REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N° D'ordre :……………………. ……………….

N° Série : ………………….…………………….

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en Mathématiques

THEME

Inférence Statistique dans les processus ARMA fractionnaires

Option

Mathématiques Appliquées

Par :

ZETILI Sihem

Devant Le Jury :

Président :	A. L. Marhoune	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Rapporteur :	Z. Mohdeb	Prof.	Univ. Mentouri Constantine
Examinateurs :	F. L. Rahmani	M. C.	Univ. Mentouri Constantine
	F. Messaci	M. C.	Univ. Mentouri Constantine

Soutenu Le …………………

Remerciements

J’aimerais remercier en particulier mon encadreur Mr MOHDEB ZAHER Professeur à l’université Mentouri Constantine pour avoir dirigé ce travail, pour son aide, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d’esprit
qui m’ont aidé à mener à bien ce travail.

Je tiens à remercier vivement Mr MARHOUNE Ahmed Lakhdar Professeur à l’université Mentouri Constantine qui me fait l’honneur de présider le jury de soutenance.

J’adresse mes remerciements les plus chaleureux à Mr RAHMANI Fouad Lazhar Maître de Conférences à l’université Mentouri Constantine, Mme MESSACI Fatiha Maître de Conférences à l’université Mentouri Constantine qui ont accepté de faire partie du Jury de ce travail.

Je ne voudrais pas oublier tous ceux et celles qui au long de ce travail m’ont soutenu moralement, sans les nommer explicitement car la liste serait longue, je les remercie de leurs encouragements.

Table des matières

Introduction

Une série chronologique est une succession d'observations d'une grandeur effectuées à intervalles réguliers au cours du temps. Donnons quelques exemples dans le secteur économique et social : inflation, cours boursiers, chômage, productions, exportations, natalité, immigration, scolarisation, logement,...

On rencontre également des exemples à l'intérieur même de l'entreprise à caractère industriel, commercial ou de services : chiffres d'affaire, stocks, ventes, prix, vie d'un produit, clientèle, ...

Le domaine d'application des séries chronologiques est très large :

- Prospection et exploitation pétrolières et minières
- Astronomie
- Océanographie, météorologie, hydrologie, environnement,...
- Biologie, médecine
- Physique, ...
- Traitement de signal
- Imagerie médicale
- Ces disciplines scientifiques sont amenées à traiter des données temporelles, en particulier, le traitement du signal, qui intervient dans ces domaines, constitue à lui seul une activité de recherche importante très liée à celle effectuée en séries chronologiques. L'étude des premiers exemples relève essentiellement du domaine temporel alors que le traitement du signal fait beaucoup plus appel à l'analyse spectrale. Les deux approches sont souvent complémentaires.

La spécificité de l'analyse d'une série chronologique, qui la distingue des autres analyses statistiques, est précisément dans l'importance accordée à l'ordre dans lequel sont effectuées les observations. Les méthodes statistiques classiques demandent souvent que les variables étudiées soient stochastiquement indépendantes et observées plusieurs fois.

En séries chronologiques, la dépendance temporelle entre les variables constitue la source principal de l'information. Celle-ci peut être entièrement contenue dans la valeur moyenne des variables, qui sont alors supposées stochastiquement indépendantes. Cependant, l'ordre demeure car cette moyenne représente l'évolution lente du phénomène à laquelle s'ajoute parfois un effet périodique, lorsque la moyenne est nulle ou constante, la dépendante temporelle se situe dans l'organisation des différentes corrélations entre les variables.

Certaines données historiques célèbres sont utilisées par de nombreux auteurs (voir par exemple, Box et Jenkins (1970), Brockwell et Davis (1987)) afin de comparer les différentes méthodes utilisées dans l'analyse d'une série chronologique.

L'analyse des séries chronologiques a connu un grand développement depuis la parution du livre de Box et Jenkins (1970), où les principales propriétés des processus stationnaires autorégressif moyenne mobile ($ARMA$) ont été décrites avec les méthodes d'identification, d'estimation et de validation.

L'utilisation de ces modèles simples s'explique par la forme particulière de la fonction de transfert. Cependant, ces modèles $ARMA$ ne peuvent modéliser des phénomènes à effets « longue mémoire » ou sens où la série chronologique présente une autocorrélation à des instants lointains, autrement dit lorsque les autocorrélations présentent une « décroissance lente ». On peut, dans cette situation, adapter un modèle plus large appelé modèle $ARMA$ fractionnaire et qui présente « une longue mémoire ».

L'étude des modèles à « longue mémoire » et leurs applications constituent actuellement un des domaines populaires de la recherche statistique.

Depuis une vingtaine d'années, la littérature est abondante et riche en résultats. On peut citer les ouvrages généraux de Beran (1994), Deniau, Douklan, Oppenheim et Renault (2000), Doukhan, Oppenheim et Taqqu (2003) et Robinson (2003). Les domaines d'applications utilisant ces modèles n'ont cessé de se développer ces dernières années, touchant des domaines variés. Citons quelques travaux couvrant un large spectre : Hurst (1951), Hosking (1984) en hydrologie, Mandelbot (1962), Lo (1991), Willinger, Taqqu et Teverovsky (1999) en finance, Hassler et Wolters (1995) en macroéconomie, Graf (1983), Beran et Terrin (1996) en géophysique, Taqqu, Willinger, Sherman et Wilson (1997) en télécommunications.

D'autres domaines d'applications plus récents ont fait également l'objet de la modélisation à « longue mémoire » : la psychologie, Wagennakers, Farrel et Ratcliff (2004), Tore, Delignieers et Lemoine (2006) et la démographie, Gil-Alana (2003) et Mishra (2008).

L'objet de notre travail porte sur l'inférence statistique dans une classe de modèles à longue mémoire, plus précisément, les modèles fractionnaires $ARIMA\ (p, d, q)$ définis par

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\,\varepsilon_t, \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned}\phi(B) &= 1-\phi_1 B - \dots - \phi_p B^p,\\ \theta(B) &= 1+\theta_1 B + \dots + \theta_q B^q,\end{aligned}$$

avec B l'opérateur retard et (ε_t) un processus de bruit blanc centré et de variance inconnue σ^2.

Il s'agit, plus précisément d'étudier les problèmes statistiques inférentiels dans le modèle (1) basés sur leurs propriétés spectrales des processus stationnaires et de faire de la prédiction dans le même modèle. Les techniques classiques d'estimation des paramètres du modèle (1) par la méthode du maximum de vraisemblance exacte présentée dans le troisième chapitre sont parfois lourds à exploiter. Certains auteurs utilisent des approximations de la fonction de vraisemblance qui donne des estimateurs asymptotiquement consistants. Une alternative à cette méthode pour estimer le paramètre d présentée dans ce mémoire, consiste à utiliser l'analyse spectrale pour une série chronologique stationnaire. L'outil fondamental utilisé est le périodogramme $I_X(\omega_i)$, $0 < \omega_i \leq \pi$, $i = 1, \dots n$ pour une série chronologique $(X_1, \dots, X_n)$.

L'analyse spectrale pour une série chronologique stationnaire et en particulier l'estimation de la densité spectrale dépend de la distribution asymptotique de $(I_X(\omega_1), ..., I_X(\omega_n))$. Sous les conditions plutôt générales, les $I_X(\omega_i)$, $i = 1, .., n$ sont asymptotiquement indépendants de loi exponentielle de moyenne $2\pi f(\omega_i)$, où f est la densité spectrale du processus (X_t). Le travail proposé dans ce mémoire consiste à utiliser les propriétés asymptotiques du vecteur aléatoire de périodogrammes qui permettent de construire un modèle de régression linéaire en d et basé sur le logarithme du périodogramme . La seconde partie du mémoire porte sur la prédiction dans le modèle (1) en mettant en évidence des équations de récurrence.

Le mémoire se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la présentation du modèle (1), ses propriétés de causalité et d'inversibilité, l'expression de sa fonction d'autocovarince ainsi que sa représentation spectrale.

Le second chapitre porte sur l'estimation de la densité spectrale et les propriétés asymptotiques. L'estimateur utilisé est le périodogramme et le périodogramme modifié. Quelques notions et propriétés de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ on été rappelées, permettant d'introduire la notion de périodogramme. Ensuite, il a été établi la loi du périodogramme dans le cas d'un processus gaussien et dans le cas non gaussien.

Le troisième chapitre est consacré à l'estimation des paramètres du modèle (1). Deux méthodes sont présentées, la première est basé sur le maximum de vraisemblance exacte. La seconde méthode utilise une régression linéaire en d et basée sur le logarithme du périodogramme.

Le quatrième chapitre porte sur les prédictions dans le modèle (1). Les prédictions d'un pas sont établies respectivement dans les modèles $ARIMA(0, d, 0)$, $ARIMA(0, d, q)$. et $ARIMA(p, d, q)$. Des prédictions à l'horizon h sont également étudiées.

Chapitre 1

Processus ARMA fractionnaires

1.1 Processus ARIMA $(0, d, 0)$

Définition 1 *Soit* $d \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, (X_t) *est un processus ARMA fractionnaire à mémoire longue (ARIMA* $(0, d, 0)$*) s'il satisfait l'équation*

$$(1-B)^d X_t = \varepsilon_t,$$

où $\varepsilon_t \sim bb(0,\ \sigma^2)$ *et* B *est l'opérateur retard* ($B^j X_t = X_{t-j}$).

Remarque 1 *On a*

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$$

où

$$\begin{aligned}
\pi_j &= \frac{d(d-1)\ldots(d-j+1)}{j!} \\
&= \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} \\
&= \prod_{0 \leq k \leq j} \frac{k-1-d}{k}, \ j = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

$\Gamma(x)$ etant la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, & \text{si } x > 0 \\ \infty, & \text{si } x = 0 \\ x^{-1}\Gamma(1+x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Définition 2 *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est dit inversible s'il existe une suite de constantes* (π_j) *telle que* $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^2 < \infty$ *et*

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}.$$

Pour un processus fractionnaires $(1-B)^d X_t = \varepsilon_t$, *on a :*

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)}.$$

Définition 3 *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est dit causal s'il existe une suite de constantes* (ψ_j) *telle que* $\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2<\infty$ *et*

$$\begin{aligned}X_t &= (1-B)^d\,\varepsilon_t\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}.\end{aligned}$$

Remarque 2 *Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus fractionnaire* $ARIMA\ (0,d,0)$, *on a le développement en série de*

$$(1-B)^{-d}=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_jB^j$$

où

$$\begin{aligned}\psi_j &= \frac{(-d)\,(-d-1)\ldots(-d-j+1)}{j!}\,(-1)^j\,,\ \ j=0,1,2,\ldots\\ &= \frac{\Gamma\,(j+d)}{\Gamma\,(d)\,\Gamma\,(j+1)}\\ &= \prod_{0\le k\le j}\frac{k-1+d}{k},\ \ j=0,1,2,\ldots\end{aligned}$$

et

$$\frac{\psi_j}{\psi_{j-1}}=\frac{(d+j-1)}{j}$$

ou

$$\psi_j=\frac{(d+j-1)}{j}\psi_{j-1}.$$

Remarque 3 *Le processus* $(1-B)^d\,X_t=\varepsilon_t$ *est causal et inversible si et seulement* $-\frac{1}{2}<d<\frac{1}{2}$.

1.1.1 La fonction d'autocovariance $\gamma\,(h)$ d'un processus $ARIMA\ (0,d,0)$

Soit (X_t) un processus $ARIMA\ (0,d,0)$, on a

$$\nabla^dX_t=\varepsilon_t\Longleftrightarrow\nabla^{-d}\varepsilon_t=X_t=\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}.$$

Il est clair que le processus (X_t) est centré est on a pour $h \geqslant 0$,

$$\gamma(h) = E(X_t\ X_{t+h}) - E(X_t)\,E(X_{t+h})$$

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= E(X_{t+h}\ X_t) \\
&= E\left(\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k\varepsilon_{t+h-k}\right) \\
&= \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\psi_{j+h}
\end{aligned}$$

$$\gamma(h) = \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(d)}\frac{\Gamma(j+h+d)}{\Gamma(j+h+1)\,\Gamma(d)}.$$

1.1.2 La densité spectrale d'un processus $ARIMA\ (0,d,0)$

On a

$$\bigtriangledown^d X_t = \varepsilon_t$$

où (ε_t) est un processus de bruit blanc de variance σ^2.

$$\begin{aligned}
X_t &= \bigtriangledown^{-d}\varepsilon_t \\
&= (1-B)^{-d}\,\varepsilon_t \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{t-j} \\
&= \psi(B)\,\varepsilon_t
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\psi(B) &= (1-B)^{-d} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^j.
\end{aligned}$$

(X_t) est stationnaire de deuxième ordre, donc la densité spectrale $f_X(.)$ du processus (X_t) s'ecrit :

$$f_X(\lambda) = \left|\psi\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2 f_\varepsilon(\lambda)$$

où

$$f_{\varepsilon}(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

est la densité spectrale du processus de bruit blanc (ε_t) , donc

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= \left|1 - e^{-i\lambda}\right|^{-2d} \frac{\sigma^2}{2\pi} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|\cos^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \frac{\lambda}{2} - (\cos 2\left(\frac{\lambda}{2}\right) - i \sin 2\left(\frac{\lambda}{2}\right))\right|^{-2d}
\end{aligned}$$

comme

$$\begin{aligned}
\cos\lambda &= \cos 2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\
\sin\lambda &= \sin 2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|\cos^2 \frac{\lambda}{2} + \sin^2 \frac{\lambda}{2} - \cos^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) + i2\cos\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|2\sin\frac{\lambda}{2}\left(\sin\frac{\lambda}{2} + i\cos\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|2\sin\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d} \underbrace{\left|\sin\frac{\lambda}{2} + i\cos\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d}}_{=1} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|2\sin\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d}
\end{aligned}$$

donc la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$ s'écrit

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} f_X(\lambda)\, d\lambda \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\lambda} \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|2\sin\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d} d\lambda \\
&= \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(h\lambda) \left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d} d\lambda,
\end{aligned}$$

et en utilisant l'égalité

$$\int_0^{\pi} \cos(kx) \sin^{n-1}(x)\, dx = \frac{\pi}{n} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \Gamma(n+1)\, 2^{1-n}}{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-k+1}{2}\right)}$$

on obtient

$$\gamma(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(1-2d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(1-h-d)}\sigma^2, \; h = 0, 1, 2, ...$$

Remarque 4 *La mémoire d'un processus peut-être caractérisée par les propriétés de sa fonction d'autocovariance ou de sa densité spectrale.*

1. Un processus est dit à longue mémoire si

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(j)| &= +\infty, \\ f(0) &= +\infty. \end{aligned}$$

   L'autocovariance entre des observations éloignées du processus n'est pas négligeable.

2. Un processus à courte mémoire sera caractérisé par la propriété suivante

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(j)| &< +\infty, \\ f(0) &< +\infty. \end{aligned}$$

Théorème 1 *Si $d \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, alors il existe un unique processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ solution de $(1-B)^d X_t = \varepsilon_t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Il est défini par*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j},$$

où

$$b_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)}$$

Soit f, γ, corr, corrpart les fonctions de la densité spectrale, autocovariance, autocorrélation partielle associées au processus (X_t), on a alors

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1-e^{-i\lambda}\right|^{-2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|2\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d}, \end{aligned}$$

$$\gamma(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(1-2d)}{\Gamma(1+h-d)\Gamma(1-h-d)}\sigma^2,$$
$$corr(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{0<k\leqslant h} \frac{k-1+d}{k-d}, \ h = 1,2,...,$$
$$corrpart(h) = d/(h-d), \ h = 1,2,....,$$

Démonstration. Montrons que $d \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\Leftrightarrow$ Il existe un unique processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ solution de $(1-B)^d X_t = \varepsilon_t$, $\forall t \in \mathbb{Z}$ tel que $X_t = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$.

