

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة منتوري قسنطينة

كلية العلوم الإنسانية والعلوم الإجتماعية

قسم الفلسفة

رقم التسجيل :

الرقم التسلسلي :

عنوان البحث

فلسفة الرياضة عند جان كفايس

دراسة تحليلية إبستمولوجية

رسالة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه العلوم في الفلسفة

إشراف الأستاذ الدكتور

إعداد الطالبة

زبيدة مونية بن ميسي حرم بن عيسى الزواوي بغورة

تاريخ المناقشة: 07 سبتمبر 2008

أعضاء لجنة المناقشة

رئيسا	جامعة الجزائر	أستاذ التعليم العالي	د. عبد الرحمان بوقاف
مشرفا ومقررا	جامعة الكويت	أستاذ محاضر	د. الزواوي بغورة
عضوا مناقشا	جامعة منتوري قسنطينة	أستاذة التعليم العالي	د. فريدة غيوة
عضوا مناقشا	جامعة السانيا وهران	أستاذ التعليم العالي	د. حسين زاوي
عضوا مناقشا	جامعة منتوري قسنطينة	أستاذ محاضر	د. جمال حمود
عضوا مناقشا	جامعة منتوري قسنطينة	أستاذ محاضر	د. علي بوقليع

السنة الجامعية: 1428-1429 / 2007-2008

الإهداء

إلى من طواه الثرى، وعانقه الكرى، وفؤادي الذي انتزعه مني
الردى، إلى من تقلد مسارح الأبدية وعاش مخلدا في نفسي، إلى تذكارات
الماضي، إلى حنين الصبا وأيام أنسي، إلى روح أبي الغالي أهدي هذه
الباكورة.

إلى سويداء القلب، إلى من سقتني ذرها، وحبتي بصدرها، إلى من
لقاؤها ترياقا، إلى أجمل الهدايا وأنفس العطايا، إليك أمي.
إلى شقيق القلب ورفيق الدرب، الذي كان السند لي في تسلق رتب
المعالي، إليك زوجي علي.

إلى أبنائي فلذات أكبادي وجدول حياتي ومسرتي:
هبة الرحمان، إشراق، صفي الرحمان.
إلى أخي وأخواتي، دفئ حياتي.

إلى لآلئ البراءاة الصغيرة:
صلاح الدين، لؤي، أروى، محمد، شهاب، زمردة، أنيس، نزييم.

إليكم جميعا

شكر وتقدير:

الشكر والفضل لله أولاً، الذي منّ عليّ بنعمته لإتمام هذا البحث
فالحمد و الشكر لك ربي
كما لا يفوتني أن أتقدم بشكري الجزيل لأستاذي المشرف الذي كان
و ما زال مبعث الأمل طوال عهد دراستي
الزواوي بغورة

فقدم لي كل التسهيلات وكل الدعم والتشجيع لتجاوز العراقيل
وإتمام البحث وتقديمه للمناقشة، فله مني جزيل الشكر.
كذلك أقدم شكري الخاص لأستاذي الدكتور

محمد مهران رشوان

الذي أشرف على هذا العمل مدة تواجدي بالقاهرة
مقدما لي كل عون احتجته، من نصح وتوجيه وتشجيع .
و الشكر موصول إلى رئيس قسم الفلسفة الدكتور **إسماعيل
زروخي**، إلى الدكتورة **فريدة غيوة**، إلى كل أساتذتي بقسم الفلسفة –
جامعة منتوري- وأخص بالذكر والتقدير أستاذي في المنطق
الرياضي **جمال حمود**.

إلى كل من علمني حرفا
إلى كل الأشخاص الذين شجعوني وأمدوني بمعظم ما تعلمته في
حياتي، لقد تعلمت منكم الكثير
شكرا لكم

مقدمة

لقد ظهرت الرياضيات لتلبية حاجات الإنسان الضرورية كالقيام بالحسابات في الأعمال التجارية، وقياس المقادير كالأطوال والمساحات، وتوقع الأحداث الفلكية، ولهذا فقد كانت شديدة الارتباط بالواقع العملي والحسي وبالممارسة اليومية للإنسان، وتعتبر هذه المرحلة الجنينية للرياضيات، ونجدها في الحضارات القديمة كالحضارة الفرعونية و البابلية. ومن هذه المرحلة وانطلاقاً من الحاجات الثلاثة، انبثقت الأقسام أو الفروع الثلاثة للرياضيات، وهي دراسة البنية، والفضاء، والمتغيرات. فدراسة البنيات أدت إلى ظهور الأعداد بداية بالأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة والعمليات الحسابية المطبقة عليها، ثم أدت الدراسات المعمقة في مجال الأعداد إلى ظهور نظرية الأعداد كنظرية قائمة بذاتها أي علم الكم المنفصل، وفضلاً عن ذلك أدت نتيجة البحث عن الطرق لحل المعادلات إلى ظهور علم الجبر، كما تمّ تطبيق الفكرة الفيزيائية المتمثلة في الشعاع إلى الفضاءات الشعاعية وتمت دراستها في الجبر الخطي. ودراسة الفضاء تأسست ما يعرف بالهندسة، التي هي علم الكم المتصل، ووضع إقليدس أول نسق استنباطي هندسي، فسميت بذلك الهندسة نسبة إليه الهندسة الإقليدية. ونظراً لنسقية الهندسة، اعتبرت الرياضيات عند اليونان علماً نظرياً للمعرفة اليقينية لا يرقى إليها الشك. وظل كتاب العناصر (الأصول) لمؤلفه إقليدس (حوالي 300 قبل الميلاد) المرجع الوحيد للرياضيين مدة قرون عديدة لما شمله من تجديد نتيجة اهتماماته المنطقية، وقد أدى ذلك إلى هيمنة الهندسة الإقليدية حتى القرن 18. و عندما نتكلم عن الرياضيات في اليونان لا يمكننا بأي حال من الأحوال أن نتجاهل مساهمة العديد من الرياضيين اليونانيين منهم مينولوس، طاليس، أبولونيوس، أرخميدس، والتي كانت هامة ليست فقط في الهندسة، بل في شتى الفروع الرياضية الأخرى.

وفي نهاية القرون الوسطى، أخذت الهندسة توجهات جديدة بفضل اكتشاف مبادئ الهندسة الإسقاطية والهندسة الوصفية، واكتمال التطور فيما يتعلق بالترميز الجبري تحت تأثير فييت (*François viète*) في القرن 16، و بإسهاماته و اكتشافاته دخلت فرنسا مرحلة جديدة من الرياضيات و هي مرحلة الرياضيات الحديثة، التي أسس فيها الجبر الحديث والذي اهتم ديكارت بتوضيح معالمه لاحقاً، كما انه بالتنسيق و التعاون مع فرمات (*Fermat*) أسس الهندسة التحليلية و جبرنة الهندسة. وتوالى الأبحاث في القرنين السابع والثامن عشر مع ديزارغ (*Desargues*) الذي انكب على إرساء معالم الهندسة

الإسقاطية، و عرّف الرياضيات بأنها علم اللامتناهي و المتمثل في الهندسة، و هذا ما أكده لاحقاً باسكال (*Blaise Pascal*) و ليبنز (*Leibniz*)، وغيرهم من الرياضيين الذين كانت لهم إسهامات في تطوير الرياضيات، التي بلغت ذروتها في القرن التاسع مع اكتشافات ديدكند وكانتور للامتناهي، ومنه وجود المجموعات اللامتناهيّة، واكتشاف الأعداد الحقيقية والأعداد الخيالية والمركبة، فتطور علم الجبر وعلم الحساب وعلم التحليل، أما في الهندسة تمّ إعادة النظر في النسق الإقليدي وخاصة المسلمة الخامسة لإقليدس، وهذا ما أدى إلى تأسيس الهندسات اللاإقليدية، كما تطور المنطق من خلال إسهامات جورج بول، فريجه، بيانو، راسل. إن هذه الاكتشافات غير المألوفة، وكذا استنتاج وجود متناقضات في مختلف الفروع الرياضية تم بلورتها فيما يعرف بـ "أزمة الرياضيات" وهي أزمة الأسس، وهذا ما دعا إلى ضرورة إعادة النظر في هذه الأسس التي يجب الانطلاق منها لتأسيس رياضيات قوية متناسقة و غير متناقضة، رياضيات خصبّة و يقينية، ولم تعد الإشكالية تخص الرياضيين فقط بل كل العلماء على اختلاف تخصصاتهم (وهذا نتيجة تأثير الرياضيات في علومهم)، الفلاسفة والمناطق، وهذا ما يبرر شرعية وجود فلسفة الرياضيات التي اهتمت وما زالت تهتم بهذه الإشكالية الفلسفية الرياضية، و نجم عن ذلك ظهور اتجاهات عديدة كالاتجاه الحدسي والاتجاه الصوري والاتجاه اللوجستيقي، فأى اتجاه يجب أن تعتمد عليه الرياضيات لإعادة بناء صرحها الشامخ؟

كما تزامن ظهور هذه الأزمة في الرياضيات، إعلان بلانك عن نظرية الكوانتوم سنة 1900، واينشتين عن نظرية النسبية سنة 1905، وهي النظرية التي أطاحت بالنموذج النيوتيني، كما شهدت سنة 1916 توسع المجال الثوري للنظرية النسبية الخاصة أي ميلاد النظرية النسبية العامة. إنها انجازات ثلاث غيرت من مسار و ملامح العلم الفيزيائي و عملت على ترسيخ ملامح الثورة الفيزيائية و جعلها محور نظرية المعرفة العلمية أي الابستيمولوجيا.

و لهذا تميز الربع الأول من القرن العشرين أي قبل الحرب العالمية الثانية بظهور ثورات معرفية التي أثرت بدورها على الفلسفة الفرنسية التي عرفت أزمة في العقلانية، هذا ما أدى إلى بناء العقلانية العلمية عند باشلار و العقلانية الرياضية عند برنشفيك و بعده روبرت بلانشي، و لهذا فالابستيمولوجيا و فلسفة العلوم في فرنسا تطورتا بأبحاث

برنشفيك، باشلار، كويري (*Koyré*)، ديزنتي (*Desanti*)، وكونغيلم

(*Canguilhem*) و كل إسهاماتهم هي تجسيد لأزمة العقلانية .

في هذا الإطار المعرفي تدرج فلسفة جان كفاييس و ابستيمولوجيته الرياضية، إذ يعتبر كفاييس من أهم ممثلي الفلسفة الفرنسية في الفترة السائدة ما بين الحربين العالميتين الأولى والثانية، حيث في هذه الحقبة الزمنية شهدت الفلسفة عموما في فرنسا يقظة على غرار ما كان سائدا في ألمانيا، وكان هناك اهتمام بمختلف المجالات الفلسفية سواء في المنطق أو في الرياضيات أو في العلوم المادية. و قد كان كفاييس من بين الداعين إلى ضرورة النهوض بالفلسفة، و لكونه رياضيا انصب اهتمامه على الرياضيات لا من الناحية الرياضية البحتة فحسب و إنما من الناحية الفلسفية أيضا. وعلى ضوء ما سبق، تم اختياري لموضوع فلسفة الرياضيات عند هذا الرياضي والمنطقي و الفيلسوف لمعرفة إسهاماته.

وقد كان من دواعي بحثنا واختيارنا لهذا الموضوع أسباب ذاتية وأخرى

موضوعية، فأما الأسباب الذاتية تتمثل في:

1- شغفي المستمر والدائم بدراسة المنطق الرياضي ودراسة الإشكاليات الخاصة بفلسفة الرياضيات.

2- إضافة إلى أن شخصية البحث غير معروفة بنسبة كبيرة عند القارئ العربي، وهذا قد يكون نتيجة عدم وجود أي مقال أو كتاب عن فلسفته و عن إسهاماته باللغة العربية، فالمكتبة العربية تفتقر إلى أدنى المعلومات عن كفاييس، ولذا من خلال هذا البحث أردت أن أسلط الضوء عليه وعلى إسهاماته الفلسفية.

أما عن الأسباب الموضوعية نذكر :

1 - جدة الموضوع: فكما سبق الذكر لم يدرس الموضوع من طرف الباحثين في العالم العربي على خلاف ما هو موجود في فرنسا حيث اهتم بدراسته الكثيرون نذكر منهم على سبيل المثال: حورية سيناصور (*H Sinaceur*) من خلال الكثير من المؤلفات نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر "الفلسفة الرياضية عند جان كفاييس"، بيار كاسو نوغي (*Pierre Cassou Noguès*): "التجربة الرياضية عند جان كفاييس" ، كونغيلم وباشلار وغيرهم، كما انعقدت الكثير من الملتقيات والمؤتمرات حول فلسفته

وإسهاماته عموماً مثل: "فلسفة التصور عند جان كفاييس" و هو مؤتمر دولي انعقد أيام 4،3،2 ديسمبر 2004 من طرف مركز الفلسفات و العقلانيات، وأنشأت مخابر بحث حول كل جزء من فلسفته، و الاهتمام به كان أيضاً من خارج فرنسا في ألمانيا وبريطانيا، وفي الولايات المتحدة الأمريكية حيث نوقشت فيها الأطروحة الأولى حوله سنة 1979 بعنوان: حياة ومؤلفات جان كفاييس.

2- عدم وجود المراجع الكافية في فلسفة الرياضيات، و إذا ما وجدنا مرجعاً فإن المادة العلمية الموجودة فيه، نجدها في المراجع الأخرى، وهذا ما جعل الطالب يتخوف دائماً من مثل هذه المواضيع ويتهرب من الخوض في مسألة تطور المنطق أو دور الاكتشاف الكانتوري في تطوير الرياضيات وما إلى ذلك.

3- أهمية الموضوع: إن فلسفة الرياضيات تطورت في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن العشرين، ولهذا من خلال عرض فلسفة كفاييس سنقف عند أهم النقاط التي ارتكزت عليها، واهتمت بها فلسفة الرياضيات في فرنسا وفي ألمانيا وإيطاليا. وعلى ضوء ما سبق فإن الإشكالية المحورية في هذا البحث تدور حول التعريف بالفلسفة الرياضية عند جان كفاييس ودوره في تطوير هذا المبحث الفلسفي من خلال معالجته للمسائل الإبيستمولوجية الرياضية و الحلول المقدمة لها. وتدرج تحت الإشكالية المحورية الأسئلة الفرعية التالية:

Ø هل كان للفلسفة الألمانية أثر في تطوير الفلسفة الفرنسية في بداية القرن

العشرين؟ كيف تم نقل الصورية والأكسيوماتيكية من ألمانيا التي صبغت

فلسفتها بالمثالية إلى فرنسا ذات الفلسفة الواقعية؟

Ø ما هو المنهج الذي اعتمده كفاييس في دراسته الإبيستمولوجية؟

Ø ما الدور الذي لعبه كفاييس في تطوير الفلسفة عموماً وفلسفة الرياضيات

بصورة خاصة في فرنسا؟

Ø هل أسس كفاييس نظرية خاصة به في فلسفة الرياضيات؟

Ø ما هي أهم المسائل الإبيستمولوجية التي اهتم بها لعرض فلسفته؟

وللإجابة على هذه التساؤلات اعتمدت أساساً على مؤلفات جان كفاييس الأصلية

وبعض الدراسات الأجنبية التي سعت إلى توضيح أفكاره، وقد توخيت الموضوعية قدر

الإمكان في قراءة و تحليل واستنباط الأفكار والنتائج ،معمدة في ذلك على منهج تحليلي بالدرجة الأولى تاريخي ومقارن:

-منهج تحليلي لان ما جاء في مؤلفات كفاييس كان غامضا إلى أبعد الحدود (وهذا نتيجة الظروف التي مرّ بها)، وهذا ما يميز كتاباته باعتراف زملائه (كونغيلم مثلا) مما يضطرنا إلى ضرورة الوقوف عند كل مفهوم، وتحليله بدقة وخاصة أنها مفاهيم رياضية يجب توضيحها للقارئ العرب .

- منهج تاريخي وهذا راجع إلى طبيعة كتابات كفاييس حيث في كل مرة يعود إلى الوراء، إلى الماضي القريب كي يتحدث عن الحاضر ويتسنى له الحديث عن المستقبل ،عن تطور الرياضيات، عن صيرورة الرياضيات.

- وكونه مقارنا لأنه كما أشرت آنفا، أن من أهداف هذا البحث الوقوف عند الفلسفة الألمانية والفلسفة الفرنسية في مجال فلسفة الرياضيات، واستنتاج أوجه الاختلاف والتشابه أي المقارنة بينهما ،وليس هذا فحسب بل أن منهج عرض مفهوم من خلال تطوره يجعلنا نعد إلى أن نقارن بين السابق و الحالي واللاحق.

وللإجابة على الأسئلة المطروحة اعتمدت على مؤلفات جان كفاييس و حاولت دراستها بدقة و اخص بالذكر: "التكوين المجرد لنظرية المجموعات"، "الصورية و المنهج الأكسيومي" و كتابه الثالث: "المنطق و نظرية العلم" و اجتهدت لاستنباط ابستمولوجية كفاييس الرياضية، ولتحقيق هذا الهدف تم الاعتماد على الخطة التالية:

Ø المقدمة: عرفنا فيها الموضوع وأهميته وأسباب ودواعي اختياره، ثم حددنا الإشكالية المحورية والمشكلات الفرعية، فالمنهج المعتمد وبعدها تحليل الخطة المعتمدة وبعض الصعوبات والعراقيل الموضوعية التي اعترضت البحث.

Ø مدخل عام: عنوانه جان كفاييس حياته و أعماله ،وقد تعرضنا فيه إلى حياة الفيلسوف جان كفاييس بقليل من التفصيل لأنه غير معروف بصورة شبه مطلقة، فاضطرت إلى عرض هذا المحور في المدخل كي أفيه حقه ،ولم أركز على الجانب الشخصي في حياته بل على الجوانب التي أثرت في فلسفته في مختلف مراحل حياته: طفلا، مراهقا، جامعا، لاهوتيا ،رياضيا ،فيلسوبا ومقاوما، وعلاقاته بالفلاسفة الذين عاصروهم في ألمانيا أو في فرنسا وأثر ذلك في فلسفته، كما تطرقنا أيضا إلى أهم أعماله، ثم أشرنا إلى الحقبة

الزمنية التي ظهر فيها و ذاع صيته و هي فترة ما بين الحربين العالميتين. لنقف عند أهم مميزاتهما، والتمثلة في ظهور العقلانية الجديدة .

بعد ذلك قسمنا البحث إلى ثلاثة أبواب، كل باب يحتوي على فصول وكل فصل يحتوي على مباحث .

Ø الباب الأول وعنوانه: نظرية المجموعات، اعتمدنا فيه على تحليل كتاب كفاييس فلسفة الرياضيات، ملاحظات حول تكوين النظرية المجردة في المجموعات ،وقد قسم الباب إلى ثلاثة فصول:

• الفصل الأول: نظرية المجموعات قبل كانتور، أبرزنا فيه بداية الأزمة الرياضية في القرن التاسع عشر من خلال التطرق إلى أزمة اللامتاهي، وذلك عن طريق الرجوع إلى البدايات الأولى لهذا التصور و تتبع مساره التطوري، من الفكر القديم الى الفكر الحديث و المعاصر، من المنظور الفلسفي إلى المنظور الرياضي، بعدها تطرقت إلى اكتشاف الأعداد الحقيقية، الناطقة و اللاناطقة و المتتاليات المثالية و دورها في تطوير نظرية المجموعات.

• الفصل الثاني: أشرنا فيه إلى الاكتشاف الكانتوري لنظرية المجموعات، من خلال المراحل التي مر بها للوصول إلى النتيجة، و المتمثلة في المرحلة الأولى للاكتشاف (1873-1877) حيث تم فيها إثبات لامعدودية الأعداد الحقيقية، و علاقة اللامتاهي بالمتصل، المرحلة الثانية للاكتشاف (1879-1883) و فيها تم تأسيس نظرية الأعداد الأصلية و الترتيبية، و البرهنة على قوة الأعداد الحقيقية، وبعدها في المبحث الثالث التطرق إلى نسق نظرية المجموعات مع كانتور.

• الفصل الثالث: أكسمة نظرية المجموعات وفيه تطرقت إلى نظرية المجموعات عند ديدكند و أهم المفارقات التي ظهرت و دورها في تطوير النظريات الرياضية، و كذا التحضير لنظرية مجردة للمجموعات، بالإضافة إلى الحديث عن أكسيوم الاختيار ودوره في بناء المجموعات وأنواع الأكسمة في هذه النظرية.

Ø الباب الثاني: الأكسمة و الصورية في علم الحساب و الهندسة، وهو الباب

المخصص لتحليل كتاب كفاييس: المنهج الأكسيوماتيكي والصورية. في هذا الباب

خصصت الحديث فيه عن علم الحساب وتأثره بالأزمة الناتجة في الهندسة وهو بدوره يتفرع إلى ثلاثة فصول:

• الفصل الأول: أزمة نظرية المجموعات وأثرها في علم الحساب، تطرقت فيه إلى الحلول التي قدمها كل من بورال ولويسغ لحل المفارقات التي ظهرت في الرياضيات، وبعدها نتيجة لعدم حل هذه المفارقات من طرفهما، تطرق كفاييس إلى الفلاسفة ديكرات، ليبتز، كانط وبين الحلول المقترحة من طرفهم والتي بنيت أساسا على الحدس. ثم المبحث الثالث من هذا الفصل أشرت إلى الحدسانية عند بروور ومن ثم عرض موقف الاتجاه الحدسي من أسس الرياضيات.

• الفصل الثاني: الأكسمة والصورية في القرن 19، ركزت فيه على الاتجاهات الصورية كالحركة الصورية عند قراسمان وهانكل، نسق ديدكند في علم الحساب، ثم الصورنة والأكسمة عند بيانو وراسل، وفي الأخير أشرت إلى الأكسمة في الهندسة من خلال عرض النسق الأقليدي والأكسمة، وبينت سبب فشله وبعده حللت المصادر الخامسة و سبب انتقاد الرياضيين لها وهذا ما أدى إلى ظهور هندسات لاإقليدية جديدة كهندسة لوباتشفسكي، هندسة غوس، هندسة بولياي وهندسة ريمان وكيف حاولت التأسيس للرياضيات المعاصرة وخاصة الهندسة.

• الفصل الثالث: تطرقت فيه إلى أكسمة الهندسة الاسقاطية، و هذا كي نثبت أن الرياضي اهتم بأكسمة كل فروع الرياضيات، بما فيها الهندسة الاسقاطية المغايرة لهندسة إقليدس، ثم عدت إلى هلبرت للحديث عن نسقه الأكسيومي و هل هو كاف للتأسيس للرياضيات.

Ø الباب الثالث: و قد عنوانه بالصورية الخالصة و المعدلة في الرياضيات، وفيه تم تحليل النسق الهلبرتي خصائصه ومميزاته، والأنساق الهلبرتية المعاصرة له كنسق راسل وأهمية فلسفة الإشارة في الصورية وبراهين عدم التناقض. و يتفرع إلى ثلاثة فصول:

• الفصل الأول: و قد عنوانه بالنسق الصوري حيث حللت فيه البرنامج الصوري لهلبرت و مكوناته، و بعدها تطرقت إلى النسق الصوري و تطبيقاته على منطق القضايا و حساب المحمول و انهينا هذا الفصل بنظرية الأنماط عند راسل، و دور أكسيوم الاختزال في حل المفارقات .

• الفصل الثاني:الصورية الخالصة عند هلبرت،استهليناه بالحديث عن نظرية الأنماط عند هلبرت و اعتماده على أكسيوم جديد هو الأكسيوم المتصاعد ،و في المبحث الثاني ركزت على الانتقادات الموجهة إلى هلبرت من خلال عرض براهين عدم التناقض خاصة عند غودل و غنزن .

• و أخيرا الفصل الثالث و هو عبارة عن حوصلة لما جاء في الفصول السابقة و تأسيس النظرية الخاصة بكفاييس و المتمثلة في الصورية المعدلة ،فهو فصل يحل موقف كفاييس من المسائل المطروحة السابقة ،وخاصة الاتجاهات الثلاث حول أسس الرياضيات،كما يعالج هذا الفصل إشكالية التطور الرياضي عند كفاييس و تفسيره لتقدمها. Ø و أخيرا تأتي خاتمة اجتهدنا أن نصيغ فيها أهم النتائج التي توصلنا إليها من خلال البحث.

Ø و قد أرفقنا البحث بثلاثة ملاحق ،أولاها خاص بالمصطلحات الفلسفية و العلمية الواردة في البحث ،ثانيها خاص بأسماء الأعلام ،و ثالثها خصص للأشكال و المخططات . و ككل بحث علمي و أكاديمي فقد واجهتنا صعوبات أثناء تحليل ودراسة الإشكاليات المطروحة ونذكر أهمها:

1- مشكلة الترجمة: إن أعمال كفاييس لم تترجم وكذا الدراسات التي كانت حوله،وما زاد في صعوبة العملية هو الأسلوب المعقد للفيلسوف ،إذ يضطر القارئ إلى قراءة ما بين السطور، أن يقرأ ما هو خفي حتى يستطيع أن يفهم الالمقصود من العبارات،ومن بعد يقوم بعملية الترجمة،و لهذا ما قمت به اجتهاد شخصي ناتج عن تراكمات المعرفة الرياضية الموجودة لدي من جهة،ومن جهة أخرى الاعتماد على المعاجم و الموسوعات.

2- أما المراجع التي تخدم الموضوع في جوهره فهي غير متوفرة ،و لم أصادف أي مرجع بالعربية تطرق إلى كفاييس و لو عرضا ،وهذا هو سبب اعتمادي في غالبية البحث على المراجع الأجنبية.

ولكن بالرغم من هاتين الصعوبتين و بتوفيق من الله واصلت البحث، وخاصة بعد توفر أهم المراجع ،سواء من المكتبة الأميركية بالقاهرة و مكتبة الإسكندرية أو من مكتبة باريس 8 بباريس،وهذا ما جعل البحث على هذه الصورة.

و هكذا و بعد أن امتثلت صورة هذا البحث فان هناك دافعا قويا للتأكيد على ضرورة الاهتمام بفلسفة الرياضيات بصورة عامة ،ويجب تشجيع الطلبة على الخوض في مثل هذا المجال المعرفي، خاصة أن الذي يتعمق فيه يدرك أنه لم يأخذ حقه من الاهتمام، وأن هناك الكثير من الفلاسفة الرياضيين خاصة الفرنسيين منهم، ما زالت الدراسات العربية حولهم منعدمة.

المدخل

جان كفاييس الفيلسوف، المنطقي و المقاوم و أهم أعماله

أولاً- جان كفاييس :حياته و أعماله

أ- جان كفاييس الفيلسوف،المقاوم

ب- مؤلفات جان كفاييس

ج- مميزات شخصية جان كفاييس

ثانياً-الفلسفة في فرنسا ما بين الحربين العالميتين

أ - أزمة الفيزياء و الرياضيات

ب- أزمة العقلانية

أولاً - جان كفاييس: حياته و أعماله

أ - جان كفاييس الفيلسوف، المقاوم

"يجب أن نعترف أن كفاييس بموته، أردنا أم لم نرد، أخذ معه سر حياته، تساءلنا كثيرا عن هذا السر، لكن لم ننجح في إيجاد حل نهائي لأسئلتنا"⁽¹⁾. هذا ما قاله "كونغيلم" (*Georges Canguilhem 1904-1995*) في محاضرة ألقاها يوم 21 فيفري 1949 بمناسبة ذكرى وفاة جان كفاييس* .

فكتابة حياة جان كفاييس ليست مجرد سرد لمراحل حياة هذا المفكر، ومن ثم لن يتم ذكر حياته في اتجاه واحد، بل في اتجاهات متعددة مختلفة، فهو ذو شخصية متعددة الأبعاد، مازالت غير معروفة من طرف الجمهور الكبير وخاصة منه العربي، شخصية تتلاقى فيها عدة جوانب: فلسفية، رياضية، فكرية، دينية، سياسية و تاريخية. ونظرا لأهمية فكره فقد اهتم عدد من المفكرين بتاريخ حياته نذكر منهم على سبيل المثال⁽²⁾: "لوران دوزو" (*Douzou Laurent*)، "حورية سيناصور" (*Hourya Sinaceur*)، "تيكول راسين" (*Nicole Racine*)، "بنوا فرني" (*Benoît Verny*)، جورج كونغيلم، كما لا ننسى أن نشير إلى أخته "غابرييل فرييرس" (*Gabrielle Ferrières*) التي ألقت الكتاب المشهور حول حياة أخيها بعنوان: "جان كفاييس، فيلسوف في الحرب"^{*} وهو المرجع الأساسي لحياة كفاييس عند أغلبية الباحثين. إن حياة كفاييس مليئة بالأحداث وهي مزيج من عدة اتجاهات، ولكن سنركز فقط على الجوانب التي تخدم موضوع بحثنا.

(1) Aylan Aglan et J.P Azema : *Jean Cavallès résistant ou la Pensée en actes.* Flammarion 2002, p7.

* كونغيلم شارك عدة مرات في إلقاء كلمة بمناسبة ذكرى وفاة زميله كفاييس.

(2) *Ibid*, p7.

* *G.Ferrières : Jean Cavallès, un philosophe dans la guerre (1903-1944), le Félin,* Paris, 2003.

1 - كفاييس قبل منحة روكفلر:

ولد جان كفاييس يوم 15 ماي 1903 في سانت ماكسن (*saint-Maixent*)، كان والده ضابطا يدرس الجغرافيا في المدرسة العسكرية و كان موهوبا بالتدريس وإلقاء المحاضرات، وهي الموهبة التي أورها لابنه جان⁽³⁾، بينما كانت أمه تمارس الموسيقى⁽⁴⁾. في سنة 1908 نشر والده كتاب "الأطلس" الذي اعتمد كمرجع أساسي في الميدان العسكري، ومساعد كذلك في دراسة الأراضي الحديثة، و نتيجة ترقيته غادر وعائلته *Saint Maixent* واستقر بتولوز (*Toulouz*) سنة 1909، وفيها تلقى كفاييس تعليمه الابتدائي.

تحصل على شهادة الليسانس في الفلسفة سنة 1921، وكان نجاحه سبب سفره إلى ألمانيا لقضاء عطلة، فتعلم اللغة الألمانية واطلع على مؤلفات كانط (*Emmanuel Kant* 1724-1804)، "كل صباح خلال كل زيارتي كنت محاصرا بذكرى كانط، بالتفكير أن الحجارة التي وطئت قدمي عليها، الأحياء التي مررت بها، المنازل التي شاهدتها هي نفسها التي داس عليها، ومر بها وشاهدها كانط"⁽⁵⁾، فكفاييس اطلع على مؤلفات كانط وعمره 18 سنة، وقرأها باللغة الأصلية وتأثر به وهذا ما سيؤثر لاحقا في فلسفته.

خلال السنة الجامعية 1923 - 1924 كان بصدد تحضير شهادة في الفيزياء العامة، بالإضافة إلى الشهادة التي تحصل عليها في الفلسفة، وقد عكف أيضا على نيل شهادة ليسانس في الرياضيات من المدرسة العليا للأساتذة دائما. ولهذا فقد كان متعدد التخصصات: فلسفية، رياضية وعلمية، لأنه تحصل لاحقا على شهادة في الفيزياء العامة في جوان 1926، كما نشير إلى اهتمامه بالميكانيكا المنطقية وحساب التفاضل والتكامل. في نهاية سنة 1925 طلب من أستاذه "برنشفيك" (*Léon Brunschvicg* 1869-1944) أن يشرف على أطروحته (في الدراسات العليا)، فاقترح عليه الموضوع: "الفلسفة وتطبيقات حساب الاحتمالات عند البرنولي"⁽⁶⁾، وهذا ما جعله يسافر إلى برلين حيث قام ببحث بييليوغرافي حول "حساب الاحتمالات"، وقرأ مؤلفات كلاين (*Klein* 1849-1925)

⁽³⁾ Aylan Aglan et J.P Azema : *Op.cit*, p15.

⁽⁴⁾ *Ferrières* : *Op.cit*, p31.

⁽⁵⁾ *Ibid*, p 46.

⁽⁶⁾ *Ibid*, p 53.

وهو مؤرخ الرياضيات في كوتنجن (Cottingen)، كما اطلع على مؤلفات وكتابات "هوسرل" (Husserl 1859-1938)، و"بورال" (Borel 1871-1956) حول نظرية المجموعات، ونتيجة لقراءته المتعددة، قرر أن يغير من موضوع أطروحته حيث أصبح يتمحور حول تاريخ نظرية المجموعات. وهذا ما وضعه في رسالته بتاريخ 22 أبريل 1928 إلى أخته فرييرس*، أفصح لها عن سبب تغييره لموضوع أطروحته من حساب الاحتمالات إلى نظرية المجموعات، مقتنعا أن الموضوع الأول يبعده عن الرياضيات ويقربه من الفيزياء، بينما الثاني له صلة وطيدة بالرياضيات، وبالرغم أنه صعب وشاق لأن المادة العلمية الضرورية باللغة الألمانية، لكنه يستحق البحث لأهميته⁽⁷⁾. في سنة 1928 عين كفايس كسكرتير وثائقي في مركز التوثيق الاجتماعي (CDS)، وهذا ما ساعده على الاطلاع على الكتب والمؤلفات الخاصة بالعلوم الاجتماعية، وكان مدير المركز "بوغلي"^{**} (Célestin Bouglé 1870-1940)⁽⁸⁾.

وفي بداية سنة 1929 كلف بإعطاء محاضرات في الفلسفة العلمية حول الرياضيات، وذلك بالتوازي مع إنجازهِ لأطروحته، حيث وصل إلى ضرورة التطرق إلى كانتور ومذكراته نتيجة الأبحاث التي قام بها.

2 - كفايس بعد منحة روكفلر:

2-1 كفايس قبل حرب العالمية الثانية:

في خريف 1929-1930 تحصل كفايس على وظيفة بالمدرسة العليا للأساتذة، وهذا ما ساعده على مواصلة أبحاثه حول الأطروحة، وكان يرى ضرورة الاستفادة من عطلة علمية طويلة المدى في ألمانيا من أجل الببليوغرافيا، وقد تحصل بالفعل على منحة روكفلر (Rockfeller). في هذه العطلة التقى بالرياضي هربراند (Herbrand J 1908-1931)، وبعد جمع المادة اللازمة غادر برلين ليلتحق بهمبرغ (Hambourg)، حيث خص

* كفايس كان متعلقا كثيرا بأخته وكان يرسلها باستمرار دون انقطاع يخبرها بكل ما يحدث له سواء بينه وبين نفسه، أو بينه وبين الآخر، وكان كذلك يرسل أصدقائه، لكن في مرات قليلة جدا.

⁽⁷⁾ Ibid, p 69.

^{**} هو صاحب كرسي تاريخ الاقتصاد السياسي في السوربون .

⁽⁸⁾ Aglan- Azema : Op.cit , p44.

وقته لبحثه⁽⁹⁾، وفي رسالة لأخته أرسلها بتاريخ 17 نوفمبر 1930 أخبرها فيها أنه وجد مقالا للرياضي فرانكل (1891-1965 *Fraenkel*) حول كانتور وتاريخ اكتشافاته، وهذا ما دفعه إلى تغيير أحد فصول الأطروحة كما تحصل على عدد كبير من المعلومات والمراجع التي لم تتبادر إلى ذهنه وهذا ما جعله أكثر حماسا⁽¹⁰⁾.

ولأول مرة في رسالة 9 ديسمبر 1930 أشار **كفاييس** إلى مراسلات كانتور - ديدكند (*correspondance Cantor Dedekind*)، ولهذا راسل فرانكل وطلب منه الحصول على الكتابات اليدوية لكانتور والتي لم تنشر بعد، ويخص بالذكر حسب ما جاء في الرسالة⁽¹¹⁾ مراسلات كانتور - ديدكند، وكذلك تعليق "ستاكيل" (*1862 P. Staeckel*) - (1919) على محاضرة برنشفيك لسنة 1897، لأن هذه الكتابات لها أهمية كبرى في تطور نظرية المضاعفات المنتظمة (*théorie des multiplicités Ponctuelles*) وفي إعداد مفهوم القياس. وكرد على رسالة **كفاييس**، أكد فرانكل وجود جزء من الرسائل المتبادلة بين الرياضيين في كوتنجن (*cottingen*)، بالرغم أن ابنة كانتور أخبرت **كفاييس** أن "شونفلير" (*1853-1928 Schoenflies*) والذي ألف أفضل الكتب حول نظرية المجموعات محتوى وتاريخا لم يجد ما يفيد في هذه الكتابات⁽¹²⁾.

في كوتنجن استقبل **كفاييس** من طرف "هاس" (*1898-1979 Helmut Hasse*) مدير معهد الرياضيات، وكذا من "إيمي نوثر" (*1882-1935 Emmy Noether*) وقد كانت من الرياضيين المشهورين في تلك المرحلة، ساعدت **كفاييس** في الحصول على المراسلات، التي بعد قراءتها أدرك أهميتها من أجل توضيح أصول النظرية التي من المؤكد أنها لعبت دورا أساسيا في تطوير الرياضيات في القرن 19⁽¹³⁾، واتفق بالتعاون مع نوثر (نوثر لقيت حتفها قبل رؤية الكتاب) أن ينشر المراسلات في شكل كتاب، وخاصة أنه استطاع البرهنة على ثلاث نظريات لديدكند، وبالفعل تمّ طبع الكتاب ونشره من طرف مكتبة هارمان (*Hermann*) سنة 1937⁽¹⁴⁾.

(9) *Ferrières : Op.cit, p 86.*

(10) *Ibid, p 87.*

(11) *Ibid, p 92.*

(12) *Ibid, p 93.*

(13) *Ibid, p 94.*

(14) *Ibid, p 94.*

وعن أطروحته أكد **كفاييس** في رسالة مؤرخة يوم 5 جويلية 1934، أن الهدف منها ليس الشهرة ولا يطمح للحصول على منصب، و قد لا تكون مفيدة، لكن يدرك أيضا أنه سيكون لها دور فعال في لعب دور الموحد بين مختلف التيارات حتى وإن كانت متعارضة، كان يريد من أطروحته أن تجمع كل التيارات الفلسفية تحت لواء واحد، أن يكون هناك تنسيق بينها، وفي حالة وجود من يزعم هذا التنسيق عليه أن يعاقب⁽¹⁵⁾. وهنا يظهر **كفاييس** مبالغا، لأنه من غير الممكن أن يتم التنسيق بين مختلف الفلسفات، وكيف لا وهو في رسالته السابقة يؤكد وجود خلاف واضح بين الأستاذ وتلميذه أو لنقل بين مذهبين، بين هوسرل وهيدغر .

في سبتمبر 1934 حضر **كفاييس** مؤتمرا في علم الاجتماع ،استمع فيه للمحاضرة الأولى أي محاضرة الافتتاح ،حيث كان خطاب برنشفيك مليئا بالحماس من أجل الوصول إلى الحقيقة،وأهمية الملتقى بالنسبة ل**كفاييس** تكمن في لقائه بغاستون باشلار (*Gaston Bachelard 1884-1962*) وابنته وبوغلي ،هذا الأخير الذي أهدى له منحة ثانية لألمانيا لمدة عام من أجل أن يتفرغ للتحضير .بعد ثلاثة أشهر قضاها في كوتنجن، عاد **كفاييس** إلى باريس، وبدأ في تحرير كتابه المنهج الأكسيوماتيكي والصوربة (*la méthode axiomatique et le formalisme*)، وقرر أن يكون موضوع أطروحته الأساسية، أما أبحاثه حول نظرية المجموعات فكانت موضوع أطروحته المتممة⁽¹⁶⁾. في ماي 1936 شارك في مؤتمر الرياضيات في أوسلو، وقد أقيمت محاضرات متعددة من بينها للرياضي "فون نومان" (*Von neuman 1903-1957*) التي كانت إشكاليته حول الأكسيوماتيك.

تم استدعاء **كفاييس** من طرف الخدمة العسكرية في جوان 1936 ،ولكنه لم يترك بحثه الفلسفي، وهذا ما بدا واضحا في الرسالة التي أرسلها إلى لوتمان (*Albert Lautman 1908-1944*) يوم 13 جوان 1963: "لقد عدت إلى مسألة تمثيل نظرية المجموعات في نسق هلبرت، إن الأمر ليس واضحا إلى حد الآن، يوجد جدل لا يمكن تجاوزه وهذا ما يجبرني إلى العودة إلى نظرية "سكولم" (*Thoralf Albert Skolem 1887-1963*)

(15) *Ibid*, p 13.

(16) *Aglan, Azema : Op.cit*, p 66.

(17) *Ferrières : Op.cit*, p 131.

وكذلك هربراند... إن أهم ما قام به هذا الأخير هو الابتعاد عن كل دلالة حدسية... سأعيد القيام بنفس العمل مع ربطه بعمل "غودل" (1978-1906 Godel)، ثم طلب منه أن يفيد بنسخة من أطروحة "هربراند"⁽¹⁷⁾ ففي هذه الرسالة أدرك كفاييس أنه لتطويع نظرية المجموعات يجب الابتعاد كلياً عن كل ما هو حسي، عن الحدس وضرورة إحداث القطيعة مع البدهة وهذا هو الشرط الأساسي لتأسيس نظرية المجموعات، ونظراً لأنه أراد أن يزيل كل الغموض عن نظرية المجموعات عاد إلى كوتنجن بألمانيا، وكأنه ينشد ضالة لم يجدها بعد، وهناك التقى بالأستاذ هاس، ودار بينهما نقاش حول طبع مراسلة كانتور-ديكند، كما التقى أيضاً بالمنطقي "قنزن" (1945-1909 Gentzen).

في 22 فيفري 1938 ناقش كفاييس رسالته في السوربون، حيث من بين أعضاء لجنة المناقشة: "كارتان" (1951-1869 Cartan)، "دونجوي" (1884-1884 Denjoy) و"برنشفيك". بعدها عين أستاذاً مكلفاً بالدروس في المنطق والفلسفة العامة في كلية الآداب بستراسبورغ وذلك في جويلية 1938⁽¹⁸⁾، وفي الجامعة التقى بـ"أرشمان" (1974-1905 Ehresmann) وقد كان من أقرب أصدقائه إليه، وهو عضو من جماعة بورباكي إلى جانب "وايل" (1998-1906 André Weil) وغيرهما، هذه الجماعة كانت ترسل كتاباتها الخاصة بالتحليل إلى كفاييس لقراءتها وإبداء ملاحظاته عليها⁽¹⁹⁾.

2-2 كفاييس المقاوم:

في سبتمبر 1939 اندلعت الحرب العالمية الثانية، واستدعي كفاييس للمشاركة فيها، فلم يتوان في الالتحاق، وكلف بالإشراف على فرقة عسكرية، وكان يتعامل مع جنده على أنه واحد منهم، فيقوم بنفس الأعمال الموكلة إليهم بما فيها الحراسة ليلاً. في 11 جوان 1940، تم القبض عليه من طرف الألمان، بينما كان يبحث عن الفرقة التي كان ينتمي إليها، فوجد نفسه محاصراً من كل الجهات وتم أسره، إلا أنه في أوت 1940 هرب من الأسر، واستأنف نشاطه المهني في كلية ستراسبورغ، وفي آن واحد أسس أول خلايا المقاومة السرية، بعدها بسنة تعرّف على كونغيليم، وقد لاحظ كفاييس وجود تقارب في الأفكار بينهما.

(18) Canguilhem ;, Op.cit,p11.

(19) Ferrières : lettre du 9 décembre 1938 ,Op.cit, p147.

بسبب ظروف الحرب، غير اسمه إلى *Jacques Carpentier*، وكان طلبته على علم بانخراطه في المقاومة، كما أسس شبكة *Gohors*، ونظرا لأنه كان يريد التوسيع من نشاطه العسكري، قرر السفر إلى لندن إلى أنه لم يستطع ذلك جوا، فسافر بحرا، لكن تمّ القبض عليه ثانية في سبتمبر 1942. وبعد محاولات وتدخل وسائط وقيادات عسكرية تمّ تحسين وضعه في السجن، كما تمكنت أخته من الحصول على الموافقة بزيارته⁽²⁰⁾، كان يتلقى الكثير من الزيارات من طرف زملائه من بينهم كونغيليم، كما كانت أخته واسطة بينه وبين "بيرري" (*Jacques Perret 1901-1992*)^{*} و هو صديق له من المدرسة العليا لم يتردد أبدا في إحضار الكتب التي طلبها منه **كفابيس** الذي كان بصدد تحرير كتاب "بحث في المنطق" (*traité de logique*)، كما أحضر له لوثمان الوثائق الضرورية من تولوز من أجل هذا الغرض⁽²¹⁾.

في 11 نوفمبر 1942، ومع دخول الألمان إلى الجنوب، تم نقل **كفابيس** وآخرين من *Montpellier* إلى معسكر في *Saint Paul d'Eyjause*، لأن الجيش الألماني اعتقد أنهم عناصر يشكلون خطرا على أمن الحكومة، فتم وضعهم تحت الرقابة في المعسكر، تابع **جان** نشاطه العلمي بالرغم من الظروف القاسية التي كان يمر بها (خاصة من ناحية الأكل والملجأ)، إلا أنه كان يتخذ من مكتب الدكتور *Souplet-Megy* ملجأ دافئا حيث استأنف فيه تحرير كتابه حول المنطق. وقد وصف هذا الدكتور مجيء **كفابيس** في جريدة يومية *Le journal des Praticiens*: الخميس 12 نوفمبر... في الغرفة الثالثة شخص بداخلها، ضعيف البنية، دون معطف، يرتعش من البرد، يقترب من المدفأة، رحبنا به، وبصورة خفية سألته: ماذا تفعل في الحياة المدنية؟ أستاذ في المنطق، في جامعة السوربون، **جان كفابيس**. في يوم السبت 27 نوفمبر تمّ الإعلان عن محاضرة من إلقاء **كفابيس** حول "ديكارت ومنهجه"⁽²²⁾.

⁽²⁰⁾ *Ibid*, p 186.

^{*} أستاذ في كلية الآداب في *Montpellier*

⁽²¹⁾ *Ibid*, p 188.

⁽²²⁾ *Ibid*, p 190.

بعدها بأيام، استطاع **كفابيس** الهروب من المعسكر، بعد أن تمّ وضع خطة محكمة، وقد التحق بمسكنه في ليون (*Lyon*) بصعوبة وبشخصية مزيفة بعد أن ساعده صهره، وكذا بعض من أصدقائه من خلال التنسيق فيما بينهم. لم يتوقف عن المقاومة بل على العكس كثف من نشاطه وحرر نفسه من كل الالتزامات الجامعية، وكان حزينا لابتعاده عن الجامعة، ولكن كان يرى أنه يجب أن يضحي من أجل وطنه بكل ثمين.

غير اسمه ثانية إلى *Carriere*، ومرافقه جان غوسي (*Jean Gosset* 1912-1944) إلى *Gérard*، هذا الأخير تخلى عن أطروحته أيضا حتى يتفرغ للحرب وهو نائب **كفابيس** في رئاسة الشبكة، توالى الأحداث إلى أن جاء أمر **لكفابيس** بالالتحاق بلندن (من فيفري إلى أبريل 1943)، وفي هذه اللحظات كان قد أنهى كتابه "البحث في المنطق"، وكان بصدد كتابة مقدمة له، ولهذا عند سفره أعطى النسخة لأخته وطلب منها نشرها في حالة عدم عودته، لأنها تمثل وصيته الفلسفية* : "إذا لم أعد انشري هذا البحث، فهو وصيتي الفلسفية، للأسف المقدمة التي كتبتها لست راضيا عنها، وللأسف هذه الدراسة دون مقدمة ستكون صعبة وتتطلب جهدا من طرف الذين يريدون فهمي... سأعود وأعيد كتابة المقدمة"⁽²³⁾، وبعد عودته من لندن وزميله بول ريكور (*Paul Ricœur* 1913-2005) محملا بوسائل اتصال مباشرة بلندن، كلف بالقيام بمجموعة من العمليات في بريطانيا وفرنسا (كتشويش التجهيزات الألمانية بما فيها المنارات الإشعاعية).

في 16 أوت 1943، بعث برسالة إلى السيدة لوتمان زوجة ألبرت لوتمان، طلب منها محاورات أو مقابلات زوريش* التي تدور حول المنطق المتعدد القيم، كما أخبرها أنه أضع كل نقاطه المسجلة ويجب عليه إعادة بنائها من جديد، وأن مقال "لوكازيفيتش" (*Lukasiewicz* 1878-1956) سيكون مساعدا قويا من أجل إعادة بناء المقال. في 28

* نتيجة الاعتقالات والتفتيش الذي تم في بيت *Ferrières* ضاعت النسخة التي أعطاها إياها أخوها و الذي أعطى نسخة ثانية للسيدة *Foulquier* من أجل كتابتها على الآلة الراقنة، ونظرا لأنها كانت مهمة بفكر كفابيس فقد نشرت الكتاب بعنوان "حول المنطق ونظرية العلم": *sur la logique et la théorie de science*.

⁽²³⁾ *Ibid*, p 201.

* *Ferdinand Gonseth : Les entretiens de Zurich, sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6-9 décembre 1938 (Ecole Polytechnique fédérale de Zurich), Puf, 1947.*

أوت 1946 وبعد أن تمّ القبض على أحد أعضاء شبكة الاتصال الذي أخبرهم بالرقم والاسم السري لكفاييس، تمّ توقيف هذا الأخير من طرف الجوسسة الألمانية، كما تم اعتقال أخته وزوجها، بعدها أطلق سراح أخته، بينما بقي هو وصهره في السجن إلى ربيع 1945 حيث عاد الصهر، بينما هو لم يعد، واتصلت أخته بوزارة الحرب بعد طول انتظار، فأكدت لها أنه أعدم في بداية 1944 وعلى الأرجح 17 جانفي 1944⁽²⁴⁾، وهو الذي قبره يحمل اسم: المجهول رقم 5، وبهذا ينتهي مشوار كفاييس الفلسفي، العلمي، الثوري، الإنساني، إنها نهاية الفيلسوف المقاوم، هذه إذن أهم محطات حياة الفيلسوف والمنطقي جان كفاييس.

ومما سبق نستنتج ما يلي:

- لا وجود للتعارض بين الفلسفة والواقع، ولا أهمية للفلسفة إن لم تجسد على أرضية الواقع، وإن لم تكن سلاحا قويا للدفاع عن المبادئ والثوابت.
- مدة وجيزة لا تتعدى الأربعين، استطاع كفاييس أن يحقق هدفين، الأول هو تحريره لكتب تتعلق كلها بفلسفة الرياضيات، وثانيها الكفاح ضد المحتل والتضحية من أجل الوطن.
- أقام علاقات قوية مع الكثير من الفلاسفة الذين سجلت أسماؤهم في تاريخ الفلسفة المعاصرة.
- كان كفاييس يتميز بنشاطه الدؤوب، وكان كثير التحرك للحصول على أكبر قدر ممكن من المعارف، التي تساعده من جهة على إتمام الرسالة ومن جهة أخرى حتى لا يكون عضوا مهما في مجتمعه، وقد استطاع إثبات وجوده كمفكر وباحث في الفلسفة والمنطق في بداية حياته.
- من خلال سرد حياة كفاييس تبين لنا بالفعل أنه فيلسوف ورياضي ومقاوم، إلا أن قصر حياته لم يترك له المجال لتوضيح ما جاء في كتبه، الذي اعترف بنفسه أنها صعبة وتحتاج لدليل (أي مساعد لفهم ما بين الأسطر)، وهذا ما اتفق عليه الدارسون لكتبه في فرنسا خاصة، حيث أكدوا أن العبارات أو اللغة التي كتبت بها الأبحاث معقدة وتحتاج لتوضيح وتبسيط.

⁽²⁴⁾ Ibid, p 232.

ب - مؤلفات جان كفاييس:

يقول غاستون باشلار: "إننا لا نجد في مؤلفات كفاييس أي تمهيد، أو مقدمة حول ما جاء فيها، أي خلاصة أو تحضير بسيكو تكويني أولي لقراءة كتبه، يجب أن يجتهد القارئ لفهم أفكاره وإذا أردنا اتخاذه كموجه لدراسة معمقة فسيكون ذلك مفيدا جدا"⁽²⁵⁾. إن مؤلف كفاييس ليس مؤلفا سهلا للتخمين، ولا يمكن أن نستخرج منه الخصائص العامة ببسر، وذلك لأن كل الفصول والصفحات ذاتها كتبت بإرادة ألا يقدم إلا ماهية الأفكار، عصاره التفكير، فلا يوجد ما هو ثانوي ولا يوجد ما هو واضح مباشرة، إن المؤلف يتوجه للقارئ المتقف، المتعلم، يتجه نحو المعرفة الناضجة، ولهذا من أجل فهم واكتشاف ما جاء في مؤلفات كفاييس يجب التعليق على كل ما جاء فيها سطرا سطرا.

ولأن طبيعة منهج كفاييس تحليلي تركيبى، فإنه يمكن تصنيف مراحل بحثه:

- من جهة ملاحظاته حول التفكير الرياضي.
- من جهة نظراته حول فلسفة المعرفة.

فترتب مؤلفاته كما يلي:⁽²⁶⁾

1) *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles, Editions Hermann, 1938.*

2) *Méthode axiomatique et formalisme, Essai sur le problème du fondement des mathématiques, edition Hermann, 1938.*

3) *Transfini et continu, oeuvre posthume 1947.*

4) *sur la logique et la théorie des sciences, oeuvre posthume ,1947.*

كان هذا ترتيب باشلار لمؤلفات كفاييس، إذ أنه صنف كتبه المشهورة حسب محور

البحث، إلا أن هناك من قام بترتيبها وتصنيفها إلى:

- مؤلفات قبلية التي نشرت قبل وفاته.
- مؤلفات بعدية نشرت بعد وفاته.

1 - المؤلفات القبليّة:

- الكتب:

⁽²⁵⁾ Gaston Bachelard : *L'oeuvre de Jean Cavaillès, dans Ferrières : Jean Cavaillès, un philosophe dans la guerre (1903-1944),, p 238.*

⁽²⁶⁾ *Ibid, p 240.*

1) *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*, Hermann 1938.

2) *Méthode axiomatique et formalisme*, Hermann, Paris, 1938.

• المقالات:

1) *Les oeuvres complètes de G Cantor*, *Revue philosophique de la France et de l'étranger*, année 57, librairie Felix Alcan, Paris, 1932, pages 437-444.

2) *sur la deuxième définition des ensembles finis donnée Par Dedekind*, *Fundamenta mathematica*, 1932, pages 143-148.

3) *Compte rendu de D. Hilbert, P. Bernays*, *Recherches philosophiques* 1934, pages 423-430.

4) *Compte rendu de L- Brunschvicg : les ages de l'intelligence*, *Revue Philosophique de la France et de l'étranger*, 1935, pages 403-406.

5) *L'école de vienne au congrès de Prague*, *Revue de métaphysique et de moral*, 1935, pages 137-149.

6) *Sur le Problème du déterminisme*, *Revue Philosophique de la France et de l'étranger*, 1936, pages 108-112.

7) *Avertissement : Correspondance Cantor- Dedekind*, J Cavailles et E. Noether, Paris, Herman, 1937.

8) *Logique mathématique et syllogisme*, *Revue Philosophique de la France et de l'étranger*, 1937.

9) *Réflexions sur le fondement des mathématiques*, *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, Paris, 1937.

10) *Compte rendu de A. Lautman*, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, *Revue de mathématique et de morale*, 1938.

11) « *Du collectif au Pari* », *Revue métaphysique et de morale*, 1940, pages 139-163.

2 - المؤلفات البعدية:

• الكتب:

1) *transfini et continu*. Hermann, Paris, 1947.

2) *Sur la logique et la théorie des sciences*, Puf, Paris 1947.

3) *Philosophie mathématiques* (Réédition de :

-*Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles*.

-*Transfini et continu*.

-*Correspondance Cantor – Dedekind*, Hermann, Paris 1981.

4) *Oeuvres complètes de Philosophie des sciences* (réédition de

- Méthode axiomatique et formalisme.
- Sur la logique et la théorie des sciences.
- Philosophie mathématique.
- L'école de vienne du Congrès de Prague.
- Logique mathématique et syllogisme.
- Réflexions sur le fondement des mathématiques.
- La Pensée mathématique.
- Mathématique et formalisme.
- La théorie de la science chez Bolzano, Hermann, Paris 1994.

• المقالات:

1) *La pensée mathématique, discussion avec Albert Lautman (4 février 1939),*

Bulletin de la Société française de philosophie, t XL, 1947.

2) *Mathématique et formalisme, Revue internationale de Philosophie, N° 8, 53, 1949.*

و مما سبق نلاحظ أن الكتب البعدية ما عدا الكتاب الأول والثاني، قد كانت عبارة عن جمع لنصوص ومقالات كتبها **جون كفاييس**، كذلك ما ألفه **كفاييس** يتوافق مع السنوات التي حياها، ومع الظروف التي أحاطت به، خاصة في السنين الأخيرة أثناء ح ع II، فقد كان يقوم بعملين، الأول: المقاومة والدفاع عن الوطن والثاني: مواصلته للبحث الفلسفي، وهذا ما أكده الكثير من زملائه الذين رافقوه في مختلف مراحل حياته.

3 - المقالات الدينية:

لا يجب أن نغفل أن **لكفاييس** مجموعة من مقالات نشرها حول المسيحية، و خاصة انه انظم للجماعة المسيحية التي كانت تنشط من طرف بروتستانتيين والتي تأسست من طرف الفيلسوف (*Albert Miroglo 1895-1978*)، وكان له أصدقاء مقربين مثل: جاك مونود (*Jaques Monod 1904-1944*)، وكذلك تعرف على شارل لوكور (*Charles le coeur* قتل كذلك 1944) وكانت الجماعة تجتمع في المدرسة العليا. كما أعجب **كفاييس** وزملائه بالمجلة البروتستانتية "الإيمان والحياة" (*foi et vie*) والتي أسست من طرف (*Pierre Maury 1890-1956*). وفي سنة 1926-1927 أسس **كفاييس** مجلة "الدراسات المبشرة" حيث كانت تعالج قضايا دينية، وكان حينها يتردد على المؤلفات البروتستانتية.

وبالرغم من ابتعاد كفاييس عن الجماعة المسيحية بسبب انشغاله بالأطروحة والتدريس، إلا أنه كان في تواصل مستمر معها وفي هذا المجال نشر مجموعة من المقالات، تؤكد انه بالرغم من ميولاته الفلسفية إلا أن التربية الروحية ما فتئت أن تبرز في نشاطه الديني، فلم يكن بعيدا عن الحركات الناشطة بل انظم إليها وعندما ابتعد عنها بقي يرأسها وينشر مقالات حولها. أهمها⁽²⁷⁾:

1- *Education morale et laïcité* (التربية الأخلاقية و العلمانية) *cahiers de foi et vie, n°3 1928.*

2- *Oecuménisme et missions* (الكنايسية و المهمات) *,cahiers de foi et vie, 1931.*

3- *Un mouvement de jeunesse en Allemagne* (حركة الشباب في ألمانيا) *, Annales de l'université de Paris, t7, n°2, 1932.*

4- *L'Allemagne et le reichstag* (ألمانيا و رايشتاخ) *, la Paix Par le droit, 1933, t42, n°2, pages 305-315.*

5- *Crise du Protestantisme Allemand* (أزمة البروتستانتية الألمانية) *. Le christianisme social, 1933.*

6- *Le conflit à l'intérieur du Protestantisme allemand* (الغموض داخل البروتستانتية الألمانية) *, Politique, n°2, 1934.*

7- *La crise de l'église Protestante allemande* (أزمة الكنيسة

البروتستانتية) *, Politique, n°12, 1934, pages 1036-1039.*

⁽²⁷⁾ George Canguilhem, *Op.cit*, p52.

ج - مميزات شخصية كفاييس :

توفي كفاييس وعمره لا يتجاوز الواحد والأربعين، إلا أنه في هذه الفترة، تعرف على الكثيرين، وصادق الكثيرين، ولذا بعد وفاته الكثير تأثروا لموته وسأخذ كمثال:

1 - غاستون باشلار:

"لقد التقينا أنا و كفاييس في المؤتمر الفلسفي في براغ *Prague* سنة 1934، وحينها تأثرت كثيرا بثقته بنفسه وسعة معرفته وتنامت صداقتنا بمرور الوقت، وقد كانت هناك مشاريع مشتركة بيننا.

- الدفاع عن التفكير العقلاني.

- تذكير الفلسفة بالعودة إلى شروط الحجة"⁽²⁸⁾.

2 - جورج كونغيلم:

هو من الأصدقاء المقربين لكفاييس والمحبيين إلى قلبه، وواحد من زملائه في المدرسة، ونتيجة للاحتلال النازي لفرنسا، طلب كونغيلم إجازة من جامعة تولوز سنة 1940، إلا أن هذه الإجازة لم تدم طويلا لأن كفاييس دعاه في مارس 1941 كي يخلفه في منصبه في ستراسبورغ لأنه عين أستاذا بالسوربون، كما أن كونغيلم عرض عليه مساعدته في أعمال المقاومة ضد الاحتلال، وكما أشرنا سابقا فإن كونغيلم بقي على اتصال دائم بصديقه عندما تم القبض عليه، وبعد وفاته، استدعي كونغيلم لمرات عديدة من أجل المشاركة في تأبينية صديقه وأكد أن عمله كان ناتجا عن فلسفة صادرة من عمق المعنى الفلسفي لديه. ويقول أيضا عنه: "إن ما هو طبيعي بالنسبة لفيلسوف باشر في الكتابة عن الأخلاق هو أن يستعد للموت على سريره، لكن كفاييس في الوقت ذاته الذي كان يقوم بكل ما يجب فعله عندما نريد الموت في المعركة، كان يؤلف منطقا وهكذا قدم أخلاقه دون أن يقوم بكتابتها"⁽²⁹⁾. ما نستخلصه من قول كونغيلم، أن كفاييس كان يؤسس لفلسفة عملية، وعض أن يكتب فعل، استعد للموت في كل لحظة، لم يستسلم وألف منطقته حتى وإن لم يستطع أن يتممه من خلال كتابته للمقدمة، إلا أنه حقق الهدف، هو فيلسوف مقاوم، علم

⁽²⁸⁾ Gaston Bachelard: *Op.cit*, p237.

⁽²⁹⁾ George Canguilhem: *Op.cit*, p30.

رجاله أن الفكر هو تطبيق تجريبي. كما يؤكد كونغيلم أن **كفاييس** أيضا بموته كمقاوم، قدم إجابة أكثر وضوحا من الإجابة التي كان سيقدمها من خلال حياته كأستاذ. ومما سبق فقد اتفق باشلار وكونغيلم وفوكو و غيرهم على أن **كفاييس** كان فيلسوفا، منطقيا رياضيا، ثوريا وأخيرا بطلا، التقى في حياته بالرغم من قصرها بشخصيات لها بصماتها في تطوير الفلسفة بصورة عامة والفلسفة الرياضية خاصة، ونذكر منهم: بريهييه، برنشفيك، بورال، هوسرل، كلاين، رينيانو، ديدكند، ميرلوبونتي، لوتمان، بورن، بوغلي، فريدمان، سارتر، باشلار، كونغيلم... كما أنه اطلع على مؤلفات الكثير من الفلاسفة السابقين ونخص بالذكر سبينوزا، كانط، هيدغر، كانتور...، وهذا ما جعل فلسفته الرياضية متنوعة، ولم تقتصر على مجال واحد، بل مجالات متعددة وهو ما سنتطرق إليه بالتفصيل.

ثانيا - الفلسفة في فرنسا ما بين الحربين العالميتين:

لقد تميز انقضاء القرن التاسع عشر و حلول القرن العشرين بوقوع أزمة في الفلسفة، أدت إلى قيام فلسفات جديدة تناولت ميادين الفكر في القرن العشرين، بعدما عجزت الفلسفات السابقة مواصلة مسيرتها تاركة المكان لفلسفة جديدة أصبح يطلق عليها اسم الفلسفة المعاصرة⁽³⁰⁾، فتاريخ الفلسفة المعاصرة يبدأ مع بداية القرن العشرين أي سنة 1900 ، وبوادر هذه المرحلة ظهرت سنة 1890 مع أبحاث برغسون و جيمس بادلي ، بوانكري وديلتاي،الوضعية العلمية الطبيعية،و ظهور مؤلفات فلسفية لبرغسون و بلانك و هوسرل⁽³¹⁾. ولهذا يمكن أن نميز في هذه الفلسفة بين ثلاث فئات، الفئة الأولى تتمثل في أزمة الفيزياء و الرياضيات، والتي أدت إلى تطور الفكر التحليلي و انهيار بعض المواقف الفلسفية، أما الفئة الثانية تتمثل في بروز منهجين فكريين أخذوا ينموان منذ ذلك الوقت و هما المنهج الرياضي - المنطقي و المنهج الفينومينولوجي، أما الفئة الثالثة فتتمثل في مجموعة من

⁽³⁰⁾ بوخينسكي: تاريخ الفلسفة المعاصرة في أوروبا، ترجمة محمد عبد الكريم الوافي، مكتبة الفرجاني، ليبيا، (دت)، ص 41 .

⁽³¹⁾ *Wladyslaw Tatarkewiz : twentieth century philosophy (1900-1950), Belmont, California, p1.*

النظريات كان همها الأول هو وضع تصورات شاملة على العالم و ابرز المذاهب التي تبنت هذه النظريات هي اللاعقلانية و الميتافيزيقا الواقعية الجديدة⁽³²⁾.

أ - أزمة الفيزياء و الرياضيات:

لقد حقق العلم الفيزيائي تطورا ملحوظا في القرن العشرين حيث أضاف إلى معارفنا حلولا لكثير من أسرار الطبيعة، فقد قيل أن التقدم الذي حققه هذا العلم في هذا القرن يفوق ما أنجزته البشرية في قرون، و قد كان هذا التطور عبر ثلاثة أعمال، فأما العمل الأول كان سنة 1900 عندما أعلن بلانك عن ميلاد نظرية الكوانتوم، العمل الثاني سنة 1905 و يتمثل في اكتشاف نظرية النسبية الخاصة من طرف اينشتاين، وهي النظرية التي أطاحت بالنموذج النيوتني، بينما العمل الثالث كان سنة 1916 و هي السنة التي شهدت توسع مجال النظرية النسبية الخاصة، أي ميلاد النظرية النسبية العامة.

أما في الرياضيات فان الأزمة لا تقل أهمية عن أزمة الفيزياء، فمن بين الاكتشافات الرياضية تأسيس الهندسات اللاإقليدية، و اكتشاف نظرية المجموعات عند كانتور و هي الاكتشافات التي أفضت إلى تطور التحليل والجبر، علم الحساب و الهندسة.

هذه الانجازات العلمية و الرياضية غيرت من مسار و ملامح العلم الفيزيائي، وعملت على ترسيخ ملامح الثورة الفيزيائية وجعلها محور نظرية المعرفة العلمية أي الاستيمولوجيا، فحاولت الأخيرة أن تستفيد من "مناهج و تصورات و مناهج الفيزياء من أجل الوصول إلى نتائج دقيقة في الفلسفة التي تجعل العلم الفيزيائي بكل جوانبه، مبادئه، فروضه، قوانينه، نتائجه و قيمته، موضوعا لها بالإضافة إلى الرؤية النقدية و التحليلية التي تبين القيمة الموضوعية لهذا العلم"⁽³³⁾، و من آثار الثورة العلمية المعاصرة أيضا تحول الحتمية إلى الحتمية الاحتمالية أو اللاحتمية، و اكتشاف الارتياح عند هيزنبرغ، و هذا ما نتج عنه تلاشي المفهوم الكلاسيكي للجوهر، أما في الرياضيات فقد تمّ تحطيم فكرة النسق اليقيني و عوض بالنسق الفرضي أو النسق الأكسيومي أو النسق المصادارياتي و هو ما انعكس على المنطق الرياضي.

ب - أزمة العقلانية:

⁽³²⁾ بوخينسكي: مرجع سابق، ص 42.

⁽³³⁾ خالد قطب: العقلانية العلمية دراسة نقدية، المكتبة الأكاديمية، القاهرة، ط 1، 2005، ص 43.

بالإضافة إلى ما سبق فقد أدت هذه الاكتشافات إلى تغيير الإشكاليات الخاصة بفلسفة العلوم، حيث تمّ وضع مفاهيم و نظريات و مناهج العلم موضع تساؤل و مراجعة، وأصبح الشغل الشاغل للفلاسفة المعاصرين نمو المعرفة العلمية و تقدمها عبر تاريخ العلم، الذي يمتد جذوره من حضارة مصر و ما بين النهرين إلى وقتنا الحالي، مما أدى إلى تصور جديد لطبيعة التقدم في العلم، فالمعرفة العلمية لم تعد سكونية ثابتة و تتطابق مع الخبرة الحسية و يمكن الحكم عليها بالصدق أو الكذب، بل أصبحت ديناميكية و كوّنّت علاقات مع المعارف الأخرى، و هذا ما أدى إلى التنظير لمعرفة علمية جديدة تطرح إشكاليات معرفية مغايرة للسابقة⁽³⁴⁾، مما أدى إلى ظهور أزمة العقلانية*، حيث العقل ذاته أعلن ثورة على المبادئ المعارف التي أنشأها و شكك في صلاحيتها، وأصبح بذلك ظاهرة كبقية الظواهر الأخرى يتغير و يتحول، فنأسست العقلانية العلمية المعاصرة، مغايرة للعقلانية الكلاسيكية التي كانت سائدة منذ القدم و ازدهرت مع ديكارت و سبينوزا (1677-1632 spinoza) و ليبنز و كانط. فالعقلانية و فلسفة المعرفة تمثل أحد قسيمي الفلسفة الفرنسية، و يمثل هذا التيار كفاييس، باشلار، كانغيلم و كويري (Koyré)، بينما القسم الأول يتمثل في فلسفة التجربة، المعنى و الذاتية من ميرلوبونتي الى سارتر.

فبداية التحول كان بالاكتشافات العلمية و بظهور الهندسات اللاإقليدية، فالعقل لم يتجدد فحسب بل اقتنع بإمكانية تجده اللامحدود، و لهذا استعاض الفلاسفة و الرياضيون عن العقلية الديكارنية بعقلية معاصرة، و اندلعت معركة كبرى بين العقل المدرسي و العقل الحديث⁽³⁵⁾،

⁽³⁴⁾ نفس المرجع، ص 44.

* إن جذر كلمة العقلانية هو الاسم اللاتيني (ratio) و يعني العقل، فكلمة عقلاني نعني بها التأكيد على قدرات الإنسان العقلية تأكيداً خاصاً، و لديه إيمان فائق بقيمة العقل و الحاجة العقلية و أهميتها. و لهذه الكلمة معنيان فأما المعنى الأول هو واسع و عام و يتمثل في الالتزام بمقاييس العقلية (rationalité) و هذا من طبيعة الإنسان، أما المعنى الثاني و هو المعنى الدقيق و المقيد و التقني و هو ما يقابل التجريبية.

(جون كوتنغهام: العقلانية فلسفة متجددة، ترجمة محمود منقذ الهاشمي، مركز الإنماء الحضاري، حلب، الطبعة الأولى، 1997، ص 17).

⁽³⁵⁾ البير بايي: الثورات العقلانية، ترجمة عادل العوا، دار الشمال، (دم)، 1996، ص 100.

فبعد ان كانت السيادة في الفيزياء النيوتينية للمكان مطلق، طول مطلق، زمان مطلق، أصبحت السيادة في الفيزياء الاينشتينية للمكان و الزمان النسبيين، وهذا ما أكده باشلار⁽³⁶⁾ .

1 - العقلانية العلمية:

إن أهم ما يميز الفلسفة الفرنسية في نهاية القرن التاسع عشر و بداية القرن العشرين أزمة العقلانية، هي عبارة عن ثورة أو هي ثورات عقلانية انتقدت بشدة العقلانية الكلاسيكية خاصة الكانطية "ليس لأنها حاولت البحث عن اليقين خارج الإحساس و إنما لكونها انشددت إلى العقل و كأنه شيء اكتمل بناؤه"⁽³⁷⁾، كما انتقدت الفلسفات المعاصرة لا انطلاقاً من مبدأ فلسفي، و إنما من بنية هدم الركاب الفلسفي المتمثل في التيارات الفلسفية الاحترافية، و في الأفكار الفلسفية التي يتشبث بها العلماء في فهم ممارستهم، و بهذا فهي فلسفة تتحدد بالالفلسفة⁽³⁸⁾، إن العقلانية المعاصرة هي فلسفة اللافلسفة، و هي التي تطابق العلم الذي يتطور باستمرار، أنها فلسفة الرفض (اللا)، كما يقول باشلار.

لقد رفضت هذه العقلانية العقل قبل العلم، و لم تعترف بأي بناء أو نسق نهائي للعقل العلمي، و ذلك لأنها ترى أن العقل متجدد باستمرار نتيجة التطورات و الثورات العلمية المستمرة، فإذا كانت العقلانية العلمية الحديثة (ديكارت و كانط) اهتمت بالبحث عن المبادئ المطلقة النهائية التي تقوم عليها المعرفة الإنسانية، فإن المعاصرة تقوم على قابلية مناقشة و إعادة النظر، فلنقد و المراجعة و إعادة النظر دور كبير في تحليل فلاسفة العلم المعاصرين للعقلانية الحديثة.

ولقد عرفت العقلانية العلمية الانطلاقة من باشلار"الذي دخل تاريخ الفلسفة المعاصرة ممثلاً للعقلانية الفرنسية الجديدة"⁽³⁹⁾، وألف كتاب: "الفكر العلمي الجديد" سنة 1934، يصف

G Bachelard : le nouvel esprit scientifique, Puf, Paris, 13^{eme} édition, (36) 1990, p134.

⁽³⁷⁾ سالم يفوت: فلسفة العلم و العقلانية المعاصرة، دار الطليعة للطباعة و النشر، بيروت، ط 1، 1982، ص160.

⁽³⁸⁾ نفس المرجع، ص155.

⁽³⁹⁾ حسن شعبان: النزعة العقلانية في فلسفة العلم المعاصر، منشأة المعارف، الإسكندرية، 1998، ص55.

فيه ظهور علم لاديكارتي إذ اقترح نمطا جديدا في تاريخ العلوم⁽⁴⁰⁾، وأقبل على الفلسفة عن طريق البحث في العلوم و سار في اتجاهين: فأما الاتجاه الأول هو مواصلة فلسفة برنشفيك، و الثاني التجديد و هذا ما يؤكد على أن باشلار تأثر ببرنشفيك، و لهذا لا يمكن الحديث عن العقلانية الجديدة دون الرجوع إلى برنشفيك الذي قسم عمر الذكاء (الفكر الرياضي) إلى خمسة مراحل: ما قبل المنطق، الفيثاغوري، الأرسطي، الديكارتي، المعاصر⁽⁴¹⁾. فنزعة برنشفيك

المثالية هي نزعة عقلانية ساعدت في ظهور الكثير من فلسفات العلم الحديثة في فرنسا، خاصة عند الفيلسوف العلمي باشلار⁽⁴²⁾.

باشلار أكد على التلاحم بين العقلانية المحلية و النظرية الذرية، و الكيمياء الخاصة بالجزئيات و نظرية الظواهر الكهربائية و المغناطيسية، كما أكد على إمكانية تأريخ الحقيقة العلمية، ليس كتطور مستمر و لامتناهي كما أكد دوهم أو برنشفيك، لكن كمجموعة من قطائع ناتجة عن وجود عوائق إبستيمولوجية ناجمة عن الحدس⁽⁴³⁾، لقد أكد باشلار على الخاصية التكوينية للفرضيات و البراهين و كذلك على الخاصية الرياضية و المجردة للغة العلم التي تتبعها عن الواقعية و التي أطلق عليها اسم الابستيمولوجيا اللاديكارتيية⁽⁴⁴⁾، و العقلانية التي قال بها هي العقلانية العلمية (العقلانية التجريبية أو فاعلية العقل و نشاطه) وأهم خصائصها:

- رفضت العقلانية العلمية المعاصرة النسقية في مجال المعرفة العلمية، لأنها تضيء سمة الاكتمال و النهائية على المعرفة العلمية، فالعلم المعاصر يؤكد على أنه يقوم على أساس عدم الانتظام و الفوضى و التعددية .

(40) ادوارد موروسير: الفكر الفرنسي المعاصر، ترجمة عادل العوا، منشورات عويدات، بيروت-باريس، (دت)، ص131.

(41) *Jean Cavailles : Les ages de l'intelligence, revue philosophique de la France et de l'étranger, T 119, Janvier, Fevrier 1935, pp404, 405.*

(42) حسن شعبان : برنشفيك و باشلار بين الفلسفة و العلم، دار التنوير للطباعة و النشر، لبنان، ط1، 1993، ص 53.

(43) *Pierre Wagner : les philosophes et la science, Gallimard, 2002, p940.*

(44) *Bernard Sichère : Cinquante ans de philosophie française, ADFP, Paris, 1998, p17.*

- أكدت العقلانية العلمية أن المنهج العلمي قابل للتغير من مرحلة إلى أخرى، فأصبح ينظر إليها على أنها ضد المنهج، و هذا ما جعل باشلار يؤكد على انه لا توجد استمرارية في المنهج المستخدم، توجد قطيعة معرفية حيث تطور العلم لا يستند إلى نفس المفاهيم بل إلى إعادة بنائها وإعادة تعريفها⁽⁴⁵⁾، فلا توجد رابطة و علاقة بين الفكر العلمي القديم و الجديد أو المعاصر، و بين العقل العلمي القديم و الجديد، فالكيمياء و الفيزياء المعاصرتان تختلفان عن الكيمياء و الفيزياء قبل عصر اينشتين، فهما لا تعتمدان على التجربة الحسية بل ادخل فيهما جانب نظري مجرد⁽⁴⁶⁾.

- لم تعد العقلانية تؤمن بوجه إدراك الحقيقة، و لهذا أضحت الطابع العام لها تعدد جوانبها في إدراكها، مما أدى إلى استدعاء مواقف و حلول متعددة، فأصبحت الفلسفة العلمية المعاصرة تجمع بين ما هو عقلي وما هو تجريبي، و لهذا فان بداية القرن العشرين تميز بوجود التجريبية و العقلانية و توطيد العلاقة بينهما⁽⁴⁷⁾.

- ترفض المبادئ الأولية السابقة عن التجربة، كما يرفض أيضا النزعة العلمية البحتة التي ربط بين العلم و الواقع و تمتحن العلم على أساس التجربة وحدها.

2 - العقلانية الرياضية:

إلى جانب العقلانية العلمية الباشلارية، هناك مشروع بناء فلسفة عقلانية جديدة عند "بلانشي" (Robert Blanche 1898-1975)، الذي دعا بدوره إلى إعادة النظر في إشكالية الفلسفات العامة لتكون ملائمة مع نتائج الثورة العلمية المعاصرة، فالعقلانية البلانشية ليست استمرارا للعقلانية الكلاسيكية لأنه انتقدها و جاء بالبديل، كما انه انتقد أيضا الفلسفة الواقعية و الفلسفة الوضعية⁽⁴⁸⁾ من خلال كتابيه: "العلم الفيزيائي و الواقع" و "العلم الحاضر و العقلانية".

(45) *Ibid*, p17.

(46) محمد وقيدي: فلسفة المعرفة عند غاستون باشلار، دار الطليعة، لبنان، ط1، 1980، ص200.

(47) *Gaston Bachelard : la philosophie du non, Puf, Paris, 3^{eme} édition, 1988, p5.*

(48) حسن شعبان: مشكلات فلسفية معاصرة، (دم)، 2000، ص41.

إن العقلانية الكلاسيكية في نظر بلانشي نوعان⁽⁴⁹⁾: فطرية من خلال حيازة العقل على معارف فطرية، و قبلية نتيجة وجود مقولات قبلية في الفكر الإنساني سابقة عن كل تجربة، و من بين المفاهيم قبلية: المكان و الزمان حيث كانت العقلانية الكلاسيكية تعتبرهما ثابتين سابقين على التجارب، إلا أن هندسة ريمان و لوباتشفسكي أدت إلى مراجعة مفهوم المكان الذي كانت تقوم عليه الهندسة، لأنها لم تعد خاضعة لأطر حدسية ثابتة بل لأطر تتغير تبعا لتطور الهندسة، فالمكان أصبح ذا علاقة جدلية بالتجارب .

أما النظرية النسبية فقد أعادت النظر في مفهوم الزمن، فبعد أن كان مطلقا و واحدا اثبت اينشتين انه ليس واحدا فهناك سرعة دنيا و سرعة قصوى، و نفس الشيء في الميكانيكا الكلاسيكية التي كانت تنظر إلى الزمان و المكان على أساس أنهما واقعان مطلقان مستقلان عن بعضهما، أما الميكانيكا النسبية فهي تؤكد على نسبيتهما، فأصبح الزمان بعدا رابعا للمكان .

فبلانشي يرى أن العقلانية المعاصرة تتجاوز العقلانية الكلاسيكية، فهي تعتمد مبدأ الحوار و التعاون بين العقل و التجربة، هي منفتحة على التجربة و تؤمن بفاعلية العقل و نشاطه في العمل العلمي⁽⁵⁰⁾، فهي تنظر إلى العقل لا كبنية نهائية و إنما كبنية متطورة ، و نشاطه يساهم في بناء المعرفة، ولهذا فالعقلانية الرياضية لا تقوم فقط على نقد العقلانية الكلاسيكية، و إنما تؤكد حقيقة تتمثل في أن المعرفة العلمية تتطور باستمرار، و منه فالعقلانية الكلاسيكية لا تسير التطور العلمي، و إذا كان هذا موقف بلانشي من العقلانية الكلاسيكية فانه انتقد كذلك الواقعية حيث يرى أنها تغفل نمو المعارف العلمية في وقتنا الحاضر و تغفل طبيعة المعرفة العلمية.

و يتمثل نقد بلانشي للواقعية في نقطتين:

- موقف الواقعية من الجوهر أو الشيء في ذاته: إن النزعة العقلانية المعاصرة ترفض تصور الجوهر كشيء في ذاته، لأن العلم المعاصر لا يقصد معرفة الشيء في ذاته بالمعنى الميتافيزيقي، بل ينظر إلى الشيء في ذاته كحد لقدرتنا على المعرفة، كعائق للمعرفة

(49) محمد وقيدي: ما هي الابستيمولوجيا؟ مكتبة المعارف، (دم)، ط2، (دت)، 416.

(50) حسن شعبان: مشكلات فلسفية معاصرة، مرجع سابق، ص43.

المتطورة، فالعلم المعاصر يعمل من أجل إقصاء كل المواضيع التي هي عبارة عن جوهر، و هذا لا ينفي أبدا تحقق شرط الموضوعية بل يؤكد ضرورة تطور المعارف العلمية⁽⁵¹⁾.
- نظرة الواقعية إلى الرياضيات على أنها مجرد لغة للعلم: إن العلم المعاصر يؤكد دور الرياضيات في صياغة للنظريات العلمية، و ما النظرية إلا تجريد عقلي لكنها منطلقة من الواقع الحسي، و لهذا دورها لا يكمن في أنها مجرد لغة للعلم، بالإضافة إلى أنها تهتم بالعلاقات و العلم مبني على هذه العلاقات الموجود بين الظواهر⁽⁵²⁾.

ما الذي يميز العقلانية المعاصرة⁽⁵³⁾ ؟

- و عي الفلاسفة بالأثر الذي أحدثته الثورة العلمية المعاصرة في عدد من المفاهيم، التي يستخدمها الخطاب الفلسفي، هذه الثورة أربكت الموقف العقلاني الفطري الديكارتي و الموقف العقلاني القبلي الكانطي.

- القبول بوظيفية التصورات بدلا من القول بفطريتها أو بقبليتها.

- الانتقادات الموجهة للواقعية من حيث مفهومها للواقع.

-الخاصية المميزة لهذا التيار الفلسفي هي المكانة التي يحتلها العلم الرياضي فيه، الذي لم يعد مجرد لغة بل منهج تفكير العلوم.

- الاتجاهات التي انتقدتها العقلانية لا تمثل الفلسفة المطابقة للعلم، و لهذا فالفلسفة

الجديدة تهدف إلى التطابق مع العصر.

علاوة على ما سبق فإن من مميزات الفلسفة الفرنسية ما بين الحربين، تركيز فلاسفتها على فلسفة التصور التي تعود تاريخيا إلى اوغست كونت في حديثه عن تاريخ و فلسفة العلم. و قد مثل هذه الفلسفة باشالار و كونغيلم اللذان جعلوا من فلسفة فرنسا فلسفة التصور، واهتم **كفابيس** بهذه الفلسفة حيث قام بتحليل و دراسة مقال المنطق الصوري و المتعالي لهوسرل و أكد أنها ليست فلسفة الوعي بل فلسفة التصور الذي يمكن أن يؤسس فلسفة العلم و قد اهتم بأبحاثه الكثير من اللوجيستيين⁽⁵⁴⁾.

