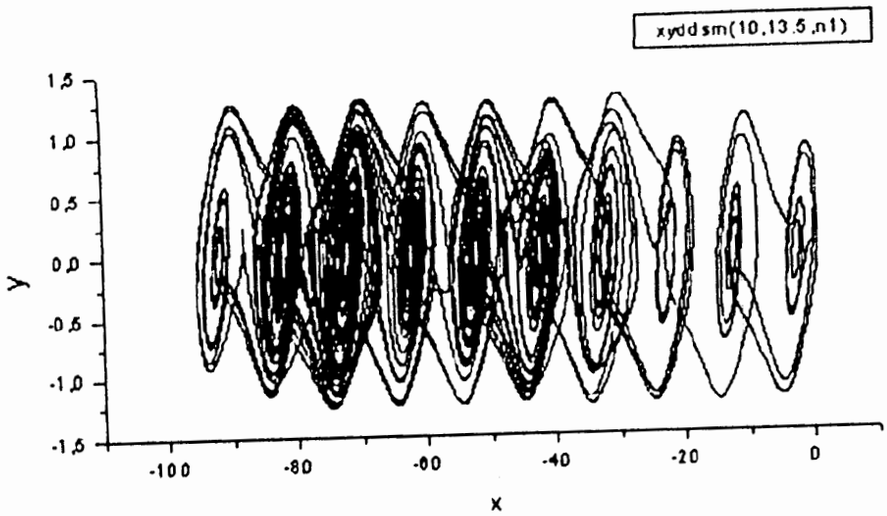


Fig.6-15 :un 5-Double-scroll .

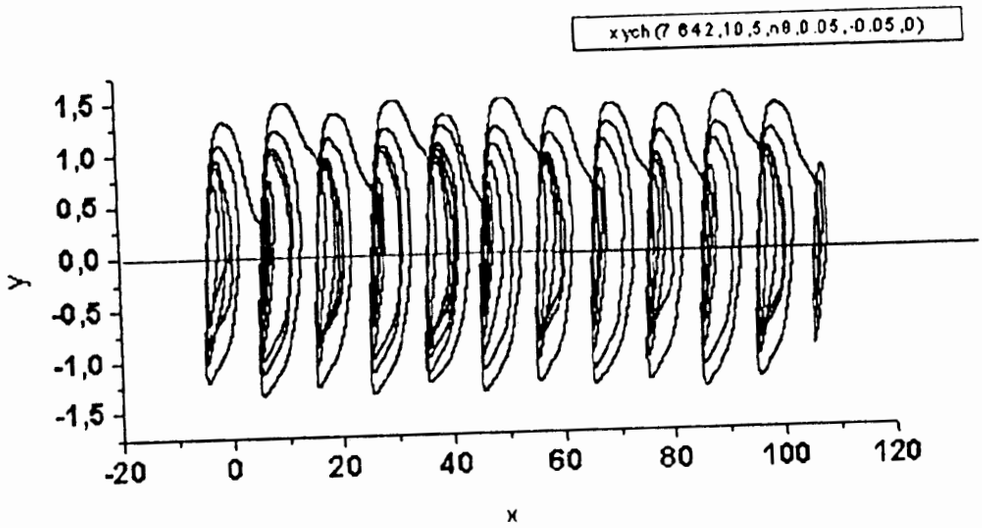


Fig.6-16:un 6-Double-scroll .

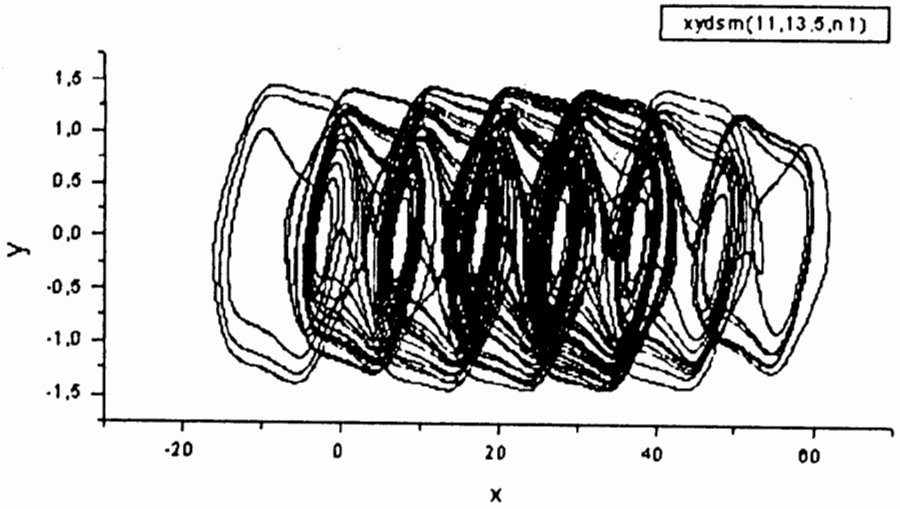


Fig.6-17 :un 3-Double-scroll .

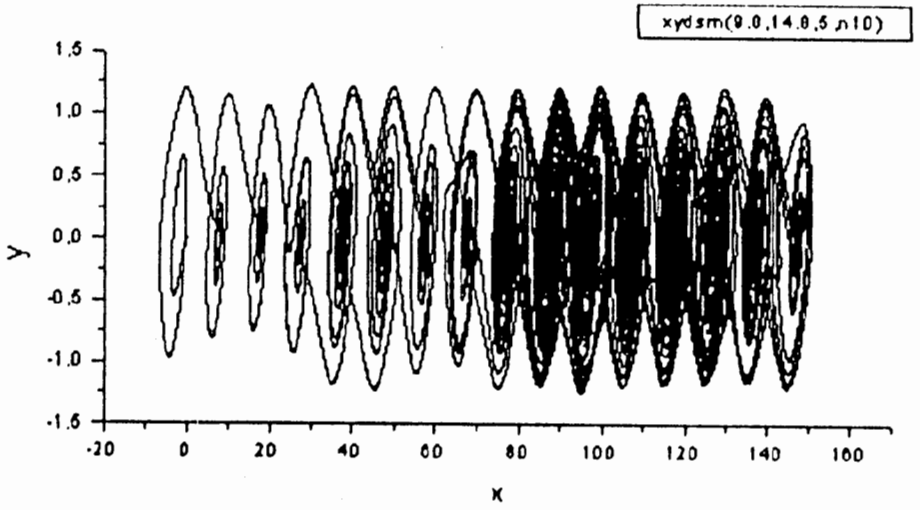


Fig.6-18 :un 8-Double-scroll .