1^{ere} Cas : $0 < d < \frac{1}{2}$

Les coefficients b_j sont ceux du développement de $(1-z)^{-d}$. Ils appartiennent à l^2, et d'où $\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j e^{-i\lambda}$ converge dans $L^2(]-\pi,\pi[,\lambda)$.

De plus, par un théorème de Carleman, cette série de fonctions converge ponctuellement presque partout vers $\left(1-e^{-i\lambda}\right)^{-d} \in L^2(]-\pi,\pi[,\lambda)$,

$(1-B)^{-d}\varepsilon_t = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$ converge dans L^2 et est stationnaire.

Si ε_t est représenté par

$$\varepsilon_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dW(\lambda),$$

où $\{W(\lambda), \ -\pi < \lambda \leq \pi\}$ est un processus à valeurs complexes et à accroissements orthogonaux, alors

$$(1-B)^{-d}\varepsilon_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\left(1-e^{-i\lambda}\right)^{-d} dW(\lambda).$$

Si $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est la suite des coefficient du développement $(1-z)^d$, alors $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in l^1$. On peut appliquer l'opérateur $(1-B)^d$ au processus $(1-B)^{-d}\varepsilon_t$ et

$$\begin{aligned}
(1-B)^d(1-B)^{-d}\varepsilon_t &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1-e^{-i\lambda}\right)^d \left(1-e^{-i\lambda}\right)^{-d} e^{it\lambda} dW(\lambda), \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} dW(\lambda) \\
&= \varepsilon_t.
\end{aligned}$$

Le processus $X_t = (1-B)^{-d}\varepsilon_t$ est donc bien solution du problème.

Montrons l'unicité de cette solution. Soit $Y_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ_Y(\lambda)$ une autre solution stationnaire, où $\{Z_Y(\lambda), \ -\pi < \lambda \leq \pi\}$ est un processus à valeurs complexes et à accroissements orthogonaux.

On a

$$(1-B)^d Y_t = \varepsilon_t.$$

Or la solution calculée est $X_t = (1-B)^{-d}\varepsilon_t$

$$\begin{aligned} X_t &= (1-B)^{-d}(1-B)^d Y_t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \left(1-e^{-i\lambda}\right)^{-d} \left(1-e^{-i\lambda}\right)^{d} dZ_Y(\lambda) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dZ_Y(\lambda) \\ &= Y_t. \end{aligned}$$

2^{eme} Cas : $-\frac{1}{2} < d < 0$

La démonstration est similaire à cela prés qu'on applique à ε_t d'abord le filtre dans l^1 (obtenant ainsi un processus à densité spectrale continue bornée) puis le filtre inverse à coefficients dans l^2.

Cas $d = 0$: Il ne présente pas d'intérêt.

La densité spectrale de $(X_t)_t$ se calcule directement par

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1-e^{-i\lambda}\right|^{-2d} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|2\sin\frac{\lambda}{2}\right|^{-2d}, \end{aligned}$$

d'où l'autocovariance :

$$\forall h \in \mathbb{N},\ Cov(h) = \frac{(-1)^h \Gamma(1-2d)}{\Gamma(1+h-d)\Gamma(1-h-d)}\sigma^2.$$

L'application de l'algorithme de Durbin –Levinson donne pour l'autocorrélation partielle d'ordre h :

$$\begin{aligned} Corrpart\,(h) &= -\frac{\Gamma\,(h-d)\,\Gamma\,(1-d)}{\Gamma\,(d)\,\Gamma\,(h-d+1)} \\ &= \frac{d}{h-d}. \end{aligned}$$

■

1.2 Processus $ARIMA\ (p,d,q)$

Définition 4 *Soit* $d \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $ARIMA\ (p,d,q)$ *si* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est une solution stationnaire de l'équation*

$$\phi\,(B)\,(1-B)^d\,X_t = \theta\,(B)\,\varepsilon_t,$$

où ϕ *et* θ *sont des polynômes premiers entre eux de degré respectif* p *et* q *et* (ε_t) *un processus de bruit blanc* $(0,\sigma^2)$.

On voit immédiatement que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $ARIMA\ (p,d,q)$ si et seulement si $Y_t = (1-B)^d X_t$ est un processus $ARMA\ (p,q)$.

On peut remarquer aussi, que si de plus $\theta\,(z)$ n'a pas de zéro dans le disque unité fermé, alors le processus $Y_t = \phi\,(B)\,\theta^{-1}\,(B)\,X_t$ vérifie $(1-B)^d Y_t = \varepsilon_t$ et $\phi\,(B)\,X_t = \theta\,(B)\,Y_t$: on peut donc voir un processus $ARIMA\ (p,d,q)$ comme un processus "$ARMA\ (p,q)$" conduit par un bruit fractionnaire.

Propriétés d'un processus *ARIMA* (p,d,q)

Théorème 2 *Soit* $d \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, ϕ *et* θ *deux polynômes sans racines communes.*

a) *Si* $\phi(z) \neq 0$ *pour chaque* $|z| = 1$, *alors il existe une unique solution donnée par*

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j (1-B)^{-d} \varepsilon_{t-j}$$

où $\psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\phi(z)}$.

b) *La solution de* (X_t) *est causale si et seulement si* $\phi(z) \neq 0$ *pour* $|z| \leq 1$.

c) *La solution est inversible si et seulement si* $\theta(z) \neq 0$ *pour* $|z| \leq 1$.

d) *Si la solution* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est causale et inversible, alors si* $d \neq 0$, *la fonction d'autocorrelation*

$$\rho(h) = 0\left(h^{2d-1}\right) \text{ quand } h \to \infty,$$

et sa densité spectrale

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\theta\left(e^{-i\lambda}\right)}{\phi\left(e^{-i\lambda}\right)} \right|^2 \left|1 - e^{-i\lambda}\right|^{-2d} \\ &\underset{\lambda\to 0}{\simeq} \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\frac{\theta(1)}{\phi(1)}\right) \lambda^{-2d}. \end{aligned}$$

Démonstration. L'existence et l'unicité d'une solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ d'un modèle *ARIMA* (p,d,q) se montrent de manière analogue à ceux des modèles *ARMA* classiques et à ceux d'un processus fractionnaire *ARIMA* $(0,d,0)$ du Théorème 1 précédent.

Montrons les propriétés de la fonction d'autocorrélation $\rho(h)$.

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est causale $\phi(z) \neq 0$, $|z| \leq 1$, on écrit :

$$X_t = \psi(B) Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}$$

où

$$Y_t = (1-B)^{-d} \varepsilon_t$$

et

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j \\
&= \frac{\theta(z)}{\phi(z)}.
\end{aligned}$$

Soit $\gamma_Y(.)$ la fonction d'autocovariance de (Y_t) et $\gamma_X(.)$ celle du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$. On a :

$$\gamma_X(h) = Cov(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h}\ X_t) - E(X_{t+h})E(X_t)$$

$$\begin{aligned}
E(X_{t+h}\ X_t) &= \lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{j=-n}^{n} \psi_j Y_{t+h-j}\right)\left(\sum_{k=-n}^{n} \psi_k Y_{t-k}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n}\sum_{k=-n}^{n} \psi_j \psi_k E(Y_{t+h-j}\ Y_{t-k}).
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
E(Y_{t+h-j}\ Y_{t-k}) &= Cov(Y_{t+h-j}, Y_{t-k}) + E(Y_{t+h-j})E(Y_{t-k}) \\
&= \gamma_Y(h-j+k) + [E(Y_t)]^2,
\end{aligned}$$

donc

$$E(X_{t+h}\ X_t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \left[\gamma_Y(h-j+k) + [E(Y_t)]^2\right]$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma_X(h) &= Cov(X_{t+h}, X_t) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_k \gamma_Y(h-j+k) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k} \gamma_Y(h-k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{\gamma}(k)\, \gamma_Y(h-k)
\end{aligned}$$

où $\widetilde{\gamma}(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$ est la fonction d'autocovariance d'un processus $ARMA$ dont le bruit blanc a pour variance $\sigma^2 = 1$. Donc

$$|\tilde{\gamma}(k)| < cr^k$$

avec $0 < r < 1$ (Comportement de la fonction d'autocovariance d'un processus $ARMA$ classique).

Ainsi, la quantité

$$h^{1-2d} \sum_{|k|>\sqrt{h}} |\tilde{\gamma}(k)| \to 0 \text{ quand } h \to \infty.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h^{1-2d}\gamma_X(h) &= h^{1-2d} \sum_{|k|>\sqrt{h}} \tilde{\gamma}(k)\,\gamma_Y(h-k) \\ &\quad + h^{1-2d} \sum_{|k|\leq\sqrt{h}} \tilde{\gamma}(k)\,\gamma_Y(h-k)\,. \end{aligned}$$

Le premier terme du deuxième membre tend vers zéro car $\gamma_Y(h-k)$ reste toujours bornée. Or

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h-k) &= 0\left((h-k)^{2d-1}\right) \\ &= 0\left(h^{2d-1}\right), \end{aligned}$$

quand $h \to \infty$ uniformément pour tout k tel que $|k| \leq \sqrt{h}$.

On en déduit que $h^{1-2d}\gamma_X(h)$ converge vers $C\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(k)$ quand $h \to +\infty$.

Donc, la fonction d'autocorrélation

$$\rho(h) = 0\left(h^{2d-1}\right), \text{ quand } h \to \infty.$$

La densité spectrale de (X_t) satisfaisant le modèle

$$X_t = \psi(B)\, Y_t,$$

s'écrit

$$f_X(\lambda) = \left|\psi\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2 f_Y(\lambda)$$

où $f_Y(\lambda)$ est la densité spectrale du processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Comme $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus fractionnaire $ARIMA(0,d,0)$ vérifiant

$$(1-B)^d Y_t = \varepsilon_t,$$

où $\varepsilon_t \sim bb(0,\sigma^2)$,

par ailleurs

$$\psi(z) = \theta(z)/\phi(z),$$

on a :

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\left|\theta e^{-i\lambda}\right|^2}{\left|\phi e^{-i\lambda}\right|^2}\left|1-e^{-i\lambda}\right|^{-2d},$$

et quand $\lambda \to 0$

$$f_X(\lambda) \simeq \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(\frac{\theta(1)}{\phi(1)}\right)^2 \lambda^{-2d}.$$

■

Chapitre 2

Estimation de la densité spectrale et propriétés asymptotiques

Ce chapitre est consacré à l'estimation dans le domaine spectral d'un processus stationnaire basé sur une série d'observations. Plus précisément, il s'agit de l'estimation de la densité spectrale $f(\lambda)$ dont l'outil fondamental utilisé est le periodogramme.

2.1 Le périodogramme

Considérons n observations $x_1, ..., x_n$ (éventuellement dans $\mathbb{C}$). On pose

$$x = (x_1, ..., x_n)'$$

le vecteur n-dimensionnel dans l'espace $\mathbb{C}^n$.

Si $u = (u_1, u_2, ..., u_n)'$ et $v = (v_1, v_2, ..., v_n)'$ sont deux éléments de $\mathbb{C}^n$, on définit le produit scalaire de u et v par

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{2.1}$$

En supposant que les données $x_1, ..., x_n$ sont des valeurs d'une fonction de période n, chacune des valeurs x_t peut s'écrire sous la forme :

$$x_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j \in F_n} a_j e^{it\frac{2\pi j}{n}}, \tag{2.2}$$

où

$$\begin{aligned} F_n &= \left\{ j \in \mathbb{Z} / -\pi < \frac{2\pi j}{n} \leq \pi \right\} \\ &= \left\{ -\left[\frac{n-1}{2}\right], ..., \left[\frac{n}{2}\right] \right\}, \end{aligned}$$

avec $[x]$ la partie entière de x.

Les fréquences $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, $-\pi < \omega_j \leq \pi$ sont appelées les fréquences de Fourier de la suite $\{x_1, ..., x_n\}$.

La représentation (2.2) peut s'écrire sous forme vectorielle comme suit :

$$x = \sum_{j \in F_n} a_j e_j, \tag{2.3}$$

où

$$e_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e^{i\frac{2\pi j}{n}}, e^{i2\frac{2\pi j}{n}}, ..., e^{in\frac{2\pi j}{n}} \right)', \ j \in F_n. \tag{2.4}$$

Remarque 1 *On vérifie facilement que les vecteurs donnés par (2.4) constituent une base orthonormale dans* $\mathbb{C}^n$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a

$$x = \sum_{j \in F_n} a_j e_j, \tag{2.5}$$

où

$$a_j = \langle x, e_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} x_t e^{-it\frac{2\pi j}{n}}, \ j \in F_n. \tag{2.6}$$

La suite $\{a_j, \ j \in F_n\}$ n'est rien d'autre que la transformée de Fourier discrète de $x \in \mathbb{C}^n$.

Définition 1 *On appelle le périodogramme de* $x = (x_1, ..., x_n)'$ *en* $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, $j \in F_n$, *la quantité donnée par*

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= |a_j|^2 \\ &= |\langle x, e_j \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^{n} x_t e^{-it\omega_j} \right|^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où a_j *est la transformée de fourrier discrète de* $x = (x_1, ..., x_n)'$.

Remarque 2 *Puisque* $\|x\|^2 = \sum_{j \in F_n} |\langle x, e_j \rangle|^2$, *on a*

$$\|x\|^2 = \sum_{j \in F_n} I(\omega_j), \tag{2.8}$$

où $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$.

L'expression du péridogramme peut également s'écrire en fonction de la fonction d'autocovariance empirique de $\{x_1, ..., x_n\}$

$$\widehat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_{t+k} - m)(\overline{x}_t - \overline{m}),\ k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2.9}$$

avec $m = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t$ et $\widehat{\gamma}(k) = \overline{\gamma(-k)}$, pour $k < 0$.

Son expression est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $x = (x_1, ..., x_n)' \in \mathbb{C}^n$, $\widehat{\gamma}(k)$ la fonction d'autocovariance empirique d'ordre k définie par (2.9). Si ω_j est la fréquence de Fourier, alors le périodogramme de $\{x_1, ..., x_n\}$*

$$I(\omega_j) = \sum_{|k|<n}\widehat{\gamma}(k)\, e^{-ik\omega_j}. \tag{2.10}$$

Démonstration. Par définition

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} x_t e^{-it\omega j}\right|^2 \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} x_t e^{-it\omega_j}\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\overline{x}_s e^{is\omega_j}\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\sum_{t=1}^{n} e^{-it\omega_j} = \sum_{s=1}^{n} e^{is\omega_j} = 0,\ \text{si } \omega_j \neq 0,$$

ainsi

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(x_t - m)(\overline{x}_s - \overline{m})\, e^{-i(t-s)\omega_j} \\ &= \sum_{|k|<n}\widehat{\gamma}(k)\, e^{-ik\omega_j},\ \text{en posont } k = t - s. \end{aligned}$$

■

Remarque 3 *Si $\gamma(k)$ est la fonction d'autocovariance d'ordre k d'un processus stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ avec $\sum_k |\gamma(k)| < \infty$, alors sa densité spectrale a pour expression*

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\gamma(k)\, e^{-ik\omega}, -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Ainsi, d'après l'expression (2.10), $\dfrac{I(\omega_j)}{2\pi}$ *peut être pris comme estimateur naturel de* $f(\omega_j)$ *.*

2.2 Propriétés asymptotiques du périodogramme

L'objet de cette partie est de donner les propriétés asymptotiques du périodogramme de $\{x_1, ..., x_n\}$ lorsque le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire du second ordre de moyenne μ et de fonction d'autocovariance $\gamma(.)$ absolument sommable. Sous ces conditions, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ a une densité spectrale continue, donnée par

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\gamma(k)\,e^{-ik\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi. \tag{2.11}$$

Le périodogramme de $\{x_1, ..., x_n\}$ est défini en $\omega_j = \frac{2\pi j}{n} \in [-\pi, \pi]$ (fréquence de Fourier), par

$$I_n(w_j) = \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_j}\right|^2.$$

Remarque 4 *D'après la proposition 1 cette définition est équivalente à*

$$\begin{cases} I_n(0) = n\left|\overline{X}\right|^2 \\ I_n(\omega_j) = \sum\limits_{|k|<n}\widehat{\gamma}(k)\,e^{-ik\omega_j}, \ \ si\ \omega_j \neq 0, \end{cases} \tag{2.12}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t, \\ \widehat{\gamma}(k) &= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-|k|}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t+|k|} - \overline{X}\right). \end{aligned}$$

Proposition 2 *Soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus stationnaire du second ordre de moyenne* μ *et de fonction d'autocovariance* $\gamma(.)$ *absolument sommable* $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\gamma(k)|<\infty\right)$, *alors, quand* $n\to\infty$ *on a*

i) $E(I_n(0)) - n\mu^2 \longrightarrow 2\pi f(0)$,

ii) $E(I_n(\omega_j)) \longrightarrow 2\pi f(\omega_j)$ *si* $\omega_j \neq 0$.