⁽⁵¹⁾ نفس المرجع، ص45.

⁽⁵²⁾ محمد وقيدي: مرجع سابق، 427.

⁽⁵³⁾ نفس المرجع، 433.

⁽⁵⁴⁾ *Gary Gutting : french philosophy in the twentieth century, Cambridge, London, 2001, p228.*

الباب الأول

نظرية المجموعات

الفصل الأول: نظرية المجموعات قبل كانتور

الفصل الثاني: الاكتشاف الكانتوري لنظرية المجموعات

الفصل الثالث : أسمة نظرية المجموعات

لقد تميز القرن التاسع عشر بظهور أزمة الرياضيات التي أحدثت تغييرا في الرياضيات الكلاسيكية، من حيث التعريف والموضوع والمنهج. هذه الأزمة هي نتيجة القطيعة مع البدهة (*évidence*)، حيث أن الرياضيات كانت تفسر بالعودة إلى الحدس، إلى التجربة الحسية، و هذا ما جعلها عبارة عن ترجمة للعالم الخارجي، ولهذا المفاهيم الرياضية التي توصل إليها الرياضي لها صورة في هذا العالم الذي نجده عبارة عن مجموعات وتشكيلات من الأشياء، فالإجراءات الرياضية تقوم أساسا على الأشياء الحسية الموجودة. فعندما نقول $12=7+5$ فهذا يقيني، لأنه إذا أخذنا تشكيلة من ورود تعكس العدد 5، وتشكيلة أخرى من ورود تعكس العدد 7، فإن النتيجة هي تشكيلة من الورد تعكس العدد 12، فالصدق هنا راجع للحدس الحسي وهو الذي حافظ على أن تكون الرياضيات لا معقولة، ومتناقضة بل تسكنها الآلام⁽¹⁾.

في كتابه "مراحل الفلسفة الرياضية" أعطى برنشفيك أهمية كبرى للجبر الديكارتي، الذي تجاوز الهندسة الإقليدية وكان برنشفيك يعتبرها بداية الأزمة، أو لنقل هذا الجبر بداية الرياضيات الحديثة⁽²⁾، فديكارت أقام جبره بتعويض النقاط بالإحداثيات، والأشكال والمنحنيات بالمعادلات كالتعبير عن الدائرة بالمعادلة: $x^2+y^2=a^2$ مع التأكيد أن x و y رموز للخطوط المستقيمة وهكذا. إلا أن كفاييس رأى أن الثورة الديكارتية غير تامة، لأن الجبر الديكارتي هو مؤسس على الهندسة الإقليدية، والأخيرة تقوم أساسا على حدس المكان، فالإجراءات الرياضية عند ديكارت محكومة بالإجراءات والمواضيع الهندسية والتي بدورها محكومة بالأفعال والمواضيع المرئية⁽³⁾.

إن الجبر عند كفاييس تطور وشهد تغيرات في القرن 19، حيث اهتم الرياضي بتعريف المفاهيم الرياضية بصورة جبرية خالصة ليعمها فيما بعد، وهذا ما أدى إلى ظهور إشكاليتين: فأما الأولى تقوم على تحليل المفاهيم و الخصائص التي تم التوصل إليها عن

⁽¹⁾ J. Cavaillès : *La philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1981, p 31.

⁽²⁾ L. Brunschvicg : *les étapes de la philosophie mathématique*, A. Blanchard, 1993, p 133.

⁽³⁾ J. Cavaillès, *Op.cit*, p 31.

طريق الحدس، وأما الثانية تهتم بتطوير هذه المفاهيم من خلال تحريرها من القيود التعسفية المفروضة عليها من الحدس⁽⁴⁾.

ولهذا فتطور الرياضيات هو ناتج عن القطيعة مع البداهة والعودة المباشرة للحدس الحسي، هذه القطيعة أمدت الرياضيات بخاصية التجريد، والتجريد ليس مناقضا للمحسوس أو الحسي بل الحدسي، الحدس أو الموضوع الحدسي هو مرتبط مباشرة بالتجربة الحسية، والموضوع المجرد هو الذي لا يرتبط بالتجربة الحسية، ولذا فإن النظريات المرتبطة بالمواضيع الحسية لها مقابل في التجربة الحسية، بينما النظريات المرتبطة بالمواضيع المجردة توضع بمعزل عن التجربة الحسية.

ويجب أن نعرف التجريد، فهو لا يعني عزل خاصية ما عن موضوع حسي، كالهندسي الذي يتحصل على شكل المثلث بإبعاده أو عزله عن الشيء كاللون والفردية، يقول **كفاييس**: "إنها ابستمولوجية ساذجة تلك التي تنشئ أو تؤسس المواضيع الرياضية انطلاقا من الواقع فإذا كان هناك تجريد فلن يكون من الواقع، لأنه لا يوجد ما نقوم بتجريده إلى إجراءات، لكن من الإجراءات إلى الواقع مع إهمال في الواقع لبعض الخصائص الرياضية"⁽⁵⁾ في الواقع عندما ننطلق من حقل معطى له علاقة بالتجربة الحسية، التجريد يقوم أساسا على إعادة تعريف المفاهيم بطريقة جوهرية، ثم بعد ذلك تعميمها إلى ما بعد التجربة الحسية، فالتجريد هنا لن يكون جذريا، لأن النظريات ستحتفظ بمحتوى حسي أكثر أو أقل ظهور، أكثر أو أقل شرحا للتجربة الحسية، ولهذا فالتعارض بين المجرد والحدسي هو نسبي، فالنظرية ليست مجردة بشكل مطلق بل أنها أقل أو أكثر تجريد، أو لنقل أكثر أو أقل حدسية من النظريات الأخرى.

إن النظرية الجديدة تبدو بالنسبة للنظرية القديمة أنها مقاطعة للحدس، ومنه تظهر مجردة، لكن بمجرد ظهور نظرية أخرى ثابتة فإنها ستجاوز النظرية التي قبلها فتظهر النظرية الأخيرة أكثر تجريد، بينما التي قبلها أكثر حدسية.

وإذا قلنا من قبل أن أزمة الرياضيات كانت نتيجة ضرورة القطيعة مع البداهة، الحدسي، المحسوس فهي كذلك ظهرت نتيجة أزمة اللامتاهي.

⁽⁴⁾ *Ibid*, p 32.

⁽⁵⁾ *J. Cavaillès : oeuvres complètes de philosophie des sciences, Hermann, Paris 1994, p 64.*

الفصل الأول

نظرية المجموعات قبل كانتور

المبحث الأول : أزمة اللامتناهي

المبحث الثاني : الأعداد الحقيقية والامتاليات المثلثية

المبحث الثالث : الأعداد الناطقة و اللاناطقة

من بين نتائج أزمة الرياضيات نظرية المجموعات، وعندما نتحدث عن هذه النظرية يتبادر إلى أذهاننا مباشرة الرياضي الألماني جورج كانتور (1845-1918 Cantor) الذي انكب على دراسة مسائل رياضية ذات أهمية من بينها اللامتناهي (*l'infini*). إن "اللامتناهي" أو "ما لا نهاية" هو بمثابة لغز حير الكثير من المفكرين، فلاسفة كانوا أو رياضيين أو فيزيائيين أو علماء فلك... في مختلف العصور، كما أنه تصور فرض وجوده في معظم الأنساق الفلسفية التي كانت تهدف إلى الإجابة على مختلف تساؤلات الإنسان، ومن بينها مفهوم الإله، أو من يكون الإله (*Dieu*)؟ انه السؤال الذي جعل الفلاسفة يتركون في أنساقهم مكانا للإله اللامتناهي بالتعريف فهو الأزلي الأبدي.

وإذا كان هو ضروري في الميتافيزيقا، فهو كذلك بالنسبة للعلم، إذ أنه يوجد مجال معرفي تطرق إلى المواضيع اللامتناهية ألا هو الرياضيات فكيف تمّ الوصول إلى مفهوم اللامتناهي في الرياضيات؟

وقبل ذلك ما هو اللامتناهي؟ هل هو بالفعل موجود في الطبيعة، في العالم الحسي، في الفيزياء، أم أنه مجرد تصور ذهني محض؟ هل اللامتناهي عند الفلاسفة القدامى هو نفسه الذي قال به كانتور؟ و منه ما هو اللامتناهي عند كانتور؟ وكيف تمّ الانتقال من اللامتناهي الفلسفي إلى اللامتناهي الرياضي؟

المبحث الأول: أزمة اللامتناهي

تعريف اللامتناهي:

اللامتناهي هو تصور مرتبط بكل ما ليس له حد كالعدد أو القياس ورمزه ∞ ، الذي استعمل لأول مرة من طرف جون واليس (1703-1616 John Wallis) وذلك سنة 1656، إذ استمده من الرومان الذين كانوا يستعملونه للإشارة إلى العدد 1000⁽¹⁾. ولا يعتبر اللامتناهي نفيًا للامتناهي (لا-متناهي) إذ ليس هناك أدنى تشابه بينهما⁽²⁾ مما يعني أن هناك فروقات تحول دون تقاربهما، يقول "لالاند" في معجمه: "لن أستخدم أبدًا مصطلح "اللامتناهي" للتعبير عما ليس له نهاية،... لكن للتعبير عن الأكبر من كل ما هو متناهي"⁽³⁾. فلا يجب القول أن العالم لا متناهي لأننا لم نستطع أن ندرك أنه متناهي، لم نستطع أن نحصي الموجودات، ولكن ماذا يوجد بعد الذي نراه؟ إن هذه التساؤلات جعلت من ألب "ما لا نهاية" أو اللامتناهي "لغز حير المفكرين في مختلف مراحل العصور. واللامتناهي أنواع:

- لا متناهي مجرد وهو الرياضي.
 - لا متناهي في الكمال وهو الميتافيزيقي.
 - لا متناهي حسي وهو الفيزيائي.
- وسنركز في بحثنا على اللامتناهي الرياضي والذي بدوره ينقسم إلى :
- لا متناهي ممكن (بالقوة) (*l'infini potentiel*) وهو الذي يتزايد أو قابل لأن يتزايد دون نهاية"⁽⁴⁾.
 - لا متناهي فعلي (*l'infini actuel*) "وهو الذي لا حدود له بالفعل"⁽⁵⁾.
- والحديث عن اللامتناهي يقودنا لطرح السؤال التالي: كيف تمَّ رؤية اللامتناهي قبل كانتور؟ وللإجابة على السؤال سنتطرق إلى بعض النماذج من الفكر القديم والحديث.

(1) John Wallis: *The arithmetic of infinitesimals*, (1656), Springer-Verlag 2004, p 71.

(2) Francisque Bouillier: *Théorie de la raison impersonnelle*, E Joubert, Paris, 1844, p 22.

(3) A Lalande : *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*. Puf, Paris, 1960, p 511.

(4) Fourier: *Dictionnaire de la langue philosophique*, Puf, Paris, 1962, p 361.

(5) *Ibid*, p 360.

أولاً- من اللامتناهي في الفكر القديم إلى اللامتناهي في الفكر اليوناني:

أ- دحض الانقسام اللامتناهي عند زينون الإيلي :

لقد عرفت المدرسة الإيلية بروز الكثير من الفلاسفة الأوائل نذكر منهم الفيلسوف "هرقليدس" (حوالي 544 ق م-480 ق م) فيلسوف التغيير والانقسام، والفيلسوف "بارميندس" (أواخر ق 6 ق م-منتصف ق 5 ق م) القائل بثبات العالم وتماسكه ووحدته، ليأتي بعده تلميذه ألا وهو "زينون الإيلي" (حوالي 495 ق م-430 ق م) الذي يعرف بأنه مكتشف البرهان بالخلف وأب الجدل وهذا من أجل الدفاع عن حجج أستاذه "بارميندس"، برّد حجج العدو من خلال البرهان بالخلف إلى مستحيلات أو متناقضات⁽⁶⁾. والحجج التي قدمها عددها أربع ويمكن تصنيفها إلى مجموعتين⁽⁷⁾: المجموعة الأولى تتمثل في القسمة الثنائية وحجة أخيل، والمجموعة الثانية تشمل حجة السهم وحجة الملعب، وفي المجموعة الأولى قام زينون بتفنيد الافتراض القائل بإمكانية الانقسام اللامتناهي للزمان والمكان*:

1- الحجة الأولى: القسمة الثنائية (Dichotomie)

ونصها "لا حركة لأنه ينبغي على المتحرك أن يبلغ نصف الطريق قبل أن يصل إلى آخره"⁽⁸⁾، وبعبارة أخرى أي حركة مهما كنا نفترض وقوعها فإنها تفرض وقوعها من قبل حركة أخرى هي نصفها، وهي بدورها تفرض وجودها من حركة ثالثة هي ربعها، وهكذا إلى ما نهاية⁽⁹⁾.

فإذا أراد شخص مثلاً "س" أن ينطلق من "أ" إلى "ب" فيجب أن يصل إلى "ج" الذي هو منتصف [ا ب]، ثم يصل إلى "د" الذي هو منتصف [ا ج] ثم يصل إلى "هـ" التي هي منتصف [ا د] وهكذا دواليك، ولهذا فهذه الحجة تفترض إمكانية التقسيم اللانهائي للمكان (الشكل 1).

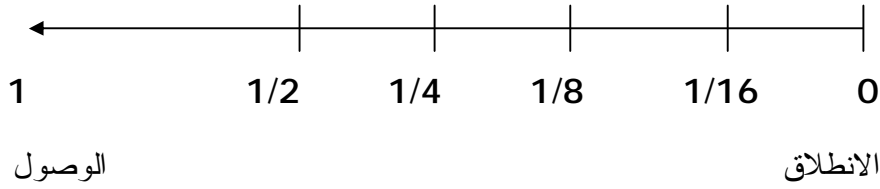
(6) Jacqueline Guichard : *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques*. Ellipses, Paris, 2000, p 34 .

(7) Georges Noel : *le mouvement et les arguments de Zénon D'élee*, revue de métaphysique et de morale, société française de philosophie, 1893, Année 1, p107.

* تطرقت فقط إلى المجموعة الأولى لأنها تفي بالغرض المقصود.

(8) أميرة حلمي مطر: الفلسفة اليونانية تاريخها ومشكلها دار المعارف، مصر، 1988، ص 294.

(9) Georges Noel : *Op.cit*, p108.



الشكل 1: التقسيم اللانهائي للمكان

وهو ما نعبر عنه عددياً بـ: $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ أو $1/2 + (1/2)^2 + (1/2)^3 + \dots$ ⁽¹⁰⁾ والحاصل هو 1 أي متناهي. ومما سبق فإن انقسام الزمن والطول (أي المسافة) هو لامتناهي عند زينون، وما ينتج عن هذا اللاتناهي هو استحالة الحركة لأنها لا تبدأ أصلاً. وعليه فإن الحجة المذكورة أعلاه، أساسها افتراض أن القضية صحيحة - أي أن اللامتناهي موجود ولا يمكن بلوغه في زمن متناهي - فيثبت في النهاية أنها خاطئة وما دامت كذلك فالقضية النقيض صحيحة. ومن ثم إثبات صحة حكم أستاذه برمنيدس أن الكائن الوجودي غير قابل للانقسام وأنه لا وجود للحركة.

2- الحجة الثانية: حجة أخيل والسلفاة:

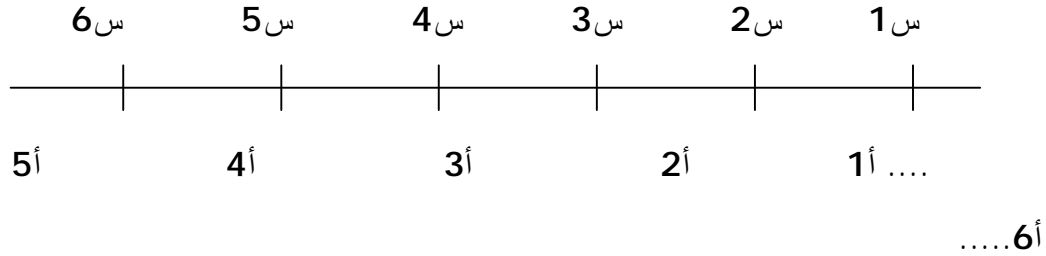
تصور زينون سباقاً بين أخيل أسرع رجال اليونان وبين السلفاة أبطأ الحيوانات، ونص الحجة: "الأبطأ لن يلحقه الأسرع أبداً، لأن المطاردي يجب أولاً أن يبلغ النقطة التي منها رحل الهارب، وبذلك يبقى الأبطأ بالضرورة متقدماً"⁽¹¹⁾. هذه الحجة مفادها أنه إذا سبقت السلفاة بعض الشيء العداء أخيل، فإنه لن يستطيع أبداً أن يلحق بها، لأنه كلما قطع المسافة التي قطعها السلفاة تكون الثانية قد سبقته من جديد، وهنا يضطر إلى قطع المسافة التي قطعها وهكذا إلى ما لا نهاية حيث لا يمكن لأخيل أن يتجاوز السلفاة⁽¹²⁾.

⁽¹⁰⁾ Jacqueline Guichard : Op.cit, p 35.

⁽¹¹⁾ برتراند راسل: أصول الرياضيات، ترجمة محمد مرسي أحمد وفؤاد الأهواني، ج3، دار المعارف بمصر، ط2 (د.ت)، ص 205.

⁽¹²⁾ نجيب بلدي: دروس في تاريخ الفلسفة. دار بوبقال للنشر المغرب، ط1، 1987، ص 59.

فالمتحرك مهما كانت سرعته لن يستطيع أن يقطع المجال مهما كان صغيرا وهذا يعني استحالة بلوغ الحد وهذا يعني أيضا أن السرعة ثابتة، ومن ثم لن يصل أخيل ولا السلحفاة إلى نقطة النهاية، حيث (س) رمز الأبطأ في السباق و(أ) رمز الأسرع(الشكل2).



الشكل2: التقسيم اللانهائي للمسافة

إن مفارقات زينون أشارت صراحة إلى فكرة اللامتناهي، وطرحت إشكالية مدى صحة وصدق النتائج المحصل عليها عن طريق المناهج التي كان يستخدمها اليونان. هل المستمر قابل للانقسام إلى ما لا نهاية؟ هل اللامتناهي مقبول في الرياضيات؟ ما أهميته؟ إن الإجابة على هذه التساؤلات كانت محورا لفلسفات عدة إلى غاية القرن 19م.

ب - اللامتناهي الأرسطي:

في كتابه حول الفيزياء لاحظ "أرسطو" (Aristote 384 ق م - 322 ق م) أن "دراسة اللامتناهي يحتوي على إحراج، لأنه سواء أقررنا أنه موجود أو لا، فإن النتيجة المستحيلات المتعددة"⁽¹³⁾ وحسب ما هو واضح في قول أرسطو، فإنه لا يمكن الحديث عن اللامتناهي، وإذا تحدثنا عنه بأي طريقة سيوجد؟ ما صورته؟ هل هو موجود في ذاته أم هو مجرد عرض لموجود آخر؟ هل هو واحد أم متعدد؟ إنها تساؤلات طرحها أرسطو والكثيرون الذين بحثوا من أجل معرفة حقيقة اللامتناهي هذا إن وجد. فحسب أرسطو يجب تحديد المقصود من اللامتناهي أو الصور التي تحده، فهو من ناحية يشير إلى كل ملا يمكن إحصاؤه لأنه بطبيعته مستحيل، ومن جهة أخرى هو كل ما كان مساره دون حد"⁽¹⁴⁾.

فإذا كان اللامتناهي هو بمنأى عن المحسوس، عن الأشياء الحسية، ومن ثم ليس بعرض، فهو موجود في ذاته وهذا مستحيل، لأنه إذا لم يكن مقدارا أو كثرة وموجود في ذاته فهذا

⁽¹³⁾ Aristote: Physique, traduction de A Stevens, J. Vrin, 1999, p 136.

⁽¹⁴⁾ Ibid, p137.

يعني أنه غير قابل للانقسام، فلو كان قابلا للانقسام لكان كثرة أو مقدارا أي هو قابل للقياس، ولهذا ما دام غير قابل للانقسام فهو غير لامتناهي، أما إذا اعتبرنا "اللامتناهي مجرد عرض فلا يمكن إذن أن يكون عنصرا من الموجودات كلامتاه، وكيف يمكن له أن يكون شيئا إذا كان العدد والمقدار ليسا كذلك... وهذا يعني انه اقل من العدد ومن المقدار"⁽¹⁵⁾، ولهذا فأرسطو يقر انه إما إن يكون اللامتناهي قابل للانقسام، وإذا كان كذلك فانه سينقسم إلى عدد من اللامتناهيات، ولكن هذا غير ممكن إذ لا يمكن ان يكون كل واحد على حدا لا متناهي، إضافة إلى ما سبق، العقل والمنطق ينفيان وجود اللامتناهي، "فإذا كان الجسم يعرف على أنه ما هو محدود بمساحة فحينها لن تكون هناك أجسام لامتناهية، لا معقولة وغير محسوسة"⁽¹⁶⁾، وهذا يعني أن الجسم لا يمكن أن يكون بأي حال من الأحوال لامتناهيا ولهذا فان أرسطو مقتنع أنه لا يمكن الحديث أبدا عن اللامتناهي، فهو غير موجود، فيقول: "إنه واضح أن اللامتناهي لا يمكن أن يوجد، لا كموجود بالفعل (*Acte*) ولا كمبدأ (*Principe*)"⁽¹⁷⁾.

إلا أن أرسطو بعد أن قدم أدلة على استحالة وجود اللامتناهي، استدرك وأكد انه لا يمكن القول بلاوجوده: " لكن إذا كان اللامتناهي غير موجود مطلقا، هذا أيضا يعني المستحيلات المتعددة "⁽¹⁸⁾. ولهذا بعد التحليل توصل إلى النتائج التالية:

- أن اللامتناهي كفعل لا يوجد وأنه يوجد فقط بالقوة (*Infini en puissance*)، اللامتناهي بهذا المعنى له وجود عند الرياضيين الذين يستعملونه⁽¹⁹⁾. فالمقدار ليس لامتناهيا بالفعل ولكنه بالقوة هو كذلك و ينتج عن القسمة، كما تحدث عن اللامتناهي الناتج عن الجمع كما هو في العدد.

- يرى أرسطو أنه إذا افترضنا وجود اللامتناهي، فإن الجزء منه سيكون لامتناهيا. إلا أنه في الرياضيات يمكن أن نأخذ جزءا من مجموعة لا متناهية ويكون متناهيا:

مجموعة لامتناهية الأعداد الطبيعية N حيث $N = \{0.1.2.3.4....\}$

⁽¹⁵⁾ *Ibid*,p137.

⁽¹⁶⁾ *Ibid*,p139.

⁽¹⁷⁾ *Ibid*, p137.

⁽¹⁸⁾ *Ibid*, p142.

⁽¹⁹⁾ *Françoise Monnoyeur :Infini des mathématiciens, infini des Philosophes (ouvrage collectif), E Belin, 1999, p 11.*

مجموعة الأعداد الزوجية P حيث $P = \{0.2.4.6.8...\}$

نلاحظ أن $N \cap P = \emptyset$ (محتواة في N) فإذا قلنا أن P لا متناهية مثلها مثل N فهذه مفارقة لأن:
 P هي أقل مرتين من N . وهي المفارقة التي طرحت في القرن 19. وإذا قبلنا بوجود عدد لامتناهي، فبعض الإجراءات لن تكون لها معنى: فمثلا $a+b > b$ أو $a+b > a$ ، لكن إذا كانت " a " عددا لامتناهيا فإن: $a+b = \infty + b = \infty$. وبتطبيق القواعد العادية للجمع، فإن هذا الإجراء هو متناقض، لأنه عند جمع عددين يجب أن يكون الحاصل أكبر من كليهما. بينما اللامتناهي يمتص كل عدد آخر، وهذا يعني أنه من المستحيل أن يكون اللامتناهي عددا إذن ما يكون؟ ما خصائصه؟

لقد اقترح أرسطو أن ننظر إلى اللامتناهي على أنه نفي للمتناهي وهذا وفقا لاشتقاقه، فكلمة *infini* هي *in + fini* (في اللغة اليونانية *a-Peiron* حيث $a=in$) و (*fini=Peiron*) ويعني به " ما ليس له حدود، غير تام، هو يشير إلى ما هو ما وراء الموجود ومستحيل تعريفه أو تحديده أو عدده⁽²⁰⁾. وهو ضد المتناهي (*fini*) وهذا من خلال قوله: " إنه من الواضح أن اللامتناهي هو فقدان أو حرمان"⁽²¹⁾.

وفضلا عما سبق فإن أرسطو كان واعيا بأهمية اللامتناهي في الرياضيات " إن نظريتي لا تقلل من قيمة وأهمية الرياضيين بحذف اللامتناهي، لأن الرياضيين ليسوا بحاجة إلى اللامتناهي ولا يستخدمونه، فهم بحاجة فقط إلى مقادير كبيرة أو لنقل كبرى يختارونها كيفما شاءوا وحسب تزايدها الذي لا يمكن تجاوزها"⁽²²⁾.

فعبارة أرسطو الأخيرة "اللامتناهي حسب تزايدها لا يمكن اجتيازها" لدليل واضح على أن أرسطو يدرك بالفعل أن اللامتناهي موجود حتى وإن كنا لا نستطيع بلوغه، وأما قوله: أن الرياضي لا يحتاج للامتناهي، فهذا يعني أن أرسطو يفرق بين اللامتناهي الممكن (*Potentiel*) واللامتناهي الفعلي (*Actuel*).

فأما الأول هو متناهي متغير، عبارة عن مقدار يمكن أن يتزايد إلى ما بعد الحد ورمزه إذا كان: $\exists x \forall x \exists y, x < y$. أما اللامتناهي الفعلي فهو الموجب الذي

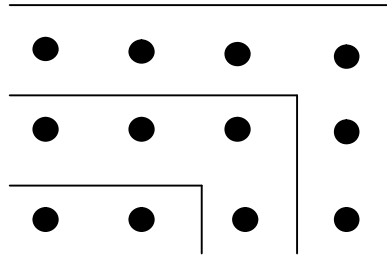
(20) Jacqueline Guichard : Op.cit, p 10

(21) Aristote :Op.cit, p 207.

(22) Ibid, p138.

يوجد في ذاته، وهو كل تام مرادف للامتتاهي التام (*Total*)، ويرى أرسطو أن هذا النوع يجب تجنبه.

فهو إذن رفض الوجود الواقعي الفعلي للامتتاهي، رفض اللامتتاهي كجسم، وأكد على اللامتتاهي الممكن الذي يرتبط بالعدد في الفكر الرياضي، بالكم، فالمقدار يمكن أن يكون أكبر، أو قد يكون أقل ولهذا فالامتتاهي لا يكون مغلقا وتاما، فمجاله مفتوح. وبهذا الموقف، فإن أرسطو قد عارض الفيثاغوريين وأفلاطون، فالفيثاغوريون جعلوا اللامتتاهي موجودا في الأشياء الحسية على أساس أن العدد هو الشيء، وهو أيضا كل ما وراء هذا العالم، وقد جعلوا من اللامتتاهي العدد الزوجي لان الفردي رمز المحدود والمغلق⁽²³⁾، وقد مثلوا الأعداد الزوجية (اللامحدود) في الشكل التالي⁽²⁴⁾:



الشكل 3: الأعداد المستطيلة (*nombres oblongs*)

بينما أفلاطون يرى أنه لا يوجد أي جسم يتصف بالماورائية، و لا توجد افكار تتصف بهذه الخاصية، وأن اللامتتاهي يوجد في الأشياء المحسوسة ذاتها، وقد عوض اللامتتاهي الفيثاغوري بالامتتاهيين: الكبير والصغير، وهو بهذا فتح مجالا لما هو غير قابل للقياس⁽²⁵⁾. إن أرسطو قد نظر إلى اللامتتاهي من زاوية مختلفة عن سابقه، وقد أثر بموقفه في الكثير من الرياضيين الذين تقبلوا فكرة اللامتتاهي الممكن في الرياضيات مثل "كرونيكِر" (*Kronecker 1823-1891*)، "بوا نكري" (*Poincaré 1854-1912*)، "بروور" (*Brouwer 1881-1966*).

⁽²³⁾ *Ibid*, p134.

⁽²⁴⁾ *Jean-Luc Pérellié : la découverte des incommensurables et le vertige de l'infini, conférence 16 mai 2001, Grenoble, p12.*

⁽²⁵⁾ *Ibid*, p 13.

ج - اللامتناهي الإقليدي :

يعتبر "إقليدس" (360 ق م - 295 ق م) أول مؤسس لبدهنة الهندسة (أكسمة*)
(*la première axiomatisation de la géométrie*) فقد وضع مجموعة من المفاهيم
البديهيات، التعريفات، المصادرات وانطلاقاً من هذه المبادئ برهن على قضية هندسية⁽²⁶⁾،
لكن ما علاقة هندسة إقليدس باللامتناهي؟ لنأخذ واحداً من التعريفات استعمله إقليدس وليكن
التوازي: مستقيمان متوازيان في مستوى واحد هما بلا حدود من جهة، ومن جهة ثانية لا
يتقاطعان من الجهتين، وقد استخدم إقليدس مصطلح "*Indéfini*" ولم يستخدم مصطلح "*infini*"⁽²⁷⁾ وذلك لأنه رأى أن القول باللامتناهي يؤدي إلى التناقض ولهذا تجنبه.

وبالإضافة إلى ما سبق فقد كان هناك خلط بين اللامتناهي وبين اللامحدود، بين
المتناهي والمحدود (*indéfini- infini*) و (*fini- défini*)، فاللامتناهي مرتبط بالمجهول،
بما هو غير معلوم، بينما المتناهي هو معلوم ومحدد وتام، إلا أن إقليدس قد بالغ في تعريف
المتناهي لأن هناك كثير من المواضيع المتناهية لكن غير محددة بشكل تام ودقيق، بينما قد
يوجد اللامتناهي لكنه محدد، فمثلاً حبات الرمل لكوبنا هي غير محددة بالرغم أنها متناهية،
بينما مجموعة الأعداد الطبيعية هي لا متناهية ولكنها محدودة، والطفل قد يتوصل إليها
ببساطة وهذا ما أكده جون بياجى⁽²⁸⁾. وإذا كنا قد أشرنا إلى حبات الرمال وعدّها، نشير إلى
"أرخميدس" (*Archimède 287 ق م - 212 ق م*) الذي أثبت أن كمية ذرات الرمال
على الأرض لا تتفد، وأن مقدارها كبير يقدر بالترتيب 10^{63} ، وهذا ما يثبت ضمناً أن
اللامتناهي الفعلي موجود لكن لا يستخدمه في براهينه، وقد قال عنه "لوبسغ" (*Lebesgue*
1875 - 1941) مازحاً: "إن أرخميدس لم يخطئ عندما خص وقته وجهده لعد حبات
الرمال المنتشرة على كل الأرض فكما لاحظ توجد تشكيلات لامتناهية"⁽²⁹⁾. أما إذا تطرقنا

*ترجم محمد عابد الجابري كلمة *axiomatisation* بالأكسمة على أساس أن ترجمة كلمة *axiome* إلى
أكسيوم. انظر: مدخل إلى فلسفة العلوم، العقلانية لمعاصرة وتطور الفكر العلمي، مركز دراسات الوحدة
العربية بيروت، 2002، ط 5 .

⁽²⁶⁾ Robert Blanché : *L'axiomatique*, Puf, Paris, 1999, p12.

⁽²⁷⁾ Euclide : *les éléments*, tr Bernard Vitrac , Puf, Paris, p 166

⁽²⁸⁾ J Piaget : *Introduction à l'épistémologie génétique tome: la pensée mathématique*, Puf, Paris, 1950 , pages 86-92.

⁽²⁹⁾ Hourya Sinaceur : *La Pensée mathématique de l'infini*. 2 fevrier 2004.
http://lyc-henri4.scola.ac-Paris.fr/assos/Philo/19_infini.htm

إلى التعريف التالي: "المقدار هو جزء من مقدار، الأصغر من الأكبر، عندما يكون هو (المقدار) الأكبر"⁽³⁰⁾ هذا التعريف قائم على مفهوم الجزء من مقدار، فهو يستعمل مفهوم المقدار دون تعريفه ودون تعريف القياس، وكما نلاحظ أن استخدام مفهومي الأصغر والأكبر كان بصورة غير محددة وغير دقيقة، و هذا ما يثبت أن إقليدس توصل إلى مفهوم اللامتناهي، لكن لم يستطع

التصريح به. و في إطار الحديث عن اللامتناهي، تجدر الإشارة إلى بديهية من بديهيات إقليدس "الكل أكبر من الجزء"⁽³¹⁾ ففي مجال المتناهي هذه البديهية هي صادقة حتما، بينما في مجال اللامتناهي تطرح إشكالية وهي التي طرحت في بداية القرن العشرين، فإذا عدنا إلى المثال

$$P = \{0.2.4.6.8..\} \quad N = \{0.1.2.3.4...\} \quad \text{السابق:}$$

هنا N و P متناهيان، وهذا يعني أن الكل ليس أكبر من الجزء، أي أن N ليست أكبر من P و منه وجود تنافر بين اللامتناهي وبديهية إقليدس، ووجود هذا التنافر لم يكن دافعا قويا للبحث عن مفهوم اللامتناهي في هذه الفترة الزمنية، ولكن لاحقا لعب دورا مهما في تأسيس اللامتناهي.

ولهذا من خلال زينون الإيلي، أرسطو، إقليدس، نلاحظ عدم قبول فكرة اللامتناهي عند الأول وإن كان ضمنا أقر بوجوده، فأدلته وضعها لتفنيد اللامتناهي لكن يمكن أن تستغل لإثباته، بينما عند أرسطو وإقليدس فهناك قبول مبدئي ناجم عن الضرورة، وقد أقر كلاهما بوجود لامتناهي بالقوة وهو اللامتناهي الرياضي بينما اللامتناهي الفعلي هو ميتافيزيقي. وعليه لا نلمس وجود تخوف يوناني من اللامتناهي أو ما يعبر عنه الخوف من اللامتناهي: "إن الخوف من اللامتناهي عند اليونانيين القدامى يظهر في الكلمة ذاتها التي تعبر عنه - لا نهاية- (*apeiron*) التي لها معنى تحقيري (*péjoratif*)"⁽³²⁾ وهو الخوف الذي شكل عائقا أمام اكتشاف اللامتناهي الفعلي في وقت مبكر كما يقول كانتور.

ثانيا- اللامتناهي في العصور الوسطى:

أ- اللامتناهي عند الفلاسفة المسلمين:

⁽³⁰⁾ Jacqueline Guichard : Op.cit, p 5.

⁽³¹⁾ Euclide: Op.cit, p 178.

⁽³²⁾ Jacqueline Guichard :Op.cit,p11.

اطلع الرياضيون العرب على التراث اليوناني وقاموا بترجمته، فوجد الكندي، النايزري، ثابت بن قرة، ابن سينا وآخرون درسوا المفاهيم الرياضية واهتموا باللامتناهي، فبعضهم رأى أنه لا يمكن أن يكون موضوعا ولا مفهوما ولا قياسا، ولكن مع هذا تقبلوه ليس في ذاته لكن في مقابل المتناهي، وهو ما أكده من قبل الفيلسوف اليوناني "أبرقلس" (485 – 410 Proclus)، والبعض الآخر أكد وجوده كما هو الشأن عند ثابت بن قرة (901-862) الذي ارتبط اسمه بالترجمات الأولى لمؤلفات إقليدس إلى العربية، كما ترجم كذلك مؤلف "المقدمة الحسابية" للفيلسوف "نيكوماك من جراسا" * (Nicomaque de Gerase حوالي 150) وكذا كتاب "ارخميدس" بعنوان: "الكرة والأسطوانة"⁽³³⁾.

ثابت بن قرة أشار إلى مختلف الترتيبات الخاصة باللامتناهي، وأكد على مساواة مجموعتين لا متناهيتين⁽³⁴⁾ كإجابة على سؤال: هل اللامتناهي يكون أكبر من اللامتناهي؟ فإذا كانت لدينا N و P حيث:

$$N = \{0.1.2.3.4...\} \quad P = \{0.2.4.6.8..\}$$

فهناك مساواة بينهما على أساس أنه توجد الأعداد الفردية بقدر ما توجد الأعداد الزوجية، أي أن كل منهما هي نصف الكل الذي يمثل الأعداد، فهذا الكل إذن هو ضعف كل منهما وجمع الأعداد الزوجية والفردية يساوي الكل، ومن ثم فلا يوجد جزء آخر خارجهما وهذا ما جعلهما متساويتان.

وقد اعتبر هذه النتيجة واضحة بذاتها لا تحتاج إلي برهان من خلال التقابل العكسي بين عناصر المجموعتين. كما يؤكد ثابت بن قرة "أن اللامتناهي قد يكون ثلث اللامتناهي أو الربع أو الخمس أو أي جزء من العدد الذي هو لامتناهي، فالأعداد التي لها ثلث (أي مضاعفات 3) هي لامتناهية وهي بالنسبة للكل الثلث، والأعداد التي لها الربع (مضاعفات 4) هي ربع العدد في كليته والأعداد التي لها الخمس (مضاعفات 5) هي خمس"⁽³⁵⁾.

* جيراسا منطقة في دولة الأردن ويجب التفرقة بينه وبين والد أرسطو Nicomaque de Stagire حوالي

القرن 4 ق م : *Mathématiciens de l'Antiquité*

http://PagesPerso-orange.fr/jean_Paul.davalan/hist/index.html

⁽³³⁾ Tony Levy : *Figures de l'infini*. Editions du seuil , Paris, 1987, p 101.

⁽³⁴⁾ Hourya Sinaceur: *La Pensée mathématique de l'infini*. 2 fevrier2004.

http://lyc-henri4.scola.ac-Paris.fr/assos/Philo/19_infini.htm

⁽³⁵⁾ Tony Levy: *Op.cit*, p 103.

إن ثابت بن قرة أول من صرح بالحقيقة الحسابية للامتتاهي، والتي تم التأكيد عليها بعد ألف سنة مع ديدكند وكانتور، فقد أقر بوجود عدد لامتناهي وبإمكانية المقارنة بين اللامتناهيات ($P=N$)، بل وقد أشار إلى تساوي المجموعات اللامتناهية من خلال التقابل بين عناصر كل منهما ومن ثم إلى تساوي المجموعات المتناهية من خلال عدد عناصر كل منهما.

ب - اللامتناهي في الفلسفة المسيحية:

سننتظر إلى الفيلسوف منصور بن سيرجون (*Jean Damascène 675-750*)

الذي استخدم مصطلح اللامتناهي ذو الخصائص التالية⁽³⁶⁾:

- اللامتناهي هو كل ما يتجاوز تزايد كل قياس وكل عدد.
- اللامتناهي قد يكون نسبيا، أي قد يكون محددًا بالمقارنة مع كمية أكثر صغرًا، فمثلاً مليون من سنابل القمح هي كمية لامتناهية بالنسبة لسنبل واحد.
- عندما يتم الحديث عن "رحمة الله الكبيرة" أو عن السر الأكبر في الخلق فإن استخدام الحدين "كبير" و"أكبر" تفهم بمعنى اللامتناهي. فرحمة الله لامتناهية لأنها تتجاوز في الكبر كل رحمة إنسانية وكذا خلق الله للوجود هو سر لامتناهي، لأنه يتجاوز كل ظاهرة لم يستطع الإنسان فهمها وتفسيرها.

ولهذا بن سيرجون نظر إلى اللامتناهي نظرة ميتافيزيقية، إذ أن صفات الله تثبت أنه لامتناهي في القدرة والعظمة وهذه الصورة المثبتة للامتناهي، أما الصورة المنفية فتتمثل في نفي وجود حدود، وجود نهاية ومنه فإن اللامتناهي هنا هو ذو صبغة منفية أو سالبة فهو لامتناهي سالب في مقابل اللامتناهي الموجب.

وبناء على ما سبق، إن اللامتناهي في الفلسفة الإسلامية من خلال ثابت بن قرة والذي قد كان موقفه متقاربا من موقف الكندي وابن سينا هو ذو طابع رياضي، بينما في الفلسفة المسيحية فهو ذا طابع لاهوتي لأنه إذا ما تتبعنا فلسفة القديس أغسطين أو دنس سكوت أو القديس توما الأكويني فقد ربطوا هم أيضا اللامتناهي بالإله وبأدلة وجوده.

ثالثا - اللامتناهي في العصر الحديث:

⁽³⁶⁾ Ibid, p 130.

أ - الأعداد اللامتناهية عند غاليلي:

في مؤلفه " خطابات (حوارات) تخص علمان جديان "1638، صرح غاليلي (1564 - 1642): "أعتقد أن الصفات كـ "أكبر" و"أصغر" أو "يساوي" لا تتلاءم مع المقادير اللامتناهية، والتي من المستحيل القول أن الواحدة هي أكبر، أو أقل أو يساوي للأخرى"⁽³⁷⁾.

وللبرهنة على موقفه عرض لنا التقابل بين الأعداد ومربعاتها:

الأعداد الطبيعية	1	2	3	4	5	6	7	8	...
مربع الأعداد	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	...
النتيجة	2^1	4	9	16	25	36	49	64	...

الشكل 4: جدول التقابل بين الأعداد ومربعاتها

ماذا نلاحظ على الجدول؟

1- في السطرين الأول والثالث نلاحظ وجود أعداد مربعة (السطر 3) أقل من الأعداد الطبيعية (السطر 1) ففي النتيجة لا توجد فيه 2،3،5،6،7،8... وهذا يعني أن هذا السطر هو محتوى في السطر الأول (سطر الأعداد الطبيعية).

يقول غاليلي: "وكننتيجة، إذا قلت أن الأعداد في جملتها أو كليتها تحتوي على الأعداد المربعة وغير المربعة، هي أكثر عدد من الأعداد المربعة فقط، ألا نعتبر هذه القضية صحيحة، بلى"⁽³⁸⁾، وهنا نلاحظ أن غاليلي استخدم وطبق بديهية إقليدس "الكل أكبر من الجزء" والتي بدت له واضحة، لهذا لم يوضحها أكثر.

2 - لو لاحظنا السطر الأول والثاني من الجدول، فهما يبينان أن الأعداد الطبيعية والأعداد المربعة لهما نفس العدد: "إذا ما تساءلت الآن كم عدد الأعداد المربعة يمكن الإجابة، توجد بقدر الجذور المقابلة لها فكل مربع له جذره وكل جذر له مربع، والمربع ليس له أكثر من جذر والجذر ليس له أكثر من مربع"⁽³⁹⁾.

⁽³⁷⁾ Galilée : Discours concernant deux sciences nouvelles, traduction Maurice Clavelin, Puf, Paris, 1995, p 78.

⁽³⁸⁾ Ibid, p78.

⁽³⁹⁾ Ibid, p78.

وبتعبير رياضي حديث إن العلاقة بينهما تقابل واحد بواحد (*relation biunivoque*) وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الطبيعية مقدارها نفس مقدار الأعداد المربعة، وهي نتيجة تبدو غير معقولة وتتعارض مع الملاحظة الأولى.

ففي الملاحظة الأولى، المعيار كان "الاحتواء" والنتيجة هي أن الأعداد الطبيعية أكبر من المربعة، أما في الملاحظة الثانية المعيار كان "التقابل" والنتيجة أن الأعداد الطبيعية مقدارها نفس مقدار الأعداد المربعة. ولهذا فإن الحل الوحيد لهذا التناقض هو أن مجموعة الأعداد هي لا متناهية وأن عدد مربع الأعداد هو لا متناهي، وعدد جذورها لا متناهي، وأن مجموع الأعداد المربعة ليس أقل من مجموع الأعداد الطبيعية ولا أكبر منها وأن الثابت: $=$ ، " $>$ "، " $<$ " لا معنى لها في الكميات اللامتناهية، لكن لها معنى في الكميات المتناهية فقط⁽⁴⁰⁾، فحسب غاليلي يوجد عدد لا متناهي لا يقبل المقارنة ولا يمكن التعبير عنه حسابيا.

ب - اللامتناهي الميتافيزيقي عند ديكارت:

لقد استخدم ديكارت (*Descartes 1596-1650*) مصطلح اللامتناهي للدلالة على الإله الخالق دلالة ميتافيزيقية، أما المعنى الفيزيقي فالامتناهي هو ما ليس له نهاية، وعبر عنه أيضا بمصطلح اللامحدود، ويؤكد على أنه لا يستخدم اللامتناهي كسلب للمتناهي، وذلك لأنه "يوجد في الجوهر اللامتناهي من الحقيقة أكثر مما يوجد في الجوهر المتناهي، وفكرة اللامتناهي سابقة عن فكرة المتناهي"⁽⁴¹⁾.

كذلك نجده يقول: "إذا رجعت إلى نفسي فأول ما يتبدى لي هو نقصي. لأنني أعرف أنني أشك، والشك نقص، إذا هو قصور عن بلوغ الحق وما كنت لأعرف أنني كائن ناقص متناه لو لم تكن لدى فكرة الكائن الكامل أو اللامتناهي"⁽⁴²⁾. وهذا تأكيد على اللامتناهي اسبق من اللامتناهي. إذن ديكارت يؤكد على وجود اللامتناهي الميتافيزيقي والطبيعي كما أنه خالف السابقون عليه الذين أثبتوا وجود أن اللامتناهي هو نفي للمتناهي لكون أن الأول سابق في الوجود عن الثاني.

⁽⁴⁰⁾ *Ibid*, p 79.

⁽⁴¹⁾ عثمان أمين: ديكارت، المكتبة الأنجلومصرية، (دم)، ط6، 1976، ص 166.

⁽⁴²⁾ ديكارت: مقال في المنهج، ترجمة محمد الخضير، الهيئة المصرية العامة للكتاب، القاهرة، ط3،

ج - اللامتناهي الفلسفي والرياضي عند ليبنيز:

إن ما ميّز القرن 17 هو ظهور مفهوم جديد في الحساب وهو " الحساب اللامتناهي في الصغر " (*calcul infinitésimal*) الذي اكتشفه ليبنيز (1646-1716) بالتعاون مع نيوتن (زينون الإيلي أشار إلى هذا المفهوم ضمناً من خلال حججه). ومن خلال التسمية، فإن هذا الحساب الجديد يركز على المواضيع التي تتصف باللاتناهي، فليبنيز إذن يقر بوجود اللامتناهي وهو نوعان:

1 - اللامتناهي بالمفهوم الأنطولوجي:

هو مرتبط بالإله وصفاته، ولانهاية الإله مرتبطة بكماله وهذا ما أثبتته ديكارت. الإله هو الكائن الكامل الذي لا حدود له من ثم لا نهاية له، إنه "الموجود اللامتناهي وليس يوجد فيه ولا خارجاً عنه ما يحدّ من ماهيته: أما فيه فصفت لا متناهية... وأما خارجاً عنه فلا يوجد شيء مكافئ له. وفكرة الله لا تتضمن تناقضاً".⁽⁴³⁾ ولهذا فاللامتناهي هو لامتناهي فعلي (*actuel*) لأنه يتجلى في عالم الظواهر الطبيعية لا في العدد أو العقل الإنساني، هذا العالم الذي هو عدد لا متناهي من المونادات كل منها يختلف عن الآخر، ولما كان لا يبدّ من وجود سبب كاف لكل ما هو كائن على نحو ما هو كائن لا على نحو آخر، فإن الله هو سبب كاف لها، وإذا كان كذلك فإن خيريته وقوته اللامتناهيتان تقتضيان أن يكون العالم محتوياً على عدد أكبر من الكائنات المتنوعة كيفاً، والمتوافقة مع بعضها، المترابطة فيما بينها⁽⁴⁴⁾. فكل جزء من العالم يحتوي على عدد لامتناهي من الكائنات المتنوعة والمنسجمة، وهي المونادات التي تؤلف متسلسلة (*série*) لا متناهية شبيهة بمتسلسلة عددية والتي فيها كل عدد يختلف عن الآخر، فمادام لا وجود لعددتين متطابقتين فلا وجود لمونادتين متطابقتين⁽⁴⁵⁾. ويرى ليبنيز أن العقل الإنساني بالرغم من أنه متناهي إلا أنه يمكنه أن يدرك اللامتناهي (الإله) من خلال معرفة خصائصه والتي تختلف عن فهمه⁽⁴⁶⁾.

⁽⁴³⁾ يوسف كرم: تاريخ الفلسفة الحديثة، دار المعارف، القاهرة، (دت)، ط5، ص137.

⁽⁴⁴⁾ نفس المرجع، ص 131.

⁽⁴⁵⁾ L. Brunschvicg : *les étapes de la philosophie mathématique*, A. Blanchard, 1993, p 223.

⁽⁴⁶⁾ Erman Bomstein : *Leibniz et Pascal: l'infini comme Principe de reforme ,mémoire de maîtrise*, 2001-2002, p 127.

وأثناء بحثه في اللامتناهي، اكتشف ليبنز المفكر جيوردانو برونو (*Giordano Bruno*) 1548-1600) الذي برهن فلسفياً على وجود اللامتناهي "فعالنا الذي يبدو كبيراً، لا هو جزء ولا هو كلّ بالنسبة للامتناهي" (47)، فالكل لا يعني لامتناهي، ومنه هذا الأخير هو أكبر من الكل. والامتناهي عند برونو نوعان: لامتناهي خاص بالإله ولا متناهي خاص بالكون (48). فالامتناهي الخاص بالإله هو لامتناهي معقد كامل وتام، لأنه بذاته يقصي كل حدّ، وأن كلّ من صفاته هي وحدة تامة لا متناهية، إن الإله هو كل لامتناهي، لأن كل ما فيه كامل، وكل من أجزائه لامتناهي كامل، انه "الامتناهي في اللامتناهي" (49).

بينما اللامتناهي الخاص بالكون فهو لامتناهي واضح، وذلك لان لا حدّ له، ولا نهاية ولا مساحة، وهو لامتناهي غير تام لان كل من أجزائه هو متناهي. ونستنتج من خلال نظرة برونو، والذي بدوره قد انطلق من أعمال نيكولا كوبرنيك (*Nicolas Copernic* 1473-1543) (50) ان البحث في اللامتناهي استقطب اهتمام الكثير من الفلاسفة الذين برهنوا على وجوده، وجعلوه مرتبطاً بالوجود الإلهي.

2- اللامتناهي الرياضي:

هو مرتبط بالحساب اللامتناهي في الصغر*، وقد تمّ اكتشافه من طرف ليبنز ونيوتن، ومن خلال التسمية، فإن هذا الحساب يرتكز أساساً على المواضيع اللامتناهيّة ويتميز باستعمال المتاليات اللامتناهيّة فمثلاً:

$$0. \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{n}{n+1}$$

وإذا ما قمنا بحساب نهاية المتالية فإنها تساوي (ن) لما (ن) تنتهي نحو اللانهاية.

وبالإضافة إلى اللامتناهي في الصغر، فقد توصل ليبنز أيضاً إلى مفهوم النهاية ومفهوم الاشتقاق لدالة**، وهذه الاكتشافات سمحت "بحساب بالتقريب أكبر مما نريد":

(47) Christian Godin: *La totalité 3, la philosophie, Champ Vallon, 1998, p631.*

(48) *Ibid.*

(49) *Ibid, p632.*

(50) *Giordano Bruno*, <http://fr.wikipedia.org/wiki/GiordanoBruno>.

* اللامتناهي في الصغر هو عدد أو مقدار مع أنه ليس الصفر إلا أنه أصغر من أي عدد أو مقدار متناهي. (انظر: راسل مرجع سابق ص: 181).

** لفظ الدالة يعود إلى ليبنز وقد استخدمه كوصف للمنحنى الهندسي المعبر عن علاقات متصلة بين كميتين متغيرتين هما الإحداثيات، فالعلاقة التي تنشأ بين "حرارة الغاز" و"ضغطه" ترسم خطأ منحنياً هو "دالة"

المنحنيات، المساحات، المقادير... وإذا ما قلنا "أكبر مما نريد" فلسبب وهو أن الحساب لا

يستخدم رياضيا إلا اللامتاهي بالقوة الذي يمكن أن نعبر عنه: $\forall x \exists y, x < y$

فإذا كان (y, x) أعداد، هذا يعني أنه يمكن أن نجد لكل عدد عددا أكبر منه، فحساب اللامتاهي الصغر هو خصب، ويجب أن نؤكد أن اللامتاهي الذي استعمله ليبنز هو الممكن (*potentiel*)، وهو في هذه الحالة قد أكد بديهية "الجزء أقل من الكل" مستخدما المفهوم الكلاسيكي للتقابل عند غاليلي، فالاحتواء يعني دائما أن يكون الجزء أقل من الكل وهي قضية صادقة في اللامتاهي وكذلك في المتاهي⁽⁵¹⁾، وهذا إقرار واعتراف بصلاحية وصحة بديهية إقليدس، فليس فقط لا وجود لعدد لامتاهي بل إنه غير موجود أصلا لأن القضية الأصلية صادقة دوما ولذلك نقيضها سيكون كاذبا حتما.

لقد ميّز ليبنز بين اللامتاهي المكوّن من أجزاء، والذي ليس وحدة ولا كل ولا يدرك ككمية إلا بواسطة نشاط عقلي خالص، وبين اللامتاهي الذي لا يحتوي على أجزاء وهو واحد ولكنه أيضا ليس كلا إنه اللامتاهي المطلق، الثابت . ولهذا فإن اللامتاهيات في الكبر ليست كلا، واللامتاهيات في الصغر ليست مقاديرا، وعليه لا يمكن الحساب في اللامتاهي لأنه لم يتم تربيضه بعد⁽⁵²⁾.

وبناء على ما سبق فإن ليبنز ميّز بين اللامتاهي الميتافيزيقي واللامتاهي الرياضي، وأكد على وجود اللامتاهي بالقوة، ولهذا فابستيمولوجيا موقفه يماثل موقف أرسطو، بالإضافة إلى أنه وضع الأسس الأولى للحساب اللامتاهي.

د - اللامتاهي الفعلي عند بولزانو:

بالإضافة إلى ليبنز، وديكارت، نجد رياضيا وفيلسوبا حاول تخفيف الصعوبات الناجمة عن اللامتاهي، وأضاف عناصر جديدة إنه "برنارد بولزانو" (*Bernard*)

وهذه الدالة متصلة، اتصال الخط الهندسي (المنحني)، كما تم أيضا اكتشاف دوال منفصلة لا حصر لها، أنظر: محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1969.

⁽⁵¹⁾ Louis Couturat : *Opuscles et fragments inédits de Leibniz*, Alcan, Paris, 1903, p 612.

⁽⁵²⁾ Hourya Benis Sinaceur : *La Pensée mathématique de l'infini*, 2 février 2004.
<http://PhilosoPhie.scola.ac-Paris.fr/C603-04BenisSinaceur.htm>.

Bolzano (1781-1848) الذي عرض نظريته حول اللامتناهي في كتابه: "مفارقات

اللامتناهي *les paradoxes de l'infini*"⁽⁵³⁾.

"مع بولزانو يمكننا الحديث عن التاريخ الحديث للامتناهي"⁽⁵⁴⁾، فهو فيلسوف، منطقي، فيزيائي و لاهوتي، كان هدفه من الكتاب توضيح اللامتناهي الفعلي و الدفاع عنه من خلال إبراز أهم التناقضات الناتجة منذ زينون الايلي، ومن ثم التوصل إلى تأسيس اللامتناهي الفعلي في حقل الحساب والكم لا في العالم الميتافيزيقي⁽⁵⁵⁾.

بالنسبة لبولزانو "الإله ليس لامتناهيا إلا لأننا نتصوره حاملا لقدرات كل منها لها مقدار لامتناهي، وبالرغم أنه ليس الأول الذي أشار إلى وجود اللامتناهي الفعلي، وليس الأول الذي أدرك إمكانية وجود عدد من اللامتناهيات اللامتساوية، وليس الأول الذي قام بربط مساواة اللامتناهيين بإمكانية تأسيس رابطة التقابل واحد بواحد بين عناصر المجموعتين، لكنه الأول الذي حاول بناء تصور رياضي خالص وحساب نسقي للامتناهي الفعلي"⁽⁵⁶⁾، فبولزانو قد أكد الآراء السابقة عنه، فيما يخص وجود اللامتناهي الفعلي وأقر أيضا بوجود عدد من اللامتناهيات، وأنه لا يمكن أن نثبت وجود مجموعتين لامتناهيتين متساويتين إلا من خلال التقابل بين عناصرهما، ولكن توصل إلى الجديد المتمثل في حساب اللامتناهي ورأى أن بناء ذا التصور " يكون حسب التوازي الدقيق بين المتناهي واللامتناهي"⁽⁵⁷⁾:

- اللامتناهي الفعلي له نفس النظام المنطقي الخاص بالمتناهي، ففيه كذلك التصورات القريبة من العدد الطبيعي، والكسر الناطق، كما أن لهما أيضا نفس النظام الرياضي، وهذا يعني أنه توجد مجموعات لا متناهية بالفعل، ولا يوجد أي منطق يمنعنا من تصور مجموعات تامة فمثلا مجموعة الأعداد الطبيعية، المستقيم الممتد إلى ما لا نهاية، وكذلك القطعة من المستقيم وهذا ما سمح لبولزانو بالعودة إلى القياس اللامتناهي للقطعة [0.1] والمجموعة

⁽⁵³⁾ Hourya Sinaceur : *l'infini, la recherche*, N°268, volume25, septembre1994, p907.

⁽⁵⁴⁾ Bolzano : *les Paradoxes de l'infini*, trad H.Sinaceur le seuil, Paris, 1993.

⁽⁵⁵⁾ Hourya Sinaceur: *Infini mathématique, Dictionnaire de philosophie et d'Histoire des Sciences*, 1999.
http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/histoire/l'infini_en_math%C3%A9matiques.htm.

⁽⁵⁶⁾ Jan Sebestik: *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, J.Vrin, Paris, 1992, p482.

⁽⁵⁷⁾ Hourya Sinaceur : *L' Infini*, Op.cit, p907.

اللامتناهية للنقاط التي يحتويها، فليس من الضروري عد كل العناصر كي نصل إلى الكل، بل يكفي التطرق إلى بعض العناصر والقيام بعملية التعميم على الكل. وقد أخذ كمثال مجموعة سكان *Prague*: كل منهم يفهم كلمة مجموعة وماذا تعنيه، ولا أحد سيذهب إلى كل مواطن حتى يستطيع عددهم واحد واحد، هذه المجموعة منتهية، لكن بالنسبة لللامتناهي الكمي الرياضي ليس من الضروري أن نحصي كل عناصر المجموعة⁽⁵⁸⁾.

- اللامتناهي الفعلي موجود في كل مكان، وفي كل المخلوقات، وفي كل الأشياء الموجودة الحسية وغير الحسية (الزمان والمكان).

- فيما يخص الحساب، اعتمد على بعض تعريفات⁽⁵⁹⁾:

• اللامتناهي في الكبر: هو الأكبر من كل عدد أي أكبر من ن حيث ن ينتمي إلى مجموعة الأعداد الموجبة.

• اللامتناهي في الصغر: هو أن مضاعف العدد ن مهما كان هو أقل من $1/n$ n

. كما أن بولزانو أعاد التمييز التقليدي بين العدد والمقدار (*grandeur*) فالعدد يرد

إلى الحساب والمقدار إلى الهندسة، وقد حاول إعطاء معنى حسابي للمقدار كي يتحصل

على قيم لا متناهية. مجموعة المقادير تحتوي على:⁽⁶⁰⁾

• الأعداد الطبيعية.

• الكسور الناطقة.

• الأعداد اللاناطقة (وهي بالنسبة لبولزانو عبارة عن مقادير متناهية حتى وإن كانت

العبارة الرمزية تحتوي عدد لا متناهي من الأجزاء).

• المقادير اللامتناهية، تلك التي لا يمكن أن تخصص لها عدد طبيعي لتعيينها، ولا كسر،

ولا مقدار ولا ناطق.

ومجموعة المقادير هي امتداد لللامتناهي في الكبر ولللامتناهي في الصغر في مجموعة

الأعداد الحقيقية، إنها ناتجة عن فكرة أن اللامتناهي في الصغر والكبر ليست إلا مقادير

متغيرة متزايدة أو متناقصة بالنسبة لللامتناهي، ولهذا السبب تعتبر كميات معطاة بصورة

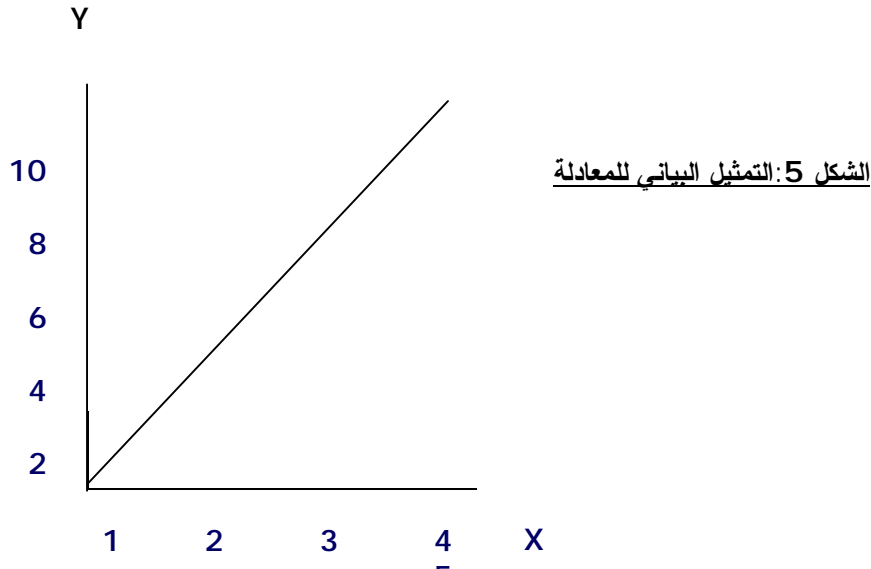
⁽⁵⁸⁾ Hourya Benis Sinaceur :La Pensée mathématique de l'infini, l'infini, 2 février 2004. <http://PhilosoPhie.scola.ac-Paris.fr/C603-04BenisSinaceur.htm>.

⁽⁵⁹⁾ Hourya Sinaceur :L' infini, Op.cit,pp 907-908.

⁽⁶⁰⁾ Bolzano: Op.cit,p 80.

مؤقتة. إن المقادير اللامتناهية هي كميات حقيقية، لكنها غير قابلة للقياس بالضرورة. وسنوضح التصور البولزاني للامتتاهي من خلال الرسم البياني التالي:

$$y = \frac{15}{5} x$$



لكل قيمة من محور السينات في مجموعة المقادير بين 0 و 5 تتطابق مع قيمة في محور العينات في مجموعة المقادير بين 0 و 12 والتي تكوّن مع س زوجا، حيث لا يبقى أن عنصر من المجموعتين مفرد، أو يوجد أكثر من زوج⁽⁶¹⁾.

بولزانو يبين تقابل المجال [5.0] على المجال [12.0] لكن المجموعتين ليس لهما نفس القوة، ومن الواضح أن مجموعة المقادير الموجودة بين [5.0] هي لا متناهية، ومن الواضح أن مجموعة المقادير هي لا متناهية، ومن المؤكد أن المجموعة الثانية أكبر من المجموعة الأولى لأن الأولى جزء من الثانية⁽⁶²⁾.

لكن من خلال المثال وقع في تناقض، إذ قال بإمكانية وضع مجموعة لا متناهية في تقابل مع جزء من أجزائها وهو أيضا لامتناهي، لكن اللامتتاهيين ليسا متساويين في القوة (équipotents) فكيف يتم التقابل؟

⁽⁶¹⁾ Ibid, p 87.

⁽⁶²⁾ Ibid, 87.

كما أشار بولزانو إلى مثال المتتاليات الذي تطرق إليه غاليلي ويقول: "بالرغم من التضاد الواضح فإن المتتاليتين تحتويان نفس مجموعة الحدود، وهنا أيضا يقع في تناقض"⁽⁶³⁾. أما عن العدد اللامتناهي فهو يرى أنه لا وجود لعدد لا متناهي، فالقول أن الشيء لامتناهي يعني الحديث عن كثرة غير قابلة لأن تكون محددة بعدد، وهذا ما يستلزم أنه إذا لم يكن هناك عدد لا متناهي، فلن يكون هناك حساب ممكن على اللامتناهي، فتصور حساب اللامتناهي هو متناقض، لأن تعداد الشيء يعني محاولة تحديده بعدد أو أعداد، وحسب تعريف اللامتناهي "هو مجموعة مكونة من لا نهاية من أجزاء، والمجموعة هي أكبر من أي عدد، فكيف يمكننا أن نحدد اللامتناهي بعدد"⁽⁶⁴⁾، فمن جهة بولزانو اعترف بأنه لا حساب لللامتناهي، وهذا ما يعتبر دعوة للبحث في مسألة حساب اللامتناهي، ومن جهة ثانية أكد على المقادير اللامتناهية القابلة لان تتزايد وهذا إقرار بوجود اللامتناهي الممكن.

وفيما يخص المقادير اللامتناهية و صنفها صنفين:

• المتساوية والمحددة بالهوية.

• اللامتساوية والمحددة بالاحتواء.

فبولزانو أكد على وجود اللامتناهي الميتافيزيقي وكذا الفعلي، فإذا كان الفلاسفة قبله قد اقرروا بوجود اللامتناهي الممكن فقط، فابتداء من بولزانو تمّ الإقرار بوجود اللامتناهي الفعلي. ومنه ومما سبق، نستنتج ان اللامتناهي لم يكن ليصل إلى الصورة التي أضفاها عليه بولزانو في القرن التاسع عشر، لولا جهود الفلاسفة والرياضيين عبر مختلف العصور والمراحل، فبعد أن كان التعامل معه يتحفظ واحتشام وخوف، لم يعد كذلك بعد ان تمّ ربطه بالإله وبصفاته، ففسر تفسيراً ميتافيزيقياً، وتمّ التمييز حينها بين اللامتناهي الممكن واللامتناهي الفعلي، هذا الأخير التي ظهرت بوادره في القرون الوسطى وانصب التركيز عليه في القرون اللاحقة، ووضحه بولزانو في القرن التاسع عشر ولكن البناء لم يكتمل إلا في القرن العشرين.

إن كانت هذه أهم الإسهامات حول اللامتناهي قبل كانتور، فما هو اللامتناهي عند كانتور؟ وقبل الإجابة على هذا السؤال، أشار **كفاييس** إلى نظرية أخرى وجدت قبل

⁽⁶³⁾ *Ibid*, p 96.

⁽⁶⁴⁾ *Ibid*, p 102.

الاكتشاف الكانتوري، والمتمثلة في نظرية الأعداد الحقيقية والمتتاليات المثلثية، التي لعبت

دورا مهما في تأسيس نظرية المجموعات.

المبحث الثاني: الأعداد الحقيقية والمتتاليات المثلثية

في القرن 18 كانت هناك جهود في التحليل، وخاصة في دراسة الدوال المتطورة إلى متسلسلات (series)، تمّ التوصل إليها بالاعتماد على مفهوم النهاية وتقارب المتتالية نحوها، وكذا الاعتماد على أسس حساب اللامتناهي، وبالرغم من هذه الاكتشافات فقد كانت هناك محاولة لإعطاء هذا الحساب قاعدة متينة، وهذا ما أكده كفاييس الذي يرى أن نظرية الأعداد الحقيقية والمتتاليات المثلثية (suites trigonométriques) تعود إلى ما قبل التاريخ، عند الهنود واليونان وحتى العرب، لكن شهدت تطورا ملحوظا في عصر النهضة عند كل من ديكارت، ديريشلي، ريمان، لوبسغ، وغيرهم*.

أولا- الجبر الديكارتي و الحساب اللامتناهي:

أ- جبرنة الهندسة عند ديكارت:

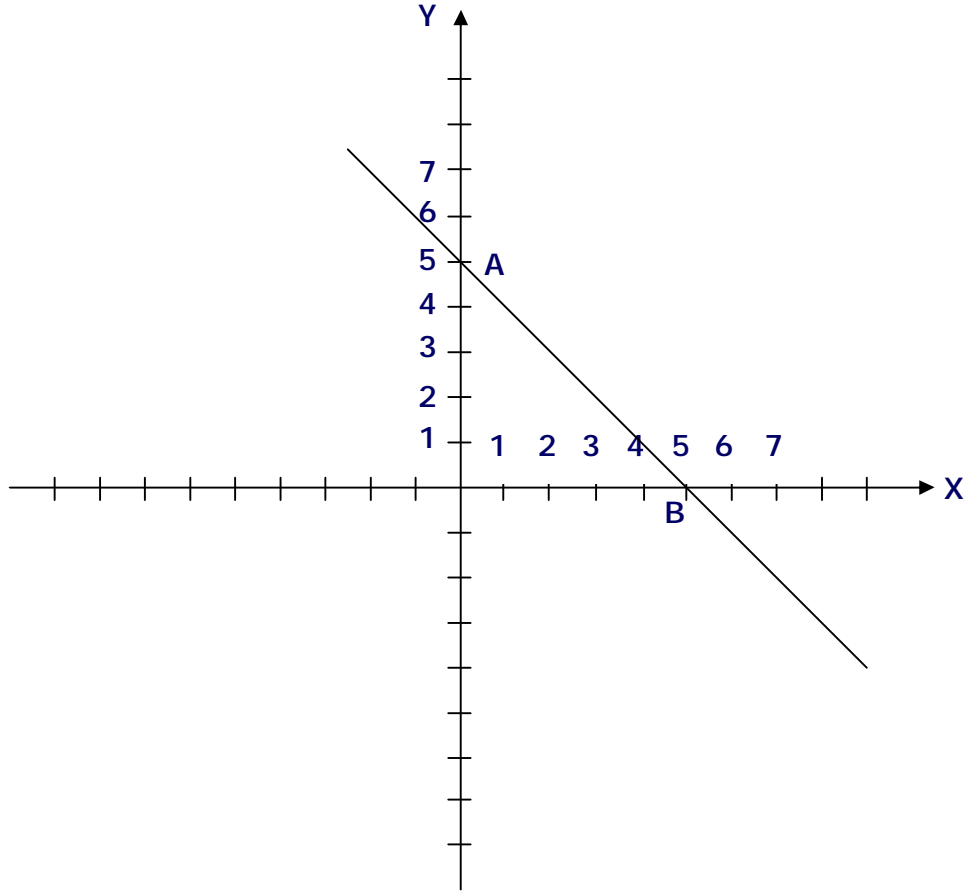
تطرق ديكارت إلى المعادلات من خلال دراسة تغيرات المقدار، من بعدها توصل إلى متتالية (suite) متصلة من القيم (Valeurs)⁽⁶⁵⁾، كما أنه قام بمحاولة جبرنة الهندسة (التي أصبحت تؤرخ انطلاقا منه) من خلال التعبير عن المستقيمات وعن مختلف الأشكال الهندسية بالمعادلات، فمع ديكارت تم الجمع بين الكم المتصل و المنفصل في شكل واحد. فمثلا المعادلة الديكارتية للمستقيم صيغتها الرمزية $a x + b y + c = 0$ حيث a, b, c هي أعداد حقيقية، فإذا كان لدينا وصف هندسي لمجموعة نقاط، يمكننا تحديد المعادلة الجبرية من خلال هذه النقاط:

* سيتم التركيز على الفلاسفة الرياضيين والمحدثين ولكن هذا لا يعني أن الرياضيات لم تكن من قبل، فتاريخ العلم يؤكد إبداع اليونان والعرب في هذا المجال:
انظر:

- Roshdi Rashed : *Entre arithmétique et algèbre, Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes, Paris, 1984.*

- J F Montucla : *histoire des mathématiques. 4 tomes, Paris, 1799-1802.*

⁽⁶⁵⁾ J. Cavaillès : *Philosophie mathématique, Hermann, Paris, 1981, p44.*



الشكل 6: التمثيل الديكارتي للمعادلة $x+y=5$

فمجموعة النقاط الموضوعة على المستقيم والذي تمر من النقاط A و B أو المستقيم

AB يحقق المعادلة الخطية $x+y=5$ ولذا فإن المستقيم الذي يقسم المحورين معادلته

$$ax+by=c$$

إضافة إلى هذا فقد قدم برهان المعادلات التربيعية.

$$Z^2 = aZ + b^2$$

$$Z^2 = -aZ + b^2$$

$$Z^2 = aZ - b^2$$

فإذا كان لدينا المثلث القائم NLM حيث:

مركز الدائرة: N

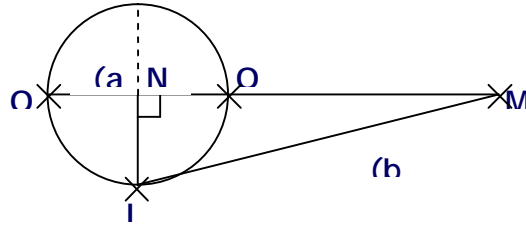
$$LM = b = b -$$

$$LN = \frac{1}{2} a -$$

$$NL = ON -$$

$$OM = Z -$$

فإننا نتحصل على الشكل (66)



الشكل 7: تمثيل المعادلات التربيعية

$$Z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$$

وبتطبيق صيغة إقليدس:

$$MP \cdot MO = ML^2$$

$$MO^2 = PO \cdot MO + MP \cdot MO$$

$$MO^2 = PO \cdot MO + ML^2 \text{ } Z^2 = aZ + b^2$$

وبتطبيق قانون فيثاغورس:

$$Z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$$

كما درس ديكارت المعادلات من الدرجة 3، و4، و5 وأكثر، وحلول هذه المعادلات أدى إلى ظهور الدوال. ولهذا، ما نخلص إليه هو أن ديكارت قد وفق بين الجبر والهندسة، فأسس هندسة تحليلية التي بمعادلاتها أدت إلى مفهوم الدالة.

ومما سبق نصل إلى أن ديكارت بهندسته التحليلية قد ساهم في تقدم العلم الرياضي، إذ تتمثل محاولته في توحيد الأساس والجمع بين الكمين المتصل والمنفصل ضمن تعبير واحد. ويصبح كل منهما يعبر عن الآخر بمعزل عن الحدس الهندسي الذي أدى إلى تأخر هذا العلم، وقد عبر ديكارت عن فكرة الاتصال من خلال المستقيم، وهو ما ساعده على تجاوز عقبة ضرورة مقابلة الإجراءات الجبرية بالأشكال الهندسية، ليحل التحليل بهذا المكان الأول في الوقت الذي كانت فيه الهندسة تعبر عن الرياضيات أو لنقل هي الرياضيات " فقد

(66) Descartes : La géométrie, Hermann, Paris, 1886, p 302.

تراجعت وأصبحت الرياضيات ترد إلى التحليل⁽⁶⁷⁾ وبهذا انفصلت الرياضيات عن التصور الحدسي وأصبحت تعبيراً عن بناء ذهني.

ب- ليبنز و حساب اللامتناهي:

هو الذي وضع أسس حساب اللامتناهي الصغر وذلك في منتصف القرن 17 بالتعاون مع نيوتن، كما أنه الأول الذي استعمل مصطلح الدالة سنة 1692 والدالة المشتقة، الإحداثيات، الجداء، التفاضل والتكامل.

ثانياً - تطور نظرية التحليل:

أ- أولر والدوال :

أولر (Euler 1707-1783) تلميذ "جوهان برنولي" (Johan Bernoulli 1667-1748)، أسس نظرية التحليل التي عرضها في كتابه "مقدمة في التحليل اللامتناهي الصغر"⁽⁶⁸⁾ كما عرض فيه الدوال المثلية، اللوغاريتمية والأسية. هو مؤسس الدالة (حتى وإن أشار إليها ليبنز كي يميز بينها وبين المنحنى)، كما يعتبر أيضاً واضع الرمز g (قاما) ويساوي... $g=0,57721566490153286060...$ ⁽⁶⁹⁾ اهتم كذلك بنظرية الأعداد والمعادلات التفاضلية، والتحليل عنده هو نتاج تركيب التحليل التفاضلي لليبنز ومنهج نيوتن في مشتقات f الدالة (fluxions de Newton)⁽⁷⁰⁾. و هو واضع الرموز للدالة المشتقة $f'(x)$ ، لقاعدة اللوغاريتميات الطبيعية (e)، الجذر المربع لـ $(1-x)^{-1}$ ، π ، رمز التجميع، وكذلك β (beta) و g (Gama). أما عن الدالة فيعرفها: "هي عبارة تحليلية مركبة من كمية متغيرة ومن أعداد وكميات، فكل عبارة تحتوي على كميات ثابتة هي دالة"⁽⁷¹⁾ مثال:

⁽⁶⁷⁾ هنري بوانكاريه: العلم والفرض، ترجمة تمادي جاب الله، المنظمة العربية للترجمة، بيروت، 2002،

ص 57.

⁽⁶⁸⁾ Leonhard Euler :Introduction à l'analyse infinitésimal, tome I, traduction J B Labey, éditions Jacques Gabay Paris 1987.

⁽⁶⁹⁾ Constante d'Euler , <http://mathibo.ifrance.com/mathibo/euler.htm>.

⁽⁷⁰⁾ عرض نيوتن نظريته في كتابه:

Principes mathématiques de la Philosophie naturelle, tr: Marquise du Jacques Gabay, 1990. (1^{ère} édition 1687). châtelet, éditions

⁽⁷¹⁾ Euler: Introduction à l'analyse infinitésimal , Op.cit, p 2.

استخدم Z : وهو بنفس معنى x (اليوم) وكذلك zz هي نفسها Z^2 وهي بتعبير اليوم x^2 ، و a ثابت. فالدالة لمتغير (z) هي كم متغير، وكلما عوضناه بقيم محددة، كلما كانت قيم الدالة لا نهائية، والدالة منها الناطقة وغير الناطقة، في الأولى المتغير لا يتعين بالجزر بينما في الثانية العكس (72).

كما ميّز أولر بين الدوال (المستمرة) (*curvae continue*) والدوال اللامستمرة (*curvae discontinuae*) فالأولى مجالها يتقاطع مع مجال العبارات التحليلية، والثانية هي التي تدل على المنحنيات الميكانيكية التي أشار إليها ديكرت.

فأما النوع الأول من الدوال (*fonctions continues*) فقد وصفها بالمتجانسة*، إنها "تلك المعرفة بعلاقة معينة بين الإحداثيات المعبر عنها بمعادلة، حيث كل نقاطها يجب أن تكون محددة بنفس المعادلة" (73). لقد أشار Euler إلى أن المعادلة الواردة في التعريف هي ذات طبيعة جبرية متزايدة، معروفة أو مجهولة، لكن يجب أن يتحقق فيها شرط الصلة بالمنحنيات (74). وما هذا إلا تأكيد على علاقة المعادلة بالدالة التي هي في حقيقة الأمر منحني هندسي.

أما النوع الثاني أي الدوال اللامستمرة (*fonctions discontinues*)، فهي دوال لا تحقق فيها قاعدة الاستمرارية، "فكل المنحنيات غير المحددة بمعادلة معينة، وكذلك المنحنيات التي ترسم بيد مرتفعة تؤدي إلى الدوال اللامستمرة" (75) فطبعا هذه المنحنيات لا يمكن أن تعرف قيم الترتيب (*ordonnées*) انطلاقا من الفواصل عن طريق قاعدة محددة، وتختص

(72) *Ibid*, p 4.

* نو شكل واحد: *uniforme* وهي التي لها قيمة لمعددة من خلال القيم المعطاة لـ (س) (*Ibid*, p 6).

(73) *Jean Dhombres : un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle, Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques, n°9, Paris, 1988, p13.*
http://archive.numdam.org/ARCHIVE/CSHM/CSHM_1988_9_pdf

(74) *L. Euler : De l'utilisation des fonctions discontinues en analyse. Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques Tome 9 , 1988, p 69.*
http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988_9.

(75) *Ibid*.

هذه المنحنيات بخاصية الميكانيكية⁽⁷⁶⁾ ليس لأن أجزاءها منفصلة بل لأنها غير محددة بأي معادلة معينة.

ب- الأوتار الاهتزازية عند برنولي :

في 1753 درس "دانيال برنولي" (*Daniel Bernoulli 1700-1782*) حركة الأوتار الاهتزازية (*cordes vibrantes*)، ويعد من مؤسسي الفيزياء الرياضية، وقد اعتبر "برنولي" دراسة "أولر" للمتتاليات المثلثية هي بداية تاريخ الأوتار الاهتزازية، والمتمثلة في حساب حركة الحبل ذا الطول "ل" مثبت عند الطرفين، إذ عندما يبتعد الوتر عن وضعيته كحبل الغيتار (أو يضرب) ثم يعود محدثاً اهتزازات، فإن معادلة الأوتار الاهتزازية فيما يخص الحركة الأفقية (المستعرضة) هي $y(x, a)$ في الزمن t عند النقطة x ونكتب:

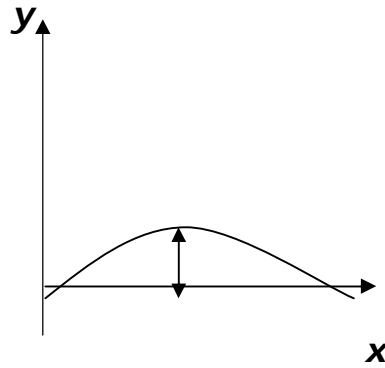
$$\frac{a^2 y}{a x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{a^2 y}{a t^2} = 0$$

حيث x : هي الدالة.

t : الزمن.

c : سرعة الامتداد.

y : تمثل البعد عن الخط أو المستقيم.



y

(x, t)

الشكل 8: الحركة الأفقية للحبل الاهتزازي

$$y(x, t) = f(x + \omega t) - f(x - \omega t)$$

⁽⁷⁶⁾Ibid.

فهذه الدالة تمثل الصورة الأولية للحبل وامتداداته المتتالية والمتعاقبة، والتي يجب أن تكون خاضعة لنفس المعادلة، حتى لا تكون هناك قفزات، وهذا ما أكده دالمبر (*1717-1783 d'Alembert*) سنة 1761، والذي من خلال دراسته للأوتار الاهتزازية توصل إلى معادلة الأمواج (*les ondes*)، وقد حلها باعتماده على منهج التفاضل، ونهاية الأطراف الثابتة، وهذا من أجل الحصول على المعادلة السابقة ذكرها. وقد عرض دالمبر نظريته في كتاب: "*les opuscles mathématiques*"*.

ج- متتالية فوريي:

أشار **كفاييس** إلى أهمية الأبحاث التي قام بها الرياضيون السابقون، إلا أنه ركز على الرياضي "فوريي" (*1768-1830 Joseph Fourier*)، ومنتاليته التي تعرف باسمه، وأساسها الأوتار الاهتزازية، وقد توصل إليها عن طريق المتتاليات المثلثية.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ : متتالية فوريي}$$

فالمثلثية المثلثية بمعاملات محددة، يمكن أن تمثل دالة ما⁽⁷⁷⁾، فهي إذن عبارة عن ربط دالة دورية بالمعاملات، والدالة الدورية هي:

$$\forall x \in D, f(x+t) = f(x) \quad \forall x \in D, x+t \in D$$

وقد كان "ديرشلي" (*1805-1859 Lejeune Dirichlet*) الأول الذي أثبت تقارب (*convergence*) متتاليات فوريي، والبرهنة تقوم على 3 نقاط⁽⁷⁸⁾ لم يهتم صاحبها ببرهناتها⁽⁷⁹⁾:

- الدالة تبقى منتهية على المجال $[-\pi, \pi]$
- الدالة لا تقبل إلا عدد متناهي من الأقصى والأدنى
- عدد نقاط الدالة اللامستمرة هو متناهي.

تابع **كفاييس** الأعمال التي كانت حول متسلسلات فوريي إلى غاية النتائج التي جاء بها كانتور، كما تطرق إلى استعمال المفاهيم المجموعائية خلال القرن 19، كتطبيق منهج "الاشتقاق" (*dérivation*) الذي كان من بين العوامل القوية التي أدت إلى نشأة نظرية

* *D'Alembert : opuscles mathématiques ou mémoires sur différents sujets de géométrie, de mécanique, d'optique, d'astronomie, tome 1, 25^{ème} mémoire. Paris.*

⁽⁷⁷⁾ *J. Cavaillès : philosophie mathématique, Op.cit, p 46.*

⁽⁷⁸⁾ *P C Noguès : De l'expérience mathématique, J Vrin, Paris, 2001, p 29.*

⁽⁷⁹⁾ *J. Cavaillès : Philosophie mathématique , Op.cit, p 47.*

المجموعات، يقول "لم توجد نظرية في المجموعات إلا بظهور ليس المفاهيم، بل نمط أصلي للبرهنة، وهو النمط الذي استخدمه كانتور لأول مرة"⁽⁸⁰⁾.

كما أشار **كفاييس** من خلال أعمال "دي بوا ريمون" (*Du Bois Reymond*) (1818-1896) إلى الدوال المتزايدة*، وقد كان هدف هذا الرياضي مقارنة الدوال المتزايدة باستمرار والأعداد الحقيقية، وتوصل إلى أن استمرارية الدوال المتزايدة هي أكثر غنى من استمرارية الأعداد الحقيقية⁽⁸¹⁾.