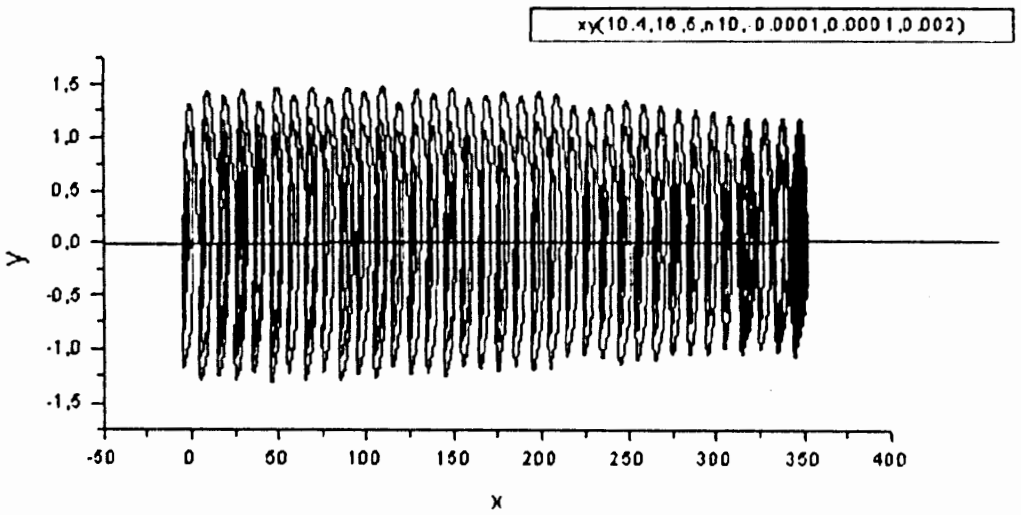


Fig.6-19 :un grand multi-scroll .

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le modèle de Chua est un modèle physique de circuit électronique réellement construit. En remplaçant la fonction caractéristique de ce modèle (qui est linéaire par morceaux) par un ensemble de non linéarité de type série de Fourrier , le modèle obtenu est plus facile à étudier avec les outils classiques par rapport à l'original.

La dynamique du nouveau modèle est identique à celle du modèle original, mais elle encore plus riche en complexité.

Nous espérons compléter notre étude par la construction des diagrammes de bifurcation pour avoir une idée plus précise sur la dynamique du nouveau modèle.

Aussi, essayer d'y appliquer quelques stratégie de contrôle.