Remarque 5 *Si* $\mu = 0$, *alors* $E(I_n(\omega_j))$ *converge uniformement vers* $2\pi f(w_j)$, $\forall w_j \in [-\pi,\pi]$.

Démonstration de la Proposition 2.

D'après la relation (2.12), on a

$$I_n(0) = n\left|\overline{X}\right|^2,$$

et

$$I_n(\omega_j) = \sum_{|k|<n}\widehat{\gamma}(k)\,e^{-ik\omega_j}, \text{ si } \omega_j \neq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} E(I_n(0)) &= nE\left(\left|\overline{X}\right|^2\right) \\ &= n\left[Var\left(\overline{X}\right) + \left(E\left(\overline{X}\right)\right)^2\right] \\ &= nVar\left(\overline{X}\right) + n\mu^2, \end{aligned}$$

ou encore

$$E(I_n(0)) - n\mu^2 = nVar\left(\overline{X}\right).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} nVar\left(\overline{X}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov(X_i,X_j) \\ &= \sum_{|h|<n}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\gamma(h). \end{aligned}$$

Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$, alors d'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} nVar\left(\overline{X}\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{|h|<n} \left(1-\frac{|h|}{n}\right)\gamma(h) \\
&= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \\
&= 2\pi f(0),
\end{aligned}$$

d'après la relation (2.11).

Si $\omega_j \in \left]0,\pi\right]$, pour montrer la propriété asymptotique de $I_n(.)$, il est plus convenable d'utiliser la représentation équivalente (asymptotiquement)

$$I_n(\omega_j) = \sum_{|k|<n} \frac{1}{n}\left[\sum_{t=1}^{n-|k|} (X_t-\mu)\left(X_{t+|k|}-\mu\right)\right] e^{-ik\omega_j}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E(I_n(\omega_j)) &= \sum_{|k|<n} \frac{1}{n}\left[\sum_{t=1}^{n-|k|} E(X_t-\mu)\left(X_{t+|k|}-\mu\right)\right] e^{-ik\omega_j} \\
&= \sum_{|k|<n} \frac{1}{n}(n-|k|)\gamma(k)e^{-ik\omega_j} \\
&= \sum_{|k|<n} \left(1-\frac{|k|}{n}\right)\gamma(k)e^{-ik\omega_j}.
\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ et d'après le théorème de convergence dominé, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} E(I_n(\omega_j)) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)e^{-ik\omega_j} \\
&= 2\pi f(\omega_j).
\end{aligned}$$

■

Remarque 6 *Notons que le périodogramme $I_n(\omega_j)$ de $\{X_1, ..., X_n\}$ peut se mettre sur la forme*

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2(\omega_j) + \beta^2(\omega_j)\right], \ j = 1, 2, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

où

$$\begin{cases} \alpha(\omega_j) = \sqrt{\dfrac{2}{n}} \sum\limits_{t=1}^{n} X_t \cos(\omega_j t), \ t = 1, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right], \\ \beta(\omega_j) = \sqrt{\dfrac{2}{n}} \sum\limits_{t=1}^{n} X_t \sin(\omega_j t), \ t = 1, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right]. \end{cases} \tag{2.13}$$

Donc si $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance σ^2, alors les variables aléatoires $\alpha(\omega_j)$ et $\beta(\omega_j)$ sont indépendantes de loi normale $N(0, \sigma^2)$, car $\left\{c_j, s_j, j = 1, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right]\right\}$, est une base orthonormale dans $\mathbb{R}^n$, où

$$c_j = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\cos\omega_j, \cos 2\omega_j, ..., \cos n\omega_j\right)',$$

et

$$s_j = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\sin\omega_j, \sin 2\omega_j, ..., \sin n\omega_j\right)'.$$

Ainsi les périodogrammes

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2}\left[\alpha^2(\omega_j) + \beta^2(\omega_j)\right], \ j = 1, 2, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

sont indépendants de loi exponentielle de moyenne $\sigma^2 = 2\pi f_X(\omega_j)$, où f_X est la densité spectrale du processus (X_t).

Le même résultat peut être établi dans le cas où les variables X_t sont i.i.d de moyenne nulle et de variance σ^2, formulé dans la proposition suivante.

Proposition 3 *Soit $\{X_t, \ t \in \mathbb{Z}\}$ un processus de bruit blanc i.i.d de moyenne nulle et de variance σ^2 et $I_n(\omega)$ le périodogramme de $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.*

(i) Si $0 < \omega_j = \frac{2\pi j}{n} < \pi$ pour tout $j = 1, ..., n$ alors quand $n \to \infty$ le vecteur aléatoire $(I_n(\omega_1), I_n(\omega_2), ..., I_n(\omega_n))'$ converge en loi vers un vecteur de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de moyenne σ^2.

(ii) *Si* $E\left(X_1^4\right)=\eta\sigma^4<\infty$ *et* $0\leq\omega_j=\frac{2\pi j}{n}\leq\pi,$ *alors*

$$Var\left(I_n\left(\omega_j\right)\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\left(\eta-3\right)\sigma^4+2\sigma^4 \ \ si\ \omega_j=0\ \ ou\ \pi\\ \dfrac{1}{n}\left(\eta-3\right)\sigma^4+\sigma^4\ \ si\ 0<\omega_j<\pi,\end{cases}$$

et

$$Cov\left(I_n\left(\omega_j\right),I_n\left(\omega_k\right)\right)=\frac{1}{n}\left(\eta-3\right)\sigma^4\ \ si\ \omega_j\neq\omega_k.$$

Remarque 7 *Si* $X_1\sim N\left(0,\sigma^2\right),$ *alors* $\eta=3,$ *ainsi* $I_n\left(\omega_j\right)$ *et* $I_n\left(\omega_k\right)$ *sont non corrélées pour* $j\neq k.$

Démonstration de la Proposition 3.

(i) Soit $\omega_j=\frac{2\pi j}{n}\in\left]0,\pi\right[,\ j=1,...,n.$ Puisque

$$I_n\left(\omega_j\right)=\frac{1}{2}\left[\alpha^2\left(\omega_j\right)+\beta^2\left(\omega_j\right)\right],$$

où $\alpha\left(\omega_j\right)$ et $\beta\left(\omega_j\right)$ sont donnés par (2.13), il suffit de montrer que

$$\left(\alpha\left(\omega_1\right),\beta\left(\omega_1\right),...,\alpha\left(\omega_n\right),\beta\left(\omega_n\right)\right)'$$

est un vecteur asymptotiquement normale centré et de matrice de variance–covariance $\sigma^2 I_{2m}$, avec I_{2m} la matrice identité $\left(2m\times 2m\right).$ On a

$$\sum_{t=1}^{n}\cos^2\left(\frac{2\pi kt}{n}\right)=\frac{n}{2},$$

pour tout $0<k<\frac{n}{2}$, donc

$$\begin{aligned}Var\left(\alpha\left(\omega_j\right)\right)&=\sigma^2\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n}\cos^2\left(\omega_j t\right)\\&=\sigma^2\end{aligned}$$

et pour tout $\varepsilon>0$,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}E\left(\cos^2\left(\omega_j t\right)X_t^2\ 1_{\left\{\left|\cos\left(\omega_j t\right)X_t\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}}\right)\\ \leq\ &\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}E\left(X_t^2\ 1_{\left\{\left|X_t\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}}\right)\\ =\ &E\left(X_1^2\ 1_{\left\{\left|X_t\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}}\right)\longrightarrow 0 \text{ quand } n\rightarrow\infty,\end{aligned}$$

Ce qui entraine, d'après la condition de Lindeberg, que $\alpha(\omega_j)$ suit asymptotiquement une loi normale $N(0, \sigma^2)$, quand $n \longrightarrow \infty$.

De même, en utilisant le fait que

$$\sum_{t=1}^{n} \sin^2\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) = \frac{n}{2},$$

pour tout $0 < k < \frac{n}{2}$, et

$$\sum_{t=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi kt}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi jt}{n}\right) = 0,$$

pour tout $k, j = 1, ..., n$.

On montre que $\beta(\omega_j)$ est également asymptotiquement normale $N(0, \sigma^2)$, quand $n \to \infty$ et que la matrice des covariances de $(\alpha(\omega_1), \beta(\omega_1), ..., \alpha(\omega_n), \beta(\omega_n))'$ est $\sigma^2 I_{2m}$.

Ainsi, d'après le principe de Cramer-Wold, on a la convergence en loi de $(I_n(\omega_1), ..., I_n(\omega_n))'$ vers un vecteur de variables aléatoires dont chacune des composantes suit une loi exponentielle de moyenne σ^2.

(ii) Par définition

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_j}\right|^2,$$

donc

$$I_n(\omega_j) = \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} X_s X_t e^{i\omega_j(s-t)},$$

ainsi

$$E(I_n(\omega_j) I_n(\omega_k)) = \frac{1}{n^2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{u=1}^{n}\sum_{v=1}^{n} E(X_s X_t X_u X_v) e^{i\omega_j(s-t)} e^{i\omega_k(u-v)}.$$

Or

$$E(X_s X_t X_u X_v) = \begin{cases} \eta\sigma^4 & \text{si} \quad s = t = u = v, \\ \sigma^4 & \text{si} \quad s = t \neq u = v, \\ 0 & \text{si} \quad s \neq t, s \neq u \text{ et } s \neq v, \end{cases}$$

donc

$$
\begin{aligned}
E\left(I_n\left(\omega_j\right) I_n\left(\omega_k\right)\right) &= \frac{1}{n}(\eta-3)\,\sigma^4+\sigma^4\left(1+\frac{1}{n^2}\left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_j+\omega_k)t}\right|^2\right. \\
&\left.+\frac{1}{n^2}\left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_j-\omega_k)t}\right|^2\right)
\end{aligned}
$$

Par ailleurs

$$
\begin{aligned}
E\left(I_n\left(\omega_j\right)\right) &= \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} E\left(X_s X_t\right) e^{i\omega_j(s-t)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left(X_t^2\right) \\
&= \sigma^2,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
Cov\left(I_n\left(\omega_j\right), I_n\left(\omega_k\right)\right) &= \frac{1}{n}(\eta-3)\,\sigma^4+\frac{\sigma^4}{n^2}\left(\left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_j+\omega_k)t}\right|^2\right. \\
&\left.+\left|\sum_{t=1}^{n} e^{i(\omega_k-\omega_j)t}\right|^2\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui entraine les expressions de $Var\left(I_n\left(\omega_j\right)\right)$ et de $Cov\left(I_n\left(\omega_j\right), I_n\left(\omega_k\right)\right)$ donneés en (ii) de la proposition 3.

■

2.3 Extension à un processus linéaire

Les résultats de la Proposition 3 peuvent être étendus à un modèle linéaire de la forme

$$
X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \tag{2.14}
$$

où (ε_t) est un processus de bruit blanc i.i.d de moyenne nulle et de variance σ^2 et tel que $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| < \infty$.

Les modèles AR, MA, $ARMA$ et $ARIMA$ ($ARMA$ fractionnaire) peuvent se mettre sous la forme (2.14), sous certaines conditions de leurs paramètres.

On sait que la densité spectrale $f_X(.)$ du processus (X_t) est reliée à celle du processus $f_\varepsilon(.)$ de bruit blanc par

$$f_X(\omega) = \left|\psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_\varepsilon(\omega), \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \tag{2.15}$$

où

$$\psi(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j$$

et

$$f_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} I_n^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} I_n(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \widehat{\gamma}(k)\, e^{-ik\omega}, \end{aligned}$$

d'après la relation (2.12), est qui peut être considérée comme une version empirique de la densité spectrale

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)\, e^{-ik\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi,$$

en supposant que $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty$ (condition garantissant la condition de $f(\omega)$).
$I_n^*(\omega)$ peut être défini comme étant «le périodogramme modifié» (ou simplement périodogramme lorsqu'il n'y a pas de confusion).

Il serait donc intéressant d'établir une relation similaire à celle de (2.15) qui relie le périodogramme de (X_t) et celui de (ε_t).
Nous allons maintenant donner dans le théorème suivant la loi asymptotique du vecteur aléatoire $(I_n(\omega_1), ..., I_n(\omega_m))'$, où $I_n(\omega_k)$ est le prédiodogramme d'un processus linéaire donné par la relation (2.14).

Théorème 1 *Soit* (X_t) *un processus linéaire de la forme (2.14). On note* $I_{n,X}(\omega)$ *et* $I_{n,\varepsilon}(\omega)$ *les périodogrammes respectivement de* $\{X_1,...,X_n\}$ *et* $\{\varepsilon_1,...,\varepsilon_n\}$.

(i) *Si* $\omega_k = \frac{2\pi k}{n} \in [0,\pi]$, *alors on a*

$$I_{n,X}(\omega_k) = \left|\psi\left(e^{-i\omega_k}\right)\right|^2 I_{n,\varepsilon}(\omega_k) + R_n(\omega_k),$$

où $\max_{\omega_k\in[0,\pi]} E\left|R_n(\omega_k)\right| \longrightarrow 0$ *quand* $n\to\infty$.

Si en plus, $\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left|\psi_j\right||j|^{1/2} < \infty$ *et* $E\left|\varepsilon_1^4\right| < \infty$, *alors*

$$\max_{\omega_k\in[0,\pi]} E\left|R_n(\omega_k)\right|^2 = \bigcirc\left(\frac{1}{n}\right).$$

(ii) *Si la densité spectrale du processus* (X_t), $f(\omega) > 0$ *pour tout* $\omega\in[-\pi,\pi]$ *et si* $0<\omega_1<...<\omega_n<\pi$, *alors le vecteur aléatoire des préiodogrammes* $(I_{n,X}(\omega_1),...,I_{n,X}(\omega_m))'$ *converge en loi vers un vecteur aléatoire* $(\xi_1,...,\xi_m)'$ *dont les composantes* ξ_i, $i=1,...,m$ *sont indépendantes et de loi exponentielle avec* ξ_i *de moyenne* $2\pi f(\omega_i)$, $i=1,...,m$.

Démonstration.