د - الدوال التحليلية عند لاغرانج:

عرض "لاغرانج" (*Lagrange* 1736-1813) نظريته في كتاب "نظرية الدوال التحليلية"⁽⁸²⁾ وهو العنوان الذي أتبعه بعنوان جزئي: الحساب التفاضلي بعيدا عن كل اعتبار للأمتناهي الصغر، النهايات التي تختزل إلى التحليل الجبري للكميات المتناهية. فمحاولته كانت حول جبرنة التحليل بالاستناد على تطور الدوال إلى متسلسلة تايلور.

والتطور إلى متسلسلة تايلور عند النقطة (a) للدالة (f) مشتقة من متغير حقيقي أو مركب على المجال من R حيث $(a - r)$ ، $(a + r)$ هي المتتالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)(a)}{n!} (x - a)^n$$

حيث $n!$ هو عاملي (n) عاملي عدد طبيعي (n) ويرمز إليه بـ ($n!$) هو جداء الأعداد الطبيعية الموجبة الأقل أو يساوي (n) يعرف كما يلي:

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n - 1) \times n$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3628800$$

⁽⁸⁰⁾ *Ibid*, p60.

* عرض نظريته في:

Du Bois Reymond: Théorie générale des fonctions, 1^{ere} Partie, traduction G. Milhaud et A Girot, ed Jacques Gabay, 1887.

⁽⁸¹⁾ *P C Noguès : Op.cit, p60.*

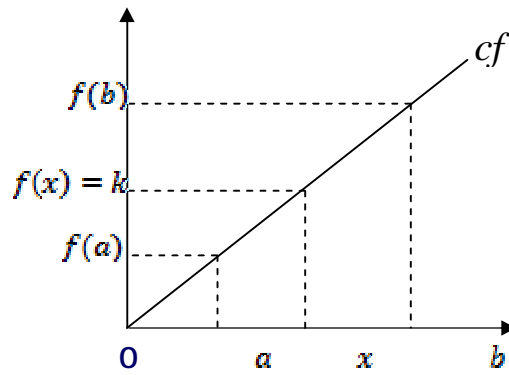
⁽⁸²⁾ *J. Cavaillès : Philosophie mathématique, Op.cit, p 44.*

مشتقة n لـ f في النقطة a هي $f(n)^{(a)}$ ويرمز لها لاغرانج بـ $f'(x)$.

ثالثاً: تحسب الرياضيات عند بولزانو:

إضافة إلى إسهاماته في مجال اللامتناهي، فبولزانو إسهامات في تيار الأفكار التي

أدت إلى تحسب (*arithmétisation*) التحليل، ففي مقال نشر 1917 بعنوان: "برهان تحليلي خالص" *، ذكر القانون التالي: بين قيمتين تعطينا نتيجتين متعاكستين الإشارة، يوجد على الأقل جذر حقيقي للمعادلة، وبتعبير آخر للقانون: الدالة أو الخط المتصل، تراتبيه موجبة ثم سالبة، يقطعه محور الفواصل على الأقل في نقطة تقع بين هذه الإحداثيات⁽⁸³⁾.



الشكل 9: التمثيل البياني للدالة

الدالة f مستمرة على المجال I ، و b, a عدنان حقيقيان ينتميان إلى I .

لكل عدد حقيقي k موجود بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي x موجود بين a و b حيث $f(x) = k$. إن هذه المعادلة تقبل على الأقل حلاً موجوداً بين a و b . وللبهنة على هذا القانون أكد بولزانو عدم الرجوع إلى الحدس والبداهة الهندسية، كما أكد على عدم الرجوع إلى مفهومي الزمان والمكان. وهذا لا يعني الاعتراض على بداهة القانون الهندسي، لكن من الواضح سيرتكب الرياضي خطأ عند الرجوع إلى الحدس وإلى التطبيقات التجريبية⁽⁸⁴⁾.

* *Démonstration Purement analytique, Traduction de J Sebestik, Revue française d'histoire des sciences, XVII 1964, Pages 129-164.*

⁽⁸³⁾ J. Cavailles : *Philosophie mathématique, Op.cit, p 32.*

⁽⁸⁴⁾ Jean Sebestik : *la dispute de Bolzano avec kant .Fragment d'un dialogue sur la connaissance mathématique , Revue philosophie N° 1 vol 30/2003.*

<http://www.erudit.org/revue/philoso/2003/v30/n1/007731ar.pdf>

لقد درس بولزانو النظريات السابقة بالاعتماد على التحليل والنقد، كما برهن على المعيار الذي اقترحه "كوشي" (*Cauchy 1789-1857*) بالنسبة للمتسلسلات، شرح الحد الأعلى للمجموعة (*borne supérieure*) وبين أهميته بتكوين -عن طريق القسمة الثنائية- متسلسلتين متجاورتين تقتربان نحو هذا الحد الأعلى، ويعتبر برهان قانون القيم الوسيطة (*théorème des valeurs intermédiaires*) السبيل إلى استنتاج هذا الحد الأعلى.

إن وجود نهاية مشتركة لمتسلسلتين تفرض مسبقاً معرفة بالأعداد الحقيقية حتى تكون قوية، وبولزانو بين وحدة النهاية (*la limite*) وحاول إثبات وجودها، واعتمد على فرضية وجود مقدار غير ثابت له خاصية تقريب حدود المتسلسلة، وهذا ليس بمستحيل، مما يعني أن الفرضية تسمح بتحديد هذا المقدار كما يشاء الرياضي.

كما ميّز بولزانو بين العدّ والمقدار، وبالنسبة إليه الأعداد الطبيعية فقط هي كذلك، بينما الصفر، الأعداد الناطقة الحقيقية المركبة، اللامتناهية ليست أعداد، إنما هي مقادير (العودة إلى اللامتناهي عند بولزانو)، فبالنسبة إليه الصفر يمثل "اللاشيء"، إنه "لا يمثل مقداراً حقيقياً بل مجرد غياب للمقدار"⁽⁸⁵⁾، والمقادير السلبية تعرف بالتصور المعاكس. كما ميّز أيضاً بين الأعداد التي هي نسبية، والمقادير العددية والكسرية والناطقّة واللامتناهية في الصغر، واللامتناهية في الكبير:

- الأعداد الطبيعية: *Nombres Naturels* ورمزها \mathbb{N} موجبة دوماً $0 \leq n$.
- الأعداد النسبية: *Nombres relatifs* الأعداد الموجبة أو السالبة ورمزها \mathbb{Z} .
- الأعداد الناطقة (*Nombres rationnels*): الأعداد النسبية التي تكتب على شكل كسر ورمزها \mathbb{Q} .
- الأعداد اللناطقّة (*Nombres irrationnels*): كل ما هو غير كسري وتشمل:
 - § كل الأعداد التي لها جذور.
 - § الأعداد العشرية (*Décimales*)
 - § الأعداد الجبرية (*Nombres algébriques*) كل عدد جبري هو جذر لمعادلة جبرية.

⁽⁸⁵⁾ Bolzano : *Paradoxes de l'infini*, Op.cit, p 116.

§ العدد الأسي: "e" وقيمته: 2.718281 وقد اكتشفه أولر سنة 1761.

§ π (pi) وقيمته 3.1415

§ الأعداد المتعالية (*nombres transcendantales*): وهي التي تكون جزرا لأي

معادلة كثيرة الحدود.

§ الأعداد الحقيقية (*nombres réels*): مجموع الأعداد الناطقة واللاناطقة.

والأعداد الحقيقية لم يطرح وجودها أي إشكال في البداية، فالمتتالية التي تسمى باسم كوشي – بولزانو (*Bolzano-Cauchy*) تقترب نحو النهاية، التي هي عدد حقيقي مأخوذ من مجموعة وضعت مسبقا. بعدها أي بعد 1830، اكتشف ضرورة البناء التدريجي لنسق الأعداد التي يوصل إلى بناء الأعداد الحقيقية، إذ أنه يحدد موضع الأعداد الناطقة، وأدخل التصور العددي للعدد الناطق القابل لأن يتضاعف ويتناقص بلا حدود، وأخيرا قدم فئة أكبر مكونة من الأعداد الحقيقية. وقد كان هدف بولزانو من جهة، تأسيس الأعداد الحقيقية، ومن جهة ثانية توسيع مفهوم العدد حيث يحتوي اللامتناهية الصغر والكبر.

رابعاً- الأعداد الحقيقية:

أ- الأعداد الحقيقية ومنتالية كوشي:

من بين ما نشر لكوشي في المدرسة المتعددة التقنيات سنة 1821، محاضرات في التحليل أكد فيها أنه يبحث عن الوسيلة التي تجعل للمناهج المستخدمة نفس الدقة الموجودة في الهندسة، "هذه الدقة التي نفرضها في الهندسة دون اللجوء إلى الأسباب المستمدة من عمومية الجبر، التي تنزع إلى وصف الصيغ الجبرية بصفة الامتداد، وهي لا تملكها"⁽⁸⁶⁾. كما أنه أكد أنه سيدرس أنواع الدوال الحقيقية أو الخيالية (*imaginaires*)، التسلسلات المتقاربة والمتباعدة، حل المعادلات، وتفكيك أو لنقل تحليل وتبسيط الكسور الناطقة، الحساب اللامتناهي، التمييز بين العدد الموجب والمقدار، أيا كان موجبا أو سالبا، النهاية، التكامل⁽⁸⁷⁾ كما عرف اللامتناهي في الصغر، على أنه: " قيمته العددية تتناقص بلا حدود حيث يقترب

⁽⁸⁶⁾ Augustin Louis : *Cauchy cours d'analyse de l'école royale Polytechnique 1^{ere} Partie, analyse algébrique édition, Jacques Gabay, Paris, 1821, p 2.*

⁽⁸⁷⁾ *Ibid*,p2.

من الصفر⁽⁸⁸⁾، واللامتناهي في الكبر: " القيمة العددية تتزايد بلا حدود حيث تقترب من اللانهاية"⁽⁸⁹⁾.

وفيما يخص العدد الحقيقي فقد تطرق إليه كوشي من خلال ما يعرف بـ "متتالية كوشي" في التحليل، وهي متتالية* تحتوي على الأعداد الحقيقية المركبة وفضاء متري أو طوبولوجي متجانسة. وقد عرضها كما يلي: نقول عن متتالية (U_n) من الأعداد الحقيقية أو المركبة أنها متتالية كوشي إذا حققت الخاصية التالية والتي تسمى "مقياس كوشي":

$$" \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, " (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq n, q \geq n \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

ففي الأعداد الحقيقية (R) أو الأعداد المركبة (C) كل متتالية كوشي تقاطع $(converge)$ ولها نهاية $(limite)$ متناهية. وكل متتالية الأعداد الحقيقية أو المركبة هي لكوشي عندما تكون حدودها متقاربة بعضها مع بعض عندما تنتهي نحو اللانهاية:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |r_p - r_q| = 0$$

وهي ما تترجم:

$$" (\varepsilon > 0), \exists n \in \mathbb{N}, (" p, q > n) (r_p - r_q) < \varepsilon$$

$$" (\varepsilon > 0), \exists n \in \mathbb{N}, (" n > N) (" K > 0) |r_{n+K} - r_n| < \varepsilon$$

كما أشار كوشي إلى الحدّ معرفاً إياه: "عندما تكون القيم المتتالية المسندة لنفس المتغير تقترب بلا حدود من قيمة ثابتة، فإن هذه الأخيرة تسمى نهاية كل القيم الأخرى"⁽⁹⁰⁾ فمثلاً العدد اللاناطق هو حدّ أو نهاية مختلف الكسور التي لها قيم متقاربة. وفي الهندسة،

⁽⁸⁸⁾ Ibid, p 26.

⁽⁸⁹⁾ Ibid, p 27.

* تعريف المتتالية: المتتالية هي مجموع الأشياء، الأعداد المترابطة بنمط خطي حيث ترتيب أعضائها المتتالية يتم وفق قاعدة صريحة أو ضمنية العناصر أو الأعداد تسمى عناصر أو حدود المتتالية، فمثلاً:

$$\{a, b, c, d\} \text{ المتتالية:}$$

$$\{c, b, d, a\} \text{ تختلف عن المتتالية:}$$

وهذا الاختلاف راجع لعدم وجود ترتيب واحد.

وقد تكون المتتالية متناهية أو لا متناهية.

والمتناهية تكتب دائماً على أساس الحد فمثلاً:

$\{1, 4, 9, 16\}$ كتبت على أساس الحد الذي ترتيبه n^2 ، أما المتسلسلة هي مجموع لمتتالية من الحدود سواء

كانت الحدود أعداد أو دوال: $\sum_{k=0}^n ak = a0 + a1 + a2 + a3 + \dots + an = Sn$

⁽⁹⁰⁾ Ibid, p 13.

مساحة الدائرة هي النهاية التي تنتهي إليها مساحات المتعدد الأضلاع الموجودة فيه، بينما عدد الأضلع يتزايد.

وعليه إن تطور التحليل نجم عنه اكتشاف دوال منفصلة ودوال تتطلب عددا تخيليا وهذا ما أدى إلى زعزعة مكانة الاتصال الرياضي، بل انهارت هذه الفكرة ولم تعد أساسا متينا يقوى على احتواء التطورات التي مست التحليل.

ب- الأعداد الحقيقية عند لوبسغ:

إن تعريف الأعداد الحقيقية من خلال المتتاليات العشرية، هي وجهة نظر دافع عنها لوبسغ (*Henri Léon Lebesgue 1875-1941*) في كتابه "قياس المقادير" (91)، الذي كان موجهًا لتكوين الأساتذة المبتدئين. وعن الأعداد اللاناطقة يقول: إن النقد الأساسي يقوم على ما نقوله بل بالأحرى على ما لا نقوله في موضوع الأعداد اللاناطقة. ففي الأقسام العليا في التعليم الثانوي وكذلك في السفلي، لا نتكلم عن الأعداد اللاناطقة إلا بطريقة غير مباشرة (خفية)، نسترجع ما هو واضح في الذهن لكي نعلم التلاميذ صياغته في كلمات، لا نحاول أن نحدد لهم ونعلمهم أن ما بقي أكثر من واسع، بالرغم أنه هو الذي ساعدهم خلال السنوات الأربع، ولكن لم نكلمهم عنه أبدا: العدد الناطق أو اللاناطق، نصادفهم دائما، ودائما نتجنب الحديث عنهما. في الحساب، وبسبب قياس المقادير، فإن الرياضي يتكلم في حدود الحالات القابلة للقياس، أما غير القابلة للقياس فإنه يخفيها بمهارة.

ويجد الرياضي نفسه مجبرا على الحديث عن القيم المتقاربة للأعداد الناطقة، لأنه لم يكلم التلاميذ إلا عنها. هذه الأعداد المتقاربة يدركون الأساتذة المبتدئين: أنها أقل أهمية بالنسبة للأعداد الأخرى، لكن هذه لا توجد، وببساطة فإن لوبسغ يرى أن هذه الأسباب كافية لكي نتحدث عن الأعداد الحقيقية وهو يصر على أنها موجودة في الإنسان حتى وإن لم يتلقاها من أستاذ. وبالنسبة إليه، ليس من المعقول التركيز على الكسور فحسب، فمثلا إذا كانت لدينا قطعة مستقيم وحدة قياسها u ثم نقسم هذه القطعة إلى عشرة أجزاء متساوية ويكون الناتج u_1 (دلالة على $10/1$ من القطعة u) ثم نقسم u_1 إلى عشرة أجزاء متساوية أيضا نتحصل

$$\text{على: } u_2 = \frac{1}{10} u_1 = \frac{1}{100} u \text{ وهكذا ...}$$

(91) *Henri Lebesgue: La mesure des grandeurs, Paris, A. Blanchard, 1975.*

فنتيجة هذه المتتالية اللامتناهية من الإجراءات هي عبارة عن عدد وتبرير وجوده يرد إلى الهندسة. إذن فيجب أن نتخيل وجود عدد يحقق ويعكس بالفعل ما جاء في المتتالية. فكل الإجراءات تنتج عن مثل هذه التمثلات، فالجمع هو عبارة عن وضع قطعة جنب قطعة، والجداء هو تغير وحدة قياس المسافة وهكذا.

ومما سبق فإن السؤال عن تعريف الأعداد الحقيقية واللاناطقة هو محور النقد الذي وجهه لوبسغ والذي أكد أن عدم استعمال وإقرار الرياضي بالأعداد الحقيقية راجع إلى عدم تعودنا عليها. فقد كانت هذه هي أهم الإسهامات، والعوامل التي أدت إلى تأسيس نظرية المجموعات مع كانتور، والتي كانت نتيجة تطور الحساب والجبر وكذلك التحليل، وليس هذا فحسب بل أن العلاقة بين هذه الفروع الرياضية والفيزياء كانت واضحة جدا من خلال أعمال دالمبير وليس بالفيزياء فحسب بل بعلوم أخرى. كذلك ما نستنتجه هو تراكمية المعرفة الرياضية، فكل رياضي بنى نظريته انطلاقا من النظريات السابقة عليه فيعدل ويصحح ويطور إن كانت صحيحة ويوضح إن كانت غامضة، ويفكك إن كانت معقدة، إذن نظرية المجموعات كانت ناتجة عن أزمة الأسس التي حدثت في الرياضيات والتي مست:

- مفهوم اللامتناهي.
- اكتشاف الأعداد الحقيقية.
- تطور نظرية الدوال، والمتسلسلات الطبيعية والمثلثية واللوغاريتمية، ومفهوم الاتصال.

إن الفلاسفة والرياضيين الذين تمّ التطرق إليهم كنماذج ذكرت على سبيل المثال لا الحصر، فهناك الكثيرون كانت لهم إسهامات فعالة ومهمة وهي لا تتعد عن الإسهامات المشار إليها، بالإضافة إلى أن **جان كفاييس** قد ركز على هذه الأسماء أكثر من غيرها وهذا لأنه ليس بصدد التأريخ لعلم الرياضيات وإنما التطرق إلى أهم العوامل التي ساعدت في تأسيس ما يعرف بنظرية المجموعات.

ولهذا فإن **كفاييس** بالإضافة إلى هؤلاء الذين كانت لهم إسهامات في تطور

التحليل، أشار إلى رياضيين آخرين:

- لوجندر (**Legendre 1752-1833**): كانت له إسهامات في الجبر المجرد،

التحليل. كما اهتم كذلك بتطبيق التحليل على نظرية الأعداد.

- ديرشلي (1859-1805 Dirichlet): اهتم ببرهنة نظرية *Fermat* بواسطة الأعداد الطبيعية الخاصة به*، وقد ركز في أبحاثه على متسلسلات فورييه، التكامل والدوال المنفصلة.

* العدد الطبيعي لـ: *Dirichlet* رمزه $a + \frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{5})b$ حيث a, b أعداد نسبية.

المبحث الثالث: الأعداد الناطقة و اللاناطقة

بالإضافة إلى الإسهامات السابقة الذكر، أكد كفاييس أن نهاية القرن 18 وبداية

القرن 19 عرف ظهور مناهج متقاربة ومتمايزة تمثلت في (92):

- منهج فيرشتراس.
- منهج ديدكند، طانيري.
- منهج هاين-كانتور.

أولاً - منهج فيرشتراس وإسهاماته:

لقد درّس فيرشتراس (1815-1897 Weierstrass) منذ 1856 في برلين بناء وتكوين الأعداد الحقيقية الموجبة، كمجاميع لا متناهية مكونة من الأعداد الناطقة، وقد كان موقفه تكوينياً "إن العدد في الحالة الأبسط هو تمثّل تركيبى للربط بين الوحدة ووحدة (93)، ثم يعرف التضاعف " العدد المركب (*nombre complexe*) هو تمثّل تركيبى زمر (*groupes*) متعددة من عناصر متجانسة فيما بينها" (94)، ومنه فالعدد ينتج عن تطبيق منهج مجرد مطبق على مجموعة، ويجب أن نميز العناصر التي تنتمي إلى أنواع (*espèces*) متعددة ومجاميعها متناهية كانت أولاً متناهية.

فمجموع عددين هو حاصل جمع مكون من اتحاد عناصره، وجداء α و β ، حاصل الضرب نحصل عليه من خلال تعويض كل عنصر من β بحاصل يكافئ α ، ويمكن في عدد تعويض العناصر الأولية دون تغيير العدد، وهكذا عدنان متساويان إذا وفقط من خلال تغيير ملائم، يمكن تأسيس مجموع مطابق للعناصر ذاتها، ويقترح كفاييس تعريفاً أعم للمساواة ينطبق على المجاميع اللانتهائية عدنان متساويان إذا كان كل عدد مكون من مجموع متناهي من العناصر أحدهما محتوى في الآخر (95).

(92) J. Caillaès : Philosophie mathématique, Op.cit, p 36.

(93) Ibid, p 39.

(94) Ibid,p39.

(95) Ibid,p40.

العدد "a" يشير إلى مجموع لا متناهي، هو متناهي إذا فقط إذا وجد عدد "b" مكون من مجموع متناهي حيث كل عدد مكون من عناصر من a (ذات مجموع متناهي) هو محتوي في b، لكن العكس (réciproque) غير صحيح (a < b)⁽⁹⁶⁾.

فغيرشتراس برهن أن مجموعة الأعداد الناطقة لا يمكنها أن تطابق حدا بحد (واحد مع واحد) مع مجموعة الأعداد الحقيقية، فالمجموعة الأولى غير كافية لملا المجال بين عددين أيا كان⁽⁹⁷⁾، كما أنه أرسى دعائم تكوين مجموعة الأعداد الحقيقية وليس هذا فحسب، بل كانت له إسهامات حول التكامل البيضوي* (intégrales elliptiques) حول دراسة الدوال البيضوية والتكامل الذي أسسها الرياضي آبل (1829-1802 Abel) وقد أدى هذا إلى تأسيس اتجاهين لبناء الأعداد الحقيقية:

أ- اتجاه ديدكند وبعده طانيري، اللذان اشتهرا بمفهوم التقطعات (coupures) في مجموعة الأعداد الحقيقية.

ب- اتجاه طوره شارل ميراي (Charles Méray) ثم كانتور وبعده هاين (Heine)، وقد اعتمدوا على متتالية كوشي للأعداد الناطقة.

ثانيا - منهج ديدكند، طانيري:

أ- ديدكند واكتشاف الأعداد اللاناطقة :

في مؤلفه "استمرارية الأعداد اللاناطقة" الذي ظهر سنة 1872 طور ديدكند

(1916-1831 Dedekind) التصورات والمفاهيم حول الأعداد الحقيقية التي

اكتشفها

سنة 1858* .

⁽⁹⁶⁾ Ibid,p40.

⁽⁹⁷⁾ J. Piaget : Introduction à l'épistémologie génétique, Op.cit, p 199.

* الدالة البيضوية صيغتها: $\int F(x, \sqrt{p}) dx$ ، حيث F هي دالة ناطقة حاصل كسر كثيرين الحدود و P هو كثير الحدود من الدرجة الرابعة، هي أنواع والنوع الذي ركز عليه آبل هو النوع الأول وصيغته:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2 z^2)}}$$

http://serge.mehl.free.fr/anx/int_elli.html

*Dedekind : Continuité et nombres irrationnels. Braunschvieug Trad sinaceur dans : les nombres que sont -ils et a quoi servent - ils ? pages 34-64.

والمصدر الأصلي Stetigkeiten und irrational zahlen, pages 315-331

1 - خصائص الأعداد الناطقة:

لقد افترض ديدكند معرفة حساب الأعداد الناطقة، وأبدى بعد الملاحظات:

• إن فعل "عدّ" (*Compter*) ليس إلا اختراع متتالي لمتسلسلة لا متناهية للأعداد الصحيحة.

• إن الإجراءات هي أربع: الجمع، الطرح، الجداء، القسمة.

• إن للطرح والقسمة حدود (*limites*) وبهذه الحدود تطورت الإجراءات، وهذا ما أدى إلى اكتشاف الأعداد السالبة والكسرية والعشرية.

فما هي خصائص الأعداد الناطقة في بناء ديدكند؟

• مرتبطة بعلاقة ترتيب وأخصها في الانعكاسية اللاتماثلية، والتعدي إذا كانت $a > b$ و $b > c$ إذن $a > c$.

• إذا كان a و b مختلفان إذن: $a^1 b$ ومنه يوجد لا تنتهي من الأعداد الناطقة بين a و b .

• إذا كانت a عدد ناطق فكل الأعداد تنقسم إلى فئتين A_1 و A_2 حيث:

A_1 : هي مجموعة الأعداد الناطقة الأقل من a ($a_1 < 1$)

A_2 : هي مجموعة الأعداد الناطقة الأكبر من a ($a_2 > a$)

والعدد a يمكن أن يصنف مع الفئة الأولى أو الثانية وهذا يعني كل عنصر من الفئة

الأولى يسبق في الترتيب كل عنصر من الفئة الثانية، وهي الخاصية التي تميز الترتيب

الخطي (*ordre linéaire*) عن الترتيب الدائري (*ordre circulaire*)⁽⁹⁸⁾.

ويثبت ديدكند أن هناك مماثلة بين الأعداد الناطقة ونقاط المستقيم، فبالنسبة لأعداد

المستقيم، يمكن تعريف العلاقة: "نقطة بجانب أخرى" وإيجاد الخصائص الثلاثة الموازية

للخصائص السابقة⁽⁹⁹⁾. والمماثلة بين الأعداد الناطقة ونقاط المستقيم، تصبح ترابطاً حقيقياً

عندما نختار على المستقيم النقطة "O" ووحدة قياس طول المسافات، وبهذا يمكن تكوين لكل

⁽⁹⁸⁾ J.Cavallès : *Philosophie mathématique, Op.cit, p 37.*

⁽⁹⁹⁾ Jacqueline Boniface : *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques, J.Vrin, 2004, p21.*

عدد ناطق طول مطابق له ونقطة مطابقة لها، وفيما يخص العدد الناطق فتوجد على الأقل نقطة واحدة وواحدة فقط تقسم نقاط المستقيم إلى نصفين.

2 - اكتشاف الأعداد اللاناطقة:

لقد عرض ديدكند منهج التقطعات (*coupures*) ويقصد بها تقسيم الأعداد الناطقة، حدود المتتالية إلى فئتين⁽¹⁰⁰⁾، وأكد وجود نوعين من التقسيم:

- الفئة الأولى تحتوي على الحد الأعلى والفئة الثانية تحتوي على الحد الأدنى وهو العدد الناطق A ، والقطع يكون عند العدد الناطق A .

- الفئة الأولى لا تشتمل على الحد الأقصى والثانية لا حد أدنى لها.

وفي هذه الحالة، التقطعات لا يمكن أن تتم بالأعداد الناطقة، هذا يعني أن الأعداد الناطقة غير مستمرة، ولهذا كلما كان هناك تقطع غير ناتج عن عدد ناطق، هذا يعني نشأة عدد جديد غير ناطق، (x) ويكون معرفًا بهذا النقط. فنقول إذن أن (x) هو معرف بالقطع (a_1, a_2) ، وهو ينفذ هذا القطع.

وبمفهوم القطع، توصل ديدكند إلى اكتشاف الأعداد الحقيقية التي هي عبارة عن اتحاد الأعداد الناطقة وغير الناطقة، بعدها عرف ديدكند علاقة الترتيب بين التقطع a في الفئات (A_1, A_2) والنقط β في الفئات (β_1, β_2) بتمييز الحالتين التاليتين:

- يوجد على الأكثر عدد ناطق غير مصنف بنفس الصورة، يوجد مثلًا في الفئة الأولى A_1 ويوجد في الفئة الثانية β_2 إذن: $a = \beta$ وهو عدد ناطق.

- يوجد على الأقل ناطقان مختلفان موجودين في الفئة الأولى A_1 والفئة الثانية β_2 بينما توجد لا تنتهي غير مصنفة بنفس الصورة هي $a > \beta$ ، (والعدد غير المربع هو القطع). كأن نضع في المقطع الأول جميع النسب التي مربعاتها أصغر من 2 وفي المقطع الثاني جميع النسب التي مربعاتها أكبر من 2 وهنا تتكون فجوة تملأ بالأعداد اللاناطقة⁽¹⁰¹⁾.

ويوضح راسل نظرية ديدكند:

⁽¹⁰⁰⁾ Benoit Rittaud :Les rationnels pour atteindre les réels,dans L'infini ,tangente Hors serie,N°13 ,édition Pole, Paris ,2006, p79.

إن الأعداد المنطقية (الناطقة) تقسم إلى فصلين، بحيث تأتي جميع أعداد فصل منهما بعد جميع أعداد الفصل الآخر، فلا يقع أي عدد منطق بين الفصلين، ومع ذلك لا يكون للفصل الأول حد أول ولا يكون للثاني حد أخير، مثال ذلك أن جميع الأعداد المنطقية بغير استثناء يمكن أن تصنف حسب مربعها أو أكبر أو أصغر من 2، وجميع الحدود في كلا الفصلين يمكن تنظيمها في متسلسلة مفردة، يوجد فيها قطع معين (المترجم ترجم *coupure* بمقطع) يأتي قبله أحد الفصلين ويأتي الآخر بعده، ويبدو أن الاتصال يتطلب أن يناظر حد ما هذا المقطع، والعدد الذي يقع بين الفصلين يجب أن يكون عددا جديدا ما دامت جميع الأعداد القديمة قد صنفت، وهذا العدد الجديد هو عدد لا منطق، فإذا أدخلت هذه الأعداد فليس هناك دائما عدد بين أي عددين فقط، بل هناك عدد بين أي فصلين⁽¹⁰²⁾.

فيما يخص خصائص الأعداد الحقيقية فقد أكد ديدكند على نفس خصائص الأعداد الناطقة وأضاف خاصية رابعة هي الاستمرارية. فإذا كان نسق الأعداد الحقيقية ينقسم إلى

⁽¹⁰¹⁾ Louis Couturat : *De l'infini mathématique*, Burt Franklin, New York, 1969, p169.

(102) راسل: أصول الرياضيات ج3، مرجع سابق، ص ص 108-109.

قسمين (a_1, a_2) حيث a_1 من الفئة الأولى أقل من كل عدد a_2 من الفئة الثانية إذن يوجد عدد حقيقي واحد ووحيد a هو الذي يحقق هذا القطع.

وإضافة إلى ما سبق، كل عنصر a من مجموعة الأعداد الناطقة يحتوي على ممثل α في A بموجب الخاصية الثالثة التي أشرنا إليها فيما يخص مجموعة الأعداد الناطقة، كما أنه بين عنصرين من مجموعة القطع يوجد عدد لا متناهي من عناصر α تمثل عناصر β . ويرى كفاييس أن العدد الذي يشير إلى المقطع هو عبارة عن نهاية متسلسلة⁽¹⁰³⁾ وهي تعرف بـ $\sqrt{2}$ على أساس أن $\sqrt{2}$ هو أكبر من 1 وأقل من 2 وقد عرفه ديدكند بالمعادلتين التاليتين:

إذا كانت $E = Q$ يمكن اعتبار المقطع التالي:

$$A = \{a \in Q \mid a^2 < 2 \vee a \leq 0\}$$

$$B = \{b \in Q \mid b^2 \geq 2 \vee b > 0\}$$

نلاحظ هنا أن $\sqrt{2}$ عرف من جهة بمجموعة الأعداد الناطقة الأقل منها وعرف بالأعداد الناطقة الأكبر منه.

$$a^2 < 2 < b^2$$

$$a < \sqrt{2} < b$$

لهذا فإن " D " (عدد غير مربع) يقسم الأعداد إلى صنفين لا أول ولا آخر لهما، وقد رمز ديدكند للقطع بالرمز π والذي يعني المقطع $P(coupure)$ في المجموعة \mathbb{R} والمجموعة الناتجة هي عبارة عن جسم $(corps)$ إذا ما أردنا أن نطبق عليه الإجراءات الحسابية الأربعة الخاصة بالأعداد الناطقة فإن الناتج يكون كالتالي: "مجموع مقطعين هو مقطع حيث الفئة المكوّنة من كل الأعداد الناطقة أقل من مجموع عددين ينتميان على التوالي إلى الفئات الأولى للجامعين (2 Somnants) "⁽¹⁰⁴⁾.

ويؤكد كفاييس على أن الانتقال من نسق الأعداد الناطقة إلى نسق الأعداد الحقيقية ناتج عن "القوة الخالقة" $(force\ créatrice)$ لعقولنا، فمجموعة الأعداد اللاناطقة لها نفس

⁽¹⁰³⁾ J. Cavailles : Philosophie mathématique, Op.cit ,p 38.

⁽¹⁰⁴⁾ Ibid, p38.

وجود وترتيب الأعداد الناطقة، ومن جهة ثانية تتميز عنها بمرحلة المنهج الخلاق الذي يتم من خلاله الانتقال من العدد إلى المقطع ومن المقطع إلى العدد الحقيقي.

وهكذا نصل إلى أن ديدكند قد توصل إلى تأسيس الأعداد الحقيقية انطلاقاً من المسلمة (*le postulat de Dedekind*) التي تنص على أن كل الفجوات يجب أن تملأ، أن كل مقطع ينبغي أن يكون له نطاق⁽¹⁰⁵⁾، وما تملأ به هذه الفجوة هو رمز عددي جديد لا ناطق. ولهذا فإن نظرية ديدكند أساسها تكوين الأعداد اللاناطقة وضمها إلى الأعداد الناطقة لتكوين الأعداد الحقيقية⁽¹⁰⁶⁾.

ب - طانيري:

لم يتعرض كفاييس إلى الرياضي طانيري (*Tannery 1848 - 1910*) أثناء التحليل بالرغم أنه أشار إليه في المناهج، وذلك لأنه يرى إسهاماته نوعاً ما مطابقة لنظرية ديدكند ثم وجدت بعدها مستقلة⁽¹⁰⁷⁾، وقد عرض نظريته في كتاب "مقدمة النظرية الدوال لمتغير واحد"^{*} والذي نشره سنة 1886. يؤكد طانيري في مقدمة كتابه أنه طور فكرة عرضها جوزيف برتراند (*Joseph Bertrand 1822-1900*) في كتابه "بحث في الحساب"⁽¹⁰⁸⁾، إذ أنه عرف العدد اللاناطق والذي لم يطلق عليه هذه التسمية بل استعمل كلمة "اللاقياسي"، للتعبير على العدد الذي هو عبارة عن نهاية مشتركة للأعداد القياسية الأكبر والأصغر منه⁽¹⁰⁹⁾، ولهذا فقد توصل إلى أنه العدد الذي يوجد بين عددين ناطقين (قياسيين)، أما عن كيفية التوصل إليه فقد أكد أنه توجد أعداد لا هي طبيعية ولا هي كسرية ولكنها جذرية، وأخرى غير قابلة للقياس وهذا ما أدى إلى إثبات وجودها، وليس هذا فحسب، بل حاول في هذا الكتاب أن يطبق إجراءات الجمع والجداء والقسمة عليها، إذ تعامل معها على أساس أنها أعداد عادية.

⁽¹⁰⁵⁾ برتراند راسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسي أحمد، مؤسسة سجل العرب، 1962، ص 105.

⁽¹⁰⁶⁾ *Louis Couturat : Les principes des mathématiques, George Holm Verlag, New York, 1979, p82.*

⁽¹⁰⁷⁾ *J. Cavallés : Philosophie mathématique, Op.cit, p 36 .*

^{*} *Tannery Jules : Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, Herman, Paris, 1886.*

⁽¹⁰⁸⁾ *Joseph Bertrand : traité d'arithmétique, hachette, Paris, 1849.*

⁽¹⁰⁹⁾ *Ibid, p 203.*

كما اعترف طانيري أنه حاول التوصل إلى مفهوم العدد اللاناطق من مصدره الهندسي، إلا أنه أدرك بعد قراءته لكانتور أن ديدكند طور هذه الفكرة في كتابه "الأعداد المتصلة واللاناطقة". فما الجديد الذي جاء به طانيري فيما يخص الأعداد اللاناطقة؟ فالأعداد الناطقة عند طانيري أعداد صحيحة، بما فيها الصفر، والكسور التي حدودها صحيحة، والعدد الناطق يمكن أن يكون موجبا أو سالبا، يقول طانيري "إذا افترضنا صحة الإجراءات الأولية، الجمع والطرح، الجداء، القسمة المطبقة سابقا في الحساب أو الجبر، وطبقناها على الأعداد الناطقة الموجبة أو السالبة يمكن الوصول إلى فئة جديدة من الأعداد هي اللاناطقة أو اللاقياسية"⁽¹¹⁰⁾.

لنفترض المعادلة التالية: $X^2-3=0$

لا يوجد عدد يحقق هذه المعادلة، وبالتالي فهي تسمح بتقسيم الأعداد الناطقة إلى فئتين:

- الفئة الأولى: A_1 تحتوي على العناصر التي مربعها أقل من 3 ($-\sqrt{3}$).
- الفئة الثانية: A_2 تحتوي على العناصر التي مربعها أكبر من 3 ($+\sqrt{3}$).

وكل عدد من الأولى أقل من كل عدد من A_2 ، وكل عدد من A_2 أكبر من كل عدد من A_1 ، فإذا كان لدينا عدنان ناطقان موجبان، فالأكبر هو الذي له المربع أكبر، ولهذا ففي الفئة الأولى لا يوجد عدد هو أكبر من الأعداد الأخرى في نفس الفئة، وفي الفئة A_2 لا يوجد عدد أقل من الأعداد الأخرى في نفس الفئة.

"لنفترض" العدد a من الفئة 1 وأكبر أعدادها:

- بما أن أعداد الفئة A_1 أقل من جذر 3 (مربع الأعداد أقل من 3)

- بما أن $a \in A_1$ إذن $a^2 < 3$

- وبما أن (فرضيا) a أكبر عدد في الفئة الأولى أي A_1

إذن $(a+h)$ هو أكبر من a الذي ينتمي إلى A_2

ومنه لدينا (افتراضا) أن h عدد ناطق موجب حيث: $(a+h)^2 > 3$ وبحساب الفرق:

$$(a+h)^2 - a^2 = a^2 + h^2 + 2ah - a^2$$

⁽¹¹⁰⁾ Tannery : Op.cit, p 1.

$$= h^2 + 2ah$$

$$= h(2a + h)$$

وهذه النتيجة $[h(2a + h)]$ يمكننا أن نفترض أنها أقل من العدد الناطق e :

$$0 < h < \frac{e}{2a+1}, h < 1$$

ويمكن اختيار h حيث الفرق يكون أقل من $3 - a^2$ لكن $3 - a^2 < (a+h)^2 - a^2$

وهذا يعني $(a+h) < 3$

هنا نصل إلى تناقض، وهذا يعني أنه لا يوجد عدد أكبر من أي عدد آخر في نفس الفئة A_1 ، ولا عدد أقل من الأعداد الأخرى في نفس الفئة A_2 .

وانطلاقاً مما سبق، فإن الأعداد الناطقة الموجبة والسالبة، تنقسم إلى قسمين كل عدد من الأولى يكون أقل من كل عدد من الثانية، فلا يوجد في الأولى عدد أكبر من الأعداد الأخرى في نفس الفئة، ولا يوجد في الثانية عدد أقل من الأعداد الأخرى في نفس الفئة، فهذا يؤدي إلى "تحديد العدد اللاناطق حيث الفئة A_1 هي فئة السفلى بالنسبة للعدد الناطق والفئة الثانية هي العليا بالنسبة له" (111). والعدد اللاناطق يمكن أن يمثل بحرف (*une lettre*) التي لا تدل على شيء إلا أنها وسيلة لتصنيف الأعداد الناطقة.

والعدد اللاناطق A هو أكبر من كل عدد ناطق للفئة السفلى (A_1)، و A هو أقل من كل عدد ناطق من الفئة العليا (A_2). ويمكن القول أن A منحصر بين عددين ناطقين الأول ينتمي إلى الفئة A_1 والثاني إلى الفئة A_2 ونستخدم الرموز \langle, \rangle في مكان أقل وأكبر (112).

ومن بين الملاحظات التي وجهت إلى نظرية طانيري، ملاحظة ديدكند الذي يرى أن طانيري اعتبر إثبات برتراند أساس أو قاعدة لأعداد نظرية القطع، بل اعتبرها أفكاراً كانت موجودة من قبل.

لكن ما نؤكد عليه هو أن كل من ديدكند و طانيري وضع الأسس الأولى لمجموعة الأعداد اللاناطقة.

ثالثاً - منهج كانتور، هاين:

(111) Louis Couturat: *les principes des mathematiques*, Op.cit.p84.

(112) Tannery, Op.cit, p3.

دوارد هاين (1821-1881 Edouard Heine)، شارل مراي (Charles Méray 1835-1911)، وكذلك جورج كانتور أسسوا لنظرية الأعداد الحقيقية معتمدين في ذلك على متتاليات كوشي، وسنركز على كانتور لأن ما جاء به هاين أكده كانتور، أما "مراي" فنشير إليه فيما بعد، على أساس أن **كفاييس** لم يؤكد عليه، بل أكد فقط على كانتور وهاين.

فما هي إضافات كانتور فيما يخص الأعداد الحقيقية ؟

في 1872 نشر كانتور مقالا بعنوان "امتداد قانون نظرية المتسلسلات المثلثية"، عرض فيه نظريته وشروحاته حول المقادير الكبيرة، كما أشار في هذه المقالة إلى البناء المتقن للرياضي هاين فيما يخص تعريفه للأعداد الحقيقية، وطور نظرية فيرشتراس بتقديمه للمتتاليات الأساسية وأكد على ضرورة وأهمية التمييز بين الأنساق التالية⁽¹¹³⁾:

- النسق A للأعداد الناطقة.
- النسق B نهايات المتتاليات للأعداد الناطقة.
- النسق C وهو نسق نتوصل إليه من خلال نهايات المتتاليات للأنساق A و B .
- النسقان B و C يمكن اعتبارهما متطابقين، ومن المهم الإبقاء على التمييز المجرى بينهما.
- النسق A أدى إلى تأسيس النسق B ، والنسق A و B معا يؤديان إلى نشأة النسق C والأنساق A ، B و C تؤدي إلى النسق D وهكذا إلى أن نصل إلى النسق L للمقادير العددية.

وإذا كانت لدينا متسلسلة لا متناهية: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ مكوّنة من أعداد مختارة من A و B و D تنتمي كلها إلى النسق A ، فهذه المتسلسلة تتكون: $a_n - a_{n+m}$ ، هي لا متناهية الصغر في حالة تزايد n مهما كانت m ، ونهاية المتسلسلة محددة من طرف n ⁽¹¹⁴⁾.

وبتعبير آخر إذا أخذنا e (ناطق موجب) فإنه لدينا:

$$A_{n+m} - a_n < e \rightarrow (1)$$

ونقول هنا أن المتسلسلة $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ لها نهاية محددة هي b .

⁽¹¹³⁾ Jean.Pierre Belna: La notion de nombre chez Dedekind, cantor, Frege, Librairie J.Vrin, 1996,p132.

⁽¹¹⁴⁾ J.Cavailles: Philosophie mathématique, Op.cit , p 41.

وإذا كانت لدينا متسلسلة ثانية:

$$(2) \rightarrow a'_1, a'_2, a'_3, \dots, a'_n \dots$$
 لها نهاية محددة هي b'

فإننا نلاحظ أن (1) والتي نهايتها b و(2) نهايتها b' تحققان إحدى العلاقات الثلاثة

التالية:

- $a_n - a'_n$ هي لا متناهية في الصغر إذا كانت n تتزايد.
- $a_n - a'_n$ هي أكبر من مقدار موجب ناطق (e).
- $a_n - a'_n$ تبقى أصغر من مقدار سالب ناطق (e-).

في الحالة الأولى: $b = b'$

في الحالة الثانية: $b > b'$

في الحالة الثالثة: $b < b'$

والمتسلسلة (1) نهايتها b ليس لها مع عدد ناطق a إلا واحدة من العلاقات التالية:

- $a_n - a$ لا متناهي في الصفر و n متزايد.
- $a_n - a$ أكبر من مقدار موجب ناطق e.
- $a_n - a$ أصغر من مقدار سالب ناطق - e.

كما أنه في حالة وجود A و B يمكن أن نعاذل بين a و b والاتجاه يكون من a نحو b والعكس غير صحيح، كما يمكن أن نعاذل بين b و c والعكس صحيح لأنه يمكن أن نتعامل مع b و c على أساس أنهما متطابقان، وفي هذا المجال، كانت هناك مراسلات بين كانتور وديكند حول ضرورة التمييز الصوري بين B و C ففي مراسلة في ديسمبر 1878 أكد كانتور لديكند: "بالنسبة للتمييز الصوري للمقادير العددية ذات ترتيب مختلف، ومن خلالها أردت التعبير عن مختلف الطرق المختلفة لتعريفها، فليس هناك خطر عندما أردت تمديد ميدان الأعداد الحقيقية، أقول بوضوح أن كل عدد الذي أرمز ليه بـ C هو مساو للعدد b "⁽¹¹⁵⁾.

وبناء على ما سبق، هاین اهتم بالدوال الخاصة (fonctions spéciales)، وبالتحليل الحقيقي (analyse réelle) الذي يدرس المجموعات الحقيقية، والدوال ذات

⁽¹¹⁵⁾ Ibid, p 220.

متغيرات حقيقية، المتتاليات ونهايتها، الاشتقاق والتكامل، وكان دورهم اهمتم بالدوال والمتتاليات ونهايتها، وهذا ما أدى إلى وضع أسس لتكوين الأعداد الحقيقية.

وأخيرا مما سبق نستنتج ما يلي:

- كانت بداية **جان كفاييس** بنظرية المجموعات التي تزامنت وأزمة الأسس في الرياضيات، هذه الأزمة ظهورها تزامن واكتشاف اللامتناهي، أو لنقل من أسبابها، مما جعله يركز على أهم مراحل تطور هذا المفهوم، الذي أحدث تغييرا جذريا في الرياضيات. كما أدرك كفاييس أن اللامتناهي لم يكتشف دفعة واحدة، بل بالتدرج من اللامتناهي الفلسفي الميتافيزيقي إلى اللامتناهي الرياضي.

- أدرك **كفاييس** أن اللامتناهي لم يكتشف دفعة واحدة، بل بالتدرج من اللامتناهي الفلسفي الميتافيزيقي إلى اللامتناهي الرياضي، ولهذا كي يصل إلى حقيقة نظرية المجموعات اضطر إلى العودة إلى بدايات هذه النظرية، وهذا ما جعله يؤكد وجود بواذر أولى للنظرية من الفكر اليوناني إلى كانتور.

- بناء على الاستنتاج السابق، أثبت **كفاييس** تراكمية المعرفة الرياضية، فكل رياضي بنى نظريته انطلاقا من النظريات السابقة عليه، فيطور إن كانت صحيحة، ويوضح إن كانت غامضة، و يبسط إن كانت معقدة.

- توصل الرياضيون إلى اكتشاف اللامتناهي، وأثبت كفاييس أن اللامتناهي نوعان: لامتناهي فعلي ولامتناهي ممكن، لامتناهي فلسفي وآخر رياضي، فقد بدأ فلسفيا وبقي محافظا على هذه الخاصية في العصور الحديثة، إلا أن هذا لم يمنع وجود تيريرات عقلية تثبت وجوده و هذا ما جعله رياضيا، و لهذا يمكن القول أن اللامتناهي بدا فلسفيا وانتهى رياضيا.

- من عوامل نشأة نظرية المجموعات، اكتشاف الأعداد الحقيقية إذ توصل الرياضيون من خلال أبحاثهم إلى الإقرار بوجود أعداد غير التي تعودنا عليها، وهي الأعداد اللاناطقة والتي أدت دورها إلى تأسيس مجموعة الأعداد الحقيقية، التي تشمل بذاتها على الأعداد المركبة وغير القابلة للقياس.

- تأثير الهندسة على التحليل، وهذا ما أدى إلى اكتشاف نظرية الدوال والمتتاليات المثلثية.

- كان للكثير من الرياضيين إسهامات في تأسيس نظرية المجموعات و لعل نظرية القطع

عند ديدكندو طانيري كانت حجة عقلية قوية لإثبات وجود أعداد حقيقية.

حسب **كفاييس** كانت هذه أهم الإسهامات، والعوامل التي أدت إلى بداية ظهور المجموعات، و ظهورها راجع إلى تطور الحساب والجبر وكذلك التحليل، وليس هذا فحسب بل تمّ تأكيد وجود علاقة بين هذه الفروع الرياضية والعلوم الأخرى كالفيزياء وعلم الفلك، وهو ما يثبت وجود تكامل بين مختلف العلوم.

الفصل الثاني

الاكتشاف الكانتوري لنظرية المجموعات

المبحث الأول : المرحلة الأولى للاكتشاف للاكتشاف (1873-1879)

المبحث الثاني : المرحلة الثانية للاكتشاف (1879-1883)

المبحث الثالث : النسقية (*la systématisation*)

كان التحليل طوال القرن 18 يهدف إلى قطع العلاقة التي كانت تربطه بالحدس، و لهذا السبب تمّ وضع مجموعة من مناهج، نتج عن تطبيقها نظرية المجموعات التي تعتبر امتدادا للأبحاث الأولى حول متسلسلات فورييه، بل أعمّ من ذلك هي امتداد للتطور التحليلي في القرن 18. ويرى كفاييس أنه من الضروري و قبل الحديث عن كانتور و اكتشافاته، على أساس انه مؤسس النظرية، الإشارة إلى دور كل من بولزانو و ديدكند في إرساء قواعد نظرية المجموعات، من خلال عمليهما "مفارقات اللامتاهي" و مقال ديدكند الذي سبق مراسلاته مع كانتور ولم ينشر "قضايا عامة على الفضاءات"⁽²⁷⁾

النصان عبارة عن مقدمة لمؤلف كانتور و هذه المقدمة أشارت إلى مرحلتين في الاكتشاف ما هما؟ و فيما تتمثل إسهامات بولزانو و ديدكند و من بعدهما كانتور؟ و لماذا تنسب النظرية إلى هذا الرياضي الألماني؟

المبحث الأول: المرحلة الأولى للاكتشاف (1873-1879)* :

المرحلة الأولى السائدة من 1873 إلى 1884 تميزت بارتباط الاكتشاف الكانتوري بالتحليل، باستعمال مجموعات من نقاط أو أعداد لا مجموعات مجردة، وكذا بالتطبيقات التحليلية (وهي الجزء المهم)، وإذا وجدت كائنات جديدة من العناصر، فإن تبرير وجودها سيكون في هذا الفرع من نظرية الدوال والتمثل في دراسة مجموعات النقاط.

وهذه المرحلة تنقسم إلى:

• المرحلة الأولى: و تنحصر بين 1873 و 1878، إذ اكتشف كانتور قوتين

(*deux puissances*) وميز بينهما وهذا ما تمّ في رسائل ديدكند - كانتور وفي

مذكرة نشرت سنة 1873 حول خاصية النسق لكل الأعداد الجبرية الحقيقية⁽²⁸⁾:

1 - القابل للعدّ (*dénombrable*)

2 - المستمر (*Continu*)

*لقد حدد كفاييس مراحل الفكر الرياضي عند كانتور من خلال المقال:

Jean Cavailles :Les œuvres complètes de George Cantor,Revue philosophique de la France et de l'étranger,dirigée par Lévy Bruhl,année 57,N^o7-8,librairie Félix Alcan,Juillet,Décembre 1932, p437.

⁽²⁷⁾ J Cavailles :philosophie mathématique, Op.cit, p 67.

⁽²⁸⁾ P C Noguès : Op.cit,p30.

• المرحلة الثانية: و تمتد من نهاية المرحلة الأولى أي سنة 1878 إلى غاية 1884، عمق كانتور في هذه المرحلة مفهوم المستمر أو المتصل وأسس نظرية الأعداد المتصاعدة (*transfinis*)، وهذه المرحلة انتهت بعرضه لمنهج القطر (*le procédé de diagonale*)، بالرغم أن نشره كان سنة 1890.

أولا - لا معدودية الأعداد الحقيقية:

أ- تعريف المعدودية: *Dénombrabilité*

نقول عن E أنه قابل للعدّ أو عدود، إذا كان من الممكن أن نعدّ عناصر المجموعة، ونضعها في صف ونرقم عناصر E دون تكرار أي عنصر باستعمال الأعداد الطبيعية⁽²⁹⁾، وهذا يعني أن مجموعة الأعداد الطبيعية هي عدودة، وكل مجموعة عدودة هي لا متناهية، لأنها مكافئة لـ: \mathbb{N} و \mathbb{N} لا متناهية، لكن العكس غير صحيح.

لكن هل توجد مجموعات لا متناهية ولكنها غير عدودة؟ هذا ما نريد الإجابة عليه فيما يلي:

في سنة 1873، تساءل كانتور، إذا كانت مجموعة الأعداد الحقيقية يمكن أن توضع في شكل متسلسلة بسيطة: "إذا كانت لدينا المجموعة (x_1) لكل الكائنات الصحيحة الموجبة، ونمثّلها بالرمز n ، وإذا كانت لدينا مجموعة المقادير العددية الحقيقية الموجبة x_1 ونرمز لها بـ x ، فإن السؤال هو معرفة ما إذا كانت n تقابل x ، حيث كل عنصر من إحدى المجموعتين يقابله عنصر واحد وواحد فقط من الأخرى"⁽³⁰⁾.

قدم كانتور حلا حدسيا: "لأول نظرة يمكن القول أن هذا غير ممكن لأن n هو مركب من أجزاء منفصلة غير متصلة، بينما x هي متصلة (يعني أن n لها علاقة بالأعداد و x لها علاقة بالهندسة)، والقول بعدم وجود تقابل بين x و n لا أجد مبررا لهذا الحكم"⁽³¹⁾.

⁽²⁹⁾ Marcel Boll : *Les deux infinis*, Larousse, Paris, p222.

⁽³⁰⁾ *Correspondance Dedekind-Cantor: lettre 29 Novembre 1873, dans J .Cavaillès, philosophie mathématique ,Op.cit, p 187.*

⁽³¹⁾ J .Cavaillès : *philosophie mathématique ,Op.cit,p194.*

ثم حاول تقديم حل مبرهن: هل يمكن أن نستنتج أن n لا يمكن أن يقابل واحد بواحد مع المجموعة $(\frac{p}{q})$ لكل الأعداد الناطقة $\frac{p}{q}$ ؟ بالرغم أنه ليس من الصعب أن نبرهن أن n يمكن أن تقابل واحد بواحد ليس فقط مع هذه المجموعة لكن مع المجموعة الأعم: a_{n_1, n_2, \dots, n_g} حيث n_1, n_2, \dots, n_g هي أعداد طبيعية موجبة غير محدودة في العدد g .

وقد ردّ ديدكند على رسالة كانتور: "... أما السؤال الأول فلم أستطع التوصل إلى الإجابة عليه، لكن في نفس الوقت صغت وبرهنت على أن مجموعة كل الأعداد الجبرية* يمكن أن تقابل المجموعة n مجموعة الأعداد الطبيعية (علاقة واحد بواحد)"⁽³²⁾.

لقد بيّن ديدكند أنّ التقابل لا يكون بين مجموعة الأعداد الطبيعية والناطقة، بل بين الأولى ومجموعة الأعداد الجبرية* و من تمّ فالمجموعة الأخيرة يمكن أن توضع على شكل متتالية بسيطة و بصورة عامة، كل مجموعة عناصرها: $a_{n_1, n_2, n_3, \dots}$ حيث n_1, n_2, n_3, \dots هي رموز الأعداد الطبيعية المتناهية، يمكن أن توضع في شكل متتالية.

أما التقابل بين الأعداد الطبيعية و الحقيقية فهذا غير ممكن، فمجموعة الأعداد الموجبة $0 < 1$ لا يمكن أن تقابل واحد بواحد بمجموعة (n) ⁽³³⁾.

ب - لامعدودية الأعداد الحقيقية:

يجيب كانتور: "إذا كنت قد طرحت عليك هذا السؤال، فهذا لأنني طرحت منذ سنوات، و كنت دائماً أتساءل إن كانت الصعوبة هي ذات طبيعة ذاتية أو أنه إشكال بمعنى الكلمة و أنا أوافقك الرأي أن السؤال الأول لا أهمية له، و لا يستحق البحث و لكن سيكون جميلاً لو بحثنا عن الإجابة عنه. ونريد من هذا السؤال إيجاد برهنة جديدة لنظرية "ليوفيل" (*Liouville* 1809-1882) التي تثبت وجود الأعداد المتعالية"⁽³⁴⁾.

* الأعداد الجبرية: *nombres algébriques* هي تلك التي تكون جذراً للمعادلة الجبرية (كثير حدود $\neq 0$)، وقد نكون هذه الأعداد صحيحة أو ناطقة. و كل عدد ناطق هو جبري لأن حاصل القسمة $\frac{p}{q}$ هو جذر المعادلة $qx - p = 0$ و العدد "i" هو جبري لأنه جذر المعادلة $x^2 + 1 = 0$.

(6) *J. Cavallès : philosophie mathématique , Op.cit, p195.*

(7) *Ibid, p189.*

(34) *Ibid, p190.*

فقد طرح كانتور إشكالية قابلية العدّ لمجموعة الأعداد الحقيقية، كي يبرهن على نظرية ليوفيل، فهو يؤكد من خلال ردّه على ديدكند، أن الهدف من طرح هذه الإشكالية أو السؤال هو إعطاء برهنة جديدة لنظرية ليوفيل على أنه توجد أعداد متعالية، ومن ثمّ فإنّ هذه الدراسة لم تخرج عن نطاق التحليل، وبرهنته قائمة أساسا على ضم أو دمج المجالات لكي يبرهن على لا معدودية الأعداد الحقيقية فالمسألة إذن لها علاقة بالتحليل و البرهنة على نظريات سابقة.

فقد برهن ليوفيل* سنة 1844 على وجود أعداد حقيقية يطلق عليها الأعداد المتعالية (مثل π)، لا يمكن أن تكون جذرا أو حلا لمعادلة كثيرة الحدود، ذات معاملات ناطقة، إلا أن بداية الأبحاث حولها كانت في بداية القرن 19، إذ وجد رياضيون من أطلق عليها اسم "الأعداد الغريبة" (*les nombres mystérieux*) ك : $i, c, e, n, -1$ ⁽³⁵⁾ . $i^2 = i$ و $i = \sqrt{i}$

والجديد الذي جاء به "ليوفيل" هو أنه أول من وضع برهنة للعدد المتصاعد*. وفي رسالة بتاريخ 7 ديسمبر 1873، يؤكد كانتور لديدكند أنه توّصل إلى البرهنة على حل الإشكالية التي طرحها في الرسالتين السابقتين.

والبرهنة هي كالتالي: لنفترض $\omega < 1$ ^{**}

والمتتالية: $I: \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$

حيث: $\omega_1 > \omega_2$

$\omega_2 > \omega_3 \dots \dots$

⁽³⁵⁾ Michel waldschmidt : *les debuts de la théorie des nombres transcendants*(à l'occasion du centenaire de la transcendance de π). *Cahiers séminaires d'histoire des mathématique*, 1983, p 94. http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1983_4_93_0

* وقد نشرت أبحاثه في المجلتين:

1- *les comptes rendus de l'académie des sciences* :1844 ,T18, pages , 883-886.

2- "*journal des mathématique pures et appliquées, tome XVI, 1851, Paris*

$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10k!} = 0.110001$. ومن نتائج أبحاثه ثابت "ليوفيل":

* مصطلح المتصاعد استخدم لأول مرة من طرف ليبتز سنة 1704.

** عدد أصلي (*cardinal*).

وإذا وضعنا: $\omega_1 = \omega_1^1$

$$w_2 = w_1^2$$

$$\omega_1 - \omega_1^3 \dots \dots$$

نتوصل إلى المتتالية (a) حيث:

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n \dots -1$$

وفي المتتالية المتبقية نجد :

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n \dots -2$$

$$\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \dots, \omega_3^n \dots -3$$

وهكذا، وما يميّز هذه المتتاليات أن حدودها تتزايد من اليسار نحو اليمين حيث:

$$W_k^l < W_k^{l+1}. \text{ نختار مجالاً } [p\dots q] \text{ حيث لا يوجد عنصر من المتتالية (1) تنتمي إليه.}$$

إذن هذا المجال يكون ضمن مجال $[W_1^1 \dots W_1^2]$ ، فيمكن أن تكون عناصر المتتاليات

(2) و(3) خارج هذا المجال، لكن، يجب أن تكون هناك متتالية غير المتتاليات السابقة،

ولتكن المتتالية k حيث كل حدودها لا توجد خارج $[p\dots q]$ ، وإلا الأعداد التي توجد داخل

المجال لا تكون محتواة في I ، وهذا عكس الفرضية.

يمكن تحديد داخل المجال $[p\dots q]$ مجالاً آخر: $[p'\dots q']$ حيث حدود المتتالية k تكون

خارجه، ثم نصل إلى المتتالية k' حيث حدودها كلها لا توجد خارج المجال $[p'\dots q']$ ثم

نختار مجالاً من المجال السابق وليكن المجال $[p''\dots q'']$ حيث عناصر المتتالية k' تكون

خارج هذا المجال وهكذا... ومن هنا يمكن تكوين متتالية لا متناهية من المجالات:

$$[p\dots q], [p'\dots q'], [p''\dots q''], \dots$$

وكل مجال يحتوي على المجالات التي تتبعها، وبتعبير آخر كل مجال محتوي في

المجال الذي يسبقه.

من خلال ما سبق نربط بين هذه المجالات والمتتاليات 1، 2، 3 ...

- حدود المتتالية 1، 2، 3... والمتتالية k^{-1} هي خارجة عن المجال $[p\dots q]$.

- حدود المتتالية k ، ...، k^{-1} هي خارج المجال $[p'\dots q']$

- حدود المتتالية k' ... k'^{-1} هي خارج المجال $[p''\dots q'']$

لكن يوجد على الأقل عدد h وليكن h داخل كل هذه المجالات، فنلاحظ أن هذا العدد h

الذي هو: $0 < h < 1$ لا يمكن أن ينتمي إلى المتتاليات (1) و(2) ... (n) وهكذا....

وانطلاقاً من الفرضية التالية: كل الأعداد الأقل من 1 والأكثر من 0 هي محتواة في I ، نصل إلى نتيجة عكسية (*opposée*) وهو أن العدد المحدد $h > 0$ لا ينتمي إلى I ، ومنه فالفرضية غير صحيحة. وبهذا يصل كانتور إلى السبب الذي يمنع المجموعة (X) من أن تتقابل مع المجموعة (n).

والنتيجة المبرهنة التي خلص إليها كانتور تتمثل في إثبات أن المجموعة العدودة هي تلك التي تكون في علاقة تقابل مع متتالية الأعداد الطبيعية، بينما الأعداد الحقيقية هي غير عدودة لأنها لا تقابل الأعداد الطبيعية.

ثانياً - مفهوم المتصل:

أ - اللامتناهي و المتصل:

بعد إشكالية لا معدودية الأعداد الحقيقية، طرح كفاييس إشكالا آخر تمثل في مسألة الانتقال من المتصل البسيط إلى المتصل ن أبعاد. ففي رسالة وجهها إلى ديدكند بتاريخ 5 جانفي 1874⁽³⁶⁾، طرح فيها السؤال التالي: هل يمكن أن تكون لمساحة (مثلا مربع) علاقة واحد بواحد مع منحنى كقطعة مستقيم، حيث كل نقطة من المساحة تقابل نقطة من المنحنى والعكس؟ وبتعبير آخر فإن كانتور طرح إشكالية إمكانية وجود علاقة واحد بواحد بين المربع والمستقيم، فهل يمكن الربط بينهما؟ و هو السؤال الذي اعتبره رياضيو برلين غامضا و غير معقول، لأنه لا يمكن الربط بين متغيرين منفصلين⁽³⁷⁾.

ولحل هذه المسألة كانت هناك مراسلات مستمرة بين كانتور وديكند، ولم يتم التوصل إلى الحل إلا سنة 1877، حيث الإجابة على السؤال المطروح هي أن عدد نقاط قطعة مستقيم طولها 1، هو نفسه عدد نقاط المربع و الذي ضلعه يساوي 1، و هي الإجابة التي تناقض المفاهيم السابقة السائدة حول المساواة و الاحتواء، لأن عدد نقاط المربع يجب أن يكون أقل من عدد نقاط المستقيم الذي يساوي 1 على أساس أن هذا المستقيم و الذي هو ضلع المربع نحتوى في المربع، و من جهة أخرى فهذه النتيجة تشكك في مفهوم النقطة و

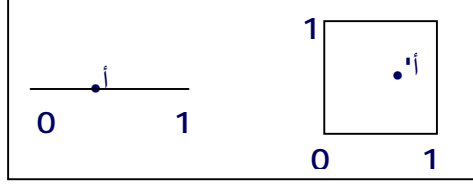
⁽¹⁰⁾ J. Cavallès : *philosophie mathématique* , Op.cit,p191.

⁽¹¹⁾ Ibid,196.

⁽¹²⁾ Henri Volken : « Je le vois, mais je ne le crois pas... » *Preuves et vérités dans les sciences formelles*, Octobre 2003.

<http://www.unil.ch/webdav/site/ima/shared/CahiersIMA/cahier34.pdf>

علاقتها بالمستقيم و المربع ، و لهذا فان كانتور نفسه تفاجأ من هذه الاجابة و لكنه اضطر لقبولها و لهذا خاطب ديدكند بقوله: "أراه ولكن لا أراه ولكن لا أصدق" (12).



و لهذا برهن على أن المتصل عند (ن) أبعاد هو مكافئ للمتصل البسيط:

ليكن (y) متغير يأخذ كل قيم المجال (0,....1) ما عدا الصفر أي $[0, \dots, 1]$ ، (x)

متغير يأخذ قيم المجال (0,....1) دون استثناء أي $[0, \dots, 1]$ لدينا: $y \sim x$

إن برهنة النظرية تكون عن طريق المنحنى حيث فواصله ابتداء من 0 تمثل المقدار x

و الترتيب تمثل المقدار y ، هذا المنحنى مركب من عدد لا متناهي من قطع المستقيمت

$a^y b^y, \dots, a''b'', a'b', a b$ ، هذه القطع تكون متوازية وتصبح لا متناهية الصغر

كلما اقترب r نحو اللانهاية، تقترب حينها من النقطة المعزولة (*isolée*) (c). لكن النقاط

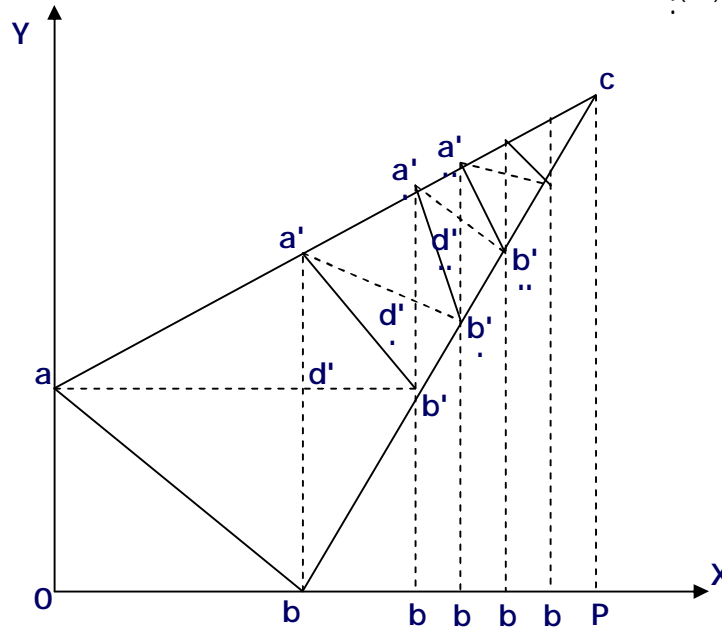
التي هي عبارة عن أطراف $A^y, \dots, a, a, a, \dots$ هي جزء من المنحنى بينما الأطراف

$\dots, \hat{b}, \hat{b}, \hat{b}$ هي خارج المنحنى.

النتيجة التي نتوصل إليها: بينما الفواصل (x) تأخذ كل القيم من 0 إلى 1، فإن

الترتيب (y) تأخذها أيضا باستثناء (0).

الشكل (13):



(13) Cantor :sur les fondements de la théorie des ensemble
transfinis, Editions
jacques Gabay, 1898,p321

الأطوال الممثلة في الشكل:

$$\overline{op} = \overline{pc} = 1$$

$$\overline{ob} = \overline{oa} = \overline{pp} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{bb_1} = \frac{1}{4}$$

$$b_1 b_2 = \frac{1}{8}$$

$$\overline{b_2 b_3} = \frac{1}{16}$$

$$\overline{a^y d^y} = \overline{d^{(y)} d^{(y)}} = \overline{by - 1by} = \frac{1}{2y+1}$$

وبهذا فإن كانتور ميّز بين نوعين من اللامتناهي:

- اللامتناهي العدود واللامتناهي المتصل أو المستمر، ومن ثمّ فقد ردّ المجموعتين
(المتصل البسيط والمتصل نحو ن أبعاد)، إلى نفس اللامتناهي.

- ميّز بين اللامتناهي في الرياضيات الكلاسيكية واللامتناهي في نظرية
المجموعات، فأما الأول هو "لا محدود" وهو مقدار متغير متزايد إلى ما بعد النهاية، بينما
اللامتناهي بمعنى الكلمة هو اللامتناهي الحالي، موضوع تام ومحدد مثله مثل المواضيع
المنتهية أو المتناهية⁽¹⁴⁾.

فنتيجة الأبحاث التي قام بها ما بين 1873 و 1877*، اللامتناهي اكتسب
خصائص ومميزات وأصبح موضوعاً لبراهين رياضية. يقول **كفاييس**: "اللامتناهي الجديد
أخضع للبرهان الرياضي... فالرياضيات هذه المرة استبعدت من اللامتناهي اللامحدود نحو
نظرية اللامتناهي المؤسسة"⁽¹⁵⁾.

(14) P C Noguès : Op.cit, p31.

*1873: معدودية الأعداد الحقيقية ، 1877: مفهوم المتصل.

(15) J. Cavaillès : philosophie mathématique, Op.cit, p 73.

ب - مفهوم القوة و التكافؤ:

وعلى أساس الأبحاث السابقة، توصل كانتور إلى مفهوم القوة والتكافؤ. فإذا كانت مجموعتان محددتان M و N ، عناصرهما مترابطة واحد بآخر من خلال علاقة واحد بواحد، فهذا يعني أن لهما نفس القوة أو أنهما متكافئتان أي بينهما تقابل⁽¹⁶⁾، والتقابل هو ما كان غامرا ومتباينا في آن واحد:

الغامر: " $y \in B, \exists x \in A / f(x)=y$ "

المتباين: " $x_1 \in A, x_2 \in A / x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ "

ومنه فالتقابل يعني تحقيق الشروط الثلاثة التالية: الانعكاسية، التناظرية، المتعددية.

أما إذا كانت M و N ليس لهما نفس القوة، أو أن M لها قوة مساوية لقوة جزء من N ، أو N قوتها هي قوة جزء من M ، فإنه في الحالة الأولى قوة M هي الأصغر وفي الحالة الثانية قوة M أكبر من N . وبهذا فإن كانتور قد حلّ مسألة أخرى واجهته وهي "قابلية المقارنة"⁽¹⁷⁾، وتتمثل في القدرة على المقارنة بين مجموعتين، حيث نتوصل إلى ترتيب القوى. إلا أن كانتور في هذه المسألة لم ينتبه إلى أنه من الضروري أولاً البرهنة على وجود علاقة بين المجموعتين المقارنتين، ثم بعدها المقارنة بينهما، والعلاقة هذه ليست إلا إثبات وجود تقابل بين المجموعتين سواء كانتا M أو N أو جزء من M و N أو جزء من N و M ، كذلك لم يحدد كانتور إن كانت M و N متناهيتين أو لا متناهيتين. ومنه نتساءل هل نظريته تطبق على المجموعات المنتهية فحسب؟

كذلك طرح كانتور مسألة المتصل، فإذا ما رتبنا حسب القوة مجموعات تحتوي على عدد لامتناهي من النقاط، فإن عدد فئات المجموعات هو متناهي ويساوي العدد 2، وهذا يعني أن نقوم بعملية ردّ المجموعات اللامتناهية إما إلى قوة المعدود أو إلى المتصل وهي النظرية التي لم يستطع كانتور إثباتها من خلال أعماله⁽¹⁸⁾.

المبحث الثاني: المرحلة الثانية للاكتشاف (1879-1883)

لقد ركز كفاييس في هذه المرحلة على المذكرات: "حول المجموعات اللامتناهية والخطية من النقاط" من 1879 إلى غاية 1883، وكذا على مراسلات كانتور ديكند.

⁽¹⁶⁾ Ibid, p77.

⁽¹⁷⁾ J P Belna : Op.cit, p157.

⁽¹⁸⁾ P C Noguès : Op.cit, p32.

أولاً - منهج الاشتقاق:

لقد عاد كانتور إلى مسألة المتصل ثنائية، ولحلّها وظف منهج الاشتقاق المستعمل في المتسلسلات المثالية، فمجموعة المشتق كمجموعة معطاة ليست حكرًا على المجموعات الخطية، بل تطبق على المجموعات ذات بعدين، ثلاث أو ن أبعاد متصلة أو منفصلة. ومشتق مجموعة النقاط p هو مجموعة النقاط التي لها خاصية الالتقاء عند نقطة حدّ (*limite*) p سواء كانت هذه النقطة الحدّ تنتمي إلى p أو لا⁽¹⁹⁾، ومشتق p هو مجموعة جديدة p^1 ، ومشتق p^1 هو مجموعة ثانية للمشتق و هي p^2 وهكذا... إلى أن نصل إلى p^g .

فالرياضي يميّز بين نوعين من المجموعات، تكون من النوع الأول إذا كان مشتقها ن فارغ، أو خال (أي أن ن منته)، أما إذا كان المشتق غير فارغ فهي من النوع الثاني⁽²⁰⁾. فأما المجموعات التي تنتمي إلى النوع الأول فهي عدودة (قابلة للعدّ)، بينما المجموعات التي تنتمي إلى النوع الثاني منها العدودة كمجموعة الأعداد الناطقة، ومنها المتصلة كالمجال $[0, 1]$ ، ولقد اهتم كانتور بدراسة النوع الثاني من المجموعات حتى يتوصل إلى خصائصها ويميزها عن مجموعة النوع الأول، ولم يتسن له ذلك إلا بالاعتماد على مفهوم الاشتقاق وتمديده نحو اللامتناهي، فالمشتق اللامتناهي ورمزه p^∞ للمجموعة p هو تقاطع مشتقات ذات ترتيب متناهي.

فمن p^∞ نتحصل على $p^{\infty+1}$ ، $p^{\infty+2}$... وبالتقاطع نتحصل على p^{2^∞} ، p^{n^∞} ، وهذا يعني أن امتداد منهج الاشتقاق يؤدي إلى امتداد موازي للعدّ، فبعد الأعداد المتناهية $1, 2, \dots$ ، نجد رموزًا متصاعدة ∞ ، $\infty+1$ ، $\infty+2$ ، \dots ، 2^∞ ، \dots ، n^∞ ، \dots ، ∞^∞ ... وهذه الرموز متصاعدة.

فالرموز المتصاعدة هي ضرورية لترقيم مراحل منهج الاشتقاق، يقول عنها كانتور: "تلاحظ إذن جيل جدلي للتصورات التي تقودنا دائما نحو الأبعد، ومتحررة من كل تعسف ضروري في ذاته"⁽²¹⁾.

⁽¹⁹⁾ Georges cantor : sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, Op.cit, p 351.

⁽²⁰⁾ J. Cavaillès : philosophie mathématiques ; Op.cit, p80.

⁽²¹⁾ Ibid, p 82.

بناء على ما سبق توصل كانتور إلى النتائج التالية للامتداد المتزايد:

1- إذا ما كان المشتق p من المجموعة p هو عدود، إذن p هي كذلك، إن المجموعة

تتركب من مجموعة معزولة وجزء مشترك مع مشتقه.

2- كل مجموعة لها مشتق ذا ترتيب α (حيث α عدد متناه أو عدد متصاعد) هي

متناهية و عدودة.

ومنه فإن الرموز المتصاعدة أدت إلى ظهور دراسة مجردة للعدّ، بشرط أن تعين هذه

الرموز الأعداد في نظرية جديدة تحتوي على مناهج خاصة، أعداد تحدد الميدان الحقيقي

للمتصاعد⁽²²⁾.

⁽²²⁾ Ibid, p 83.

ثانيا - الأعداد المتصاعدة:

يرى كفاييس أن الأبحاث السابقة لكانتور كانت من أجل بناء الصرح الرياضي، الذي كان بسيطا إلى درجة أنه يمكن لأي رياضي إنجازها، كما لاحظ أيضا أن كانتور لم يستطع البرهنة على العدد "س" هل هو متصاعد أم لا؟ وهذا راجع حسب رأيه لصعوبة البحث في هذا الموضوع، بالإضافة إلى أنه لم يحسم بعد مسألة المتصل⁽²³⁾، ولهذا فإن المذكرة الخامسة "حول المجموعات اللامتناهية والخطية من النقاط"^{*} كانت متطورة مقارنة بالأبحاث السابقة. ففي المذكرة السابقة الذكر، بحث كانتور في اللامتناهي الواقعي، وكانتور كما أشرنا من قبل ميّز بين اللامتناهي بمعنى اللامحدود وهو متناهي متغير، واللامتناهي بمعنى الكلمة وهو الواقعي، والأعداد الحقيقية لا علاقة لها بالنوع الأول بل الثاني ولهذا فإن مجموعات النقاط تصبح مجموعات مجردة عناصرها أشياء أو مواضيع كمية.

إن المتصاعد الذي كان رمزا أصبح عددا، يحتوي على نفس حقيقة الأعداد المتناهية، فلا توجد قطيعة بين العدد المتناهي والعدد المتصاعد، هذا الأخير هو عبارة عن امتداد طبيعي، استمرار لمتتالية الأعداد الطبيعية. إن مفهوم العدد أصبح معمما من المتناهي إلى المتصاعد، ونميز في المتصاعد بين:

- العدد الأصلي (*nombre cardinal*) الذي يسميه القوة.
- العدد الترتيبي (*nombre ordinal*).

أ - الأعداد الأصلية المتصاعدة:

الأصلي يشير إلى إجراء العد، دون مراعاة الترتيب ويعبر عنه أيضا بالقوة، والعدد الأصلي للمجموعة M ، هو ناتج عن المجموعة M بعد تجريد طبيعة مختلف العناصر m وترتيبها كما هي معطاة ورمزها \overline{M} ⁽²⁴⁾، حيث الخطان يشير إلى التجريد: تجريد طبيعة العناصر والترتيب.

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{فإن} \quad \text{Card}(E) = 4$$

⁽²³⁾ *Ibid*, p 83.

^{*} كفاييس استخدم مصطلح *collection* والتي ترجمتها هي كلمة: تشكيلة ولكن أحيانا استخدم كلمة المجموعة كترجمة لها.

⁽²⁴⁾ *Georges cantor : sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*, *Op.cit*, p 344.

نلاحظ أن العدد الأصلي لـ (E) هو عدد تعودنا استعماله فهو ليس جديداً، لكن يمكن أيضاً تطبيق الأعداد الأصلية على المجموعات اللامتناهية، ولهذا فكانتور كي يؤكد أن هذه الأعداد جديدة، عيّن أصلي المجموعات اللامتناهية بحرف أبجدي عبري $(Aleph)$ هو \aleph_0 ، كما أنه أكد على وجود أعداد أصلية متزايدة (عدد أكبر من العدد الذي يسبقه).

إضافة إلى ما سبق، يرى كانتور أن "مجموعتين لامتناهيتين لهما نفس القوة، نفس العدد الأصلي، إذا كان هناك تقابل الواحدة مع الأخرى"⁽²⁵⁾، مثل الأعداد الطبيعية ومجموعة مربعاتها، مثل مجموعة الأعداد الزوجية والأعداد الفردية، هذه المجموعات هي متكافئة أي بين كل زوج منها توجد علاقة تكافؤ (علاقة انعكاسية-تناظرية-متعدية) وعلاقة التكافؤ هي أعم من المساواة.

فإذا كانت لدينا مجموعتان F, E فإن:

- أصلي $E =$ أصلي F إذا تحقق شرط تقابل E على F .
- أصلي $E \leq$ أصلي F إذا تم البرهنة على أن E يكافئ جزء F .
- أصلي $F \leq$ أصلي E إذا تم البرهنة على أن F يكافئ جزء من E .
- الاحتمال الرابع: أي إمكانية وجود مساواة بين جزء من E و جزء من F .

ترى "سيناصور" $(Sinaceur 1940 \dots)$ " أنه يجب أن يستبعد حينها يمكننا ترتيب كل الأعداد الأصلية في متتالية مماثلة لمتتالية الأعداد الطبيعية، أي في مجموعة مرتبة* كلياً

$(\text{totalment ordonné})$ و مرتبة جيداً من خلال العلاقة...أكبر من...⁽²⁶⁾. أما عن أصلي المجموعات اللامتناهية هو:

$$\text{Card } \mathbb{N} = \text{Card } \mathbb{Z} = \text{Card } \mathbb{Q} = \aleph_0$$

إذن المجموعات اللامتناهية العدودة أصلها أو قوتها هو واحد ويساوي \aleph_0 ، أما المجموعات اللامتناهية اللاعدودة لا تقابل بينها وبين \mathbb{N} ومنه فإن أصلها أو قوتها تختلف عن أصلي وقوة \mathbb{N} .

⁽²⁵⁾ Hourya Sinaceur :L'infini, Op.cit, p909.

* مجموعة مرتبة: مجموعة تتصف بعلاقة الترتيب و رمزها: \leq

⁽²⁶⁾ Ibid,p909.

ب - الأعداد الترتيبية المتصاعدة:

لقد فصل كانتور بين الأصلي والترتبي، هذا الأخير يرمز إلى تجديد طبيعة العناصر مع الاحتفاظ بالترتيب ورمزه \overline{M} ⁽²⁷⁾. وقد عرض كانتور العدد الترتبي الأول من خلال المتتالية: $1, 2, 3, 4, \dots, n$ ، التي هي عبارة عن متتالية الأعداد الطبيعية ويرمز للعدّ الترتبي للمجموعة بـ " ω "، وبالعدد الترتبي يمكن البرهنة على وجود عدد لا متناهي أكبر من الأعداد الأخرى من خلال الصياغة: $\exists \omega, \forall x \omega < x$

فإذا كانت لدينا المجموعات اللامتناهية:

$$E = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$F = \{2, 3, 4, \dots, 1, \dots\}$$

$$G = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$$

فلها نفس العدد الأصلي وهو الخاص بالمجموعات العدودة للأعداد الطبيعية، لكن ترتيباتها متباينة لدينا على التوالي:

$$\omega = E \text{ ترتيب}$$

$$\omega + 1 = F \text{ ترتيب}$$

$$\omega + \omega = G \text{ ترتيب}$$

والرمز (ω) يتطابق مع الرموز القديمة المتصاعدة، إنه مرتبط بالمجموعة المرتبة جيدا (*ensemble bien ordonné*)، فالمجموعة E تكون مرتبة ترتيبا جيدا، إذا رتبت عناصرها ترتيبا متتاليا حيث يوجد عنصر أول، يتبعه عنصر آخر إلى أن نصل إلى آخر عنصر إن وجد⁽²⁸⁾. وكل مجموعة جزئية E' هي متبوعة بعنصر E إلا إذا كانت E' تحتوي على آخر عناصر E ، ومن ثمّ لن تكون متبوعة بأي عنصر من E . فالعدد الترتبي إذن هو عدد عناصر المجموعة اللامتناهية جيّدة الترتيب.

وإذا كانت لدينا مجموعتان متمثلتان، فإنّ لهما نفس العدد الترتبي ونفس نمط الترتيب (نقول عن مجموعتين أنّهما متمثلتان إذا وفقط إذا كانت عناصرها المتقابلة مرتبة حيث

⁽²⁷⁾ Georges Cantor : sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, Op.cit, p365.

⁽²⁸⁾ J Cavallès : la philosophie mathématique, Op.cit, p87.