ANNEXE A

A.1

Ce programme donne la méthode de l'approximation et de l'intégration par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

```
c*********************************************************************
c                              DECLARATION
c*********************************************************************
      DIMENSION R(300000), X(300000), Y(300000), Z(300000)
      DIMENSION B(10)
      DIMENSION S(10)
      DIMENSION SS(10)
      DIMENSION Bs(10)
      DIMENSION bS1(10)
      DIMENSION tqp0(10)
      DIMENSION tqpw(10)
      DIMENSION tests(10)
      DIMENSION hxi(10)
      DIMENSION Si(10)
      DIMENSION ga(10)
      DIMENSION A1(10)
      DIMENSION Bx1(10)
      DIMENSION C1(10)
      DIMENSION RK1(300000), RK2(300000), Rk3(300000), Rk4(300000)
      DIMENSION RK5(300000)
      DIMENSION RK6(300000), RK7(300000), RK8(300000), RK9(300000)
      DIMENSION RK10(300000)
      DIMENSION RK11(300000), RK12(300000), RK13(300000), RK14(300000)
      DIMENSION RK15(300000)
      DIMENSION RK16(300000), RK17(300000), RK18(300000), RK19(300000)
      DIMENSION RK20(300000), RK21(300000)
      DIMENSION RR4(300000), R7(300000), R10(300000)
c*********************************************************************
c                    OVERTURE DES FICHIERS DE RESULTAS
c*********************************************************************
      open(141,file='x5.dat')
      rewind(141)
      open(142,file='Y5.dat')
      rewind(142)
      open(143,file='Z5.dat')
      rewind(143)
      open(14,file='resw.dat')
      rewind(14)
      open(15,file='resw1.dat')
      rewind(15)
      open(144,file='M.dat')
      rewind(144)
c*********************************************************************
      pi=acos(-1.)
      write(*,*)'Entrer,w'
      read(*,*)w
```

```
      write(14,*)'w=',w
      pi=acos(-1.)
      do 13 k2=1,10
      S(k2)=2.*((-w*sin((k2*pi)/w)-w*k2*pi*((-1.)**k2)+k2*pi*(-1.)**k2)
     + )/((pi**2)*(k2**2))
      SS(k2)=2.*(-k2*pi*((-1.)**k2)+w*sin((k2*pi)/w))/((pi**2)*(k2**2))
13    continue
      hxi(0)=0
      si(0)=0
      ga(0)=0
     do 21 n=1,10
     do 22 k=0,10
      hxi(k+1)=hxi(k)+pi*(S(k)**2)
      Si(k+1)=Si(k)+pi*(SS(k)**2)
      ga(k+1)=ga(k)+2.*pi*SS(k)*S(k)
22    continue
c      write(15,*)n,'----',hxi(n),si(n),ga(n)
21    continue
      A=(8./3.)*(w**3)-4.*(w**2)+2.*w-(1./3.)
      HB=2.*w-(2./3.)
      C=4.*(w**2)-4.*w+1
      do 23 n=1,10
      A1(n)=A-ga(n)
      BX1(n)=HB-Si(n)
      C1(n)=C-hxi(n)
      write(15,*)n,'----',A1(n),Bx1(n),C1(n)
23    continue
c      write(*,*)'entrer m0,m1'
c     read(*,*)v0,v1
c      write(14,*)'m0='v0,'m1=',v1
      v0=-0.43
      v1=0.41
c*********************************************************************
c                  les coefficients de q(n),n=1,2,3,...
c*********************************************************************
      B(1)=(S(1)*v1+SS(1)*v0)
      B(2)=(S(2)*v1+SS(2)*v0)
      B(3)=(S(3)*v1+SS(3)*v0)
      B(4)=(S(4)*v1+SS(4)*v0)
      B(5)=(S(5)*v1+SS(5)*v0)
      B(6)=(S(6)*v1+SS(6)*v0)
      B(7)=(S(7)*v1+SS(7)*v0)
      B(8)=(S(8)*v1+SS(8)*v0)
      B(9)=(S(9)*v1+SS(9)*v0)
      B(10)=(S(10)*v1+SS(10)*v0)
c*********************************************************************
c                  les racines de q(n)(x)=0
c*********************************************************************
c                              cas ou n=1
c*********************************************************************
      write(14,*) 'les racines de q*(x)=0,le cas ou n=1'
      write(14,*)'x(j)=jw,j est un entier'
c*********************************************************************
c                           cas ou n=2
c*********************************************************************
      write(14,*) 'les racines de q*(x)=0,le cas ou n=2'
      write(14,*)'x(j)=jw,j est un entier'
      bb1=-b(1)/(2.*b(2))
      if(bb1.le.1)then
      x21=(w/pi)*acos(bb1)
      x22=-(w/pi)*acos(bb1)
      endif
     write(14,*)'x21=',x21,'x22=',x22
```

```
c*********************************************************************
c                              cas ou n=3
c*********************************************************************
      write(14,*) 'les racines de q'(x)=0,le cas ou n=3'
      write(14,*)'x(j)=jw,j est un entier'
      bb2=-2.*b(3)
      bb3=2.*(b(3)-b(2))/b(3)
      if(bb2.le.1)then
      x31=(w/pi)*acos(bb2)
      x32=-(w/pi)*acos(bb2)
      endif
      if(bb3.le.1)then
      x33=(w/pi)*acos(bb3)
      x34=-(w/pi)*acos(bb3)
      endif
     write(14,*)'x31=',x31,'x32=',x32,'x33=',x33,'x34=',x34
c*********************************************************************
c                            cas ou n=4
c*********************************************************************
      write(14,*) 'les racines de q'(x)=0,le cas ou n=4'
      write(14,*)4,'x(j)=jw,j est un entier'
      Az1=1./(8.*B(4))
      Az2=B(1)-B(3)
      Az3=1./(2*B(4))
      Az4=(B(2)-4.*B(1))/3.
      Dc0=((Az1**2))*(Az2**2)-Az3*Az4
      Az5=Az2/(32.*B(4))
      if(Dc0.lt.0)then
      Tt=atan((-8.*b(4)*sqrt(-Dc0))/az2)
      xfd=sqrt((Az5**2)-Dc0/4.)
      U=cos(Tt/3.)
      V=sin(Tt/3.)
      rac1=2*U-B(3)/(6.*B(4))
      rac2=-((xfd**1/3)/2.)*((-U)+sqrt(3.)*V)-B(3)/(6.*B(4))
      rac3=-((xfd**1/3)/2.)*(U+sqrt(3.)*V)-B(3)/(6.*B(4))
      if(abs(rac1).gt.1)then
      write(14,*)'pas des racines'
      else
      racin1=(w/pi)*acos(rac1)
      write(14,*)'q01=',racin1,-racin1
      endif
      if(abs(rac2).gt.1)then
      write(14,*)'pas des racines'
      else
      racin2=(w/pi)*acos(rac2)
      write(14,*)'q02=',racin2,-racin2
      endif
      if(abs(rac3).gt.1)then
      write(14,*)'pas des racines'
      else
      racin3=(w/pi)*acos(rac3)
      write(14,*)'q0=',racin3,-racin3
      endif
      endif
      if(Dc0.eq.0)then