(i) Soit $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}\in[0,\pi]$, $J_X(\omega_k)$ et $J_\varepsilon(\omega_k)$ les transformées de Fourier discrètes respectivement de (X_t) et (ε_t), c'est-à-dire

$$J_X(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_k}$$

et

$$J_\varepsilon(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t e^{-it\omega_k}.$$

On a

$$\begin{aligned} J_X(\omega_k) &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j e^{-ij\omega_k}\left(\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_{t-j}e^{-i(t-j)\omega_k}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j e^{-ij\omega_k}\left(\sum_{t=1-j}^{n-j}\varepsilon_t e^{-it\omega_k}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_j e^{-ij\omega_k}\left(\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t e^{-it\omega_k} + S_{nj}\right), \end{aligned}$$

où

$$S_{nj} = \sum_{t=1-j}^{n-j} \varepsilon_t e^{-it\omega_k} - \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t e^{-it\omega_k}.$$

La transformée de Fourier discrète $J_X(\omega_k)$ s'écrit encoure sous la forme

$$J_X(\omega_k) = \psi\left(e^{-i\omega_k}\right) J_\varepsilon(\omega_k) + Z_n(\omega_k), \tag{2.16}$$

où

$$Z_n(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ij\omega_k} S_{nj}.$$

Remarquons que si $|j| < n$, alors S_{nj} est une somme de $2|j|$ variables aléatoires indépendantes, tandis que si $|j| \geq n$, S_{nj} est une somme de $2n$ variables aléatoires indépendantes. Ce qui entraine que

$$E|S_{nj}|^2 \leq 2\min(|j|, n)\sigma^2,$$

donc

$$\begin{aligned} E|Z_n(\omega_k)|^2 &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{E|S_{nj}|^2}\right)^2 \\ &\leq 2\sigma^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{\min(|j|, n)}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Soit m un nombre entier positif fixé, on a pour tout $n > m$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{\min(|j|, n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{|j| \leq m} |\psi_j| |j|^{1/2} + \sum_{|j|>m} |\psi_j|,$$

donc

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| \sqrt{\min(|j|, n)} \leq \sum_{|j|>m} |\psi_j|.$$

m etant choisi arbitraire, il s'ensuit d'après (2.17) que $E|Z_n(\omega_k)|^2 \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$. Par ailleurs, on a

$$I_{n,X}(\omega_k) = J_X(\omega_k) J_X(-\omega_k)$$

et

$$I_{n,\varepsilon}(\omega_k) = J_\varepsilon(\omega_k)\, J_\varepsilon(-\omega_k)$$

et d'après (2.16)

$$I_{n,X}(\omega_k) = \left|\psi\left(e^{-i\omega_k}\right)\right|^2 I_{n,\varepsilon}(\omega_k) + R_n(\omega_k),$$

où

$$R_n(\omega_k) = \psi\left(e^{-i\omega_k}\right) J_\varepsilon(\omega_k)\, Z_n(-\omega_k) + \psi\left(e^{+i\omega_k}\right) J_\varepsilon(-\omega_k)\, Z_n(\omega_k) + \left|Z_n(\omega_k)\right|^2.$$

Puisque

$$\left|\psi\left(e^{-i\omega_k}\right)\right| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| < \infty,$$

$$\begin{aligned} E\left|J_\varepsilon(\omega_k)\right|^2 &= E\left(I_{n,\varepsilon}(\omega_k)\right) \\ &= \sigma^2, \end{aligned}$$

et que la borne dans la relation (2.17) ne dépend pas de ω_k, d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\max_{\omega_k \in [0,\pi]} E\left|R_n(\omega_k)\right| \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Par ailleurs si $E\left(\varepsilon_1^4\right) < \infty$ et $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| |j|^{1/2} < \infty$, alors

$$E\left|S_{nj}\right|^4 \leq 2|j|\, E\left(\varepsilon_1^4\right) + 3\left(2|j|\,\sigma^2\right)^2,$$

ainsi

$$\begin{aligned} E\left|Z_n(\omega_k)\right|^4 &\leq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| \left[2|j|\, E\left(\varepsilon_1^4\right) + 12|j|^2 \sigma^4\right]^{1/4}\right)^4 \\ &= \bigcirc\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwaz et la Proposition 3 à chaque terme de $R_n^2(\omega_k)$, on obtient

$$\max_{\omega_k \in [0,\pi]} E\left|R_n(\omega_k)\right|^2 = \bigcirc\left(\frac{1}{n}\right).$$

(ii) D'après le résultat précédent (i), on a

$$I_{n,X}(\omega_k) = \left|\psi\left(e^{-i\omega k}\right)\right|^2 I_{n,\varepsilon}(\omega_k) + R_n(\omega_k),$$

avec $R_n(\omega_k) \xrightarrow{P} 0$, quand $n \to \infty$.

Or la densité spectrale du processus (X_t) est reliée à la densité spectrale du processus de bruit blanc (ε_t), d'après la relation (2.15) par

$$f_X(\omega) = \left|\psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_\varepsilon(\omega),$$

pour tout $\omega \in [-\pi, \pi]$, avec $f_\varepsilon(\omega) = \dfrac{\sigma^2}{2\pi}$, donc la relation reliant $I_{n,X}$ et $I_{n,\varepsilon}$ peut encore s'écrire

$$I_{n,X}(\omega_k) = \frac{2\pi}{\sigma^2} f_X(\omega_k) I_{n,\varepsilon} + R_n(\omega_k),$$

avec $R_n(\omega_k) \xrightarrow{P} 0$ quand $n \to \infty$.

En utilisant (i) de la Proposition 3, c'est-à-dire que $(I_{n,\varepsilon}(\omega_1), ..., I_{n,\varepsilon}(\omega_m))'$ converge en loi vers un vecteur aléatoire $(\tau_1, ..., \tau_m)'$ dont les composantes τ_i sont indépendantes et que τ_i suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\sigma^2}$ (ou de moyenne σ^2) et en utilisant le fait que $R_n(\omega_k) \xrightarrow{P} 0$ quand $n \to \infty$, on en déduit que le vecteur aléatoire $(I_{n,X}(\omega_1), ..., I_{n,X}(\omega_m))'$ converge en loi vers un vecteur aléatoire $(\xi_1, ..., \xi_m)'$ dont les composantes ξ_i sont indépendantes et que ξ_i suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\pi f(\omega_i)}$ (ou de moyenne $2\pi f(\omega_i)$), $i = 1, ..., m$.

■

2.4 Estimation à fenêtre de la densité spectrale

Considérions le processus linéaire (X_t), défini par

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \tag{2.18}$$

où (ε_t) est un bruit blanc iid $(0, \sigma^2)$ et les coefficients ψ_j vérifie la condition

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\psi_j\right| |j|^{1/2} < \infty.$$

Nous avons vu dans les sections précédentes que le périodogramme de $X_1, ..., X_n$ en $\omega_j = \frac{2\pi j}{n} \in [-\pi, \pi]$ peut se mettre sous la forme

$$I_n(\omega_j) = \begin{cases} n\left|\overline{X}\right|^2 & \text{si } \omega_j = 0, \\ \sum\limits_{|k|<n} \widehat{\gamma}(k) e^{-ik\omega_j} & \text{si } \omega_j \neq 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

où

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$$

et

$$\widehat{\gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-|k|} \left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t+|k|} - \overline{X}\right).$$

La quantité

$$\begin{aligned} I_n^*(\omega_j) &= \frac{1}{2\pi} I_n(\omega_j) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \widehat{\gamma}(k) e^{-ik\omega_j}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

peut être considéré comme une version empirique de la densité spectrale du processus (X_t)

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) e^{-ik\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi.$$

On remarque que $I_n^*(\omega_j)$ et $f(\omega)$ s'écrivent essentiellement avec la même fonction respectivement des autocovariances $\widehat{\gamma}(k)$ et des autocovariances théoriques $\gamma(k)$, mais paradoxalement $I_n^*(\omega_j)$ n'est pas un estimateur consistant de $f(\omega)$ (Priestley (1981), chapitre 6).

Certains auteurs expliquent la non-consistance par le fait que $I_n^*(\omega_j)$ tient compte de toutes les autocovariances empiriques $\widehat{\gamma}(k)$ d'ordre $k=0$ à $k=(n-1)$; mais $\widehat{\gamma}(k)$ pour k proche de $(n-1)$ ne contiennent pas assez d'informations sur l'échantillon $(X_1,...,X_n)$.

Pour cela, on considère un estimateur tronqué de la forme

$$\widehat{f_0}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m}\widehat{\gamma}(k)\,e^{-ik\omega}, \tag{2.21}$$

où m est un entier $(< n-1)$.

Un tel estimateur $\widehat{f_0}(\omega)$ est appelé "périodogramme tronqué" et m est appelé « point de troncature ».

Notons que (voir Priestley, chapitre 6)

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{f_0}(\omega)\right) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m}\left(1-\frac{|k|}{m}\right)\gamma(k)\,e^{-ik\omega} \\ &\longrightarrow f(\omega) \text{ quand } m\to\infty, \end{aligned}$$

et que

$$Var\left(\widehat{f_0}(\omega)\right)=\bigcirc\left(\frac{m}{n}\right).$$

Ainsi, si nous posons $m=m(n)$ tel que $m\to\infty$ quand $n\to\infty$ avec la condition $\frac{m}{n}\to 0$ quand $n\to\infty$, alors le biais et la variance de l'estimateur $\widehat{f_0}(\omega)$ tendent vers zéro quand $n\to\infty$. Il suffit de prendre $m=\sqrt{n}$ ou plus généralement $m=n^{\alpha}$ avec $0<\alpha<1$.

L'estimateur $\widehat{f_0}(\omega)$ peut être considéré comme un cas particulier de l'estimateur plus général

$$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{|k|<n}\lambda(k)\,\widehat{\gamma}(k)\,e^{-ik\omega}, \tag{2.22}$$

où

$$\lambda(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } |x|\le m, \\ 0 & \text{si } |x|>m. \end{cases} \tag{2.23}$$

Les estimateurs de la forme plus générale (2.22) sont introduits par Grenander et Rosenblatt (1953).

Il y a différentes forme de la fonction $\lambda(x)$, (voir Priestley (1981), Chapitre 6).

A partir de l'expression de

$$I_n^*(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \widehat{\gamma}(k) e^{-ik\omega},$$

et par un argument d'inversion, on a pour $|k| < n$

$$\widehat{\gamma}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta) e^{ik\theta} d\theta. \tag{2.24}$$

En remplaçant l'expression de $\widehat{\gamma}(k)$ dans celle de $\widehat{f}(\omega)$ de (2.22), on obtient

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \lambda(k) e^{-ik(\omega-\theta)} \right\} d\theta,$$

c'est-à-dire

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta) W(\omega-\theta) d\theta, \tag{2.25}$$

où

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \lambda(k) e^{-ik\theta}. \tag{2.26}$$

Ainsi, l'estimateur $\widehat{f}(\omega)$ s'écrit comme une intégrale pondérée de $I_n^*(\theta)$, où la fonction poids $W(\theta)$ est la transformée de Fourier de la suite $\{\lambda(k)\}$.

On utilise, en général, la fonction $W(\theta)$ fortement concentrée autour de $\theta = 0$.

Dans l'expression de $\widehat{f}(\omega)$ de la relation (2.22), la suite $\{\lambda(k)\}$ est appelée « fenêtre décalage » ou le terme utilisé dans la littérature anglo-saxonne « lag window » qui peut être simplement considérée comme une « suite de poids » et qui agit sur le « décalage »
(ou « l'ordre ») (« lag »). Le mot fenêtre est introduit pour la première fois par Backman et Tukey (1959).

Quelques fenêtres usuelles

1. **La fenêtre « périodogramme tronqué » (ou fenêtre rectangulaire)**

   La « suite de poids » $\{\lambda(k)\}$ est de la forme

   $$\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq m, \\ 0 & \text{si } |x| > m, \end{cases}$$

   où $m < n-1$, le « paramètre fenêtre » est la valeur de troncature dans la somme de la relation (2.21).

   La fenêtre spectrale $W(\theta)$ correspondante est donnée par

   $$\begin{aligned} W(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} e^{-ik\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = D_M(\theta). \end{aligned} \tag{2.27}$$

   La fonction $D_M(\theta)$ est appelée « le noyau de Dirichlet ».

   On a, quand $n \longrightarrow \infty$, (Voir Brockwell et Davis (1991), Chapitre 10)

   $$Var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \simeq \frac{2m}{n} f^2(\omega), \text{ pour } 0 < \omega < \pi.$$

2. **La fenêtre de Bartlett (ou fenêtre triangulaire)**

   Bartlett (1950) a proposé un estimateur de la densité spectrale $f(\omega)$ avec une fenêtre $\lambda(k)$ de la forme

   $$\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{m} & \text{si } |x| \leq m, \\ 0 & \text{si } |x| > m. \end{cases}$$

   La fenêtre spectrale correspondante est donnée par le noyau de Fejer d'ordre m,

   $$W(\theta) = \frac{1}{2\pi m} \frac{\sin\left(\frac{m\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = F_M(\theta). \tag{2.28}$$

   Puisque $W(\omega) \geq 0$, cette fenêtre donne toujours un estimateur de la densité spectrale non négative.

En plus, quand $n \longrightarrow \infty$, on a

$$Var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \simeq \frac{2m}{3n} f^2(\omega)\,,\ 0 < \omega < \pi. \tag{2.29}$$

La variance asymptotique est donc plus petite que l'estimateur utilisant la fenêtre rectangulaire.

3. **La fenêtre de Daniell**

Daniell (1946) est l'un des premiers auteurs à considérer le problème de l'estimation de la densité spectrale en suggérant que l'on peut estimer $f(\omega)$, en prenant la moyenne sur un petit intervalle centré en ω, c'est-à-dire $\left(\omega - \frac{\pi}{m}, \omega + \frac{\pi}{m}\right)$.

L'estimateur de $f(\omega)$ proposé par Daniell est donné par

$$\widehat{f}_D(\omega) = \frac{m}{2\pi} \int_{\omega - \frac{\pi}{m}}^{\omega + \frac{\pi}{m}} I_n^*(\theta)\, d\theta. \tag{2.30}$$

(Pour les valeurs proches de $\pm\pi$, on fait une extension de $I_n^*(\theta)$, en utilisant sa périodicité de période 2π).

La fenêtre spectrale correspondante $W(\theta)$ est périodique de période 2π, et sur $]-\pi, \pi[$, la fonction $W(\theta)$ a la forme rectangulaire

$$W(\theta) = \begin{cases} \frac{m}{2\pi} & \text{si } -\frac{\pi}{m} \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A partir de la relation (2.26), on peut écrire la fenêtre

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} W(\omega)\, e^{ik\omega} d\omega \\ &= \int_{-\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}} \frac{m}{2\pi} e^{ik\omega} d\omega, \end{aligned}$$

$$\lambda(k) = \frac{m}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right),\ \ |k| \leq m.$$

La variance asymptotique de l'estimateur de la densité spectrale basée sur cette fenêtre est donnée par

$$Var\left(\widehat{f}_D(\omega)\right) \simeq \frac{m}{n} f^2(\omega)\,,\ 0 < \omega < \pi.$$

4. **La fenêtre de Blackman-Tukey**

   Tukey, avec Bartlett et Daniell fut l'un des pionniers de la théorie spectrale, a suggéré un estimateur basé sur la fenêtre

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a\cos\left(\frac{\pi x}{m}\right) & \text{si } |x| \leq m, \\ 0 & \text{si } |x| > m. \end{cases}$$

   (Voir Tukey (1949) et Blackman et Tukey (1959)).

   La fenêtre spectrale correspondante est une combinaison linéaire pondérée des noyaux de Dirichlet,

$$\begin{aligned} W(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m}\left[(1-2a) + a\left(e^{ik\frac{\pi}{m}} + e^{-ik\frac{\pi}{m}}\right)\right]e^{-ik\theta} \\ &= aD_M\left(\theta - \frac{\pi}{m}\right) + (1-2a)\,D_m(\theta) + aD_M\left(\theta + \frac{\pi}{m}\right), \end{aligned}$$

   où le noyaux de Dirichlet D_M est défini par (2.27).