($f(x) \in f(y) \Rightarrow x \in y$)، ومنه $\bar{M} = \bar{N} \Rightarrow m \simeq n$ ، فإذا كانت لدينا مجموعتان

مرتبتين، مثال 1:

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$B = \{\dots, 3, 2, 1\}$$

فإن A و B ليس لديهما نمط واحد، لأنه لا يمكن أن نحقق تقابل f من A على B ، حيث $f(1)$ هو العنصر الأول من B ، و B مجموعة لا عنصر أول لها.

$$E_1 = \{a_1, \dots, a_n, \dots\} \quad \text{مثال 2:}$$

$$E_2 = \{a_2, \dots, a_n, \dots, a_1, \dots\}$$

هنا E_1 و E_2 غير متماثلين، لأن E_1 متماثلة مع جزء من E_2 وهي $\{a_2, \dots, a_n, \dots\}$

أي أن كل العناصر تسبق a_1 في E_2 ، ومنه فالعدد الترتيبي لـ E_2 هو أكبر من العدد الترتيبي لـ E_1 ، والنتيجة التي نتوصل إليها هي أنه قد تكون مجموعتان قوتها واحدة لكن ترتيبهما مختلف، أما إذا كانت مجموعتان ذات ترتيب واحد، فالأصلي يكون واحد

$$\bar{M} = \bar{N} \Rightarrow \bar{\bar{M}} = \bar{\bar{N}}. \quad (29)$$

هذا في حالة المجموعات اللانتهية، أما إذا كانت لدينا مجموعتان متناهيتان فلهما

نفس العدد الترتيبي إذا فقط إذا كان لهما نفس العدد الأصلي أو نفس

القوة: $\bar{M} = \bar{N} \Rightarrow M = N$ ، والحديث عن المجموعة المرتبة يعيدنا إلى الحديث عن

الأعداد الترتيبية وفي هذا الإطار أكد كفاييس وجود ثلاث مبادئ لتأسيسها وتكوينها⁽³⁰⁾:

1- ضم وحدة : و تعني إضافة وحدة لوحدة أخرى مثال: $1, 1+1, 1+1+1, \dots$

2- إذا كانت لدينا متتالية من الأعداد، حيث لا عدد هو الأكبر، فإنه يجب إيجاد عدد

جديد يعتبر كحد للمتتالية ويمثل العدد الأكبر لها. والعدد الأصلي في هذه الحالة هو عبارة

عن حدّ يمثل مجموعة عناصر المتتالية ذات الترتيب المتزايد. فالمتتالية المتزايدة للأعداد

المتناهية تعرّف العدد الترتيبي الأول والذي رمزته ω ، وبالاعتماد على المبدأين نتحصل

على: $w, w+1, w+2, w+3, \dots, 2w, \dots, nw, \dots, w^n, \dots, w^w$ والتكوين يتواصل بلا

نهاية.

⁽²⁹⁾ Georges Cantor: sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, Op. cit, p 366.

⁽³⁰⁾ P C Noguès : de l'expérience mathématique Op. cit, p34.

لكن السؤال المطروح: هل بهذه الطريقة يمكن الخروج من المحدود أو من قابلية العدد؟ يجب كانتور على هذا السؤال بإضافة مبدأ ثالث إلى المبدأين السابقين وهو "مبدأ التوقف".

3- مبدأ التوقف أو الغلق (*principe d'arrêt*): ووظيفته تثبيت فئات الأعداد، فإذا كانت لدينا الفئة (I) وهي متتالية الأعداد المنتاهية، فإنه بتطبيق المبدأين (1) و(2) يتم تعريف عدد ترتيبي (حدّ جديد)، ثمّ من خلاله نكوّن بإضافة وحدة والانتقال إلى الحدّ، أعداد جديدة حيث مجموعة الأعداد المنتجة تبقى مكافئة للمجموعة السابقة، وإذا لم يكن الأمر كذلك نتوقف ونغلق الفئة الجديدة، وهكذا فإنّ الفئة (II) هي متتالية الأعداد (X) المستنتجة من خلال تحقيق شرط أن مجموعة الأعداد التي تسبق (X) هي قابلة للعدّ.

فكل عدد ترتيبي من الفئة (II) هو قابل للعدّ، وهذا فإنها عبارة عن متتالية الأعداد الترتيبية القابلة للعدّ، ولكن كونها متزايدة يحولها إلى فئة غير قابلة للعدّ لكن ذات قوة أكبر من قوة العدود، وعندما نطبق عليها المبدأ (2) فإنها حينئذ تعرف عدد ترتيبي حدّ جديد هو \aleph_1 ، الذي يتجاوز القابل للعدّ، ومنه فإن التوالد أو التكون يتواصل ويستمر (*engendrement*).

إذن بالمبادئ الثلاثة السابقة، إضافة وحدة، إيجاد حدّ جديد هو الأكبر ومبدأ غلق الفئات، ننشئ أعدادا جديدة، فئات جديدة، متتالية القوى المتزايدة، هذه المتتالية ليس لها حدود، أي أنه إذا كانت لدينا فئة ذات قوة محددة فإنه يمكننا تكوين فئة ذات قوة أعلى وأكبر وهذا دون توقف، لذا فإن القوى المكوّنة تتتابع، دون احتمال وجود فئة تتمكن من اقتحام الترتيب، لتتموقع بين فئتين متتاليتين، فمثلا لا وجود لأي قوة أكبر من العدود وأقل من الفئة II⁽³¹⁾، أي قوة تنحصر بين الفئة (I) و الفئة (II).

وفي الأخير، أشار كانتور إلى الأعداد اللاناطقة وعلاقتها بالأعداد الأصلية والترتيبية، فالأعداد المتصاعدة هي عبارة عن أعداد لا ناطقة جديدة فهما متشابهان من حيث الماهية، إنها عبارة عن تحولات أو تغيرات محدّدة للامتتاهي الفعلي. وقد وصف كانتور الأعداد الأصلية والترتيبية بالمتصاعدة حتى يميّزها عن اللامتتاهي الميتافيزيقي أو الكموني.

⁽³¹⁾ J. Cavaillès : *la philosophie mathématique, Op. cit, p90.*

ج - قوة الأعداد الحقيقية:

هل مجموعة الأعداد الحقيقية لها قوة \aleph ؟

1 - فرضية المتصل (*hypothèse du continu*):

لقد تطرق الكثير من الفلاسفة إلى مسألة المتصل، نذكر منهم على سبيل المثال أرسطو، غاليلي، ليبنز، بولزانو، و هؤلاء قدموا تفسيرات فلسفية لا رياضية، هذا "لافتقادهم للكثير من

الكثير من المعطيات الأساسية كتعريف الأعداد الحقيقية"⁽³²⁾ ولهذا يعتبر كانتور أول من قدم التفسير الرياضي لفكرة المتصل.

يرى كانتور أن سلم القوى ليس له حدود، أي أنه إذا كانت لدينا فئة ذات قوة محددة، فإنه يمكننا تكوين فئة ذات قوة أعلى وأكبر ودون توقف، لدى فإن القوى المكوّنة تتتابع مباشرة، حيث لن تكون هناك أي قوة يمكنها أن تقتحم الترتيب، فمثلا لا توجد قوة أكبر من العدود (القابلة للعدّ)، وأقل من الفئة // على أساس أن الفئة // تلي مباشرة القابل للعدّ⁽³³⁾.

إن هدف كانتور يتمثل في تأسيس سلم القوى، تكوين متتالية منظمة لقوى متزايدة بفضل فئات الأعداد الترتيبية، والتي فيها يمكن إيجاد قوة مجموعة ما وخاصة قوة المتصل. و لدمج مجموعة في سلم القوى، يجب أن نقوم بمقارنتها بفئات الأعداد الترتيبية، ولهذا كل مجموعة لها مكانها في السلم وهذا ما يضمنه مبدأ المقارنة أو قابلية المقارنة (*comparabilité*)، فيكفي أن نبيّن من جهة أن كل مجموعة يمكن أن تكون ذات ترتيب جيّد، ومن جهة ثانية يمكن أن نقارن بين مجموعتين ذات ترتيب جيّد.

أما عن المتصل فهو مجموعة الأعداد الحقيقية، وقوته هي قوة الأعداد الحقيقية وهي تلي مباشرة قوة الأعداد الطبيعية ولا فاصل بينها. فإذا ما أردنا أن نضع المتصل على السلم، فيكفي إذن أن نثبت ونحدد مكانه، وذلك بإحضار المجموعات اللامتناهية إلى قوة العدود أو المتصل، والفرضية المعقولة أن المتصل قوته قوة الفئة // أي يساوي 2^{\aleph_0} .

وخلاصة لما سبق فإن كانتور لم يستطع أن يقدم برهانا، ولكنه استخدم "فرضية

المتصل" هذه الفرضية من المشكلات التي لم يستطيع الرياضيون حلها، إلى غاية 1931

⁽³²⁾ Elisabeth Busser : *Le labyrinthe du continu*, Op. cit, p91.

⁽³³⁾ J. Cavaillès : *la philosophie mathématique*, Op. cit, p90.

حيث توصل غودل إلى نتيجة وهي أن " هناك الكثير من القضايا ليست نتيجة مباشرة للديهيات وليست متناقضة مع غيرها، توجد صيغ رياضية لا يمكن القول أنها صادقة أو كاذبة

(Paul Cohen) أثبت سنة 1963 أن إضافة أكسيوم فرضية المتصل إلى نظرية المجموعات لا يؤدي إلى تناقض⁽³⁴⁾.

ب - منهج القطر (le procédé du diagonale) :

من بين نتائج القوى، منهج القطر الذي عرضه في مقاله "حول المسألة الأولية لنظرية المضاعفات" سنة 1892، ولا يعدّ كانتور مكتشف هذا القطر فقد سبقه إليه "بول دي بوا ريمون"^{*} (Paul du Bois Reymond)، إذ استخدمه بطريقة حدسية وذلك سنة 1876⁽³⁵⁾، ويعتبر هذا المنهج منهجا جديدا للتوالد، أعلن عنه كانتور لأول مرة سنة 1891 للبرهنة على القضية التالية: إن مجموعة الدوال للمجموعة E على $\{0,1\}$ هي ذات قوة أعلى من E ، أكبر من المتصل ومن ثمّ فالقوى لا حدّ أقصى لها دون تدخل للترتيب. فانطلاقا من المجموعة E ، يمكن تأسيس قوة أكبر، ومنهج القطر يسمح بذلك، كما برهن كانتور بالاعتماد على هذا المنهج، على لامعدودية الأعداد الحقيقية، وبرهن على أن قوة $[0,1]$ أكبر من \mathbb{N} ، أثبت من خلاله أيضا انه لا وجود لتقابل بين متتاليتين لامتناهيتين⁽³⁶⁾، وقدم قاعدة تعرف بفرضية كانتور وهي أن:

$$Card(2^m) > Card m \text{ حيث أن } 2^m \text{ هي مجموعة أجزاء المجموعة } m.$$

فقوة مجموعة أجزاء m أكبر من قوة m ، وهذه النظرية تتصف بأنها خصبة، عامة، مقتصدة: فكونها عامة فذلك لأنها أثبتت أن كل مجموعة، أجزاء قوتها أكبر من قوة المجموعة ذاتها، وكونها خصبة لأنها استخدمت بعده ووظفت من طرف غودل تورينغ

⁽³⁴⁾ Elisabeth Busser :Le labyrinthe du continu, , Op. cit, p92.

^{*}دي بوا ريمون ساهم في تأسيس مفهوم المتصاعد، من خلال أبحاثه التي نشرها في مقال: النظرية العامة للدوال L.Brunschvicg : les étapes de la philosophie mathématique, A. Blanchard, 1993, p383.

⁽³⁵⁾ J. Cavaillès : la philosophie mathématique, Op. cit. p 94.

⁽³⁶⁾ Philippe Lauria : Cantor et le transfini mathématique et ontologie, l'Harmattan, 2004, p 81.

(1954-1912 Turing)، أما عن كونها مقتصدّة فذلك لأن هذا الدليل استخدم أقلّ المفاهيم الرياضية، ومن ثمّ فإنّ النظرية برهنت بطريقة أكثر بساطة على الأعداد الحقيقية ولامعدوديتها.

1 - التطبيق الأول:

للبرهنة على أن B هو لاعدود، يكفي البرهنة على لا معدودية المجموعة الجزئية $[0.1]$ من R وذلك بتأسيس جزء عدود D من $[0.1]$ حيث يوجد عنصر من $[0.1]$ لا ينتمي إلى D .

$[0.1]$ جزء مرقم بواسطة متتالية: $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots\}$

كل حدّ من هذه المتتالية يمكن أن تكتب في صيغة عشرية (*décimale*) مع لا تنتهي

الأرقام بعد الفاصلة، ليكن: $x_i = 0, x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4} \dots x_{in}$

و إذا افترضنا:

- إمكانية حساب الأعداد الحقيقية.

- أصلي $[0.1] = \text{أصلي } N$.

نكوّن عددا حقيقيا x في المجال $[0.1]$ على شكل عدد عشري حيث بعد الفاصلة نجد ن

أرقام (r_n) مثلا بالنسبة للمتتالية $a^{(37)}$:

x_1
0.3962181.....
 x_2 **0.5126492.....**
 x_3 **0.1242115.....**
 x_4 **0.1011111.....**
 x_5 **0.2869741.....**
 x_6 **0.0003581.....**
 x_7 **0.9998256.....**

نكوّن عددا حقيقيا y ينحصر بين 0 و 1 ويختلف بالرغم من ذلك عن x_n أيّا كان العدد

n (وهذا ما هو متناقض)، فإذا كان لدينا y_i فإن العدد العشري i لـ y

يساوي 1 إذا كان i العشري لـ x_i يختلف عن 1، ويساوي 0 إذا كان العدد العشري لـ

x_i يساوي واحد.

(37) Jacques Dubucs: *Des nombres transfinis, dans le mystère des nombres*, le Pommier, 2007, p172.

تكوين العدد y :

$$(1) \quad \text{إذا كان } i=1 \text{ فإن: } x_1=0.3692181\dots$$

العدد العشري الأول لـ x_1 يختلف عن 1 إذن: $Y=0.1\dots\dots\dots$

$$(2) \quad \text{إذا كانت } i=2 \quad X_2=0.5126492\dots\dots$$

العدد العشري الثاني لـ x_2 يساوي 1 إذن: $Y=0.10\dots\dots\dots$

$$(3) \quad \text{إذا كان } i=3 \quad X_3=0.1242115\dots\dots\dots$$

العدد العشري الثالث لـ x_3 يختلف عن 1 إذن $Y=0.101\dots\dots\dots$

$$(4) \quad \text{إذا كان } i=4 \quad X_4=0.10101111$$

العدد العشري الرابع لـ x_4 يساوي 1 إذن $Y=0.1010\dots\dots$

وهكذا إلى ما لا نهاية إلى أن نصل إلى $Y=0.1010111\dots$

نلاحظ أن

y مختلف عن (x_n) وهذا ما يناقض الفرضية التي انطلقنا منها .

إذن: مجموعة الأعداد الحقيقية قوتها أكبر من قوة N .

قوة N = قوة المعدود.

قوة المعدود 1 قوة R .

قوة R = قوة المتصل.

ومما سبق نستنتج أنه بالاعتماد على برهان بالخلف وانطلاقاً من المجموعة $(R)E$ يمكن تأسيس قوة أكبر، وما منهج القطر إلا دليل على ذلك من خلال تجاوز القوة المعطاة، معتمدين في ذلك على نظرية الأعداد الأصلية والترتيبية، فكانتور برهن إذن على لامعدودية الأعداد الحقيقية عن طريق المتصل والمجموعات المرتبة، وهي بالتالي تختلف عن بقية المجموعات $Q, Z, N \dots$

2 - تطبيق ثاني:

نفترض أن أصلي $[1.0]$ = أصلي N ، نقوم بعدّ كل الأعداد الحقيقية المنحصرة بين 0 و 1 هذه الأعداد تكون من الشكل⁽³⁸⁾:

$$0, a(1), a(2), a(3), \dots, a(i)$$

$$X_1 = 0.54389$$

$$X_2 = 0.39581$$

$$X_3 = 0.17485$$

$$X_4 = 0.51489$$

$$X_5 = 0.63017$$

إذن علينا إيجاد عدد غير موجود في القائمة.

كانتور طبق منهج القطر لإيجاده وليكن "y" نكوته من خلال الأعداد العشرية، بإضافة العدد 1 إلى العشري الأول من X_1 والعشري الثاني من X_2 والعشري الثالث من X_3 وهكذا ... فنحصل على: $Y = 0.60598...$

وبالتالي نصل إلى عدد لم يكن موجودا في $[1.0]$ ، هذا المجال الذي ينتمي إلى R . أصلي $R > [1.0]$ أصلي $\dot{A}_0 >$ ، و أصلي R أكبر مباشرة من أصلي N ، والذي هو نفسه أصلي المتصل ويساوي: $2^{\dot{A}_0}$ أي قوة تتحصر بين الفئة (I) و الفئة (II).

بناء على ما سبق نستخلص ما يلي:

- كانتور هو أول من أسس الأعداد المتصاعدة سواء كانت أصلية أو ترتيبية، وهي أعداد تختلف بطبيعة الحال عن الأعداد الطبيعية و النسبية و الناطقة و تتفق مع الأعداد اللاناطقة في بعض من الماهية.

- ميّز كانتور بين المجموعات العدودة و اللاعدودة و اعتبر مجموعة الأعداد الطبيعية و النسبية و الناطقة من الصنف الأول بينما الأعداد الحقيقية من الصنف الثاني.

- لامتناهي الأعداد الطبيعية هو \dot{A}_0 .

- برهن كانتور على أن قوة R أكبر من قوة N بواسطة فرضية المتصل و منهج القطر. ومنه فإن قوة R تلي مباشرة قوة N و لا وسط بينهما و تساوي $2^{\dot{A}_0}$.

- حاول كانتور أن يقيم علاقة بين الهندسة (المتصل) و التحليل (المنفصل) و توصل إلى وجود امتداد بينهما.

⁽³⁸⁾ Hervé Lehning : La diagonale de cantor, dans L'infini, Tangente N°13, Op. cit, p 96.

المبحث الثالث: النسقية (la systématisation)

وضحنا فيما سبق اهتمام كانتور باللامتناهي الفعلي، و اكتشافه للأعداد الحقيقية و الأعداد المتصاعدة الأصلية و الترتيبية، و تحديد علاقتها بنظرية المتصل و هذا ما تم في مرحلتي الاكتشاف، التي تميزت نهايتها كما يرى كفاييس بظهور البوادر الأولى للفصل بين النظرية الأصلية و النظرية الترتيبية، الأولى تمركزت حول مفاهيم القوة و التكافؤ، و الثانية ناتجة عن امتداد و تعميم العدّ الناتج عن منهج الاشتقاق⁽³⁹⁾. و بعد 1884 و هو تاريخ نهاية المرحلة الثانية، ركز كانتور في أبحاثه على تعميق هذه المفاهيم، و هذا ما نشره في "إسهامات لتأسيس نظرية المجموعات المتصاعدة" التي نشرت ما بين 1895 و 1897، الذي تعتبر المرجع الأساسي في مرحلة النسقية و هي المرحلة التي تميزت باهتمام كانتور بالمحاور أساسية التالية :

أولا - المجموعات اللامتناهية (Les ensembles infinis) :

ربط كانتور في مقال سنة 1883 الأعداد المتناهية و اللامتناهية بنوعين من الحقيقة أو الوجود و ذلك :

الأولى: الملازمة أو الذاتية (Intrasubjective)

الثانية: المتعالية (Transubjective)

أما الأولى تحتل مكانا محددًا في فهمنا (*l'entendement*) و لها علاقة بالمواضيع الرياضية، و أما الثانية فهي متعالية لأنه يجب النظر إليها على أنها إعادة تنظيم العلاقات الموجودة في العالم الخارجي المقابل للعقل أو الفكر، و بالتالي فلها علاقة بالمواضيع الفيزيائية، الواقعية. و يتم التعبير عنها من خلال فئات أو مجموعات، و لهذا نظرية المجموعات تعبر عن التصور الواقعي للامتناهي، و وجودها مرهون بوجود المجموعات اللامتناهية فعلا، فتعرّف المجموعة على أنها تجمع للمواضيع المتميزة و المحددة من طرف الحدس أو من طرف تفكيرنا في "كلّ واحد"، و العدد الأصلي أو قوة المجموعة و لتكن M ، هو تصور كلي أو شامل نستنتجه من خلال تجريد تكوين العناصر من جهة و كذا الترتيب الذي هي عليه من جهة أخرى.

⁽³⁹⁾ J. Cavaillès. : la philosophie mathématique, Op. cit, p95.

إن كانتور كان يريد تقديم تعريفات سليمة و صادقة، و ما يضمن صدقها هو خصائصها المنطقية من جهة، و تناسقها مع المقدمات الأخرى في نفس النسق من خلال تكيفها مع سياق التجريد و الوجود الفيزيائي أو الروحاني، ، الداخلي أو الخارجي من جهة أخرى.

ولهذا فإنه كان يبحث عن إثبات صدقها في التاريخ والفلسفة منذ فيثاغورس⁽⁴⁰⁾، لكن الجانب الفلسفي الذي يجب أن يوضع جانبا، بل القيمة الرياضية للتعريفات هذه الأخيرة كفاييس لم يهتم بفلسفة اللامتناهي التي طورها كانتور، لأنه رأى أن ما يهم الرياضي ليس انتقدت من طرف "زرمولو" (1871-1953 Zermelo) واتضح له أنها ناقصة أو غير كافية لتأسيس علم صوري⁽⁴¹⁾، وقد أيدّ راسل (1872-1970 Russel) موقف زرمولو.

ثانيا - النظرية الأصلية (*la théorie cardinale*):

يعرّف كانتور القوة أو العدد الأصلي: "أفهم من كلمة قوة أو العدد الأصلي لمجموعة M ، التصور الشامل الكلي الذي نتوصل إليه بتجريد المجموعة، وكذا تكوين عناصرها وكل العلاقات الموجودة بين العناصر وكذا الترتيب الذي يسودها، ويعتبر ما هو مشترك بينها مكافئا لـ M "⁽⁴²⁾. إن هذا التعريف هو صيغة أخرى لتعريف الأصلي (*card*) والذي سبق وأن تطرقنا إليه. ولم يكتف كانتور بالروابط التي تربط بين عناصر المجموعة، بل تطرق أيضا إلى الروابط التي تصل بين المجموعات بعد القيام بعملية التجريد وقد ورد ذكرها سنة 1895. وللربط بين الأعداد الأصلية والمجموعات، طبق كانتور على الأعداد الأصلية قواعد الحساب، التي تفترض مسبقا تعريفا للروابط بين المجموعات بعد القيام بتجريدتها، وهكذا أنشأت بعض المفاهيم⁽⁴³⁾:

- مفاهيم مجموعة الاتحاد أو جمع مجموعتين.

- مجموع جداء مجموعتين M و N : وهي مجموعة كل أزواج العناصر حيث الحد

الأول منها تنتمي إلى M والحد الثاني ينتمي إلى N .

- قوة (الأسية *exponentiation*) مجموعة: وهي تمثل أصلي المتصل .

⁽⁴⁰⁾ *Ibid*, p98.

⁽⁴¹⁾ *Jean Cavaillès : Les œuvres complètes de George Cantor, Op. cit, p438.*

⁽⁴²⁾ *G.Cantor : sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis, Op. cit, p 387.*

⁽⁴³⁾ *J.Cavaillès : la philosophie mathématique Op. cit, p99.*

ومن هذه المفاهيم، تم استنتاج مجموعة من إجراءات حسابية:

1- المساواة و اللامساواة :

• إذا كانت مجموعتان M و N متكافئتان، فهذا يعني أن لهما نفس العدد الأصلي:

$$M \Leftrightarrow N \Rightarrow \bar{M} = \bar{N}$$

• إذا كانت مجموعة جزئية من M تكافئ N ، أو مجموعة جزئية من N تكافئ

M فهذا يعني أن:

$$M \subset N \Leftrightarrow M \subset N$$

$M > N \Leftrightarrow N \subset M$ و يمكن التعبير عن هذه القوانين بالقضايا التالية:

يوجد جزء N' من N يكافئ M و يوجد جزء M' من M يكافئ N .

و هذه القوانين لها علاقة بمبدأ شمولية و كلية المقارنة، إلا أن كانتور لم يثبتته، وقد برهن بورال سنة 1898 على هذه القوانين وخاصة المساواة بين M و N و لكن دون توظيفه لهذا المبدأ (مبدأ شمولية و كلية المقارنة)⁽⁴⁴⁾، أما كانتور فقد صرح أن حقيقتها لا يمكن أن تكون معروفة إلا لاحقاً بعد تكوين فكرة عن المتتالية المتزايدة للأعداد الأصلية المتصاعدة و عن تسلسلها⁽⁴⁵⁾، أي سيتم البرهنة عليها أي سيتم البرهنة عليها بعد البحث في نظرية الأعداد الترتيبية، و هي الصعوبة التي تكمن على مستوى تطورها و تبريرها، وهذا ما يفرض استدعاء الحدس الناتج عن تعريفات الروابط بين المجموعات أو استخدام نظرية الترتيب الجيد، وإلا سيؤدي هذا إلى حلقة مفرغة، وخاصة أن النتائج المتوصل إليها في النظرية الأصلية هي سابقة عن إثبات قابلية المقارنة.

من جهة أخرى فإن الأعداد الأصلية هي خاضعة لإجراءات حسابية:

- الجمع يعبر عن اتحاد مجموعتين.
- الضرب يعبر عن الجداء الديكارتي.
- الأسية a^b تمدنا بالعدد الأصلي لمجموعة دوال M في N ، فهي تسمح بتمثيل:

أصلي المتصل: $2^{\mathbb{A}_0}$ ، و أصلي متتالية الأعداد الطبيعية رمزه \mathbb{A}_0 .

⁽⁴⁴⁾ Ibid, p100.

⁽⁴⁵⁾ Ibid, p101.

و يرى كانتور أن أصغر لامتناهي مكون من مجموعة كل الأعداد الأصلية المنتهية التي تقربنا من مجموعة متصاعدة حيث عددها الأصلي هو الأصغر. والمجموعة المتصاعدة تحتوي على مجموعة جزئية التي تكافئها، فإذا حذفنا من مجموعة متصاعدة عدد متناهي من العناصر، فإن هذا يسمح بحذف عناصر أخرى، حيث المجموعة المكوّنة من العناصر المحذوفة هي مجموعة الأعداد الأصلية المنتهية، أي المجموعة العدودة. فالخاصية المميزة للمتصاعدة هي إمكانية حذف أي عنصر دون التأثير في قوة المجموعة، وهي الخاصية التي عممت على كل المجموعات المتصاعدة، فإذا كان لدينا المعادلات التالية نتحصل على⁽⁴⁶⁾:

$$\begin{aligned}\dot{A}_0 + \dot{A}_0 &= \dot{A}_0 \\ \dot{A}_0 + n &= \dot{A}_0 \\ \dot{A}_0 \cdot \dot{A}_0 &= \dot{A}_0 \\ \dot{A}_0 \cdot n &= \dot{A}_0\end{aligned}$$

فالإجراءات السابقة تؤكد على أنه إذا ما أضفنا أي عدد إلى اللامتناهي، فالنتائج يكون لا متناهيا وحاصل ضرب مجموعتين عدوديتين هو مجموعة عدودة، بل أضاف كانتور أيضا إمكانية المقارنة بين مجموعة الأعداد الزوجية و الأعداد الطبيعية، و الناتج هو مجموعة عدودة و قد عممها حيث نتحصل على⁽⁴⁷⁾: $\dot{A}_0 / 2 = \dot{A}_0$ و منه $\dot{A}_0 / n = \dot{A}_0$

و نلاحظ من خلال هذه الإجراءات أن هناك مماثلة بين حساب الفئات في المنطق و حساب المجموعات اللذان يختلفان عن الحساب العادي. أما عن المتصل كمجموعة [0.1] وعدده الأصلي هو 2^{N_0} نصل من خلاله إلى إثبات جديد لثبات قوة المتصل، مهما كان عدد الأبعاد (متناهية أو غير متناهية) :

$$(2^{N_0})^{\dot{A}_0} = 2^{\dot{A}_0 \dot{A}_0} = 2^{N_0}$$

و قد لاحظ كفاييس أن النظرية الأصلية لكانتور تفتقد للدقة، فالأعداد الأصلية تعبر عن قوى المجموعات عندما نقوم بتجريد ترتيب عناصرها، لكن من أجل إثبات حساب الأعداد الأصلية حيث المجموعات التي تعبر عنها يمكن أن تقارن، فهذه المسألة تم ردها إلى نظرية الترتيب بالرغم أنه أثناء البحث التعريف الأصلي يسبق الترتيب، و لهذا من أجل تطوير

⁽⁴⁶⁾ L. Brunschvicg : les étapes de la philosophie mathématique, Op. cit, p388.

⁽⁴⁷⁾ Jean- Pierre Belna : comment Cantor introduisit l'infini en mathématiques , dans les belles lettres , Figures du savoir 2000 , le 27 avril 2000, p5.

<http://revue.de.livres.free.fr/cr/belna.html>

الحساب الأصلي لا يجب استدعاء إلا التصورات التي تتدخل في تعريف الأعداد الأصلية. و لهذا مفهوم الترتيب المفترض عند الحديث عن المجموعة ، قد أساء إلى أسس الصرح⁽⁴⁸⁾. ولكن ما نؤكد عليه لكن ما نؤكد عليه أن كانتور وضع الأسس الأولى لحساب الأعداد الأصلية.

ثالثا: أنماط الترتيب

عرض كانتور نظرية أنماط الترتيب في مذكرة "حول مختلف الآراء النسبية لللامتناهي الفعلي"، حيث الأعداد الترتيبية في هذه النظرية العامة ليست إلا نوع خاص، ويرهن على النظريات المميزة لأنماط مجموعة الأعداد الناطقة و المتصل سنة 1895، و توسيع النظرية الترتيبية إلى نظرية الأنماط ضروري من أجل التمييز المجرد للمتصل⁽⁴⁹⁾. فمجموعة بسيطة الترتيب هي التي تتحقق فيها علاقة ترتيب كاملة فهي انعكاسية، لا تناظرية و متعدية و ترتب كل عناصر المجموعة. فإذا كان لدينا عنصران m و n فإن $m > n$ و إذا كان لدينا a و b عنصران ينتميان إلى المجال $[0, 1]$ الذي تتحقق فيه علاقة ترتيب حيث $a < b$ إذا كانت a أقل من b ، فإن المجال $[0, 1]$ هو بسيط الترتيب (*simplement ordonné*) و ليس جيد الترتيب (*bien ordonné*).

فالترتيب البسيط هو خاصية عامة توجد في مختلف أنماط الترتيب، والنمط كما عرفه كانتور: "إنه التصور الكلي الذي نستنتجه من مجموعة M إذا قمنا بتجريد تكوين العناصر، لكن نحفظ بعلاقات الترتيب فيما بينها"⁽⁵⁰⁾، إنه مجموعة الأعداد الناطقة المحصورة في المجال $[0, 1]$ و تتميز بعلاقة الترتيب، هذا النمط h الخاص بمجموعة الأعداد الناطقة المصنفة أو المرتبة ترتيبا تصاعديا هو معرف بالخصائص التالية:

- 1- الانتماء إلى الفئة $[A]$ أي انه عدود .
- 2- ليس له عنصر أول و لا عنصر أخير.
- 3-الكثافة أي وجود عدد ناطق بين عددين ناطقين.

⁽⁴⁸⁾ J Cavailles : la philosophie mathématique, Op.cit, p102.

⁽⁴⁹⁾ Ibid,p103

⁽⁵⁰⁾ Ibid,p105.

كل مجموعة تتحقق فيها الخصائص الثلاث فهي إذن مماثلة لمجموعة الأعداد الناطقة. وبالنسبة لكفاييس، أما إذا كان نمط المجال [0.1] يتحقق فيه علاقة الترتيب العامة، فإنه يكون مميزا بخاصيتين، الأولى انه يحتوي على مجموعة عدودة مكثفة و من جهة ثانية هو تام. مفهوم النمط كان نتيجة حتمية لمسألة المتصل، على أساس أن كانتور كان يهدف إلى تمييز مجموعات النقاط، المتصل و العدود. ولكن عوضا أن يعيد استعمال طريقة الاشتقاق، فقد ركز على العلاقات التي توجد بين عناصر مثل هذه المجموعات، وبتعبير كفاييس: "كانتور من أجل الوصول إلى المتصل طبق حرفيا براهينه على الأعداد الحقيقية في المجرّد" (51).

رابعا - نظرية الأعداد الترتيبية:

أ- نظرية الترتيب الجيد:

إن الهدف من نظرية الترتيب الجيد هو التأسيس لكلية و شمولية مبدأ قابلية مقارنة المجموعات الجيدة الترتيب، و نقول عن قوى مجموعات جيدة الترتيب أنها قابلة للمقارنة، إذا و فقط كانت متساوية أو الواحدة اكبر من الأخرى. وقد توصل كانتور إلى هذا المبدأ بواسطة مفهوم القطعة (*segment*): وهي مجموعة من العناصر تسبق في الترتيب عنصرا من مجموعة و متممة القطعة هي ما تبقى. والخاصية الوحيدة لقطعة في مجموعة هي استحالة إثبات تطبيق مماثل (*application semblable*) بينه و بين المجموعة بكاملها أو بينها و بين قطعة أخرى، و لهذا فان التطبيق المماثل يكون بين مقابلة قطع المجموعة M بقطع بقطع المجموعة N (52). و منه فقد توصل كانتور إلى نتيجة مفادها: إذا كانت لدينا مجموعتان M و N مرتبتين ترتيبيا جيدا، فإن ثلاث حالات فقط تكون ممكنة:

• M مماثل لـ N .

• M مماثل لجزء من N .

• N مماثل لجزء من M .

و من خلال الحالات السابقة يمكن بالتطبيق على قطع المجموعة، استنتاج ما يلي :

- إذا كانت كل قطع M لها قطع مماثلة في N و العكس فان M و N متماثلتان والعكس

صحيح.

(51) *Ibid*,p106.

(52) *Ibid*,p108.

- إذا كانت قطعة من M ليست لها قطعة مماثلة في N ، فهذا يعني أن هناك "أصغر" M_1 يحقق هذه الخاصية .

- كل قطعة في N لها مماثل في M و منه M_1 و بالتالي M_1 مماثل ل N .

- إذا كانت قطعة من N ليست لها قطعة مماثلة في M ، فهذا يعني أن هناك "أصغر"، N_1 و النتيجة M_1 و N_1 متماثلتان ، لأنه بالفرضية يوجد تطبيق تماثلي على القطع الصغرى (53) .

فمن خلال المقارنة بين المجموعات و التي هي نظرية الأنماط أو الأعداد الترتيبية، تحقق إحدى العلاقات التالية: $<$ ، $>$ ، $=$ واحدة و واحدة فقط.

ب- علم الحساب المتصاعد:

إن علم الحساب المتصاعد الذي ينتج عن النظرية السابقة (الترتيب الجيد) يحقق الأهداف الثلاثة:

- 1- برهنة أن كل مجموعة الأعداد الترتيبية المصنفة حسب المقدار هي جيدة الترتيب.
- 2- وجود قواعد محددة للحساب، و التحليل المعقول للعدد إلى جداء من المعاملات بغرض تبسيطه.
- 3- تحديد الفئة II مع تعريف الأعداد E .

إن مجموعة الأعداد الترتيبية الأقل من عدد ترتيبي معطى a هي جيدة الترتيب وهي من النمط a ، فكل عدد $a < ac$ يقابل قطعة من M و العكس، والعناصر المحددة لقطع M هي في تقابل واحد بواحد (*bijection*) مع الأعداد الأقل من a وهو التطبيق الذي يحافظ على الترتيب (54) .

فإذا كانت لدينا مجموعة p للأعداد الترتيبية المتصاعدة، و نخص بالذكر الفئة II ، فإن تقاطع كل جزء من أجزائها مع القطعة المحددة بعنصر من p يحتوي على أول عنصر الذي هو كذلك أول عنصر من p ، إذن p هي جيدة الترتيب.

وإتحاد متتالية لامتناهية من المجموعات الجيدة الترتيب هي جيدة الترتيب، و من هنا نستنتج مفاهيم خاصة بالمتتالية المتزايدة للأعداد الترتيبية .

(53) *Ibid*,p106.

(54) *Ibid*,p109.

لتكن المتتالية: $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ نقوم بعملية الجمع:

$$\beta = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + (\alpha_4 - \alpha_3) \dots$$

حيث β عدد ترتيبى أكبر مباشرة من المتتالية أي: $\alpha_r < \beta$ و بتعميم هذه القاعدة

نتحصل على القانون التالي: $\alpha_r > \gamma \Rightarrow \beta < \gamma$ و منه b تمثل نهاية a_r .

و كل عدد من الفئة II نتحصل عليه إما بإضافة 1 إلى عدد معروف و إما

بالانتقال إلى نهاية متتالية متزايدة (يطلق عليها كفاييس اسم الأساسية) و في الحالتين لدينا عدد يلي مباشرة الأعداد الموجودة⁽⁵⁵⁾.

و لهذا و مما سبق فان قوتي المجموعتين الجيدة الترتيب قابلة للمقارنة: أنهما

متساويتان أو الواحدة أكبر من الأخرى، ونقول عن مجموعتين أنهما قابلتان للمقارنة إذا

استطنا أن نرتبها ترتيبا جيدا. في بداية أبحاثه، كانتور تقبل فكرة إمكانية الترتيب الجيد

لمجموعة ما، ولكنه لم يكن واثقا من هذا. و من وجهة نظر رياضية، ودون وجود برهان

لإمكانية الترتيب الجيد لمجموعة ما، فان مسألة شمولية المقارنة لم تحل، ودون وجود برهان

شمولية المقارنة فان سلم القوى المؤسس انطلاقا من الأعداد الأصلية لا يمكنه أن يأخذ قيمة

كلية و يسمح بقياس قوة مجموعة ما، هذه الفجوة أعطت للألفات (\hat{A}) قانونا غامضا.

إنها (الألفات \hat{A}) تمثل قوى الفئات المكونة من الأعداد الأصلية، \hat{A} هي قوة المعدود،

\hat{A}_1 هي قوة الفئة II وهكذا... إن (الألفات) تتتابع دون انقطاع

$\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4, \dots$ حيث كل حد يلي حدا آخر هو أكبر منه، و هكذا إلى أن يصل إلى

\hat{A}_w و هو الألف الأكبر من \hat{A}_n (هو الأكبر من كل الأعداد المتناهية)، و من \hat{A}_w نكون

\hat{A}_{w+1}, \dots و لكن لم يبرهن بان الألفات تمثل كل الأعداد الأصلية، كما انه لم يستطع إثبات

أن \hat{A}^H هو أصغر عدد أصلي بعد \hat{A} ، و بتعبير آخر، طالما أن الأعداد الأصلية غير

مسجلة في سلم شامل، فان "أصغر" له معنى⁽⁵⁶⁾، و مع ذلك فكانتور برهن على الكثير من

النظريات التي تسمح بإعادة صياغة و تمحيص نظرية الأعداد الترتيبية. هذه الأخيرة المعرفة

كأنماط ترتيب للمجموعات ذات الترتيب الجيد، كما درس أيضا الأعداد الترتيبية على مستوى

المجموعات السابقة الذكر.

⁽⁵⁵⁾ Ibid, p110.

⁽⁵⁶⁾ Jean- Pierre Belna :comment Cantor introduisit l'infini en mathématiques, Op.cit, p6.

خامسا- مفارقة بورالي-فورتى (Burali- Forty) :

لم يستطع كانتور حل الغموض الموجود في نظريته ، و ما زاد في أتعابه هو ظهور مفارقات في فلسفته الرياضية ، ففي 1895 وحسب شهادة "برنستين" (*Félix Bernstein*) (1878-1956) وهو تلميذ كانتور⁽⁵⁷⁾: " كان كانتور الأول الذي أشار إلى المفارقة التي عرضت من طرف"بورالي-فورتى" (*Cesare Burali-Forti*) 1861-1931 سنة 1897، و هي أول مفارقة في نظرية المجموعات"، إطارها إذن نظرية المجموعات وخصوصا الجزء الخاص بالأعداد الأصلية والترتيبية كما وضعه كانتور. نص المفارقة:مجموعة كل الأعداد الترتيبية الناتجة عن مبدأ التوالد (*engendrement*) ومبدأ التوقف، المرتبة تصاعديا تكوّن مجموعة جيّدة الترتيب حيث نمطها هو عدد ترتيبي a . وعوامل نشأة هذه المفارقة: تعريف كانتور للأعداد الترتيبية على أنها عبارة عن متتالية خطية، أي من عددين لا متساويين يوجد دائما عدد أقل أو أكبر من الآخر،بمعنى أنه إذا كان لدينا عدنان b و a وهما عدنان متصاعدان ترتيبيان فإن:

$$b = a$$

$$b < a$$

$$b > a$$

أما هدف المفارقة أن نبين أنه إذا كانت a و b عددين⁽⁵⁸⁾:

$$b \neq a$$

$$a \neq b$$

$$a \neq b$$

فبورالي- فورتى برهن أنه "إذا رتبنا كل الأعداد الترتيبية في متسلسلة خطية، فإن هذه المتسلسلة تعرف عددا ترتيبيا يكون أكبر من الأعداد الأخرى، فيمكن إذن إضافة 1 و الحصول على عدد أكبر وهذا تناقض"⁽⁵⁹⁾،وقد أجبرت هذه المفارقة كانتور على ترك الصرح الرياضي غير متمم وغير منجز.

⁽⁵⁷⁾ J Cavailles : la philosophie mathématique, Op. cit, p116.

⁽⁵⁸⁾ Henri Poincaré : Sciences et méthode, Flammarion,1918, p 168.

⁽⁵⁹⁾ Ibid, p 201.

وفي 1899 ومن خلال الرسائل التي وجهها له ديدكند، كان كانتور مجبرا على التمييز بين

نمطين من التضاعف (*multiplicité*):

- التضاعف المحدد من الأشياء⁽⁶⁰⁾: من جهة التضاعفات اللامتناهية أو الضعيفة، والتي يمكن أن تؤسس كفضية مثل فرضية اتحاد كل العناصر تؤدي إلى تناقض، ومن المستحيل اعتبار التضاعف كوحدة شيء متناهي، وحيث من المستحيل تصور هذا التضاعف كوحدة أو موضوع منجز. ونأخذ كمثال النسق W لكل الأعداد المتصاعدة وكذلك النسق π ، نسق الألفات، لأنه مماثل للنسق الأول.

- ومن جهة ثانية، التضاعفات القوية أو المجموعات التي ركزت عليها النظرية، عندما يتم التفكير في كل عناصر التضاعف كموجود متزامن حيث من الممكن تصورهما كموضوع واحد. وقد توصل كانتور إلى مجموعة من القواعد:

- مضاعفان متكافئان هما إما مجموعات أو كلاهما ضعيف (*faible*).

- كل تضاعف جزئي من المجموعة هو مجموعة.

- كل مجموعة المجموعات، إذا حللنا المجموعات إلى عناصرها هي مجموعة.

أما عن مجموعة كل الأعداد الترتيبية هي حسب متناقضة بورالي -فورتي تضاعفا بسيطا، وفيما يخص المجموعات المنتهية يرى كانتور أنها: "حقيقة بسيطة ولا مبرهنة، إنها بديهية علم الحساب"⁽⁶¹⁾.

كذلك إن قوة "التضاعفات" التي تسند إليها الألفات، كأعداد أصلية هي بديهية علم الحساب المتصاعد "الموسع"، و بالنسبة لكفاييس لقد بين كانتور الطريق الصحيح لهذه الأكيوسومات بالمعنى القديم، و يؤكد كانتور أنه لا توجد وضوح و بداهة مضمونة، ثم أن اللاحقين لكانتور بذلوا جهودا للحفاظ على الأهم في النظرية المجردة، بتعويض في حدود الإمكان تناسق البديهية الحديثة⁽⁶²⁾. إن الأكيوسومات لا تقوم إلا بترجمة الحدس، و هذا الأخير مستحيل بالنسبة للمتصاعد، و لهذا فنظرية المجموعات لا يمكنها أن تنقذ إلا بفضل أكسمة حديثة مضمونة، لا من خلال بداهة الأكيوسومات لكن من خلال تناسقها و من ثم لا تناقضها.

⁽⁶⁰⁾ J.Cavaillés : Lettre Dedekind 28/07/1899, dans la philosophie mathématique, Op.cit, p 238.

⁽⁶¹⁾ J.Cavaillés : Lettre Dedekind 28/07/1899 dans la philosophie mathématique, Op.cit, p243.

⁽⁶²⁾ J.Cavaillés : la philosophie mathématique, Op. cit, p 118.

مما سبق نستنتج ما يلي:

- إن الصعوبات التي واجهت كانتور و هو يؤسس لنظرية المجموعات، الروابط التي توحد بين النظرية الأصلية و النظرية الترتيبية. فالنظرية الأصلية كما أشار إليها في إسهاماته ترد إلى مفهوم الترتيب أما النظرية الترتيبية تتعلق بالمناهج، بمبادئ التوالد، من خلال امتداد الترقيم و التعداد من المنتاهي إلى اللامتناهي. كما بين كانتور الاستقلالية النسبية للنظرية الترتيبية وانفصالها عن النظرية الأصلية. و الإشكالية ليست في كون كانتور حاول استخدام النظرية الترتيبية لحل المسائل الخارجية، ولا أن النظرية الترتيبية تطبق على نظريات متقاربة وأخيرا على الرياضيات، الإشكال هو في فكر كانتور، النظرية الترتيبية تقوم بعملية جذب الرياضيات الكلاسيكية.

- النظرية الترتيبية تطورت بالموازاة مع النظرية الأصلية، هي نظرية مستقلة محددة باستمرار العدّ و بواسطة ضم وحدة والانتقال إلى النهاية.

- النظرية الأصلية هي محددة بمسائل ناتجة عن الرياضيات الكلاسيكية

- الأعداد المتصاعدة هي استمرارية لمتتالية الأعداد المنتاهية.

- الاشتقاق الذي استعمله كانتور في مسألة المتصل فتح المجال أمام النظرية الترتيبية.

- رد كانتور مسألة قابلية للمقارنة إلى نظرية الترتيب، فللمقارنة بين المجموعات الجيدة

الترتيب، يكفي البرهنة على إمكانية الترتيب الجيد لمجموعة ما.

- إذا قبلنا أن المتصل جيد الترتيب، فإن الإشكال يتمثل في تثبيت وضعيته على سلم

القوى المؤسسة من خلال فئات الأعداد الترتيبية، و فرضية كانتور هو أن المتصل له قوة

الفئة II، أي 2^A .

- تعريف الأعداد الحقيقية حسب كانتور تسمح بترجمة المتصل الهندسي المستقيم

بمتتاليات الأعداد الناطقة.

- لقد أخضع كفاييس مؤلف كانتور إلى النقد، فالعلاقات العقلانية تمّ التأكيد عليها، بعدما

رد النظرية الأصلية إلى الترتيبية، والعلاقات العرضية تعرقلت عندما ردّ كانتور منهج القطر

إلى سلم القوى المكونة في النظرية الترتيبية. و قد كانت نتيجة النقد أن نظرية المجموعات

تنشط من خلال التأثير المتبادل بين النظرية الأصلية والنظرية الترتيبية.

- إن الفصل بين النظريتين الأصلية والترتيبية، يعني وجود حاجز بين الرياضيات الكلاسيكية ونظرية المجموعات، ومن جهة أخرى فجوة عميقة بين الهندسة والعدّ. فكيف يمكن القضاء على هذه الفجوة؟

الفصل الثالث

أكسمة نظرية المجموعات

المبحث الأول : بوانر ظهور أكسمة نظرية المجموعات

المبحث الثاني : النظرية الكاملة للمجموعة المتناهية

المبحث الثالث : ديدكند وبديهية الاختيار

أدى تطور الفكر الرياضي إلى ظهور أزمة في الرياضيات، كانت سببا في قلق واضطراب الرياضيين والمهتمين بفلسفة الرياضيات، هؤلاء لكي يتجاوزوا هذه الأزمة بحثوا عن أساس ثابت تبنى عليه الرياضيات كي تصل إلى اليقين، ومن بين نتائج هذه الجهود تأسيس نظرية المجموعات، والتي أحرزت نجاحا ملحوظا في دحض مفارقات الأعداد اللامتناهية، ومنه وضع تعريف للاتصال خال من المتناقضات، لكن نجاحها لم يمنع من ظهور مجموعة من مفارقات أو نقائص جديدة، وهذا ما أصبح يهدد يقينها ومصداقيتها، مما دفع الرياضيين إلى البحث للوصول إلى حلول هذه النقائص، وهذا لم يتم إلا من خلال أكسمة (axiomatisation) نظرية المجموعات وتعني تأسيس النظرية على مجموعة من الأكسيومات، هي عبارة عن قضايا واضحة ينطلق منها الرياضي للوصول إلى نتائج مبرهنة. فأكسمة نظرية المجموعات كانت نتيجة ظهور مفارقات رياضية هددت تناسق وتلاحم الصرح الرياضي، فما أهم المفارقات، وكيف تمّ التصدي لها؟ ما هي الحلول المقدمة من طرف الرياضيين؟ وما دور ديدكند في ذلك؟

المبحث الأول: بواذر ظهور أكسمة نظرية المجموعات

أولا - ديدكند من خلال مؤلفه 1888:

إن ديدكند بأبحاثه حول أسس الرياضيات، اكتسب شهرة فهو لا يعد من مكتشفي الجبر الحديث والهندسة الجبرية فحسب، ولكنه أيضا يعتبر أحد العوامل الأساسية في أكسمة الأعداد الحقيقية وصياغة نظرية المجموعات.

إن أغلب أعماله تظهر تأثره بأستاذه غوس (1777-1855 Gauss) بكونتجن⁽¹⁾، الذي أشرف على أطروحته في الدكتوراه التي ناقشها عام 1852 بعنوان*: "نظرية التكامل عند أولر"، كما أنجز أطروحة التأهيل بعنوان: "مقدمة للدوال الرياضية الجديدة"^{**}.

في 1858 تمّ تعيينه كأستاذ و ألقى محاضرة بعنوان "الجزء الأول لحساب التفاضل والتكامل"، أكد فيها على ضرورة تأسيس نظرية الأعداد اللاناطقة. في سنة 1868 نشر

⁽¹⁾ Pierre Dugac : Richard Dedekind et les fondements des mathématiques, JVrin, 1976, p16.

*Die elemente der theorie der eulershen intégrale

** uber die einfubring neuer funktionner in der mathematik

رسالة التأهيل: "حول إمكانية تمثيل دالة بمتسلسلة مثلثية" وهي الرسالة التي ألهمت كانتور بنظرية الأعداد اللاناطقة، وفي نفس المرحلة انكب ديدكند على الدراسات الجبرية نتيجة تأثره بأعمال ديريشلي (*Dirichlet* 1805-1859) بكونتجن سنة 1855. ألف عقبها المؤلفات الثلاثة التالية عرض فيها أهم إبداعاته⁽²⁾:

1- الاستمرارية والأعداد اللاناطقة (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*) وذلك سنة 1972.

2- نظرية الأعداد الطبيعية والجبرية (*théorie des nombres naturels et algébriques*) وقد حرره بالفرنسية سنة 1876.

3- ما هي وفيما تفيد الأعداد؟ *Was sind und was sollen die Zahlen* سنة 1888.

هذا المؤلف الثالث كتبه ما بين سنة 1872 و1878، إلا أن طبعه ونشره كان سنة 1888، لقد تردد في نشره في البداية، إلا أنه بعد نشر مؤلفات "شرويدر" (*Schröder* 1841-1902) و"كرونكر" (*Kronecker* 1823-1891) و"هلمهولتز" (*Helmholtz* 1821-1894) حول نفس الموضوع، وبعد اطلاعه عليها وانتقاده لها، قرر حينها أن يعرض عمله وهذا ما جعله يأتي بعد نشر البحث الأول حول الأعداد اللاناطقة، ولهذا فتاريخيا ديدكند بحث أولا في الأعداد الطبيعية ثم بعدها بحث في الأعداد اللاناطقة.

في سنة 1890 وبعد اطلاع "كيفرستين" (*keferstein* 1752-1806) على مؤلف ديدكند "ما هي الأعداد وفيما تفيد؟" كانت هناك مراسلات بينهما، تحدث فيها عن مؤلفه: "إن نقطة البداية هي تحليل متتالية الأعداد الطبيعية كمعطى، وكموضوع تجريبي، ثم إعادة تعريفها، بواسطة التصورات العامة ونشاطات الفهم"⁽³⁾. نستنتج من قول ديدكند تحديده لخطوات الدراسة والبحث، إذ يقر أنه سيبدأ أولا بتحليل متتالية الأعداد الطبيعية تجريبيا، ثم الارتقاء نحو الصورية، نحو التجريد.

(2) J.P Belna: *La notion du nombre chez Dedekind, cantor, Frege, Op.cit, p 23.*

(3) *Ibid, p 27.*

ولهذا نجده يلخص مؤلفه في أربع نقاط⁽⁴⁾:

- التفرقة بين المنتاهي واللامتناهي.
- تصور عدد الأشياء.
- طريقة البرهنة بالاستقراء التام.
- التعريف بالتراجع.

النقطة الأولى تفترض مقدمة للمفاهيم المجموعائية، أما الثالثة فهي تسمح بتقديم تصور السلسلة والتي ينبثق منها تعريف N ، الرابعة تسمح بتعريف الإجراءات الأولية لعلم الحساب، بينما النقطة الثانية تحدد تصور العدد الطبيعي.

ويبقى أن المفهوم المركزي في المؤلف هو خاص بالتطبيق، الذي يقوم أساسا على مبدأ التعويض: " ففي نسق معطى وليكن Ω من الأشياء أو العناصر، كل عنصر W يعوض حسب القانون بعنصر واحد يقابله، وهذه العملية يطلق عليها اسم التعويض (*Substitution*)، وهي عبارة عن تطبيق النسق Ω ، حيث تكون W' صورة W ، و Ω' هي صورة Ω ⁽⁵⁾، فحسب ديدكند يمكن للعقل المقارنة بين W و W' من خلال تحديد العلاقة بينهما N وهو الأساس الذي تقوم عليه نظرية الأعداد.

والتطبيق هو مستتبط من فعل العدّ: " فإذا لاحظنا عن قرب ما يحدث عندما نحصى مجموعة أو عدد من الأشياء، فإن هذا يؤدي إلى الاعتماد على قدرة العقل في الربط بين الأشياء بمقابلة شيء بآخر أو تمثيل شيء بآخر، على هذا الأساس فقط يجب أن يقوم علم الأعداد ⁽⁶⁾. فديدكند أكد أن علم الحساب يقوم على مفهوم العدّ، والعدّ أساسه التقابل بين العنصرين وهو ما يعني التطبيق، كما أكد أيضا أن علم الحساب "جزء من المنطق وأنه لا يوجد ما هو قابل للبرهنة يتقبل دون برهان ⁽⁷⁾. فالرجوع إلى المنطق هو وسيلة للتخلص من حدس الزمان والمكان، والابتعاد عن الصدق الحدسي.

وفي هذا الإطار يرى **كفاييس** أن ديدكند اهتم بالتحليل والنقد والبناء، فاختلف بذلك عن كانتور، فهو لم يحل المسائل الرياضية بتطوير علم جديد، لكن بإعادة تأسيس الرياضيات

⁽⁴⁾ Pierre Dugac : Op. cit, p 293.

⁽⁵⁾ J.Covailés: philosophie mathématique Op.cit, p 129.

⁽⁶⁾ Dedekind: : was sind us was sollen die Zahlen? Brunschvicg, 1888, p 32.

⁽⁷⁾ J. Cavaillès: : philosophie mathématique, Op.cit, p 120.

الموجودة، ومنه فإن مؤلفه يقوم على تحليل المفاهيم والنقد المنطقي لا على الاختراع، ونظريته تبعد كل مرجعية الحدس من خلال بنائه للنسق، بينما عمل كانتور يقوم أساسا على الاختراع والاكتشاف ويخص اللامتناهي، ويعتمد على الحدس لكي يفسر وجود العدد المتصاعد.

أما عن المنهج فيقوم أساسا على نقد وتحليل المفاهيم الحدسية، بينما النسق هو "تركيب مؤسس على تحليل سابق لمتتالية الأعداد الطبيعية كما هي معطى لنا بصورة تجريبية"⁽⁸⁾. فمعرفة الحسابية قائمة على المركب الذي تتعامل معه على أساس أنه بسيط، ولكن المسألة تتعلق بتبسيطه، وهذا اللبس أو سوء الفهم هو ناتج عن التعود على العد، وكذا نتيجة وجود نوع من التراكم في الممارسة، "منذ الولادة نربط بين الأشياء مستعملين ملكة العقل الذي تقوم على اكتشاف الأعداد، بهذا التطبيق المستمر... نتوصل إلى مجموعة من حقائق حسابية وهي التي يعتمد عليها أسانذتنا الأوائل ويتعاملون معها على أنها شيء بسيط، واضح، معطى في الحدس القبلي"⁽⁹⁾.

ولذا فإن تأسيس علم الحساب يقوم أساسا على تحليل هذه المعرفة والتي كنا نتعامل معها وكأنها بديهية، وهو يختزل إلى متسلسلة من المراجع البسيطة الفردية، ومن ثم إعادة بنائه كمعرفة أولية. ونتيجة تحليله لكتاب الأعداد، مَيَّز كفاييس ثلاث مراحل أساسية⁽¹⁰⁾:

1- بناء النظرية العامة حول مفهوم التطبيق.

2- تعريف الترتيب والتعريف بالتراجع.

3- النظرية الكاملة للمجموعات المتناهية.

هذه المراحل حللها كفاييس وهذا ما سنبينه في المباحث اللاحقة.

ثانيا - المفارقات الرياضية:

إن الاستدلالات المشكوك فيها: المتناقضات (*paradoxes*)

والمفارقات (*antinomies*) لعبت دورا كبيرا في تطوير النظريات في مختلف العلوم

⁽⁸⁾ P C Noguès: de l'expérience mathématique, Op.cit, p 46.

⁽⁹⁾ J. Cavallès : philosophie mathématique , Op.cit, p 120.

⁽¹⁰⁾ Ibid, p 121.

، وإذا ركزنا على الرياضيات فإن الشك هو بداية الوصول إلى المفارقات⁽¹¹⁾. و عندما نقول مفارقة، يعني أن الرياضي يمكن أن يبرهن على صدق وكذب القضية في آن واحد، أي غياب مبدأ عدم التناقض. ويرى بوانكري ان "وقوع المناطق في المفارقات هو نتيجة أنهم يعتبرون في البداية المجموعات متناهية لكنهم يتعاملون معها على أنها لامنتهية"⁽¹²⁾ و لهذا يرى ضرورة عدم تجاهل القضايا اللامتناهية و كذا ضرورة نقادي التصنيفات، و عليه فما هي أهم المفارقات ؟

أول من أشار إلى المفارقات هو زينون الابلي من خلال حجة أخيل والسلحفاة، ثم نجد كانتور مؤسس نظرية المجموعات بدوره قد أشار إلى مفارقة تعرف باسمه، وتوالت المفارقات في الظهور، فنجد مفارقة ريشارد وراسل وبيري ومفارقة بورالي- فورتى وهي مفارقات كان لها الدور الفعال في تطوير النظرية.

أ - مفارقة بورالي فورتى:

ظهرت مفارقة بورالي فورتى سنة 1897 يقول راسل: "... لقد اكتشف بورالي فورتى التناقض المتصل بأكبر عدد ترتيبي قبل أن اكتشف تناقضي..."⁽¹³⁾، فبورالي فورتى اكتشف وجود مفارقة في الأعداد المرتبة اللامتناهية عند كانتور وتتص هذه المفارقة على أن الأعداد الترتيبية اللامتناهية يمكن أن ترتب ترتيبيا تصاعديا، بحيث أنه من بين كل عددين منهما أيا كان يوجد دائما عدد اقل من الآخر، وإن اكبر الأعداد الترتيبية اللامتناهية هو آخر سلسلة تلك الأعداد، ولذا فان هذه المفارقة تثبت أنه كلما حددنا أكبر الأعداد الترتيبية، فانه يمكننا إضافة 1، فنحصل على عدد ترتيبي جديد يكون هو الأكبر⁽¹⁴⁾ ولهذا فأكثر الأعداد الترتيبية اللامتناهية ليس أكبر الأعداد الترتيبية اللامتناهية وهذا تناقض، وعليه فان "مفارقة بورالي فورتى لها علاقة بأكبر عدد ترتيبي متصاعد"⁽¹⁵⁾.

⁽¹¹⁾ Claude Paul Bruter: *De l'intuition à la controverse*, Albert Blanchard, Paris, 1987, p61.

⁽¹²⁾ Henri Poincaré : *dernières pensées*, Ernest, Flammarion, Paris, 1913, p137.

⁽¹³⁾ برتراند راسل: فلسفتي كيف تطورت ، ترجمة عبد الرشيد الصادق، مكتبة الأنجلو-مصرية، مصر، 1963، ص92.

⁽¹⁴⁾ ثابت الفندي: فلسفة العلوم و مناهجها ،دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1996، ص116.

⁽¹⁵⁾ Christian Godin : **La totalité**, Op.cit., p239.

ولتوضيح المفارقة نأخذ مثال مجموعة عناقيد العنب موزعة كما يلي:

عقود فارغ، عقود فيه حبة واحدة، عقود فيه حبتان، عقود فيه ثلاثة حبات... وهكذا إلى العقود الذي يضم ما لانهاية من الحبات، ولتكن هذه العناقيد مرتبة ترتيبا تصاعديا: الأول، الثاني، الثالث... إن العقود الفارغ يشكل الفئة الأولى ونرمز لها بالعدد الترتيبي 1، العقود الذي فيه حبة واحدة يشكل الفئة الثانية و نقابله بالعدد الترتيبي 2، والعدد الترتيبي الذي نقابله بالفئة هو الرقم الذي يلي الأرقام الترتيبية الموجودة في الفئة، وهكذا فالعقود الذي عدد حباته عشرة عدده الترتيبي المقابل هو 11، والفئة التي تشمل على جميع الأعداد الترتيبية وهي لامتناهية، عدده الترتيبي أكبر من أكبر عدد ترتيبي، وبالتالي لا وجود لعدد ترتيبي أكبر من جميع الأعداد وهنا تكمن المفارقة.

ب - مفارقة كانتور:

اكتشفها كانتور سنة 1899، ولكن الإعلان عنها كان في سنة 1932، وتتعلق بأكثر الأعداد الأصلية وفحوى هذه المتناقضة: أن نظرية المجموعات تنص على إمكانية توزيع عناصر مجموعة ما، إلى مجموعات جزئية تكون أكثر عددا من عناصر تلك المجموعة⁽¹⁴⁾.

مثال: إذا كانت لدينا المجموعة A حيث: $A = \{0,1,2,3\}$

فإن مجموعة أجزاء المجموعة A :

$$A = \{F, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{1,2,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$$

نلاحظ هنا أن عدد المجموعات الجزئية لـ $A = 16$ ، بينما عدد عناصر المجموعة

$A = 4$. يقول راسل: " أفرض أن مضيفك قد خيرك في نهاية الطعام بين ثلاث أنواع من الحلوى، ودعاك لتناول نوع أو نوعين أو لتناول الثلاثة جميعها حسب مشيتك، فكم طريقة من طرق التصرف أمامك؟ أنت قد ترفض الأنواع جميعا، هذا اختيار واحد، وقد تأخذ منها نوعا واحد وهذا ممكن على أنحاء ثلاث ومن ثمة يتيح لك هذا ثلاثة اختيارات أيضا وقد تختار اثنين من بينها، وهذا أيضا ممكن على أنحاء ثلاث أو أنك تختار الثلاثة جميعها، وهذا ما يتيح لك إمكانية واحدة نهائية، بذلك مجموع الاختيارات الممكنة ثمانية اختيارات"⁽¹⁷⁾.

⁽¹⁶⁾ محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور العقل العلمي، مرجع سابق، ص 100.

⁽¹⁷⁾ برتراند راسل: فلسفتي كيف تطورت، مرجع سابق، ص 96.

ولهذا فإن تحليل راسل للمفارقة يطابق والمثال العددي الذي تم تقديمه، وهو ما يؤكد أن الجزء قد يكون أكبر من الكل وهذا تناقض.

ج- مفارقة راسل:

هي من أشهر المفارقات التي انطوت عليها نظرية المجموعات، ولقد اكتشفها برتراند راسل سنة 1901، وتتعلق بمجموعة جميع المجموعات " ...وقد كان اكتشافي أحد هذه المتناقضات في ربيع 1901... واهتديت إلى هذا التناقض عندما كنت أتأمل برهان كانتور والذي يثبت به أن ليس ثمة عدد أصلي (عاد) أكبر من سائر الأعداد" (18).

ويوضح راسل هذه المفارقة بقوله: الفصل الشامل الذي نبحت أمره والذي يجب أن يشمل كل شيء يجب أن يشمل نفسه كواحد من أعضائه، وبعبارة أخرى إن وجد مثل هذا الشيء الذي نسميه كل شيء، إذن " كل شيء " شيء ما، وعضو من الفصل " كل شيء " ولكن عادة لا يكون الفصل " عضوا من نفسه " فالإنسانية ليست إنسانا (19).

فمفارقة راسل تطرح سؤالا جوهريا: هل مجموعة الكل هي عنصر من ذاتها؟ فإذا أردنا تكوين جماعة كل الفصول التي ليست أعضاء أنفسهما، فهذا فصل: هل هو عضو من نفسه أم لا؟ فإن كان فهو أحد تلك الفصول التي ليست أعضاء من أنفسها، أي ليس عضوا من نفسه، وإن لم يكن، فهو ليس أحد تلك الفصول التي ليست أعضاء من أنفسها، أي أنه عضو من نفسه، وهكذا كل من الفرضين - أنه عضو وليس عضوا من نفسه - يستلزم تناقضا، وفي هذا تناقض .

مثال: فهرس جميع الفهارس هل يكون عضوا أولا يكون في ذاته؟ إذا كان فهرس جميع الفهارس يشمل ذاته كعضو فهو حينئذ سيكون فهرسا زائدا بين جميع الفهارس، ومن ثم لا يكون فهرسا لجميع الفهارس (20). أما إذا كان الفهرس لا يشمل ذاته؟ فهل هذا ممكن: وهنا نجد أنفسنا أمام " مجموعة جميع المجموعات " هل تشتمل على ذاتها أم لا؟

(18) نفس المرجع، ص 50.

(19) برتراند راسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص 199.

(20) روبنسون جروف: رسل، ترجمة أمام عبد الفتاح إمام، المجلس الأعلى للثقافة، القاهرة، ط1، 2005،

إما أن المجموعة تحتوي على ذاتها، وحينها لا يمكن أن تكون ضمن المجموعات التي لا تحتوي على ذاتها، ومن ثم لا تنتمي إلى مجموعة جميع المجموعات التي لا تشمل على ذاتها، هذا في حين أنها هي نفسها [مجموعة جميع المجموعات التي لا تحتوي على ذاتها]، وهنا تناقض فيجب إذن ألا تحتوي على ذاتها.

إذا لم تحتو المجموعة على ذاتها، فهذا يعني أنها إحدى المجموعات التي لا تحتوي على ذاتها، وبالتالي يجب أن تنتمي إلى [مجموعة جميع المجموعات التي تحتوي على ذاتها]، وبما أنها هي هذه المجموعة بالذات فيجب أن تنتمي إلى نفسها، أي تحتوي على ذاتها: وهذا تناقض.

ولهذا فالرياضي يجد نفسه أمام إشكال صعب: إذا انطلق من فرضية أن "مجموعة جميع المجموعات التي لا تحتوي على ذاتها هي مجموعة تشمل على نفسها كانت النتيجة هي أنها لا تشمل على نفسها، وإذا انطلقنا من الفرضية المضادة وقلنا إنها "مجموعة" لا تشمل على ذاتها كانت النتيجة أنها تشمل على ذاتها" (19). فإثبات القضية ونقيضها يؤديان إلى تناقض.

ومفارقة راسل تشبه مفارقة الكريتي الكذاب (20) الذي قال: كل الكريتيين كاذبون. فلو كان يقول الحقيقة بشأن الكريتيين فإنه في هذه الحالة يكذب، لكن لو كان يكذب فهو يقول الحقيقة، ولهذا "فإن كان يكذب فهو كذب صادق، وهو إذن لا يكذب، وإذا لم يكن يكذب فهو حين يقول إني أكذب فهو يكذب، ومن كلا الفرضين يلزم التناقض" (21).

ومما سبق فإن مفارقة راسل أساسها "مجموعة جميع المجموعات"، وحلها كان له دور مهم في بناء النظرية الخاصة بالمجموعات وسياقها الأكسيوماتيكي.

د - مفارقة ريشارد:

(19) عابد الجابري: مرجع سابق، ص 102.

(20) روبنسون جروف: مرجع سابق، ص 39.

(21) راسل: أصول الرياضيات: الجزء 1، مرجع سابق 18.

لقد عرض " ريشارد " (1862-1956 Jules Richard) نص هذه المفارقة في مقال بعث به إلى المجلة العامة للعلوم الدقيقة والتجريبية، في 2 جوان 1905 ويمكن تلخيص المفارقة⁽²²⁾ كما يلي:

1- إذا كان لدينا 26 حرف أبجدي، ترتيب الحروف على التوالي: مثلى مثلى، ثلاثي ثلاثي، رباعي رباعي... " فنتحصل على جدول لامتناهي من الحالات أو الإمكانيات من الحروف"⁽²²⁾.

2- إذا كان لدينا أعداد، كل عدد يعرف بواسطة كلمات ومنه الحروف، فكل حالة من الحروف من الجدول تمثل تعريفا للعدد. فنحصل حينها على مجموعة E لكل الأعداد المعرفة بواسطة عدد متناهي من الكلمات ومنه الحروف.

3- ليكن p ، الذي يتكون من "ن" عشري لـ "ن" عدد من المجموعة E ، نكون عددا حيث 0 هو عدده الصحيح، وبالنسبة لـ "ن" عشري $1+p$ ، إذا كانت p 8^{-1} و 9، فهذا العدد N لا ينتمي إلى E ، وإذا كان "ن" عدد من E ، فإن "ن" رقم له يكون "ن" رقم عشري لهذا العدد وهذا لا يوجد.

4- وإذا ما أطلقنا على العبارة التي عرفنا بها N بـ G فإن العدد N معرف بواسطة كلمات G ، أي بعدد متناهي من الكلمات، إذن يجب أن ينتمي إلى E ، ولكنه لا ينتمي إلى E هنا التناقض.

كما تطرق برتراند راسل إلى هذه المفارقة بالتحليل في مقال نشره سنة 1906، وأثناء بحثه، أشار إلى مفارقة بيري (Berry)^{*} ونصها: " أصغر عدد طبيعي غير مسمى بأقل من ثمانية عشرة حرفا، وظهر مسمى بسبعة عشرة حرفا"⁽²³⁾. ويرى بوانكري أن هذه المفارقة قريبة من مفارقة ريشارد إلى درجة أنها أحيانا تأخذ هذا الاسم⁽²⁴⁾، ويؤكد بوانكري أن كل المفارقات ناتجة عن الوقوع في حلقة مفرغة و عدم قدرتهم على تجاوزها، " فالمناطق وقعوا

⁽²²⁾ Jules Richard : principes des mathématiques et le problème des ensembles, Revue générale des sciences pures et appliquées Année 1905/juin N^o: 12, p 12.

⁽²²⁾ Denis Vernant : La philosophie mathématique Bertrand Russel, J.Vrin, Paris, 1993,p 274.

^{*} Berry: هو اسم لمكتبي في لندن أسند إليه راسل المفارقة.

⁽²³⁾ Bertrand Russell: Les paradoxes de la logique, revue de métaphysique et de morale, année 14, Vol 5, 1906, p 645.

⁽²⁴⁾ Henri Poincaré, La logique de l'infini, revue de métaphysique et de morale, année 17, Vol 5, 1909, p 481.

في الفخ عندما اعتمدوا على المجموعات المتناهية و تعاملوا معها على أساس أنها لامتناهية⁽²⁵⁾.

كانت إذن هذه أهم المفارقات التي ظهرت في بداية القرن 20، و التي أثارت بل أكدت تساؤلات الرياضيين حول صلاحية قضاياهم، ولحلها اضطروا إلى اختيار طريق مخالف ألا وهو الأكسمة، ويبقى أن نقر أن طريق المفارقات هو السير الصحيح للوصول إلى الجديد.

المبحث الثاني: النظرية الكاملة للمجموعة المتناهية

أولاً - النسق والتطبيق والسلسلة:

أ - النسق والتطبيق عند ديدكند:

1 - تعريف النسق:

إن إشكالية مؤلف ديدكند الثالث تدور حول العدد، فما هي الأعداد؟ الأعداد هي اختراعات حرة للعقل الإنساني، إنها تساعد كواسطة لفهم تنوع الأشياء بسهولة أكثر دقة⁽²⁶⁾. وإجابة ديدكند تتفق مع موقف كانتور وتختلف مع فريجه (1948 Gottlob Frege - 1925)، فالأول أكد أن الرياضيات أثناء تطورها هي حرة، وخاضعة فقط لشرط الوضوح والتحرر من التناقض، بينما فريجه يؤكد أن الرياضي مهمته هي نفسها مهمة الجغرافي، تقوم أساساً على اكتشاف ما هو موجود وإعطائه اسم.

وبعد تعريفه للعدد في كتابه "الأعداد"، بدأ بتعريف الشيء: "هو كل موضوع فكرنا"⁽²⁷⁾، وقد أكد ديدكند كما أشرنا من قبل، أن بحثه يبدأ من المحسوس ليرتقي نحو الصوري، المجرد، ولهذا في بداية حديثه عن العدد، أكد أن الشيء هو كل ما يمكن قوله أو التفكير فيه، ومجموعة الأشياء تكون نسقا فالنسق هو: " غالباً ما تكون أشياء مختلفة a, b, c ... موحدة في

⁽²⁵⁾ Ibid, 481.

⁽²⁶⁾ Dedekind: was sind us was sollen die Zahlen? , Op cit, p 32.

⁽²⁷⁾ Ibid, p 44.

وجهة نظر واحدة، مجتمعة في الفكر لسبب ما ، نقول إذن أنها تكون نسقا S ، فالأشياء a, b, c ... المحتواة في S هي عناصر S ، والعكس S هو مكوّن من هذه العناصر⁽²⁸⁾.

هذا التعريف هو ماصدقي، و لكي يكون التعريف دقيقا ومحددا يجب إضافة العبارة التالية: " إن S هو محدد إذا وفقط يمكننا القول أن الشيء (x) هو عنصر من S أو لا " أي أنه ينتمي إلى S أو لا ينتمي.

ومن تعريف النسق نستنتج ما يلي:

- إذا كان لدينا نسقان لهما نفس العناصر فهما متطابقان.
 - التمييز بين العنصر والنسق المكوّن من عنصر واحد، ومن تم فالتطبيق (تا) على النسق S هو علاقة يربط كل عنصر من S بشيء محدد.
- ولقد أكد **كفاييس** أن هذا التعريف قد سبقه إليه بولزانو⁽²⁹⁾، وأنه بالرغم من البحث المستمر لديدكند حول الموضوع، فإنه لم يميز بين العلاقة التي تربط الجزء بالمجموعة، وعنصر بمجموعة، والمجموعة بالجزء.

2- التطبيق:

- إن دراسة ديدكند ركزت على العلاقات بين المجموعات: الاتحاد، التقاطع، وقبلهما التطبيق. والتطبيق (*application*) يتميز بـ⁽³⁰⁾:
- التطبيق ليس بالضرورة تقابلي (*bijective*).
 - التطبيق الذي أكد عليه هو تطبيق النسق في ذاته مما يجعله عبارة عن سلسلة (*chaîne*).

ب - السلسلة:

1 - تعريف السلسلة والسلسلة الخاصة:

يرى **كفاييس** أن ديدكند ميّز بين السلسلة والسلسلة الخاصة (*la chaîne et la chaîne propre*)، وهو المفهوم الذي يعتبر أساس برهان الاستقراء التام. فخاصية السلسلة

⁽²⁸⁾ *Ibid*, p 45.

⁽²⁹⁾ *J. Cavailles : philosophie mathématique, Op.cit, p 122 .*

⁽³⁰⁾ *Ibid*, p 123.

بالنسبة إلى تطبيق معطى وليكن f ، هي ثابتة بالنسبة لهذا التطبيق، الاتحاد، والتقاطع، حيث أن إمكانية تعريف النسق أو غلاف (*enveloppe*) المجموعة الجزئية، بالنسبة للتطبيق هي السلسلة الخالصة M_0 التي نستنتجها من تقاطع كل السلسلات حيث M هي جزء منها⁽³¹⁾، وهنا تأكيد على الطابع المجرد المتصاعد للتعريف: إن مجموع السلسلات الحاوية لـ M غير معطاة من أي خاصية، ولكن موضوعها تجريدي ولهذا يستنتج دور السلسلة - الصورة (*chaîne - image*)، فصورة السلسلة الخالصة للمجموعة هي السلسلة الخاصة

$$\text{بصورتها}^{(32)}: (M\mathcal{C})_0 = (M_0)\mathcal{C} = M\mathcal{C}_0$$

لأنه إذا كانت لدينا: $M\mathcal{I} \ M_0\mathcal{P} \ M\mathcal{C}\mathcal{I} \ (M_0)\mathcal{C}$

وبما أن (M_0) هي سلسلة:

$$(M\mathcal{C})_0\mathcal{I} \ (M_0)\mathcal{C}$$

وهي $M\mathcal{C}\mathcal{I} \ (M\mathcal{C})_0\mathcal{P} \ M + (M\mathcal{C})_0$

سلسلة

$$\setminus \ M_0\mathcal{I} \ (M\mathcal{C})_0 + M$$

$$\mathcal{P} \ (M_0)\mathcal{C}\mathcal{I} \ [(M\mathcal{C})_0]\mathcal{C} + M\mathcal{C}\mathcal{I} \ (M\mathcal{C})_0$$

ومن هذا التحليل نصل إلى نتيجة أخرى: $M_0 = M + (M\mathcal{C})_0$

2 - الاستقراء التام:

من هذه المقدمات يصل ديدكند إلى مبدأ الاستقراء التام ونصه أنه: إذا كانت خاصية هي صادقة بالنسبة لـ M ، فهي كذلك بالنسبة للسلسلة الخالصة M_0 لـ M وهذا بواسطة التطبيق f .

البرهان:

إذا كانت لدينا خاصية لـ M ولتكن S وهو نسق الأشياء التي تحمل هذه الخاصية فإن

:

$$M \mathcal{I} S$$

وبالفرضية لدينا: $G = M_0$

إذن: $G \mathcal{I} S$

⁽³¹⁾ *Ibid*,p123.

⁽³²⁾ *Ibid*,p123.

$$G \cong G$$

ومنه:

$$M_0 \cong G$$

فـ G هي سلسلة إذن:

$$M_0 = G \cong S$$

وبهذه المفاهيم الخاصة بالمجموعات و التطبيق أكد ديدكند على ضرورة توظيف التطبيق التبادلي (*bijection*) وصياغة فرضية حول علاقة الجزء بالكل: إما أن المجموعة يمكن أن تطبق بصورة تقابلية على جزء صحيح منها أو أن العملية هي مستحيلة.

ثانيا - المجموعات اللامتناهية:

أ- اللامتناهي عند ديدكند:

من نتائج نظرية التطبيق تفرع المجموعات إلى مجموعات متناهية وأخرى لامتناهية، وهي النظرية التي توصل إليها قبل بولزانو وكانتور وهذا ما أكده بقوله: "سنوات كثيرة قبل ظهور مذكرة كانتور، وفي العصر الذي كان فيه عنوان مؤلف بولزانو غير معروف بالنسبة لي" (33). وقد لاقى موقفه هذا ردودا أشارت إلى أن ديدكند قد اطلع على أعمال بولزانو: "إن التحرير الأولي للمقال (*Was sind und was sollen die Zahlen*) كان بين 1872 و 1878، ولم يحتو على نظرية وجود مجموعة لا متناهية، هذه الأخيرة ظهرت في المقال النهائي لسنة 1888، وهذا ما يدل على أن ديدكند اطلع على نظرية بولزانو" (34). فديدكند أقتنع أنه لتأسيس نظرية الأعداد الطبيعية فمن الضروري وجود مجموعة لامتناهية.

وفي تعريفه للامتناهي، صرح ديدكند أن النسق يكون لا متناهيًا عندما يكون مماثلاً لجزء من أجزائه، أو يكون بينهما تطبيق تقابلي (35)، هذا التطبيق الذي يسمح بتمييز المجموعات المتناهية واللامتناهية، ولكن السؤال المطروح: هل مثل هذه الأنساق اللامتناهية موجودة فعلاً في عالم أفكارنا؟

دون وجود دليل للوجود المنطقي لهذا العالم، فلا يمكننا إذن أن نميز إذا كان مثل هذا النسق هو في مأمن عن التناقضات الداخلية أم لا، ولهذا كان عليه أن يبرهن على النظرية

(33) *Ibid*, p124.

(34) *P. Dugac: Op.cit*, p 81.

(35) *Jacqueline Boniface: Hilbert et la notion d'existence en mathématique, Op.cit*, p18.

التالية: " توجد أنساق لا متناهية " والبرهان كان عن طريق مثال: عالم أفكاري، أي مجموعة كل الأشياء التي يمكن أن تكون موضوعا لأفكارنا هي لامتناهية⁽³⁶⁾.

البرهان:

إذا كان النسق S مجموعة الأشياء التي يمكن أن تكون مواضيع لأفكارنا، فهذا يعني وجود مجموعة لا متناهية. فكل شيء تقابله فكرة، ولهذا نعرف التطبيق $S \rightarrow S$ أي فكرة الشيء لفكرنا هي كذلك شيء لفكرنا، وهذا التطبيق هو حسب ديدكند متباين (*injective*). فإذا كان: $b \neq a$ في S فإن صورتيهما $a' \neq b'$. إضافة إلى هذا، فإن صورة S هي S' وهي بهذا التطبيق جزء من S ، ولهذا ففي S توجد عناصر غير موجودة في S' كوجود الأنا الشخصي (*mon moi*) وهذا ما يجعل من S لامتناهيا.

موقف ديدكند أكده بولزانو، فالتعريف لا يعني بالضرورة أن الشيء لامتناهي، ولهذا فقد برهن على إمكانية وجود مثل هذه المواضيع من خلال بناء مجموعة لامتناهية⁽³⁷⁾. وقدم البرهان التالي لإثبات القضية⁽³⁸⁾، يوجد على الأقل حقيقة معرفة كما يلي:

إذا كانت " كل قضية هي خاطئة "، فإن القضية التالية " كل قضية هي خاطئة " هي صادقة، إذن يوجد على الأقل حقيقة.

صديق الحقيقة

المشكك

ق صادقة (نقطة البداية)

توجد على الأقل قضية صادقة غير ق

هذا إثبات أن " ك " متميزة عن " ق "

وهي صادقة

ماعدًا ق لا توجد قضية صادقة

فإذا كانت ك صادقة فإن:

ك¹ ق وكلاهما صادقة

وهذا ما لم يرد المشكك بلوغه

إذن يوجد على الأقل قضيتان صادقتان

⁽³⁶⁾ P. Dugac: *Op.cit*, p 88.

⁽³⁷⁾ *Ibid*, p 89.

⁽³⁸⁾ Jean Sebestik : *Logique et mathématique chez Bolzano*, *Op.cit*, pp447-448.

وهكذا يتواصل الحوار إلى أن نصل إلى ن

توجد ن حقيقة

هذا الحكم هو قضية صادقة

ماعدان لا قضية صادقة

متميزة عن ن

ومن ثم ن + 1 صادقة

إذن توجد على الأقل ن + 1 صادقة.

وعليه فإن مجموعة القضايا الصادقة لامتناهية. ومنتالية القضايا شبيهة بمنتالية الأعداد الذي أساسها الوصول إلى عدد أكبر من كل عدد وهذا هو اللامتناهي.

فنظرية اللامتناهي هي إثبات لوجود اللامتناهي الرياضي في كل نظرية، لكن ما يؤخذ على بولزانو هو اعتماده على لامتناهي فرضي غير يقيني، بينما الأعداد عند ديدكند وسيلة للوصول إلى اللامتناهي بالتطبيق، فيجب أن يكون نسق أفكار الأفكار صادقا جزءا من نسق الأفكار. وهو ما عبر عنه بمصطلح " الأنا الخاص بي " (*mon propre moi*): " أريد البرهنة للدقة: الأنا الخاص بي يمكن أن يكون موضوع تفكيري... بالرغم أنه ليس نفسه التفكير⁽³⁹⁾. و يرى كفاييس أن ديدكند اعتمد في إثباته للامتناهي على فكرة متعالية، خارجة عن إطار الرياضيات لأن ما قاله عن الأنا كمثل لفكرة لا يمكن أن تكون فكرة الفكر وهي أفكار فلسفية لا علاقة لها بالفكر الرياضي.

ب - الموضوعانية* (*thématisation*) والترتيب:

إن الحديث عن اللامتناهي والنسق يؤدي إلى الحديث عن الموضوعانية، ويقصد بها ديدكند أن يجعل من قضية (كما هو الشأن عند بولزانو) أو فكرة (ديدكند) موضوعا لقضية أخرى أو فكرة، وجعل الفكرة الأخيرة موضوع منطقي لفكرة أخرى. إن الموضوعانية هي المصدر الحقيقي للامتناهي الرياضي، وهي المنهج الذي اعتمد عليه في عملية العدّ الذي عرفه كفاييس: " إن التشكيلة المتناهية من الأشياء المرقمة هي مجتمعة في نسق مماثل

⁽³⁹⁾ Dedekind : lettre à Kiferstein du 27 Février 1890, traduction A. Sinaceur, dans *logique et fondements des mathématiques*, (sans édition), 1992, p 175.