      Tt1=-Az2/(16.*B(4))
      U1=(Tt1**1/3)
      V1=(Tt1**1/3)
      racc1=U1+V1-B(3)/(6.*B(4))
      racc2=-2*racc1-B(3)/(6.*B(4))
      if(abs(racc1).gt.1)then
      write(14,*)'pas des racines'
      else
```

```
      racine1=(w/pi)*acos(racc1)
      write(14,*)'q0=',racine1,-racine1
      endif
      if(abs(racc2).gt.1)then
      write(14,*)'pas des racines'
      else
      racine2=(w/pi)*acos(racc2)
      write(14,*)'q0=',racine2,-racine2
      endif
      endif
      if(Dc0.gt.0)then
      Az6=(-Az2/(8.*B(4)))/2.
      Az7=Az6+sqrt(Dc0)
      U2=(Az7**1/3)
      V2=-(Az7**1/3)
      rac=U2+V2-B(3)/(6.*B(4))
      if(abs(rac).gt.1)then
      write(14,*)'pas des racines'
      else
      racine=(w/pi)*acos(rac)
      write(14,*)'q0=',racine,-racine
      endif
      endif
      write(144,*)'les coefficients de q'
      do 200 k=1,10
      write(144,*)k,'----',B(k)
200   enddo
      do 301 n=1,10
      do 300 k=1,n
      tqp0(n)=(pi/w)*b(1)
      tqpw(n)=-(pi*b(1))/w
      tqp0(n)=(pi/w)*( tqp0(n)+k*b(k))
      tqpw(n)=(pi/w)*(tqpw(n)+k*b(k)*((-1)**k))
300   enddo
301   enddo
c*********************************************************************
c                        la dériveé de q au point 0
c*********************************************************************
      write(144,*)'la dériveé de q au point 0'
      do 302 n=1,10
      write(144,*)n,'----', tqp0(n)
302   enddo
      write(144,*)'la dériveé de q pour le point w'
c*********************************************************************
c                        la dériveé de q au point w
c*********************************************************************
      do 303 n=1,10
      write(144,*)n,'----', tqpw(n)
303   enddo
c*********************************************************************
      do 304 n=1,10
      tests(n)=tqp0(n)*tqpw(n)
      if(tests(n).lt.0)then
      write(144,*)n,'----','les deux points representatives ayant
     + differents'
      write(144,*)'types de stabilite'
      endif
304   enddo
      do 305 n=1,10
      if( tqp0(n).lt.0)then
      write(144,*)n,'----','le point (0,0,0)est instable'
      endif
      if( tqpw(n).lt.0)then
```

```
      write(144,*)n,'----','le point (w,0,-w)est instable'
      endif
305   enddo
      bs1(0)=0
      do 306 n=1,10
      do 307 k=1,n
      bs1(k+1)=bs1(k)+k*abs(B(k))
      bs(k)=(pi/w)*bs1(k)
307   enddo
306   enddo
c*********************************************************************
c                        les bornes superieures des dérivées
c*********************************************************************
      write(144,*)'les bornes superieures des qn'
      do 308 n=1,10
      write(144,*)n,'----',Bs(n)
308   enddo
      TF=max(bs(1),bs(2),bs(3),bs(4),bs(5),bs(6),bs(7),bs(8),bs(9)
     +,bs(10))
      write(144,*)'TF=',TF
      TF1=1/TF
      write(144,*)'la borne superieure des qn=',TF
      write(144,*)'1/TF=',TF1
      close(144)
c*********************************************************************
      write(*,*)'Entrer,q0 le racine de q'(x)=0'
      read(*,*)q0
      xi=(pi/w)*(B(1)*cos((pi*q0)/w)+2.*B(2)*cos((2.*pi*q0)/w)+
     + 3.*B(3)*cos((3.*pi*q0)/w)+
     + 4.*B(4)*cos((4.*pi*q0)/w)+
     + 5.*B(5)*cos((5.*pi*q0)/w)+
     + 6.*B(6)*cos((6.*pi*q0)/w)+
     + 7.*B(7)*cos((7.*pi*q0)/w)+
     + 8.*B(8)*cos((8.*pi*q0)/w)+
     + 9.*B(9)*cos((9.*pi*q0)/w)+
     + 10.*B(10)*cos((10.*pi*q0)/w))
c*********************************************************************
c           Determination des solutions de systeme lineare
c              au voisinage des points d'équilibres
c*********************************************************************
      write(*,*) 'Entrer,Bitta'
      read(*,*)AA3
      write(*,*)'Entrer,alpha'
      read(*,*)E1
      write(14,*)'alpha=',E1
      G1=E1*(xi+1.)
      G2=5.*(G1**6)
      G3=((G1**3)+sqrt(G2))/(2.)
      G4=((G1**3)-sqrt(G2))/(2.)
      G5=(G3**1/3)
      G6=(G4**1/3)
      G0=E1*xi
      G7=-(9./4.)*((G0**2)-12.*G1)
      G8=G5+G6+G7
      write(14,*) 'Bitta1=',G8
      A4=E1*xi*AA3
      A5=(E1*xi-1.)/3.
      q1=(A4**2)-(4./(27.))*(((G1-AA3)**3))
      if(q1.lt.0)then
      write(14,*)'q1<0'
      else
      write(14,*)'q1=',q1
      endif
```

```
      T1=(A4+sqrt(q1))/(2.)
      T2=(A4-sqrt(q1))/(2.)
      H1=((T2**1/3)+(T1**1/3))+A5
      write(14,*)'lamda1=',H1
      H2=(sqrt(3.)/(2.))*(T1**1/3)-(T2**1/3)
      write(14,*)'Im(lamda2)=',H2
      HH1=(-1./(2.))*H1-(1./(2.))*A5
      write(14,*)'Re(lamda2)=',HH1
      Ts=H1*(HH1)
      if(Ts.gt.0)then
      write(14,*)'non hyperbolique'
      else
      write(14,*)'On a dans la situation hyperbolique'
c*********************************************************************
c                 les valeures propres de DF(Xeq)
c*********************************************************************
      write(14,*)'les valeures propres de DF(Xeq)sont:'
      write(14,*)'lamda1=',H1
      write(14,*)'lamda2=HH1+iH2'
      write(14,*)'lamda3=HH1-iH2'
      write(14,*)'Re(lamda2)=',HH1
      write(14,*)'Im(lamda1)=',H2
      X1=((H1**2)+H1+AA3)/AA3
      X2=-H1/AA3
      Y1=((HH1**2)/4.-(H2**2)+HH1+AA3)/AA3
      Y2=-HH1/AA3
      Z1=(H2)*(2.*HH1+1.)/AA3
      Z2=-H2/AA3
      write(14,*)'X1=',X1
      write(14,*)'X2=',X2
      write(14,*)'Y1=',Y1
      write(14,*)'Z1=',Z1
      write(14,*)'Z2=',Z2
c*********************************************************************
c                 les vecteures propres de DF(Xeq)
c*********************************************************************
      write(14,*)'les vecteures propres de DF(Xeq) sont:'
      write(14,*)'Xlamda1=',X1,X2,-1.
      write(14,*)'Re(Xlamda2)=',Y1,Y2,-1.
      write(14,*)'Im(Xlamda2)=',Z1,Z2,0.
      write(*,*)'Entrer,cc1,cc2,cc3'
      read(*,*)cc1,cc2,cc3