   La variance asymptotique de l'estimateur de la densité spectrale correspondant est

$$Var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \simeq \frac{2m}{n}\left(1 - 4a + 6a^2\right)f^2(\omega),\ 0 < \omega < \pi.$$

   Les fenêtres de Blackman-Tukey, avec $a = 0,23$ et $a = 0.25$ sont, en générale, appelées les fenêtres respectivement de Tukey-Hamming et Tukey-Hanning.

5. **La fenêtre de Parzen**

   Parzen (1961b) propose la fenêtre

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 - 6\left(\dfrac{x}{m}\right)^2 + 6\left(\dfrac{|x|}{m}\right)^3 & \text{si } |x| \leq \frac{m}{2}, \\ 2\left(1 - \dfrac{|x|}{m}\right)^3 & \text{si } \frac{m}{2} \leq |x| \leq m, \\ 0 & \text{si } |x| > m. \end{cases}$$

La fenêtre spectrale de Parzen correspondante est donnée par (en supposant m paire)

$$\begin{aligned} W(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}}\left[1-6\left(\frac{k}{m}\right)^2+6\left(\frac{|k|}{m}\right)^3\right]\cos k\theta\right. \\ &\quad \left.+2\sum_{\frac{m}{2}<|k|\leq m}\left(1-\frac{|k|}{m}\right)^3\cos k\theta\right\}, \\ &= \frac{3}{8\pi m^3}\left(\frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^4\left[1-\frac{2}{3}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right], \end{aligned}$$

(voir Parzen (1963 a)).

Pour m grand, le second terme est négligeable par rapport au premier terme au voisinage de $\theta = 0$, ce qui donne une approximation de $W(\theta)$ donnée par

$$W(\theta) \simeq \frac{6}{\pi m^3}\left(\frac{\sin\left(\frac{m\theta}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^4.$$

La variance asymptotique de l'estimateur de la densité spectrale correspondant est

$$Var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \simeq 0,539\frac{m}{n}f^2(\omega),\ 0<\omega<\pi.$$

2.5 Propriétés asymptotiques de l'estimateur à fenêtre de la densité spectrale

Considérons un estimateur $\widehat{f}(\omega)$ de la densité spectrale de la forme donnée par (2.22), c'est-à-dire

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|<n}\lambda(k)\,\widehat{\gamma}(k)\,e^{-ik\omega}, \tag{2.31}$$

qui peut encore s'écrire d'après (2.25), sous la forme

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta)\,W_n(\omega-\theta)\,d\theta, \tag{2.32}$$

où

$$W_n(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \lambda_n(k) e^{-ik\theta}.$$

On attache l'indice n aux fonctions $\lambda(k)$ et $W(\theta)$ pour souligner la dépendance de ces fonctions de n.

Supposons que $\lambda_n(k)$ est une suite paire, pour tout n, ainsi $W_n(\theta)$ est également une fonction paire de θ.

Supposons, en outre, que $\lambda_n(k)$ est telle que les conditions suivantes soient vérifiées ;

(i) $W_n(\theta) \geq 0$, $\forall n, \theta$,

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta)\, d\theta = 1$, $\forall n$,

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\theta)\, d\theta < \infty$, $\forall n$,

(iv) $\forall \varepsilon > 0$, $W_n(\theta) \longrightarrow 0$ uniformément quand $n \to \infty$ pour $|\theta| > \varepsilon$,

(v) $\dfrac{\sum\limits_{|k|<n} \frac{|k|}{n} \lambda_n^2(k)}{\sum\limits_{|k|<n} \lambda_n^2(k)} \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$.

La condition (iv) assure que, quand $n \to \infty$, $W_n(\theta)$ devient de plus en plus concentrée autour de $\theta = 0$ et la condition (ii), $W_n(\theta)$ a une forme limite d'une fonction de Dirac.

D'après le Théorème 6.2.4 (Priestley (1981), page 427), on a

$$E\left(\widehat{f}(\omega)\right) \sim \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) W_n(\omega - \theta)\, d\theta = \widetilde{f}(\omega). \tag{2.33}$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que (voir Priestley (1981), page 418), si f satisfait la condition de Lipchitz d'ordre 1, $(|f(\omega_1) - f(\omega_2)| < |\omega_1 - \omega_2|$ quand $|\omega_1 - \omega_2| \to 0)$,

$$\begin{aligned} E(I_n^*(\omega)) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) F_n(\theta - \omega)\, d\theta \\ &= f(\omega) + \bigcirc\left(\frac{\log n}{n}\right), \end{aligned} \tag{2.34}$$

où

$$F_n(\theta) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2,$$

(donc le biais de $I_n^*(\omega)$ est $\bigcirc\left(\frac{\log n}{n}\right)$) et si $f(\omega)$ a une dérivée bornée, on a

$$E\left(\widehat{f}(\omega)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, W_n(\omega-\theta)\, d\theta + \bigcirc\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{2.35}$$

Puisque $f(\omega)$ est supposée continue pour tout θ, les conditions (ii) et (iv) sur $W_n(\theta)$ donnent

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\widehat{f}(\omega)\right] = f(\omega)\,,\ \forall\omega, \tag{2.36}$$

montrant que $\widehat{f}(\omega)$ est asymptotiquement sans biais.

Par ailleurs (voir Priestley (1981), page 455),

$$Var\left(\widehat{f}(\omega)\right) \simeq (1+\delta_{\omega,0,\pi})\, f^2(\omega)\, \frac{1}{n}\sum_{|k|<n} \lambda_n^2(k)\,, \tag{2.37}$$

où

$$\delta_{\omega,0,\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0, \pm\pi, \\ 0 & \text{si } \omega \neq 0, \pm\pi. \end{cases}$$

2.5.1 Expressions approximatives du biais

Posons

$$b(\omega) = E\left(\widehat{f}(\omega)\right) - f(\omega)\,. \tag{2.38}$$

Puisque $\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\theta)\, d\theta = 1$, d'après (2.35), on a

$$b(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta) - f(\omega)\right] W_n(\omega-\theta)\, d\theta + \bigcirc\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{2.39}$$

Le second terme $\bigcirc\left(\frac{\log n}{n}\right)$ est le biais dû au périodogramme lui-même ; il est, en générale, plus petit que le premier terme qui représente le biais dû au lissage.

Donc, en tenant compte uniquement du premier terme, on obtient

$$b(\omega) \sim \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\omega-\theta) - f(\omega)\right] W_n(\theta)\, d\theta. \tag{2.40}$$

Supposons que $f(\omega)$ est deux fois différentiable avec une second dérivée bornée, et pour tout θ proche de zéro,

$$f(\omega-\theta) \sim f(\omega) - \theta f'(\omega) + \frac{\theta^2}{2} f''(\omega) + \circ\left(\theta^2\right). \tag{2.41}$$

En remplaçant (2.41) dans (2.40), on obtient

$$b(\omega) \simeq \frac{1}{2} f''(\omega) \int_{-\pi}^{\pi} \theta^2 W_n(\theta)\, d\theta. \tag{2.42}$$

On peut utiliser une autre approche du biais, en remplaçant $\lambda_n(x) = u\left(\frac{x}{m}\right)$ dans la relation (2.22), c'est-à-dire

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} u\left(\frac{k}{m}\right) \widehat{\gamma}(k)\, e^{-ik\omega},$$

et en prenant l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
b(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \left[u\left(\frac{k}{m}\right)\left(1-\frac{|k|}{m}\right) - 1 \right] \gamma(k)\, e^{-ik\omega} - \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\geq n} \gamma(k)\, e^{-ik\omega} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \left[u\left(\frac{k}{m}\right) - 1 \right] \gamma(k)\, e^{-ik\omega} - \frac{1}{2\pi n} \sum_{|k|<n} |k|\, u\left(\frac{k}{m}\right) \gamma(k)\, e^{-ik\omega} \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|\geq n} \gamma(k)\, e^{-ik\omega}.
\end{aligned}$$

Soit r le plus grand entier positif tel que

$$u_{(r)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-u(x)}{|x|^r} \right)$$

existe, finie et non nulle.

Supposant que $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k|^q |\gamma(k)| < \infty$ pour $q \leq r$ et que $\frac{n}{m^r} \longrightarrow 0$ quand $n \to 0$.

Alors, en prenant la limite de l'expression pour $b(\omega)$, quand $n \to 0$, on remarque que le second et troisième termes tendent vers zéro de l'ordre $\circ\left(\frac{1}{m^r}\right)$, uniformément en ω, tandis que le premier terme est asymptotiquement

$$-u_{(r)} m^{-r} f_{(r)}(\omega),$$

où

$$f_{(r)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^r \gamma(k) e^{-ik\omega},$$

appelé par Parzen « la $r^{\text{ième}}$ dérivée généralisée » de $f(\omega)$. Ce qui entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} (m^r b(\omega)) = -u_{(r)} f_{(r)}(\omega)$$

et l'expression asymptotique pour le biais est

$$b(\omega) \simeq -\frac{u_{(r)}}{m^r} f_{(r)}(\omega). \tag{2.43}$$

2.5.2 Distributions asymptotiques des estimateurs à fenêtre de la densité spectrale

Considérons le cas générale de l'estimateur $\widehat{f}(\omega)$ donné par (2.32) c'est-à-dire

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} I_n^*(\theta) W_n(\omega - \theta) d\theta.$$

Si on approxime l'intégrale par une somme discrète sur les $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, alors on peut réécrire cette approximation sous la forme

$$\widehat{f}(\omega) \simeq \left(\frac{2\pi}{n}\right) \sum_j W_n(\omega - \omega_j) I_n^*(\omega_j). \tag{2.44}$$

Supposons, maintenant, que les observations (X_t) sont issues d'un processus linéaire de la forme (2.18),

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

où les erreurs (ε_t) sont gaussiennes ($\varepsilon_t \sim b.b.N(0, \sigma^2)$).

Or, on sait que (Théorème 1), si les (ε_t) sont de loi normale $N(0, \sigma^2)$ et les $\{\psi_j\}$ satisfont la condition $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_j| |j|^{\frac{1}{2}}$ alors les variables aléatoires $\{I_n^*(\omega_j)/2\pi f(\omega_j)\}$ sont asymptotiquement indépendantes et

$$\begin{cases} I_n^*(\omega_j) \sim \frac{1}{2} f(\omega_j) \chi_2^2 & \text{si } j \neq 0, \frac{n}{2}, \\ I_n^*(\omega_j) \sim \frac{1}{2} f(\omega_j) \chi_1^2 & \text{si } j = 0, \frac{n}{2} \ (n \text{ paire}). \end{cases} \tag{2.45}$$

En fait, cette distribution reste vraie pour tout nombre fixé de fréquences ω_j, si les erreurs (ε_t) sont indépendantes et non nécessairement gaussiennes, à cause du théorème central limite.

Ainsi, pour n grand, l'estimateur $\widehat{f}(\omega)$, approximé par (2.44) peut être considéré comme une combinaison linéaire pondérée de variables aléatoires indépendantes de loi de χ^2.

Si les poids sont tous égaux sur une bande de fréquences et nuls ailleurs, alors la somme aura asymptotiquement une loi de χ^2. Mais les poids ne sont pas en générale égaux (sauf pour la fenêtre de Daniell) et la distribution de la somme n'est pas nécessairement une loi de χ^2. Cependant, il est raisonnable d'adopter le principe de l'approximation de la distribution de $\left\{\widehat{f}(\omega)/f(\omega)\right\}$ par une distribution de la forme $\{a\chi^2_\nu\}$, où les constantes a et ν et sont choisies telles que la moyenne et la variance de $\left\{\widehat{f}(\omega)/f(\omega)\right\}$ soient les mêmes que la moyenne et la variance asymptotiques de $\left\{\widehat{f}(\omega)/f(\omega)\right\}$. Cette approximation de la distribution de $\left\{\widehat{f}(\omega)/f(\omega)\right\}$ est proposée par Tukey (1949).

En utilisant (2.36) et (2.37) (et en rappelant que $E\left(\chi^2(n)\right) = n$ et $Var\left(\chi^2(n) = 2n\right)$), on pose

$$1 = a\nu,$$

$$\frac{1}{n}\sum_k \lambda_n^2(k) = \begin{cases} 2a^2\nu, & \text{si } \omega \neq 0, \pm\pi, \\ a^2\nu, & \text{si } \omega = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

On obtient, ainsi

$$a = \frac{1}{\nu},$$

et

$$\nu = \frac{2n}{\sum_k \lambda_n^2(k)}, \quad (\omega \neq 0, \pm\pi). \tag{2.46}$$

Ou encore, pour les estimateurs utilisant les fenêtres avec autre échelle (c'est-à-dire $\lambda_n(x) = u(x/m)$), on a

$$\nu = \frac{2n}{m\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x)\,du}. \tag{2.47}$$

Le paramètre ν est appelé « degré de liberté équivalent » de l'estimation spectrale. D'après (2.47), on a dans la table suivante le « degré de liberté équivalent » des différentes fenêtres

Chapitre 3

Estimation des paramètres d'un processus $ARIMA\ (p, d, q)$

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $ARIMA\ (p,d,q)$ donné par

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t \tag{3.1}$$

où

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p,$$

et

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + ... + \theta_p B^p.$$

B étant l'opérateur retard, (ε_t) un processus de bruit blanc, centré, de variance σ^2.

Ce chapitre est consacré à l'estimation des paramètres d, ϕ et θ basée sur log-périodogramme pour le paramètre d et la méthode du maximum de vraisemblance pour les paramètres autorégressifs ϕ et moyenne mobile θ.

3.1 Estimation des paramètres d, ϕ et θ par la méthode du maximum de vraisemblance

Supposons que les erreurs (ε_t) dans le modèle (3.1) sont gaussiennes iid $N(0,\sigma^2)$. Dans ce cas (X_t) est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance $\Gamma(i,j) = E(X_i X_j)$. Soit $X_{(n)} = (X_1, ..., X_n)'$ et $\widehat{X}_{(n)} = \left(\widehat{X}_1, ..., \widehat{X}_n\right)'$, où

$$\widehat{X}_1 = 0$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{X}_j &= E(X_j / X_1, .., X_{j-1}) \\ &= P_{\overline{sp}\{X_1,...,X_{j-1}\}} X_j,\ j \geq 2, \end{aligned}$$

$P_{\overline{sp}\{X_1,...,X_{j-1}\}}$ étant la projection sur le sous espace linéaire fermé de L^2 engendré par $\{X_1, ..., X_{j-1}\}$.

Posons $\beta = \left(\phi_1, ..., \phi_p, \theta_1, ..., \theta_q, d\right)'$. Soit Γ_n la matrice des covariances de $X_{(n)} = (X_1, ..., X_n)'$ c'est-à-dire

$$\Gamma_n = E\left(X_{(n)} X'_{(n)}\right)$$

et supposons que Γ_n est non singulière. La fonction de vraisemblance du vecteur aléatoire $X_{(n)} = (X_1, ..., X_n)'$ s'écrit

$$L\left(x_1, ..., x_n, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Gamma_n}} \exp\left\{-\frac{1}{2} x'_{(n)} \Gamma_n^{-1} x_{(n)}\right\}, \tag{3.2}$$

où $x_{(n)} = (x_1, ..., x_n)'$ sont les observations de $X_{(n)} = (X_1, ..., X_n)'$.