* ترجمت مصطلح *thématisation* بالموضوعانية و هي نفس ترجمة *thématisation* و تعني صلة الموضوع بالظواهر المرتبطة به، أو طبيعة الظواهر المرتبطة بالموضوع (سهيل ادريس : المنهل، قاموس فرنسي عربي، دار الآداب، بيروت، 28، 2000، ص 1197).

للوحدة، والتي يمكن أن نضيف إليها وحدة أخرى⁽⁴⁰⁾، ولذا فإن عملية العدّ تتأسس بواسطة إضافة وحدة لأخرى أو نقسم وحدة إلى اثنتين.

إن تضاعف الأشياء المعدودة في كل مرحلة، هي بمثابة شيء يعتبر عنصرا واحدا، حتى يخضع لنفس الإجراء الذي ينتج العدد اثنين $1+1$ ، ثم نضيف وحدة ثالثة فنحصل على ثلاثة $1+ [1+1]$ ثم على أربعة $[1+ [1+1]]$ وهكذا... فإذا كانت خاصية العدّ هي إضافة وحدة لأخرى، فإن الفعل الذي يسمح بإجراء هذه العملية هو الموضوعانية، وما البرهان المستخدم لإثبات اللامتاهي إلا تطبيقا لهذا الترتيب.

وقد اهتم كفايسس بفكرة الموضوعانية، حيث ركز على هذا المفهوم في أطروحته الأساسية، وجعل منها أحد السياقات الأساسية التي تحكمت في التطور الرياضي، وأقرّ أن البرهان الديدكندي يعتبر أول اعتراف في المسار التاريخي بقدرة الموضوعانية⁽⁴¹⁾. هذه الأخيرة تسمح بإثبات وجود لامتناهي معرفّ بالترتيب، ولهذا فإن الموضوعانية تستلزم وجود الترتيب.

ومما سبق فإن مفاهيم: الترتيب والتطبيق واللامتناهي والسلسلة تكون مادة نظرية المجموعات، وهذه المفاهيم تستخدم من أجل تعريف الأعداد الطبيعية كنسق لامتناهي بسيط، ويكون كذلك عندما يتحقق تطبيق مماثل أو تقابلي⁽⁴²⁾.

وإذا ما كان لدينا عنصران m و n ، فبينهما إحدى العلاقتين التاليتين:

$n < m$ أو $m < n$ وهي تعكس علاقة الترتيب، $n < m$ إذا كان m محتوى

في السلسلة الخالصة لـ n و $m < n$ إذا كان n محتوى في السلسلة الخالصة لـ m .

وإذا ما عبرنا عن هذه العلاقات بواسطة السلسلات الخالصة والسلسلات الصورة نكتب:

$$n_0 \subset m'_0 \quad m_0 \subset n'_0$$

وتتميز هذه العلاقة بالخصائص الثلاثة التالية:

- اللاتناظر (*asymétrie*).
- اللانعكاسية (*non réflexivité*): من غير الممكن كتابة $m < m$ أو $n < n$.
- التعدي (*transitivité*): $m < z$ و $n < z$ \Rightarrow $m < n$.

⁽⁴⁰⁾ J. Cavailles: : philosophie mathématique, Op.cit, p 125.

⁽⁴¹⁾ P C Noguès :De l'expérience mathématique Op. cit,p48.

⁽⁴²⁾ J. Cavailles: : philosophie mathématique, Op.cit,p 126.

وإذا ما عبرنا عن هذه العلاقات بواسطة السلسلات الخالصة والسلسلات الصورة:

- اللانعكاسية، من المستحيل ان تكون لدينا : $n_0 \subset n'_0$.
- اللاتناظرية: $m_0 \subset n'_0$ أو $n_0 \subset m'_0$.
- التعدي: $n_0 \subset m'_0$ $m_0 \subset p_0$ $p_0 \subset n'_0$.

فكل عنصر له صورته من خلال علاقة الترتيب، ومن نتائج نظرية لترتيب التعريف بالتراجع.

ج - التعريف بالتراجع:

إذا كان لدينا نسقا S والتطبيق f من $S \rightarrow S$ فإن التعريف بالتراجع هو، على إيجاد تقابل بين S و N حيث:

1- لتكن صورة عنصر I معطى s من S .

2- لتكن صورة كل عدد n' صورة سابقة n . بالنسبة لـ f في S (43).

هذه التعريفات تكون محققة إذا برهننا أنه: إذا كانت لدينا s و f فيوجد تطبيق واحد g ، تحقق الشروط التالية:

- 1) $g(N) \subset S$
- 2) $g(I) = s$
- 3) $g(n') = fog(n)$

والبرهنة تتم عن طريق الضم (*itération*)، فنثبت أولاً أنه بالنسبة لكل عدد n توجد دالة واحدة وواحدة فقط $g(n)$ تحقق الشروط التالية:

$$1') g_n(Z_n) \subset S$$

$$2') g_n(I) = s$$

$$3') g_n(m') = fog_n(m)$$

أما إذا كانت $n \leq m$ نتحصل على:

$$g_n'(m) = g(m)$$

$$g_n'(n') = fog_n(n)$$

ومنه نستنتج : $gn = gn(n)$

(43) Ibid ,p 128.

وهذا يعني أنه لكل n توجد صورة واحدة وواحدة فقط هي $g(n)$.

وبناء على المقدمات السابقة، فإن منهج الضم أو الدمج يقوم أساساً على توحيد كل الدوال: $f_n = f_n(n)$ ، ومنهج الضم يتناظر مع المنهج الكانتوري القطري، ففي الحالتين تعريف الدالة f يتم انطلاقاً من متتالية الدوال $f(n)$ ⁽⁴⁴⁾.

كما وظف ديدكند التعريف بالتراجع لتعريف الأسية $(exponentiation)$ a^n ، وهذا ما يؤدي إلى إعادة طرح مفهوم السلسلة الخالصة مرة أخرى. فإذا كانت لدينا زمرة التطبيقات $S \rightarrow S$ ، فإن الأسية تترجم تكرار التطبيق، فيمكن إعطاء معنى لتكرار "ن" تطبيق، ومنه البرهنة أن السلسلة الخالصة لـ A والتي عرفناها على أنها تقاطع السلسلات الحاوية لـ A ، هي نسق مكون من A بتكرار التطبيق.

فهذا النسق الذي هو عبارة عن اتحاد الأنساق A ، $f(A)$ ، $f_n(A)$ ، هو سلسلة وهي محتواة في كل سلسلة تحتوي A .

ولهذا فتكرار التطبيق يعني إعادة عدد من المرات، وهذا ما يفترض مفهوم العدد، وبما أن الغرض من البحث هو تعريف العدد، فإن ديدكند وجد نفسه في حلقة مفرغة، ولم يستطع تجاوزها إلا من خلال تحديد السلسلة الخالصة انطلاقاً من تكرار متتالي ولا محدود. فالمتسلسلة الخالصة منهج مجرد يعوض التكرار الحدسي، ويعمم التكرار اللامحدود. وفي النسق اللامتناهي البسيط للأعداد الطبيعية الترتيبية، المتسلسلة الخالصة تعبر عن الانتقال إلى ما لا نهاية، بينما التطبيق يعبر عن وصل وحدة، إضافة وحدة.

ومما سبق فإن ديدكند قد عرّف وحدد المجموعات اللامتناهيّة البسيطة للأعداد الطبيعية من خلال:

- 1- برهان وجود اللامتناهي.
- 2- البرهنة على متتالية الأعداد الطبيعية وتميزها بخاصية الترتيب.
- 3- اعتماده على أكسيومين هما:

- التعريف بالتراجع.
- التعريف بمبدأ الاستقرار التام القائم أساساً على مفهوم الضم.

⁽⁴⁴⁾ Ibid, p131.

ثالثاً - المجموعات المتناهية:

يعرّف ديدكند المجموعات المتناهية بأنها: "التي ليست لامتناهية، أي لا يمكن وضع المجموعة في تقابل مع أحد أجزائها"⁽⁴⁵⁾. فنظرية ديدكند الأساسية أساسها أن النسق المتناهي يمكن أن يطبق تطبيقاً متبايناً (*Injectivement*) على نسق الأعداد الطبيعية الأقل أو يساوي n ، حيث n أصلي (*card*) النسق.

فنظرية الأنساق المتناهية تفترض النسق اللامتناهي البسيط للأعداد الطبيعية الترتيبية، وهذا التعريف للمتناهي يجب أن يمر عبر اللانهائي وعبر مفهوم التطبيق، مما جعل ديدكند يؤجل الحديث عن المجموعات المتناهية إلى نهاية المقال، ومن التعريف نستنتج خصائص المجموعات المتناهية:

- 1- كل جزء من مجموعة متناهية هو متناهي.
 - 2- المجموعة المكوّنة بضم عنصر إلى مجموعة متناهية هي متناهية.
 - 3- مجموعة أجزاء مجموعة متناهية هي متناهية.
- ومما سبق فإن ديدكند تطرق إلى مفهوم المجموعات اللامتناهية، واتخذ منها قاعدة للحديث عن المجموعات المتناهية من خلال مبدأ الاستقراء التام، الترتيب والتطبيق، وعموماً فإن النتائج المجموعاتيّة لديدكند تسمح بالحديث عن الأكسيوماتيك المجموعاتي وأساسه⁽⁴⁶⁾:
- 1- تعريف عام للشيء الذي يمكن أن يكون عنصراً في مجموعة.
 - 2- مفهوم ما صدقي للمجموعة، يكمل بالمفهوم (*intensionnelle*).
 - 3- تأكيد وجود المجموعة ذات العنصر الواحد $\{a\}$.
 - 4- توضيح معنى المجموعة الجزئية أو جزء من المجموعة المحدد بالعلاقة أكبر، أو الاحتواء.

5- تعريف اتحاد المجموعات $f_n(n)$.

6- تعريف قاطع عدد من المجموعات.

ولكن ما نلاحظه هو أن ديدكند لم يهتم كثيراً بالمجموعة الخالية.

⁽⁴⁵⁾ *Ibid*, p 133.

⁽⁴⁶⁾ Jean-Pierre Belna : *La Notion de Nombre Chez Dedekind, Cantor, Frege, Op. cit*, p95.

لكن ما نلاحظه هو أن ديدكند لم يهتم كثيرا بالمجموعة الخالية، كما أننا نلاحظ على براهين ديدكند، استخدامه الضمني لبديهية الاختيار وهي البديهية التي أكد عليها "زرمولو"، فما المقصود من هذه البديهية وما علاقتها بالأكسمة عند ديدكند؟

رابعا - ديدكند وبديهية الاختيار

لقد حاول ديدكند البرهنة على وجود مجموعة لامتناهية، وهذا ما جعله يعتمد على بديهية اللامتناهي، التي تؤكد على إمكانية تكوين مجموعة لامتناهية، والحديث عن بديهية اللامتناهي تقودنا إلى الحديث عن بديهية الاختيار (*axiome du choix*)، وهي بديهية تخص النظرية الأكسيوماتيكية للمجموعات ونص البديهية: إذا كانت لدينا جماعة* (*famille*) غير خالية تتكون من المجموعات غير الخالية، توجد دالة الاختيار حيث لكل واحدة منها نربط أحد عناصرها. وتعبير آخر: "إذا كانت لدينا تشكيلة C من مجموعات غير خالية، ومنفصلة مثلي، توجد مجموعة حيث تقاطعها مع كل مجموعة من C ، هي مجموعة ذات عنصر واحد"⁽⁴⁷⁾، فمن الممكن اختيار عنصر واحد وواحد فقط في كل مجموعة، وهذا من أجل تكوين مجموعة جديدة.

بديهية الاختيار أعلن عنها زرمولو سنة 1904*، من خلال البرهنة على نظرية الترتيب في المجموعات، " فبرهنته تقوم أساسا على هذه البديهية أو كما يطلق عليها أيضا بديهية زرمولو نسبة إلى مؤسسها "⁽⁴⁷⁾. فقد استخدم هذه البديهية للبرهنة على أن المجموعة يمكن أن تكون جيدة الترتيب، ولكي يجعلها مقنعة أشار إلى البراهين السابقة التي اعتمدت على هذه البديهية، بما فيها، برهان ديدكند، لكن بالرغم من الصبغة النقدية التحليلية لبرهان ديدكند، توجد صلة بين برهان زرمولو والأبحاث التي قام بها ديدكند.

* جماعة رمزها: $\{A_i\}$ حيث A هي رمز المجموعة الجزئية أو يرمز لها بـ U ، ومنه فالجماعة هي مجموعة المجموعات.

Paul Rholmos: *introduction à la théorie des ensembles*, Gauthier-Villars, Paris, 2^{me} édition, 1970, p 44.

⁽⁴⁷⁾ Julien Linassier : *Faut-il choisir l'axiome du choix ? dans L'infini, Tangente, Op.cit, p72.*

** بديهية الاختيار استخدمت ضمنا من طرف كانتور، وأشار إليها لأول مرة من طرف بيانو (1890)، وليفى (*Beppo levie*) (1875-1961) سنة 1902 وزرمولو صرح بها وأطلق عليها الاسم.

J.Cavaillès: *philosophie mathématique*, Op.cit, p 136.

⁽⁴⁷⁾ Vladimir Maz'ya, Tatiana Shaposhnikova : *Jacques Hadamard: un mathématicien universel*, tr: Gérard Tronel, ed Edp Sciences, 2005 ,p352.

"إن بديهية الاختيار تعبر عن إمكانية اختيار عنصر من كل مجموعة جزئية غير خالية محتواة في مجموعة معطاة M "⁽⁴⁸⁾، ففي سنة 1904، اقترح زرمولو برهنة أولى أساسها بديهية الاختيار حول إمكانية الترتيب الجيد لمجموعة ما، وأساس برهانه يقوم على إمكانية اختيار عنصر في المجموعة حيث يكون هو الأصغر، ويتحقق بذلك شرط الحصول على مجموعة جيدة الترتيب، فإذا كان لدينا E مجموعة ذات ترتيب جيد، فهذا يعني أن أي جزء من E يحتوي على أصغر عنصر. لكن هل يمكن تطبيق هذه القاعدة في كل الحالات؟

برتراند راسل شبه هذه القاعدة بإمكانية اختيار بصورة متكررة، عنصر من زوج الحذاء والجوارب، فبالنسبة لزوج الحذاء، لا إشكال، فهناك الحذاء الخاص بالرجل اليمنى والآخر خاص بالرجل اليسرى لكن بالنسبة للجوارب، لا يمكننا تحديد القاعدة، لأنهما متماثلان، فلا نجد جورب خاص باليمنى والآخر باليسرى⁽⁴⁹⁾. كذلك بالنسبة لمجموعة الأعداد، لدينا N ، Z ، Z ، هذه المجموعات يمكن أن تكون مرتبة نأخذ أي مجموعة جزئية منها، يمكن أن نختار من عناصرها عناصرها يكون الأصغر حسب الترتيب لكن في حالة المجموعة \mathcal{R} كيف نختاره؟ إن هذا السؤال هو الذي جعل هذه البديهية تلاقى مجموعة من الانتقادات. وهو ما جعل زرمولو يقترح برهانا ثانيا سنة 1908، مرفقا برودوه على الانتقادات، ومن بين الانتقادات ما صرح بها بورال سنة 1905، الذي شكك في مصداقية تطبيق بديهية زرمولو على نسق المجموعات الجزئية للمتصل M ، ولهذا فإمكانية الترتيب الجيد أمر مشكوك فيه⁽⁵⁰⁾، وهذا ما جعله يرسل كل من، "بيرر" (René Baire 1874 - 1932)، لوبسغ و"هادامار"^{*} (Jacques Hadamard 1865 - 1963)، كي يبينوا

⁽⁴⁸⁾ Zermelo :nouvelle démonstration de la possibilité du bon ordre, tr F.Longy, dans Rivenc.Rouilhan, Logique et fondements des mathématiques Bibliothèque Scientifique, Payot, Paris, 1992, p342.

⁽⁴⁹⁾ Francis Casiro: L'infini, le fini, le discret et le Continu, Ed Pole , Paris, 2006, p 73.

⁽⁵⁰⁾ Borel :quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles, dans Rivenc – Rouilhan, Logique et fondements des mathématique Op. cit, p 295.

* هدامار (Hadamard) ردّ عليه وخاصة حول سؤاله: هل يمكن البرهنة على وجود كائن رياضي دون تعريفه؟ (الكائن الرياضي يعني بديهية الاختيار) يجب هدامار: واضح أن المسألة هي اتفاق (مسلمة)، لكن لا أعتقد = أنه يمكن التأسيس بقوة البرهنة على وجود كائن رياضي إلا بتعريفه ووجود الأشياء لا يعني بالضرورة وصفها وتعريفها تقبل بوجود البديهية كخيرها من الظواهر الموجودة.

انظر Borel : Cinq lettres sur la théorie de ensembles, Op. cit, p 296

موقفهم من نقده لزمولو، وعموما فإن بورال لخص بديهية الاختيار سنة 1905 كالتالي: " من أجل ترتيب مجموعة جيدة الترتيب، يجب أن نختار عنصرا يحدد الصف الأول (1)، وثاني عنصر نحدد به الصف الثاني (2)، وهكذا بطريقة تصاعدية إلى أن نكمل كل عناصر المجموعة ولنكن M ، ومثل هذه البراهين هي خارج نطاق الرياضيات⁽⁵¹⁾. فالترتيب الجيد يقوم على الاختيار المتكرر بصورة لانهائية، ولا غير قابلة للعدّ، فحسب بورال هذا الطريق يتجاوز قدرات الرياضي المتناهي، فلا يوجد برهان ولكن حلقة مفرغة.

إذا كان هذا هو ملخص انتقاد بورال لزمولو، فقد حاول **كفاييس** أن يبين ويوضح رد

زرمولو من خلال النقاط الثلاثة التالية⁽⁵²⁾:

1- إن الإشكالية المطروحة لا يتمثل في تقديم وسيلة لترتيب كل مجموعة ترتيبيا جيدا، لكن في برهنة أن كل مجموعة يمكن أن توضع في صورة جيدة الترتيب، وهي المسألة التي اهتم بها كانتور، حيث في النظرية الأصلية انطلق من مجموعات معطاة حسيا كالمتصل، و التركيب بينها و بين تطور النظرية الترتيبية.

2- إن حل هذه المسألة ناتج عن استخدام النظرية المجردة لديدكند، الذي عوض منهج البناء المتعالي بالتحديد للمجرد للترتيب، وهذا أفضل لأنه في البرهان يجب أن نتأكد أن كل العناصر استخدمت من خلال الترتيب المتصاعد. فالبرهنة ذاتها تحدد باستخدام منهج الضم للأجزاء المرتبة جيدا من المجموعة M : فإذا ربطنا بين كل مجموعة جزئية من M بعنصر مميز، فيكفي أن توجد مجموعات جزئية مرتبة جيدا M_a ، حيث كل عنصر من عناصرها يكون عنصرا متميزا عن المتممة $M-A$ للقطعة A التي تحددها، وحينها توجد مثل هذه المجموعات الجزئية: $\{ m \}$ التي تتكون من العنصر المميز في M ومجموع هذه المجموعات الجزئية تكون مجموعة مرتبة جيدا ينتمي إليه كل عنصر من M ، وهي النتيجة التي تترتب عن مفهوم الترتيب الجيد.

وقد لاحظ **كفاييس** أن الخطأ الذي وقع فيه زرمولو، أنه افترض وضع نظرية الترتيب

الجيد، كما أن المثال الذي قدمه يثبت أن مجموعة المجموعات الجزئية M_y هي مجموعة مرتبة جيدا وهي متناهية (وهذا هو نقد *Borel*).

⁽⁵¹⁾ Borel : Cinq lettres sur la théorie de ensembles, Op. cit, p 295.

⁽⁵²⁾ J. Cavaillès : philosophie mathématique, Op.cit, p 136.

3- الإجابة الثالثة لزمولو هي برهان جديد، أكد من خلاله بعض المفاهيم الخاصة بالمجموعات: التقاطع، الاتحاد، المجموعة الجزئية، التطبيق...، والمجموعة M هي مرتبة جيداً:

- إذا كان كل عنصر منها يقابل مجموعة جزئية $R(a)$ من M (علاقة أحادية).

- إذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية P من M تحتوي على عنصر واحد وواحد

فقط p ، بينما $R(p)$ تحتوي P ، فإن p هو العنصر الأول من P .

يوجد إذن نوع من الترتيب بين عناصر M ، لأنه بالنسبة لكل زوج $\{m, n\}$ أحد

العنصرين يجب أن يكون الأول فتكتب:

$$n < m, \text{ وهي علاقة مكافئة لـ: } n \in \mathcal{R}_{(n)}$$

$$\mathcal{R}_{(m)} \subset \mathcal{R}_{(n)} \Rightarrow m \in \{m, n\} \text{ لـ } m < n$$

العنصر الأول: $n \in \mathcal{R}_{(m)} \subset \mathcal{R}_{(n)} \Rightarrow m \notin \{m, n\}$

وإذا كان لدينا: $m < n < p$

نستنتج بالضرورة: $\{m, n, p\} \subset \mathcal{R}_{(m)} \Rightarrow p \in \mathcal{R}_{(m)}$: $m < p$

إذا كانت: $n \in \mathcal{R}_{(m)} \wedge m < n \notin \mathcal{R}_{(n)} \Rightarrow m$

وهذه برهنة على الترتيب، كانت من خلال تكرار الإجراء الذي يقوم على اختيار عنصر من مجموعة، والتكرار هنا هو متصاعد.

ونظراً لأن زرمولو لم يستطع التوصل إلى وضع حدّ للتكرار، استعار مفهوم السلسلة الديكندية، هذا المفهوم الذي يسمح له بالحصول على نتيجة للتكرار اللامحدود دون أن يضطر لاستخدامه (التكرار). ولكن نتساءل هل مفهوم السلسلة عند زرمولو هو نفسه عند ديدكند؟ إن السلسلة عند ديدكند تخص القابل للعدّ، بينما عند زرمولو فقد أضاف إلى التعريف شرط التقاطع الذي يسمح بتجاوز القابل للعدّ، ومنه إذا كانت السلسلة الخاصة تطابق العبور إلى النهاية التي تحدد العدد الترتيبي الأول المتصاعد وليكن w ، فإن السلسلة الخاصة

لزمولو (*q chaîne*) التي تقوم على التقاطع، تنتج منهج العبور إلى النهاية⁽⁵³⁾. ولتوضيح

هذا البرهان، استخدم زرمولو البرهنة التالية⁽⁵⁴⁾:

M : المجموعة التي نهدف إلى ترتيبها ترتيباً جيداً.

/: تطبيق يربط بين كل مجموعة جزئية من M بعنصرها المتميز.

F : تطبيق $P(M) \rightarrow P(M)$

- يجب تكوين متتالية العناصر المتميزة التي توجد في M .

- فترتيب M يعني تكوين M ، $F(M)$ ، $F^2(M)$ ، ... النهائية.

- تكوين مجموعة جزئية R من مجموعة الأجزاء لـ: M حيث عناصرها هي حدود

المتتالية M ، $F(M)$ ، $F^2(M)$ ، ...

- للحصول على R دون استخدام التكرار لـ F ، استخدم زرمولو نوع من السلسلة

الخاصة.

- إذا كانت السلسلة الخاصة هي أصغر سلسلة في M أو لنقل هي تقاطع السلسلات

التي تحتوي، فإن السلسلة الخاصة لـ M بالنسبة لـ F حيث عناصرها

المجموعات: M ، $F(M)$ ، $F^2(M)$ ، ... (متناهي)، ولهذا فالسلسلة الخاصة تصل إلى

القابل العد فقط، لأنه إذا كانت M غير قابلة للعد فلا يمكن تحديد كل عناصرها.

- السلسلة q هي مجموعة جزئية من مجموعة الأجزاء لـ: M ، فبالإضافة إلى

الشروط الخاصة بالسلسلات الخاصة، فهي تحقق شرط التقاطع: بالنسبة لكل مجموعة من

المجموعات الجزئية $\{A, B, C, \dots\}$ ، السلسلة q تحتوي على تقاطع A, B, C, \dots

- وهكذا إلى R_0 حيث يجب إضافة $F^w(M)$ ، حيث $F^w(M)$ تمثل تقاطع المجموعات J

M ، $F(M)$ ، $F^2(M)$ ، ...، $F^n(M)$ ، $F^{w+1}(M)$ ، ...، $F^x(M)$ حيث x تنتمي إلى الفئة II.

- ثم البحث عن مجموعة تقاطع المجموعات $F^x(M)$ حيث x تنتمي إلى الفئة II،

ولهذا السلسلة q تتجاوز القابل للعد.

⁽⁵³⁾ Ibid, p 140.

⁽⁵⁴⁾ P C Noguès : de l'expérience mathématique, Op.cit,p52.

وبهذا البرهان يؤكد كفاييس أن العبور إلى النهاية يقابل التقاطع، وإذا ما رفض البرهان بالمسلسلة، فإنه سيصعب البرهان على بديهية الاختيار، ودون الاعتماد على بديهية الاختيار، لا يمكننا إثبات القضايا التالية⁽⁵⁵⁾.

1- تأسيس نظرية المجموعات المنتهية بمفهوم ديديكند حول المجموعات المنتهية المؤسسة على نظرية الترتيب الجيد.

2- مجموعة اتحاد النسق S للمجموعات المنفصلة، لها قوة أكبر أو يساوي النسق S .

3- مجاميع (*Sommes*) المجموعات المنفصلة المتكافئة هي متكافئة.

4- مجموع المجموعات المنتهية أو القابلة للعدّ هو قابل للعدّ.

5- جداء القوى لا يكون معدوماً إلا إذا كان أحد العوامل صفراً.

فهذا تأكيد على أهمية بديهية الاختيار وهذا ما أكده هدامار، حيث يرى أن بديهية الاختيار يجب أن تقبل من أجل التأسيس لأعمال كانتور فهي ضرورية ولازمة لتطور الرياضيات⁽⁵⁶⁾. كما نجد "بول ليفي" (*Paul Lévy 1886-1971*) بعد كفاييس أكد في مقال له: "أن بديهية زرمولو وهي بديهية الاختيار، إذا أدت إلى تناقض، فإننا سننأس من العقل الإنساني"⁽⁵⁷⁾، وهذا ما يؤكد ضرورة توظيف بديهية الاختيار سواء تمت البرهنة عليها أو لا، سواء سلمنا بها فقط أو اتخذناها كمعرفة فلا مجال لرفضها وهذا لا ينفى وجود دعوة من طرف الرياضيين لإبعادها ومن ثمّ رفضها "فغودل وكوهن برهنوا أن قبول أو رفض هذه البديهية سيان، لا يؤدي ذلك إلى تناقض"⁽⁵⁸⁾.

ولكن بغض النظر عن الرأي الأخير فإنه بناء على ما سبق، نستنتج أنه للبرهنة على بديهية الاختيار تمّ توظيف النظرية المجردة للمجموعات التي وضع ديديكند أسسها الأولى باعتماده على بعض نتائج كانتور. لأن التأسيس الذي ابتدأ في المتناهي أدى إلى المتصاعد ومنه إلى اللامتناهي، ومنه فإن الحديث عن النظرية المجردة استدعت الحديث عن كانتور،

(55) *J. Cavailles : philosophie mathématique, Op.cit, p140.*

(56) *Borel : Cinq lettres sur la théorie de ensembles Op.cit, pp 296-297.*

(57) *Paul Lévy : Axiome de Zermelo et Nombres transfinis, Annales scientifiques de l'ENS, Tome 67, 1956, p22.*

(58) *Julien Linassier : Faut-il choisir l'axiome du choix ? Op. cit, p 73.*

هذا ما استنتجه كفاييس في نهاية بحثه حول النظرية المجردة وبديهية الاختيار: " النظرية المجردة تسمح بتوحيد في بناء نسقي كل مؤلف كانتور "(59).

المبحث الثالث: أنواع البدهنة أو الأكسمة*

يعتبر كانتور مؤسس نظرية المجموعات، التي يطلق عليها اليوم " النظرية البسيطة للمجموعات" (*Théorie naïve des ensembles*)، وهي النظرية غير المصورة التي استخدمت اللغة العادية عوض الرموز، فقد كان يتكلم عن الاستلزام، العطف، الوصل، مهما يكن، يوجد على الأقل... باستخدام حدود، لا رموز.

ولهذا فإن نظرية المجموعات الكانتورية تعتبر أقدم نظرية، وقد تمّ تطويرها في نهاية القرن 19، باكتشاف اللامتناهي ومنه المجموعات اللامتناهية، وهذا ما سمح للرياضيات بدراسة هذه المجموعات، التي قامت بتعريفها من خلال خصائصها، وهو ما أدى إلى ظهور مجموعة من المفارقات، مما دفع الرياضيون إلى قراءة جديدة للمجموعات من خلال النظرية الأكسيوماتيكية، وهذا بدءا بتحديد المقدمات (التعاريف) التي يجب الاعتماد عليها، وهكذا

(59) J Cavallès : philosophie mathématique, Op.cit, p 140.

* الأكسمة: عبارة عن منهج يقوم بتنظيم النظرية بتأسيسها على أكسيومات، وهي قضايا واضحة بذاتها، ثم استنتاج مجموعة من قوانين، وأول أكسمة في الهندسة لإقليدس في كتابه الأصول، ثم تمّ تعميمها في الرياضيات في نهاية القرن التاسع عشر بتأسيس هندسات لإقليدية، تطور الجبر، أكسمة الهندسة، تحسب التحليل، اكتشاف الأعداد الحقيقية، تطور نظرية المجموعات

(<http://www.fr.wikipedia.org/wiki/Axiomatisation>)

والمنهج الأكسيومي هو مجموع القضايا التي يختارها الرياضي لبناء نسق رياضي معين، وهو ما يصطلح عليه بالأكسيوماتيك باعتباره مجموعة من المبادئ المتجانسة التي لا يمكن التمييز بينها (انظر، عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور العقل العلمي، مركز دراسات الوحدة العربية، لبنان، 2002، ط5، ص81)، ويعتبر موريس باش (*Moritz Pasch 1843-1940*) أول من عرض الهندسة في نسق من الأكسيومات حيث أكد أنه كي تصبح الهندسة علما استنباطيا يجب أن نتخلص من المعنى المادي والواقعي (*R.Blanché: l'axiomatique, puf, 1999, 2ed, P30*) ويمكن التمييز بين ثلاث أنواع من الأكسيوماتيك: مادي والمتمثل في إقليدس، صوري الخاص بهلبرت، والنسق الصوري، وقد قسم مؤرخو الرياضيات تطور الأكسيوماتيك إلى فترتين: الأولى تمتد من ظهور الهندسات اللاإقليدية إلى أعمال هيلبرت والثانية من أعمال هيلبرت إلى أيامنا الحالية.

(*Novikov :introduction à la logique mathématique, Dinard, Paris, 1964,p1*).

أصبحت نظرية المجموعات بالنسبة للباحثين الرياضيين، تعني النظرية الأكسيوماتيكية للمجموعات، فمصطلحا "بسيطة أو ساذجة" و"أكسيوماتيكية" هما متعارضان⁽⁶⁰⁾.

أولا-أكسمة نظرية المجموعات بعد ديدكند:

أ-الأكسمة ونظرية المجموعات عند زرمولو:

لقد عرض " زرمولو " نظريته في مقال نشر سنة 1908، بعنوان "دراسات حول أسس نظرية المجموعات"، وكان هدفه تحديد أكسيوماتيكية مفهوم المجموعة حيث لا يمكن أن نفتح أي مجال لوجود مفارقات، فأكسمة نظرية المجموعات بدايتها كان من خلال إعداد ميدان المواضيع المجردة التي هي عبارة عن أشياء... a, b, c ، ويمكن اعتبارها حينئذ كأفراد لمجموعة⁽⁶¹⁾.

ولهذا يعرف نظرية المجموعات بقوله: " نظرية المجموعات فرع من الرياضيات والتي مهمتها دراسة التصورات الأساسية رياضيا: العدد، الترتيب، دالة... ومن هنا تطوير الأسس المنطقية للحساب والتحليل "⁽⁶²⁾. فحسب زرمولو الأكسمة جعلت من نظرية المجموعات قاعدة وأساس لكل النظريات الرياضية بعد أن كانت في قمة الصرح الرياضي. ويرى كفاييس أن الأكسمة عنده هي ملاحظة نقدية، فعوض وضع تعريف جديد قريبا، نحصل على تعريف ضمني من خلال البراهين الاستدلالية ولذا فإن الأكسمة هي عمل تحليلي لا اكتشافي⁽⁶³⁾.

إن الأكسمة تركز على النظرية المؤسسة، التي تستخلص العلاقات الأساسية، المناهج، الأفعال التي تكون مركزية النظرية، وهذا ما يؤكد زرمولو من خلال قوله: " البحث، انطلاقا من نظرية المجموعات كما هي معطاة تاريخيا، عن المبادئ المكتسبة لتأسيس هذا الفرع الرياضي، ويجب من أجل هذا حصر المبادئ حيث تبعد كل تناقض، ولكن تكون المبادئ كافية "⁽⁶⁴⁾. ولهذا فإن زرمولو يؤكد أنه لإبعاد وإقصاء التناقضات، يجب حصر العمليات التي تثير الشكوك، مع الحفاظ على ما هو مهم في هذه النظرية.

⁽⁶⁰⁾ Rholmos : Introduction à la théorie des ensembles, Op.Cit, p 5.

* Zermelo : Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles, dans Rivenc – Rouilhan, logique et fondements des mathématiques.

⁽⁶¹⁾ Maurice Caveing : le problème des objets dans la pensée mathématique, J.Vrin, paris,2004, p209.

⁽⁶²⁾ Zermelo : Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles, Op.cit, p370.

⁽⁶³⁾ J.Cavaillès : philosophie mathématique, Op.cit, p 142.

⁽⁶⁴⁾ Zermelo : Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles, Op.cit,

ولهذا محددًا الهدف من تحريره للمقال يقول زرمولو: " أريد أن أبين كيف أن النظرية التي توصل إليها كانتور وديكند، يمكن أن ترد إلى بعض التعريفات، سبعة تعريفات أو أكسيومات مستقلة بعضها عن بعض " (65). وهذا ما يدل على أن زرمولو لخص نظرية المجموعات الكانتورية والديكندية في مجموعة من تعاريف و 7 أكسيومات فقط، أما ما عداها فقد تخلى عنها لأنها تؤدي إلى الوقوع في التناقض. ويرى كفايس أن هذه التحديدات توصل إليها بصورة واقعية، وهي تحديدات مست وجود المجموعات الكبرى، كمجموعة كل المجموعات، أو مجموعة كل الأعداد الأصلية أو العادة التي كانت مصدرا للمفارقات، فهو بذلك حصر المجموعات حيث استبعد من خلالها عن المجموعات الكبرى أو البسيطة (66).

ب- النسق الأكسيومي عند زرمولو:

يتكون النسق عند زرمولو من تعريفات وأكسيومات وأكد زرمولو أن الانتماء (*appartenance*) هي العلاقة الأساسية الأولية التي انطلق منها. انتماء العضو في المجموعة، فإذا كانت العلاقة: $X \hat{I} M \hat{U} X \hat{I} N \hat{P} M \hat{I} N$ ، ومن علاقة الانتماء والاحتواء، استنتج زرمولو مساواة المجموعتين وهو الأكسيوم رقم 1 في نسقه: إذا كان كل عنصر من مجموعة M هو عنصر كذلك في N والعكس،

فان هناك مساواة بين M و N فإذا كان لدينا: $M \hat{I} N \hat{U} N \hat{I} M \hat{P} M = N$ ومنه كل مجموعة محددة بعناصرها، وهذا الأكسيوم أطلق عليه زرمولو اسم: أكسيوم التحديد (*Axiome de détermination*) * (67). وقد اعتبر كفايس هذا الأكسيوم، الوحيد الذي عرف علاقة وهي علاقة المساواة، بينما الأكسيومات الأخرى هي إثبات وجود (68).

$$."x " y (" z , z \hat{I} x \hat{U} z \hat{I} y) \hat{P} x = y$$

وهذه الإثباتات حسب كفايس تصنف إلى صنفين يقينية (*catégoriques*) وأخرى فرضية (*Hypothétiques*).

1 - الأكسيومات اليقينية:

p 371.
(65) *Ibid*, p371.

(66) *J. Cavallès : philosophie mathématique, Op.cit, p 143.*

* قد يعبر عنه أيضا ب: *axiome de l'extensionnalité*.

(67) *Zermelo : Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles Op.cit, p 373.*

(68) *J. Cavallès : Op.cit, p143.*

• الأسيوم II :

وهو خاص بالمجموعات الخالية (*axiome de l'ensemble vide*)، فالمجموعة الخالية لا تحتوي أي عنصر.
إذا كانت a شيء ينتمي إلى المجال، فتوجد مجموعة $\{a\}$ التي تحتوي العنصر a و a فقط،
إذا كان a و b شيئين من المجال، فتوجد المجموعة $\{a,b\}$ تحتوي في آن واحد على العنصر a و b و لا ثالث هما «(69)».

• الأسيوم VII :

وهو أسيوم اللامتاهي، وينص على أن " المجال يحتوي على الأقل المجموعة Z ، التي تحتوي كعنصر المجموعة الخالية، وهكذا بالنسبة لكل عنصر a يقابل عنصرا جديدا من الصورة $\{a\}$ «(70)»، أي أن هذه المجموعة تحتوي على سبيل المثال على العناصر التالية:
 $Z = \{F, a, \{a\}, b, \{b\}, \{a, b\}, c, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, \dots\}\}$ وهذا ما يؤدي إلى المجموعة اللامتاهية و لهذا فان هذا الاكسيوم هو اكسيوم اللامتاهي (*axiome de l'infini*).

2 - الأسيومات الفرضية:

وهي الأسيومات المؤسسة على القاعدة التالية: إذا وجدت مجموعة، فهذا يعني وجود مجموعات أخرى معرفة انطلاقا من المجموعة الأولى.

• الأسيوم III :

" إذا كانت القضية e محددة بعناصر المجموعة M ، فـ M تحتوي مجموعة جزئية M تحتوي كل العناصر x من M حيث تكون $e(x)$ صادقة، هذا الأسيوم خاص بالانفصال «(axiome de séparation)»⁽⁷¹⁾ وبالاعتماد عليه يؤكد زرمولو أنه لا يحق لنا تعريف المجموعات بصورة مستقلة، ولكن فقط كمجموعات جزئية، تمّ الحصول عليها بتفريق المجموعات المعطاة، حيث التكوينات المتناقضة كمجموعة كل المجموعات أو مجموعة كل الأعداد الأصلية أو العادة تكون مستبعدة. هذا من جهة، من جهة ثانية فإن المعيار المحدد

⁽⁶⁹⁾ Zermelo : Op.cit, p373.

⁽⁷⁰⁾ Zermelo : Op.cit, p 377.

⁽⁷¹⁾ Ibid, p 373.

للقضية $E(x)$ يجب أن يكون دائما محددًا بطريقة جيّدة. وهنا يعود بنا زرمولو إلى التعريف رقم 4 في نسقه: القضية e هي " محددة جيدا إذا كانت العلاقات الأساسية للمجال تسمح بإقرار مصداقيتها أو عدم مصداقيتها، بواسطة أكسيومات أو قوانين منطقية متفق عليها عالميا"⁽⁷²⁾. ومن الأكسيوم III يستنتج وجود أجزاء للمجموعة M ، ومتمتها بالنسبة للمجموعة N التي تحتويها. كما يمكن التعبير عن هذا الأكسيوم بصيغة أخرى⁽⁷³⁾: إذا كانت $P\{x\}$ هي قضية وإذا كانت X هي مجموعة، يمكن الحديث عن مجموعة A مكونة من x ينتمي إلى X

ويحقق $P\{x\}$ حيث: $(x \hat{I} A) \hat{U} (P\{x\} \hat{U} x \hat{I} X)$

مثال: إذا كانت A مجموعة الأعداد الطبيعية، و $P(n)$ صادقة إذا كان n زوجيا وكاذبة إذا كان n فرديا، فإن أكسيوم الفصل يؤكد أن الأعداد الطبيعية الزوجية تكون مجموعة.

• الأكسيوم IV:

وينص على أن كل مجموعة T تقابل مجموعة أخرى UT (مجموعة الأجزاء) التي تحتوي على كل المجموعات الجزئية لـ T وهي فقط. وهو الأكسيوم الخاص بمجموعة الأجزاء (*axiome de l'ensemble des parties*):

$(x \hat{I} x) \hat{U} (z \hat{I} y \hat{U} z \hat{I} x)$ حيث:

$x \hat{I} z$ هي اختزال لـ $a \hat{I} x, a \hat{I} z \hat{P} a \hat{I} x$ "⁽⁷⁴⁾.

• الأكسيوم V:

لكل مجموعة T تقابل مجموعة ST (مجموعة الاتحاد لـ T) التي تحتوي كل عناصر المجموعة T فقط، وهذا الأكسيوم خاص بالاتحاد (*axiome de l'ensemble* *(réunion)*):

$(x \hat{I} t \hat{U} t \hat{I} x) \hat{U} (z \hat{I} y \hat{U} z \hat{I} x)$ ، $(x \hat{I} y)$ ،

والأكسيومان السابقان (IV, V) يثبتان وجود مجموعة الأجزاء ومجموعة الاتحاد لـ

.M

⁽⁷²⁾ Ibid, p372.

⁽⁷³⁾ Roger Godement : Analyse mathématique, Springer, 2^{eme} édition, 2003, p13.

⁽⁷⁴⁾ Les axiomes de théorie des ensembles (Zermelo-Fraenkel)
<http://www.dma.ens.fr/culturemath/mathspdf/logique/zf.pdf>.

• الأوكسيوم VI :

إذا كانت T هي مجموعة حيث عناصرها هي مجموعات مختلفة عن 0 ، ومنفصلة أي دون عناصر مشتركة مثنى مثنى، فإن اتحاد هذه المجموعات الجزئية ST يحتوي على الأقل على مجموعة جزئية S_1 ، التي لها عنصر مشترك ووحيد مع كل عنصر من T ، ويمكن صياغة هذا الأوكسيوم على النحو التالي: إنه ممكن دائما اختيار في كل عنصر R, N, M, \dots من T ، عنصر وحيد r, n, m, \dots وتوحيد كل من هذه العناصر في مجموعة $S_A^{(75)}$ ، وهذا الأوكسيوم هو أوكسيوم الاختيار (*axiome du choix*)، وهو الذي يثبت أن الجداء لن يكون مجموعة خالية، إذا لم يكن كل من عناصرها خال.

ويؤكد **كفاييس**، أنه ماعدا أوكسيوم الاختيار، وأوكسيوم مجموعة الأجزاء، فإن ما تبقى تطرق إليه ديكند، وخاصة أوكسيوم اللامتناهي⁽⁷⁶⁾. وإن ما يميز نسق زرمولو، أوكسيوم الاختيار الذي تمّ الإشارة إليه، وأوكسيوم الفصل الذي دحضت به مفارقة راسل.

فأوكسيوم الفصل يستنتج من كون المجموعة M تحتوي على الأقل جزءا ليس عنصرا من M ، وهذا بعد تطبيق منهج القطر الذي أشار إليه كانتور. فإذا كان M الجزء المكوّن من كل العناصر التي هي ليست عناصر في ذاتها، هذا يعني أنها تختص بخاصية محددة، ومنه العنصر M_0 موجود، لكن M_0 لا يمكن أن يكون عنصرا من M هذا تناقض.

وبتعبير آخر، فإن هذا الأوكسيوم يسمح بتعريف المجموعة انطلاقا من خاصية: فإذا كانت لدينا الخاصية E محددة للمجموعة M ، توجد مجموعة M_E تحتوي كل عناصر M وتحقق الخاصية E فقط، ومنه فإن المواضيع المقصودة هي عناصر المجموعة M المعروفة.

المجموعة M_E المعروفة بالخاصية E هي مجموعة جزئية لمجموعة أكبر، وعليه فإن هذا التحديد أبعد المفارقات وخاصة تلك الذي أكد عليها راسل، فالمجموعات الكبرى مصدر المفارقات لا يتحقق فيها الشرط الأساسي. فمثلا الخاصية " أن يكون مجموعة " لا تعرف المجموعة إلا في قالب مجموعة أكبر، حيث لا يمكن تكوين مجموعة جميع المجموعات. من جهة أخرى، الخاصية التي تحدد المجموعة الجزئية M_E هي محددة بشكل جيد. ومنه استبعاد كل المجموعات الكبرى كمجموعة كل المجموعات، ومجموعة كل الأعداد العادة.

⁽⁷⁵⁾ Zermelo : Op.cit,p 376.

⁽⁷⁶⁾ J. Cavaillès : Op.cit ,p 145.

وعن موقفه من نسق زرمولو يؤكد **كفاييس**، أن مؤلف زرمولو يبقى غير تام، وأن أكسيوميته غير كافية لتأسيس نظرية المجموعات وذلك للأسباب التالية⁽⁷⁷⁾:

- لم يبرهن زرمولو على أن نظرية الترتيب والأعداد الترتيبية العادة يمكن أن تستنتج من هذه الأكسيومات.

- لم يبرهن على استقلالية وعدم تناقض هذه الأكسيومات.

فزرمولو لم يطور في النظرية الأكسيوماتية سوى نظرية التكافؤ، كما أن أكسيوم الفصل أقحم إمكانية القرار حسب الأكسيومات الموجودة وقوانين المنطق، وكل صعوبات التعريف الرياضي ما زالت لم تحل ون حل حتى تسدّ هذه الفجوات، ولتدارك الأمر، كان هناك تعديل في هذه الأكسيومات مع تحديد الروابط والعلاقات بينها وبين الصرح الكانتوري، وهذا ما قام به الرياضي فرانكل.

ثانيا - دور فرانكل في أكسمة نظرية المجموعات:

لقد أراد فرانكل تطوير النسق الأكسيومي الذي جاء به زرمولو، ولقد حدد جان كفاييس في مساهمات فرانكل، هذه ثلاث نقاط أساسية:

أ - تغيير المفاهيم الأساسية للأكسيوماتيك:

إن مفهوم الميدان العام للمواضيع والأشياء الخاصة بالنظرية، فقد تمّ التخلي عنه، ولذا فالأشياء التي ليست مجموعات (*urelemente*) ماعدا المجموعة الخالية أبعدت، وتمّ التأكيد على المجموعات فقط، فمجال النظرية مكوّن من المجموعات فقط وهذا على خلاف زرمولو الذي أكد أن مجال النظرية يتكون من أشياء ومواضيع بعضها مجموعات وأخرى غير ذلك.

وقد نتج عن تحديد مجال النظرية مقارنة بما جاء به زرمولو ما يلي⁽⁷⁸⁾:

- لا وجود لأكسيوم الوجود اللامشروط.
- أكسيوم التحديد أصبح نصه كالتالي:

إذا كانت a, b, A هي مجموعات، إذا كانت $B \bar{I} A \bar{P} \bar{I} a \bar{I} A \bar{P} \bar{I} b$

⁽⁷⁷⁾ J Cavallès : Op.cit, p 145.

⁽⁷⁸⁾ Ibid, p 146.

فالمساواة بين مجموعتين a و b معرفةً بالعلاقة: لكل مجموعة x ، $(x \in a \iff x \in b)$ والعكس صحيح، فأكسيوم التحديد يضمن تحقيق خصائص المساواة بالمعنى الرياضي المؤلف ونخص بالذكر مبدأ التعويض أو الخاصية التبديلية: $a = b \iff b = a$

- أكسيوم المجموعات الأولية يختزل إلى أكسيوم المزوجة (*axiome d'accouplement*)*، فإذا كان a و b مجموعتين متميزتين، توجد مجموعة عناصرها هي a و b : $\{a, b\}$ ، فقد تمّ الربط بين المجموعتين في مجموعة واحدة.
- مفهوم الدالة (*fonction*) المعرفة استقرائياً عوض مفهوم الخاصية المعرفة.

فأكسيوم الفصل ينص: إذا وجدت مجموعة M و دالتان: $Q(x)$ و $f(x)$ ، يوجد جزء من M يحتوي كل عناصر x من M حيث:

$$Q(x) \iff f(x) \iff Q(x)$$

وفي هذا الأكسيوم، يتم تحديد x نفسه، مجموعة الأجزاء لـ x : $p(x)$ ، مجموعة اتحاد لـ x : Gx ، مجموعة الزوج $\{f(x), Q(x)\}$ إذا كانت $Q(x)$ و $f(x)$ معروفتان، وأخيراً مجموعة دالة الدالة: $f(Q(x))$. وفي الصياغة الجديدة للأكسيوم تمّ استعمال مفهوم الدوال عوض الحديث عن الخصائص.

نلاحظ هنا أن الأكسيومات *II*، *IV*، *V* لزمولو تمّ تدعيمها بفضل العلاقة الأولية و هي الانتماء (\in) و الدالة.

ب- النظرية العامة للمجموعات:

بفضل الأكسيومات السابقة الذكر والتي أشار إليها زرمولو: أكسيوم مجموعة الأجزاء، مجموعة الاتحاد، الاختيار، يمكن تأسيس النظرية العامة للمجموعات و المتمثلة في نظرية التكافؤ، نظرية المجموعات المرتبة وجيدة الترتيب⁽⁷⁹⁾. وقد طور فرانكل هذه النظريات و هي التي تكون محققة في حالة وجود: مجموعة، مجموعة خالية، مجموعة مكونة من عنصر واحد.

المجموعة المرتبة تعرف كالتالي: المجموعة M هي مرتبة إذا وجد جزء من Z من مجموعة الأجزاء $P(M)$ للمجموعة M حيث:

* لقد ترجم هذا الأكسيوم في مواضع أخرى بـ: *axiome des paires*.

⁽⁷⁹⁾ *Ibid*, p148.

1 - عنصران من Z الواحد هو جزء من الآخر.

2 - Z هي جزء ثابت من $P(M)$ تحتوي هذه الخاصية أي:

العلاقة $Z \bar{I} Z$ ، $Z \in Z$ لها الخاصية رقم 1

$$D Z = Z'$$

نقول هنا أن Z ترتب M بفضل الخاصيتين معا⁽⁸⁰⁾. فالخاصية الأولى تثبت الترتيب الموجود بين كل عناصر المجموعة M ، حيث إذا ما أخذنا عنصرين a, b ينتميان على التوالي إلى عنصرين Z : $T(a), T(b)$ نصل إلى: $a < b$ إذا و فقط $T(a) \bar{E} T(b)$ (الرمز \bar{E} تؤكد وجود علاقة بين العنصرين)، أما الخاصية الثانية فتثبت أن الترتيب هو تام أي معم على كل عناصر M .

وما يجب التأكيد عليه أن فرانكل لإثبات نظريته في الترتيب والمجموعات المرتبة جيّداً، كان لزاماً عليه أن يضيف أكسيوماً جديداً إلى نسقه و لم يرد في نسق زرمولو ويتمثل في أكسيوم التعويض (*substitution*):

الأكسيوم VIII :

وهو خاص بالتعويض ونصه: إذا كانت M مجموعة و f دالة ذات متغير معرفة في M ، توجد مجموعة وحيدة تشمل كل $f(x)$ حيث $x \in M$.
وبتعبير آخر إذا كان مجال التعريف لدالة هو مجموعة فإن مجال الوصول هو أيضاً مجموعة⁽⁸¹⁾.

بهذه الأكسيومات يمكن تكوين نسق كامل يساعد في تطوير نظرية المجموعات.

ج- استقلالية الأكسيومات عند فرانكل:

إن الأكسيومات المؤسسة لنسق نظرية المجموعات، قد وضعت بالترتيب وهذا من أجل وجود فرضي أو يقيني لبعض المجموعات⁽⁸²⁾. واستقلالية أكسيوم الاختيار هو الذي يخص

⁽⁸⁰⁾ Ibid, p148.

⁽⁸¹⁾ Michel Eytan: Des ensembles et de leurs axiomatiques esquisse de quelques points de vue, Revue mathématiques et Sciences humaines, t 13, 1965 p 45.

http://archive.numdam.org/ARCHIVE/MSH/MSH_1965_13_/MSH_1965_13_41_0/MSH_1965__13__41_0.pdf.

نظرية المجموعات الكلاسيكية، فقد كان أساس اعتراضات كفاييس على برهنة زرمولو، ضعف العلاقة الموجودة بين الفرضية والنتيجة، فعوضا الاهتمام بمصادقية الفرضية ومن تمّ إبعاد القضيتين لأنهما متكافئتان، فإن هناك مسعى آخر يدعو إلى حذفها كفرضية، لأنها مبرهنة انطلاقا من أكسيومات موجودة موضوعة و منه فهي غير مستقلة.

إذن حسب كفاييس لا توجد مسافة حقيقية بين الأكسيومات وهو الاعتراض القائم على عدم وجود استقلالية بين الأكسيومات. ونتيجة التعمق في بناء الدوال المقدمة من خلال تعاريف فرانكل، يتساءل كفاييس هل يمكن الوصول إلى مجموعة الاختيار؟ يجب كفاييس بأن فرانكل ميّز بين أربع قضايا متصاعدة في القوة⁽⁸³⁾:

1 VI وجود مجموعة اختيار لمجموعة قابلة للعدّ مكوّنة من مجموعات متناهية.

2 VI بالنسبة لمجموعة قابلة للعدّ (عدودة) مكوّنة من مجموعات عشوائية.

3 VI بالنسبة لمجموعة ما مكوّنة من مجموعات متناهية.

4 VI بالنسبة لمجموعة عشوائية مكوّنة من مجموعات عشوائية.

إن الاستقلالية بالنسبة لهذه المجموعات هي كالتالي:

1 VI تكون محققة عندما تكون الأكسيومات VII, V, I محققة.

2 VI , 4 VI قد تكون كل منها غير محققة عندما تكون الأكسيومات V, I محققة.

1 VI , 2 VI تكون محققة إذا كانت VII محققة.

ومما سبق فإن فرانكل حاول تفادي الأخطاء التي وقع فيها زرمولو، وهذا ما أدى إلى

تعديل النسق الأكسيومي عند زرمولو، و الناتج هو ما يعرف بنسق زرمولو- فرانكل

وبالفرنسية يرمز له: ZF.

أكسيومات النسق:

1 - أكسيوم التحديد.

2 - أكسيوم المجموعات الأولية (المجموعة الخالية).

3 - أكسيوم المزوجة.

4 - أكسيوم مجموعة الاتحاد.

⁽⁸²⁾ Jean Cavailles : Op.cit , p150.

⁽⁸³⁾ Ibid,p150.

5- أكسيوم اللامتناهي .

6- أكسيوم الانفصال أو الفصل .

7- أكسيوم التعويض .

8- أكسيوم مجموعة الأجزاء .

9- أكسيوم الاختيار .

ويرى كفاييس أنه بالرغم من أن فرانكل حاول تصحيح أخطاء زرمولو، إلا أن ثغرة أخرى وجدت في نسق ZF ، وتتمثل في مسألة تعريف الأعداد الترتيبية المتصاعدة، حيث لم يتم التطرق إليها، أو إلى أهميتها، وهذا ما حاول الرياضي فون نومان تداركه.

ثالثا- فون نومان والأعداد الترتيبية المتصاعدة:

إن أبحاث الرياضي فون نومان (*Von Neumann 1903-1957*) هي استمرارية لأبحاث سابقه في ما يخص أكسمة نظرية المجموعات. وأهمية نسقه بالنسبة لكفاييس، تكمن في السماح بتعريف مباشر للأعداد الترتيبية.

أ- العدد الترتيبي والعدّ:

العدد الترتيبي يشبه مجموعة ذات ترتيب جيّد، حيث كل عنصر منها يساوي أو يقابل القطعة المحددة للمجموعة، وعدّ عناصر النسق يعني تعويض كل نسق جزئي تمّ عده بعدد، من جهة هو عنصر لاحقا للأعداد السابقة وفي أن واحد ممثلا للمجموع⁽⁸⁴⁾. فكل مجموعة مرتبة جيّدا يقابلها عدد ترتيبي واحد وواحد فقط، فإذا وجدا عدنان ترتيبيان متشابهان فهما متطابقان. فون نومان إذن وضع كل عدد ترتيبي مساو لمجموعة الأعداد الترتيبية التي تسبقها⁽⁸⁵⁾ وهكذا...

$$0 = f , 1 = \{f\} , 2 = \{f, \{f\}\}$$

$$3 = \{f , \{f\}, \{f, \{f\}\}$$

$$4 = \{f, \{f\}, \{f, \{f\}\}, \{f, \{f, \{f\}\}\}$$

$$w = \{f, \{f\}, \{f, \{f\}\}, \{f, \{f, \{f\}\}\}, \dots\}$$

فالعدد الترتيبي هو مجموعة الأعداد الترتيبية السابقة، ويتميز بالخاصيتين التاليتين⁽⁸⁶⁾:

⁽⁸⁴⁾ *Ibid*, p 152.

⁽⁸⁵⁾ *Maurice Caveing : le problème des objets dans la pensée mathématiques, Op.Cit, p218.*

$$\begin{aligned} & x \hat{I} X \hat{P} x \hat{I} X \quad \bullet \\ & " a, b \hat{I} X, a \hat{I} b \hat{U} a = b \hat{U} b \hat{I} a \quad \bullet \end{aligned}$$

و من هاتين الخاصيتين نستنتج :

$$\begin{aligned} & a \hat{I} b \hat{U} a \hat{I} b \hat{U} a \hat{I} b \quad \bullet \\ & a, b, c \hat{I} X, a \hat{I} b \hat{U} b \hat{I} c \hat{P} a \hat{I} c \quad \bullet \\ & X, Y \hat{I} \hat{A}, X \hat{E} Y \hat{P} X \hat{I} Y \quad \bullet \end{aligned}$$

والنتيجة الأخيرة تبين إمكانية اختزال اللامساواة إلى علاقات الانتماء والاحتواء بين المجموعات.

وللوصول إلى العدد الترتيبي المتصاعد نعلم على مبدئين: إضافة الوحدة، والانتقال إلى النهاية أو الحد، وهما مجتمعان في منهج واحد، هذا المنهج يقوم على أخذ مجموعة من الأعداد الترتيبية السابقة، يعبر عنها صوريا من خلال العدّ (*nombrement*).

والعدّ هو عبارة عن دالة f معرفة على عناصر مجموعة مرتبة جيدا E حيث:

$$f(x) = f(y) \text{ لكل } y \text{ يسبق } x \text{ في } E, \text{ فالعدد الترتيبي لـ } E \text{ هو: } f(x) \text{ حيث } x \text{ ينتمي}$$

إلى E

إذا كان لدينا: x_1, x_2, x_3, x_4 العناصر الأولى لـ E نستنتج:

$$f(x_1) = f, f(x_2) = \{f\}, f(x_3) = \{f, \{f\}\}, f(x_4) = \{f, \{f, \{f, \{f\}\}\}\}$$

إذا كان E لديه واحد، اثنان، ثلاثة أو أربعة عناصر، يمكن استنتاج الأعداد الترتيبية:

$$\{f, \{f, \{f, \{f\}\}\}, \{f, \{f, \{f, \{f\}\}\}\}, \{f, \{f, \{f, \{f, \{f\}\}\}\}\}$$

ولهذا فحسب كفاييس العدّ هو فعل ينتج في كل مرة عددا جديدا من خلال تكوين

مجموعة الأعداد المنتجة. إذن إن النظرية الترتيبية عند فون نومان تمثل قاعدة النسق، و بها

نستنتج نظرية التكافؤ والأعداد الأصلية. فالعدد الأصلي هو عدد ترتيبي له خاصية أنه لا

يشمل على نفس قوة سابقه⁽⁸⁷⁾، أو ليست لديه القدرة لأن يتقابل (واحد بواحد) مع أي عنصر

من عناصره. فكل الأعداد المتناهية هي أصلية. w هو عدد أصلي، بينما $w + 1$ ليس بعدد

أصلي لأنه يمكن أن يتقابل تناظريا مع w .

ومنه فإن نسق فون نومان له دلالة مزدوجة. فمن جهة النظرية الأصلية هي مدمجة

بالنظرية الترتيبية، والعدد الأصلي اختزل العدد الترتيبي، و في مقابل ذلك العدد الترتيبي تمّ

التوصل إليه بواسطة المنهج الذي يعتمد على تعميم العدّ في المتصاعد أو الترقيم الحدسي.

⁽⁸⁶⁾ Roger Godement : *Analyse mathématique Op.Cit* , p35.

⁽⁸⁷⁾ J. Cavailles : *Op.Cit* , p 153.

وإذا كان **كفاييس** قد بين أن النظرية الترتيبية عند كانتور أولية، وأن مركز هذه النظرية فكرة مدّ (التعميم) الترقيم فإن فون نومان بدوره أكد: " في الواقع، لا يوجد إلا نوع واحد للأعداد: الأعداد الترتيبية، فالخاصية العددية مرتبطة بخصائص فعل العدّ والذي ينبثق مباشرة الترتيب الجيد والأعداد الترتيبية " (88). ولهذا فالأعداد الأصلية أو العادة ليست لها وظيفة في النظرية الترتيبية، ولكن في الرياضيات الكلاسيكية هي مهمة بل ضرورية، وهذا ما أكدته كانتور عندما أقر بأن هناك علاقة بين الأعداد الترتيبية والأصلية.

فالنظرية الأكسيوماتيكية هي ترتيبية، والنظرية الأصلية هي مخصصة للإجابة على مسائل الرياضيات الكلاسيكية وأن مسألة المتناهي هو الذي ميز بينهما. ولهذا فالفرق بين الرياضيات الكلاسيكية والنظرية الأكسيوماتيكية أن الأولى تعتمد على المفاهيم الأصلية، بينما النظرية الترتيبية هي أولية، بل أن فون نومان يؤكد أن النظرية الأصلية انبثقت من النظرية الترتيبية من أجل الرد على مسائل الرياضيات الكلاسيكية، وهذا ما يجعلها ثانوية وعرضية فهل موقفه صحيح؟

ب - النظرية الترتيبية والنظرية الأصلية:

لكي يثبت موقفه، تطرق فون نومان إلى مسألة مقارنة قوى المجموعات، فهو يرى أن المقارنة هي نسبية بالنسبة للأكسمة. فإذا كان لدينا نسق \dot{a}_1 الذي يحقق أكسيومات فون نومان، وإذا كان النسق \dot{a}_2 خاضع لنفس المبادئ، ولكن يحتوي أكثر على دوال، فإن نفس الموضوع وليكن M يمكن أن يكون غير عدود في \dot{a}_1 ولكنه عدود في \dot{a}_2 .

ونفس الشيء بالنسبة للتناهي والترتيب الجيد: " فغير مستبعد أن المجموعة M تظهر متناهية ومرتبطة جيدا في النسق \dot{a}_1 ، وفي \dot{a}_2 لامتناهية و غير مرتبة جيدا، لأن جزء من M الذي ليس له عدد أول لم يكن مجموعة في \dot{a}_1 ، ولكنه مجموعة في \dot{a}_2 " (89).

ولهذا فالنسبية كانت تخص التناهي والترتيب، والنتيجة التي نخلص إليها ويصرح بها فون نومان، " أنه مستحيل الوصل أو الربط بين الأنساق المبدنهنة (*axiomatisés*) والحركة

(88) *Ibid*, p 157.

(89) *Ibid*, p157.

البيسطة للاكتشافات الرياضيات. وعدم وجود صلة، يعني وجود قطيعة بين النظرية المبدنه والرياضيات الكلاسيكية، التي تهدف إلى حل مسائلها بشكل ملموس وواضح" (90).

ولكن كفايس رفض وجود القطيعة بين النظريات المبدنه والرياضيات الكلاسيكية، ودعا إلى ضرورة تقليص مفهوم الأكسمة: "أكسمة نظرية المجموعات ليست إلا تقنين للمساعي والإجراءات الفعالة والحقيقية من أجل إبعاد والتخلص من المفارقات" (91). كان يجب تحديد المناهج والطرق الخالية من التناقض وهذا ما جعل الأكسمة ضرورية، لكنها تبقى تابعة للنظرية البسيطة، ولهذا يقر كفايس: "أن النظرية المبدنه متصلة بالنظرية البسيطة وهي مازالت مكوتة للصرح الرياضي، حيث مكان النظرية المبدنه محدد بالنظرية البسيطة، وهذا ما يؤكد تاريخ المناهج وتطبيقاته" (92).

أما الحديث عن نظرية المجموعات المنبثقة من الرياضيات الكلاسيكية كالتحليل، فإن هذه النظرية مؤسسة داخل الصرح، أو كما يقول زرمولو في قاعدة الصرح: "فإذا أردنا الاحتفاظ بمكانة النظرية، فيجب أن تكون حجر زاوية في الرياضيات، يجب ألا تكون منفصلة عن الإجراء المبدن" (93). فمسألة نظرية المجموعات لا يجب أن تعزل عن الرياضيات والصرح الرياضي بصورة عامة.

ج- أكسمة زرمولو-فرانكل و فون نومان :

يؤكد كفايس وجود فروقات بين الأكسمتين:

• الفرق الأول: فون نومان تميز في نسقه بقوله بالدوال والمبررات عوض المجموعات والعناصر، وهذا الفرق هو تقني، مكمل موجه فقط للتبسيط (94). وهذا ما أدى إلى تغيير صورة الأكسيومات.

• إذا كان زرمولو قد حلّ المفارقات بإبعاد "المجموعات الكبرى"، كمجموعة كل المجموعات، أو مجموعة كل الأعداد الترتيبية، فإن فون نومان بيّن أن هذه المجموعات غير ضارة، وأن الصعوبات تكمن في السياق أو الإجراءات التي ترد فيها. فقون نومان إذن أدرج

(90) *Ibid*, p 158.

(91) *Ibid*, p158.

(92) *Ibid*, p 159.

(93) Zermelo : *Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles*, *Op.cit*.

(94) J. Cavaillès : *Op.cit* , p 155.

المجموعات الكبيرة مع امتناع أن يعتبرها كعناصر لمجموعات أخرى، وهذا ما جعله يضع حاجزا أمام المتناقضات.

• لاحظ فرانكل وجود إنجازين في أعمال فون نومان :

- إعادة إدماج المجموعات الكبرى.

- ضعف نسق الأكسيومات.

فنسق زرمولو المطور من طرف فرانكل يحتوي نوعين من الأكسيومات:

الانفصال والتعويض، و فون نومان جعلهما مقدمات أولية.

• الأعداد الترتيبية لفون نومان يمكن تعريفها في نسق زرمولو - فرانكل بواسطة

أكسيوم التعويض.

• أضاف فون نومان أكسيوما ينص على أن الأنساق التي يمكن أن تكون عناصر

هي مجموعات. وهذا الأكسيوم عوض أكسيومات المزاوجة، الانفصال والتعويض والاختيار

في أكسيوماتيكم زرمولو-فرانكل⁽⁹⁵⁾ ، وبهذا الأكسيوم أبعد مفارقة راسل أما مفارقة بورالي-

فورتي حولها إلى برهان الترتيب الجيد.

ومما سبق عرضه في الفصول الثلاث نصل إلى النتائج التالية:

- إن تكوين النظرية المجردة للمجموعات كان من خلال 3 مراحل:

• طرق الرياضيين المهتمين بنظرية المجموعات ظهرت وتجلت في تحليل القرن 19.

• كانتور طور هذه الطرق التي أدت من جهة إلى:

- تحديد القوى في نظرية التكافؤ.

- امتداد العدّ في النظرية الترتيبية.

• الأكسمة: بداية من التحضير للنظرية المجردة من طرف ديدكند لتأسيس علم الحساب،

وتمديده من طرف زرمولو للبرهنة على أن أكسيوم الاختيار يسمح بالبرهنة على الترتيب

الجيد.

⁽⁹⁵⁾ Ibid, p 156.

- ظهور نظرية المجموعات على يد كانتور في العقد الأخير من القرن الماضي كان حلقة مهمة جدا ميزت القرن 19. فنظرية المجموعات تشكل دعامة هذه الدقة، فأصبحت الأساس المشين يقوم عليه الصرح الرياضي.
- كانت محاولة الرياضيين تهدف إلى إقامة التحليل على أسس حسابية، أي على الأعداد الطبيعية N إلا أن نظرية المجموعات سعت إلى استنتاج مفهوم العدد من المجموعة، فالعدد هو قوة المجموعة، ولا يرد إلى موضوعات تحصى بل إلى علاقة تقابل (واحد بواحد).
- إن الطرق والمناهج التي استخدمها كانتور استخدمت كذلك في النظرية المجردة، التي يمكن القول أنها سمحت بأكسمة الاكتشاف الكانتوري.
- لقد توصل كفاييس في نهاية أطروحته إلى الأكسمة كمرحلة أخيرة من مراحل تطور نظرية المجموعات ومنه، فهذه وجهة نظر تاريخية أكسيوماتيكية في آن واحد وهذا لا يمكن أن يكون إلا بحث ابستمولوجي.
- كانتور طور نظرية التكافؤ لحل مسائل التحليل، وبين أن مجموعات النقاط اللامتناهية تنقسم إلى فئتين: العدود والمتصل. نظرية التكافؤ تقوم أساسا على المجموعات الموجودة في الرياضيات الكلاسيكية، وتحاول أن تحدد علاقاتها.
- كان هدف الأكسمة إبعاد المفارقات والمتناقضات من خلال تحليل نقدي للنظرية.
- إن الأكسمة ليست اكتشافا لنظرية، ولكنها تطوير لنظرية بسيطة وجدت قبلها، إذن النظرية البسيطة هي قاعدة وأساس ومنطلق النظرية الأكسيوماتيكية، إنها توضح وتبين البنية الحقيقية لنظرية المجموعات وفي آن واحد، تحل التناقضات الظاهرة فيها.
- هذه الأكسمة تبعت يعرض أكسمة زرمولو،فرانكل ووثون نومان والذي نتج عنها الفصل بين النظرية المبدئية والرياضيات الكلاسيكية، بالرغم من ضرورة الوصل بينهما ودمجهما معا في الصرح الرياضي كما أكد كفاييس .
- إن مفارقة راسل وبورالي- فورتى تمّ إقصاءهما ولكن غير مستبعد وجود مفارقة جديدة، لأنه لم يتم البرهنة على عدم تناقض النسق.
- الأنساق الأكسيوماتيكية تكونت من مجموعة من مبادئ أو لنقل أكسيومات وكانت تحاول وتهدف إلى أن تكون متناسقة، لكن في كل مرة يقع الرياضي في أخطاء، يحاول الرياضي الآخر تجاوزها وهكذا.

الباب الثاني

الأكسمة و الصورية في الرياضيات

الفصل الأول: نتائج أزمة نظرية المجموعات

الفصل الثاني: الصورية و الأكسمة في القرن التاسع عشر

الفصل الثالث : أكسمة الهندسة الإسقاطية

إن كتاب "فلسفة الرياضيات" لجان كفاييس، هو الأطروحة المتممة على أساس أن أطروحته الأصلية كانت بعنوان: المنهج الأكسيوماتيكي والصورية، وتاريخ الرياضيات والمنطق يؤكدان أن الأطروحة المتممة، كان يجب أن تكون الأولى في الظهور، بينما الأصلية هي الثانية، وذلك لأن كفاييس جعل بداية الأطروحة الأصلية عند نقطة نهاية الأطروحة المتممة، في الأطروحة المتممة نظرية المجموعات وثيقة الصلة بالرياضيات الكلاسيكية، هذه الصلة يمكن النظر إليها من جهتين مختلفتين: فنظرية المجموعات تأسست بالاعتماد على النظريات الكلاسيكية، وفي مقابل ذلك من خلال تطبيقات نظرية المجموعات تمّ تطوير وإعادة بناء الرياضيات الكلاسيكية، لكن في الأطروحة الأصلية غير من موضعها، وجعلها جزءا من الصرح الرياضي، كما غير إشكالية الأسس من نظرية المجموعات إلى الرياضيات ككل، ولهذا فقد أصبحت عنصرا أساسيا في الصرح الرياضي. إلا أن ظهور المفارقات داخل هذه نظرية، كان عاملا أساسيا زعزع كل الصرح الرياضي وهذا ما فرض إعادة نظر في بناء الصرح الرياضي، وإعادة بنائه من جديد.

ولهذا إذا كانت الفصول السابقة قد أجابت على أسئلة تخص نشأة نظرية المجموعات واكتشاف اللامتناهي، وإثبات وجوده، وكيف تصدى الرياضيون للمفارقات الناتجة في هذه النظرية، ومن ثمّ فالاهتمام انصب على نظرية المجموعات و ربطها بالرياضيات الكلاسيكية، فإنه في الفصول اللاحقة سيتم التركيز على مسألة أساس الرياضيات، أساس الصرح الرياضي وهي المسألة الناتجة عن أزمة نظرية المجموعات.

الفصل الأول

نتائج أزمة نظرية المجموعات

المبحث الأول : الحلول التقنية لمشكلة أسس الرياضيات

المبحث الثاني : الحلول المقترحة في الفلسفة الكلاسيكية

المبحث الثالث : المدرسة الحدسية المعاصرة

لقد اهتم **كفاييس** بدراسة الرياضيات من مختلف الجوانب، وإذا كان في الفصول السابقة قد اهتم بنظرية المجموعات وبكيفية حل المفارقات الناجمة فيها، فإنه في الفصول المتبقية غير نظرتة للرياضيات وعمم دراسته على كل مجالاتها، ولهذا فقد حاول إيجاد الحلول لكن خارج مجال نظرية المجموعات أي في الجبر والتحليل والهندسة، واهتدى إلى إمكانية بناء الرياضيات على أساس حدسي أو تجريبي، سواء عند الرياضيين أو الفلاسفة. فهل الحدس والتجربة يشكلان أساسا متينا لتأسيس رياضيات قوية؟

المبحث الأول: الحلول التقنية لمشكلة أسس الرياضيات

أولا - تجريبية بورال:

لقد أشار **كفاييس** إلى الرياضي بورال في أطروحته المتممة، من خلال عرض موقفه من برهنة زرمولو، ففي المقال "خمس رسائل حول نظرية المجموعات" حاول هادامار الدفاع عن زرمولو، من خلال التأكيد على أن المواضيع الرياضية لها وجود مستقل عن تفكيرنا⁽¹⁾، بينما في المقابل بورال، بيير ولوبسغ كانوا تجريبيين وأكدوا على أن ما هو موجود هي المواضيع التي يمكن الوصول إليها وتعريفها، يقول عنهم **كفاييس**: "بعيدا عن كل تأمل، يريدون تحديد أي المواضيع و المناهج التي لهم الحق في الاعتماد عليها، حتى لا يجدوا أنفسهم أمام تناقض"⁽²⁾.

لقد تمت الإشارة إلى موقف بورال من المفارقات ودور التعريف في مؤلفين: "دروس حول نظرية الدوال"⁽³⁾ "مناهج ومسائل نظرية الدوال"⁽⁴⁾، إذ يرى أن المفارقات ناتجة عن التفكير في الفراغ فيقول: "لا أفهم، فإن وجهة نظر التحليليين الذين يعتقدون أنهم يمكنهم البرهنة على فرد محدد دون تعريفه، فهنا يوجد تناقض في الحدود التي دائما كنت أركز عليها"⁽⁵⁾. فحسب بورال المفارقات ناتجة عن التفكير في موضوعات لم يتم تحديدها، ولهذا

(1) Borel : cinq lettres sur la théorie des ensembles Op.cit, p 296.

(2) J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme ,essai sur le problème du fondement des mathématiques, Ed Hermann, Paris, 1981, p 6.

(3) Borel : Leçons sur la théorie des fonctions (éléments et principes de la théorie des fonctions), ed Gouthière Villars, Paris ,3^{ème} éd,1928.

(4) Borel : Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions, ed Gouthière Villars, Paris,1922.

(5) Ibid, p 92.

لتفاديها يجب أن يعتمد البرهان على موضوعات محددة ومعروفة منذ البداية. والتعريف حسب رأيه يسمح بمعرفة الكائن الرياضي الذي نتحدث عنه، وأن نتعامل معه دون غموض أو إيهام.

أ- التعريف في الرياضيات:

إن صحة ومصداقية التعريف محددة باتفاق الرياضيين الذين يعرفون عن أي المواضيع يتحدثون من جهة، ومن جهة أخرى أنهم يتحدثون عن نفس المواضيع، فعندما يتحدث الرياضي عن متتالية لأعداد طبيعية، فكل رياضي يفهم نفس ما يفهمه الرياضي الآخر، ومتأكد من فهمه⁽⁶⁾.

فالتعريف إذن يجب أن يترجم البناء انطلاقاً من متتالية الأعداد الطبيعية أو المتصل الهندسي، الذي يمكن التوصل إليه عن طريق الحدس وهو ما أكده بورال بقوله: " أرى أن هذا المفهوم المتصل، تمّ التوصل عليه عن طريق الحدس الهندسي"⁽⁷⁾، بينما المفاهيم المشتقة يتم تعريفها بسلسلة من العوامل والشروط، أو الإجراءات التي تطبق على متتالية الأعداد الطبيعية والمتصل الهندسي. ولهذا فنتيجة الانتقادات التي وجهت لتعريفات المواضيع الرياضية أبعدت المفارقات التي ظهرت في نظرية المجموعات وكذلك المفارقات الناتجة عن الأعداد الترتيبية التي تنتمي إلى الفئة II ، والتي هي عبارة عن أعداد متصاعدة، وذلك لأن " الأعداد الترتيبية المتصاعدة لا يتفق ولم يتفق حول تعريفها الرياضيون كما هو الشأن بالنسبة للأعداد الطبيعية"⁽⁸⁾، وعدم اتفاق الرياضيين حول تعريف الأعداد المتصاعدة راجع للأسباب التالية:

- إن متتالية الأعداد المتناهية هي محددة بالقضية التالية: يعد كل عدد طبيعي يأتي عدد أكبر، فالعملية التي يتم من خلالها الانتقال من عدد إلى آخر هي نفسها. بينما متتالية الأعداد المتصاعدة تحقق القضية التالية: يعد كل عدد يأتي عدد أكبر، لكن العملية التي تسمح بالانتقال من عدد إلى عدد أكبر أو لاحق، ليست لها نفس الوحدة، ولا نفس البدهة بالنسبة للعملية السابقة⁽⁹⁾.
- إن وحدة العملية على المتناهي وعلى العكس غموض العملية بالنسبة للمتصاعد، هما ناتجان عن الحدس والتي لا يمكن تفسيرهما دون اقتحام عالم الميتافيزيقا.

⁽⁶⁾ Borel : *Leçons sur la théorie des fonctions, Op.cit, p 181.*

⁽⁷⁾ *Ibid, p 186.*

⁽⁸⁾ *Ibid, p 171.*

⁽⁹⁾ *Ibid, p 161.*

3- يمكن تكوين الأعداد الترتيبية الأولى من الفئة II، انطلاقاً من الأعداد الطبيعية فإذا

كانت: $w : 1, 2, 3, \dots$

$w + 1 : 2, 3, \dots, 1$

$w + 2 : 3, 4, \dots, 1, 2$

$2w = 1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots$

ب - موقف بورال من مفارقة ريشارد:

لقد بيّن بورال أن مفارقة ريشارد تقوم على تعريف مبهم وغامض: فقد عرّف مجموعة E للأعداد المعرفة بواسطة عدد متناهي من الكلمات، ثم يكون بفضل المجموعة E ، العدد P الذي لا ينتمي إلى E ، بالرغم أنه عرّف بعدد محدد من الكلمات ويجب أن ينتمي إلى E . لكن المجموعة E غير محددة بصورة كافية حتى تكون موضوعاً للبرهنة وتسمح حينها بتكوين العدد P . ولهذا فالمجموعة تكون محددة إذا وفقط سمح تعريفها بتحديد كل عناصرها. ومنه فالمجموعة E ليست كذلك لأنه لا نعلم إن كانت تنتمي إلى P أم لا.

ولهذا توصل بورال إلى نتيجة وهو أنه لتحديد عناصر المجموعة E ، يجب حل كل المسائل الرياضية، وكل المعادلات التي تستخدم عدداً محدداً من الكلمات. فالمجموعة قد تكون عدودة ولكن ليس بالضرورة مرقمة⁽¹⁰⁾، أي أنه لا يمكن أن نحدد بواسطة عدد متناهي من الكلمات كل عنصر من العناصر. ولهذا فتعريف ريشارد لم يكن دقيقاً واضحاً، وهذا ما أدى إلى ظهور المفارقة.

⁽¹⁰⁾ J. Cavailles : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 9.

ج- إصلاح الرياضيات عند بورال:

إن الإصلاح يخص مناهج التحليل:

- البرهنة تكون بالاعتماد على الأعداد المعطاة من خلال منهج واضح ومفسر للحساب.
- العدد "a" هو قابل للحساب، إذا وفقط إذا كان العدد الطبيعي n ، يمكن الحصول على عدد ناطق الذي يختلف عن a الأقل من $1/n$ (11).

• الأعداد الناطقة هي قابلة للحساب، وأن مجموعة الأعداد القابلة للحساب لا يجب أن تتجاوز المجموعة العدودة أي الفئة I.

• لا يمكن استخدام إلا الدوال القابلة للحساب (*calculable*)، وتكون الدالة قابلة للحساب إذا وفقط كانت قيمتها قابلة للحساب بالنسبة لكل قيمة لمتغير قابلة للحساب. والدوال القابلة للحساب تسمح بتعريف المجموعات المحددة جيداً، وهي التي يطلق عليها المجموعات القابلة للقياس أو المجموعات البورالية (*ensembles boréliennes*).

• إن الدالة المميزة للمجموعة المحددة جيداً والتي تساوي 1 بالنسبة لعناصر المجموعة، و0 بالنسبة للعناصر التي لا تنتمي إليها، هي دالة قابلة للقياس. والدالة القابلة للحساب التي لا تأخذ إلا قيم 0 و1 تساوي 0 على بعض المجالات و1 على مجالات أخرى.

• قدم بورال تعريفاً بنائياً للمجموعات المحددة جيداً، تتطرق من مجال $[a, b]$ حيث a و b قابلان للقياس. هذا المجال يكون المجموعات الأولية المحددة جيداً بواسطة إجراءين: الاتحاد المتناهي أو العدود، والتقاطع المتناهي، وخلال التكوين، يتم الوصول إلى الأعداد الترتيبية للفئة II إلى غاية w_w (12).

لاحظ كفايس وجود صعوبتين في إصلاحات بورال :

• من جهة، إذا كان بورال قد قبل في البداية بحس المتصل، فإن هذا الأخير لا يمكنه أن يؤسس أو يكون الإجراءات الهندسية (13). إن المتصل هو أساس المجموعات المحددة جيداً، المكونة انطلاقاً من المجال $[a, b]$ ، لكن لا يمكن أن نطبق الإجراءات على المتصل إلا من خلال الأعداد الطبيعية وبواسطة الحساب. والمتصل الهندسي يمكنه أن يؤسس إجراءات

(11) Borel : *Leçons sur la théorie des fonctions*, Op.cit, p 219.

(12) Ibid, p 235.

(13) J Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 11.

جديدة وإنتاج مجموعات صعبة بالنسبة للمناهج العددية. ويرى كفاييس وجود نوع من التوتر (*tension*) بين ثنائية الحدوس المقبولة في البداية وحصرها في المناهج العددية فيما بعد (14).

• إن المجموعات المعرفة جيّدا أثرت في الرياضيات أكثر مما تصور بورال. فبالنسبة إليه نظرية المجموعات المعرفة جيدا يجب أن تبقى بنائية، وإن هذه المجموعات هي معرفة بالاستقراء، وتكوّن جسما مفتوحا إلا أن الاستدلال المبني على هذه المجموعات يعتبرها كلا معطى، لامتناهيا فعليا بدلا أن يكون لا محددًا جسما مغلقا بدلا من أن يكون مفتوحا. ولهذا نلاحظ أن الإجراءات المطبقة على المجموعات المعرفة جيّدا قد تجاوزت الحدود التي رسمها لها بورال، وكانت أوسع من افتراضاته.

ومنه ومما سبق نستنتج أن بورال كانت إسهاماته تجريبية، إذ ربط بين التعريف للمواضيع الرياضية والحدس، وكان في كل مرة يعود إلى الحدس لتحديد التصورات والمفاهيم، إلى المتصل الهندسي (التجريبي) وهذا ما جعله يقع هو أيضا في الأخطاء التي نبه إليها كفاييس.