      write(14,*)'X(0)=',cc1,cc2,cc3
      vx1=cc1*X1
      vx2=(2.*sqrt((cc2**2)+(cc3**2)))*Y1
      vx3=-2.*sqrt((cc2**2)+(cc3**2))*Z1
      vx4=cc1*X2
      vx5=(2.*sqrt((cc2**2)+(cc3**2)))*Y2
      vx6=-2.*sqrt((cc2**2)+(cc3**2))*Z1
      vx7=cc1
      vx8=2.*sqrt((cc2**2)+(cc3**2))
      tita2=atan(cc3/cc2)
      write(14,*)'tita2=',tita2
      write(14,*)'x(t)=q0+vx1exp(H1t)+ exp(HH1t)(vx2cos(H2t+tita2)'
      write(14,*)'x(t)=-vx3sin((H2t+tita2))'
      write(14,*)'y(t)=vx4exp(H1t)+ exp(HH1t)(vx5cos(H2t+tita2)'
      write(14,*)'-vx6sin((H2t+tita2)'
      write(14,*)'z(t)=-q0+vx7exp(H1t)'
      write(14,*)'exp(HH1t)(vx8cos(H2t+tita2))'
      write(14,*)'x(t)=',q0,vx1,H1,HH1,vx2,H2,tita2,-vx3,H2,tita2
      write(14,*)'y(t)=',vx4,H1,HH1,vx5,H2,tita2,-vx6,H2,tita2
      write(14,*)'z(t)=',- q0,vx7,H1,HH1,vx8,H2,tita2
c*********************************************************************
```

```
c       Determination des varietes stable et instable pour le systeme
c       lineare:
c       X0=donnee initiale=cc1XX1+2Re(cc2+icc3)XX2);où:
c          XX1,XX2;sont les vecteures propres de DF(Xeq).
c                   Xeq:le point d'equilibre
c                         Xeq=(q0,0,q0)
c*********************************************************************
        if(H1.lt.0)then
        write(14,*)'lamda1<0'
c*********************************************************************
c                L'équation de la variété instable
c*********************************************************************
        write(14,*)'f+=(q0+Y1x+Z1y,Y2x+Z2y,-q0-x)'
        write(14,*)'f+1(x,y)=',q0,Y1,Z1
        write(14,*)'f+2(x,y)=',y2,Z2
        write(14,*)'f+3(x,y)=',-q0,-1.
c*********************************************************************
c               L'équation de la variété stable
c*********************************************************************
        write(14,*)'f-=(q0+Y1x,Y2x,-q0-x)'
        write(14,*)'f-1(x)=',q0,Y1
        write(14,*)'f-2(x)=',Y2
        write(14,*)'f-3(x)=',-q0,-1.
        else
        write(14,*)'lamda1>0'
c*********************************************************************
c                 L'équation de la variété stable:
c*********************************************************************
        write(14,*)'f-=(q0+Y1x+Z1y,Y2x+Z2y,-q0-x)'
        write(14,*)'f-1(x)=',q0,Y1,Z1
        write(14,*)'f-2(x)=',y2,Z2
        write(14,*)'f-3(x)=',-q0,-1.
c*********************************************************************
c                 L'équation de la variété instable:
c*********************************************************************
        write(14,*)'f+=(q0+Y1x,Y2x,-q0-x)'
        write(14,*)'f+1(x)=',q0,Y1
        write(14,*)'f+2(x)=',Y2
        write(14,*)'f+3(x)=',-q0,-1.
        endif
        endif
c*********************************************************************
c          Approximation de la solution par une méthode numérique
c*********************************************************************
        write(*,*)'Entrer,N,X(0),Y(0),Z(0),h'
        read(*,*)N,X(0),Y(0),Z(0),h
        do 10 k3=0,N
        R(k3)=B(1)*sin((pi*X(k3))/w)+B(2)*sin((pi*X(k3))/w)+
     + B(3)*sin((pi*X(k3))/w)+B(4)*sin((pi*X(k3))/w)+
     + B(5)*sin((5.*pi*X(k3))/w)+B(6)*sin((6.*pi*X(k3))/w)+
     + B(7)*sin((7.*pi*X(k3))/w)+B(8)*sin((8.*pi*X(k3))/w)+
     + B(9)*sin((9.*pi*X(k3))/w)+B(10)*sin((10.*pi*X(k3))/w)
        RK1(k3)=E1*(Y(k3)-R(k3))
        RK2(k3)=X(k3)-Y(k3)+Z(k3)
        RK3(k3)=-AA3*Y(k3)
        RK4(k3)=X(k3)+(h/2.)*RK1(k3)
        RK5(k3)=Y(k3)+(h/2.)*RK2(k3)
        RK6(k3)=Z(k3)+(h/2.)*RK3(k3)
        RK7(k3)=X(k3)+(h/2.)*RK4(k3)
        RK8(k3)=Y(k3)+(h/2.)*RK5(k3)
        RK9(k3)=Z(k3)+(h/2.)*RK6(k3)
        RK10(k3)=X(k3)+h*RK7(k3)
        RK11(k3)=Y(k3)+h*RK8(k3)
```

```
      RK12(k3)=Z(k3)+h*RK9(k3)
      RR4(k3)=B(1)*sin((pi*RK4(k3))/w)+B(2)*sin((2.*pi*RK4(k3))/w)+
     + B(3)*sin((3.*pi*RK4(k3))/w)+B(4)*sin((4.*pi*RK4(k3))/w)+
     + B(5)*sin((5.*pi*RK4(k3))/w)+ sin((6.*pi*RK4(k3))/w)+
     + B(7)*sin((7.*pi*RK4(k3))/w)+B(8)*sin((8.*pi*RK4(k3))/w)+
     + B(9)*sin((9.*pi*RK4(k3))/w)+B(10)*sin((10.*pi*RK4(k3))/w)
      RK13(k3)=E1*(RK5(k3)-RR4(k3))
      RK14(k3)=RK4(k3)-RK5(k3)+RK6(k3)
      RK15(k3)=-AA3*RK5(k3)
      R7(k3)=B(1)*sin((pi*RK7(k3))/w)+B(2)*sin((2.*pi*RK7(k3))/w)+
     + B(3)*sin((3.*pi*RK7(k3))/w)+B(4)*sin((4.*pi*RK7(k3))/w)+
     + B(5)*sin((5.*pi*RK7(k3))/w) +B(6)*sin((6.*pi*RK7(k3))/w)+
     + B(7)*sin((7.*pi*RK7(k3))/w)+B(8)*sin((8.*pi*RK7(k3))/w)+
     + B(8)*sin((8.*pi*RK7(k3))/w)+B(9)*sin((9.*pi*RK7(k3))/w)+
     + B(10)*sin((10.*pi*RK7(k3))/w)
      RK16(k3)=E1*(RK8(k3)-R7(k3))
      RK17(k3)=RK7(k3)-RK8(k3)+RK9(k3)
      RK18(k3)=-AA3*RK8(k3)
      R10(k3)=B(1)*sin((pi*RK10(k3))/w) +B(2)*sin((2.*pi*RK10(k3))/w)+
     + B(3)*sin((3.*pi*RK10(k3))/w)+B(4)*sin((4.*pi*RK10(k3))/w)+
     + B(5)*sin((5.*pi*RK10(k3))/w)+B(6)*sin((6.*pi*RK10(k3))/w)+
     + B(7)*sin((7.*pi*RK10(k3))/w)+B(8)*sin((8.*pi*RK10(k3))/w)+
     + B(9)*sin((9.*pi*RK10(k3))/w)+B(10)*sin((10.*pi*RK10(k3))/w)
      RK19(k3)=E1*(RK11(k3)-R10(k3))
      RK20(k3)=RK10(k3)-RK11(k3)+RK12(k3)
      RK21(k3)=-AA3*RK11(k3)
      X(k3+1)=X(k3)+(h/6.)*(RK1(k3)+2.*RK13(k3)+2.*RK16(k3)+RK19(k3))
      Y(k3+1)=Y(k3)+(h/6.)*(RK2(k3)+2.*RK14(k3)+2.*RK17(k3)+RK20(k3))
      Z(k3+1)=Z(k3)+(h/6.)*(RK3(k3)+2.*RK15(k3)+2.*RK18(k3)+RK21(k3))
10    continue
      do 20 j1=0,N
      write(141,*)X(j1)
20    continue
c      write(142,*)'*****************************************************'
      do 25 j2=0,N
      write(142,*)Y(j2)
25    continue
c      write(14,*)'*****************************************************'
      do 26 j3=0,N
      write(143,*)Z(j3)
26    continue
27    continue
      close(14)
      close(141)
      close(142)
      close(143)
      close(45)
      stop
      end
```