Γ_n et Γ_n^{-1} peuvent être calculés en utilisant les prédicteurs d'un pas $\widehat{X}_j$ et leur erreur moyenne quadratique

$$E\left(X_j - \widehat{X}_j\right)^2 = \sigma^2 v_{j-1},\ j = 1, ..., n$$

qui peuvent être calculés récursivement en utilisant l'algorithme des innovations donné dons la proposition suivante.

Proposition 1 (Brockwell et Davis (1987), p.165) *Soit* $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ *un processus de moyenne nulle, de fonction d'autocovariance* $\Gamma(i, j) = E(X_i X_j)$ *telle que la matrice* $\Gamma_n = (\Gamma(i, j))_{i,j=1,...,n}$ *soit non singulière pour tout* $n = 1, 2, ...$; *alors les prédicteurs à un pas* $\widehat{X}_{n+1},\ n \geq 0$ *et leurs erreurs moyenne quadratiques*

$$\begin{aligned} s_n &= E\left(X_{n+1} - \widehat{X}_{n+1}\right)^2 \\ &= \sigma^2 v_n,\ n \geq 1, \end{aligned}$$

sont donnés par

$$\widehat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & si\ n = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \theta_{nj}\left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}\right) & si\ n \geq 1, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$
\begin{cases}
s_0 = \Gamma(1,1), \\
\theta_{n,n-k} = \frac{1}{s_k}\left(\Gamma(n+1,k+1) - \sum_{j=0}^{k-1}\theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j}s_j\right), \; k = 0,1,..n-1, \\
s_n = \Gamma(n+1,n+1) - \sum_{j=0}^{n-1}\theta_{n,n-j}s_j.
\end{cases} \tag{3.4}
$$

Remarque 1 *La proposition précédente donne les coefficients θ_{nj} des innovations $\left(X_j - \widehat{X}_j\right)$, $j = 1,...,n$ dans le développement orthogonal*

$$
\widehat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n}\theta_{n_j}\left(X_{n+1-j} - \widehat{X}_{n+1-j}\right).
$$

Soit θ_{ij}, $j = 1,...,n$ et $i = 1,2,...$ les coefficients donnés dans la Poposition 1, lorsque la matrice des covariances Γ_n est celle du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle $ARIMA\,(p,d,q)$ donné par l'équation (3.1).

Posons $\theta_{i_0} = 1$, $\theta_{ij} = 0$ pour $j < 0$, $i = 0,1,2,...$

On construit la matrice $(n \times n)$ triangulaire inférieure définie par

$$
C = (\theta_{i,i-j})_{i,j=0,1,...,n-1}, \tag{3.5}
$$

et la matrice $(n \times n)$ diagonale

$$
D = Diag\,(s_0, s_1, ..., s_{n-1}), \tag{3.6}
$$

qui n'est rien d'autre que la matrice des covariances de $\left(X_{(n)} - \widehat{X}_{(n)}\right)$.

Les X_j, $j = 1,...,n$ donnés dans la Proposition 1 peuvent alors se mettre sous la forme

$$
\begin{aligned}
\widehat{X}_{(n)} &= \left(\widehat{X}_1, ..., \widehat{X}_n\right)' \\
&= (C - I)\left(X_{(n)} - \widehat{X}_{(n)}\right),
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

où I est la matrice identité $(n \times n)$.

Donc

$$\begin{aligned} X_{(n)} &= X_{(n)} - \widehat{X}_{(n)} + \widehat{X}_{(n)} \\ &= C\left(X_{(n)} - \widehat{X}_{(n)}\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

D étant la matrice des covariances de $\left(X_{(n)} - \widehat{X}_{(n)}\right)$, il s'ensuit d'après la relation (3.8), que la matrice Γ_n des covariances de $X_{(n)}$ peut se mettre sous la forme

$$\Gamma_n = C\ D\ C'. \tag{3.9}$$

Ainsi, en utilisant les relations (3.8) et (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} X'_{(n)}\Gamma_n^{-1}X_{(n)} &= \left(X_{(n)} - \widehat{X}_{(n)}\right)' D^{-1}\left(X_{(n)} - \widehat{X}_{(n)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_{j-1}} \left(X_j - \widehat{X}_j\right)^2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

et

$$\begin{aligned} \det \Gamma_n &= (\det C)^2 (\det D) \\ &= s_0 s_1 ... s_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ainsi la fonction de vraisemblance (3.2) s'écrit

$$L\left(x_1, ..., x_n, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{s_0 ... s_{n-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{s_{j-1}}\left(x_j - \widehat{x}_j\right)^2\right\},$$

où les $x_1, ..., x_n, s_0, s_1, ...$ peuvent être calculés en utilisant l'algorithme des innovations donné dans la Proposition 3.1.

Ou encore, puisque on a posé

$$\begin{aligned} s_{j-1} &= E\left(X_j - \widehat{X}_j\right)^2 \\ &= \sigma^2 v_{j-1},\ j = 1, ..., n, \end{aligned}$$

$$L\left(x_1, ..., x_n, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{-n/2}\sqrt{v_0 ... v_{n-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \widehat{x}_j\right)^2\right\}. \tag{3.12}$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\sigma}^2$ peuvent être trouvés en maximisant $L\left(x_1, ..., x_n, \beta, \sigma^2\right)$ par rapport à β et σ^2.

Pour un processus de bruit blanc gaussien et dans le cas où $p = q = 0$, $d > 0$, Yajima (1985) et Li et McLeod (1986) ont montré que

$$\widehat{\beta} \text{ est } AN\left(\beta, \frac{1}{n}W^{-1}(\beta)\right), \tag{3.13}$$

où $W(\beta)$ est la matrice $(p+q+1) \times (p+q+1)$, dont le (j,k) élément est donné par

$$W_{j,k}(\beta) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\beta_j}Logf(\omega,\beta)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\beta_k}Logf(\omega,\beta)\right)d\omega, \tag{3.14}$$

$f(\omega,\beta)$ étant la densité spectrale du processus (X_t).

La vraisemblance (3.12) est parfois difficile à calculer, parce qu'elle utilise la fonction d'autocovariance du processus $ARIMA\ (p,d,q)$ et que les expressions de $\widehat{X}_j$ restent compliquées lorsque $d \neq 0$.

Hannan(1973) et Fox et Taqqu (1986) ont utilisé une approximation de la vraisemblance (3.12) et ont montré que l'estimateur $\widetilde{\beta}$ basé sur cette approximation a la même loi asymptotique que celle de $\widehat{\beta}$ donnée par (3.13).

3.2 Estimation des paramètres basée sur le log-périodogramme

Soit $f_X(\omega)$ la densité spectrale du processus $ARIMA\ (p,d,q)$ donnée par (3.1) ; son expression est

$$f_X(\omega) = \left|1 - e^{-i\omega}\right|^{-2d} f_Z(\omega), \tag{3.15}$$

où

$$f_Z(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{\left|\theta\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2}{\left|\phi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2},$$

est la densité spectrale du processus $ARMA\,(p,q)$

$$\phi\,(B)\,Z_t = \theta\,(B)\,\varepsilon_t,$$

avec

$$Z_t = (1-B)^d\,X_t. \tag{3.16}$$

Cette méthode consiste à utiliser le Log-périodogramme en prenant le logarithme des deux membres de l'équation (3.15) c'est-à-dire

$$\log f_X\,(\omega) = -d\log\left|1-e^{-i\omega}\right|^2 + \log f_Z\,(0) + \log\frac{f_Z\,(\omega_j)}{f_Z\,(0)}. \tag{3.17}$$

Soit $I_n\,(\omega_j)$ le périodogramme de $(X_1,...,X_n)$, donné par

$$I_n\,(\omega_j) = \frac{1}{n}\left|\sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_j}\right|^2,$$

avec $\omega_j = \frac{2\pi j}{n} \in [0,\pi]\,,\ j=1,...,m$ tel que ω_m soit proche de zéro.

En remplaçant dans la relation (3.17), ω par ω_j et en ajoutant $Log\ I_n\,(\omega_j)$, on obtient

$$\log I_n\,(\omega_j) = -d\log\left|1-e^{-i\omega_j}\right|^2 + \log f_Z\,(0) + \log\frac{I_n\,(\omega_j)}{f_X\,(\omega_j)} + \log\frac{f_Z\,(\omega_j)}{f_Z\,(0)}. \tag{3.18}$$

Comme les $\omega_j,\ j=1,...,m$ sont choisis proches de zéro, le dernier terme $\log\frac{f_Z(\omega_j)}{f_Z(0)},\ \forall j = 1,...,m$ peut être négligé et on peut écrire la relation (3.18) comme une équation de régression linéaire

$$\eta_j = a\xi_j + b + \varepsilon_j,\ \ j=1,...,m, \tag{3.19}$$

où

$$\eta_j = \log I_n\,(\omega_j)\,,\ \ \xi_j = \log\left|1-e^{-i\omega_j}\right|^2$$

et

$$a=-d,\ \ b=\log f_Z\,(0)\,,\ \ \varepsilon_j = \log\frac{I_n\,(\omega_j)}{f_X\,(\omega_j)}.$$

Pour $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$, d'après le Théorème 1 du Chapitre 2 précédent, le vecteur aléatoire $\left(I_n(\omega_1)/f_X(\omega_1), ..., I_n(\omega_m)/f_X(\omega_m)\right)'$ converge en loi vers un vecteur aléatoire $(Y_1, ..., Y_m)'$ dont les composantes Y_i sont indépendantes et que Y_i suit un loi exponentielle de paramètre $1/2\pi f(\omega_i)$, $i = 1, ..., m$.

Donc les $\varepsilon_j = \log\left(I_n(\omega_j)/f_X(\omega_j)\right)$ peuvent être approximées par des variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition

$$P(\varepsilon_j \leq x) = 1 - \exp\left(-\frac{e^x}{2\pi}\right), \; j = 1, ..., m.$$

Ce qui nous permet d'estimer le paramètre $a = -d$ en utilisant la méthode des moindres carrés dans le modèle (3.19), avec m choisi tel que $m/n \to 0$ quand $n \to \infty$.

L'estimateur $\widehat{d} = -\widehat{a}$ des moindres carrés du paramètre $d = -a$ dans le modèle (3.19) est alors donné par

$$\widehat{d} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\xi_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j\right)\left(\eta_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\eta_j\right)}{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\xi_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j\right)}. \tag{3.20}$$

Geweke et Porter-Hudak (1983) ont montré ; avec la condition sur m vérifiant $\frac{(\log n)^2}{m} \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$, que

$$\frac{\widehat{d} - d}{\left\{\frac{\pi^2}{6\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\xi_i - \overline{\xi}\right)^2}\right\}^{1/2}} \xrightarrow{L} N(0,1), \text{ quand } n \to \infty, \tag{3.21}$$

où $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\xi_i$.

Une fois le paramètre d est estimé par $\widehat{d}$, on construit les observations $(z_1, ..., z_n)'$ avec

$$z_t = (1 - B)^{\widehat{d}} x_t, \; t = 1, ..., n,$$

ensuite on utilise le modèle $ARMA\ (p, q)$ pour estimer les paramètres autorégressifs ϕ et moyenne mobile θ, par exemple par la méthode du maximum de vraisemblance.

Une autre méthode pour calculer $z_1, ..., z_n$ consiste à utiliser la relation reliant les transformées de Fourier discrètes de $J_X(\omega)$ et $J_Z(\omega)$ respectivement $\{X_1, ..., X_n\}$ et $\{Z_1, ..., Z_n\}$, c'est-à-dire

$$J_X(\omega_j) = \left(1 - e^{-i\omega_j}\right)^{-d} J_Z(\omega_j) + R_n(\omega_j), \tag{3.22}$$

avec $R_n(\omega_j) \xrightarrow{P} 0$, quand $n \to \infty$.

En remplaçant d par $\widehat{d}$ et en négligeant $R_n(\omega_j)$, on obtient la relation

$$J_Z(\omega_j) \simeq \left(1 - e^{-i\omega_j}\right)^{\widehat{d}} J_X(\omega_j). \tag{3.23}$$

On applique la transformée de Fourier inverse de la relation précédente (3.23), on obtient les estimations de Z_t données par

$$\widetilde{Z}_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\{j/-\pi<\omega_j\leq\pi\}} e^{i\omega_j t} \left(1 - e^{-i\omega_j}\right)^{\widehat{d}} J_X(\omega_j), \ t = 1, ..., n \tag{3.24}$$

où

$$J_X(\omega_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} X_t e^{-it\omega_j}.$$

Chapitre 4

Résultats préliminaires sur les prédicteurs dans un modèle $ARIMA$ (p, d, q)

4.1 Prédiction linéaire à l'horizon l basée sur n observations de $\{X_1,\ X_2, ..., X_n\}$ d'un processus

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $L^2(.)$ un espace de Hilbert de variables aléatoires de moyenne nulle et de moment d'ordre deux fini sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ défini par $\langle X, Y \rangle = E(XY)$.

Supposons que $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus de $L^2(.)$, notons par $L_t^2(\zeta)$ et $L^2(\zeta)$, le sous espace linéaire fermé de $L^2(.)$ engendré respectivement par $\{\zeta_s, s \leq t\}$ et tous les éléments $\{\zeta_t, t \in \mathbb{Z}\}$.

On note également par $\widehat{X}_{n+l}$ le prédicteur linéaire optimal de X_{n+l} avec $l > 0$, basé sur $\{X_1, ..., X_n\}$.

Posons $\mathcal{M}_n$ le sous-espace linéaire fermé de $L^2(.)$ engendré par $\{X_1, ..., X_n\}$.

$\widehat{X}_{n+l}(l)$ est alors donné par :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{n+l}(l) &= P_{\mathcal{M}_n}(X_{n+l}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k,\ l > 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont des constantes qui peuvent être determinées en utilisant le fait que :

$$(X_{n+l} - P_{\mathcal{M}_n}(X_{n+l})) \in \mathcal{M}_n^{\perp},$$

c'est-à-dire

$$\left\langle X_{n+l} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k, X_j \right\rangle = 0,\ \forall j = 1, .., n \tag{4.2}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle X_k, X_j \rangle &= \langle X_{n+l}, X_j \rangle,\ \forall j = 1, .., n \\ &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \alpha_k E(X_k X_j) = E(X_{n+l} X_j),\ \forall j = 1, .., n \end{aligned} \tag{4.3}$$

Remarque 1 *Soit* $\alpha_{(n)} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)'$ *et* $X_{(n)} = (X_1, ..., X_n)'$ *tel que*

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+l} &= P_{\mathcal{M}_n}(X_{n+l}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k \\ &= \alpha_{(n)} X_{(n)} \qquad (4.4)\end{aligned}$$

Alors $\hat{X}_{n+l}$ *est le meilleur prédicteur linéaire au sens qu'il réalise le minimum de l'erreur moyenne quadratique*

$$M.S.E\left(\beta'_{(n)} X_{(n)}\right) = E\left[X_{n+l} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right]^2.$$

En effet, soit $\alpha_{(n)} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)'$ défini par (4.4) et $\beta'_{(n)} X_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k X_k$ une prédiction linéaire quelconque de X_{n+l} en termes de $X_1, ..., X_n$.