ثانيا - التعريف عند لوبسغ ونتائجه:

أ - دلالة التعريف عند لوبسغ:

عرض لوبسغ موقفه في كتاب: "دروس حول التكامل والبحث في الدوال الابتدائية" (15)، ومقال من بين المقالات التي نشرها في مجلة الرياضيات "حول الدوال الممتلئة تحليليا" (16). ويتساءل لوبسغ: هل يمكن البرهنة على وجود الكائن الرياضي دون تعريف؟ يجب "إنها مسألة اتفاق، ولكن يظن أنه لا يمكن أن يكون هناك بناء صلبا إلا بالتأكيد على أن البرهنة على وجود الكائن يكون بتعريفه" (17).

والتعريف عند لوبسغ يعني تسمية خاصة مميزة للمعرّف، ولهذا فهو لا يعني البناء أو التكوين وإنما القيام بعملية الوصف في عدد محدد من الكلمات، فيقول: "الموضوع هو معرفّ

(14) *Ibid*, p12.

(15) *Lebesgue : Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Ed Gauthier- Villas, Paris, 2^{eme} edition, 1928.*

(16) *Lebesgue : sur les fonctions représentables analytiquement, journal des mathématiques pures et appliquées, Gautier -Villars, Paris, Tome1, Année 1905.*

(17) *Lettre de M Lebesgue à M Borel : Cinq lettres dans la théorie des ensembles Op.cit, p 299.*

عندما نعبر عنه بعدد متناهي من الكلمات تتطبق على هذا الموضوع هو وهو فقط، أي قمنا بتسمية خاصة مميزة للموضوع ذاته⁽¹⁸⁾. ولهذا فإن تعريف لوبسغ يقترب من تعريف بورال، ولكن يختلف عنه، حيث تخلى عن فكرة وجود البناء، وهو يؤكد أن هذا التعريف لا يعني البناء أو التكوين وإنما القيام بعملية الوصف في عدد محدد من الكلمات، كما نلاحظ أنه يساوي بين كلمة التعريف والتسمية فتعريف الموضوع يعني تسميته، أي تسمية المواضيع التي تستعمل في عملية البرهنة، ولهذا نتيجة لهذا التعريف فقد رفض لوبسغ أكسيوم الاختيار على أساس أنه لا يعرف العنصر المتميز.

ب - موقف لوبسغ من أكسيوم الاختيار:

أكسيوم الاختيار يقوم أساسا على وجود العنصر المميز دون القدرة على ذكر خصائص هذا العنصر أو تعريفه، ولهذا البرهنة لن تكون لها معنى إلا إذا كانت المواضيع الموجودة فيها معرفة فعليا وبصورة واضحة. وقد طبق لوبسغ موقفه هذا من خلال دراسته للدالة إذ أكد أنه لا يمكن الحديث عن الدالة دون تعريفها، فمثلا إذا كانت لدينا الدالة:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

فإننا نسمي عادة الخاصية التي تنتمي إلى كل المجموعات الخاصة بالأعداد:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \quad f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

كما يمكن أن نسمي خصائص أخرى مميزة للدالة f :

فمثلا إذا كانت $f(x)$ معرفة بصورة معينة، فإننا نقول أن $F(x)$ هي إحدى الدوال الأولية للدالة $f(x)$ التي تعد عند الصفر، مع التأكيد على أن f يجب أن تكون محدودة (*bornée*)، ولهذا فتسمية الدالة يعني القول أنها تساوي الصفر أو الواحد⁽¹⁹⁾.

فإذا كانت لدينا الدالة التالية⁽²⁰⁾ والتي هي تمثيل تحليلي (*Représentation*)

: *analytique*

$$Z(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} [(\cos m! p x)^{1/n}]$$

$$m = \infty \quad n = \infty$$

⁽¹⁸⁾ Lebesgue : sur les fonctions représentables analytiquement, Op.cit, p 205.

⁽¹⁹⁾ Ibid, p 206.

⁽²⁰⁾ Ibid, p140.

فإن هذه الدالة تساوي 1 إذا كان x عددا ناطقا، وتساوي الصفر إذا كان x لاناظقا. وتأكيد لوبسغ على ضرورة وضع تعريفات وصفية عوضا تعريفات بنائية جعلته يؤسس لنظرية القياس تكامل النظريات (*théorie de la mesure et de l'intégration*)⁽²¹⁾. وإذا كان بورال قد أكد أن المجموعة المعرفة تحتوي على قياس معطى من بنائها، فإن لوبسغ طرح المسألة خلافا لهذا، وأكد أن بكل مجموعة نقاط E يمكن ربط عدد موجب أو معدوم يحقق الشروط التالية:

مجموعتان متساويتان لهما نفس القياس.

مجموعة حاصل جمع عدد متناه أو لامتناهي للمجموعات المنفصلة مثنى مثنى (دون نقاط مشتركة)، فإن قياسه هو مجموع القياسات.

إن قياس القطعة 1,0 تساوي 1.

ج- المسمى عند لوبسغ:

أصبح العقل الرياضي محددًا بشرط ألا وهو القدرة على إدراك وتسمية المواضيع، يقول كفاييس: "إن الغنى في المسمى (*nommable*) يلتقي أو يتقاطع مع غنى العلوم"⁽²²⁾، وهذا ما يدل على أهمية تسمية المواضيع و تمييزها بذلك عن المواضيع الأخرى، وهو ما يبين أن لوبسغ تجريبي، على أساس أنه أكد أن وجود الموضوع يتوقف على إمكانية تعريفه، فالمواضيع ليست مستقلة عن فكرنا وعن تعريفاتنا، والتجريبية في هذه الحالة تابعة للحركة الرياضية.

لكن موقفه يبقى غير كاف لتأسيس الرياضيات، فيمكننا تسمية فئات كبيرة جدا لمجموعات، كما أنه ليس يقينيا أو مؤكدا أن البراهين الخاضعة لشروط المسمى هي أكثر ضمانا من البراهين الكلاسيكية لنظرية المجموعات، بالإضافة إلى أن المواضيع المسماة يمكن أن تكون معرفة بصورة غير كافية.

وبناء على ما سبق، نستنتج ما يلي:

- إن بورال ولوبسغ حاولا تحديد المواضيع والمناهج التي يمكن استعمالها في التحليل وفي نظرية التكامل.

⁽²¹⁾ J. Cavailles : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 16.*

⁽²²⁾ *Ibid, p 18.*

- تجريبية بورال كانت أضيق من أن تقوم بتغطية تطور العلوم، وتجريبية لوبسغ مرنة جدا من أجل تأسيس العلم.
 - لا يمكن اعتبار محاولات لوبسغ و بورال حلا لإشكالية الأسس: على أساس أن ثنائية البناء التحليلي والإجراء الهندسي، والمعاني المختلفة لهاتين العبارتين والتي توصل إليها كل منهما من خلال الأبحاث المتعمقة، وكذا الإشكاليات الناتجة عن كلمة التعريف تعتبر دافعا قويا للتفكير "التفكير النقدي أو المراجعة النسقية لماهية العمل الرياضي، بل أكثر الاستدلال الذي يؤدي إلى البحث فيما وراء الرياضيات، عن الأرضية المشتركة لكل النشاطات العقلية"⁽²³⁾.
- ولهذا فقد رأى **كفاييس** أن البحث في الأساس يركز على تعريف عام لعمل الرياضي، وهذا ما لا يمكن للرياضي أن يقوم به إذ يتجاوز قدرته، وهذا ما دفع **كفاييس** إلى البحث عن الحلول عند الفلاسفة الكلاسيكيين.

⁽²³⁾ Ibid, p 21.

المبحث الثاني: الحلول المقترحة في الفلسفة الكلاسيكية

لم يجد كفايس حلاً في إسهامات كل من بورال ولوبسغ، فلجأ إلى الفلسفة الكلاسيكية لعله يجد الحل عند الفلاسفة وخاصة كما يقول كفايس: "إن التاريخ يبين وجود صلة بين الحلول التقنية السابقة الذكر والأنساق التي بناها الفلاسفة" (24). وقد خص بالذكر ديكارت، ليبنتز، كانط.

أولاً - ديكارت و المعرفة الرياضية:

يرى برنشفيك أن "الديكارتية اعتبرت دائماً نموذجاً للفلسفة النسقية عند المحدثين" (25). فديكارت هو واحد من الفلاسفة الذين لعبوا دوراً كبيراً في تغيير مسار الفلسفة الغربية، من سيادة النزعة الغائية والتفسير اللاهوتي والميتافيزيقي للظواهر على حد تعبير أوغست كونت.

أ - فلسفة ديكارت:

يمكن النظر إلى فلسفة ديكارت من زوايا متعددة، فمؤرخ الرياضيات يرى أن الخاصية المميزة للهندسة الديكارتية هي نسق التوازي الذي يقابل المعادلات بالمنحنيات، ويرد مسائل الهندسة إلى مسائل الجبر، وبالنسبة لمؤرخ الميكانيكا والفيزياء فإن الخاصية المميزة للعلم الديكارتية تتمثل في نسقية الحركة في الامتداد ذي ثلاثة أبعاد وهذا كاف لتحديد الجانب الموضوعي في الظواهر. بينما بالنسبة لمؤرخ الميتافيزيقا فإن الخاصية المميزة للتفكير الديكارتية هو الربط النسقي للذات المفكرة بالوجود الإلهي، وبالأشياء المادية الواقعية المحيطة به. هذه إذن أهم الجوانب المميزة للفلسفة الديكارتية، إذ يمكن من خلالها بناء فلسفة ديكارتية موحدة.

فأهم ما يميز إسهامات ديكارت هو إعداده لمنهج فلسفي وفلسفة ميتافيزيقية، وعلاوة على ذلك تابع دراساته العلمية حول الظواهر الضوئية كما واصل معالجة مسائل الهندسة، وقد نشرت مقالاته في كتاب "مقال في المنهج"، "التأملات"، والتي فيه أكد أن الأفكار يجب أن تكون واضحة ومتميزة.

(24) *Ibid*, p21.

(25) L. Brunschvicg : *les étapes de la philosophie mathématique*, Op. cit, p 128.

عن عملية التعرف على الموضوعات الخارجية، يؤكد ديكارت وجود ثلاث مستويات للمعرفة⁽²⁶⁾:

- الروح لا تدرك إلا بالفهم الخالص (*Entendement Pur*).
- الجسم والذي هو امتداد للصور والأشكال والحركات يمكن أن تعرف بالفهم فقط، ولكن يساعده كذلك التخيل (*Imagination*).
- الأشياء التي تنتمي إلى اتحاد الروح والجسم لا تدرك ولا تعرف بالفهم، وإن تم ذلك فسيكون الإدراك غامضاً، ولا تدرك بالفهم والتخيل ولكن تعرف بوضوح المعاني.

لهذا حسب ديكارت، الأفكار الميتافيزيقية تدرك بالفهم وهي تساعد على جعل الروح مألوفة، ودراسة الرياضيات التي تمارس التخيل باعتبارها للأشكال والحركات تعودنا على تكوين مفاهيم متميزة، و"بالاعتماد على الحوادث العادية، وبتجنب التأمل ودراسة الأشياء التي تعتمد على التخيل، نتعلم كيفية التوحيد بين الجسم والروح"⁽²⁷⁾.

وإذا ماركننا الحديث على الرياضيات، فمن خلال ما سبق نستنتج أن للتخيل دوراً في هذا العلم، فهو يساعد الفهم لمعرفة الأشكال والحركات التي يقوم بتقسيمها في الامتداد لترجمة الأعداد إلى خطوط وتوحيد الجبر والهندسة.

يقول ديكارت: "عندما أتخيل مثلثاً ليس فقط أنني أدركه كشكل مركب ومكوّن من ثلاثة خطوط، لكن علاوة على هذا فإنني أعتبر هذه الخطوط الثلاثة حاضرة بقوة في تطبيق الذهن وهذا ما أطلق عليه اسم التخيل"⁽²⁸⁾.

ويتابع ديكارت الحديث عن الأشكال الهندسية و دور التخيل في إدراكها: "وإذا أردت أن أفكر في *"chiliogone"* ، فإنني أدرك أنه شكل مكوّن من 1000 ضلع، بنفس البساطة التي أدركت بها أن المثلث يتكوّن من 3 أضلع فقط. لكن لا يمكنني تخيل الأضلع الآلاف لهذا

⁽²⁶⁾ Henri Gouhier: *La pensée métaphysique de Descartes*, J. Vrin, Paris, 1987, p332.

⁽²⁷⁾ *Ibid*, p332.

⁽²⁸⁾ R. Descartes : *Œuvres de Descartes, Méditations VI*, FG Levrault, Paris, 1824, p 323.

* *Chiliogone*: شكل هندسي مكون من ألف ضلع وألف زاوية، مجموع زواياه يساوي 1996 زاوية.

Denis Diderot et Jean le Rond d'Alembert : Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, V3, 1753, p 337.

[HTTP://poveil.atilf.fr/cgi.bin/getobjet/var/antfla/encyclopedie/Tesadata.](http://poveil.atilf.fr/cgi.bin/getobjet/var/antfla/encyclopedie/Tesadata)

الشكل، ولا رؤيتها، ونظرا لأنه من العادة أنني أعتمد على التخيل عندما أفكر في الأشياء الجسمية، فإنه عندما أدرك الشكل ذو 1000 ضلع، فإنني أخلط بين بعض الأشكال، مما يعني أنه واضح أن هذا الشكل ليس ذو 1000 ضلع لأنه لا يختلف عن الأشكال التي امتثلت في مخيلتي⁽²⁹⁾. وبهذا المثال أكد ديكارت حاجة الرياضي للتخيل في عملية إدراك المفاهيم الرياضية، خاصة الهندسية التي لا يمكن التوصل إليها بالفهم فقط، كما هو الشأن بالنسبة للمثلث.

طرق التفكير:

عندما تحدث عن طرق التفكير "تساءل ما هو الشيء الذي يفكر؛ إنه الذي يشك، يدرك، يثبت، ينفي، يريد، لا يريد، يتخيل، يختار و ينتخب"⁽³⁰⁾، ومنه فقد ميز بين الإدراك والتخيل، إلا أن استخدام التخيل في البرهنة الرياضية يحتوي على مجموعة من مساوئ نذكر منها:

- التخيل يفرض تركيز وانتباه خاص للعقل الذي يطابق الجسم حيث يتوحد به لتمثيل الأشكال. هذا التركيز ناجم عن كون وظيفة العقل الأساسية هي التفكير لا التخيل. ومن ثم فهو يؤدي إلى التعب، وإذا لم توضع حدودا للتخيل فإنه سيتحول إلى عائق بالنسبة للفكر، ولهذا يجب دائما أن ترسم حدوده.

- يمكن للعقل أن يكتفي بالبراهين وبالطول التي يتم التوصل إليها من خلال التخيل دون أن يكون مقتنعا بها، وهذا ما يخالف الوضوح الذي أكد عليه ديكارت⁽³¹⁾.

ولهذا ومما سبق فإن ديكارت قد أشار إلى التخيل لإثبات تمايز العقل والجسم أو الروح والجسم. إلا أن الصعوبة الجوهرية للديكارتية لم تعد تتمركز في الإشكال المطروح سابقا، وإنما تجاوزته للتمركز في علاقة الفكر بالممتد، "تبرير وتوضيح العلم الذي قيمة جوهرية تتمثل في مطابقته مع نظام الفكر، هذا العلم يمكن تطبيقه بصورة مباشرة بعالم مجرد من الفكر (العالم المادي)⁽³²⁾.

إن الأفكار الواضحة والتميزة التي لدى الإنسان عن الأشياء الملموسة أو الجسمية، البعض منها كما يقول ديكارت مستمدة من الفكرة التي يكوّنها الإنسان عن نفسه، كذلك الفكرة

⁽²⁹⁾ R. Descartes : *Œuvres de Descartes, Op.cit, p323.*

⁽³⁰⁾ Kim. Sang Ong- Van - Cung : *Descartes et l'ambivalence de la création. J.Vrin. Paris, 2000, p 89.*

⁽³¹⁾ René Descartes : *Discours de la méthode, J. Vrin, Paris, 1987, p 192.*

⁽³²⁾ L. Brunschvicg : *Op. cit, p 129.*

التي يكوّنها عن المادة، الزمن، العدد، وأشياء أخرى مماثلة لأنه " عندما أفكر أن الحجر هو مادة أو شيء يوجد، ولأنني مادة ومع ذلك أدرك أنني شيء يفكر غير ممتد، وأن الحجر على العكس هو شيء ممتد ولكن لا يفكر، وأن من التصورين هناك فارق واضح بينهما ولكنهما مع ذلك يتفقان في كونهما مادة، ونفس الشيء عندما أفكر أنني موجود الآن، أتذكر أنني كنت يوماً ما كذا، وأدرك أنواع مختلفة من الأفكار حينها أعرف ماذا يعني العدد، وحينها أورد إلى ذاتي فكرة الزمن والعدد، وبعدها أضفيها على أشياء أخرى "(33).

نستنتج من قول ديكارت، أنه يدرك بوضوح علاقاته بالأشياء المادية المحيطة به، فهو يؤكد أنه بالرغم من اتفاقهما في كونهما مادة، إلا أنهما يختلفان على أساس أن جسم الإنسان لا يمتد وهو متصل بالعقل والروح مما يجعله كائن عاقل مفكر، بينما الشيء الخارجي المادي يمتد ولكن لا يفكر، الأول يدرك الثاني لكن الثاني لا يمكنه أبداً أن يدرك الأول، وأنه من خلال الاحتكاك بالعالم الخارجي يستطيع التوصل إلى الكثير من المفاهيم وخاصة مفهوم العدد والزمن.

وأثناء حديثه عن المواد يقول ديكارت: " بينما تلك التي لها خصائص أخرى، حيث الأفكار المكوّنة عن الأشياء الجسدية هي مركبة لمعرفة امتداد الشكل، الوضع، حركة المكان، فإنه صحيح أنها ليست في ذاتي، لا لأنني لست إلا شيئاً يفكر، لكن لأن هذه الأشياء هي أنماط متعددة للمادة، وأنا أيضاً مادة، يبدو أنها يمكن أن تكون محتواة في ذاتي كاملة "(34).

إن قول ديكارت يؤكد وجود علاقة بين علم الممتد ومعرفة العقل، أي بين العلم الموضوعي والمعرفة الإنسانية، ففي العالم الموضوعي الأشياء ما هي إلا تشكيلات متنوعة ومتعددة للمادة، والإنسان كمادة ولكن مفكرة تقيم علاقات بين هذه الأشياء من خلال بناء أفكار واضحة وتمييزة عن هذه الأشياء. ومنه فالفكر الإنساني يقوم ببناء العلم الطبيعي حسب وجود الأشياء في الطبيعة، ومن ثم حسب ترتيبها ونظامها في الطبيعة، وإذا كانت الأشياء مترابطة، متسلسلة فكذلك الأفكار تكون متسلسلة ومتصلة.

كما نستشف من قوله أنه أكد على العدد، لأنه أدرك أن العلم الحقيقي هو الذي موضوعه العدد، كما أكد على الحركة والوضع، كي يشير إلى علم الميكانيكا والفيزياء، وهي

(33) R. Descartes : *Méditations III, Op.cit, p 279.*

(34) *Ibid, p 280.*

العلوم الثلاثة التي أكد عليها ديكرت واعتبرها علوما قابلة للبحث والدراسة خلافا للعلوم التي تدرس الإنسان. فالمنهج الرياضي عند كانط يقوم على لحدس و الاستنباط، و الحدس عنده يكمن في النور الفطري الذي يمكن الإنسان من الانتقال من إدراك الأفكار البسيطة إلى الربط فيما بينها و العلاقات الرياضية هي نوع من هذه الروابط و منه فان فالحقائق الرياضية عنده تركيبية لا تحليلية و هي تنبئ عن الطبيعة و ما يقع فيها و لولا هداية البشر لكانت معرضة للخطأ، فكان يمكن ألا يمده الله بنور فطري فيرى أضلاع المربع أكثر من أربعة و زوايا المثلث أكثر من ثلاثة⁽³⁵⁾، و لهذا فهو لم يستطع أن يتوصل إلى أن القضايا الرياضية قضايا تحليلية لا تركيبية .

ومما سبق، يمكن استخلاص النقاط التالية:

- إن ديكرت حاول من خلال فلسفته أن يحدد طرق المعرفة بعد أن بين وجود ثلاثة أنواع من المواضيع، إضافة إلى أنه حدد بدقة العلاقة الموجودة بين الذات والموضوع، بين الممتد والفكر بعد أن تجاوز الحديث عن علاقة الروح بالجسد.
- يرى كفاييس أن ثنائية العقل والموضوع هي ميزة العقلانية الديكارتية، والعلم ليس أبدا إعادة بناء ولكن وضعه في نظام و ترتيبه، كأن يعرف الامتداد الذي لا نجده في الفلسفات السابقة⁽³⁵⁾.
- إن الرياضيات التي تبحث في المعادلات والمستقيمات والمنحنيات هي علم الممتد، وكل تفكير في الامتداد هو رياضيات. وفيما يخص ديكرت والعلم، فلقد قدم ديكرت منهجا بقواعده ومبادئه لطلب الحقيقية في العلوم، فهو قد كان رجل علم قبل كل شيء⁽³⁶⁾.

⁽³⁵⁾ زكي نجيب محمود: نحو فلسفة علمية، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1958، ص 156.

⁽³⁵⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, p 23.

⁽³⁶⁾ عثمان أمين: ديكرت، مرجع سابق، ص 302.

• بنى العلم على منهج أطلق عليه اسم المنهج الديكارتي، والذي يقوم على تعويض الحسي بالعقلي، والكيفي بالكمي، وكان يريد أن يترجم قدر الإمكان جميع الظواهر إلى مقولة العدد.

• تعويض الحسي بالعقلي أو الكيفي بالكمي، ليس إلا تعويض الخصائص والصفات الكيفية بمعادلات كمية، كأن يعوض الصوت أو الرائحة بعدد من الذبذبات.

• يقوم المنهج على تمجيد العقل على حساب التجربة، من حيث أنه سابق عنها، ولهذا كما يقول "ديكارت" يجب قيادة عقولنا بطريقة جيدة.

• و أخيراً، يرى كفاييس أن ديكارت لم يوفق إلى حدّ بعيد في تمثيل العلم الرياضي في نسق، بدليل أن هناك مفاهيم كان يجب تعريفها ولكنها خضعت للافتراضات، وأن العلاقة بين

العناصر، العدد، المقدار، كذلك تركت للافتراضات⁽³⁷⁾. وهناك نقائص أخرى أشار إليها كفاييس، إلا أننا سنقوم بإرجائها إلى العنصر الخاص بليبنز.

ثانياً - ليبنز والعلم الرياضي:

أ- الامتداد عند ليبنز:

لقد أسس ليبنز فلسفته على فكرة "الجوهر" على غرار ديكارت و"سينوزا"، إلا أنه اختلف عنهما فيما يخص علاقة الذهن بالمادة، وعدد الجواهر، فإذا كان ديكارت قد قال بثلاث جواهر: الله، المادة، العقل أو الذهن، وإذا كان سينوزا سلم بوجود جوهر واحد هو الله، فإن عدد الجواهر عند ليبنز هو لامتناهي والتي أطلق عليها اسم المونادات.

وإذا كان ديكارت قد أكد بأن الامتداد هو ماهية المادة، وسينوزا يرى أن الامتداد والفكر صفتان لله، فإن ليبنز أكد أن "الامتداد يمكن أن يكون صفة للجوهر، وحقته في ذلك أنه ينطوي على التعدد، ولهذا عوضه بالفكر فهو الصفة الجوهرية الوحيدة الباقية"⁽³⁸⁾.

يقول ليبنز: "إن الامتداد، الشكل، الحركة تنطوي على جانب تخيلي وظاهري، وكلما أدركنا أكثر تميز اللون، الحرارة... فإننا نجد أن هذه المفاهيم فيها شيء غامض... وأصل

⁽³⁷⁾ J. Cavailles : Op.cit, p 24.

⁽³⁸⁾ برتراند راسل: تاريخ الفلسفة الغربية، الكتاب الثالث، الفلسفة الحديثة، ترجمة محمد فتحي الشنيطي،

المكتبة المصرية، 1977، ص 140.

إلى البرهنة على أنه لا يوجد شكل دقيق في الأجسام⁽³⁹⁾. فمن خلال هذا القول يتبين لنا أن القول بالامتداد، الحركة، الشكل كخصائص للمادة فيها الكثير من الغموض، وخاصة أن هذه الصفات تنتشر في الشيء ولا يمكن فصلها عنه. فكما ينتشر البياض في الحليب، المحمول ينتشر في الموضوع، فالأحكام إذن يجب أن تتوفر على محمولات لموضوعات، وهذه تؤخذ على أنها جواهر، فقولنا " الناس فانون " هي قضية كلية صادقة، والصفة التي يعينها المحمول هي جزء من جوهر الموضوع، وحديثنا عن المنطق يقودنا إلى الحديث عن الرياضيات، فمن جهة فإن إشكالية الأساس ستحل من خلال ردّ الرياضيات إلى المنطق، أو من خلال صبغة المنطق بصورة رياضية وردهما إلى الحساب، وهذا ما جعل موقفه من المنطق يؤثر على الرياضيات، " ولكي يدرج المنطق في قائمة العلوم الرياضية جعل من الرياضيات نموذج للمنطق⁽⁴⁰⁾.

وقد ساعده في ذلك، أنه لاحظ وجود تماثل صوري بين المنطق والرياضيات، فالمنطق ينقسم إلى: التصورات (الحدود)، الأحكام (القضايا)، الاستدلالات وهي نفسها الموجودة في الجبر: الحدود البسيطة هي الحروف، والحدود المركبة هي الصيغ، تركيبات الحروف بواسطة إشارات الإجراءات (جمع، جداء) ...، أما صيغ القضايا فهي عبارة عن مساواة الصيغ (المعادلات)، أو لامساواتها (المتراجحات)، والنسب أي العلاقات التي تربط بين صيغتين، وأخيرا البراهين أو النتائج والتي هي عبارة عن إجراءات أو تحولات يتم من خلالها استنتاج صيغ جديدة⁽⁴¹⁾. فالعلوم الرياضية عند ليبنيز هي علم الحساب، الهندسة، الميكانيكا، بينما العلوم التطبيقية هي فروع للرياضيات الشاملة أي العلم العام للمقادير. ومادة الرياضيات حسب ليبنيز ليس العدد والمقدار فقط، وإنما كل ما هو موجود في ميدان الحدس الحسي هو قابل للتحديد الدقيق والمحدد⁽⁴²⁾.

إذن توجد صلة بين منطق ليبنيز والرياضيات من جهة كما يوجد تكامل بين الميتافيزيقا والمنطق الذي يعرفه ليبنيز بأنه فن الاكتشاف، ولهذا فإن ليبنيز حاول أن يزود الميتافيزيقا خاصة والفلسفة عامة الصورة الرياضية كوسيلة وحيدة للبرهنة، فهو يرى أن طريقة

⁽³⁹⁾ J. Cavallès : *Méthode formalisme, Op.cit, p 24.*

⁽⁴⁰⁾ L. Couturat : *logique de Leibniz, Félix Alcan, Paris, 1901, p 283.*

⁽⁴¹⁾ *Ibid, p 284.*

⁽⁴²⁾ *Ibid, p 291.*

الهندسيين هي الوسيلة الوحيدة المثالية العالمية والضامن الوحيد للاستقامة المنطقية، وقد عاتب ديكارت وسبينوزا ليس فقط لأنهما لم يستعملا هذه الوسيلة، بل لأنهما أساءا استعمالها⁽⁴³⁾. وبهذا فإن ليبنز صرح بأن "الميتافيزيقا الخاصة بي هي كلها رياضيات"⁽⁴⁴⁾، فقد جعل هذه الرياضيات شاملة وعامة تطبق على كل العلوم.

وقد شبه **كفاييس** إسهامات ليبنز بالمتاهة حيث الكل مرتبط بأجزائه⁽⁴⁵⁾، ففهم النسقية الليبنزية يجب تأسيس شبكة، ومحاولة بناء مخطط المتاهة أو بالأحرى اثنان: واحد خاص بالمفاهيم الفلسفية وشبكة المرجعية (*le réseau de référence*)، والثاني يؤسس النموذج الرياضي. وكل منطقة من هذه الشبكات هي ممثلة بشكل يشبه ربطة على شكل نجمة، حيث كل خيط يصدر من المركز نحو المحيط أو من المحيط نحو المركز، فتتقاطع الخيوط، وتتلاقى، فكل نقطة ترتبط بأكبر قدر ممكن من النقاط بواسطة السبل الممكنة: التوفيق، التركيب، التعبير، المراوغة...⁽⁴⁶⁾، فكل عنصر إذن في متاهة ليبنز مرتبط بمجموعة من العناصر المنتظمة، وهذا ما يمكن إمكانية الانتقال من عنصر إلى آخر من خلال السبل المتعددة، وهذا ما يميز الشبكة، وفيها الكل مرتبط بالكل و الجزء كذلك مرتبط بالكل⁽⁴⁷⁾.

كما تتمثل نسقية ليبنز في المضمونية الدائرية (*circularité Thématique*)، والذي تعني أن كل موضوع، كل قطعة هي مرتبطة بمجموعة القطع أو المواضيع الأخرى، وهذا يعني أن كلية التصورات والمفاهيم هي متصلة، هي عبارة عن نسيج متماسك، حيث لا يمكن عزل تصور أو موضوع دون أن يترك اثر على العناصر أو المواضيع المتبقية. ولهذا يرى **كفاييس** أن الرياضيات ليست إلا علم الروابط المثالية، وهذا ما جعله يربط الرياضيات بالميتافيزيقا، فمن خلال هذه الروابط في الإرادة الإلهية كل شيء مثبت دفعة واحدة، وأنه في المعرفة الإلهية أو في الفهم الإلهي تبرز الروابط ولو بصورة فرضية⁽⁴⁸⁾.

ب - المعرفة الإلهية، الإرادة الإلهية والرياضيات عند ليبنز:

⁽⁴³⁾ Ibid, p 280.

⁽⁴⁴⁾ Ibid, p 282.

⁽⁴⁵⁾ J. Cavailles : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 24.*

⁽⁴⁶⁾ Michel Serres : *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques, Puf, Paris, 1990, p 14.*

⁽⁴⁷⁾ Marcelo Dascal : *La sémiologie de Leibniz, Aubier Montaigne, Paris, 1978, p9.*

⁽⁴⁸⁾ J. Cavailles : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 25.*

إن المعرفة أو الفهم الإلهي والإرادة الإلهية هما جزء من طبيعة الإله، وفهمنا نحن البشر ليس مطابقاً لفهم الإله، النفس هي من آثار الفهم الإلهي ولا يمكن اعتبارها جزء من الفهم اللامتناهي⁽⁴⁹⁾. فليبنز يؤكد عدم وجود تشابه بين الذات الإلهية والذات الإنسانية، إلى درجة أنه يرفض الفكرة التي تؤكد أن التسمية اللفظية هي نقطة الاشتراك بين الفهم الإنساني والإلهي.

وفيما يخص الحقائق يميز ليبينز بين نوعين من الحقائق:

- الضرورية الأبدية كالحقائق الهندسية الحسابية المنطقية، فضرورتها مطلقة وضدها يعني الوقوع في التناقض أي الاستحالة المنطقية.
- وهناك الحقائق الممكنة أو الاحتمالية والتي ضدها لا يستلزم تناقض، وهي التي تعبر عن حقائق الواقع، والتجربة، وقوانين الطبيعة، حقائق التاريخ ومنه ضرورتها هي فرضية وهي مرتبطة بقرارات الإله⁽⁵⁰⁾.

فليبنز يقرّ أن الحقائق الرياضية هي حقائق مطلقة وهي أبدية وضرورية وهي "تنتمي إلى منطقة الفهم الإلهي وتتعلق بإرادته"⁽⁵¹⁾. وانطلاقاً من تمييزه للحقائق الأبدية والفرضية توصل إلى مبدئين أساسيين مهمين: مبدأ السببية (مبدأ السبب الكافي) ومبدأ عدم التناقض⁽⁵²⁾. هذان المبدآن يقسمان الميدان المعرفي إلى ميدانيين كبيرين، ميدان حقائق العقل وميدان حقائق الواقع، "براهيننا مؤسسة على مبدئين كبيرين مبدأ خاص بالهوية أو عدم التناقض والذي بموجبه نحكم بالخطأ على القضايا، والصدق على القضايا المناقضة لها، والعكس صحيح، ومبدأ السبب الكافي من خلاله لا نتعامل مع الظاهرة صادقة أو موجودة إلا إذا كان هناك سبب كاف لوجودها على هذه الحالة وعدم وجودها على حالة أخرى، " هذان المبدآن يحددان جهة القضايا: الأولى مستنتجة من مبدأ الهوية وتؤسس الحقائق الضرورية، والثانية القضايا الاحتمالية، وهذا الفرق بين الحقائق يؤدي إلى الفصل بين المجال المنطقي الرياضي،

⁽⁴⁹⁾ Renée Bouveresse : *Spinoza et Leibniz. L'idée d'animisme universel*, J. Vrin, Paris, 1992, p 239.

⁽⁵⁰⁾ Aloyse Raymond Ndiaye : *La philosophie d'Antoine Arnauld*, J. Vrin, Paris, 1994, p 333.

⁽⁵¹⁾ Anne Becco : *Du simple selon G.W.Leibniz, discours de métaphysique et de monadologie*, J.Vrin, Paris, 1975, p 177.

⁽⁵²⁾ Aloyse Raymond Ndiaye: *Op.cit*, p 334.

والمجال الفيزيائي، المجال الأول يحدد بالحقائق الضرورية والثاني بالحقائق الجائزة أو احتمالية⁽⁵³⁾.

مبدأ عدم التناقض هو قانون الماهيات، أي الحقائق الأزلية المتضمنة في الفهم الإلهي: "الفهم أو المعرفة الإلهية هو منطقة الحقائق الأبدية، إنه بلد الحقائق الممكنة"⁽⁵⁴⁾، كما أن الحقائق الاحتمالية مرتبطة بمبدأ السبب الكافي، إنها تعبر كذلك عن وجود وبالرغم أنها احتمالية إلا أنها لم توجد دون سبب. وهذا يعني أنه "يمكن ردّ سبب اختيار الإله الذي فضل هذا العالم وقوانينه، إلى اللامتناهي من المونادات الممكنة، مما يعني أن المحمول محتوي في الموضوع"⁽⁵⁵⁾.

والبحث عن سبب وجود هذا العالم وقوانينه، يكون من خلال تبيان أن كل الحقائق يمكن أن تكون معروفة مسبقا أي معلومة، "بينما الحقائق الممكنة هي بعدية، نتوصل إليها بواسطة التجربة ولن يتم معرفتها قبلها إلا للذي يستطيع أن يعرف الأسباب التي من أجلها فضل الله هذا العالم عن العوالم الأخرى الممكنة"⁽⁵⁶⁾. فالإله حسب ليبنز خلق العالم الأكثر كمالا من بين العوالم الممكنة الأخرى، "العالم هو الكامل، هو الأبسط في فرضياته، والغني في ظواهره"⁽⁵⁷⁾، وتحديد هذا الكم من الظواهر هو الذي يؤسس مفهوم أو ماهية العالم الأكثر كمالا، وهو الذي يتحقق بإرادة الله، وكل الحوادث التي تنتج عن ذلك هي متضمنة في المفهوم الموجود لدينا كمحمول في الذات، كالمحمول المتضمن في موضوع القضية، فالذي يدرك هذا المفهوم بتميزه يتعرف عليه قبلها، لكن ليبنز "يعترف أن هذا المفهوم لا يمكن أن يدرك من غير الله، لأن تحديده يفترض حسابا لامتناهيا والذي لن يكون أبدا في متناول الإنسان"⁽⁵⁸⁾.

ومنه فإن القضايا الأبدية، الحقائق المخلوقة من الله أراد ليبنز أن يؤسسها من خلال صبغتها بنمط رياضي، هي مؤسسة على القرار الحر للإله حيث اختياره لهذه الحقائق له أسبابه الذي يدركها هو، والقضايا الممكنة هي قابلة للبرهنة وتختزل لمبدأ الهوية.

⁽⁵³⁾ Pierre Wagner : *Les philosophes et la science*, Op.cit, p 192.

⁽⁵⁴⁾ Ibid, p 235.

⁽⁵⁵⁾ Ibid, p 338.

⁽⁵⁶⁾ Ibid, p 338.

⁽⁵⁷⁾ Leibniz : *Nouvelles lettres et opuscules inédits de Leibniz*, Auguste Durand, Paris, 1857, p 343.

⁽⁵⁸⁾ Aloyse Raymond Ndiaye: *Op.cit*, p 338.

وعليه يرى ليبنز أنه في العلم، علينا دوماً أن نفضل الفرضية التي تظهر أعظم عدد ممكن من النتائج، التي يمكن استنتاجها من أصغر عدد من الأسباب عندما نهتم بصدق القضايا الجائزة⁽⁵⁹⁾.

وكاستنتاج لما سبق:

- إن ليبنز حاول بناء فلسفة خاصة به وتنسيقها، كما أنه حاول التأسيس لعلم الرياضيات من خلال ربطه بالميتافيزيقا.
- التأكيد أن قضايا الرياضيات ضرورية، صادقة وأبدية، هي عبارة عن أحكام تحليلية، لأن المحمول متضمن في الموضوع.
- العلم الرياضي عند ليبنز خاضع لمبدأ عدم التناقض.
- وعموماً فقد أثرت الابستيمولوجيا الرياضية الليبنزية في العلماء والفلاسفة اللاحقين، حيث جعلوا منها أساساً للفكر الرياضي، إلا أنه يجب استثناء كانط الذي تجاوز ليبنز في مسألة أحكام القضايا الرياضية، حيث قام بإضفاء العنصر التركيبي.

ثالثاً - كانط و الصورة الحدسية للرياضيات:

أ - الأحكام الرياضية:

في كتابه "تقد العقل الخالص"، تطرق كانط إلى مسألة الأحكام التركيبية القبلية⁽⁶⁰⁾، والحكم عند كانط يتكون من موضوع ومحمول بينهما رابطة، هذه الرابطة تترجم في حالتين: إما أن المحمول أ ينتمي إلى الموضوع ب، وإما أنه لا ينتمي إليه ويختلف عنه، ففي الحالة الأولى الحكم هو تحليلي عندما يكون المحمول متضمناً في الموضوع، كأن نقول: "كل الأجسام تتمدد"، بينما الحكم هو تركيبى عندما لا يكون المحمول متضمناً في الموضوع، أي عند تحليلنا للموضوع لا نتوصل إلى المحمول، وهذا حال الأحكام الرياضية فعندما نقول $12 = 7 + 5$ أو مجموع زوايا المثلث يساوي قائمتين، فالمثلث هو شكل مغلق يشمل ثلاثة أضلاع و ثلاث زوايا، يمكن تحليل تصور المثلث ولكن لا نصل إلى أن مجموع زوايا

⁽⁵⁹⁾ ستيوارت هامشير: عصر العقل فلاسفة القرن 17، ترجمة ناظم الطحان، منشورات وزارة الثقافة

والإرشاد القومي، دمشق، 1975، ص 175.

⁽⁶⁰⁾ E Kant : Critique de la raison pure, T1, Librairie philosophique de Ladrance, Paris, 2^{me} édition, 1845, p 24.

المثلث يساوي زاويتين قائمتين، كذلك تصور الجمع يعبر عن اتحاد عددين 5 و 7 فكل من العددين لا يحتوي على العدد 12.

فيرى كانط أن الأحكام التحليلية (المثبتة) هي التي فيها يكون اتحاد المحمول بالموضوع مدركا بتطبيق مبدأ الذاتية، بينما إذا كانت الرابطة مدركة دون هوية فهي سمة الأحكام التركيبية الأولى تسمى الأحكام التفسيرية والثانية الأحكام الشاملة⁽⁶¹⁾. وقد توصل كانط إلى نتيجتين:

• إن معرفة الإنسان لا تتطور، ولا تزيد بواسطة الأحكام التحليلية، لكن التصور الذي تمّ تحليله وتوضيحه أصبح مفهوما بالنسبة للذات.

• في الأحكام التركيبية يجب أن يكون هناك شيء آخر ماعدا تصور الذات وليكن (x)، يرتكز عليه الفهم لمعرفة أن المحمول غير محتوي في الموضوع.

وعن الأحكام الرياضية يرى كانط أنها تركيبية أولية، ففي كتابه "نقد العقل الخالص" جعل مثل هذه الأحكام ممكنة⁽⁶²⁾، وبما أن المحمول غير متضمن في الموضوع فإنه يجب أن يكون مرتبطا به. فنحن نرسم مثلثا، نرسم خطا مارا من خلال أحد زواياه، موازيا للضلع المقابل، ونبيّن من خلال الرسم كيف أن الزاويتين تساوي زاوية مستوية، فنحن هنا أمام حكم تركيبية لأن المحمول غير متضمن في الموضوع وهي فكرة أولية لأن العلاقة بين الموضوع والمحمول علاقته ضرورية فلا يمكن إنكار صحتها دون وقوع في تناقض، ولهذا "تسلم بوجود أحكام تركيبية أولية في الهندسة، وكذا في الحساب"⁽⁶³⁾. فالأحكام الرياضية حسب كانط هي تركيبية أولية ضرورية وهي الأحكام التي قال عنها كفاييس أنها تترجم التطور اللامتوقع للرياضيات⁽⁶⁴⁾، وهي أحكام تقوم على الحساسية، والفهم والمخيلة.

فالحساسية هي التي بواسطتها تكون المواضيع معطاة لنا، أما الفهم فهي الملكة التي تقوم بإدراك التصورات والموضوعات فتصبح متعلقة " فإذا كان التنوع المكاني هو معرف ككم أو كمستقيم، فيفضل الفهم تركيبات الحساسية تأخذ قيمة عقلية وترد إلى وحدة "أنا أفكر"

⁽⁶¹⁾ Ibid, p 25.

⁽⁶²⁾ Ibid, p 28.

⁽⁶³⁾ زكرياء إبراهيم: كانت أو الفلسفة النقدية، مكتبة مصر، القاهرة، ط2، 1972، ص 67.

⁽⁶⁴⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 26.*

(65)، أما المخيلة فهي "الواسطة بين الحساسة والفهم" لأنها من جهة هي حسية، ومن جهة ثانية إبداعية... وهذا يعني أنها قادرة على أن تبعد رسوما تخطيطية أو رموزا يمكن أن تنتظم تحتها الحدوس الحسية "(66).

يؤكد كانط أنه لحساب مجموع 5 و 7، يمكن وضع خمسة أشياء وسبعة أشياء ونقوم بعملية العدّ فنصل إلى العدد 12، فطبيعة الأشياء لا تلعب أي دور أي أنها لا تتدخل في عمل جمع 5 و 7، فما يهم هو تتابع الأشياء في فعل العدّ، أي زمنية الفعل، فعلم الحساب قائم على حدس الزمان، بينما الهندسة تقوم على حدس المكان، لذا الأحكام الرياضية مؤسسة على حدس الزمان والمكان، وصدقها يعود إلى الخاصية القبلية للحدسيين. فالرياضيات تمّ ربطها بالحدوس الزمانية والمكانية، وهذا يعني أن الرياضيات كانت تهتم بمطابقة الأشكال والنظريات للواقع، فهو يستخدم الحدوس أي المعرفة الأولية بالزمان والمكان في عملية البناء. والحدس عند كانط دوره "يكمن في أن بنيته الخالصة هي أساس وموضوع العلم الرياضي" (67) فلا يمكن إذن الحديث عن العلم الرياضي دون الحديث عن الحدس المكاني والزمني.

(65) E Kant : Critique de la raison pure, Op.cit, p 37.

(66) زكرياء إبراهيم: مرجع سابق، ص 92.

(67) Simone Davel : philosophie des sciences, Puf, Paris, 1ere édition, 1950, p 93.

ب- المكان في البناء الرياضي:

1 - خصائص المكان عند كانط:

لقد تطرق كانط إلى خصائص المكان⁽⁶⁸⁾:

• المكان ليس تصورا تجريبييا مشتقا من الحدوس الخارجية، فتمثيل الأشياء كمنفصلة عن الذات الإنسانية، ليس على أساس أنها مختلفة بل على أساس أنها تمثل أماكن متميزة، فهذا يعني أن تمثيل المكان يجب أن يكون موضوعا كمبدأ تتطلق منه، ومن ثمة لا يمكن للمكان أن يكون مشتقا من روابط الظواهر الخارجية الموجودة في التجربة، بل أن التجربة ذاتها غير ممكنة إلا من خلال هذا التمثيل.

• المكان هو تمثيل ضروري قبلي هو أساس الحدوس الخارجية، هو شرط إمكانية وجود الظواهر.

• الضرورة القبلية لوجود المكان هي أساس اليقين غير القابل للجدل لكل المبادئ الهندسية وسبب بنائها القبلي. فإذا كان المكان هو تصور بعدي ناتج عن التجربة الخارجية، فإن المبادئ الأولى للتعريف الرياضي لن تكون إلا إدراكات، ولهذا لن يعود من الضروري بناء مستقيم واحد بين نقطتين، ولهذا ما يجب أخذه من التجربة هو الشمولية والتعميم عن طريق الاستقراء.

• الحديث عن أماكن متعددة، يعني الحديث عن أجزاء لمكان واحد.

• المكان هو ممثل كمقدار لامتناهي.

ويؤكد كانط أن من نتائج الخصائص السابقة" أن المكان لا يمثل أي خاصية مهما كانت، ولا الأشياء في ذاتها، ولا العلاقات الموجودة بينها، أي أنه لا يمثل أي تحديد يشير إلى الأشياء ذاتها، فهو إذن يقوم بتجريد كل ما هو حسي"⁽⁶⁹⁾، وأن الرياضي يقوم باختزال الكل إلى الجزء أو لنقل العنصر، فالرياضي يحدد خصائص المثلث انطلاقا من شكل مفرد يقوم برسمه، كأن يرسم مثلثا بخصائصه، فالحكم يمكن أن يأخذ قيمة شاملة، ويجب أن يتحرر الرياضي من فردانية (*individualisme*) الشكل الحسي الذي يركز عليه.

⁽⁶⁸⁾ E Kant : critique de la raison pure, Op.cit, p 42.

⁽⁶⁹⁾ Ibid, p 44.

فالرياضي لا يهتم في الشكل المفرد إلا ما ينتج عن الشروط العامة للبناء، ولا يهتم إلا بفعل تكوين التصور، وهذا من خلال عملية تجريد الحدود الملازمة للتصور كطول الأضلع، أو قياس الزوايا، وهذا يعني بالنسبة لكفاييس أنه يمكن فهم شروط الفعل في الفعل ذاته للبناء، فالفعل هو "مزود بقاعدة أو بالضرورة الداخلية وكانط لم يلتزم بهذه القواعد الو الشروط الداخلية للفعل"⁽⁷⁰⁾، ولهذا فالبناء الذي تمّ رده إلى بنية المكان، وضع مسبقا كصورة للحساسية. يقول كفاييس: "إن البناء، يجب أن يقوم على وسط سابق عليه منطقيا، على حدس يحتوي على بنية أو حقيقة خالصة"⁽⁷¹⁾.

إن المكان الذي وضعه كانط في الحساسية الإنسانية لن يكون إلا وسط البناءات الخاصة بالهندسة الإقليدية المحددة بشروط هذه البناءات، ولقد أدرك كفاييس وجود صعوبات في تصور المكان عند كانط، وتعامل معها على أساس أنها معلومة ولا تحتاج للتوضيح، إلا أن أستاذه برنشفيك قد اهتم بتوضيحها.

2 - الخبرة والعقل:

لقد حاول إبراز نقائص تصور المكان عند كانط، وذلك بتركيزه على النسبية النقدية (*Relativité Critique*) والتي هي عبارة عن مثالية ضعيفة، وتعبير برنشفيك هي مثالية مهزومة⁽⁷²⁾. فهي مثالية لأن بناء الموضوعية (*objectivité*) يقوم على أفعال الذهن التي تثبت الكائن وتعرفه، وهي مهزومة لأن برنشفيك رفض استنتاج الموضوعية من الكليات الوحيدة للذهن، هذا الأخير الذي لا يعمل ولا ينشط إلا بدفع واقتراح من التجربة. فهناك علاقة وصلة (حوار) بين الذهن والتجربة أو الخبرة، تؤدي إلى تأسيس العالم والعلم. إن النسبية النقدية هي نقدية لأنها تقوم على التفكير في تمثلات التجربة من خلال العقل، هذا التفكير الذي يوضح أكثر علاقة التجربة بالعقل، وارتباطهما.

فالتجربة في البداية كانت حقا من الإحساسات اللحظية المنفصلة، وإحساس (*sentiment*) غامض و غير معروف في الفعل الإنساني يسمح بترتيب الإحساسات، وجمعها حول نقاط مثبتة وربط هذه النقاط بعضها ببعض. فالطفل مثلا يبدأ بعزل الأشياء التي هي عبارة عن حزم متقاربة من الإحساسات، ثم يقوم بتمثيل العالم في لوحة تظهر الزمان

⁽⁷⁰⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 27.*

⁽⁷¹⁾ *Ibid, p27.*

⁽⁷²⁾ Brunschvicg : *Ecrits philosophiques, T2, Puf, Paris, 1954, p 117.*

ولمكان" ابتداء من هذا المستوى يبدأ الطفل في الربط بين الاحساسات والصور بواسطة تيار عقلائي، حينها يقوم العقل بعملية التقابل (التطابق) بين التجربة الأولية وعالم منظم ومستقر⁽⁷³⁾، وهذا ما يجعل العقل يمدّ الأشياء التي تنتمي إلى العالم المستقر صوراً ثابتة ودقيقة، "فتكون هناك مطابقة بين ما هو مرسوم في اللوحة وما هو في العالم الخارجي، كما يستطيع العقل التوصل إلى علاقات المساواة بواسطة عمليات التبادل"⁽⁷⁴⁾.

فالطفل يستطيع أن يغير قطعة مالية ويبدلها بحبات حلوى، وهذا يعني أن الأخيرة والقطع المالية تمّ الربط بينهما في فكر الطفل من خلال تطبيق قاعدة التبادل، ومن خلال عمليات التبادل فإن تشكيلات الأشياء يتم تصنيفها في فئات التكافؤ، التي لا تحتوي على ما هو حسي (حبات حلوى) بل على رموز مجردة، ولنقل أشياء مجردة أو وحدات⁽⁷⁵⁾. هذه الوحدات، الأشياء المجردة تؤسس بدورها مستوى جديداً للتجربة أو الخبرة، وفي هذا المستوى يتطور علم الحساب، كما يتم اكتشاف علاقات جديدة بين الظواهر والتي تنتمي إلى مستويات الخبرة المؤسسة، وهذا ما يؤدي إلى وجود نوع من التطابق بين هذه المستويات المرتبة والواضحة بالنسبة للفعل. وبناء على ما سبق يمكن تقسيم العلاقة بين العقل والخبرة أو الحوار الذي تمّ بينهما إلى ثلاث مراحل:

- 1- التجربة تمد العقل بحقل من الظواهر غير المرتبة، حقل فيه فوضى ومطلوب من هذا العقل أن يقوم بترتيب الظواهر وتحويل الفوضى إلى نظام.
- 2- العقل يكتشف الصلة والعلاقة بين الظواهر كعلاقة السببية في الخبرة الأولية، أو علاقة المساواة في العالم الثابت. هذه الصلة تسمح بتنظيم الظواهر وتكوين أشياء جديدة كالوحدات الحسابية أو الأشكال الثابتة، حيث مجموعها يكون مستوى جديداً من الخبرة.
- 3- إن العلاقة التي توصل إليها العقل يجب أن تؤسس وتخضع للتحقيق في الخبرة، وهذا ما يفترض فعلاً (*action*) في التجربة كتبديل واحد بواحد كما هو الشأن بالنسبة للمساواة أو الرسم بالنسبة للأشكال الدقيقة. والفعل يعني التطبيق أي الانتقال من المستوي النظري المجرد إلى المستوي التطبيقي، وأهمية التطبيق تكمن في التحقق من

⁽⁷³⁾ Brunshvic : *L'expérience humaine et la causalité*, Alcan, Paris, 3eme édition, 1940, p 455.

⁽⁷⁴⁾ Brunshvic : *Les étapes de la philosophie mathématiques*, Op.cit, p 468.

⁽⁷⁵⁾ Jean Piaget : *La formation du symbole chez l'enfant* Delachaux et Niestlé, Paris, 6^{eme} édition, 1976, p284.

العلاقة التي توصل إليها العقل وأسسها في الخبرة، أي وضع الظواهر في ترابط فعلي ، فتكوّن حينها هذه الظواهر وحدات جديدة لمستوى أعلى من التجربة. وهكذا يستمر التطبيق إلى حين " اقتراح جديد من الخبرة لعالم فوضوي "(76). فالخبرة إذن تقترح وتقرر في التطبيق الروابط التي تم اكتشافها من طرف العقل، إنها تسعى للقضاء على الفوضى الموجودة في التجربة الأولية من خلال توظيفها للتخيل والتفكير حتى يتم استيعاب العالم وجعله ملازما لنا.

لكن ما علاقة التطبيق بالبناء؟ يرى برنشفيك إمكانية تقابل التطبيق والبناء، العلاقة التي يكتشفها العقل والشروط الداخلية للبناء، مستوى التجربة، ووسط البناء. والتطبيق يسمح بتكوين مستويات التجربة حيث صورتها هي محددة بالقواعد الداخلية. وهذا ما يؤكد من جديد وجود تلازم في الحضور بين وسط البناء والشروط الداخلية للبناء، وحول هذه النقطة نلاحظ الاختلاف بين برنشفيك و **كفاييس**، فبرنشفيك قام باسترجاع مسار تطور واستبطان العالم، وارتكز في ذلك على تجربة الأشياء ذاتها، والرسم عندما يتدخل في التطبيق الهندسي فهو يساعد كوسيلة لتمثيل الأشياء، بينما في المقابل التحليل عند **كفاييس** لا يقوم إلا على الرسم بعيدا عن تحقيق وجود تطابق بينه وبين الشيء. ومنه فسياق برنشفيك يقوم على عقلنة التجربة في العالم، وسياق **كفاييس** يقوم على تطوير أوساط البناء والسياقان متوازنان (77).

لكن يبقى السؤال مطروحا: فيما تتمثل الشروط أو القواعد الداخلية للبناء؟ ما طبيعتها؟ وهو السؤال الذي لم يهتم **كفاييس** بالإجابة عنه واعتبره حكما واضحا لا يحتاج لتحليل وتوضيح.

ج -الزمان في البناء:

1 - تعريف الزمان الكانطي:

في كتابه " الأستطيقا المتعالية " * تطرق كانط إلى مجموعة من خصائص الزمان:

(76) *Brunschvicg : Les étapes de la philosophie mathématiques, Op.cit, p 523.*

(77) *J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 29.*

* (*esthétique transcendantale*)، تعودنا على ترجمة *esthétique* بعلم الجمال، لكن كانط عاد إلى الاشتقاق اليوناني الذي يعني الإدراك الحسي. وهو الفصل الذي نشر في كتابه: نقد العقل الخالص.

- الزمان ليس تصورا تجريبيا معطى من تجربة، فالتزامن أو التتابع لا يمكن أن يوجد دون تدخل الزمان كأساس قبلي، فلولا له لما استطعنا تبيان تتابع وتسلسل الأشياء⁽⁷⁸⁾.
- إن الزمان هو تمثيل ضروري، بمثابة الأساس لكل الحدوس، لا يمكن حذفه بأي حال من الأحوال، ويمكن أن نقوم بعملية التجريد للظواهر في الزمان، فهو معطى قبلي⁽⁷⁹⁾.
- الزمان هو معطى قبلي يساعد في تأسيس المبادئ الجدلية بالنسبة للروابط أو أكسيومات الزمان عموما مثل الزمان ليس له إلا بعدا واحدا والأزمنة المتعددة لا تكون معا وتكون متتابعة، وهذه المبادئ لا تستنتج من التجربة.
- الأزمنة المختلفة ليست إلا أجزاء لنفس الزمن، لكن تمثيل الزمان لا يمكن أن يتم إلا من خلال الحدس.

ومن هذه الخصائص توصل كانط إلى " أن الزمان ليس إلا صورة الحس الداخلي، أي حدس ذاتنا، وحدس ما يجول داخلنا"⁽⁸⁰⁾، إنه الصورة التي خلالها يتحقق التركيب بين التنوع، ولهذا لعزل وتمثيل الزمان يتعلق الأمر بالإبقاء على الرابطة في ذاتنا، وإدراك التركيب بمعزل عن التنوع الخارجي الذي يقوم بتوحيده. فالزمان يتم الحصول عليه من خلال تجريد المكان في التركيب المكاني، والزمان المتتابع يمكن تمثيله بمستقيم الذي يمكن أن يمتد إلى اللامتناهي، و من خصائص هذا المستقيم انه ذو بعد واحد و كل أجزاءه مترامنة (توجد في آن واحد) ، بينما أجزاء الزمان متتابعة متتالية.

2- تفسير كفاييس للزمان و المكان عند كانط:

إن كانط ربط بين الزمان والمكان، فهما متضايقان و متكاملان، على أساس أن المكان هو صورة التعدد الخارجي وهو يمثل الموضوعات الخارجية أي الخارجة عن ذاتنا، بينما الزمان هو صورة التعدد الداخلي ومن خلاله الذهن يحدس ذاته، ومرتبطان لأن تجريد الزمان لا يتم الحصول عليه إلا من خلال تجريد المكان، لكن كفاييس حول هذه النقطة يتساءل: إذا كان تجريد الزمان متعلق بتجريد المكان فكيف يتم تجريد المكان؟⁽⁸¹⁾ فبالنسبة

محمود فهمي زيدان: كانط وفلسفته النظرية، دار الوفاء لدينا الطباعة والنشر، الإسكندرية، 2004، ص 73.

⁽⁷⁸⁾ Kant : critique de la raison pure, Op.cit, p 50.

⁽⁷⁹⁾ Ibid,p50.

⁽⁸⁰⁾ Ibid, p 53.

⁽⁸¹⁾ J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 30.

لكانط تجريد المكان والزمان لا يخلق إشكالا، لكن إذا رفضنا الأستطيقا المتعالية فإن التجريد يصبح مستحيلا.

إن الصعوبة تظهر عند تحديد الروابط بين الفروع المختلفة للرياضيات، فعلم الحساب سيكون علم الزمان، والهندسة علم المكان، فالزمان هو مقدار متصل، بينما المكان هو مقدار منفصل، ومن جهة أخرى الهندسة تتبع منهاجا استنتاجيا انطلاقا من تعريفات وقضايا تركيبية قبلية التي هي الأكسيومات، بينما علم الحساب ينتقل من الجزء إلى الجزء، كذلك الهندسة هي علم المقادير الكبرى والجبر هو علم المقدار البسيط⁽⁸²⁾، وهو العلم الذي يتم فيه تجريد بناء الشيء، الذي يكون التفكير فيه من خلال تصور معين للمقادير، ولهذا فهو يختار نوع من الرموز لتعيين هذه البناءات الخاصة بالمقادير عموما: الأعداد، الجمع، الطرح، القسمة... فالجبر إذن: هو معرفة بناء التصورات، وهذا البناء يتم كذلك في المكان⁽⁸³⁾.

أما بالنسبة لعلم الحساب الذي يقوم على العدد، والذي هو عبارة عن بنية خالصة فوقية بالنسبة للزمان والمكان: "إن الصورة الخالصة لكل الكميات الخاصة بما هو خارجي هو المكان، بينما الخاصة بالأشياء عامة هي الزمان، لكن البنية الخالصة الخاصة بالكم الذي يعتبر تصورا خاصا بالفهم هو العدد"⁽⁸⁴⁾.

يرى **كفاييس** أن كانط لم يحدد بدقة هذه العلوم، فعلم الحساب لا يمدنا بنظريات، ولكن بصيغ عددية بسيطة تفرض على كل العلوم التي تدرس الأشياء، كذلك لم يحدد وضعية علم الجبر بدقة، فاستقلاليتها كعلم قائما على البناءات الرمزية لم يشر إليه إلا عرضيا، دون أن يبرر كانط استقلاليتها، أو انفصاله عن الهندسة.

بالإضافة إلى ما سبق يرى كانط ضرورة وضع مجموعات من أكسيومات كواقعة يجب القبول بها، دون إثبات بدايتها أو تبيان الطريقة للتعرف عليها، لقد وضعها لتعبر عن شروط الحدس الحسي القبلي، والتي من خلالها نتوصل إلى صورة التصور الخالص للظاهرة الخارجية، ولهذا كما يرى **كفاييس** بدايتها ناجمة عن تطبيقها في البناء⁽⁸⁵⁾.

⁽⁸²⁾ *Ibid, p 31.*

⁽⁸³⁾ *Ibid, p 31.*

⁽⁸⁴⁾ *Ibid, p 31.*

⁽⁸⁵⁾ *Ibid, p 32.*

ونتيجة لرفض **كفاييس** لتعريف الزمان كصورة للحس الداخلي، فقد تجاوز التمييز بين الأنا المفكرة والأنا الظاهرية، بين " أنا أفكر " والأنا كما تبدو لي في الزمان، ففي النسق الكانطي هذا التمييز هو مفروض بالخاصية الظاهرية للزمان. فالذات كما تبدو لنفسها في الزمان هي كذلك بالنسبة للحساسية الإنسانية، ولا يمكنها أن تكون مطابقة للذات كتخيل الذي له مكانة في الفهم، فكما يقول برنشفيك: " الزمان كصورة للحس الداخلي هو نوع من الشاشة التي تتوسط بين ما نحن وما نمثله لأنفسنا ، فكانت سحب الشاشة وطوى" أنا أفكر " على عمل البناء... فالوعي هو " أنا أفكر" مطابق وملازم للعمل التركيبي، ومدرك بالتفكير حول هذا العمل⁽⁸⁶⁾. **كفاييس** إذن وقبله برنشفيك، رفض الزمان والمكان كصور للحساسية موجودة مسبقا عن عمل البناء.

فنتيجة لما سبق نستخلص ما يلي:

- حسب كانط الزمان والمكان هما الحدسان اللذان تقوم عليهما الرياضيات الخالصة بكل فروعها، أساس الرياضيات إذن هو حدسي خالص، وفي آن واحد مطابق للتجربة، فالعلم الرياضي ليس صوريا بالمعنى الدقيق، لأنه يستخدم الحدوس. و لهذا فالأحكام الرياضية أحكاما تأليفية أولية، فهي سابقة عن كل تجربة، ومصدرها الفهم و العقل الخالصين، و لكن محمولها يضيف إلى موضوعها الجديد، هي أحكام ضرورية و لا بد من وجود حدس لإدراك هذه الحقيقة.

- البناء في الحدس يرد إلى صور من الحساسية وتصورات الفهم، ولهذا فتأسيس كانط للعلم الرياضي لم يكن موافقا وملائما للعمل الرياضي.

- **كفاييس** وقبله برنشفيك رفض الزمان والمكان كصور للحساسية، موجودة مسبقا عن عمل البناء.

- إن حلول بورال ولوبسغ لم تكن كافية، و لهذا بحث **كفاييس** عن حلول لمسألة الأسس عند ديكرت وليبنز وكانط من خلال تعريف العمل الرياضي، ولكن لم يصل إلى حل مقنع لا من خلال البناء في الحدس أو في صورته .

⁽⁸⁶⁾ Brunschvicg : *L'expérience Humaine et la causalité*, Op.cit, p 282.

المبحث الثالث: المدرسة الحدسية المعاصرة

إن تطرق كفاييس للكانطية كان بدافع دراسته للحدسانية، التي كان يهدف من ورائها إلى إيجاد حل للإشكال المطروح، وعلاقة الكانطية بالحدسانية تتمثل في اشتراكهما في الخاصية الحدسية للمعرفة الرياضية، فهل يجد كفاييس في هذا الاتجاه ما يصبو لتحقيقه؟

أولاً: الرياضيات في نظر بروور:

الحدسانية (*intuitionnisme*) نزعة تعود إلى كانط لا إلى ديكرت صاحب الوضوح والبداهة، وبعد كانط نجد كرونوكر الذي حمل لواء هذه النزعة بمقولته: "إن الله خلق الأعداد وما عداها فهي من صنع البشر"⁽⁸⁷⁾، بوانكري الذي جعل الاستقراء الناقص أساساً لتطور الرياضيات وكذا إسهامات لوبسغ، ثم تطورت على يد بروور الذي يعتبر مؤسس الحركة الحدسانية*، التي اهتمت منذ بداية القرن 20 بوضع حلول لمسألة الأسس التي طرحت على الفلاسفة والرياضيين نتيجة اكتشاف مفارقات نظرية المجموعات⁽⁸⁸⁾.

لقد أراد بروور أن يؤسس لرياضيات قوية من خلال:

- أن الرياضيات تمثل الجزء الدقيق للفكر الإنساني.
- النشاط الفكري للإنسان هو عقلي خالص.
- الرياضيات هي اختراع حر، مستقل عن التجربة.

فأما أن الرياضيات تمثل الجزء الدقيق للفكر، فهذا يعني عدم ردها إلى الفلسفة أو المنطق، وهذا ما يؤكد هابتينغ (*Heyting 1898-1980*) بقوله: "ليس المنطق هو الأساس الذي استندت إليها الرياضيات، وكيف يجوز ذلك، وهو بدوره يحتاج إلى أساس فمبادئه أكثر تعقيداً، وأقل مباشرة ووضوح من مبادئ الرياضيات نفسها... إن المنطق هو

⁽⁸⁷⁾ *De Georges Vanhout : Et que le nombre soit !..., De boeck université, 1994,264.*

* الحدسانية مصطلح جديد من أصل بريطاني، استخدم لأول مرة سنة 1850، هناك حدسيون أوائل في فرنسا من أمثال " بوانكري " و " بير " (*Baire*) ويطلق عليهم أحيانا اسم " أشباه حدسين " و حدسيون جدد في ألمانيا " بروور " " وايل " (*Weyl*) وهابتينغ (*Heyting*).

Largeault :Intuition et intuitionnisme, Op.cit, p 15.

⁽⁸⁸⁾ *Hervé Barreau : L'épistémologie, Puf, Paris, 1^{ère} édition, 1990, p 43.*

جزء من الرياضيات و لا يمكن النظر إليه على أنه أساس لها " (80). فالرياضيات إذن هي نشاط عقلي خالص، مرتبط بالحدس (وهنا يتفق مع كانط)، نشاط مستقل عن التجربة وهذا يعني أن المواضيع الرياضية غير مستقلة عن الفكر*.

ففي بداية أبحاثه، أراد بروور أن يبين تطور النشاط الإنساني منذ البدء وهذا من خلال مقال: "الرياضيات، العلم، اللغة" نشره سنة 1928، أكد من خلاله أن "الرياضيات، العلم، و اللغة تمثل الوظائف الأساسية للنوع الإنساني، حيث من خلالها الإنسان يسيطر على الطبيعة ويحافظ على نظامه" (89)، هذه الوظائف مصدرها ثلاث صور تجسد آثار ونتائج إرادة الحياة للكائن الحي العاقل وهي: التفكير الرياضي، التجريد الرياضي، وفرض الإرادة من خلال الأصوات.

ثانيا- مراحل النشاط الرياضي:

النشاط الرياضي كفعل إرادي اختياري لخدمة غريزة المحافظة على النوع الإنساني، يمر بثلاث مراحل أو يأخذ ثلاث حالات:

الحالة المؤقتة:

ففي هذه المرحلة الحاضر المباشر ينقسم، والإحساس الذي يملأ الحاضر يؤدي إلى نشأة إحساس جديد، فالإحساس الأول يتحول إلى ماضي، فهو إذن ينفصل عن الأنا وينتقل إلى عالم التمثيل الحدسي، والجديد هو الذي يملأ الحاضر وهذا ما يؤدي إلى تأسيس الزوج (Dyade)، الذي ينقسم بدوره فيتحول إلى عنصر لزوج جديد، وهذا ما يكون ثلاثيا

(80) Heyting :Disputation, in Paul Benacerraf, Hilary Putnam : the philosophy of mathematics ,Cambridge, New York, 2^{eme} edition, 1983, p68.

*لقد أقام هيتنج مناظرة بين مجموعة من الشخصيات ترمز كلا منها إلى مدرسة أو نظرية رياضية فرمز للحدسانية ب(int) و للصورية ب(form)، و للإشارة ب(sign)... و في هذه المناظرة صرح و دافع عن موقفه من الرياضيات و علاقتها بالمنطق و رد على الصوريين كما رد على الاتهامات الموجهة إليه. انظر:

Heyting :Disputation, , Op.cit, pages 66-76.

(89) Jan Brouwer : Mathématiques, Science, langage, dans Largeault : intuitionnisme et théorie de la démonstration , J Vrin, Paris, 1992 , p258.

(*triade*)، الثلاثي يتحول إلى عنصر وهكذا إلى أن تصل إلى مضاعف معقد، فظاهرة القسمة تتكاثر وتولد متتاليات مؤقتة ذات تضاعف متزايد⁽⁹⁰⁾.

ب - الحالة السببية:

وتكون في ناحيتين:

- من جهة، الظواهر المؤقتة لنفس التضاعف هي معرفة ومجردة من كل خاصية كيفية، فأساسها المشترك يكون "العدد"، فهو حدس أساسي للرياضيات الحدسانية⁽⁹¹⁾، والمواضيع الرياضية تنشئ بواسطة سلسلة من الأفعال البسيطة انطلاقاً من الأعداد، ومنه من الزوج.
- من جهة أخرى، فإن الحالة السببية تؤدي إلى تكوين الأشياء من خلال تعريف لبعض الاحساسات المركبة، فالأشياء هي جواهر مستقرة نسبياً، من خلالها الإنسان يبحث لاكتشاف دوائر النظام الأكثر دقة والأكثر امتداداً، ومن هذه الجهود تنشأ علوم الطبيعة.

ج - الحالة الاجتماعية:

وفيها تظهر اللغة عندما تتطور الجماعات الإنسانية. "المواضيع والأشياء أو الأعداد الناتجة عن الحالة السببية، يتم التعبير عنها بإشارات سمعية أو بصرية تمثل قاعدة لتكوين وتأسيس اللغة، فهي الوسيلة التي تساعد الذاكرة وللتواصل بين الناس"⁽⁹²⁾.

وإذن ومما سبق فإن النشاط الفكري للإنسان مر بثلاث حالات: المؤقتة والسببية اللتان أدتا إلى تأسيس الرياضيات وعلوم الطبيعة، والحالة الاجتماعية التي تولدت عنها تأسيس اللغة. لقد جعل بروور حدس الزوج (*Dyade*) أو ثنائية الوحدة ظاهرة أساسية في التفكير الرياضي، فتجزئة لحظات الحياة إلى أجزاء مختلفة كيفاً ومجمعة في الزمان مما يجعلها وحدة واحدة مع بقائها منفصلة، إنها حدس ثنائية الوحدة. وبواسطتها يتم إدراك الأعداد المنفصلة. وانتشار الحدس والبناءات الرياضية هي أفعال داخلية مستقلة عن عالم الأشياء، التي تم تأسيسه بالعمل السببي والاجتماعي. ولهذا فالرياضيات مجالها داخلي، عقلي خالص، ويجب أن تتطور بكل حرية في الداخل. يقول بروور: "إن الحدسانية عرفت في الرياضيات نشاطاً عقلياً مستقلاً داخلها في البناء، الذي وجد عبارة لغوية أكثر فعالية، وقابلة للتطبيق

⁽⁹⁰⁾ *Ibid*, p258.

⁽⁹¹⁾ *Ibid*, p 259.

⁽⁹²⁾ *Ibid*, p 262.

على العالم الخارجي، لكن مع ذلك لا في مصدرها ولا في ماهية منهجها يوجد ما له علاقة بالخارجي" (93).

أما اللغة كوسيلة لتنشيط الذاكرة، وللتواصل مع الآخر في المجتمع، فإن بروور يؤكد أيضا أنها وسيلة لترجمة ما يجول في الفكر الداخلي، فهي إذن التعبير عن الفكر الداخلي، عن بناء وتتابع الأفعال انطلاقا من حدس الوحدة الثنائية أو الزوج. فاللغة إذن "خاصة بالنشاط الفكري للإنسان الاجتماعي، إلا أنه لا يجب الوثوق بها لأنها، غير تامة، غير دقيقة، وغامضة" (94)، ومهما كانت اللغة، وبالرغم من "اللامبالاة وسوء الفهم تبقى موجودة" (95). وعدم الثقة في اللغة ناتج عن خطأ في وظيفة المنطق، فبالنسبة للمنطق فهو لغة تكاد تكون تامة بالنسبة لأنساق الأشياء المتناهية فمبادئ الهوية، عدم التناقض، الثالث المرفوع، القياس، تسمح باستنتاج قضية من قضية أخرى بطريقة آلية، وذلك بتجريد القضايا من محتواها والاحتفاظ بالصورة فقط. ونظرا لأن القضايا تعبر عن إجراءات حسية على الأنساق المتناهية فإن التجربة ستقرر نتيجة الاستنتاج، لكن هل يمكن تطبيق هذه المبادئ على الأنساق اللامتناهية؟

يجيب بروور أن اللغة الرياضية وخاصة المنطقية، لا يمكنها أبدا من خلال وسائلها الخاصة، اكتشاف جواهر رياضية ولا استنتاج أي حالة للأشياء الرياضية. إن المنطق، ليس إلا تجمعا لرسومات تمثل تسلسل القضايا التي تطابق تسلسل الحقائق المبرهن عليها. وهذه الرسومات لا قيمة لها في عملية البرهنة (96). فقد عرض بروور "المنطق النظري كتطبيق للرياضيات على اللغة الرياضية ذاتها، التي اعتبرت لمدة طويلة لغة البرهنة المنطقية، وأخذت مؤخرا مع ظهور "اللوجستيقا" صورة عامة" (97). لكن الرياضيات مختلفة كلياً عن لغتها، هي تسبق كل نشاط للاختراع العقلي حيث العودة إلى اللغة لا تنتمي إلى نشاطها، فاللغة لا يمكن

(93) Jan Brouwer : *L'effet de L'intuitionnisme sur l'algèbre classique de la logique*, dans Largeault : *intuitionnisme et théorie de la démonstration*, J.Vrin, Paris, 1992 , p 460.

(94) Jan Brouwer : *Mathématiques sciences, langage*, Op.cit, p 262.

(95) *Ibid*, p 263.

(96) J. Largeault: *Intuition et intuitionnisme*, Op.cit, p 80.

(97) Brouwer : *les principes logiques ne sont pas sûr 1908*, traduction J.Bouveresse , dans *Logique et fondements des mathématiques* , p 383.

أن تكون بأي حال من الأحوال سوى وسيلة غير تامة من أجل التذكر والتواصل. إن نقد بروور للمنطق الكلاسيكي ارتكز على نقد مبدأ الثالث المرفوع، فيما يتمثل هذا النقد؟

ثالثاً - نقد مبدأ الثالث المرفوع:

من بين مميزات الحدسانية رفضها لمبدأ الثالث المرفوع و اعتباره غير ضروري في الرياضيات و المنطق⁽⁹⁸⁾، ففي مقال بعنوان " لا يجب أن نثق في المبادئ المنطقية " عرض بروور نظريته وموقفه من المنطق الكلاسيكي عموماً ومن مبدأ الثالث المرفوع خصوصاً. إن الشك في مبدأ الثالث المرفوع ظهر سنة 1908، إذ لاحظ المشككون أنه يفتقد للاتساق الذاتي⁽⁹⁹⁾، ولهذا فالمسألة تعود إلى معرفة إذا كان مبدأ عدم التناقض، الثالث المرفوع، القياس، يمكن استخدامها بوضوح في البناءات والتحويلات الرياضية، فالإجابة تكون بنعم بالنسبة للمبدأين الأول والثالث، بينما بالنسبة لمبدأ الثالث المرفوع فالإجابة تكون بالنفي فحسب بروور: " كل قضية إما صادقة أو كاذبة هي معادلة لقضية هل هناك مسائل رياضية غير قابلة للحل"⁽¹⁰⁰⁾ هذا يعني أن إثبات صدق أو كذب قضية، يستلزم بالضرورة أن كل مسألة رياضية تحل، لكن إذا ما تساءلنا هل كل مسألة رياضية لها حل بالضرورة، فهذا السؤال يستلزم السؤال التالي: هل القضية صادقة أو كاذبة أو غيرهما؟ أكد بروور أنه ليست كل المسائل قابلة للحل "برفضه حدسيا لمبدأ قابلية الحل"⁽¹⁰¹⁾، إذن القضية قد لا تكون صادقة ولا كاذبة، وهنا يبدأ التشكيك في مبدأ الثالث المرفوع. ويبرر بروور عدم التشكيك من قبل في مصداقية " مبدأ الثالث المرفوع " راجع لمجموعة من عوامل:

• إن الإيمان بهذه المبادئ الدوغماتية هو تاريخي، وهو بمثابة ظاهرة من الظواهر التي عرفت الحضارات، وذلك لأنه واقع من نفس نظام الاعتقاد في منطقية العدد p ⁽¹⁰¹⁾.

⁽⁹⁸⁾ ياسين خليل: المنطق و الرياضيات، المجمع العلمي العراقي، بغداد، 1964، ص42.

⁽⁹⁹⁾ J. Largeault: *Intuition et intuitionnisme*, Op.cit, p 80.

⁽¹⁰⁰⁾ Brouwer: *Qu'on ne peut pas se fier aux principes logiques 1908*, dans Largeault: *intuitionnisme et théorie de démonstration* J.Vrin, Paris, 1992, p 17.

⁽¹⁰¹⁾ *Ibid*, p17.

⁽¹⁰¹⁾ Brouwer : *Conscience, philosophie et mathématique 1923*, dans *intuitionnisme et théorie de démonstration*, J.Vrin, Paris, 1992, p 438.

• عدم ملاحظة وجود أي تناقض واضح على هذا المبدأ.
• صحة المنطق الكلاسيكي في المجال العملي لبساطة الظواهر تتميز بها الحياة اليومية،
إذ أن المنطق الأرسطي كان يشكل جزءاً من الحياة المعاشة مما جعل الناس لا يشكون في
سلامة مبادئه.

و رفض " مبدأ الثالث المرفوع " راجع إلى سببين:

• وجود مشكلات رياضية غير محلولة، وفي بعض الأحيان لا تتوفر وسائل حلها،
ومن ثم ضرورة التمييز بين غياب الصدق والكذب، إذ كلمة كذب لا تدل بالضرورة على ما
يقابل الصدق.

• إن إثبات مبدأ الثالث المرفوع مرتبط بمبدأ أو أكسيوم قابلية الحل (*axiome de*
resolubilité) بالنسبة لجميع المشكلات الرياضية، فالنزعة الحدسانية اعتبرت رفض هذا
المبدأ يؤدي بالضرورة إلى رفض المبدأ الثاني⁽¹⁰²⁾.

ولذا فإن نقد مبدأ الثالث المرفوع "متعلق بالفعل الأول للحدسانية القائم على رفض
المنطق كمعيار للحقيقة الرياضية"⁽¹⁰³⁾، ورفضه ناتج عن العوامل السابقة، وأنه سبب الكثير
من المفارقات، لأنه خاطئ ومتناقض، وتعليق مصداقية الثالث المرفوع لا يعني أن الصادق
ولا الصادق توقعاً عن كونهما متناقضين، كما لا يمكن اعتباره مشروعاً حتى ولو كان تطبيقه
لا يؤدي إلى تناقض فيقول بروور: "حتى وإن كان تطبيق مبدأ الثالث المرفوع لا يؤدي إلى
تناقض، فإنه لا يمكن مع ذلك اعتباره مشروعاً، فالجريمة تبقى جريمة على الرغم من عدم
تمكن التحقيق القضائي من الكشف عنها وإثباتها"⁽¹⁰⁴⁾.

وعموماً بروور يؤكد أن هذا المبدأ هو غير صالح سواء أدى إلى تناقض أو لا. فيجب
"التمييز بين الخطأ الذي ينتج عن اللاوجود، والخطأ (الكذب) الناتج عن استحالة الوجود،
فهذان نوعان من الخطأ يعبران عن نفي ولكنه ليس واحد"⁽¹⁰⁵⁾. كما يؤكد أن اللاغموض
يؤدي بالضرورة إلى الصدق، وأن المنطق الحدسي يقبل التناقض بين الممكن وغير الممكن

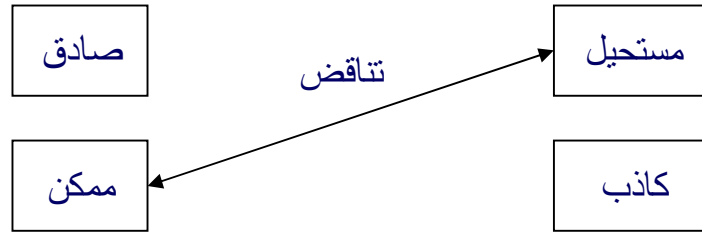
⁽¹⁰²⁾ Jean Largeault: *Intuition et intuitionnisme, Op.cit, p 88.*

⁽¹⁰³⁾ *Ibid,p88.*

⁽¹⁰⁴⁾ Brouwer : *Sur le rôle du principe du tiers exclu dans les mathématiques, spécialement en théorie des fonctions,1923, dans intuitionnisme et théorie de démonstration, JVrin, ,Paris, 1992, p299.*

⁽¹⁰⁵⁾ Philippe Thiry : *Notions de logique, de Boeck, 3^{me} édition, 1998, p 159.*

فقط، لكن ليس بين الصدق والكذب (الشكل) ولهذا فاللاخطأ لا يؤدي إلى الصدق بالضرورة، وهذا ما يبرر رفض الحدسانيين لمبدأي الثالث المرفوع والنفي المزدوج (الشكل 11).



الشكل 11: التناقض عند الحدسانيين

فهذا الشكل (106) يبين بالفعل أن العلاقة بين الممكن والمستحيل تناقض لكن بين الصادق والكاذب لا وجود لتناقض. وما هو صادق هو ممكن، لكن العكس ليس ما هو ممكن صادق بالضرورة، وما هو مستحيل هو خاطئ لكن العكس غير صحيح.

رابعا-نتائج رفض مبدأ الثالث المرفوع:

نتج عن رفض مبدأ الثالث المرفوع تحول المنطق من ثنائي القيم إلى ثلاثي القيم، حيث القيم الثلاثة تتمثل في: صادق، كاذب، غير قابل للبت (احتمالي)، كما أنه نتيجة تحديد برور لمجال استخدام الثالث المرفوع في المقادير المتناهية، تم إبعاد كل أنواع اللامتناهي عنه، وفي حالة اعتماد هذا المبدأ، ينتج عنه مجموعة من الأخطاء، ومن بين الأمثلة على الأخطاء المترتبة (107):

بالنسبة للخاصية ق، البرهنة على لا (لا ق) ليست كافية لاستنتاج ق. ونفس الشيء لا يمكن البرهنة على (ق أو ك) إلا بالبرهنة على ق أو البرهنة على ك. ففي المنطق الكلاسيكي يمكن البرهنة على القضية التالية:

يوجد عدنان لا ناطقان (من الأعداد الصماء) a, b حيث: a^b هو عدد ناطق وصورته

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ فإذا كان ناطقا فإن حل القضية: } \sqrt{2} = a \text{ و } \sqrt{2} = b$$

أما في حالة كون $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ أصم، فهنا نجد أنفسنا أمام حل للمشكلة بأخذ القيمتين:

(106) *Ibid*, p159.

(107) *Nicolas Bouleau : philosophies des mathématiques et de la modélisation, L'Harmattan, 1999, p 44.*

$$\sqrt{2} = b, \sqrt{2} \sqrt{2} = a \text{ و لان :}$$

بالصورة التالية: $2 = \sqrt{2}^2 = \sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{2}$ وهو عدد ناطق وبهذا فإنه لا يمكن

القول - أن a^b هو دائما أصم عندما يكون أ و ب أصميين - قولاً صادقاً صدقاً كلياً.

وعلى الرغم ما يبدو على هذه البرهنة من وضوح، فإن الحدسيين يعتبرونها مرفوضة

وغير مشروعة لأنها لم تحدد بوضوح الأعداد a و b التي يتم البحث عنهما.

ويجب أن نشير إلى أن هايتغ تابع مشوار أستاذة، واستغل النتائج التي توصل إليها

بروور من أجل التأسيس لمنطق حدسي في صورة حساب قضائي، وهي النتائج التي مثلت:

" قواعد عالمية من خلالها تم تكوين نظريات جديدة " (108).

كما أشار **كفايبس** إلى أن بروور وأنصار الحدسانية الجديدة ابعدوا المتصل من الحساب

الكلاسيكي، وهذا نتيجة الانتقادات التي قدمها وايل (*Weyl 1885-1955*) من خلال "

تقديم القطع عند ديدكند، والمتتاليات اللامتناهية عند كانتور " (109).