A.2

Ce programme détermine les période des solutions périodiques et leurs stabilité.

```
c*********************************************************************
      DIMENSION B(10)
      DIMENSION S(10)
      DIMENSION SS(10)
      open(18,file='ho.dat')
      rewind(18)
c*********************************************************************
      pi=acos(-1.)
      write(*,*)'w'
      read(*,*)w
      do 13 k2=1,10
      S(k2)=2.*((-w*sin((k2*pi)/w)-w*k2*pi*((-1.)**k2)+k2*pi*(-1.)**k2)
     + )/((pi**2)*(k2**2))
      SS(k2)=2.*(-k2*pi*((-1.)**k2)+w*sin((k2*pi)/w))/((pi**2)*(k2**2))
13    continue
      v0=-0.43
      v1=0.41
     do 14 k3=1,10
      B(k3)=(S(k3)*v1+SS(k3)*v0)
14    continue
      write(*,*)'q0'
      read(*,*)q0
      write(*,*)'Nb,le degre du polynome trigonometrique'
      read(*,*)Nb
      do 123 k=1,Nb
      sd=sd+(pi/w)*k*B(k)*cos((k*pi*q0)/w)
123   continue
      write(*,*)'E1'
      read(*,*)E1
      if(sd.gt.0.and.sd.lt.1)then
      Bec=E1*(1.-sd)*(E1*sd+1)
      Ga0=E1*sqrt((1.-sd)*sd)
      Hdec=((E1*Bec*sd)**2)+(4./27.)*(Ga**2/3)
      hd=(E1*sd+1)
      vp3=(-E1*Bec*sd+sqrt(Hdec)**1/3)-((E1*Bec*sd+sqrt(Hdec))**1/3)
     + -(1/3)*hd
      Imvp1=(sqrt(3.)/2.)*((-E1*Bec*sd+sqrt(Hdec)**1/3)+
     + ((E1*Bec*sd+sqrt(Hdec))**1/3))
      Revp1=-(1./2.)*vp3-(1./6.)*hd
      do 124 k=1,Nb
      sdd=sdd-((pi/w)**2)*(k**2)*B(k)*sin((k*pi*q0)/w)
124   continue
      G11=-((E1*sdd)/(4.*BEC*(Bec-(Ga0**2))))*
     + ((Ga0**2)-((Bec-(Ga0**2))**2))
```

```
      ReG20=((E1*sdd)/(4.*BEC*(Bec-(Ga0**2))))*
     + ((Ga0**2)+((Bec-(Ga0**2))**2))
      ImG20=(-E1*sdd*Ga0)/(2.*Bec)
      do 125 k=1,Nb
      sddd=sddd-((pi/w)**3)*(k**3)*B(k)*cos((k*pi*q0)/w)
125   continue
      p3=Bec-(Ga0**2)
      P1=((Ga0)**2)-(P3**2)
      p2=8.*(Bec**2)*p3
      ReG21=(E1*sddd7*p1)/(8.*(Bec**2))
      ImG21=(E1*sddd*Ga0)*P1/P2
      hf=-hd
      Rew11=-REG11/hf
      Rew20=((-hf)*(REG20+ImG20))/((hf**2)+4.*(ga0**2))
      Rec10=-(1./(REG21/2.))*(2.*Ga0*IMG20*G11)+REG21/2.
      IMc10=(1./(IMG21/2.))/((2.*Ga0)*(REG20*REG11-2.*(G11**2)-(1./3.)
     + (REG20**2)+(MG20**2))+IMG21/2.)
      PS1=1./((-E1*Bec*sd+sqrt(Hdec))**(2/3))
      PS2=1./((E1*Bec*sd+sqrt(Hdec))**(2/3))
      PS3=1./(12.*sqrt(hdec))*((E1**2)*sd*(1.-sd)*(E1*(E1*sd+1)+
     + (2./9.)))
      PS4=(1./12.)*E1*sd
      AL0=PS4*(PS1+PS2)+PS3*(-PS1+PS2)
      w0=sqrt(3.)*(PS4*(-PS1+PS2)+PS3*(PS1+PS2))
      hmi2=-REC10/AL0
      TO2=-(IMC10+hmi2*w0)/Ga0
      write(*,*)'TO2=',TO2
      vv1=((2./3.)*(sd**2)-sd)*(E1**2)-2*(1-sd)*(0.282+4./27.)*E1
      write(*,*)'v1=',vv1
      write(*,*)'betac=',Bec
      if(hmi2.gt.0)then
      write(*,*)'beta>betac'
      read(*,*)AA3
      T=((2.*pi)/ga0)*(1.+TO2*((AA3-Bec)/hmi2))
      else
      write(*,*)'beta<betac'
      read(*,*)AA3
      T=((2.*pi)/ga0)*(1.+TO2*((-AA3+Bec)/hmi2))
      endif
      expf=2.*REC10
      write(*,*)'E1=',e1,'AA3=',AA3,'T=',T,'expf=',expf
148   continue
      endif
2     continue
      close(18)
      stop
     end
```

ANNEXE. B

B.1 :LA RESOLUTION D'UNE EQUATION DE DEGRE 3 PAR LA METHODE DE CARDAN

Soit le polynôme :

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \qquad \text{(B-1-1)}$$

On introduit le changement de variable suivant:

$$\lambda = x - \frac{a_1}{3} \qquad \text{(B-1-2)}$$

et l'équation devient:

$$x^3 + a_3 x - \frac{a_2^3}{27} = 0 \qquad \text{(B-1-3)}$$

Soient z_1, z_2 les racines du seconds degrés de l'équation (B-1-1), et u, v les racines cubiques de z_1, z_2

Alors :

Les racines de l'équation (B-1-1) sont données par :

$$\begin{cases} u+v, \\ uj + vj^2 \\ uj^2 + vj \end{cases} \qquad \text{(B-1-4)}$$

Où : $j=exp(2i\pi/3)$.

Et donc les racines de (B-1-1) sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = u+v-\frac{a_1}{3} \\ \lambda_2 = uj + vj^2 - \frac{a_1}{3} \\ \lambda_3 = uj^2 + vj - \frac{a_1}{3} \end{cases} \qquad \text{(B-1-5)}$$

REMARQUE:

Si les coefficients de (B-1-1) sont réels alors en posant :

$$\Delta = \frac{4a_2^3 + 27a_3^2}{27} \qquad \text{(B-1-6)}$$

Le discriminant de Cardan pour l'équation (B-1-1).Alors :

1-Si $\Delta > 0$, *Il existe une racine réelle et deux racines complexes.*

2-Si $\Delta = 0$, *Il existe une racine triple 0 si* $a_3 = 0$, *une racine réelle double et une racine réelle simple si:* $a_3 \neq 0$.

3-Si $\Delta < 0$ *l'équation admet trois racines réelles.*

B.2 : TRAJECTOIRE HOMOCLINE ET TRAJECTOIRE HETEROCLINE

Soit le système dynamique dans R^n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{(B-2-1)}$$

et soit x_1 ,x_2 deux points d'équilibres de (s), et soit $W^s(x_1)$,$W^u(x_1)$ les variétés stables et instables associées au point x_1 respectivement.

DEFINITION 1 (trajectoire homocline)

Soit $\phi_t(x_0)$ une solution de (B-2-1), on dit que $\phi_t(x_0)$ est une trajectoire homocline s'il appartient à l'intersection $W^s(x_1) \cap W^u(x_1)$ et qui est pas une trajectoire cons--tante.

Soit maintenant x_1 ,x_2 deux points non-stables, alors o n a La définition suivante :

DEFINITION 2 (trajectoire heterocline)

Une trajectoire $\phi_t(x_0)$ solution de (B-2-1) appartenant à $W^s(x_2) \cap W^u(x_1)$ est dite une trajectoire heterocline.

REMARQUE

Une trajectoire homocline converge vers le même point quand t tend vers l'infini, une trajectoire heterocline converge vers un point non-stable quand t tend vers l'infini, et autres quand $t \to -\infty$.

REMARQUE

La présence des trajectoires homocline et heterocline ayant une importance dans la création des fers à cheval , et par suite le système devient chaotique(d'après le théorème de Shilnikov).