Son erreur moyenne quadratique est :

$$\begin{aligned}M.S.E\left(\beta'_{(n)} X_{(n)}\right) &= E\left[X_{n+l} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right]^2 \\ &= E\left[X_{n+l} - \alpha'_{(n)} X_{(n)} + \alpha'_{(n)} X_{(n)} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right]^2 \\ &= E\left[X_{n+l} - \alpha'_{(n)} X_{(n)}\right]^2 + E\left[\alpha'_{(n)} X_{(n)} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right]^2 \\ &\quad +2E\left[\left(X_{n+l} - \alpha'_{(n)} X_{(n)}\right)\left(\alpha'_{(n)} X_{(n)} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right)\right] \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Par ailleurs le dernier terme du deuxième membre s'écrit

$$\begin{aligned}& E\left[\left(X_{n+l} - \alpha'_{(n)} X_{(n)}\right)\left(\alpha'_{(n)} X_{(n)} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right)\right] \\ =\ & E\left[\left(X_{n+l} - \alpha'_{(n)} X_{(n)}\right)\left(X'_{(n)} \alpha_{(n)} - X'_{(n)} \beta_{(n)}\right)\right] \\ =\ & E\left[\left(X_{n+l} - \alpha'_{(n)} X_{(n)}\right) X'_{(n)}\right]\left(\alpha_{(n)} - \beta_{(n)}\right) \\ =\ & 0'.\left(\alpha_{(n)} - \beta_{(n)}\right)\end{aligned}$$

à cause de la relation (4.2), où $0' = (0, .., 0)$.

Donc la relation (4.5) s'écrit :

$$E\left(X_{n+l} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right)^2 = E\left(X_{n+l} - \alpha'_{(n)} X_{(n)}\right)^2 + E\left(\alpha'_{(n)} X_{(n)} - \beta'_{(n)} X_{(n)}\right)^2. \qquad (4.6)$$

La prédiction optimale linéaire $\beta'_{(n)}X_{(n)}$ est la valeur qui rend minimum l'expression (4.6) c'est-à-dire

$$\beta'_{(n)}X_{(n)} = \alpha'_{(n)}X_{(n)}$$

où $\alpha'_{(n)}X_{(n)}$ satisfait (4.4).

Prédiction à l'horizon l basé sur l'espérance conditionnelle

Intéressons nous maintenant à la prédiction de X_{n+l} basée sur l'ensemble des fonctions mesurables de $\{X_1, ..., X_n\}$, c'est-à-dire trouvent $\tilde{X}^*_{n+l} = \varphi(X_1, ..., X_n)$ où φ est une fonction borélienne basée sur la plus petite moyenne quadratique $E\left(X_{n+l} - \tilde{X}^*_{n+l}\right)^2$.

Remarque 2 *La prédiction $\tilde{X}_{n+l}$ de X_{n+l} basée sur la plus petite moyenne quadratique*

$$MSE\left(\tilde{X}^*_{n+l}\right) = E\left(X_{n+l} - \tilde{X}^*_{n+l}\right)^2 \tag{4.7}$$

est l'espérance conditionnelle de X_{n+l} sachant $X_{(n)} = (X_1, ..., X_n)'$ c'est-à-dire $E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)$.

En effet, considérons $X^*_{n+l} = g\left(X_{(n)}\right)$ comme une fonction mesurable de $X_{(n)}$ autre que l'espérance conditionnel

$$\tilde{X}_{n+l} = E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right) \tag{4.8}$$

Ainsi l'erreur moyenne quadratique associée s'écrit :

$$\begin{aligned} E\left[X_{n+l} - g\left(X_{(n)}\right)\right]^2 &= E\left[X_{n+l} - E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right) + E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right) - g\left(X_{(n)}\right)\right]^2 \\ &= E\left[X_{n+l} - E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)\right]^2 + E\left[E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right) - g\left(X_{(n)}\right)\right]^2 \\ &\quad +2E\left[X_{n+l} - E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)\right]\left[E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right) - g\left(X_{(n)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Notons $2E\left(\eta_{n+l}\right)$ le dernier terme du deuxième membre, où

$$\eta_{n+l} = \left[X_{n+l} - E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)\right]\left[E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right) - g\left(X_{(n)}\right)\right].$$

Calculons $E\left(\eta_{n+l}/X_{(n)}\right)$ dans un premier temps, car on sait que

$$E\left(\eta_{n+l}\right)=E\left[E\left(\eta_{n+l}/X_{(n)}\right)\right].$$

Comme $E\left(\eta_{n+l}/X_{(n)}\right)$ et $g\left(X_{(n)}\right)$ sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par $X_{(n)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
E\left(\eta_{n+l}/X_{(n)}\right) &= \left\{E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)-g\left(X_{(n)}\right)\right\}\left\{E\left(\left[X_{n+l}-E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)\right]/X_{(n)}\right)\right\} \\
&= \left\{E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)-g\left(X_{(n)}\right)\right\}\times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E\left(\eta_{n+l}\right) &= E\left[E\left(\eta_{n+l}/X_{(n)}\right)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La relation (4.9) s'écrit alors

$$E\left[X_{n+l}-g\left(X_n\right)\right]^2=E\left[X_{n+l}-E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)\right]^2+E\left\{\left[E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)-g\left(X_{(n)}\right)\right]^2\right\}.$$

Ainsi la fonction $g\left(X_{(n)}\right)$ qui rend minimum l'erreur moyenne quadratique est la fonction

$$g\left(X_{(n)}\right)=E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right). \tag{4.10}$$

Remarque 3 *Notons, en général, que :*

$$E\left(X_{n+l}-\tilde{X}_{n+l}\right)^2\geq E\left[X_{n+l}-E\left(X_{n+l}/X_{(n)}\right)\right]^2$$

où $\tilde{X}_{n+l}=P_{\mathcal{M}_n}\left(X_{n+l}\right).$

Soit $\hat{X}_t\left(l\right)$ le prédicteur linéaire optimal de X_{t+l}. On montre de même que $\hat{X}_t\left(l\right)$ basé sur $X_s,\ s\leq t$ est donné

$$\hat{X}_t\left(l\right)=P_{L_t^2(X)}\left(X_{t+l}\right),\ l>0, \tag{4.11}$$

où $P_{L_t^2(X)}(.)$ est la projection orthogonale sur $L_t^2(X)$ sous espace linéaire de $L^2(.)$ engendré par $\{X_s,\ s \leq t\}$.

De même, on montre que :

$$\tilde{X}_t(l) = E(X_{t+l}/X_s, s \leq t) \tag{4.12}$$

est le prédicteur réalisant le minimum de l'erreur moyenne quadratique.

Considérons maintenant le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant le modele $ARIMA\ (p, d, q)$ suivant :

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t,$$

où p et q sont des entiers positifs

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + ...\theta_q B^q$$

B etant l'opérateur retard et (ε_t) un processus de bruit blanc centré de vraiance σ^2.

Peiris et Perera (1988) ont montré que si $d \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et les zéros de $\phi(B)$ et $\theta(B)$ sont à l'extérieur du cercle unité, alors le prédicteur linéaire optimal $\hat{X}_t(l)$ donné par (4.11) et le prédicteur réalisant le minimum de l'erreur moyenne quadratique donné par (4.12) sont identiques.

4.2 Prédicteurs pour un processus $ARIMA\ (0, d, 0)$, $d > -\frac{1}{2}$

Considérons le processus fractionnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle

$$(1-B)^d X_t = \varepsilon_t \tag{4.13}$$

Théorème 1 *Soit X_t un bruit blanc fractionnaire satisfaisant (4.13), alors :*

$$\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j \widetilde{X}_t (l-j) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{l+j} X_{t-j} = 0, \ \forall l \geq 1, \tag{4.14}$$

où $\widetilde{X}_t (l)$ est la prédiction à l'horizon l de X_{t+l}, et α_j sont les coefficients du développement de $(1-B)^d$, avec $\alpha > -\frac{1}{2}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \alpha_j &= (-1)^j \begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-1)^j d (d-1)(d-2) \ldots (d-j+1)}{j!}, \ j = 0, 1, 2, .. \end{aligned}$$

Remarque 4 *Si $d \in N^*$, $\alpha_j = 0$ pour $j > d$*

Pour $l = 1$, la relation (4.14) s'écrit

$$\alpha_0 \widetilde{X}_t (1) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+1} X_{t-j} = 0, (\alpha_0 = 1)$$

$$\widetilde{X}_t (1) = -\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+1} X_{t-j}$$

qui est le prédicteur à un pas du processus X_t et peut être approximé en posant $X_{t-j} = 0$ pour les indices $(t-j)$ en dehors des indices de l'échantillon observé c'est-à-dire

$$\widetilde{X}_t (1) = -\sum_{j=0}^{t-1} \alpha_{j+1} X_{t-j}$$

Démonstration du Théorème 1. Posons $\hat{X}_t (l)$ l'espérance conditionnelle de X_{t+l} sachant la tribu engendrée par $\{X_s, s \leq t\}$ c'est-à-dire

$$\widetilde{X}_t (l) = E (X_{t+l} / X_s, s \leq t).$$

Montrons que

$$\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j \widetilde{X}_t (l-j) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+l} X_{t-j} = 0, \ \forall l \geq 1.$$

Pour $l = 1$

$$\widetilde{X}_t(1) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+1} X_{t-j} = 0.$$

Pour $l = 2$

$$\alpha_0 \widetilde{X}_t(2) + \alpha_1 \widetilde{X}_t(1) = -\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+2} X_{t-j}.$$

On a

$$\begin{aligned} (1-B)^d X_t &= \varepsilon_t, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j X_{t-j} &= \varepsilon_t, \end{aligned}$$

où $\alpha_0 = 1$ et

$$\alpha_j = (-1)^j \frac{d(d-1)(d-2)\ldots(d-j+1)}{j!}, \ j = 1, 2, \ldots$$

et

$$\begin{aligned} X_t &= (1-B)^{-d} \varepsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

où

$$\beta_j = (-1)^j \begin{pmatrix} -d \\ j \end{pmatrix}, \ j = 0, 1, \ldots,$$

calculons

$$\widetilde{X}_t(l) = E(X_{t+l}/X_s, s \leq t).$$

On a

$$X_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{t-j}$$

et

$$X_{t+l} = \varepsilon_{t+l} - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{t+l-j}, \ \forall l \geq 1,$$

donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t(l) &= E\left(X_{t+l}/X_s, s\leq t\right)\\
&= E\left(\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j X_{t+l-j}+\varepsilon_{t+l}\right)/X_s, s\leq t\right)\\
&= -E\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)+E\left(\varepsilon_{t+l}/X_s, s\leq t\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)+E\left(\varepsilon_{t+l}/X_s, s\leq t\right).
\end{aligned}$$

Or

$$E\left(\varepsilon_{t+l}/X_s, s\leq t\right)=0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t(l) &= -\sum_{j=1}^{l-1}\alpha_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)-\sum_{j=l}^{\infty}\alpha_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{l-1}\alpha_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)-\sum_{j=l}^{\infty}\alpha_j X_{t+l-j}
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t(l)+\sum_{j=1}^{l-1}\alpha_j\widetilde{X}_t(l-j)+\sum_{j=l}^{\infty}\alpha_j X_{t+l-j} &= 0\\
\sum_{j=0}^{l-1}\alpha_j\widetilde{X}_t(l-j)+\sum_{j=l}^{\infty}\alpha_j X_{t+l-j} &= 0,\ \forall l\geq 1\,(\alpha_0=1).
\end{aligned}$$

■

4.3 Prédicteur pour un processus $ARIMA$ $(0,d,q)$, avec $d>-\frac{1}{2}$ et q un nombre entier positif.

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus satisfaisant le modèle

$$(1-B)^d X_t=\theta(B)\,\varepsilon_t$$

avec $d > -\frac{1}{2}$ et (ε_t) un bruit blanc $(0, \sigma^2)$ et

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + ... + \theta_q B^q.$$

Théorème 2 *Supposons que (X_t) est un processus satisfaisant le modèle $ARIMA\,(0, d, q)$*

$$(1 - B)^d X_t = \theta(B)\, \varepsilon_t,\ d > -\frac{1}{2}, \tag{4.15}$$

alors

$$\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j \widetilde{X}_t (l - j) + \sum_{j=l}^{\infty} \alpha_j X_{t+l-j} = \begin{cases} \left(\theta_l + \theta_{l+1} B + ... + \theta_q B^{q-l}\right) \varepsilon_t, & si\ 1 \leq l \leq q \\ 0 & si\ l \geq q + 1 \end{cases} \tag{4.16}$$

Démonstration. On a

$$(1 - B)^d X_t = \theta(B)\, \varepsilon_t$$

ou encore

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j X_{t-j} = \theta(B)\, \varepsilon_t,$$

où $\alpha_0 = 1$ et

$$\begin{aligned} \alpha_j &= (-1)^j \begin{pmatrix} d \\ j \end{pmatrix} \\ &= (-1)^j \frac{d(d-1)(d-2)...(d-j+1)}{j!},\ j \geq 1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}.$$

Donc

$$X_{t+l} = -\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+l-j}.$$

Ainsi la prédiction $\tilde{X}_t(l)$ à l'horizon l de X_{t+l} est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t(l) &= E\left(X_{t+l}/X_s, s \leq t\right) \\
&= E\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+l-j}/X_s, s \leq t\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s \leq t\right) - \sum_{j=l}^{\infty} \alpha_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s \leq t\right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{q} \theta_j E\left(\varepsilon_{t+l-j}/X_s, s \leq t\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j \widetilde{X}_t(l-j) - \sum_{j=l}^{\infty} \alpha_j X_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+l-j},
\end{aligned}$$

car

$$E\left(\varepsilon_{t+l-j}/X_s, s \leq t\right) = \begin{cases} \varepsilon_{t+l-j} & \text{si } l \leq j, \\ 0 & \text{si } l > j. \end{cases}$$

En effet pour $l - j \leq 0$, les ε_{t+l-j} sont entièrement contenues dans les $\{X_s,\ s \leq t\}$ à cause de la structure linéaire du modèle.

Donc

$$\widetilde{X}_t(l) + \sum_{j=1}^{l-1} \alpha_j \widetilde{X}_t(l-j) + \sum_{j=l}^{\infty} \alpha_j X_{t+l-j} = \sum_{j=l}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+l-j}$$

$$\sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j \widetilde{X}_t(l-j) + \sum_{j=l}^{\infty} \alpha_j X_{t+l-j}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=l}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+l-j}, & si\ 1 \leq l \leq q, \\ 0, & si\ l \geq q+1. \end{cases}$$

■

4.4 Prédiction pour un processus $ARIMA(p,d,q)$ avec $d > -\frac{1}{2}$:

En utilisant les résultats précédents, on peut déterminer le prédicteur d'un pas du processus (X_t) satisfaisant le modèle ARIMA (p, d, q) avec $d > -\frac{1}{2}$,

$$\Phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B)\varepsilon_t, \tag{4.17}$$

où les zéros de

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - ... - \Phi_p z^p,$$

et

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + ... + \theta_q z^q,$$

sont à l'extérieur du cercle unité.