فوايل أكد من وجهة نظر حدسانية، أنه يمكن تعريف عدد حقيقي حدسي بضمه إلى

متتالية غير محدودة من أفعال الاختيار المتتالية. فمتتالية الاختيار لا يجب أن تدرك ككل

منجز، ولكن كتطور محدود وممكن مده دائما، ولهذا يعرف المتصل بأنه: "وسط حر

التطور" (110) وأن "متتالية الاختيار" هي متتالية غير محددة يمكن أن تكون محددة عند أي

صف، والصياغة الحدسانية لمنهج القطر تبين أن مجموعة متتاليات الاختيار تتجاوز

المعدود، ولهذا فإن "المتصل الحدساني" هو "فوق المعدود" (*Supra* -)

dénombrable)، والنتيجة هو تأسيس لتحليل حدساني يتجاوز نظرية القطع، والمتتاليات

اللامتناهية.

ومما سبق نصل إلى:

• إن بروور استطاع تطوير رياضيات خالية من المفارقات انطلاقاً من التفكير حول

النشاط الرياضي، وانتقد الرياضيات الكلاسيكية، وعضواً أن يقوم بتعديلها وتصحيحها، فإنه

(108) J. Cavallès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 37.

(109) P Nogués : *de l'expérience mathématique*, Op.cit, p 81.

(110) Weyl : *Sur la crise contemporaine des fondements des mathématiques 1921, dans Largeault : intuitionnisme et théorie de démonstration*, J.Vrin, Paris, 1992, p 77.

أسس رياضيات جديدة أساسها الحدس، فعوضا كما يقول **كفاييس**: "أن يؤسس الطرح المعطى، قام بتأسيس طرح جديد" (111).

- كما أنه لا يمكن اعتبار المفاهيم الرياضية الكلاسيكية ناتجة عن ما هو عرضي أو سوء تفاهم، أو كما يقول هي ظاهرة من الظواهر الخاصة بالحضارات، بل يجب أن نؤكد بأنها ناتجة عن الفكر الإنساني حتى وإن كانت ذات طابع تجريبي.
- يؤكد بروور أن الحدس هو القاعدة الوحيدة لبناء الرياضيات.
- الحدس لا يمكن أن يكون أساسا سليما للرياضيات و ذلك لأنه ذو طابع ميتافيزيقي
- ردّ هلبيرت على بروور بشأن حذف مبدأ الثالث المرفوع: "إن حذف مبدأ الثالث المرفوع من مبادئ الرياضي مماثل لمحاولة تجريد الفلكي من منظاره، والملاكم من استعمال قبضتيه، وإبطال هذا المبدأ يعود إلى الدعوة إلى التخلي عن العلم الرياضي" (112). فقول هلبيرت يؤكد أهمية مبدأ الثالث المرفوع الذي تمّ الاتفاق أن الاستغناء عنه سيعيد الرياضيات خطوات إلى الأمام.

إن هلبيرت يعتبر ناقدا رياضيا لنسق بروور وأتباعه، وسنين دوره وإسهاماته من خلال تطور المناهج الأكسيوماتيكية والصورية المؤسسة في القرن 19.

(111) J. Cavallès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 43.

(112) Hilbert : *les fondements logiques des mathématiques 1923*, dans Largeault : *intuitionnisme et théorie de démonstration*, J.Vrin, Paris, 1992 ,p159.

الفصل الثاني

الصورية و الأكمة في القرن التاسع عشر

المبحث الأول: الاتجاهات الصورية

المبحث الثاني: الأكمة في الهندسة

إن أزمة الرياضيات بشقيها الهندسة ونظرية المجموعات، دفعت الكثير من المفكرين إلى البحث والدراسة من أجل إيجاد حلول لها، ومن ثمّ بناء رياضيات متينة وقوية فكانت هناك محاولات كثيرة، ومن بينها التي أشرنا إليها في الفصل السابق التي اتخذت الحدس كأساس للرياضيات إلا أنه نتجت عنها إشكاليات جديدة، وهذا ما شكل دافعا قويا للبحث عن حلول أخرى متفادين بذلك الحدس، ومستعملين مفاهيم وطرق جديدة مجردة لا مقابل لها في الحدس الحسي أو التجربة الحسية، وهذه الطرق المجردة فتحت مجالات جديدة تختلف عن المجالات الحسية، بل أنها تعد بمثابة تصحيح وتعديل لها، ولهذا فالمبادئ الجديدة فرضت معايير صدق تحول دون الرجوع أو العودة إلى الحدس.

هذه الرياضيات الجديدة كما يرى **كفاييس** أساسها المفاهيم الرياضية الجديدة التي تنتمي إلى الهندسات اللاإقليدية واستخدام الأعداد المركبة، والمتسلسلات المثلثية⁽¹⁾. ومع صدور مؤلف بولزانو بعنوان: إسهامات لتمثيل رياضيات مؤسسة بشكل جيد* سنة 1810، طرح **كفاييس** مسألتين:

1- تأسيس الرياضيات يعني عزل المبادئ أي الطرق والمواضيع الأولية التي يمكن أن تكون قاعدة للاستنتاج.

2- تحديد صور الاستقراء، والتسلسلات المنطقية⁽²⁾.

ولحل هاتين المسألتين، توصل **كفاييس** إلى تشكيل اتجاهين الأول خاص بالتحليل يهتم بنقد المنطق الذي يؤدي إلى الصورية، والثاني خاص بالهندسة، يهتم بتحليل المفاهيم والمبادئ ثم يستنتج بعدها مباشرة ولهذا فهو يؤدي إلى الأكسيوماتيكية. هذان الاتجاهان: الصوري والأكسيوماتيكي تماشيا معا خلال القرن 19، وتزامنا في الوجود إلى غاية ظهور هلبرت الذي نجح في التوحيد بينهما في نسقه، وفي هذا تأسست ثلاث مدارس أساسية بحثت في أسس الرياضيات:

المدرسة البريطانية ممثلة في المدرسة التحليلية لكمبريدج، ومن روادها:

- جورج بيكوك (1858-1791 *Georges Peacock*) وإسهاماته حول طبيعة الجبر وقانونه وأسس، حرر الجبر من كل تصور كلاسيكي للنظرية الكلاسيكية التي تهدف إلى دراسة المواضيع ذات طبيعة محددة، وأصبح يدرس العلاقات التي يمكن أن تطبق على كل أنواع المواضيع، مستخدما بذلك مجموعة من رموز، ولهذا فهو يعد مؤسس المدرسة الرمزية للرياضيين وكان من أعضائها "جورج بول" (*Georges Boole*) و"دي مورغان" (1864-1815 *Auguste De Morgane*) و"دي مورغان" (1871).

أعمال هاملتون (1865-1805 *William Rowan Hamilton*) حول الأعداد المركبة، والأربعيات* (*quaternions*) سنة 1843.

(1) J. Caillaès : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 46.*

* *Contribution à une présentation plus solide des mathématiques.*

(2) J. Caillaès : *Op.cit, p 46.*

* الأعداد الأربعة بالفرنسية *quaternions* أو *nombres super complexes* هي أعداد صيغتها:

التحليل الرياضي للمنطق عند جورج بول.

المدرسة الفرنسية، إذ نجد حوليات الرياضيات النظرية والتطبيقية لـ " جرقون " (*Joseph Diaz Gergonne* 1771-1859) مع أبحاثه حول خصائص الإجراءات العادية كالتبديلية، والتجميعية، والأعداد المركبة.

المدرسة الألمانية ونذكر من أعضائها: غوس، "أوم" (*Martin Ohm* 1782-1872) والذي أراد أن يضيف على الجبر نفس اليقين الهندسي، ويأسسه على أسس مماثلة لتلك في الهندسة. كما نجد أيضا فراسمان، وهانكل وديديكند...

ولهذا في هذا الفصل سنتطرق إلى اتجاهين: الصورية والاكسيوماتيكية في القرن

التاسع.

حيث: $a + ib + cj + kd = j$ حيث: a, b, c أعداد حقيقية، k, j, i أعداد مركبة خيالية حيث:
 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ وسميت أربعية لأنها مركبة من 4 حدود. <http://villemin.gerard.free.fr>

المبحث الأول: الاتجاهات الصورية

إن الصورنة (*La formalisation*) تهدف إلى حل إشكالية أزمة الرياضيات، وتأسيس رياضيات على أسس متينة، ومنه فهي تهدف إلى إعادة تأسيس صرح اليقين الرياضي. فالصورنة إذن " هدفها تحرير الرياضيات من الطابع الحدسي أو من العودة إلى الحدس الحسي، لأن الرياضيات كانت مؤسسة في التجربة الحسية ووجودها مرتبط بالعالم الحسي، ولهذا فالعدد هو تشكيلة من وحدات أو أشياء، والجمع هو الربط بين التشكيلتين"⁽³⁾ ولهذا فالمواضيع الرياضية محددة بردها إلى التجربة الحسية، ثم بعدها الاعتماد على الأشياء لتحديد الإجراءات، فالصورنة غايتها إبعاد الرياضيات عن التجربة، لأن الرياضيات تفرض مجموعة من القواعد لا يجب أن تكون مرتبطة بالحدس الحسي أو بقوانين الفكر، كما هو الشأن بالنسبة لقياس، ولهذا كان وجوبا عليها الاعتماد على الرموز من أجل تمثيل مختلف الإجراءات.

يقول **كفايس**: " إذا وجب ترك العادات الفكرية ، فإن البديل عن الوضوح والبداهة الحدسية سيكون هذا الوضوح الحسي الخاص الذي تكوّنه إدراك الرموز. إن الإجراءات الفكرية الواقعية تم تعويضها بنظام ميكانيكي نثق فيه لأننا حددنا فيه كل القواعد اللازمة مرة واحدة"⁽⁴⁾. فلتحرير الرياضيات من الحسي، كان لزاما إعادة بنائها في نظام من رموز يضمن ابتعادها عما هو عملي، واستغراقها في المجرد.

أولاً - الحركة الصورية عند فراسمان و هانكل:

أ - صورية الأعداد:

في رسالة وجهها "هانكل" (*Hermann Hankel 1839-1873*) إلى "فراسمان" (*Hermann Grassmann 1809-1877*) أكد له فيها ما يلي: " حاجة فلسفية أو رغبة إذا أردتم تسميتها كذلك، أن أوصل البحث في كل الفروع الرياضية، أن أفهم بعمق كل الأسس وروابطها، وهذا ما يدفعني هذا الصيف إلى دراسة مؤلف هاملتون بعنوان " قراءات

⁽³⁾ P C. Noguès : *Op.cit*, p 84.

⁽⁴⁾ J. Cavaillès : *méthode axiomatique et formalisme, Op.cit*, p 47.

في الأربعيات " من أجل توضيح طبيعة الأعداد الخيالية (*Nombres imaginaires*)⁽⁵⁾، وهذا يبين أن هانكل وهو يبحث في الأسس، أراد أن ينطلق من تحليله لكتاب هاملتون، على أساس أن الأعداد الخيالية من الأسباب التي أدت إلى حدوث الأزمة الرياضية، ولهذا وجب فهمها ودراستها كي يستطيع حل الأزمة، وهو نفس الموقف الذي اتخذته زميله " فراسمان " الذي بدوره يرى أن: " الأزمة كانت نتيجة وجود الأربعيات والأعداد السالبة "⁽⁶⁾.

وعليه فكل منهما اهتم بالبحث في الأسس وخاصة بالحساب العام، حيث الخصائص الصورية للجمع والجداء: التبديلية، التجميعية، والتوزيعية كانت موضوع أبحاثها وأبحاث المدرسة الجبرية في كمبردج⁽⁷⁾. فالجمع والضرب هي إجراءات تركيبية حيث خصائصها تحدد حسب الرابطة التي تربط فيما بينها، أو فيما بينها وبين الإجراءات المقلوبة أو التحليلية، إذ يمكن حينئذ تحديد الإجراءات بخاصية التوزيع والتبديل، أو التبديلية والتجميعية حسب طبيعة الرابطة. وبهذه الخصائص فإن هانكل وفراسمان أكدا على الصورية التامة لهذه الإجراءات، وكذا على صورية الأعداد وتجريدها فالعدد هو " عبارة عن علاقات صورية بين مواضيع، نسق الأعداد يمثل تتابعا نسقيا مرتبا لهذه العلاقات أو الروابط "⁽⁸⁾. وهذا ما أكده جورج بول عندما قال: " إن الرياضيات تدرس الإجراءات في ذاتها، بمعزل عن المادة التي يمكن أن تنطبق عليها "⁽⁹⁾.

ب - الصورية عند هانكل:

يتساءل هانكل: هل نريد الإجابة على السؤال المطروح؟ معرفة ما إذا كانت بعض الأعداد ممكنة أولا، ولكن، يجب أولا أن نتفق حول المعنى الخاص بالعدد. إن "العدد ليس شيئا، مادة موجودة مستقلة أو مبدأ مستقلا كالأشكال الفيثاغورية خارج الذات المفكرة

⁽⁵⁾ Jean. Claude pont : *Le nombre et son statut vers le milieu du XIXe siècle à la lumière des quelques traités, actes du colloque de PEYRESQ, la pensée numérique, 1999, p 25.*

<http://w.w.w.peiresq.org/new%20suite/actes,Hombres/Pont.Paf>.

⁽⁶⁾ *Ibid*,p25.

⁽⁷⁾ J. Cavaillès : *méthode axiomatique et formalisme : Op.cit, p 47.*

⁽⁸⁾ *Ibid*,p47.

⁽⁹⁾ Nicolas. Bourbaki : *Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris, 2^{me} édition, 1969, p 33.*

والمواضيع التي تقوم بتحديدتها، إن مسألة الوجود لا يمكن ربطها بالذات المفكرة أو المواضيع التي يتم التفكير حولها، إنها العلاقات الموجودة فيما بينها والتي تمثل بالأعداد⁽¹⁰⁾. نلاحظ عبر قول هانكل، أن العدد لا علاقة له بالمادة، ولا بالواقع، ولا بالفكر، ولا بالذات، إنه يعبر عن العلاقات الموجودة بين الأشياء.

وعن سؤاله حول إمكانية وجود أعداد واستحالة وجود أخرى يجيب هانكل: " إن الاستحالة بالنسبة للرياضي لا تكمن إلا في ما هو مستحيل منطقياً، أي ما يتناقض مع ذاته، فالأعداد المستحيلة بهذا المعنى غير مقصودة ولا تتطلب أصلاً البرهان، لكن الأعداد المقصودة هي التي تكون ممكنة منطقياً، تصورها واضح ومحدد وغير متناقض⁽¹¹⁾. فكل تصور متناقض في ذاته، وكل عدد يكون تصوره غير واضح وغير محدد ومتناقض إذن هو مستحيل، ومادام كذلك لا يفكر فيه الرياضي لأنه عدد يحمل في طياته بوادر فنائه. فهو مستحيل، ولهذا مع اكتشاف الجذر السلمي $\sqrt{-1}$ اعتبره الكثير من الرياضيين عدداً مستحيلاً، وكل ما ينتج عنه هو كذلك لأن الاعتقاد السائد هو أن العدد موجب، لكن اليوم مثل هذه الأعداد أصبحت مألوفة ومقبولة، خاصة بعد أن تمّ تمثيلها هندسياً، وهذا يعني أنها أصبحت غير مستحيلة مثل الأعداد الموجبة والسالبة، ولهذا يؤكد هانكل أن ما هو مستحيل بالنسبة للرياضيات هو المتناقض، وما عدا ذلك فهو ممكن.

وانطلاقاً من هذه الأفكار الأولية أو لنقل مقدمات أسس هانكل فان "المصادرة المركزية في ابستمولوجيته الرياضية نصها: قواعد العمليات الصورية والخالصة التي ترتكز على المواضيع العقلية يجب أن يتوفر فيها شرط غياب التناقض المنطقي، وهذا ما جعله يثبت أن تصور العدد يمكن أن يدرك بشكل صوري نظري، دون الرجوع إلى المقدار الذي يتجلى فقط في الوجود الحسي⁽¹²⁾. ولهذا فالعلوم الصورية (المنطق والرياضيات) موضوعها دراسة العلاقات الصورية المستقلة عن المحتوى المادي للأشياء والمواضيع.

(10) Jean Claude pont Jean. Claude pont : Le nombre et son statut vers le milieu du XIXe siècle à la lumière des quelques traités, actes du colloque de PEYRESQ, la pensée numérique, 1999, p 26.

<http://w.w.w.peiresq.org/new%20suite/actes,Hombres/Pont.Paf>.

(11) Ibid,p26.

(12) Ibid, p 27.

وتأكيدا على صورية الرياضيات، أكد هانكل أن الرياضيات مؤسسة انطلاقا من مبدأ الدوام: مبدأ الدوام للقوانين الصورية* (*Le principe de permanence des lois*) *formelles*)، وهو ليس تعميما لعلم الحساب العادي بل هو علم جديد ونص هذا المبدأ: " إذا تمّ التعبير عن صورتين متساويتين بواسطة رموز عامة من علم الحساب الشامل، فيجب أن تحافظا على هذه المساواة عندما تتوقف الإشارات عن تعيين المقادير البسيطة، وعندما تتلقى الإجراءات مقدارا آخر حقيقيا"⁽¹³⁾. فإذا كانت مواضيع الفئة *A* هي أعداد، فإن عناصر الفئة *B* هي أعداد أيضا، وهنا مددنا فكرة الأعداد، وبهذه الطريقة تكون هناك " امتدادات متتالية، فمن فكرة العدد نتوصل إلى الأعداد المركبة، وهنا يبدأ تاريخ الأعداد المركبة والخيالية مع أعمال"آرغون" (*Jean Robert Argand 1768-1822*)، واكتشاف الأربيعيات (1843) من طرف هاملتون، وهو المثال الأول لنسق الأعداد التي جدها غير تبديلي⁽¹⁴⁾. ولهذا في كتابه: "نظرية الأنساق المركبة للأعداد" (1867)، درس هانكل "الأعداد الحقيقية كمواضيع (جملة ناقصة)

وأخيرا على شكل أربيعيات على غرار هاملتون، عرضها صوريا ثم قام بتمثيلها هندسيا"⁽¹⁵⁾. وما نستنتج هنا أن الحركة الصورية غيرت مسارها، فعوضا الانتقال من الكل أو من العام، فإننا ننتقل من مفهوم العدد، ثم نبدأ في عملية التركيب والتعقيد إلى أن نصل إلى الأربيعيات.

ج-الصورية عند فراسمان :

لقد صنف فراسمان العلوم إلى علوم واقعية (مادية) وعلوم صورية، فأما الأولى فالذات فيها منفصلة عن الموضوع والكائن مستقل عن التفكير، ولهذا صدقها هو معطى من خلال

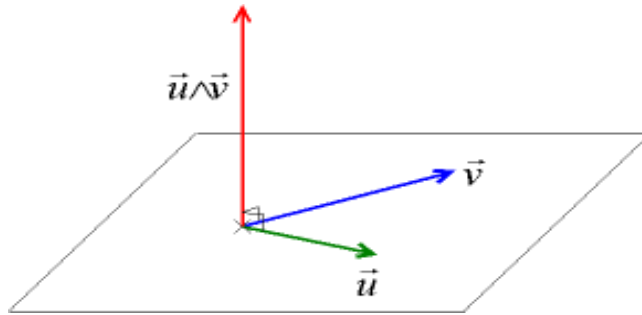
* هذا المبدأ هو من اكتشاف هانكل.

(13) *J. Cavailles : méthode axiomatique et formalisme , Op.cit, p 50.*

(14) *Vincent Gérard : La mathesis universalis est elle l'ontologie formelle ? dans annales de phénoménologie, N°1, 2002, p 79.*

(15) *François de Gaudit : Husserl et Galilée : sur la crise des sciences européennes, J.Vrin, Paris, 2004, p 147.*

انسجام الفكر والذات، بينما الثانية موضوعها مطروح من الفكر ذاته ولهذا صدقها محقق من خلال انسجام الفكر مع ذاته، وعليه فان الحديث عن الصدق يردنا إلى الأسس الأولى للعلوم. وفي العلوم الصورية ميز فراسمان بين الهندسة والفروع الأخرى، إذ أن الهندسة هي " نظرية المكان كما هي في الطبيعة ليست فرعاً من الرياضيات الخالصة، لكن تطبيقاً لهذه الرياضيات في الطبيعة " (16). فالهندسة لها علاقة بالمكان، كحدس حسي، ومن ثم فهي تبتعد عن الصورية، وقد جعلها فراسمان تجسيدا وتطبيقاً للفروع الرياضية الأخرى، لهذا فهو يعرف المفاهيم الأولية كالتجميعية والتبديلية والمساواة والجمع بالقطع الهندسية، أو بالإشعاعات، فمثلاً " التبديلية تحقق من خلال إمكانية الوصول إلى حد القطر بطريقتين مختلفتين والجداء هو تنقل القطعة في المستوى " (17). ففراسمان أسس صرحاً جبرياً هندسياً يقوم على تصور هندسي للفضاء الإشعاعي ن أبعاد (18) (الشكل). فربط الهندسة بالمفاهيم الرياضية المجردة، يهدم الخاصية المجردة للرياضيات عموماً، ولهذا الحديث لا يكمن في تطور المنطقي للصورية، بل في صورته الإجرائية. كما أن فراسمان أيضاً أشار إلى " المصادرة المركزية " التي أكد أنها تتمثل في العنصر الذي يوضع مكان النقطة ومنه إذا كان هانكل قد أبعده مفهوم المقدار، فإن فراسمان قد أكد عليه وأبقى عليه في إسهاماته.



الشكل 12: الحساب الإشعاعي

ومما سبق الحركة الصورية بدأت مع هانكل وفراسمان اللذان اعتمدا نفس المنهج الذي يقوم أساساً على الامتداد والتعميم. كما أن الصرح الرياضي تمّ النظر إليه كتطابق

(16) Jean Claude pont : Jean Claude pont Jean. Claude pont : Le nombre et son statut vers le milieu du XIXe siècle à la lumière des quelques traités, actes du colloque de PEYRESQ, la pensée numérique, 1999, p 30.

<http://w.w.w.peiresq.org/new%20suite/actes.Hombres/Pont.Paf>.

(17) J. Cavaillès : méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 51.

(18) Bourbaki: Eléments d'histoire des mathématiques ,Op.cit, p 86.

للنظريات، والصورنة هي نقد هذه النظريات، فيجب إذن معرفة ماهية العدد، والتعميمات الناتجة وطرق التعميم، ثم بعدها القيام بصورنة نسق الأعداد ومختلف تعميماته. لكن هل نجح كل من هانكل وفراسمان في تحقيق الهدف المتمثل في صورنة الرياضيات ومن ثم حل أزمة الأسس؟ **كفاييس** يؤكد انه بالرغم من أنهما توصلا إلى الكثير من الاكتشافات، إلا أن الهدف الرئيسي لم يحقق بعد، و لهذا تطرق إلى تحليل نسق ديدكند.

ثانيا - نسق ديدكند:

إن المنهج الصوري تمّ توضيحه من طرف ديدكند وكذا اللوجيستيين كفريجه، بيانو، راسل، وسنركز في هذا المقام على ديدكند.

أ - منهج التعميم:

"في مقال التثبيت سنة 1854 تساءل ديدكند عن القوانين التي يجب أن يخضع إليها التطور الرياضي؟ وقد أجاب بأن الرياضيات تتطور من خلال التعميم، السابق عن الصورنة"⁽¹⁹⁾، فقد بيّن أن امتداد النظرية مرتبطة بامتداد الإجراء، نأخذ كمثال الرفع إلى قوة n فهو معرفّ بأس موجب: X^n هو جداء X في X n مرات، فالأس هو عدد العوامل في الجداء. الأس هو عدد موجب ولا يمكن أن يكون هناك معنى للأس السالب الناطق الحقيقي. كما يمكن تعريف الرفع إلى قوة (*Exponentiation*) من خلال الخاصية التالية:

$$X^{a+b} = X^a \cdot X^b$$

ونركز على هذه الخاصية لتعريف الرفع إلى قوة، فهو تطبيق متصل لمجموعة الأزواج $H(X, a)$ على مجموعة الأعداد الحقيقية حيث:

$$f(x, a+b) = f(x, a) \cdot f(x, b)$$

$$f(x, 1) = 1$$

والتطبيق يكون في الرفع إلى قوة الأعداد الموجبة فقط، وبصورة عامة ننطلق من إجراء محدد في مجال ضيق، نلاحظ خاصية قابلة أن تأخذ قيمة عامة، نستخدم هذه الخاصية من أجل إعادة تعريف الإجراء، وهذا ما يسمح بتعميمها، ومنه تمديد مجال المواضيع التي تطبق عليها، وتارة الأشياء التي نضفيها في تمديد المجال هي مقتبسة من مجالات أخرى، وتارة أخرى تمديد المجال ينتج أشياء جديدة وتعرف كركائز، حدود أو نتائج الإجراء المعمم. وهكذا

⁽¹⁹⁾ J. Cavaillès : *méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 53.

فإن ديدكند بدوره أكد إمكانية تطبيق مبدأ التعميم على الطرح، القسمة لتعريف الأعداد السالبة والأعداد الناطقة انطلاقاً من الأعداد الموجبة.

ولهذا بناء على ما سبق (ومن خلال التعريف)، نلاحظ أن الإجراء المعمم يتقاطع مع الإجراء الذي بدأنا منه في المجال المحصور أو الضيق، وأن تعريف هذا الإجراء يكون فيما بعد خاصية الإجراء المعمم على المجال المحصور. ومنه فإن طريقة التعميم يعني القيام بحركة مزدوجة⁽²⁰⁾:

- حركة امتداد من الأسفل نحو الأعلى أي من الجزء نحو الكل فهي حركة تصاعدية.
- حركة تنازلية، عندما يتم استرجاع الإجراء الجزئي من سياق التعميم.

ب- خصائص النسق الصوري عند ديدكند:

عرّف ديدكند النسق كما يلي: يحدث عادة أن الأشياء المختلفة a, b, c, \dots تكون لسبب معين مجتمعة في وجهة نظر واحدة، فتكوّن مجموعة في الفكر ونقول أيضاً أنها تكوّن نسقا S ، فإذا كانت الأشياء a, b, c, \dots المحتواة في S تسمى عناصر، فإن العكس صحيح أي أن S هي مكوّنة من هذه العناصر⁽²⁰⁾. ديدكند عرّف النسق ماصديقاً ومفهوماً أي من خلال العناصر المكوّنة له و من خلال اشتراك هذه العناصر في خاصية ما، فالنسق S هو محدد إذا أمكننا القول عن أي شيء انه عنصر من S أو لا.

ولتحديد خصائص النسق عاد كفاييس إلى منكرتي ديدكند، الأولى حول: " الاستمرارية والأعداد اللاناطقة " والثانية " ما هي وفيما تفيد الأعداد؟ " واعتبرهما تمثيلاً سوريا لطريقة التعميم و التطبيق بل أنها يوضحان هذه الطريقة.

فالمؤلف الأول، عرّف فيه الأعداد الناطقة انطلاقاً من الأعداد الصحيحة والأعداد الحقيقية انطلاقاً من الأعداد الناطقة. فنسق الأعداد الناطقة يكون جسماً (*un corps*) تتوفر فيه الشروط التالية⁽²¹⁾:

- هو نسق يكون مجالاً جيّد الترتيب ولامتناهياً في الاتجاهين.
- الترتيب بين عنصرين، بينهما عناصر لامتناهية.

⁽²⁰⁾ *Ibid*, p 54.

⁽²⁰⁾ Jean Pierre Belna: *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege, Op.cit*, p29.

⁽²¹⁾ J. Cavaillès : *méthode axiomatique et formalisme* ,*Op.cit*, p 55.

• كل عنصر يقسم النسق إلى فئتين حيث عناصرهما تحتوي نفس علاقة الترتيب.
والنسق الذي تتوفر فيه هذه الخصائص يكون مستمرا ومتصلا، وهذا يعني أنه يوجد تقابل بين عناصره والقطع، على أساس أن العناصر التي تقسم النسق إلى فئتين هي بمثابة قطع.

أما المؤلف الثاني، فقد عرّف من خلاله الأعداد الصحيحة، فأنساق الأعداد إذن هي معرفة بالامتداد المتزايد انطلاقا من نسق الأعداد الصحيحة، وبتطبيق طريقة التعميم. كما تطرق ديدكند في مؤلفه هذا إلى أن علم الحساب (الجبر والتحليل) هو جزء من المنطق، فقد ردّ علم الحساب إلى المنطق و هذا لا يدل إلا على استقلالية العدد عن حدس الزمان والمكان، لكن ديدكند لم يستخدم مصطلح "منطقي" في كتابه، ولهذا فلم يكن يقصد ردّ الرياضيات إلى قضايا منطقية، وهذا ما أكده فريجه: "إن ديدكند يقول أن نظرية الأعداد هي فرع من المنطق، لكن كتابه لم يبين ذلك، لأن العبارات التي استخدمها "نسق"، "شيء ينتمي إلى شيء" وهي عبارات لا تستعمل في المنطق ولا يمكن ردها إلى المنطق⁽²²⁾، والحل عند فريجه يكمن في التحرر من كل تبعية للذهن، فعوض أن نقول نسقا نغيرها بالتصور، وعوضا أن نقول تطبيقا نستخدم مصطلح العلاقة، والتعريفات تكون إذن عبارة عن وصف فئات المواضيع المعطاة، فالعدد الأصلي الذي ينتمي إلى التصور F هو امتداد التصور، فتصور العدد مساوي لتصور F ، وهذا يعني أن العدد هو عبارة عن فئة تكافؤ مكونة من تصورات متساوية (*équinumériques*)، فالعدد 4 هو امتداد أي فئة تكافؤ التصور المساوي له: حصان يجر عربة الحاكم⁽²³⁾. وهذا يعني إمكانية تحقيق التقابل بين التصورات الامتدادات (الأشياء) وهذا ما يسمح بالانتقال من فئة متكافئة إلى اكتشاف تصورات جديدة، ولن تتم هذه العملية إلا بوجود العلاقات المنطقية، وبهذا فريجه أثبت العلاقة الموجودة بين المنطق و علم الحساب.

وقد نتج عن التصور السابق أن الأشياء عند فريجه "لا تكتشف من عدم، وإنما هي موجودة وعلى الرياضي أن يتوصل إليها، ويقوم بتسميتها"⁽²⁴⁾. هذا الموقف كما يرى

(22) *Ibid*,p56.

(23) *Jacqueline Boniface: Hilbert et la notion d'existence en mathématique, Op.cit*,p188.

(24) *J. Cavaillès : méthode axiomatique et formalisme, Op.cit*, p 57.

كفاييس، يعارض موقف ديدكند الذي صرح أن المواضيع الرياضية هي من اختراعات العقل الإنساني الذي له القدرة على الاكتشاف، وأن العدد ليس الفئة ذاتها وإنما شيء جديد "الأعداد هي اكتشافات حرة للعقل الإنساني، وهي وسيلة لإدراك تنوع الأشياء بوضوح ودقة"، حتى العدد اللانطاق ليس قطعاً وإنما شيء جديد يقابله، وقد أيد هانكل موقف ديدكند من اكتشاف العدد⁽²⁵⁾.

وبالرغم من أهمية إسهامات هؤلاء الرياضيين في تطوير نظرية الأعداد، إلا أن كفاييس عارض فريجه و"أكد أن العودة إلى نشاط الذهن تساعد في فهم التطور اللامتوقع للرياضيات، يمنحه الدقة والوضوح بشرط أن تكون المفاهيم المتضافرة للنسق والتطبيق واضحة ومتميزة"⁽²⁶⁾.

فيدكند من خلال نسقه، أكد على العلاقات التي تجعل الرياضيات صرحاً واحداً: علاقة النظريات المعممة بالنظريات الحدسية المعرفة بسياق التعميم، وعلاقة الأنساق الصورية بالنظريات البسيطة، الحدسية أو المعمقة (لأن الصورة ليست اختراعاً واكتشافاً لنسق، وإنما هي نقد لنظرية موجودة). فعند الانتقال من النظرية الحدسية إلى نظرية معممة ومن نظرية معممة إلى نسق صوري، فإن الرجوع إلى التجربة الحسية هو نسبي. لأنه "بتكوين النظريات المعممة والأنساق الصورية التي تتفصل كلياً عن التجربة الحسية، يجد الرياضي نفسه أمام نوع جديد من المعطيات لا علاقة لها بالحدس (كما هو الشأن بالنسبة للمقدار عند فراسمان) ولا بالتجربة بالرغم أن المحتوى ليس فارغاً ولا نتيجة تحديدات عشوائية (كما هو الشأن بالنسبة للرياضيات عند هانكل)"⁽²⁷⁾. كما أكد أيضاً على أن نشاط الذهن يعتمد على التطبيق الذي هو عبارة عن تقابل عناصر نسق بعناصر نسق آخر وتكراره، فبالنظر إلى الأنساق اللامتناهية، متتالية الأعداد الطبيعية، والطريقتان المميزتان لعلم الحساب: الاستدلال بالاستقراء التام، والتعريف بالتراجع. وقد اهتم ديدكند بأكسمة علم الحساب بينما في المقابل فريجه اهتم بأكسمة المنطق.

ومما سبق نستنتج:

- أن ديدكند اهتم بدراسة جسم الأعداد الحقيقية، فأسس بذلك التحليل وربطه بالجبر.

⁽²⁵⁾ Ibid,57.

⁽²⁶⁾ Ibid, p 58.

⁽²⁷⁾ Ibid,p56.

- أسس دراسة الأعداد الحقيقية بالاعتماد على الأعداد الناطقة ودراسة الأعداد الناطقة على الأعداد الطبيعية، وبذلك ساهم في تيار تحسب التحليل.
- بنى نسقه على أساسين: الأول هو التعميم و الثاني هو التطبيق، وهما متكاملان .
- أن نظريته غير تامة بدليل ظهور مفارقة راسل 1903، وبالتالي يوجد غموض في كتاباته، وهذا ما حاول راسل وبيانو وأنصار الاتجاه اللوجيستيني نفاديه.

ثالثا - الصورة والأكسمة عند بيانو وراسل:

في نهاية القرن 19 ردت مسألة الأسس الرياضية إلى علم الحساب، وكان الحل من خلال البناء التدريجي لأكسيوماتيكية دقيقة، ففي 1861 فراسمان عرف العدد والجداء وتطرق إلى خصائصهما، سنة 1888 ديدكند اقترح أكسمة أولية وحاول تأسيس نسقا مكوّنا من أكسيومات مبنية على التعريفات، وهي التي تمّ تطويرها من طرف بيانو سنة 1889 الذي وبرتراند راسل أسسا ما يعرف بالاتجاه اللوجيستيني.

أ- أكسيومات بيانو:

لقد اهتم جيوسب بيانو (*Giuseppe Peano 1858-1932*) في نهاية القرن التاسع عشر وبداية القرن 20، بصياغة نظريات الهندسة الإقليدية فوضع لها نسقا من اللامعرفات والمعرفات، وعلاوة على هذا جعل من علم الحساب نسقا استنباطيا، وهذا من خلال المؤلفات التالية:

1- مبادئ الرياضيات من خلال منهج جديد في العرض (1889).

2- المصطلح الرمزي للمنطق الرياضي (1854).

3- تدوين الصيغ الرياضية (*Formules des mathématiques*) في خمسة

أجزاء ألفها ما بين 1895-1908.

والنسق الاستنباطي لعلم الحساب احتوى ثلاثة لامعرفات عبارة عن حدود أولية وهي:

الصفري، العدد الطبيعي، والعدد التالي المباشر⁽²⁸⁾، وأضاف إلى هذه الحدود خمسة أكسيومات وهي على التوالي⁽²⁹⁾.

1- 0 (الصفري) هو عدد.

⁽²⁸⁾ Denis Vernant : *La philosophie mathématique de Bertrand Russel, Op.cit, p 400.*

⁽²⁹⁾ Robert Blanché : *L'axiomatique, Op.cit, p 41.*

2- إذا كان (أ) هو فإن تالي (أ) هو عدد.

3- إذا كان عدداً لهما نفس اللاحق فإنهما متطابقان، ومن ثم لا يمكن أن يكون لعددتين لاحق واحد.

4- 0 ليس تالي لأي عدد.

5- إذا كانت (S) هي فئة حيث 0 ينتمي إليها وكذا تالي كل عدد ينتمي إلى (S)، إذن كل عدد ينتمي إلى (S)، وهذا تعبير عن مبدأ الاستقراء الرياضي.

ودلالة اللامعرفات الثلاثة لا ترد إلى المعنى الحسي أو الحدسي للحدود ولكن إلى خصائصها البنيوية المحققة بالأكسيومات الخمس التي هي عبارة عن تعريف ضمني للمجموعة (N) مجموعة الأعداد الطبيعية، وهذا يعني أن هذه المجموعة تحقق الأكسيومات المكونة لنسق بيانو بالنسبة لعلم الحساب. ونظراً لأن الأكسمة عند بيانو قوامها علم الحساب الذي قوامه العدد، فقد أصبح بحثه هذا مصنفاً ضمن الأبحاث التي تدور حول أكسمة العدد.

كما صاغ بيانو نسقه الرياضي بالاعتماد على الرموز أو على لغة رمزية سمحت له بصورته كل الرياضيات⁽³⁰⁾، والتي تمّ تأكيدها من طرف المناطقة اللاحقين نذكر منهم بورالي، فورتى، " وهي رموز مازالت معتمدة إلى يومنا كـ $E, I, \bar{I}, C, A, B, \dots$ "⁽³¹⁾، وهذا ما تولد عنه ما يعرف باللوغيستيقا (المنطق الرياضي) الذي طوره لاحقاً برتراند راسل، وكذا جورج بول وتحول معناه إلى محاولة رد الرياضيات إلى المنطق.

فالأكسمة عند بيانو أثبتت بالفعل أنها ابتعدت نهائياً عن الحدس المكاني، وأصبحت الرياضيات حينها علماً مجرداً وصورياً يقوم على مجموعة من الحدود والمسلمات. فبيانو لم يهتم بعملية ردّ الرياضيات إلى المنطق كما هو الشأن لاحقاً عند راسل، لكن عمله " كان قائماً على ترجمة النظريات والاستنتاجات الرياضية إلى لغة صورية واضحة ومبدهنة، معتمداً في نسقه على اللامعرفات والأكسيومات التي أعاد ديدكند ذكرها"⁽³²⁾.

ب- الأكسيوم عند راسل:

⁽³⁰⁾ Jacqueline Boniface : *Hilbert et la notion d'existence en mathématique, Op.cit, p 134.*

⁽³¹⁾ N. Bourbaki : *Eléments d'histoire des mathématiques, Op.cit, p 20.*

⁽³²⁾ Gilbert Hottois : *Penser la logique, Une introduction technique et théorique à la philosophie de la logique et du langage, De Boeck Université, 2^eed, 2002, p 19.*

في 1913، ألف برتراند راسل (*Bertrand Russel 1872-1970*) مع زميله وايتهد (*Alfred North Whitehead 1861-1947*) كتاب "مبادئ الرياضيات" (*principia mathematica*) الذي يمثل المرحلة المهمة في صورنة الرياضيات، وجعل من اللوجيستيقا أساس الرياضيات، أي أن المنطق الرمزي أو الرياضي هو الأساس، لكن راسل يستخدم اللوجيستيقا بالمعنى الجديد وهو أنها عبارة عن محاولة جريئة لرد الرياضيات إلى المنطق، أو إلى مجموعة من القضايا، وليس هذا فحسب، بل أنها تشير أيضا إلى حل نقائص الرياضة المعاصرة من خلال "نظرية الأنماط" (*théorie des types*) فأصبح " للمذهب اللوجيستيقى وجهان، أولهما رد الرياضة بحذفها إلى المنطق الصوري، ثم حل نقائص الرياضية بإقامة نظرية الأنماط" (33).

كفاييس محلا للأكسمة والصورنة عند راسل انطلق من تساؤل: هل بالفعل يمكننا الحديث عن أساس للرياضيات بالاختزال إلى المنطق؟ وهذا السؤال له علاقة مباشرة بالفصل الأخير (الثامن عشر) من كتاب "مقدمة للفلسفة الرياضية" لراسل، حيث في هذا المبحث يقول: "في الأبواب المتقدمة من هذا الكتاب بدأنا بالأعداد الطبيعية فعرفنا أولا العدد الأصلي، وبيننا كيف نعمم التصور عن العدد، ثم حللنا بعد ذلك التصورات الداخلية في هذا التعريف حتى وجدنا أنفسنا نبحث في أساسيات المنطق التي تأتي أولا في دراسة تركيبية استنتاجية" (34). ففي هذا القول، يؤكد راسل أنه إذا ما بحثنا في الرياضيات وجدنا أنفسنا نبحث في المنطق، ومن ثم فإن الرياضيات مردها في الأخير المنطق، وهذا ما يعرف باتجاه رد الرياضيات إلى المنطق.

إن الأكسيومات التي أشار إليها راسل في مؤلفه "مبادئ الرياضيات" هي عبارة عن قضايا منطقية، مبرهنة منطقيا، ولكنه لم يستطيع أن يحدد خصائص ومميزات القضايا المنطقية فهو يرى أنها قضايا تحليلية أو تكرارية، و نقيضها متناقض في ذاته وهذا غير مقبول، لأنه لا يكفي القول أن القضايا المنطقية هي تلك المستنتجة عن تطبيق مبدأ عدم التناقض، لأن "مبدأ عدم التناقض هو أحد قوانين قضايا المنطق وليس فيه صدارة خاصة، و البرهان على أن تناقض قضية ما متناقض بذاته، أشبه أن يحتاج إلى قوانين أخرى

(33) محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، مرجع سابق، ص 125.

(34) برتراند راسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص 278.

للاستنتاج إلى جانب قانون التناقض⁽³⁵⁾. ولهذا اضطر إلى إدخال عنصر نفسي في تعريف خاصية القضية المنطقية "... وعلى الرغم من ذلك فإن خاصية القضايا المنطقية التي نبحث عنها، هي تلك التي شعر بها، وقصد إلى تعريفها أولئك الذين قالوا إنها تشتمل على قبول الاستنتاج من قانون التناقض⁽³⁶⁾.

وراسل حسب **كفايس** استند في تعريف القضايا المنطقية إلى الجانب الشعوري، والإعتقادي أي الجانب الذاتي، ولم يعتمد بذلك على الجانب الموضوعي⁽³⁷⁾، كما انه اعترف أن الأكسيومات الثلاث التي اعتمد عليها في نسقه والمتمثلة في أكسيوم الاختيار واللاتتاهي، والاختزال ليست قضايا منطقية. إنها تأخذ صورة منطقية ولكنها لا تنتمي إلى المنطق الخالص لأن لها جانب وجود يتمثل في :

- الدالة الحملية بالنسبة لأكسيوم الاختزال.
- الفئة المضاعفة بالنسبة لأكسيوم التضاعف.
- العدد الاستقرائي بالنسبة لأكسيوم اللامتتاهي⁽³⁸⁾.

فالأكسيومات الثلاث هي بمثابة فرضيات ضرورية من أجل الممارسة الرياضية، ولكن غير مبررة من الناحية المنطقية. أي انه لا يوجد في المنطق ما يقرر صدقها أو كذبها، وعليه فلا إنسان مجبر على تصديقها واعتمادها. و فضلا عما سبق فان راسل ميز بين نوعين من الأكسيومات: منطقية، وفرضية، وأكد أن الأكسيومات الثلاثة هي فرضية أي لا هي بصادقة ولا بكاذبة، فكيف إذن يمكن الاعتماد على ما هو احتمالي وغير يقيني لتأسيس الصرح الرياضي؟

إن الحركة الصورية في علم الحساب والتحليل توصلت إلى بناء نسق يبدو سليما من الناحية النفسية، ولكن أسسه مازالت تطرح إشكاليات.

المبحث الثاني: الأكسمة في الهندسة

⁽³⁵⁾ نفس المرجع، ص 287.

⁽³⁶⁾ نفس المرجع، ص 288.

⁽³⁷⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 59.*

⁽³⁸⁾ Denis Vernant : *La philosophie mathématique de Bertrand Russel, Op.cit, p 42.*

إذا كانت الحركة الصورية كاتجاه خصت نظرية الأعداد (علم الحساب) والتحليل، فإن الاتجاه الثاني والمتمثل في المنهج الأكسيوماتيكي تطور في حقل الهندسة. و"الأكسيوماتيكية ليست برهانا ولكن نمطا لعرض العلوم الدقيقة مبنية على قضايا دون برهان ومصاغة صوريا" (39)، إن فعل الأكسمة يعني وضع مجموعة من مبادئ تكون قاعدة متناسقة وكافية للاستنتاج بالنسبة لكل قضايا النظرية، إنها تشترط مستوى معيناً من اللغة، وهذا يعني أنه لا يمكن أكسمة المعرفة ذات عبارات واسعة وغير محددة (35)، فالأكسمة هي نمط لتعريف التصورات تعريفاً دقيقاً، وتقوم بدراسة الرياضيات بعمق من خلال التقنيات المستعملة فيها و عبر مراحل تطورها، والحديث عن الأكسمة يردنا إلى هندسة إقليدس .

أولاً - النسق الإقليدي والأكسمة:

لقد ظلت الرياضيات خلال قرون طويلة نموذج اليقين، ولقد كانت الهندسة في الشكل الذي أعطاه إياها " أبو الرياضيات الحديثة والذي كان يونانياً من القرن 3 ق.م وهو إقليدس" (40) نمودجا لكل نظرية استنباطية، اعتمد فيها على مجموعة من الأكسيومات، ولهذا يعتبر أول من وضع الحجر الأساس للمنهج الأكسيومي في كتابه "الأصول" وهو الكتاب " الذي ظل منذ ذلك الوقت وحتى القرن الماضي (ق 19) أساساً للدراسات الهندسية" (41). فإقليدس هو أول من اقترح بناء منطقياً وأكسيومياً للرياضيات عامة والهندسة خاصة، ولهذا حاول بناء هذه الهندسة انطلاقاً من مجموعة من القضايا كانت أصل البرهان، وميّز في هذه المجموعات بين التعريفات، والبيدهيات والمسلمات.

أ - أكسيوم إقليدس:

إن "الأصول" الإقليدية هي نظرية المقادير الهندسية، المقادير المعرفة انطلاقاً من معطيات تجريبية فـ" الإشكالية الإقليدية لا تتمثل في تأسيس الهندسة قبلياً، لكن في وضع أو

(39) Jacques Morizot: *de l'histoire aux fondements, dans la rigueur et le calcul*, Cedic, Paris, 1982, p67.

(35) Gilles Gaston Granger : *pensée formelle et sciences de l'homme*, Aubier Montaigne, Paris, 1ere édition, 1967, p160.

(40) André Warusfel : *Les mathématiques modernes*, Ed Seuil, Paris, 1969, p 7.

(41) محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سابق، ص 74.

تكوين آلة استنتاجية تسمح باكتشاف الحقائق الهندسية انطلاقا من معطيات أولية⁽⁴²⁾، هذه المعطيات الأولية هي التعريفات، المسلمات والأكسيومات (البديهيات).

1 - التعريفات:

هي مجموعة من القضايا يضعها عالم الهندسة لتوضيح معاني حدوده وتحديد مدلولها، إن " التعريفات مرتبطة بالأشياء الخارجية ودورها، إنها تختزل إلى وصف بسيط تجريبي، مقارنة بتلك الموجودة في المعاجم "⁽⁴³⁾.

فعندما يقدم إقليدس مجموعة من التعريفات:

- النقطة هي ما ليست لها أجزاء.
- الخط طول دون عرض.
- المستقيم هو ذلك الذي يقع باعتدال على كل نقاطه.

فالأمر يتعلق بمعرفة عن ماذا نتكلم، دون أن تكون هناك خاصية إجرائية، فهذه " التعاريف لا تتدخل في البرهان الاستنتاجي وهي عبارة عن تعاريف وصفية "⁽⁴⁴⁾.

كما استخدم إقليدس نوعا ثانيا من التعريف، وهو ذلك الذي يقوم على إعطاء اسم للموضوع المحدد بالبناء أو بخاصية محددة، كتعريف الدائرة: هي شكل مستوى يحيط به خط واحد متصل يسمى المحيط، حيث كل المستقيمات التي تسمى أقطارا (*Rayons*) والمتصلة بهذا المحيط من نقطة داخل هذا الشكل هي متساوية، هذه النقطة هي مركز الدائرة. وعلى غرار ذلك تعريف المثلثات والرباعيات، والمستقيمات المتوازية، وهي عبارة عن تعريفات ذات خاصية إجرائية وقد أطلق عليها باسكال (*Blaise Pascal 1623-1662*) اسم: " التعريفات بالاسم وهي تعريفات تقوم بتعيين الأشياء بدقة بواسطة حدود معروفة، ووظيفتها هي توضيح الخطاب "⁽⁴⁵⁾، كما أنها تستغل في الاستنتاج البرهاني. ولهذا فإقليدس أكد على نوعين من التعاريف:

- التعاريف الوصفية.
- التعاريف الإسمية.

⁽⁴²⁾ Rudolph Bkouche : *Euclide, Klein, Hilbert et les autres, dans la rigueur et le calcul, Cedic, Paris, 1982, p 13.*

⁽⁴³⁾ Robert Blanché : *Op.cit, p 21.*

⁽⁴⁴⁾ Rudolph Bkouche : *Op.cit, p 15.*

⁽⁴⁵⁾ Ernest Havet : *Pensées de Pascal, Dezobry-E Magdeleine Sorbonne, 1852, p442.*

وفي الحالتين، الأشياء سابقة الوجود أي أنها قبلية عن الاسم، ولهذا فلا يتعلق الأمر بإيجاد ما تقوم بتسميته وإنما تسمية ما هو موجود.

2- المصادر أو المسلمات:

" هي قضايا مقترحة ليست بينة بذاتها نقاد للتسليم بها دون برهان، البرهان عليها يؤدي إلى تناقض "(46). ولهذا فالمسلمات تكون أقل وضوحا من المبادئ الأخرى، ويتقبلها الرياضي لأنها ضرورية لبناء النسق، ولكن لا يستطيع البرهنة عليها، وإذا ما حول فإنه سيقع في تناقض. و أكد إقليدس وجود خمس مصادرات نذكر الثلاث الأولى:

- 1- من الممكن رسم مستقيم بين نقطتين.
- 2- مدّ مستقيم محدود إلى أي طول في أي جهة.
- 3- من الممكن رسم دائرة من أي مركز وعلى أي بعد من هذا المركز المساوي لأبعاد نقاط المحيط.

وهذه القضايا هي ذات طابع أداتي، أي أنها تركز على وسائل كالمدرور والمسطرة. وإضافة إلى المسلمات السابقة، أضاف إقليدس المسلمة الرابعة ونصها: كل الزوايا القائمة هي متساوية، ويرى الكثير من الرياضيين أن هذه " المسلمة قابلة للبرهنة من خلال المسلمات السابقة والخصائص العامة للمقادير"(47). أما عن المصادرة الخامسة فنصها: إذا قطع مستقيم مستقيمين وكونَ معهما من ناحية واحدة زاويتين داخليتين، حيث مجموعهما أقل من زاويتين، فإن المستقيمين إذا امتدا يتقاطعان في النهاية في الجهة التي يكون فيها مجموع الزاويتين أقل من قائمتين. وهي المسلمة التي أدت إلى زعزعة الهندسة الإقليدية في القرن 19.

3 - البديهيات:

(46) محمد عابد الجابري: مرجع سابق، ص 74.

(47) Rudolph Bkouche : Op.cit, p 15.

إن الأكسيومات هي مبادئ واضحة بذاتها لا تحتاج إلى برهان، هي بسيطة إلى درجة أنها لا تتجزأ إلى ما هو أبسط منها، وأطلق عليها إقليدس اسم: الأفكار العامة، ودورها يكمن في التصريح بالخصائص العامة ومميزات المقادير ونذكر البديهيات الأولى:

- 1- المقادير المساوية لمقدار ثالث هي متساوية.
 - 2- إذا أضفنا إلى مقادير متساوية مقاديرا متساوية، فالنواتج الكلية هي متساوية.
 - 3- إذا طرحنا نفس المقدار من مقادير متساوية، البواقي تكون متساوية.
 - 4- المقادير التي يمكن أن يطابق أحدها مع الآخر هي متساوية فيما بينها.
- وهذا الأكسيوم الأخير أساسي لأنه يقوم بالربط بين " الخصائص العامة للمقادير والهندسة، والمساواة الهندسية مرتبطة بالصدفة أي الحركة"⁽⁴⁸⁾. لكن يبقى السؤال مطروح: هل يتعلق الأكسيوم بتعريف المساواة الهندسية؟ إن الحركة هنا القصد منها حركة الجسم الصلب. ولهذا فهذا الأكسيوم يعرف المساواة بالتطابق، وهو ما يوقعنا في الدور.

إن المبادئ التي اعتمدها إقليدس هي ذات طابع تجريبي، وأن قضاياها تنطبق على المواضيع الموجودة في العالم المحسوس، إنها مرتبطة بالمكان، ولهذا فالهندسة الإقليدية هي بمثابة فيزياء الأشكال المكانية، فيزياء المكان، إنها تركز على معطيات حسية تجريبية صدقها مرتبط بالأساس التجريبي من خلال الحدس الهندسي، " إن الهندسة الإقليدية مميزة بطابعين مرتبطين لكن متميزين: بمحتواها أي كمجموعة من الخصائص الهندسية للمكان ذو ثلاثة أبعاد، والمستوى ذو بعدين، فقد بقيت ضرورية ومهمة اليوم أيضا، في النظري والتطبيقي. بشكلها، فهي نموذج لعدة أنماط من الاستدلال والذي لعبت دورا معتبرا في تطوير الرياضيات "⁽⁴⁹⁾. ومنه فإن كتاب الأصول لإقليدس أصبح دائرة معارف للرياضيات مدة قرون طويلة، كونه لعب دورا مزدوجا في آن واحد، دور الغاية والوسيلة " غاية لأنها تفترض النظريات الهندسية الهامة والأكثر جمالا، ووسيلة لأن الحلول الجاهزة التي تقدمها

⁽⁴⁸⁾ Ibid, p 17.

⁽⁴⁹⁾ François Lurçat : L'autorité de la science, édition Cerf, Paris, 1995, p 148.

إلينا هي أدوات نستطيع أن نعتمد عليها للبرهان على نظريات جديدة⁽⁵⁰⁾، وهذا ما جعل غاستون باشلار ينعته "أساس العقل البشري"⁽⁵¹⁾ آنذاك.

ومن هنا فإن الحقيقة الرياضية عامة والهندسية خاصة، هي يقينية ومطلقة كونها تقوم على مبدأ الوضوح الذاتي لمبادئها وكذا المطابقة الخارجية للواقع، وهذا ما جعل كانط يقر بأنها الوحيدة الممكنة للإنسان لأن قضاياها ضرورية، ومن ثم لا يمكن أن تقوم هندسة أخرى غير هذه الهندسة. ولكن هل موقف كانط مطلق؟

ب - لماذا فشل إقليدس؟

نتيجة تطور الأبحاث والدراسات الهندسية والرياضية، بدأ التشكيك في مبادئ إقليدس وخاصة المسلمات، ووجهت انتقادات لنسق إقليدس، وتاريخيا هذه الانتقادات كانت من طرف اليونانيين أنفسهم الذين شككوا في المسلمات لانطوائها على غموض من جهة، وعلى إمكانية اشتقاق بعضها من البعض الآخر من جهة ثانية، كما انتقد النسق الاستنباطي لعدم وضوح الفروق الموجودة بين المسلمات والبديهيات " وإقليدس نفسه وازع النسق الاستنباطي لم يفصل جذريا بين المسلمة والبديهية، لدرجة أن بعض البديهيات قد نقلت وأدرجت تحت المسلمات، وبعض المسلمات أدرجت تحت البديهيات في الطبقات المختلفة في كتاب الأصول⁽⁵²⁾.

فهناك إذن خلط بين البديهيات والمسلمات، ولعلّ عدم التفريق بين المسلمات والبديهيات يرجع إلى كون إقليدس يعتمد في تمييزه لها على الحدس والوضوح الذاتي فهو " يؤمن بصدق البديهية بناء على حدسه لها"⁽⁵³⁾. لكن معيار الوضوح، ليس موضوعيا، هو معيار ذاتي وهذا ما أدى إلى اختلاف الرياضيين المعاصرين أنفسهم في التمييز بينها، " فالحدسيون يرون أن البديهيات أحكام تركيبية قبلية، وليس هناك ما هو أكثر منها وضوحا"⁽⁵⁴⁾، أما المناطقة

⁽⁵⁰⁾ كامل محمد عويضة: إقليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، دار الكتب العلمية، لبنان، ط1، 1994 ص 76.

⁽⁵¹⁾ غاستون باشلار: الفكر العلمي الجديد، ترجمة: عادل العو، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت، ط4، 1996، ص 14.

⁽⁵²⁾ فاروق عبد المعطي: فيثاغورس فيلسوف علم الرياضة، دار الكتب العلمية، لبنان، ط1، 1994، ص 90

⁽⁵³⁾ نفس المرجع، ص 81.

⁽⁵⁴⁾ R. Blanché : Op.cit , p18.

فيعتبرون البديهيات تطبيقات مباشرة لقواعد المنطق، ولهذا في نظرهم لا تعدو أن تكون سوى قضايا مشتقة من مبدأي الهوية وعدم التناقض وهو ما أكسبها صفة الضرورة والعمومية.

ويرى بلانشي أن البديهية ليست قضية تحليلية بل هي تركيبية، فبديهيته "الكل أكبر من الجزء" ليست واضحة بذاتها بدليل أنها لا تنطبق إلا على المجموعات المتناهية، أما المجموعات اللامتناهية فهي غير صادقة، وهذا ما يعني أن العقل غير مجبر على تصديقها والتسليم بها تسليما كليا ومطلقا⁽⁵⁵⁾. أما المصادر فقد اعتمد إقليدس عليها في جهازه المنطقي بالإضافة إلى البديهيات، وهي أقل وضوحا فهي: "حقائق كلية وضرورية ناتجة عن المكان الفيزيقي، ولهذا فهي صادرة عن المادة، وقد سبب لها التجريبي غموضا وتعقيدا"⁽⁵⁶⁾، فالمسلمات إذن ناتجة عن التجربة التي كانت تمدها بالمصادقية والمشروعية وهذا ما جعل الرياضيون لا يشكون فيها خلال قرون عديدة، ولكن هذا لا يمنع من أن الكثيرين من شراح إقليدس قد لاحظوا وجود تداخل بينها، فإقليدس تعامل معها أحيانا كمسلمة وأحيانا يلجأ إلى الحدس ليضمن صدقها دون برهنة، وهذا ما نجده في المسلمة الخامسة الذي قبل بها دون برهنة، ليضمن برهنة القضايا اللاحقة انطلاقا من هذه المسلمة نفسها التي اعتبرها واضحة بذاتها.

إضافة إلى ما سبق فإن الباحثين توصلوا إلى أن إقليدس اعتمد على مصادر غير تلك التي صرح بها، كمصادرة التجانس التي تنص على أن المكان متجانس الأجزاء في جميع جهاته ومن خلال الشكل⁽⁵⁷⁾، كذلك عدم القدرة على البرهنة على المسلمة الخامسة بكل المساحة، مما يجعلها غير واضحة بذاتها كبقية المسلمات، وبالتالي يجب البرهنة عليها وهذا ما أحدث انقلابا جذريا في جميع المفاهيم الرياضية والتقليدية وظهور هندسات لا إقليدية خالفت مسلمات إقليدس. وفيما يخص التعريفات، فقد لوحظ أن إقليدس "لم يعرف الكثير من المفاهيم الرياضية التي كان يجب أن يتخذها كالمعرفات"⁽⁵⁸⁾ كالطول، والعرض، والبعد...

⁽⁵⁵⁾ *Ibid*, p19.

⁽⁵⁶⁾ كامل محمد عويضة: مرجع سابق، ص 90.

⁽⁵⁷⁾ *Rudolph Bkouche : Op.cit, p 16.*

⁽⁵⁸⁾ *R. Blanché : Op.cit, p21.*

بالإضافة إلى أن باسكال انتقد إقليدس لاستخدامه للتعريفات الاسمية حيث "استعمل أسماء غير معرفة من أجل تعريف أسماء و حدود في النسق كالنقطة والمستقيم" (59).

وفي الأخير نستنتج أن الأكسمة الإقليدية (إن صح هذا القول) ،هي مؤسسة على الخاصية التجريبية للموضوعات التي تدرسها،كما أنها مؤسسة على مجموعة من مبادئ (تعريفات، مسلمات، بديهيات)، والخاصية التجريبية تبرز بوضوح في البرهنة، حيث الاستدلال يقوم على الحدس الهندسي الذي يعكس الطابع التجريبي ولهذا اعتبرت هندسة إقليدس وصفا للواقع. بالإضافة إلى أن التمييز بين مبادئ النسق لم يعد إشكالا مطروحا، لأن الرياضي لا يفرق بين البديهية والمصادرة بل يتعامل معهما على أساس أنهما أكسيومات. ولكن بالرغم من النقائص والعيوب الموجودة في نسق إقليدس لا يعني أبدا أن نتجاهل قيمته، وقيمة الاستدلال الهندسي فله الفضل في أكسمة الهندسة، وبناء الرياضيات في نسق رياضي متماسك.

ثانيا - المصادرة الخامسة والهندسات اللاإقليدية:

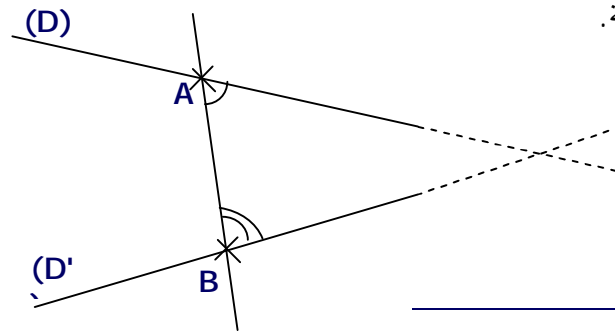
أ- تحليل المصادرة:

إن المصادرة الخامسة لإقليدس (والتي سبق ذكرها) هي من أشهر المبادئ الإقليدية، ويطلق عليها اسم "مسلمة التوازي". فإذا كان لدينا مستقيمان (D) و (D') ، فإن المستقيم الذي يقطع هذين المستقيمين (AB) يكون زوايا مائلة من نفس الجهة. ومجموع هذه الزوايا هو 180° (60)، (الشكل 1) ومنه:

• (D) و (D') متقاطعان.

• (D) و (D') يتجهان نحو نقطة تقع في نصف المستوى المحدد بـ (AB) ويحتوي

الزوايا الداخلية.

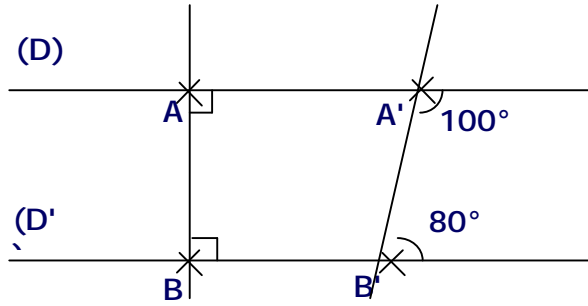


(59) Gilbert Arzac : *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie*, Aléas Irem, Lyon, 1998, p107.

(60) Paul Barbarin : *La géométrie non euclidienne*, Ed Jacques Gabay, Paris, 3^{me} édition, 1990, p6.

شكل 13: تقاطع (D) و (D')

فإذا كان مجموع الزوايا يساوي زاويتين قائمتين، فإن المستقيمين لن يكونا متقاطعين، بل متوازيان (الشكل 2):



شكل 14: توازي (D) و (D')

لقد حاول الرياضيون من يونان وعرب وأوربيين البرهنة عليها واختزلها إلى قضايا أبسط، ولكنهم لم يفلحوا ولم يستطيعوا البرهنة عليها، كما أنهم لم يستطيعوا الاستغناء عنها لأن ذلك يؤدي إلى انهيار الهندسة الإقليدية، ونتج عن هذه المحاولات استنتاج صيغ مكافئة لتلك الخاصة بإقليدس ومنها مسلمة التوازي ونصها: "من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد وواحد فقط مواز له"، وعلى أساس هذه المسلمة تم البرهنة على أن مجموع زوايا المثلث 180°.

ب - نشأة الهندسات اللاإقليدية:

" كل الأنظمة الهندسية التي تختلف عن النظام الهندسي الإقليدي هي عبارة عن هندسة لاإقليدية، وهي من وضع الرياضي غوس" (61)، هذه الأنظمة يقصد بها الهندسات اللاإقليدية (*géométrie non euclidiennes*) و المتمثلة في هندسة ريمان ولوباتشيفيكي، ولكن فيما بعد أضحى تطلق على كل هندسة خالفت هندسة إقليدس في مبادئها. وبداية "تاريخ الهندسات اللاإقليدية" كانت سنة 1733، وهي السنة التي نشر فيها "ساكيري" (*Saccheri 1667-167*)

(61) هانز رايشنباخ: نشأة الفلسفة العلمية، ترجمة فؤاد زكرياء، دار الوفاء لطباعة والنشر، الإسكندرية،

(1733) كتابه " إقليدس دون خطأ " عرض فيه التطور التاريخي للهندسات اللاإقليدية، فصنفه إلى ما قبل تاريخ الهندسات اللاإقليدية، وتاريخ الهندسات اللاإقليدية (62).

المرحلة الأولى: ما قبل التاريخ (*la préhistoire*) صنفها إلى مرحلتين: مرحلة ما قبل القرن 4م ، وفيها انصب الاهتمام على شرح كتاب إقليدس الأصول، مثل "أبرقلس" (*Proclus*) و"جيمنوس" (*60-10 Geminus*)، اللذان حاولا استنتاج المسلمة الخامسة من المسلمات الأخرى بإعادة تعريف التوازي، ومن خلال نظرية تساوي البعد، وقالوا بالمستقيمات المتوازية المتساوية (63).

بينما المرحلة الثانية تمتد من القرن 4 إلى القرن 14م، وهي الفترة التي شهدت تطور العلوم الإسلامية وخاصة الرياضيات التي ساهم العلماء المسلمون في تطويرها، وفيما يخص الهندسة، فقد برز الكثير من الرياضيين نذكر منهم عمر الخيام (1040-1131) الذي اهتم بشرح كتاب الأصول أو المبادئ لإقليدس، وقد ترجم كتابه هذا إلى الألمانية سنة 1912 من طرف "جاكوب و ويدمان" (*Jacob et Ewidemann*)، كما كانت هناك دراسة مقارنة قام بها سميت (*De .Smith*) حول نظرية عمر خيام و ساكيري سنة 1935 (64)، بالإضافة إلى نصير الدين الطوسي "الذي استخدم البرهان بالخلف للبرهنة على صحة المسلمة، وهذا من أجل إثبات استحالة بطلان المصادرة، مما يتضمن التأكيد على صحتها" (65)، وهذا ما جعل كتابه " شكل القطاع" يترجم إلى الكثير من اللغات، وبقي مرجعا لعلماء أوروبا قرونا طويلة يستقى منه في علم المثلثات، وكذا كتابه في مسألة التوازي: " الرسالة الشافية عن الشك في حدود المتوازية"، والذي طبع لأول مرة سنة 1941.

والبرهنة التي اعتمدها نصير الدين الطوسي اعتمدها بعده ساكيري، فقد كان هدفه إثبات صحة أكسيومات إقليدس عن طريق البرهان بالخلف، كي يستنتج تناقضا بافتراض خطأ مسلمة التوازي، فتحصل على نتائج غريبة التي أصبحت الآن أساس نظريات الهندسة الدائرية (كوجود المثلثات التي مجموع زواياها أكبر من قائمتين).

(62) K.Jaouiche : *la théorie des parallèles en pays d'islam*, J.Vrin, Paris, 1986, p 11.

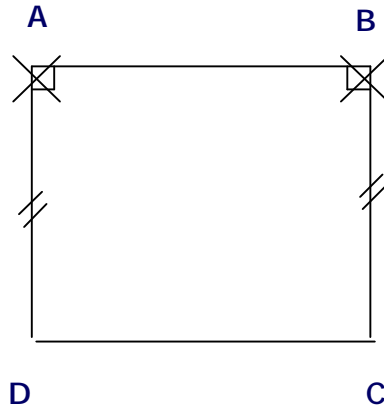
(63) Jean Dieudonné : *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1996, p419.

(64) K.Jaouiche : *Op.cit*, p 14.

(65) فدوي حافظ طوقان: العلوم عند العرب، دار القراءة، بيروت، ط2، 1983، ص 222.

أما المرحلة التاريخية فهي تمتد من القرن 14 حتى كتابته للمؤلف، ولكن فيما تتمثل إسهامات ساكيري؟ لقد توصل ساكيري إلى استقلالية المصادرة الخامسة بالنسبة للمصادر الأخرى معتمدا التحليل التالي:

في سطح مستوي، إذا كانت لدينا نقطتان A و B ، تكون نصف مستقيم (AD) وآخر (BC) عموديين على (AB) في نفس نصف مستوي، حيث $AD = BC$ ⁽⁶⁶⁾، (الشكل 15).



الشكل 15: توظيف المصادرة الخامسة في البرهنة على تساوي الزوايا

في هندسة إقليدس، يمكن أن نبرهن أن الزاويتين C و D في الرباعي $(ABCD)$ متساويتان، لكن البديهية الخامسة فقط لإقليدس هي التي تسمح فقط بالقول أنها زوايا قائمة⁽⁶⁷⁾. ماذا يحدث إذا تمّ رفض هذه المسلمة؟

يجيب ساكيري: إن السؤال المطروح هل مجموع زوايا C و D مساوية أو أكبر أو أصغر من الزاوية المستقيمة ومن تم وضع ثلاث فرضيات⁽⁶⁸⁾.

1 - فرضية الزاوية الحادة:

$C = D$ أقل من زاوية قائمة ومنه $C + D$ أقل من زاوية مستقيمة أي:

$$C = D < 90^\circ$$

$$C + D < 180^\circ$$

⁽⁶⁶⁾ Paul Barbarin : *Op.cit*, p20.

⁽⁶⁷⁾ Rudolf Bkouche : *Op.cit*, P 34.

⁽⁶⁸⁾ J. Paul Henner : *d'Euclide à Gauss, dans la Méridienne.*

<http://w.w.Uriv-orelans.fr/irem/groupes/epistemus/meridieme/templates/htm>

2- فرضية الزاوية القائمة:

$$C = D = 90^\circ$$

$$C + D = 180^\circ$$

3- فرضية الزاوية المنفرجة:

$$C = D > 90^\circ$$

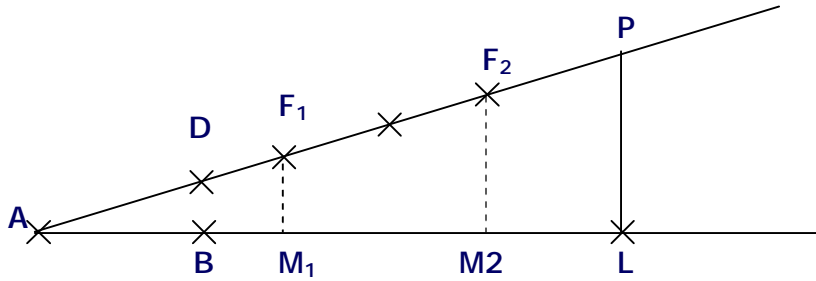
$$C + D > 180^\circ$$

فأما الفرضية الثانية هي صحيحة على أساس أن المسلمة الخامسة لأقليدس محققة، أما

فيما يخص الفرضية الثالثة قد برهن عليها من خلال بناء هندسي كالتالي:

إذا كان لدينا مستقيمان: (AL) ، (AD)

حيث (AL) يتعامد مع (AP) و (AD) ، (AB) يكونان زاوية حادة.



الشكل 16: البرهنة على الفرضية الزاوية المنفرجة

نضع:

$$AF_1 = 2AD$$

$$AF_2 = 4AD = 2F_1$$

ونرسم الخطوط المتعامدة:

(DB) ، (F_1M_1) ، (F_2M_2) ... على (AP) .

مما سبق، نستنتج:

$$AM_1 = 2AB$$

$$AM_2 = 4AB = 2AM_1$$

$$AM_N = 2^n AB$$

، ومنه من أجل (n) لدينا: $AM_N > AP$

والمتعامد (PL) الذي يقطع الضلع (AM_n) من المثلث $AM_n F_n$ يجب أيضا أن يقطع

الوتر AF_n : المستقيمان (LP) و (AD) هما متقاطعان وغير متعامدين ولذا فساكيري، أبعد

فرضية الزاوية المنفرجة. و أخيرا فرضية الزاوية الحادة هي خاطئة فهي تحطم ذاتها بذاتها.

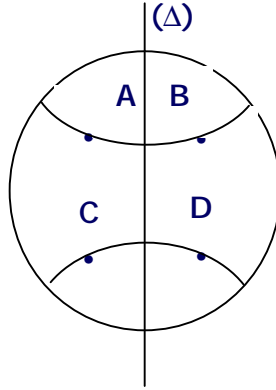
ومن التحليل السابق :

1- الفرضية الأولى الخاصة بالزاوية الحادة:

لقد اعتمد ساكيري " على شكل هندسي (الشكل 17) اعتمد فيه على مستقيم عمودي وخط

مائل لمستقيم لا يتقاطعان. وبيّن أن المستقيمين هما إما:

- متقاطعان.
- لهما نفس العمود.
- متماثلان.



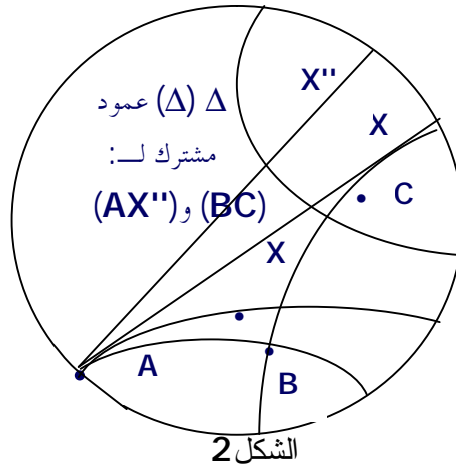
الشكل 17: البرهنة على فرضية الزاوية الحادة (ساكيري)

فالمستقيم (D) هو عمود مشترك لـ (AB) و (CD). وفي هذه البرهنة، اعتمد ساكيري على خصائص هندسية لإقليدية (الهندسة الزائدية *Hyperbolique* وهي التي تطرق إليها لوباتشفسكي لاحقاً):

إذا كانت لدينا قطعة [AB]، توجد زاوية *BAX* تحقق الخصائص التالية (الشكل 18):

- (AX) لا تتقاطع مع العمود (BC) على (AB) في النقطة B.
- كل مسائل (AX') موجودة في الزاوية *BAX*، تتقاطع مع العمود BC.
- كل مائل (AX'') مكوناً زاوية حادة أكبر من *BAX* مع (AB) له عمود مشترك مع (BC).

وهنا يتوقف ساكيري عن البرهنة وتوصل إلى دحض فرضية الزاوية الحادة، فهي خاطئة لأنها رفضت طبيعة المستقيم، ومنه فالمصادرة الخامسة لإقليدس هي الصحيحة.



الشكل 18: تمثيل الهندسة الزائدية

بالإضافة إلى ساكيري، نجد مساهمات "لومبار" (1728-1777 Lambert) حيث أنه توصل إلى قضايا مخالفة لنسق إقليدس، فإذا كان ساكيري اعتبر الفرضيتين المخالفتين لمصادرة إقليدس غامضتين، فإن لومبار قد أكد عليهما و اعتبرهما بعيدتين عن الغموض والتناقض، وأنهما "محقتان في الأشكال الموضوعة في دوائر أو في دائرة ذات نصف قطر خيالي"⁽⁶⁹⁾، أما لوجندر (Legendre) فقد أكد على المصادرة الخامسة الإقليدية، ونتيجة " التحليل النقدي والبرهنة التي قام بها حدد مكان المصادرة الخامسة في النسق، واثبت أهميتها وكذا أهمية القضايا المكافئة كتساوي مستقيمين ومجموع زوايا المثلث"⁽⁷⁰⁾.

وعليه فإن ساكيري طور نتائج النظرية الخاصة بالزاوية الحادة، والزاوية المنفرجة، وقد كانت دراسته بداية لبناء صرح ولكن دون وعي منه أي دون قصد، أنتج مجالات لتأسيس هندسات مغايرة لهندسة إقليدس، ارتبطت بأسماء بولياي، لوباتشفسكي من جهة الزاوية الحادة، وريمان من جهة أخرى الزاوية المنفرجة⁽⁷¹⁾ وتوالت الدراسات مع رياضيين آخرين ساهموا أيضا في وضع الحجر الأساس للهندسة اللاإقليدية.

ج- من الهندسة الى الهندسات:

⁽⁶⁹⁾ René Taton : Histoire générale des sciences, La science contemporaine, le XIX siècle, Volume I, PUF, Paris, 1^{ere} ed, 1995, p30.

⁽⁷⁰⁾ Paul Barbarin : Op.cit.pp 8-30.

⁽⁷¹⁾ Jean Dieudonné : Op.cit, p 420.

نكرنا في العنصر السابق، أنه كانت هناك إسهامات ومحاولات من طرف الرياضيين، إلا أنهم لم يتوصلوا إلى بناء أنساق رياضية خاصة بهم، وعليه يمكن القول أن نتيجة إسهاماتهم تم تأسيس هندسات غير إقليدية .

1 - إثبات فرضية الزاوية الحادة:

1.1 الرياضي غوس:

يعتبر الرياضي غوس أول من تحقق من وجود هندسة لاإقليدية دون الوقوع في تناقض، وهو أول من صرح باستحالة البرهنة على مسلمة إقليدس⁽⁷²⁾، فقد أعلن سنة 1799 أن لديه مبادئ هندسة جديدة مؤسسة على فرضية وجود لاتناهي من المتوازيات تلتقي بمستقيم من خلال نقطة خارجية، فموقف غوس هو جريء وأكثر عمقا، إنه يفكر في المسألة التي شغلت باله كل حياته، ولكن لم ينشر حولها أي مقال... إن لديه المبادئ الخاصة بهندسة جديدة مؤسسة على فرضية وجود لاتناهي من المتوازيات لمستقيم من نقطة خارج المستقيم⁽⁷³⁾.

2.1 لوباتشفسكي:

إن أعمال "لوباتشفسكي" (*Lobatchevski* 1792-1856) هي الأولى التي أسست في الهندسة اللاإقليدية، والأولى التي تمّ طبعها ونشرها، وقد "اهتم بمشكلة التوازي منذ سنة 1815 ولكن لم يستطع إيجاد حل لهذه المشكلة، فغير طريقة التحليل، إذ في سنة 1825 وجهت أفكاره نحو هندسة مبنية على نفي المتوازي الوحيد⁽⁷⁴⁾ وهذا ما جعله يصدر المؤلفات التالية:

- في سنة 1830 نشر مقالا حول أسس الهندسة تطرق فيه إلى إبراز التطور الابدستيمولوجي للمنهج الأكسيومي: المكان، الامتداد، الجسم، المساحة، النقطة، الزاوية، والمستقيم وهي المصطلحات التي تبدأ منها الهندسة، والتي لم ترتبط بمفهوم واضح ودقيق⁽⁷⁵⁾، وغموض هذه المصطلحات راجع لكونها مجردة غير حسية، فلا نجد في الطبيعة الخارجية، مستقيما، أو خط منحنى أو مساحة.

(72) François Lurçat : *L'autorité de la science, Op.cit, p 149.*

(73) René Taton : *Op.cit, p30.*

(74) Paul Barbarin : *Op.cit. p10.*

(75) Jean Dieudonné : *Op.cit, p 422.*

- في سنة 1837 صرح بالهندسة التي توصل إليها وهي الهندسة الخيالية وهذا من خلال المؤلف " الهندسة الخيالية " أعلن فيه توصله للهندسة الدائرية.

- في سنة 1838 نشر كتابا: الأسس الجديدة للهندسة.

- بعدها بسنتين نشر كتابا آخر: أبحاث هندسية حول نظرية التوازي.

- وأخيرا سنة 1855 نشر كتابا عرض فيه النسق الكامل لهندسته، والتي هي هندسة لإقليدية بعنوان: (Pangeométrie) ، أكد من خلال هذا المؤلف عن هدفه المتمثل في تأسيس هندسة لأقليدية، تحليلية، وهذا ما يضمن لها الصدق كصدق الهندسة الإقليدية.

ولهذا فلوباتشفسكي من خلال مؤلفاته أثبت نفي المسلمة الإقليدية، أي أنه من نقطة خارج مستقيم، يمكن رسم عدد لامتناهي من المستقيمت المتوازية لهذا المستقيم، لهذا فقد اقترح أكسمة للهندسة تحول دون الرجوع إلى ما هو حسي أو حسي، فالهندسة إذن لم تعد مجرد نظرية تعكس العالم الخارجي، بل أصبحت أكسيومات مجردة بعيدة عن الواقع، وكيف لا وهو قد اقترح نموذجا جديدة للهندسة معيار صدقها عدم التناقض الداخلي لا الواقعي، وهندسته لا تقل أهمية عن الهندسة الإقليدية.

ويرى بوانكري أن استبدال مسلمة إقليدس والاستغناء عنها لتظهر هندسة جديدة يقول: " لو أمكن استنباط مصادرة إقليدس من البديهيات الأخرى للزم عن ذلك بدهاءة، وأنه إذا نفيناها وسلمنا ببقية البديهيات، لآل بنا ذلك إلى نتائج متناقضة، وكان تبعا لذلك استحالة تأسيس هندسة متناسقة مثل ذلك" (76)، وهذا يؤكد أن المصادرة الخامسة لإقليدس هي مستقلة عن المصادرات الأخرى. كما يرى أن الاختلاف بين الهندسية الإقليدية واللوباتشفسكية، يكمن في المبادئ وصيغة الفروض التي انطلق منها كل واحد، ولا يعني الاختلاف في النتائج عدم صدقها، فهي صادقة ما دامت لا تتناقض المبادئ مع النتائج، وهو ما يعرف بالصدق الصوري. والنتائج التي توصل إليها لوباتشفسكي لم تقبل في البداية، لكن بعد أن وضحتها وبين عدم تناقضها، أصبح هذا النسق معقولا وموازيا للنسق الأقليدي.

ومن المبادئ التي اعتمد عليها لوباتشفسكي:

- السطح مقعر.

(76) هنري بوانكري: العلم والفرض، ترجمة حمادي جاب الله، المنظمة العربية للترجمة، بيروت، 2002

- من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم أكثر من مستقيم موازيا له.

- مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين.

وهنا يمكن ملاحظة الفروق الموجودة بين النسق الإقليدي وهذا النسق من جهة، ومن جهة ثانية نلاحظ أن لوباتشفسكي قد تحقق من الفرضية الأولى التي وضعها ساكيري وهي أن الزاويتين $C + D$ أقل من 180° ، ومنه فقد أكد على فرضية الزاوية الحادة.

3.1 بولياي :

لقد بدأ الرياضي "بولياي" (*Bolyai* 1792-1856) البحث عن دليل للمسلمة الخاصة بإقليدس منذ 1820، ونظرا لأنه لم يستطع حل هذا الإشكال بعد ثلاث سنوات، بدأ بدراسة نتائج الأكسيوم المناقض، لكنه اندهش للنتائج التي توصل إليها والمتمثلة في الحصول على نسق منطقي متناسق كامل.

وقد توصل إلى هذه النتائج سنة 1823 ونشرها سنة 1832 في كتاب: محاولة تقديم العناصر الرياضية باللغة اللاتينية، وقد صنف هذا المؤلف إلى 3 مباحث⁽⁷⁷⁾:

1- الهندسة المطلقة المكونة من قضايا مبرهنة دون استخدام مسلمة التوازي ولا فرضية الزاوية الحادة.

2- الهندسة الإقليدية الناتجة عن فرضية الزاوية الحادة.

3- الهندسة الإقليدية الناتجة عن اعتماد مسلمة إقليدس.

وقد أخبر عنها زميل أبيه غوس الذي رد عليه بأنه: "توصل إلى هذه النتائج منذ 35 سنة ولكن لم يتم بنشرها"⁽⁷⁸⁾، ومن نتائج إسهامات بولياي تأسيسه مع لوباتشفسكي وغوس هندسة مغايرة لهندسة إقليدس في المبادئ ومنطق معا من حيث معيار الصدق. كما اتفق هؤلاء الثلاثة في بنائهم لنسق هندسي مغاير، على المفهوم السلبي للمسلمة، أي إذا كان إقليدس يقرّ في مسلمته أنه من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم إلا مستقيما واحدا، فإنهم أقرّوا بالضد، من نقطة خارج المستقيم يمكن رسم متوازيات عديدة.

2- إثبات فرضية الزاوية المنفرجة (ريمان):

⁽⁷⁷⁾ Jean Dieudonné : *Op.cit*, p 421.

⁽⁷⁸⁾ Paul Barbarin: *Op.cit*, p 11.