B.3 : LE THEOREME DE SHARKOVSKY

Théorème :

Si un système dynamique admet une solution périodique de période 3,
Alors cette solution est chaotique.

B.4 : LA RELATION ENTRE LES COEFFICIENTS D'UN POLYNOME ET SES RACINES

Soit p le polynôme de dégré 3 suivant :

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad \text{(B-4-1)}$$

Alors on a le théorème suivant :

Théorème :

On a les relations :

$$\begin{cases} a = x_1 + x_2 + x_3 \\ b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ c = x_1x_2x_3 \end{cases} \qquad \text{(B-4-2)}$$

B.5 : LE THEOREME DE HARTMAN-GROBMAN

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{(B-5-1)}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\bar{x}$ est un point d'équilibre du système et soit $DF(\bar{x})$ la matrice jacobienne au point $\bar{x}$ et soit finalement ϕ_t le flot associé au système. Alors on a le théorème :

Théorème :

Si $DF(\bar{x})$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires pures
Alors :

Il existe un homéomorphisme local défini dans certain voisinage U de $\bar{x}$ qui transforme les orbites du flot non-linéaire vers celle du flot linéaire, et peut être choisi pour conserver la paramétrisation par le temps.

B.6: L'APPLICATION DE POINCARE

L 'application de Poincaré est une outil qui permet de transformer l'étude d'un système continue à l'étude d'un système discret.

Définition :

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \textit{(B-6-1)}$$

où $x \in R^n$.

Avec un cycle limite Γ.

Soit x^* *Un point dans* Γ *,et soit* Σ *un hyper –plan de dimension (n-1) transversale à* Γ *au point* x^*.

La trajectoire qui passe par x^* *coupe* Γ *en T secondes où T est le période minimale de* Γ.

Soit ϕ_t *le flot du système .Comme* ϕ_t *est continue par rapport aux conditions initiales, le couple* (ϕ_t, Γ) *définit une application :*

$$P_A : U \subset \Sigma \rightarrow V \subset \Sigma$$

Où U, V sont des voisinages du point x^*.

L'application P_A *s'appelle ; l'application de Poincaré pour le système (B-6-1).*

Notons que P_A *est locale, car elle dépend des voisinages du point* x^*. P_A *aussi est inversible et différentiable.*

L'utilisation de la définition ci-dessus de l'application de Poincaré est rare dans les applications car cette définition demande à l'avance la connaissance de la position du cycle limite.

Il existe d'autres types d'applications de Poincaré appelés :
Les demi-applications de Poincaré, qui sont les plus utiles dans les applications.

Finalement il existe plusieurs techniques et algorithmes qui permettent de construire l'application de Poincaré d'un point de vue numérique.

B.7 : LES EXPOSANTS DE LYAPUNOV

Les exposants de Lyapunov sont des généralisations des valeurs propres en un point d'équilibre, ils sont utilisées pour déterminer la stabilité des solutions quasi-périodiques, chaotiques, ainsi que les points d'équilibres, et les solutions périodiques.

Considérons l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_t = D_x f(\phi_t(x_0, t_0), t)\phi_t \\ \phi(x_0, t_0) = I_n \end{cases} \qquad \text{(B-7-1)}$$

Où :

$\phi_t \in L(R^n, R^n)$ est une matrice d'ordre n.

L'équation (B-7-1) est la linearisation du champ de vecteurs f autour de la solution $\phi(x_0, t_0)$.

Soient $m_1(t)\ m_2(t),.....m_n(t)$ les valeurs propres de $\phi(x_0)$.

Alors on a la définition suivante :

DEFINITION :

Les exposants de Lyapunov sont donnés par :

$$\lambda_k = \lim \frac{1}{t}|m_k(t)| \ ,k=1,2,\ldots,n \qquad (B\text{-}7\text{-}2)$$

dans le cas où la limite existe.

REMARQUE :

Il existe des algorithmes qui permettent de calculer tous les exposants de Lyapunov par l'utilisation de l'équation variationnelle :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_t = D_x f\, \phi_t \\ \dot{x} = f(x,t) \\ \phi_{t0}(x_0) = I_n \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (B\text{-}7\text{-}3)$$

BIBLIOGRAPHIE

1. T. S.Parker ,L.O.Chua , "*pratical Numerical algorithms for chaotic systems*", Springer-verlag.1989.
2. Hirochi Kawakami , "*The theory of dynamical systems and its application to nonlinear problems*",world scientific publishing .1984.
3. Alexender. I.Khibnik,Dirk Roose, L.O.Chua,"*On periodic orbit and homoclinic bifurcation in Chua's circuit with smooth nonlinearity*",Int.J.of bifurcations and chaos ,Vol3 .2,1993.
4. L.O.Chua , "*Chua's circuit :Ten years later*" , University of California ,Berkley,1993.
5. L.O.Chua and Gui-Nian-lin "*Canonical realization of chua's circuit family*",IEEE,trans circuits and systems.1990.
6. K.Murali,M.Lakshmanon and L.O.Chua "*The simplest dissipatve nonauatonome chaotic circuit*",IEEE,trans, circuits and systems.1994.
7. Masafumi ohnishi and Neahiko.Inaba, "*A singular bifurcation into instant chaos in piecewise linear circuit*", IEEE,trans, circuits and systems.1994.
8. C.P.Silva , "*some analiticals results from Chua's circuit* ", IEEE,trans, circuits and systems.1993.
9. D.Anosov, "*Dynamical systems with hyperbolic behavior*",springe-verlag,1991.
10. M. Farkas,"*periodic motions*", springe-verlag,1994.
11. R.M.M.Mahhéij and J.Molenear,"*ODE in theory and practice* ",1997.
12. D.H.Sattinger,"*Bifurcations and symmetry breaking in applied mathematics*",Ameicain mathematical society.1980.
13. Ian.Stewart, " *Bifurcation with symmetry* " ,Mathematics Institute,University of Warwick,Conventy CY4,7AL,England.1987.
14. A.Arez.,Austin.Blaquiere,Angelo.Maryllo , "*Dynamical systems and Microphisics,Geometrie and Mechanics*".Acadimic press.1982.
15. M.Cirwin, "*Smooth dynamical systems*", Acadimic press.1980 .
16. K.Allab , « *Elément d'analyse,fonctions d'une variable réel* »,OPU.1991.
17. H.Brezis,J.L.Lion, "*Nonlinear partial differential equations and their applications*", College de France,Vol 2 ,pitman Advanced Publishing Program.1994.
18. E .Coddington,Norman.Levinson, "*Theory of ordinary differential equations and Engineers*",MC.Graw.Hille.1996.