En posant $Z_t = \phi(B) X_t$ dans le modèle (4.17), on a

$$(1-B)^d Z_t = \theta(B)\varepsilon_t. \tag{4.18}$$

Théorème 3 *Le prédicteur d'un pas d'un processus* (X_t) *satisfaisant le modèle (4.17) est donné par*

$$\widetilde{X}_t(1) = \widetilde{Z}_t(1) + \sum_{j=1}^{p} \Phi_j X_{t+1-j},$$

où

$$\widetilde{Z}_t(1) = -\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{1+j} Z_{t-j} + \sum_{j=0}^{q-1} \theta_{1+j}\varepsilon_{t-j}. \tag{4.19}$$

Démonstration. Puisque le processus (Z_t) satisfait le modèle

$$\begin{aligned} Z_t &= \Phi(B) X_t \\ &= X_t - \sum_{j=1}^{p} \Phi_j X_{t-j}, \end{aligned}$$

ou encore

$$Z_t = X_t - \sum_{j=0}^{p-1} \Phi_{1+j} X_{t-j-1}. \tag{4.20}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}_t(1) &= E\left(Z_{t+1}/X_s, s \leq t\right) \\
&= E\left(X_{t+1} - \sum_{j=0}^{p-1} \Phi_{1+j} X_{t-j}/X_s, s \leq t\right) \\
&= E\left(X_{t+1}/X_s, s \leq t\right) - \sum_{j=0}^{p-1} \Phi_{1+j} E\left(X_{t-j}/X_s, s \leq t\right) \\
&= \widetilde{X}_t(1) - \sum_{j=0}^{p-1} \Phi_{1+j} X_{t-j}. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Par ailleurs , le processus Z_t satisfait le modèle

$$(1-B)^d Z_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

Donc d'après le Théorème 2, $\widetilde{Z}_t(1)$ vérifie la relation

$$\widetilde{Z}_t(1) + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{1+j} Z_{t-j} = \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+1-j}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}_t(1) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{1+j} Z_{t-j} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t+1-j} \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{1+j} Z_{t-j} + \sum_{j=0}^{q-1} \theta_{1+j} \varepsilon_{t-j},
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Extension aux modèles saisonniers $ARIMA\ (p,d,q) \times (P,D,Q)\ d,\ D > -\frac{1}{2}$

Les résultats obtenus dans les précédentes sections peuvent être généralisés aux modèles saisonniers de période s de la forme

$$\varphi(B)\,\Phi(B^s)\,\nabla^d \nabla_s^D X_t = \theta(B)\,\Theta(B^s)\,\varepsilon_t, \tag{4.22}$$

où

$$\Phi\left(B^{s}\right)=1-\Phi_{1s}B^{s}-\Phi_{2s}B^{2s}-....-\Phi_{Ps}B^{Ps},$$

$$\Theta\left(B^{s}\right)=1-\Theta_{1s}B^{s}-\Theta_{2s}B^{2s}-....-\Theta_{Qs}B^{Qs},$$

qui sont appelés respectivement opérateurs autorégressif (AR) et moyenne mobile (MA) saisonniers,

$$\nabla_{s}^{D}=\left(1-B^{s}\right)^{D}.$$

On note ce modèle par $ARIMA\ (p,d,q)\times(P,D,Q)s$, où p,q,P,Q et s sont des entiers positifs $d,D\in\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

Porter-Hudak (1990) et Ray (1993) ont montré que le modèle (4.22) peut être utilisé en finance, en biologie, environnement,...

Considérons dans un premier temps, le modèle suivant donné par :

$$\nabla^{d}\nabla_{s}^{D}X_{t}=\varepsilon_{t},\ \text{avec } d,D>-\frac{1}{2}, \tag{4.23}$$

où :

$$\nabla^{d}=\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{j}B^{j},$$

$$\nabla_{s}^{D}=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{j}B^{sj},$$

avec $\beta_{0}=1$ et $\alpha_{0}=1$ et

$$\beta_{j}=(-1)^{j}\binom{d}{j},\ \alpha_{j}=(-1)^{j}\binom{D}{j},\ j=1,2,...$$

Il est clair que

$$\nabla^{d}\nabla_{s}^{D}=\sum_{j=0}^{\infty}\eta_{j}B^{j},\ \forall d,D>-\frac{1}{2}, \tag{4.24}$$

où

$$\begin{aligned}\eta_{j} &= \alpha_{0}\beta_{j}+\alpha_{1}\beta_{j-s}+\alpha_{2}\beta_{j-2s}+...\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{k}\beta_{j-ks}\end{aligned}$$

$$ks \leq j \leq (k+1)\, s - 1, \;\; k \geq 0, \tag{4.25}$$

et

$$\beta_{-l} = 0, \;\; l > 0. \tag{4.26}$$

Théorème 4 *Si $d, D > -\frac{1}{2}$, le prédicteur d'un pas d'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle (4.23) est donné par*

$$\widetilde{X}_t\,(1) = -\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{1+j} X_{t-j}$$

où les (η_k) sont donnés par (4.25) avec $\beta_{-l} = 0$, $l > 0$.

Remarque 5 *Le prédicteur $\widetilde{X}_t\,(1)$ donné par le Théorème 4 peut être approximé par*

$$\widetilde{X}_t\,(1) \simeq -\sum_{j=0}^{t-1} \eta_{1+j} X_{t-j} \tag{4.27}$$

Démonstration du Théorème 4. On a

$$\nabla^d \nabla_s^D X_t = \varepsilon_t,$$

avec

$$d, D > -\frac{1}{2},$$

et en faisant le développement de $\nabla^d \nabla_s^D$, on obtient

$$\nabla^d \nabla_s^D = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j B^j,$$

où les (η_k) sont donnés par (4.25).

Le modèle (4.23) peut donc s'écrire sous la forme :

$$X_t = -\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j X_{t-j} + \varepsilon_t. \tag{4.28}$$

On sait que

$$\widetilde{X}_t\,(1) = E\left(X_{t+1}/X_s, s \leq t\right),$$

est le prédicteur qui réalise le minimum de l'erreur moyenne quadratique

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t(1) &= E\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j X_{1+t-j}+\varepsilon_{t+1}/X_s, s\leq t\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j E\left(X_{t+1-j}/X_s, s\leq t\right)+E\left(\varepsilon_{t+1}/X_s, s\leq t\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j X_{t+1-j},
\end{aligned}$$

en remarquant que la tribu engendrée par $\{X_s, s\leq t\}$ est identique à celle engendrée par $\{\varepsilon_s, s\leq t\}$. Ainsi

$$\widetilde{X}_t(1) = -\sum_{j=0}^{\infty}\eta_{1+j}X_{t-j}$$

■

Remarque 6 *La prédiction a l'horizon $l\geq 2$ pour le modèle (4.23) peut être obtenue successivement par la formule*

$$\sum_{j=0}^{l-1}\eta_{1+j}\widetilde{X}_t(l-j) = -\sum_{j=0}^{\infty}\eta_{l+j}X_{t-j}.$$

En faisant l'approximation, en posant $X_{t-j}=0$ pour $t-j$ en dehors des indices de l'échantillon observé, on a

$$\sum_{j=0}^{l-1}\eta_{1+j}\widetilde{X}_t(l-j) \simeq -\sum_{j=0}^{t-1}\eta_{l+j}X_{t-j}, \tag{4.29}$$

où les η_j son donnés par (4.25).

En effet

$$\widetilde{X}_t(l) = E\left(X_{t+l}/X_s, s\leq t\right),$$

d'après (4.28), on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_t\left(l\right) &= E\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j X_{t+l-j}+\varepsilon_{t+l}/X_s, s\leq t\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)+E\left(\varepsilon_{t+l}/X_s, s\leq t\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{l-1}\eta_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)-\sum_{j=l}^{\infty}\eta_j E\left(X_{t+l-j}/X_s, s\leq t\right)\\
&\quad +E\left(\varepsilon_{t+l}/X_s, s\leq t\right).
\end{aligned}$$

Comme

$$E\left(\varepsilon_{t+l}/X_s, s\leq t\right)=0,\ \forall l>0,$$

on obtient

$$\widetilde{X}_t\left(l\right)=-\sum_{j=1}^{l-1}\eta_j\widetilde{X}_t\left(l-j\right)-\sum_{j=l}^{\infty}\eta_j X_{t+l-j},$$

ou encore

$$\widetilde{X}_t\left(l\right)+\sum_{j=1}^{l-1}\eta_j\widetilde{X}_t\left(l-j\right)=-\sum_{j=l}^{\infty}\eta_j X_{t+l-j}.$$

Bibliographie

[1] Ajmi A. N., Boutahar M. (2008), Chroniques démographiques des naissances longue mémoire ou changement de régime ?. *Math. & Sci. Hum.* **1**, N°**181**, 81-105.

[2] Beran, J., Terrin, N. (1996), Testing for a change of the long-memory parameter. *Biometrika*, Vol. **83** (3), 627-638.

[3] Beran, J. (1994), On a class of M-estimators for long-memory Gaussian models. *Biometrika*, Vol. **81** (4) 755-766.

[4] BOX G. E. P., JENKKINS G. M. (1976), *Time series analysis forecasting and control*, San Francisco, Holden Day.

[5] Brockwell P. J., DavisR. A. (1991), *Time Series : Theory and Methods*. 2nd Edn. New York : Springer-Verlag.

[6] Chung C. F. (1996), Estimating a Generalized Long Memory Process. *Journal of Econometrics*, **73**, 237-259.

[7] Deniau C., Doukhan P., Oppenheim G., Renaulte E. (2000), Théorèmes limites et longue mémoire en statistique, *Statistical Inference For stochastic Processes* **3**, Special issue .

[8] Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M. S. (2003), Theory and applications of long-range dependence, *Basel (Suisse), Birkhäuser.*

[9] Fox R., Taqqu M. S.(1986), Large Sample properties of Parameter Estimates for Strongly Dependant Stationary Gaussian Time Series. *Annals of Statistics*, **14**, 517-532.

[10] Geweke J., Porter-Hudak S. (1983), The estimation and application of long-memory time series models, J. Time Serier Analysis, **4**, 221-238.

[11] Gonçalves E.(1987), Une généralisation des processus *ARIMA*, *Annales D'économie et de Statistique.* **5**, 1-38.

[12] Graf W. L (1983)., The arroyo problem : paleohydrology and paleohydraulics in the short term, *Gregory K. G. (ed.), Background to paleohdrology, New York, wiley*, 279-302.

[13] Hassler U., Wolters J. (1995), Long memory in inflation rates : international evidence, *Journal of Business and Economic statistics* **13**, 37-45.

[14] Hassler U. (1993), Regression of spectral estimators with fractionally integrated series. *J. Time Series Anal.*, **14**, 369-380.

[15] Hosking J. R. M. (1984), Modelling persistence in hydrological time series using fractional differencing, *Water Resources Research* **20**, 1898-1908.

[16] Hurst H. E. (1951), Long- time storage capacity of reservoirs, *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **116**, 770-799.

[17] Koopmans L. H. (1974), *The Spectral Analysis of Time Series.* New York : Academic Press.

[18] Lo A. (1991), Long- time memory in stock market prices, *Econometrica* **59**, 1279-1313.

[19] Mandelbrot B. B. (1962), Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy, *Comptes Rendus Académie des Sciences* **254**, 3968-3970.

[20] Mishra T. K. (2008), Stochastic demographic dynamics and economic growth : An Application and Insights from the World Data, Historical Social Research (Section 'Cliometrics'), *Association Française de Climétrie (AFC)*, Vol. **33** (4), 9-190.

[21] Peiris M. S., Court J. R.(1993), A note on the estimation of degree of defferencing in long memory time series analysis. *Probab. and Math. Statist.*, **14**, 223-229.

[22] Peisen V. A. (1994), Estimation of the fractional differnce parameter in the *ARIMA* (p, q, d) model using the smoothed periodogram. *J. Time Ser. Anal.* **15**. 335-350.

[23] Prisetley M. B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*. Vol. **1**. New York : Academic Press.

[24] Robinson P. M. (2003), *Time series with Long memory*, Oxford, Oxford University Press.

[25] Robinson P. M. (1994a), *Time series with strong dependence*. In : Sims, C.A. (Ed.), Advances in Econometrics, Sixth World Congress, Vol. **1**. Cambridge University Press, Cambridge.

[26] Taqqu M. S., Willinger W., Sherman R., Wilson D. (1997), Self-similarity through high-variability : statistical analysis of Ethernet LAN traffic at the source level, *IEEE/ACM Transactions on Networking* **5** (1), 71-96.

[27] Torre K., Dellignieres D., Lemoine L. (2007), Detection of long-range dependence and estimation of fractal exponents through ARFIMA modelling, *British J. Math. Statist. Psych.* ***60**, **1**, 85-106.*

[28] Wagenmakers E. J., Farrel S., Ratcliff R. (2004), Estimation and interpretation of 1/f anoise in human cogniyion, *Psychonomic Bulletin and Review* **11** (4), 579-615.

[29] Willinger W., Taqqu M. S., Teverovsky V. (1999), Stock market prices and Long memory dependence, *Finance and stochastic* **3**, 1-13.

ملخّص:

يهدف عملنا هذا دراسة المسائل الإحصائية الاستقرائية في نموذج ARMA الكسري، مرتكزين على خاصياتها الطيفية، والقيام بتنبؤات في نفس النموذج. تقنيات التقديرات المعهودة لعوامل النموذج المذكور التي تستعمل الطريقة الدقيقة لأقصى المعقولية تكون أحيانا صعبة الاستغلال. بعض المؤلفين استعملوا تقريبات لدالة المعقولية. من أجل تقريب العامل الكسري المشار إليه بـــ d ، تكمن طريقة بديلة في استعمال التحليل الطيفي لسلسلة زمنية مستقرة. الوسيلة الأساسية المستعملة هي القياس الدوري $I_X(\omega_i), 0 < \omega_i \leq \pi, i = 1, \dots, n$ من أجل سلسلة زمنية $(X_1, \dots, X_n)$ و توزيعها المقارب.

يكمن عمل هذه المذكرة في استعمال خاصيات المقاربة للشعاع العشوائي للقياسات الدورية $w\left(I_X(\omega_1), \dots, I_X(\omega_m)\right)$ التي تسمح ببناء تقهقر خطي في d مرتكز على لوغاريتم القياس الدوري. يأخذ الجزء الثاني من المذكرة في التنبؤ إلى المدى $h \geq 1$ في النموذج محل الدراسة بإظهار معادلات تراجعية.

الكلمات المفتحية : سيرورة $ARMA$ الكسري، كثافة طيفية، قياس دوري، تنبؤ.

Abstract

The object of our work consists in studying the inferential statistical problems in the fractional ARMA model based on their spectral properties and to make prediction in the same model. The traditional techniques used to estimate the parameters of the model under consideration by the exact maximum likelihood method are sometimes heavy to exploit. Certain authors use approximations of the likelihood function. To estimate the fractional parameter noted d, an alternative method consists in using the spectral analysis for a stationary time series. The fundamental tools used are the periodogram $I_X(\omega_i), 0 < \omega_i \leq \pi, i = 1, \dots, n$ for a time series $(X_1, \dots, X_n)$ and his asymptotic distribution.

The work suggested in this memory consists in using the asymptotic properties of the random vector of periodograms $\left(I_X(\omega_1), \dots, I_X(\omega_m)\right)$ who allow to build a model of linear regression in d and based on the logarithm of the periodogram. The second part of this memory relates to the prediction at horizon $h \geq 1$ in the studied model by highlighting recurrential equations.

Key words: Fractional ARMA process, Spectral density, Periodogram, Prediction.

Résumé

L'objet de notre travail consiste à étudier les problèmes statistiques inférentiels dans le modèle ARMA fractionnaire basés sur leurs propriétés spectrales et de faire de la prédiction dans le même modèle. Les techniques classiques d'estimation des paramètres du modèle envisagé par la méthode du maximum de vraisemblance exacte sont parfois lourdes à exploiter. Certains auteurs utilisent des approximations de la fonction de vraisemblance. Une alternative à cette méthode pour estimer le paramètre fractionnaire noté d consiste à utiliser l'analyse spectrale pour une série chronologique stationnaire. L'outil fondamental utilisé est le périodogramme $I_X(\omega_i), 0 < \omega_i \leq \pi, i = 1, \dots, n$ pour une série chronologique $(X_1, \dots, X_n)$ et sa distribution asymptotique.

Le travail proposé dans ce mémoire consiste à utiliser les propriétés asymptotiques du vecteur aléatoire de périodogrammes $\left(I_X(\omega_1), \dots, I_X(\omega_m)\right)$ qui permettent de construire un modèle de régression linéaire en d et basé sur le logarithme du périodogramme. La seconde partie de ce mémoire porte sur la prédiction à l'horizon $h \geq 1$, dans le modèle étudié en mettant en évidence des équations de récurrence.

Mots clés : Processus *ARMA* fractionnaire, Densité spectrale, Périodogramme, Prédiction.