19. M.J.D.Powell, "*Approximation theory and methods*",Cambridge Universitypress.1981.

20. L.Debnath , "*Nonlinear ODE for scientists and Engineers*",Boston,1997.

21. R .O.Hilborn , "*Chaos and nonlinear dynamics*",Oxford UniversityPress.1994.

22. A.W.Leung , "*Systems of nonlinear partial diffrential equations:Application to Biologie and Engineering*", KluwerA cadimic Press.1989.

23. G.Engeln-Muillges,Frank.Vhlig , "*Numerical algorithms with FORTRAN*" , Spinger-Verlag.1996.

24. M. Remazure , « *Catastrophes et bifurcations* » , Ellipses.1989.

25. V.I.Arnold, "*Geometricals mehods in the theory of ordinary differential equations*" , springer-Verlag.1983.

26. R. Lozi , « *Motifs et cofineurs organisés dans la réaction de Bélousov-zhabotinskii,et le Double –scroll* » , Département de mathématique ,Université de Nice,France.1991.

27. M.R.Ferchichi,I.Djelet , « *Attrcters étranges ,et dimension fractale* », Institut de mathematique,Université d'Annaba.1995.

28. N.D.Kazarinoff,Y.H.Wan, "*Theory and applications of Hopf bifurcation*" , Combridge University Press. Michiogan.1981.

29. M.Renardy.,Robert.C.Doyers, " *An introduction to ODE* " ,Springer-Verlag.1993.

30. Matsu-mo-to.T,L.O.Chua and M.Komuro, "*The Double-scroll* ". IEEE;trans ,Circuits and Systems.1983.

31. Matsu-mo-to.T, "*A chaotic attracteur from chua 's circuit*", IEEE;trans ,Circuits and Systems.1984.

32. Shi'lnikov.L.P, "*Stranges attracteurs and dynamical models*" .J.of circuit ,systems,and Computer.1993.

33. R .X, "*Sound and music from Chua's circuit* ", J.of circuit ,systems,and Computer.1993.

34. L.R and L.O.Chua, "*Secure communication via chaotic synchronization II:Noise reduction by cascading to identical receivers*", Int.J.of Bifurcations and Chaos.1993.

35. C.F.Gerald,and P.O.Wheatley, "*Applied Numerical analysis*",Addison-Welley Publishing Company.1989.

36. K. Rabah , «*Applications mathématiques par le BASIC ,et le FORTRAN* »,OPU.1994.

37. Marseden.J.E, " *The Hopf bifurcation for nonliear semigroups* ".Bull.Am.Math.Soc.79.1973.

38. V.Arnold , "*Supplementary chapters of the theory of ordinary differential equations*", Nauka ,Moscow.1978.

39. V. Arnold , "*Ordinary differential equations*" , Mir Press.1978.

40. Sparow.L.T, "*Chaos in three dimensional single loop feedback systems with a piecewise linear feedback function*", J.Math.Anal.Appl.83.1981.

41. O.E.Rossler, "*An equation for hyper-chaos*", Phys.Lett.1979.

42. A.Ben Mirachi and I.Procacia, " *Characterization of experemental (noisy)Strange Attracteur*",Physical review.A.1984.

43. A.Rodriguez –Vasquez,J.L.Huertas,and L.O.Chua , "*Chaos in switched capacitor circuit*",IEEE.Trans .circuits and systems .1985.

44. D.Ruelle , "*Strange attracteur*", The mathematical intelegence .1980.

45. J.A.K,J.Vandwalle , "*Generation of n-Double-scrolls,n=1,2, 3,...* ", IEEE.Trans .circuits and systems .1993.

46. Guckenheimer.J,Holms.P, "*Nonlinear oscillations ,dynamical sytems ,and bifurcation of vector field*" , springer-Verlag, new work .1983.

47. J.Guendler, "*Homoclinic solution for autonomous dynamical systems in ordinary dimension*", Siam.J.Math.ANAL.Vol.23 .1992.

48. LI.T,and,York.J, "*Period three implies chaos*" , Am,Math.Monthly.82.1975.

ملخص

جملة Chua هي جملة فيزيائية لدارة إلكترونية حقيقية.

لقد عوضنا في هذه الجملة الدالة المميزة (خطية بالأجزاء) بمجموعة من دوال غير خطية من صنف سلاسل فوريي.

الجملة الناتجة أسهل للدراسة بواسطة الطرق التقليدية للأنظمة الحركية بالنسبة للجملة الأصلية.

بهذه المجموعة من دوال فوريي تحصلنا على نتائج جديدة تخص الحلول التقوسية من نوع Les Multi-Scroll و أيضا الحلول التقوسية المعتادة مثل: Les Simples-Scroll و Les Double-Scroll. الجملة الجديدة بهذه المجموعة من غير الخطيات تملك نسق تقوسي، هذا النسق مميز بالمفارقات الشاملة للحل كمايلي:

نقطة توازن ← دورة نهاية ← حل تقوسي من نوع Simple-Scroll ←

Double-Scroll ← متتالية من حلول تقوسية من نوع p-Simple-Scroll و q-Double-Scroll

من أجل كل غير الخطيات المعتبرة في مجالات معينة لوسائط المراقبة.

ABSTRACT

The model of Chua is a physical paradigm of electronic circuit really constructed. We Replace the characteristic function of this model of it (that is piecewise linear) by a set of non linearity of type set of Fourrier. The new model is easier to study with the classical tools of dynamical systems, with regard to the original. With this set of non linearities regular of type set of Fourier, we get new results concerning multi-scrolls, as well as of the classics chaotics attractors as the simple-scroll, and the Double-scroll.

The circuit with this set of non linearity has a chaotic regime, this regime is characterized by the global bifurcations of the stream as follows:

a equilibrium point , a cycle limit ,a spiroid attracteur ,a Double scroll ,a set of the p-simple-scrolls, and q-double-scrolls.

for all non linearity considered for certain rank of parameters.

RESUME

Le modèle de Chua est un modèle physique de circuit électronique réellement construit. En remplaçant la fonction caractéristique de ce modèle (qui est linéaire par morceaux) par un ensemble de non linéarité de type série de Fourrier. Le modèle obtenu est plus facile à étudier avec les outils classiques par rapport à l'original. Avec cet ensemble de non-linéarités régulières de type série de Fourier, nous obtenons de nouveaux résultats concernant les multi-scroll, ainsi que des attracteurs chaotiques classiques comme les simples-scroll, et les Double-scroll.

Le nouveau modèle avec cet ensemble de non-linéarités a un régime chaotique, ce régime est caractérisé par les bifurcations globales du flot comme suit :

Un point d'équilibre → un cycle limite → un attracteur spiroïdale → un Double scroll → une série de p-simple-scroll, et q-Double-scroll.

pour toutes les non-linéarités considérés pour certain rang des paramètres.