في مقال له بعنوان: "فرضيات تساعد على تأسيس الهندسة " ألقاه سنة 1854، قال ريمان "(1866-1826 Riemann)": "أن المكان الحقيقي ليس لامتناهيا ولكنه هو لا محدود، والمسافة بين نقطتين يمكن أن تصل إلى نهاية قصوى، ولهذا يمكن تأسيس هندسة مماثلة للهندسة الدائرية"⁽⁷⁹⁾. من هذه المقدمة، فإن ريمان، قدم هندسة مخالفة لهندسة إقليدس، وكذا لهندسة لوباتشفسكي وبولياي، فهندسته الجديدة هي كروية أو ما يعرف بالهندسة الناقصية (عكس الزائدية)، ومبادئ هندسته:

- المكان سطح كروي ودرجة الانحناء فيه أكبر من الصفر.
- الخط المستقيم لا يمتد إلى ما لا نهاية، وإنما هو متناه، لأنه دائري.
- لا مستقيمت متوازية للمستقيم (D).
- مجموع الزوايا لمثلث أكبر من 180°.

ونلاحظ من هذه المبادئ، أن ريمان قد أثبت الفرضية الثالثة التي قال بها ساكيري وهي أن مجموع الزوايا C و D هي أكبر من 180°، كما دحض المسلمة الثانية الإقليدية التي تنص على أنه يمكن مد المستقيم إلى ما لا نهاية، بالإضافة إلى كونه قد وضع مسلمة نقيضا للمسلمة الخاصة بالتوازي، فمن نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم أي مستقيم موازي له، وهذا لأن المستقيمت هي دوائر. وإذا كانت هذه النتائج قد خالفت نتائج إقليدس كما هو الشأن بالنسبة للهندسة السابقة، فإنها لا تقل أهمية ولا صدقا ولا اتساقا عن الأخرى، وذلك لكونها كذلك اعتمدت على الاتساق الداخلي والصدق الصوري. وهنا نشير إلى أن كفاييس لم يشر في أعماله إلى الرياضي هلمهولتز (*Helmholtz*) والذي أكد بدوره أن مجموع زوايا المثلث أكبر من قائمتين.

إذن إن محاولات الرياضيين من ساكيري إلى ريمان، أفرزت ثلاث هندسات كما أكد ذلك كفاييس⁽⁸⁰⁾:

- هندسة إقليدية.
- هندسة ذات انحناء موجب ثابت (الناقصية).
- هندسة ذات انحناء سالب ثابت (الزائدية).

⁽⁷⁹⁾ *Ibid*, p 13.

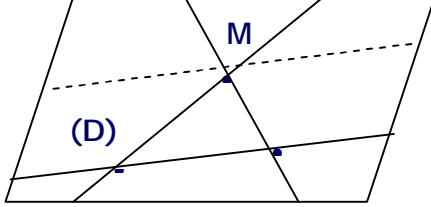
⁽⁸⁰⁾ *J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 62.*

فقد تعددت إذن الهندسات واختلفت من إقليدس إلى لوباتشفسكي إلى ريمان.

• هندسة إقليدس (الشكل 19):

- مجموع زوايا المثلث 180° .

- المكان مستوي.



المستقيم الوحيد المار من M هو

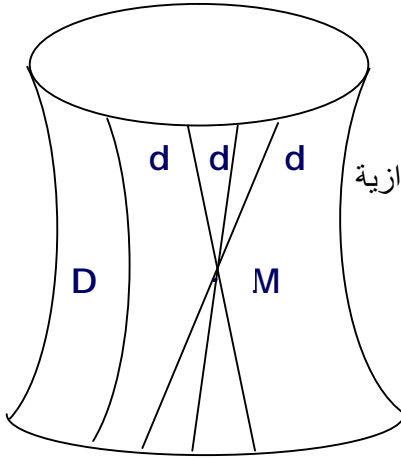
موازي لـ (D) .

الشكل 19: تمثيل هندسة إقليدس

• هندسة لوباتشفسكي (الشكل 20):

- مجموع الزوايا أقل من 180° .

- السطح شبه كروي (*Pseudo - Sphère*).



التي تمر من M هي موازية d_3, d_2, d_1

لـ (D) .

الشكل 20 : هندسة لوباتشفسكي

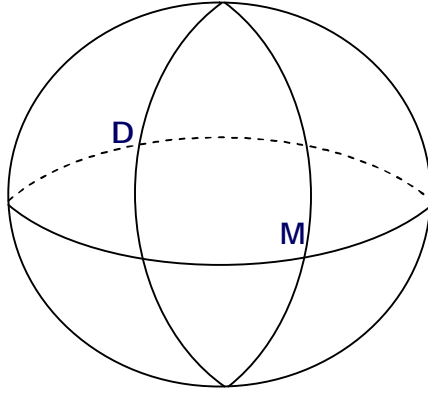
• هندسة ريمان (الشكل 21):

- مجموع زوايا المثلث أكبر من 180° .

- السطح كروي.

لا مستقيم يمر من M

- هو موازي لـ (D) .



الشكل 21: هندسة ريمان

مما سبق نستنتج :

- إن الأكسمة الإقليدية هي مؤسسة على الخاصية التجريبية للموضوعات التي تدرسها، كما أنها مؤسسة على مجموعة من مبادئ (تعريفات، مسلمات، بديهيات).
- الخاصية التجريبية تبرز بوضوح في البرهنة، حيث الاستدلال يقوم على الحدس الهندسي الذي يعكس الطابع التجريبي، و لهذا اعتبرت هندسة إقليدس وصفا للواقع، هذا الطابع التجريبي كان سببا في انتقادات الكثير من الرياضيين.
- تنوع النماذج أو الأنساق الهندسية و هذا راجع للتخلي عن فكرة تطابق المكان الهندسي و المكان الفيزيائي، هذا التطابق هو سبب وجود نقائص في الهندسة الإقليدية. فالهندسة تخلصت من طابعها الواقعي بعد ان كانت تجريبية و حقيقة عقلية.
- رفض وضوح المبادئ الرياضية فمن إقليدس إلى كانط مرورا بديكارت وباسكال، اعتبرت مبادئ الرياضيات حقائقا أولية، واضحة، و لهذا فان الهندسات اللاإقليدية أثبتت أنها ذات طابع فرضي. و لهذا لم يعد بالإمكان لتمييز بين المبادئ الرياضية على أساس أن بعضها أصدق من البعض الآخر، و إنما أصبحت مجرد فروض بالمعنى الرياضي للكلمة، أي أنها تكون خارج إطار التحقق.
- لم يعد الكائن الرياضي ذا طبيعة واحدة و إنما أصبح يستمد طبيعته من الدور الذي يلعبه داخل النسق و العلاقات التي يرتبط عن طريقها مع الكائنات الأخرى.

- الهندسات الثلاث وما أفرزتها من نتائج لا تعني خطأ الهندسة الإقليدية، فبقدر ما تعكس إمكان تعدد الأنساق وانتقال الفكر الرياضي من الوحدة إلى التعدد، وعليه فكلها صادقة، وكلها مشروعة، ومكنت الفكر من الانتقال من ما هو يقيني إلى النسبي، من هندسة تجريبية إلى هندسة صورية، و انتقل النسق الهندسي من نسق يقيني استنباطي، إلى نسق أكسيومي، فرضي، استنباطي.

الفصل الثالث

أكسمة الهندسة الإسقاطية

المبحث الأول : الهندسة الإسقاطية

المبحث الثاني : النسق الأكسيومي عند هلبرت

المبحث الثالث : المنهج الأكسيومي

إن الهندسات الثلاث السابقة افترضت تصورا مسبقا للمكان فهو إما مستوي أو مقعر، أو كروي، وهذا يعني أن مؤسسي هذه الهندسات تصوروا " الأشكال الهندسية بوصفها أشياء متحركة في المكان، وهذه الحركة ضرورية لتحقيق شرط قياس الزوايا والمسافات كالمطابقة، المساواة، الاستدارة، تبادل المواضيع... ولهذا أطلق على هذه الهندسات اسم الهندسات القياسية" (1).

ومنطقيا إذا ما تمّ تصنيف هذه الهندسات في زمرة الهندسات القياسية، فهذا يعني وجود هندسات لاقياسية، ويؤكد **كفاييس** " أنها هندسات تهدف إلى البرهنة على لاتناقض الهندسات اللاإقليدية والذي لا يمكن أن يتم إلا من خلال تطور الهندسة الإسقاطية (*projective*)، ولهذا فهذه الهندسة تسمح ببناء نماذج للهندسات اللاإقليدية (2). وعموما فإن الهندسات يمكن أن تصنف إلى ثلاث: الهندسة الوصفية (*géométrie descriptive*) والهندسة المترية (*géométrie métrique*) والهندسة الإسقاطية (*géométrie projective*)، وهذه الهندسات لا تتميز بموضوعها الذي هو واحد ولكن بأكسيوماتها ومبادئها الأولية، فهي تشترك في مفهوم أولي ألا وهو النقطة ثم بعدها يكون الاختلاف، فالإسقاطية أساسها مفهوم أولي ثانٍ والتمثل في المستقيم الإسقاطي أو اللامحدود وهي تؤسس على مجموعة من أكسيومات، كأسيوم الترتيب والاستمرارية، والتلاقي، وتعتبر هذه الهندسة حسب بعض الرياضيين "كل الهندسة" (3)، متجاهلين بذلك الهندسات الأخرى بالرغم من وجود علاقات بينها. وقد أكد كفاييس على المراحل الأساسية للهندسة الإسقاطية من خلال أعمال الرياضيين التالية ذكرهم في هذا المبحث.

(1) صلاح محمود عثمان محمد: الاتصال و اللاتناهي بين العلم و الفلسفة، منشأة المعارف،

الاسكندرية، 1998، ص 92.

(2) J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 63.

(3) *Petite Encyclopédie des mathématiques*, 1ere édition française, 1980, p782.

المبحث الأول: الهندسة الإسقاطية

أولا-المحاولات الأولى لهندسة نسقية:

إن المحاولات الأولى لتأسيس هندسة نسقية كانت مع الرياضي "ديزارغ" (1661-1591 Desargues) الذي توصل إلى الهندسة الإسقاطية، وصاغ بعضا من قوانينها من بينها قانون ديزارغ⁽⁴⁾، ويقوم بالربط بين مثلثين والمستقيمين المحددان لهما، وهو قانون مرتبط بالزمر التناظرية.

في الهندسة الإسقاطية معطى القانون كالتالي:

مثلثان ABC و $A'B'C'$ دون نقطة مشتركة

حيث: المستقيمتان (AA') ، (BB') ، (CC') هي متقاطعة

فإن نقاط تقاطع (AB) و $(A'B')$ ، (AC) و $(A'C')$ ، (BC) و $(B'C')$ تكون على مستقيم

واحد، ونقطة تقاطعها هي غير ذاتية (*impropre*).

لم يتطرق كفاييس إلى ديزارغ و هو بصدد الحديث عن الهندسة الإسقاطية واعتبر

بونسلي رائد الهندسة الإسقاطية.

أ - الإسقاط عند بونسلي:

تقوم الهندسة الإسقاطية التي أسسها "بونسلي" (1867-1788 Poncelet) "على

مبدأ الاتصال واكتشاف النقاط الخيالية للامتتاهي"⁽⁵⁾، وبأبحاثه وخاصة "بحث في الخصائص

الإسقاطية للأشكال" ميز بين خصائص الوضع (*position*) والخصائص المترية: فالأولى لا

تتغير أثناء الإسقاط كما أنها انفصلت عن الركيزة الحدسية، ومن تمّ تأسيس الهندسة

الإسقاطية التي تدرس "خصائص الأشكال التي لا تتغير عندما يحول شكلا بالإسقاط، ووسيلة

الإسقاط هو المستقيم اللامعروف"⁽⁶⁾ وهذا ما يؤكد دور هذا الخط المستقيم في هذه الهندسة،

كما يؤكد أن هذه الهندسة مؤسسة على مفهوم الخطية (*alignement*) أي أن مجموعة من

النقاط تنتمي إلى المستقيم الواحد.

⁽⁴⁾ Poncelet : *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris, 1822, p334.

⁽⁵⁾ Denis Vernant : *La philosophie mathématique de Bertrand Russel*, Op.cit, p 388.

⁽⁶⁾ Poncelet : *Op.cit*, p5.

ومن أهم مصادر الهندسة الإسقاطية⁽⁷⁾:

- النقاط تكون فئة.
- توجد على الأقل نقطة.
- إذا كانت a هي نقطة، أذن توجد نقطة أخرى مختلفة عن a .
- إذا كانت a و b نقطتين مختلفتين، فإن المستقيم ab هو فئة.
- إذا كانت a و b نقطتين مختلفتين، فإن المستقيم ab محتوي في المستقيم ba وهذا ما ينتج مباشرة تقاطعهما ومن ثم فهما متطابقان، ولهذا فالمستقيم الإسقاطي غير محدد.

ب - جرفون ومبدأ الثنائية:

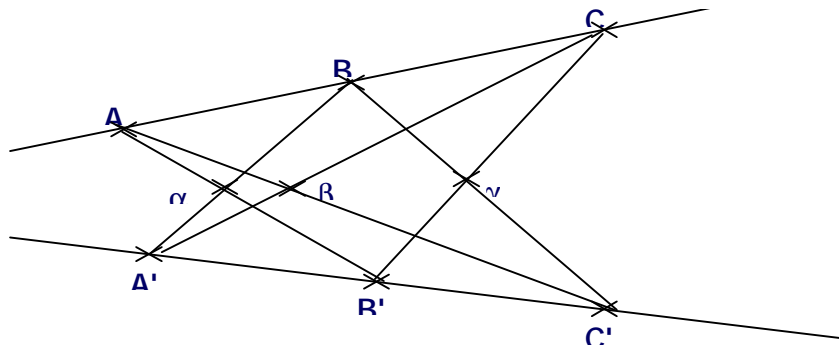
كما تطرق كفاييس إلى أعمال جرفون الذي صاغ مبدأ الثنائية (*principe de dualité*) وأصبح يطلق عليه اسم "مبدأ جرفون" والذي ينص على الثنائية أو التبعية الموجودة بين النقطة والمستقيم في مستوى، أو بين النقطة والمستوى في المكان⁽⁸⁾.
فالثنائية تكمن في أنه من نقطتين متميزتين يمرّ مستقيم واحد وواحد فقط وأن مستقيمين متميزين متوازيين يتقاطعان في نقطة واحدة فقط وهذا لن يتحقق إلا في الهندسة الإسقاطية حيث المتوازيان سيلتقيان في نقطة في اللامتناهي. و قد اعتمد جرفون في بنائه لهذه الهندسة على مجموعة من تقابلات (تناظر) تسمح باعتماد نظريات جديدة دون برهنة تقريبا، هذه التقابلات⁽⁹⁾ (الشكل 22):

- نقطة « مستقيم.
- مستقيم يمر من نقطة « من نقطة تنتمي إلى مستقيم.
- نقاط على نفس المستوى « مستقيمات متقاطعة.
- نقطة تقاطع مستقيمين « مستقيم مار من نقطتين.

⁽⁷⁾ Louis Couturat : *Les principes des mathématiques*, Georg Olms Verlag, New York, 1979, p 43

⁽⁸⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 63.

⁽⁹⁾ Gergonne : *Géométrie de situation. Double théorème de géométrie à trois dimensions*, annales des mathématiques pures et appliquées ,T 19, 1828-1829, pp116-117.



الشكل 22: التناظر بين النقاط والمستقيمات

فمبدأ التناظرية هو مبدأ التكافؤ الذي يسمح بترجمة نفس العلاقة المنطقية باختلاف الاتجاهات حسب النقطة⁽¹⁰⁾.

ج - الهندسة المجردة عند شازلز و كايلاي:

بالإضافة إلى من سبق ذكرهم، أشار **جان كفاييس** باختصار شديد إلى إسهامات "شازلز" (*Michel Chasles 1793-1880*) الذي اعتبر النقطة والمستقيم والأشكال الحسية حالات خاصة للنقاط والمستقيمات والأشكال المجردة المعرفة بخصائصها فقط ومؤسسة على تعقيدات الحسي⁽¹¹⁾.

"كايلاي" (*Arthur Cayley 1821-1895*) أكد على الهندسة الإسقاطية المترية، واعتبر الهندسة الإقليدية المترية حالة خاصة للهندسة الإسقاطية العامة، ويؤكد إمكانية تكوين داخل الدائرة نموذج هندسي مجرد⁽¹²⁾. ويرى كلاين أن الهندسة الإقليدية والإقليدية تمثل الحالات الخاصة من هندسة كايلاي.

ونشير إلى أن كفاييس لم يحلل بدقة إسهامات شازلز وكايلاي، قد يكون هذا راجع لعدم توفره على المادة العلمية الكافية، وإما لأنه رأى أن إسهاماتهما أشار إليها الرياضي كلاين.

د - الزمرة عند كلاين:

صرح كلاين أن الهندسة الإسقاطية هي وسيلة لعرض النتائج الرياضية للدراسات والأبحاث التي لها علاقة بنظرية التوازي في صورة جديدة وحديثة، وكذلك إضفاء على

⁽¹⁰⁾ *Arnauld Raymond : les principes de la logique et critique contemporaine, J Vrin,, Paris, p 218.*

⁽¹¹⁾ *Michel Chasles :Apercu historique sur l'origine sur l'origine et le développement des methodes en geometrie, Jacques Gabay, paris, 1989, p228.*

⁽¹²⁾ *Félix Klein :La géométrie dite non euclidienne, tr L Laugel ,Annales de la faculté des sciences de Toulouse, T11, N°4, 1897, p2.*

جملة الحقائق التي توصل إليه الرياضيون لوباتشفسكي، ريمان، بوليائي الوضوح والقبول⁽¹³⁾. وقد اعتمد في هندسته على "مفهوم البنية التي تسمح بتعريف وتحديد الخصائص الهندسية، فبالبنية إذن تتحول إلى موضوع النظرية، هي بنية محددة خاصة بنسق من العلاقات والمواضيع التقليدية التي اهتم بها الرياضيون: الشكل، العدد، الدالة تتحول إلى ثانوية، فما يهم إذن هو العلاقات الموجودة بين المواضيع والبرهنة ستقوم على هذه العلاقات⁽¹⁴⁾، فكلين إذن اقترح تحليلا بنيويا للنظريات الرياضية، واعتماده على مفهوم البنية أبعده عن الحدس.

وفي سنة 1872، أدخل مفهوم التساوي للتحويلات في المكان (*Isométrie*)، هذه التحويلات تحافظ على هويتها، أي أن مفهوم الهوية هو خاص بتحويلات الزمرة⁽¹⁵⁾، وقد توجد تحولات أخرى لا تغير الزوايا، فتكون زمرة أخرى أوسع، وهكذا، فالحديث عن الخصائص الجوهرية للهندسة يتم من خلال زمرة التحويلات. وقد عرض نسقه هذا في نص أطلق عليه اسم برنامج أرلنجن* (*Programme d'Erlangen*)، اقترح فيه "تعريف الهندسة الإسقاطية، وأكد على أن الزمرة الكبرى هي خاصة بها"⁽¹⁶⁾. وقد جعل كلين هذه الهندسة مستقلة عن مسلمة التوازي، كما أكد على "أن الهندسات الثلاثة: الزائدية (*Hyperboliques*)، الناقصية (*elliptiques*)، التكافئية (*Paraboliques*) وهي التي تأسست حسب تصورهما لنقطتين إلى ما لانهاية المستقيم، على التوالي إما أنها حقيقية و إما أنها خيالية و إما أنها متقاطعة"⁽¹⁷⁾.

ونتيجة تحليله للهندسات، اهتم في برنامجه بترتيبها كما يلي⁽¹⁸⁾:

- الهندسة الإسقاطية المشتقة من الهندسة التركيبية لـديزارغ وتدرس اللامتغيرات بالزمرة الإسقاطية للمتأخرات (*homographies*).

⁽¹³⁾ *Ibid*, p 1.

⁽¹⁴⁾ *Rudolf Bkouche : Euclide, Klein, Hilbert et les autres, Op.cit, p 44.*

⁽¹⁵⁾ *Maurice Meigne : Recherches sur une logique de la pensée créatrice en mathématiques, Albert Blanchard, Paris, 1964, p 79.*

* إيرلنجن اسم لمدينة ألمانية و أيضا اسم الجامعة التي درّس فيها كلين.

⁽¹⁶⁾ *Christian Gadin : La totalité, Op.cit, p 229.*

⁽¹⁷⁾ *Félix Klein : La géométrie dite non euclidienne, Op.cit, p5.*

⁽¹⁸⁾ *Jean-Louis Déotte : Appareils et formes de la sensibilité, L'Harmattan, Paris, 2005, p61.*

- الهندسة التآلفية (*affine*) وتدرس اللامتغيرات بالزمرة التآلفية، وقد وضعها كلاين في نفس مستوى الهندسات الإقليدية الزائدية أو التكافئية.

- الهندسة المترية تدرس اللامتغيرات بزمرة التكافؤ وقي توافق الهندسة التحليلية لديكارت.

- الهندسة الإقليدية تدرس اللامتغيرات بزمرة التحولات الصلبة (*rigide*).

ومما سبق فقد كان هدف كلاين من بناء هندسته التوحيد بين كل الهندسات التي ظهرت في القرن 19 واستخراج نقاط التماثل، وقد وافقه الرياضي بوانكري الذي أكد بدوره أن الهندسة تختزل إلى زمرة التحولات. فكلين إذن حاول تأسيس نسق القضايا الأساسية للهندسة الإسقاطية، حيث كل هندسة مترية يمكن أن تشتق منها بإضافة أكسيومات جديدة، كان هدفه أيضا " تأسيس نسق مرتب من الأكسيومات بالنسبة للهندسة الإسقاطية، ومنه من خلال إضافة أكسيومات أخرى، الهندسات المترية المختلفة يمكن أن تشتق منها "(19). ولكن إن كان كلاين لم يستطع تحقيق هذا الهدف بالدقة المطلوبة، فإن نفس الهدف قد حققه الرياضي باش الذي أعلن بالفعل عن تأسيس فعلي لأكسمة هندسية.

ثانيا-أكسمة الهندسة الإسقاطية:

" إن التأسيس الأكسيومي الأول للهندسة الإسقاطية كان مع "موريس باش" (*Moritz Pasch* 1843-1930)"⁽²⁰⁾ من خلال مؤلفه: " دروس حول هندسة جديدة " الذي نشره سنة 1882. وقد كان هذا التأسيس من خلال بناء نسق من الأكسيومات اختاره باش وكان يهدف منه إلى أن يكون أصغر مجموعة جزئية من مجموعة القضايا الهندسية، وكذا كل القضايا الأخرى يمكن أن نشق منه بواسطة الاستنتاج المنطقي.

أ- قواعد و مكونات النسق:

وضع باش مجموعة من القواعد لتأسيس النسق الأكسيومي الخاص بالهندسة الإقليدية:

1- أن نعلن بوضوح عن التصورات الأولية، والتي بواسطتها نعرف التصورات

الأخرى منطقيا.

⁽¹⁹⁾ Jacqueline Boniface : *Hilbert et la notion d'existence en mathématique, Op.cit, p 133.*

⁽²⁰⁾ Robert Blanché : *L'axiomatique, Op.cit , p 31.*

2- نعلن بوضوح عن القضايا الأساسية (المصادر) وبواسطتها نقتراح البرهنة منطقيا على قضايا أخرى (النظريات).

3- يجب أن تكون العلاقات بين الحدود الأولية علاقات منطقية خالصة، منفصلة عن المدلول الحسي للحدود.

4- يجب أن تتدخل هذه العلاقات فقط في البراهين بمعزل عن معاني الحدود.

هذه القضايا الأساسية يجب أن تظهر كعلاقات خالصة بين التصورات الأولية، فإذا كانت لدينا تصورات لا معرفة: النقطة، المستوى، المستقيم فإنه يمكن التصريح في الهندسة المستوية بهذه المصادر: " إذا كانت لدينا نقطتان من المستوى، فهما مجتمعتان في مستقيم محدد محتوي في المستوي" (21). وترجم هذه المصادر بالعلاقات المنطقية كالانتماء والاحتواء، فنقول نقطتين محتويتين في فئة المستوى، هما محتويتان كذلك في فئة المستقيم، والتي نقاطها هي كذلك نقاط المستوى وهو ما عبر عنه بالأكسيوم التالي: إذا كانت النقطة C تقع داخل القطعة AB فإن كل النقاط التي تقع داخل القطعة AC ، تقع بالضرورة داخل القطعة AB .

كما أضاف باش أكسيوم يعرف باسمه (أكسيوم باش) ونصه: "إذا كانت النقاط A, B, C, D على مستوى واحد، و F على المستقيم AB بين A و B ، فإن المستقيم DF يمر من نقطة من القطعة AC أو من نقطة من القطعة BC " (22).

فالحدود: نقاط، مستقيم، مستوى، تفقد خاصيتها الحدسية، الهندسية، فهي لا تشير إلا إلى المواضيع أو الفئات من المواضيع المحددة ببعض العلاقات. و هو المفهوم الذي أراد باش إعطاؤه للتصورات الأولية والمصادر الخاصة بالأكسيوماتيكا.

ب - شروط المصادر:

لقد حدد باش شروط المصادر:

- 1- يجب أن تكون متناسقة ومتسقة.
- 2- يجب أن تكون مستقلة، بحيث لا يمكن أن نستنتج إحداها من الأخرى، وإلا سنقع في تكرار.

(21) Arnold Raymond : *Op.cit*, p 219.

(22) Evelyne Le Rest : « Il faut que j'y songe encore » (les axiomes de la géométrie), dans la rigueur et le calcul, Cedic-Nathan Paris, 1982, p 149.

3- أما عن الأكسيومات فيجب أن تكون " مقترحة من التجربة، لكن إذا ما تمّ اختيارها، فالبرهنة تكون دون الرجوع إلى التجربة ولا إلى الدلالة الفيزيائية للتصورات"⁽²³⁾. ولهذا ومما سبق، فالهندسة " كي تكون علما حقيقيا استنتاجيا، فالطريقة التي نستمد منها النتائج يجب أن تكون مستقلة عن دلالة التصورات والتمثلات الهندسية، فما هو مهم هي العلاقات والروابط بين التصورات الهندسية المحتواة في القضايا والتعاريف"⁽²⁴⁾، فدلالة ومعاني التصورات غير ضرورية عند البرهنة والقيام بعملية الاستنتاج المنطقي، وإن كانت ضرورية فإنها ستؤدي إلى أخطاء، فلا يجب إذن النظر إلى المستقيم من حيث طبيعته أو دلالاته أو تمثله الهندسي.

لكن نلاحظ أن باش قد ألح على ضرورة إبعاد الجانب الحسي عن التصورات، إلا أننا نلاحظ أنه من الصعوبة تجريبها من هذا الجانب، وخاصة أن باش يؤكد أنها مستمدة من التجربة ومن العالم الخارجي، وأن الأخير هو الذي يملئ هذه التصورات فكيف يستطيع الرياضي أن يتعامل معها دون جانب حسي أو مجردة كلياً. لهذا فإن إصرار باش على أن تكون التجربة مصدر التصورات يشعرنا أنه ذو نزعة تجريبية (فلسفياً) من جهة، ومن جهة ثانية فرض الحصار على التقنيات الرياضية، ففي الواقع الأكسيومات التي تعتمد على تصورات حسية لا يمكن إلا أن تكون مفاهيمها مطابقة للعالم الخارجي.

وكما يرى **كفاييس** فإن باش طور ما يعرف بأكسمة الهندسة النهائية على أساس أنه يعرف المستقيم بأنه مجموعة من نقاط متناهية⁽²⁵⁾، ولهذا فلا يمكن للتصور المتناهي أن يؤسس للهندسة الإسقاطية التي تتطلب اللاتناهي، من كل الجهات.

علاوة على ما سبق، فقد ربط باش بين مفهوم النقطة و العدد الحقيقي، فلكل عدد حقيقي تقابله نقطة رياضية، والحديث عن الأعداد الحقيقية في هندسة باش كما يرى **كفاييس**، أفقدها الدقة والتحديد فيقول: " إن ترجمة الأشكال إلى أعداد والعودة إلى نتائج حساب الأشكال لا يمكنه أن يتم بنفس الدقة"⁽²⁶⁾. فأين الوعد المتمثل في أنه لن يتم الرجوع إلى الحدس في هندسة استنتاجية؟ فأكسمة بأرضية تجريبية تكون معرضة للفشل، ولهذا كان يجب أتساء

⁽²³⁾ Jean Dieudonné : *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Op.cit, p 427.

⁽²⁴⁾ Nicolas Bouleau : *philosophie des mathématiques et de la modélisation*, Op.cit, p 43.

⁽²⁵⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 65.

⁽²⁶⁾ *Ibid*, p66.

أكسمة الهندسة الابتعاد عن الأعداد كليا لتعريف المواضيع الهندسية، والتجاوز الفعلي للتجربة.

المبحث الثاني: النسق الأكسيومي عند هيلبرت

نشر هيلبرت (*Hilbert 1862-1943*) مقالا بعنوان: "أسس الهندسة" سنة 1899، عرض فيه مثالا عن النسق الأكسيومي، وأكد فيه: "الهندسة مثل علم الحساب تشتت الانتقال من عدد صغير من القضايا الأولية البسيطة، وهي عبارة عن أكسيومات الهندسة" (27).

أولا - أكسيومات النسق الهلبرتي:

أ- عرض الاكسيومات:

صنف هيلبرت في مقاله السابق الذكر الأكسيومات إلى خمس مجموعات:

I - التلاقي.

II - الترتيب (التوزيع).

III - الأطوال.

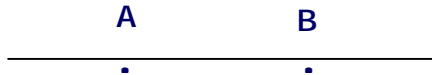
IV - التوازي.

V - الاستمرارية.

I - أكسيومات التلاقي (*Incidence*) الانتماء والاحتواء:

وتحدد الروابط بين النقاط والمستقيمت والمستويات وهي:

1- من نقطتين متميزتين يمر على الأقل مستقيما ونكتب: $a = AB$ أو $a = BA$



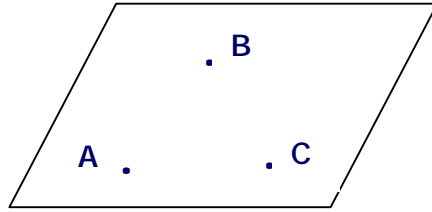
الشكل 23: أكسيوم I خاص بالتلاقي

يوجد مستقيم واحد الذي يمر من نقطتين.

2- إذا كانت لدينا ثلاث نقاط ليسوا على استقامة واحدة يقابل مستوي، والمستوي

يحتوي على الأقل على نقطة، فإن $\mu = ABC$

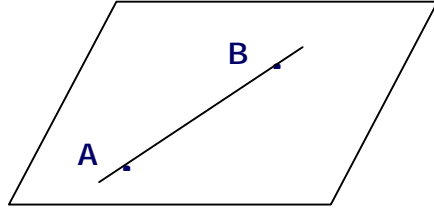
(27) *D.Hilbert : Les principes fondamentaux de la géométrie traduction L.Laugel, Gautier – Villars, Paris, 1900, p 7.*



الشكل 24: أكسيوم II - انتماء النقاط الى نفس المستوى

3- إذا كان مستقيم يمر من نقطتين A و B في مستوى μ ، فإن كل النقاط تكون في

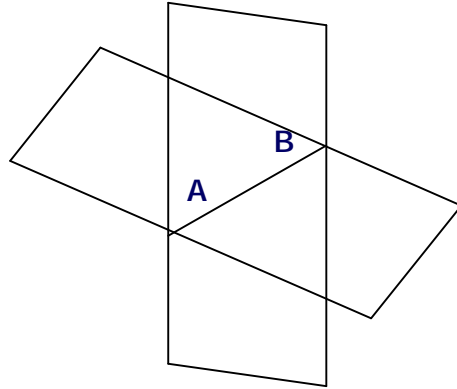
المستوى μ .



الشكل 25: أكسيوم III

4- مستويان μ و B لهما النقطة A مشتركة، فلهما على الأقل نقطة اشتراك

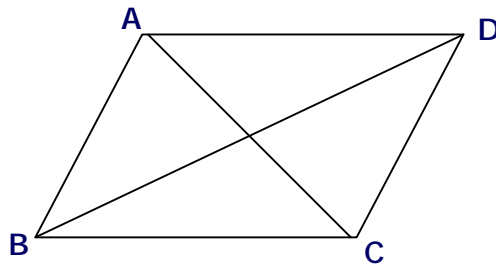
أخرى هي B .



الشكل 26: نقاط تقاطع مستويين

في كل المستوى، توجد على الأقل 3 نقاط غير مؤسدة على نفس المستقيم.

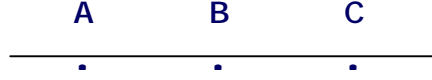
5- توجد على الأقل أربع نقاط لا تكون في نفس المستوى.



II - أكسيومات الترتيب (التوزيع):

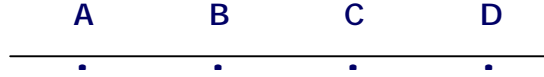
1- إذا كانت B نقطة بين (A, C) و A, B, C ثلاث نقاط من نفس المستقيم، فإن

B بين (A, C) .



2- إذا كان لدينا نقطتان A و C من مستقيم، توجد على الأقل نقطة B بين

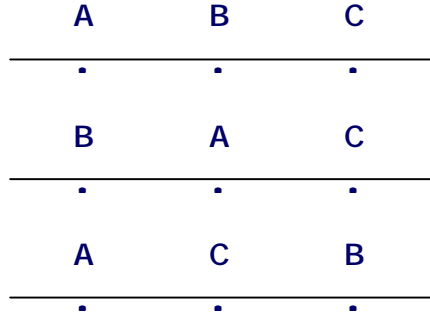
(A, C) وعلى الأقل D حيث C تكون بين (A, D) .



3- إذا كانت لدينا ثلاث نقاط على المستقيم، فتوجد نقطة واحدة بين الاثنتين

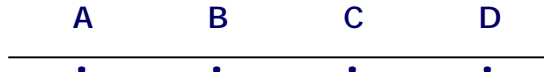
المتبقيتين: فإذا كانت لدينا A, B, C فقد تكون A بين (B, C) ، أو B بين (A, C) أو C بين

(A, B) .



4- إذا كانت لدينا أربع نقاط A, B, C, D من مستقيم يمكن أن توزع حيث: B بين (A, C)

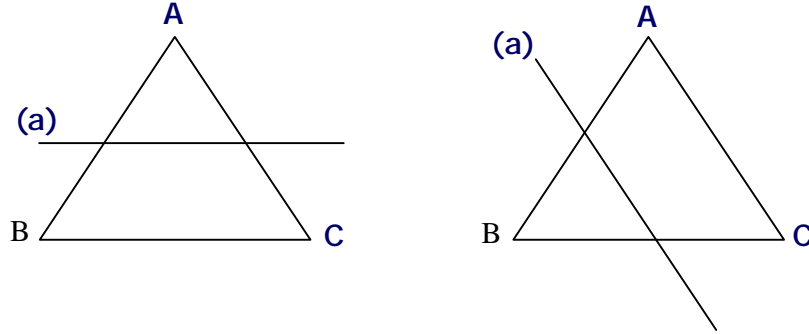
و A بين (B, C) ، وأيضا بين (A, D) و C بين (A, D) وأيضا بين (D, B) .



وقد ربط هذا الأكسيوم بالتعريف التالي:

الجزء المكون من نقطتين A و B على مستقيم يسمى قطعة، ورمزه AB أو BA والنقاط التي تقع بين A و B هي نقاط القطعة AB أو داخل القطعة AB ، والنقاط الأخرى للمستقيم a هي خارج القطعة AB والنقاط A و B هي أطراف القطعة AB (28).

5- إذا كانت A, B, C مثلثا، وإذا كان المستقيم (a) يقسم الضلع AB بين A و B ، فإن هذا المستقيم يقسم CA أو CB :



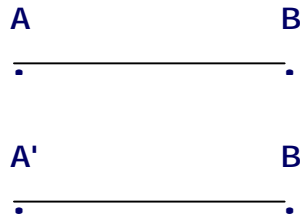
فهذه الأكسيومات تعرف الترتيب الخطي، والأكسيوم (4) يعرف الترتيب في المستوى، ونلاحظ أن هليبرت قد اعتمد على الأكسيوم الذي أضافه باش، وبفضل الترتيب والتوزيع يمكن رسم المستقيمت والمستويات، تعريف الزوايا (زوج المستقيمين). أكسيومات التساوي.

III - أكسيومات التقايس (Congruence):

وهي الأكسيومات التي يطلق عليها أيضا اسم الأطوال المتقايسة و تتمثل في:

1- إذا كانت A و B على مستقيم، و A' على مستقيم آخر، يمكن أن نحدد على المستقيم

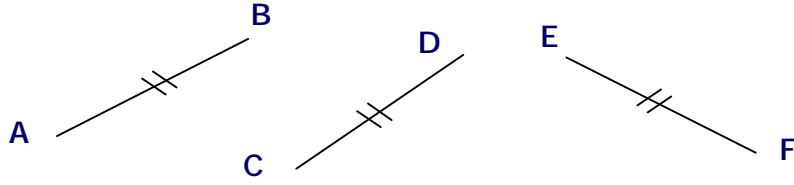
الثاني ومن نفس جهة B ، B' حيث: $A'B' = AB$



2- إذا كانت قطعتان متقايستين مع قطعة ثالثة، فهي متقايسة فيما بينها: $AB = CD$

$$CD = EF \text{ و } AB = EF$$

(28) Ibid, p 9.



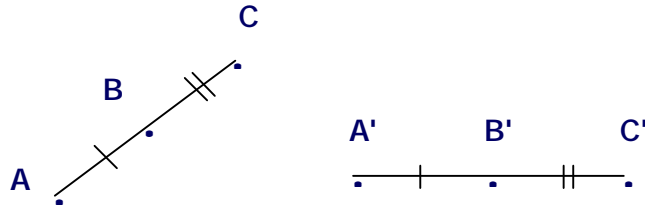
3- إذا كانت AB و BC قطعتين دون نقاط مشتركة وعلى نفس المستقيم، وإذا كانت

لدينا $A'B'$ و $B'C'$ على مستقيم آخر:

وإذا كانت: $AB = A'B'$

$$BC = B'C'$$

إذن $AC = A'C'$



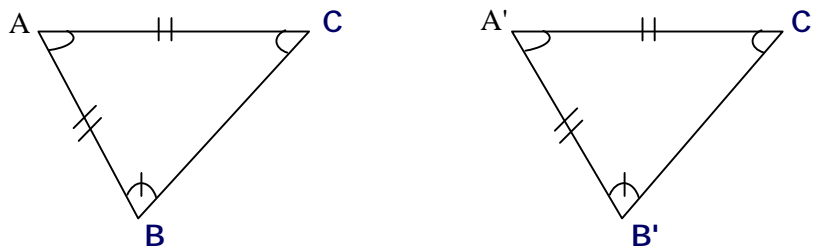
6- إذا كانت الزاوية (a,b) ، يمكن تكوين على المستقيم a' ، ومن نفس الجهة

بالنسبة لـ a ، الزاوية (a',b') ، حيث $(a',b') = (a,b)$.

7- إذا كان مثلثان، ABC و $A'B'C'$ حيث: $(AC) = (A'C')$

$$(AB) = (A'B')، (AC) = (A'C')$$

إذن: $(BC, BA) = (B'C', B'A')$ و $(CA, CB) = (C'A', C'B')$.



الشكل 27: تناظر مثلثين

IV - أكسيومات التوازي:

في مستوي μ يحتوي على مستقيم (a) ونقطة A خارجة عن μ ، يوجد مستقيم واحد فقط (D) يمر بـ A ولا يقطع (a) وهي المسلمة الخامسة الأقليدية، ولهذا فهو أكسيوم مستوي $(Planaire)$.

V - أكسيوم أرخمديس:

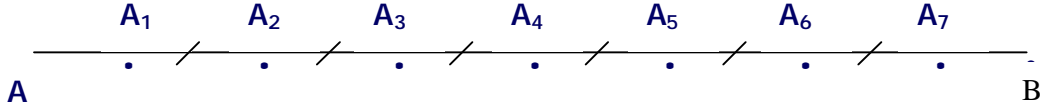
إذا كانت A_1 هي بين $(A$ و $B)$ ، A_1 بين $(A$ و $A_2)$ ، A_2 بين $(A_1$ و $A_3)$ ،

A_3 بين $(A_2$ و $A_4)$ ،... ولدينا:

$$(A, A_1) = (A_1, A_2)$$

$$(A_1, A_2) = (A_2, A_3) = (A_3, A_4) \dots$$

يوجد عدد طبيعي n حيث B يكون بين A_{n-1} و A_n .



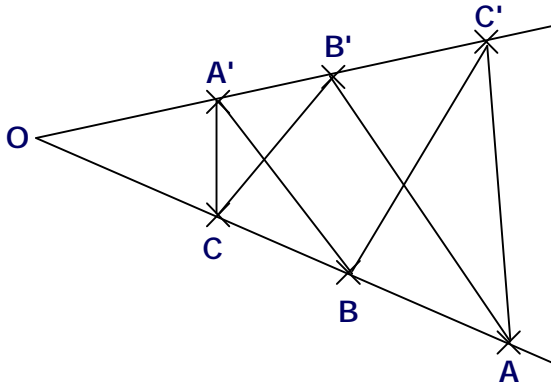
وهذا الأكسيوم أعلن عنه لأول مرة $O. Stolz$ ، وأعادته باش كأكسيوم **IV** وهلبرت

كأكسيوم **II** وهو خاص بالتواصل أو الاستمرارية.

وهو الذي عبر عنه باسكال بالصيغة التالية⁽²⁹⁾:

إذا كان لدينا: ABC و $A'B'C'$ مثلثين، وإذا كان CB' و CA' متوازيين على

التوالي مع BC' و $C'A$ ، إذن BA' موازي لـ $B'A$.



الشكل 28: أكسيوم أرخمديس

(29) Ibid, p24.

ب - تحليل الاكسيومات:

هلبرت بنى نسقه بالاعتماد على ثلاثة مفاهيم لا معرفة: النقطة، المستقيم، المستوى، كما استخدم أيضا بعض الروابط ك: تنتمي، بين، تساوي، على. فالمجموعة الأولى من الأكسيومات نجد فيها كلمة "على" نقطة على مستقيم، كما أن هذه المجموعة تحتوي على أكسيومين 1، 2، بالنسبة للنقاط والمستقيمتين، فهما أكسيومان لهما علاقة بالهندسة المستوية، هما مستويان من المجموعة 1، بينما الأكسيومات 3-7 نسميها الأكسيومات الفضائية⁽³⁰⁾.

المجموعة الثانية تحدد الترتيب بين النقاط باستخدام العلاقة "بين"، وتسمح بتوزيع النقاط على المستقيمتين. المجموعة الثالثة مكونة من الأكسيومات بنيت على أساس علاقة التقايس، سواء الخاصة بالقطع أو الزوايا. وضمنيا التقايس يتضمن الحديث عن المقدار والطول، المجموعة الرابعة هي المسلمة الخامسة الإقليدية.

أما المجموعة الخامسة، ففي الطبعة الأولى لكتابه "أسس الهندسة" هلبرت أشار فقط إلى أكسيوم أرخميدس لكن في الطبعة الثانية أضاف أكسيوما ثانيا في هذه المجموعة وهو أكسيوم التكامل (*Intégrité*) الذي يعبر على الخاصية اللامتدادية وفحواه: "مجموعة نقاط المستقيم الخاضعة لعلاقات الترتيب والتساوي، غير قابلة لأي امتداد، حيث العلاقات السابقة والخصائص الأساسية للترتيب الخطي، والتقايس المستنتج من الأكسيومات تكون ممكنة بل محققة"⁽³¹⁾. وهذا الأكسيوم يمكن أن نعبر عنه بصورة أخرى: إذا انطلقنا من نسق المواضيع التي تحقق الأكسيومات المذكورة سابقا، فمن المستحيل إضافة إلى هذا النسق موضوع آخر. وبالتالي أراد هلبرت بهذا الأكسيوم أن يحافظ على الخاصية الداخلية لأكسيمة المكان الهندسي كما ندرکه حدسيا.

ج - شروط وخصائص الأكسيومات:

يرى هلبرت أن الأكسيومات يجب أن يتوفر فيها شرطان:

- لا تناقض المقدمات فيما بينها، أي أنه من غير الممكن استنتاج قضية من برهنة منطقية تناقض أحد الأكسيومات.

⁽³⁰⁾ Ibid, p 25.

⁽³¹⁾ Ibid, p 8.

- استقلالية الأكسيومات بعضها عن بعض، وهذا ما يعني أنه من غير ممكن استنتاج أكسيوم من الأكسيومات الأخرى بواسطة البرهان، ويرى هلبيرت أن أكسيومات المجموعة I و II هي أساس أكسيومات المجموعات الأخرى، ولهذا يكفي البرهنة على أن أكسيومات المجموعات V, IV, III هي مستقلة⁽³²⁾.

فالأكسيومات التي وضعها هلبيرت غايتها تعريف المواضيع من خلال وصف علاقاتها، وذكر الخصائص المميزة لها. ولهذا فإن الأكسمة هند هلبيرت تميزت بخاصيتين:

- اعتمدت على نفس مبدأ الصورنة، على أساس أن القيام بهذه العملية يعني تعريف الإجراءات التي تطبق على المواضيع المجردة، من خلال تثبيت نسق من الرموز وقواعد العمل، فالنقطة والمستقيم والمستوى هي عبارة عن رموز تدل على المواضيع والعلاقات. ونفس الشيء بالنسبة للأكسمة فهي تقوم على تعريف العلاقات الخاصة بالمواضيع المجردة من خلال تثبيت نسق الرموز وقواعد العمل.

- في الأكسمة، الهندسة منفصلة عن تجربة المكان، إذ تقوم بتجريد المفاهيم من المحتوى الحدسي، ولهذا فطبيعة المواضيع أو العلاقات هي غير محددة.

وحسب هلبيرت أكسيومات المجموعة الأولى هي فقط التي منحت للنسق خاصية ثلاثية الأبعاد، أما إذا تم حذف هذه الأكسيومات، والإبقاء على الأخرى دون تغيير، فإنه يتم الحصول على هندسة مستوية.

ولهذا نلخص إلى أن هلبيرت وضع مجموعة من الأكسيومات ثم ميز بين الأكسيومات المستوية (*planaires*) أو الخطية وهي أكسيومات المجموعات V, IV, III, II والأكسيوم 1، 2 من I، والأكسيومات الفضائية (*Spatiales*) هي أكسيومات 3-7 من المجموعة I.

ثانيا - الهندسة الفضائية و الهندسة المستوية:

في مقال "أسس الهندسة" اقترح هلبيرت دراسة دور الأكسيومات الفضائية، ولهذا أراد أن يبين أهمية الهندسة الفضائية بالنسبة للهندسة المستوية. فهل تضيف الأكسيومات الفضائية

⁽³²⁾ Ibid, p 26.

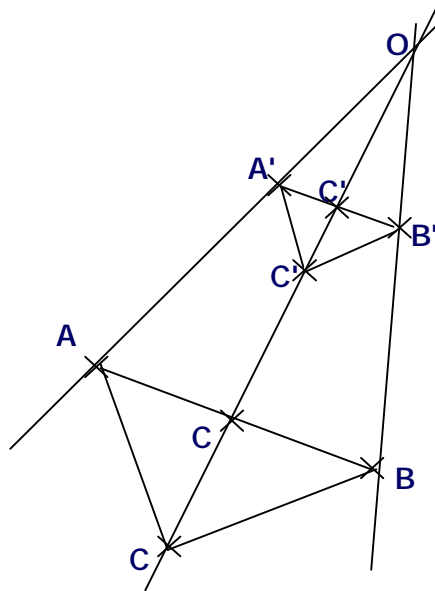
نظريات إلى المستوى؟ وللإجابة على هذه التساؤلات، اعتمد هلبرت على نظرية الرياضي ديزارغ.

أ- الحساب الديزارغي:

لقد أشار هلبرت في مقاله حول أسس الهندسة إلى رياضيين هما: باسكال ، وديزارغ، فباسكال اهتم بأزواج المستقيمات⁽³³⁾. أما ديزارغ فقد ركز على نظرية المثلثات المتناظرة وهذا للإجابة على التساؤلات المطروحة أعلاه، وقد عرض نظرية ديزارغ في المبحث الخامس من مؤلفه.

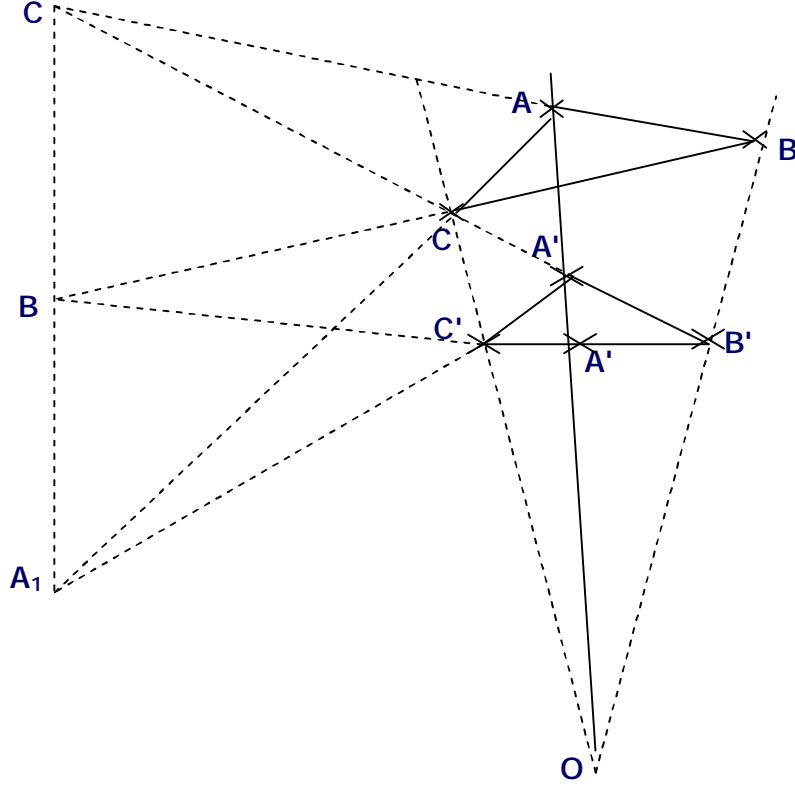
ونص النظرية أو القانون الديزارغي: مثلثان يقعان في مستوى حيث أضلاعهما المتقابلة تكون على التوالي متوازية (ش 29).

وبصيغة أخرى إذا كان مثلثان: ABC و $A'B'C'$ حيث (AA') ، (BB') ، (CC') تكون متقاطعة، ونقاط تقاطع الأضلاع المتقابلة تكون خط مستقيم (شكل 30).



الشكل 29: تناظر المثلثات عند ديزارغ الهندسة التآلفية

⁽³³⁾ Ibid, pages 36-47.



الشكل 30: قانون ديزارغ في الهندسة الإسقاطية

ويمكن صياغة النظرية كما يلي:

ABC و $A'B'C'$ مثلثان حيث (AA') , (BB') , (CC') هي متقاطعة.

نقاط تقاطع المستقيمات: (AB) , $(A'B')$

(AC) , $(A'C')$

(BC) , $(B'C')$ تكون على نفس المستقيم.

نظرية ديزارغ تطبق في الفضاء، أي بواسطة الأكسيومات الفضائية، فإذا كان المستوى

هو جزء من الفضاء، إذن نظرية ديزارغ صادقة، ولكن على العكس لو افترضنا أن نظرية

ديزارغ صادقة فهل هذا يعني أن المستوى جزء من الفضاء؟

أجاب هلبيرت أنه لو افترضنا صحة نظرية ديزارغ فإنه " يمكن تكوين انطلاقاً من المستوى فضاء يحقق الأكسيومات الخمسة الأخيرة من المجموعة I " (34)، ولهذا فهو " يعرض ما يعرف بالحساب المقطعي بمعزل عن أكسيوم التقاييس أو التساوي " (35).

ب - الحساب المقطعي:

1 - الجمع والجداء:

تعرف المقاطع من المستوى بإجراءات الجمع والجداء فإذا كان لدينا مستقيمان يتقاطعان في O ، ونقطتان E و E' على هذين المستقيمين حيث EE هي وحدة مستقيم تعريف جمع قطعتين a و b ، فإن (الشكل 31):

- القطعتين الموجودتين على المستقيم OE ابتداء من O ، تحددان نقطتين A و B .
- A' هي نقطة تقاطع OE' والمستقيم المتوازي EE' المار من A .
- A'' هي نقطة تقاطع المتوازي لـ OE المار من A' والمتوازي لـ OE' المار من

B

- نقطة تقاطع المستقيم OE والمتوازي لـ EE' المار من A'' .

لدينا : $OA' = OA$ ، $OE' = OE$

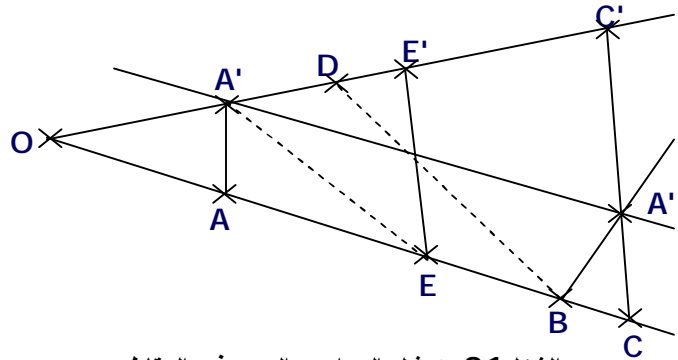
إذا كانت $OA = a$ ، $OB = b$ ، $OC = c$ ، إذن $a + b = c$

أي $OA + OB = OC$

هذا فيما يخص جمع قطعتين، أما بالنسبة لجداء قطعتين:

نضيف القضية التالية: D' هو تقاطع المستقيم OE' والمتوازي لـ EA' المار من B ،

والجداء: $a \cdot b = OD'$



الشكل 31: تمثيل الجداء و الجمع في المقاطع

(34) Ibid, p 63.

(35) Ibid, p 69.

هذا فيما يخص الجمع والجداء، كما تطرق هلبرت إلى الخاصية التبديلية والتجميعية للجمع في الحساب المقطعي الجديد.

2- التبديلية والتجمعية في الحساب المقطعي:

أكد هلبرت أنه يعتمد أثناء الحساب المقطعي على القواعد التي تكون محققة عندما ننطلق من الهندسة المستوية، أين الأксиومات I (1،2)، II، III تكون محققة وكذا نظرية ديزارغ⁽³⁶⁾.

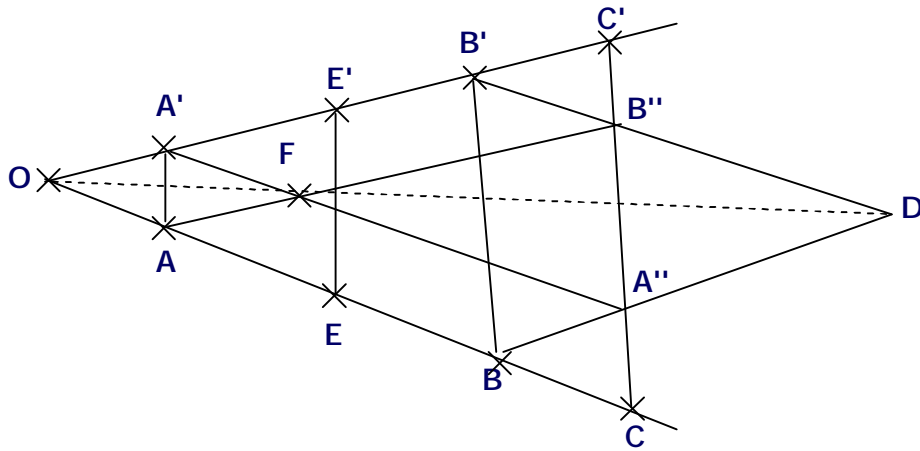
1.2 - الخاصية التبديلية في الجمع:

نبرهن أن: $a + b = b + a$ ، تكون محققة إذا كانت $a = OA$

نعمد الشكل السابق مع الإضافات التالية (الشكل 32):

$$b = OB$$

$$a + b = b + a$$



الشكل 32: الخاصية التبديلية الجمع بين المقاطع

⁽³⁶⁾ Ibid, p 71.

- $(AA'), (BB'), (EE')$ يوازيان
 - $(A'A''), (B'B''), (OA)$ يوازيان
 - $(AB''), (BA''), (OA')$ يوازيان
 - تقاطع (AB'') و $(A'A'')$ في النقطة F .
 - تقاطع BA'' و $B'B''$ في النقطة D .
 - في المثلثين $AA'F$ و $BB'D$ الأضلع المتقابلة هي متوازية.
- وبموجب نظرية ديزارغ نستنتج أن النقاط D, F, O هي على استقامة واحدة ومن ثم فإن المثلثين OAA' و $DB''A''$ حيث المستقيمت التي تربط رأسيهما (*Sommets*) المتماثلة، تمر من النقطة نفسها F . ومنه الأضلع متماثلة.

إن OA و DB'' وكذلك OA' و DA'' هي متوازية.

والجزء الثاني من النظرية يوفر لنا شرط توازي الضلعين المتبقين أي:

$$AA' = B''A'$$

2.2- الخاصية التجميعية في الجمع:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

للبرهنة على هذه الخاصية، يؤكد هلبرت أنه يكفي أن نتطرق من الخاصية السابقة،

ونثبت أن $A''B''$ يوازي EE' وهذا ما هو واضح وبديهي (الشكل السابق).

3.2 - الخاصية التجميعية للجداء:

$$a (b c) = (a b) c$$

إذا كانت لدينا القطع التالية على مستقيمين متقاطعين حيث (الشكل 33):

على المستقيم الأول: $OA = a, b = OC, C = OA'$

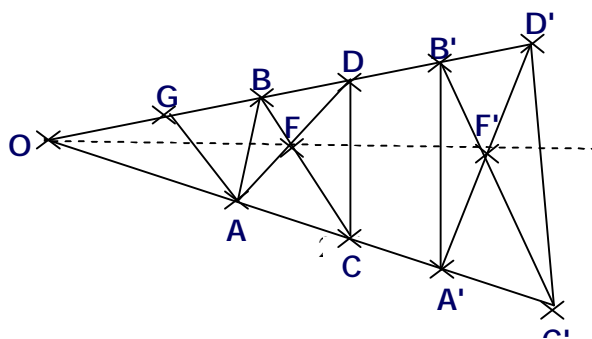
وعلى المستقيم الثاني: $a' = OG, b' = OB$

CD يوازي AG

$A'B'$ يوازي AB

$A'D'$ يوازي AD

$B'C'$ يوازي BC



الشكل 33: الخاصية التجميعية للجداء

من المعطيات السابقة، يجب إثبات أن CD يوازي $D'C'$ وهذا يكون من خلال التناظر بين ABF و $A'B'F'$ أضلعها المتقابلة متوازية، بموجب نظرية " ديزارغ "، والنقاط F, F', O على استقامة واحدة، إذن يوجد تناظر بين CDF و $C'D'F'$ ونستنتج من التقابل أن DC و $D'C'$ متوازيان.

ومما سبق نستنتج:

- أنه بتطبيق نظرية ديزارغ حاول هلبرت إثبات أن الجمع هو تبديلي وتجميعي، وأن الجداء هو تجميعي وتوزيعي بالنسبة للجمع. بينما نلاحظ أنه لم يثبت تبديلية الجداء، كما ان هذه الخاصية تكافئ أكسيوم أرخميدس (والذي تمّ التخلي عنه) أو الذي بدونه يقول هلبرت أنه يتحصل على نسق الديزارغي للأعداد، ولهذا تمّ تحديد البنية في المجرّد، فالنسق يجب أن يحقق الجمع والجداء، بخصائصهما التبديلية والتجميعية وكذا التوزيعية.

- أسس هلبرت نسق من الأعداد بواسطة القطع الهندسية، وهذا ما سمح له بتمثيل النقاط والمستقيمات للسطح المستوي، وتأسيس فضاء حيث ينضم إليه السطح السابق الذكر. فالنقطة يعبر عن إحداثياتها بالأعداد الديزارغية والمستقيم بالمعادلة الديزارغية. كما تمّ إقحام الأعداد في البرهنة الهلبرتية.

- كما عرّف الأعداد الديزارغية بواسطة المقطع في إطار النظرية الأكسيوماتيكية، وهذا خلافا لباش الذي عرف النقاط الرياضية بواسطة الأعداد الحقيقية.

- الحسابات المقطعية أوصلت هلبرت إلى معالجة الأعداد بصورة أكسيوماتيكية.
- إن قوة ودلالة الأكسيومات في النسق متعلقة بالإجراءات التي تشترطها وهذا ما جعل هلبرت يصنف الأكسيومات إلى خمس فئات.

- هلبرت أثبت بطريقة غير مباشرة، إن المنهج الأكسيوماتيكي لا يطبق على الهندسة فقط بل على الأعداد أيضا.

المبحث الثالث: المنهج الأكسيومي

تطرقنا فيما سبق إلى الاتجاه السوري و الأكسيومي، و أثناء الحديث عن أسس الهندسة استنتجنا أن المنهج الأكسيومي لا يجب أن يحرص في المجال الهندسي بل يجب أن يعمم على كل المجالات الرياضية وهذا ما أكده كفاييس بقوله "امتداد مجال تطبيق المنهج"⁽³⁷⁾. كما تم توضيح الاتجاه السوري، ووجود الاتجاهين معا دفع هلبرت إلى التوحيد بينهما في منهج واحد.

أولا - ضرورة المنهج الأكسيومي

إن المنهج الذي نريد الحديث عنه لا يخص مشكلة محددة، وإنما هو منهج التفكير الرياضي، فما هذا المنهج الخاص بالفكر الرياضي؟ هل الرياضي بحاجة إليه؟ إنه المنهج الأكسيومي الذي حاول في البداية تجنب البداهة والوضوح، الحدس، والتعريفات الساذجة، رفض إذن العودة إليها عن طريق وضع تصورات أولية وأكسيومات ينطلق منها الرياضي. وإذا ما تحدثنا عن الأكسيوماتيكية، مباشرة نتطرق إلى هلبرت إذ المنهج الأكسيومي ابتداء منه، " أصبح الطريق الأسهل لمعالجة ودراسة المسائل الرياضية"⁽³⁸⁾. ففي سنة 1899 شارك هلبرت في مؤتمر سنوي حول الرياضيات بموضوع "حول نظرية العدد" وهي المداخلة التي نشرت سنة 1900⁽³⁹⁾، عرض من خلاله آراءه حول أسس علم الحساب، وذلك بعد أن تطرق بالحديث إلى المنهج التكويني والمنهج الأكسيومي والمقارنة بينهما على أساس أن الأول يستخدم في علم الحساب، والثاني يستخدم في الهندسة، محاولا الوصول من خلال هذه المقارنة إلى تحديد أيهما أصلح لتأسيس الرياضيات.

حسب هلبرت المنهج التكويني يقوم أساسا على توسيع مفهوم العدد، فالأعداد السالبة تعرّف من خلال تطبيق مبدأ تعميم طرح الأعداد الموجبة (5 - 6 = 1-)، الأعداد الناطقة تعرف بتطبيق مبدأ تعميم القسمة على الأعداد الموجبة والسالبة، والأعداد الحقيقية هي عبارة عن تقطعات بين الأعداد الناطقة، فهو إذن منهج يهتم أساسا بتكوين أكبر قدر ممكن من الأعداد بالاعتماد على الأعداد التي تم تكوينها، ولذا فإن المنهج الأكسيومي هو عبارة عن

⁽³⁷⁾ J. Cavallès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p74.

⁽³⁸⁾ H.Sinaceur : *Corps et modèles sur l'histoire de l'algèbre réelle*, J.Vrin, 1991 P 185.

⁽³⁹⁾ J. Cavallès : *Méthode axiomatique et formalisme* ,Op.cit, p74.

" مفهوم عام للعدد الحقيقي والذي تمّ تكوينه من خلال الامتدادات المتتالية للمفهوم البسيط للعدد " (40).

أما المنهج الأكسيومي فهو يعرف الأعداد من خلال "العلاقات التي تعتمد عليها، وهو يقوم أساسا على إيجاد مجموعة من الأشياء، من المواضيع، تطبق عليها مجموعة من العلاقات التي يعرفها في أكسيومات معينة" (41)، فهو إذن عبارة عن نسق من المواضيع، بينها علاقات حددت بالأكسيومات، وفي هذا الإطار هلبرت لم يكن راضيا عن منهج التقطعات لأنه " يفترض مجموعة الأعداد الناطقة لتعريف العدد الحقيقي، ولهذا فهو يفضل تعريفا أكسيوميا للعدد الحقيقي" (42). فتعريف ديدكند لا يمدنا إلا بالثانوي، بينما التعريف بالأكسيوم يحدد ويميز التصور، ولهذا نستنتج مما سبق أن المنهج الأكسيومي هو أفضل وأولى من المنهج التكويني ويقرّ هلبرت هذا الحكم، لسببين:

- المنهج التكويني سبب الكثير من الصعوبات المنطقية إذ أن وجوده " ارتبط بحدوث الكثير من التناقضات المنطقية" (43)، بينما المنهج الأكسيومي خال من هذه الأخطاء، ومن الصعوبات ولا يمكن التشكيك في مصداقيته. فمن أجل تأسيس نظرية ما وإثبات مجموعة من مفاهيم لها علاقة بالنظرية، يكفي تأسيس نسق من الأكسيومات، مع التأكيد بأنها تحقق الخصائص المنطقية اللازمة حتى تكون بمعزل عن التناقض.

- إن المنهج الأكسيومي هو منهج منتج ومثمر وخصب، فضلا عن كونه يؤسس علم الحساب، لأن النظرية ممثلة بنسق من العلاقات يمكن أن تظهر في مجالات أخرى كالفيزياء...

ولذا فإن هلبرت جعل من المنهج الأكسيومي أساسا لتأسيس علم الحساب، ومن قبله فريجه أساسا لتأسيس المنطق، ديدكند وكانطور جعلاه أساسا لنظرية المجموعات. ونلمس موقف كفاييس من هلبرت من خلال قوله: " رأيي أنه رغم القيمة البيداغوجية والكشفية للمنهج التكويني، المنهج الأكسيومي هو الأفضل بالنسبة لتمثيل نهائي ودعم منطقي لمحتوى

(40) Jacqueline Boniface : Op.cit, p 200.

(41) D.Hilbert : Nouvelle fondation des mathématiques, Première communication, dans Largeault : Intuitionnisme et théorie de la démonstration, p 113.

(42) H.Sinaceur : Corps et modèles sur l'histoire de l'algèbre réelle, Op.cit, p 220.

(43) Hilbert: Nouvelle fondation des mathématiques, Op. cit, p113.

معرفتنا "(44)، ويدعم كفاييس موقفه بنظرية الأعداد الحقيقية التي تجنبت صعوبات وجود نسق من الأعداد الحقيقية وبصورة عامة المجموعات اللامتناهية، وهي الصعوبات التي تتكون باعتماد المنهج التكويني.

وإذا كان هلبرت قد عرف العلاقات بين الأشياء من خلال الأكسيومات، فإن كفاييس قد ترجم تلك العلاقات بالإجراءات، حيث يرى أن الأكسيومات عبارة عن إجراءات، عن أفعال (Gestes) يقول: "إنه من خلال الحكم المسبق الواقعي نهتم بالأشياء، ولكن ما يهم هو تتابع وتسلسل إثباتاتنا هو ما يحكم ويدير هذا التسلسل، هو معرفة النشاط الفكري "(45). وفضلا عما سبق يرى كفاييس أن النظرية هي عبارة عن تأسيس هيكل من التصورات يسمح بترتيب الأحداث، وتأسيس هذا الهيكل يتم من خلال بعض النظريات تكفي لكي تستنتج منها منطقيا ما تبقى من النظريات(46). وهذا يعني أن الرياضي ينطلق من بعض النظريات، ثم يستنتج بقية النظريات وقد تكون رياضية، أو لها علاقة بعلوم أخرى كالميكانيكا والفيزياء، كمعادلات لاقرانج في الميكانيكا، ونظرية الإشعاعات " لكيرشوف" (Gustav Robert Kirchhoff 1824-1887)، ومنه فإن المنهج الأكسيومي لا يسمح فقط بتأسيس الرياضيات، ولكن بتبرير تطبيقها الشامل في علوم الطبيعة، "وكل ما يكون موضوعا للفكر العلمي هو مرتبط مباشرة بالمنهج الأكسيومي ومنه فهو ينتمي إلى الرياضيات "(47)، فحسب هلبرت إن الصرح العلمي أو لنقل الخاص بالعلوم، والذي رسم وبني بالاعتماد على المنهج الأكسيوماتيكي تظهر الرياضيات فيه كموجه رئيسي، فلها إذن دور فعال في بناء هذا الصرح. ويعزز كفاييس رأي هلبرت حيث يرى أن الرياضيات الأكسيوماتيكية توصلنا إلى " تكوين ماهية الفكر العلمي "(48)، ولهذا فهو بطريقة غير مباشرة جعل من المنهج الأكسيومي وسيلة للتوحيد بين العلوم، وهذا إن دل على شيء فإنما يدل على " نجاح المنهج الأكسيومي في سنواته الأخيرة "(49).

(44) J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 76.*

(45) *Ibid, p 77.*

(46) *Idem.*

(47) D.Hilbert : *Méthode axiomatique, revue l'enseignement mathématique, Volume 20, 1918, p 136.*

(48) J. Cavaillès : *Méthode axiomatique, Op.cit, p 78.*

(49) *Ibid,p78.*

وقد ترتب عن تطبيق هذا المنهج تأسيس نظرية الأجسام عند ديدكند و"ستينتز"
(Ernest Steinitz 1871-1928)، وكذلك نظرية الفضاءات المجردة (الطوبولوجيا
العامة) عند فريشي (Maurice René Fréchet 1878-1973)، وهذا من خلال تعميم
مفهوم الفضاء⁽⁵⁰⁾.

وخلاصة لما سبق، نصل إلى أن الأكسمة هي نشاط فكري يتم داخل الرياضيات ذاتها
(الإجراءات الرياضية)، فهي تقوم بعزل وتصفية الطرق التي تكوّن مركز النظرية، ومن
خلال هذا العمل، تشارك في تطور وامتداد الرياضيات، وكون الرياضيات تفكر في ذاتها"
فهذا أحد محركات تطورها⁽⁵¹⁾، وبتعبير آخر من العوامل الأساسية التي ساعدت
الرياضيات على التطور، إنها إذن أحد سياقات التطور، أحد أنماط الفكر الرياضي ولا يمكن
التخلي عنها.

لكن سؤال آخر يطرح: تحت أي ظرف يمكن تأسيس الفكر الرياضي؟ بمعنى ما هي
الشروط التي يجب توفرها لكي يكون المنهج الأكسيومي خصبا ويؤدي وظيفته؟

ثانيا - خصائص المنهج الأكسيومي:

في 8 أوت 1900 اغتتم هلبرت الفرصة التي سنحت له في المؤتمر الدولي الثاني
للرياضيات في باريس، وعرض 23 مسألة توضح وتعبّر عن اتجاهه الرياضي المنطقي وقد
أطلق عليها اسم: "المسائل الرياضية".* وقد اختار هذه المسائل لاعتقاده بأن الرياضيات
ستتطور نتيجة الحلول المقدمة لهذه المسائل، فهي إذن "العلامة على أن التخصص مازال
حيا، وأن الباحث الذي يسعى إلى حلها سيحقق ربعا يتمثل في توسيع نظرتّه عن الذات
(Le sujet)⁽⁵²⁾. فهلبرت يرى أن البحث عن الحلول يؤدي إلى إيجاد حقول جديدة من
البحث، وبهذه الطريقة تتواصل الحياة، وقد دامت هذه المسائل أكثر من قرن، والرياضيون
يبدلون قصارى جهدهم من أجل إيجاد حل لها، فهو إذن قرن من الاكتشافات، وعدد كبير لا

⁽⁵⁰⁾ Albert Lautman : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, J.Vrin, 2006, p
69.

⁽⁵¹⁾ J. Cavailles : *Op.cit*, p 79.

* D.Hilbert : *problèmes mathématiques, revue l'enseignement mathématique, Vol 2,*
1900, pages 349-357.

⁽⁵²⁾ Jeremy J.Gray : *Le défi de Hilbert, un siècle de mathématique, Tr Christos*
Grammatikas, Dunod, 2003, p93.

يحصى من التطبيقات وخاصة في مجال الفيزياء. ومن بين المسائل التي طرحت في الملتقى
المسألة رقم 2⁽⁵³⁾ (مسألة علم الحساب):

هل يمكن أن نبرهن على قوة وتماسك علم الحساب؟

هل يمكن البرهنة على أن أكسيومات علم الحساب ليست متناقضة؟ ومن ثمة هل هي

مستقلة؟

إن الإجابة على هذه المسألة، يتضمن الحديث عن خصائص النسق الأكسيومي عند
هلبرت، إذ أنه يمكن استنتاج هذه الخصائص من خلال التساؤلات التي طرحها هلبرت،
وتتمثل في: اللاتناقض (عدم التناقض)، الاستقلالية، الكفاية أو التشبع.

أ- اللاتناقض:

إن اللاتناقض أو عدم التناقض مسألة منطقية مهمة في إقامة النسق الإقليدي، فالقضيتان
المتناقضتان لا يمكن أن تقبلتا في نسق واحد بعينه، لأن تناقض النسق يحطم ذاته ولهذا
تماسك النسق يعني لا تناقضه واللاتناقض: "هو استحالة استنتاج منطقيا من الأكسيومات
نتيجة تناقضها"⁽⁵⁴⁾، فالنسق هو متين ويقيني عندما لا يمكننا استنتاج من الأكسيومات قضية
تكون نفي لإحداها و" الأكسيومات هي متماسكة ويقينية، أي أن متتالية متناهية من
الاستنتاجات تنطلق من هذه الأكسيومات، لا يمكن أبدا أن تؤدي إلى تناقض "⁽⁵⁵⁾.

ففي مقاله " أسس الهندسة " برهن هلبرت على تماسك ويقينية الأنساق بعرض نماذج،
أثبت من خلالها أن التناقض في الأكسيومات يستلزم تناقضا في النظرية الذي ينتمي إليها
النمط (سواء كان رياضيا أو فيزيائيا أو فلكيا...)، ولهذا ففوة النسق يتحقق بقوة النظرية،
فمثلا " تناسق ويقينية الأكسيومات الخاصة بالهندسة دون أكسيوم التكامل هو مؤسس على
نمط الأعداد الجبرية الذي يحقق من طرف علم الحساب"⁽⁵⁶⁾، بينما " تناسق وقوة النسق بما
فيه أكسيوم التكامل هو مؤسس على نمط الأعداد الحقيقية والذي يتحقق بالتحليل وهذا ما يمهده
بأمن جزئي "⁽⁵⁷⁾.

⁽⁵³⁾ D.Hilbert : *problèmes mathématiques*, Op.cit, p 351.

⁽⁵⁴⁾ D.Hilbert : *Les principes fondamentaux de la géométrie*, Op.cit, p 26.

⁽⁵⁵⁾ Ibid,p26.

⁽⁵⁶⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 81.

⁽⁵⁷⁾ P.C Noguès : *De l'expérience mathématique*, Op.cit, p 99.

لتوضيح هذا الشرط قدم هلبرت في مقاله " مسائل رياضية " أمثلة سواء في الهندسة، في نظرية المجموعات، في الفيزياء لكي يبرهن على ضرورة لا تناقض الأكسيومات ومن ثمة التأكيد على اتساقها. ولتحقيق هذا الشرط يجب البرهنة على النظرية وعلى نقيضها في بناء النسق الأكسيومي، فكلما كان ذلك ممكنا كان هذا النسق متناقضا، غير أن هذا المعيار غير كاف بمفرده لمعرفة ما إذا كانت أوليات الأكسيومات متناقضة أو غير متناقضة، لأن النتائج والنظريات الموجودة في النسق غالبا ما تكون غير محددة، لذا من الصعب كما يقول الجابري " استنفاد جميع النتائج التي تسمح ببناء أكسيومي، الشيء الذي يترك احتمال الوقوع في تناقض احتمالا قائما⁽⁵⁸⁾. ولهذا فان مسألة عدم التناقض هي إحدى الصعوبات التي لم يستطع مؤيدو الأكسيوماتية التغلب عليها وقد" تؤدي إلى العودة إلى التجربة و إلى الحدس الحسي من خلال التأويلات المقدمة للنسق"⁽⁵⁹⁾.

ب - الاستقلالية:

إن أكسيومات النسق هي مستقلة، وتكون كذلك عندما "يعجز الرياضي عن استنتاج أي أكسيوم من الأكسيومات الأخرى بواسطة البراهين المنطقية"⁽⁶⁰⁾. يرى هلبرت أن أكسيومات المجموعات *IV, II, I* المختلفة، من السهل البرهنة على أنها كلها مستقلة. فالبرهنة على استقلالية الأكسيوم *A* عن مجموعة الأكسيومات *X*، تعود إلى يعني البرهنة على لا تناقض النسق الذي يحتوي الأكسيوم *A*، ولن يكون هناك أي خطأ منطقي.

وهناك علاقة وطيدة بين البرهنة على لاتناقض وتماسك النسق، وبراهين استقلالية الأكسيومات التي هي: " مهمة ليس فقط بالنسبة لجمال التمثيل، ولكن لفعالية النظرية ذاتها، فدراستها تقوم بالكشف على العلاقات المنطقية المخفية"⁽⁶¹⁾.

ولكي يعزز موقفه و يوضحه، استشهد **كفايس** بأعمال كل من "فابلن" (*Oswald*) و **Veblen** (1880-1960) الذي اهتم بأكسيومات الهندسة والترتيب و"هنتغتون" (*Edward Vermilye Huntington* 1874-1952)، الذي اهتم بأكسمة جبر

⁽⁵⁸⁾ محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة، مرجع سابق، ص 85.

⁽⁵⁹⁾ P.S Novikov : *Introduction à la logique mathématique*, Op.cit, p3.

⁽⁶⁰⁾ D Hilbert : *Les principes fondamentaux de la géométrie*, Op.cit, p 28.

⁽⁶¹⁾ J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 82.

المنطق⁽⁶²⁾، فكلاهما أكدوا على الاستقلالية المحددة و الدقيقة (*affinée*)، وهي وسيلة للتوصل في الهندسة إلى معطيات تحتوي على أقل قدر ممكن من الأجزاء المشتركة، يقول كفايس: "يجب من جهة أخرى التمييز بين استقلالية المعنى (*indépendance de sens*) واستقلالية الإثبات (*indépendance d'affirmation*): إن الأكسيوم يمكن أن يوضع دائما على شكل فرضية، حيث استقلالية المعنى يختص بالفرضية بينما استقلالية الإثبات بالنتيجة"⁽⁶³⁾.

ج - الكفاية أو التشبع:

إن استقلالية المعنى تسمح بتقديم منطقيًا مفهوم تشبع (*saturation*) النسق، "فبين كل الاحتمالات لعلاقة ذات حدين أو ثلاثة حدود، فإن دور كل أكسيوم لاحق هو أن يضع حدا (*une limitation*)⁽⁶⁴⁾. ويمكن أن يصاغ تعريف التشبع كما يلي: "إن النظرية هي متشعبة، إذا كانت كل قضية مصاغة في مفاهيم أساسية هي إما قابلة للبرهنة أو مرفوضة (مما يعني أن نفيها قابل للبرهنة) في النظرية"⁽⁶⁵⁾. وأثناء حديثه عن التشبع، تطرق كفايس إلى المطلقية (*catégoricité*)، فالنظرية تكون يقينية عندما تكون نماذجها متماثلة متكافئة (*Isomorphes*)، وتكون كذلك إذا كانت تحقق تقابل واحد بواحد (*bijection*)، التي تجعل الخصائص الموجودة في الأكسيومات ثابتة.

في كتاب "أسس الهندسة" لهلبرت خاصة التشبع لا تظهر بوضوح، لكن أكسيوم التمام يبدو أن وظيفته ضمان نوع من المطلقية وبمعنى أعم التشبع، وفابلن هو الذي أشار إلى المطلقية في مقابل "الأنساق الانفصالية (*disjonctifs*) التي يمكن أن نضيف أكسيوما مستقلا، وهنا نضطر إلى إخضاع أحد النماذج إلى الأكسيوم الجديد والنمط الثاني إلى نفيه، وهنا لن يكون هناك تكافؤ وهذا مستحيل"⁽⁶⁶⁾.

⁽⁶²⁾ Gilbert Hottois : *Penser la logique une introduction technique et théorique à la philosophie*, Op.cit, p17.

⁽⁶³⁾ J. Cavallès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 82.

⁽⁶⁴⁾ *Ibid*, p 83.

⁽⁶⁵⁾ *Ibid*,p83.

⁽⁶⁶⁾ *Ibid*,p84.

وعن علاقة المطلقة بالتشبع، فالأولى تؤدي إلى التشبع، لأن الأخيرة تلتقي مع استحالة التفرع، ولكن هذا لا يعني أيضا تطابقهما فهما منفصلان، وتاريخيا التشبع ظهر قبل الثانية وتكلم عنها هلبرت في مقاله: "حول تصور العدد" بإعطائه المعنى الثاني: "إن نسق الأكسيومات يكفي للبرهنة على كل القضايا الهندسية"⁽⁶⁷⁾ ولكن كما يقول كفايس لم يبين كيف يمكن البرهنة على صدقها وعلى تشبع الأكسيومات، بالرغم أنه ركز مطولا على اللاتناقض والاستقلالية. وعلى العكس فإن فابلن توصل إلى فكرة التمام من خلال مفهوم التعريف الشامل التام، والذي رد إليه هنتغتون أكسمة الأعداد الحقيقية، ومنه فقد قدم فابلن وسيلة لتبريرها من خلال نسقه.

وبهذا فلكي يكون المنهج الأكسيومي مشروعاً، يجب توفر الخصائص الثلاث السابقة الذكر. وكإجابة على السؤال المطروح أعلاه حول إمكانية البرهنة على لا تناقض واستقلالية الأكسيومات فقد قدم غودل سنة 1931 جواباً، وذلك من خلال نظريته الخاصة باللاتمام (*incomplétude*) أو النقص.

ثالثاً - هل الأكسمة كافية لتأسيس الرياضيات؟

من خلال عرض مكونات النسق الأكسيومي و شروط الأكسيومات، يجدر بنا أن نتساءل عن مصداقية هذا النسق و هل بالفعل يمكن الاعتماد في التأسيس للرياضيات؟ عرض كفايس مجموعة من ملاحظات تلخصها في النقاط التالية:

- إن الأكسيومات الهلبرتية اعتمدت على مجموعة من مفاهيم حسابية أولية (مثلاً توجد نقطتان على مستقيم، أربعة نقاط على مستوي...)، كما اعتمدت أيضاً على مفاهيم حسية، مفاهيم الوجود، الأشياء، تقابل (نقطتان تقابل مستقيم) و نأخذ كمثال: إذا كان لدينا نقطتان A و B على مستقيم واحد، توجد نقطة ثابتة C حيث B يكون بين A و C .

- الأكسمة هي بعدية أي تتأسس بعد تكوين النظرية، فهي لا تقوم إلا بتصفيتها مما هو حسي، لكن في حالة الجبر ونظرية المجموعات، فإن أكسيوم الاختيار هو الذي يخترع نظرية جديدة، و في هذه الحالة هي مجرد وصف لإجراء عرف من قبل في نظرية أوسع، وعليه فإن الأكسيومات لها وظيفة التعريف أو فقط وصف بعض المفاهيم التي

⁽⁶⁷⁾ Ibid, p 84.

تمّ الحصول عليها من نظرية ساذجة، ولهذا الرياضي يقوم بإدراج مفاهيم أخرى يُفترض أنها معلومة، ولهذا فإن الأكسيومات لا تُقدم إلا تعريفا للمفاهيم، الخصائص المميزة للعلاقات التي تكون بين الأشياء، لكن في هذه العبارات تظهر إلى جانب المفاهيم التي تهدف إلى تعريفها، مفاهيم كالعدد والمجموعة والدالة أُعيرت إلى نظريات أكثر بساطة، وهذه أيضا تم افتراضها في فترة الأكمة.

- الأكمة إذن تُرد إلى معطى النسق المزدوج: المعطى الخارجي للنسق يتمثل في مجموع التصورات التي أعارها الاهتمام بتعريفها في النظريات الأولية، والمعطى الداخلي للنسق ويتمثل في الوحدة الإجرائية التي تقوم بتميزه وتخصيصه.

والمنهج الأكسيومي إذن يجب أن يبطل مفعول هذا المعطى المزدوج، وإلا سيبقى تابعا للرياضيات الساذجة ولا يمكن إذن للرياضيات أن تُؤسس، ومن جهة أخرى لاسترجاع المعطى الخارجي، يجب أكمة الصرح الرياضي كاملا، وإذا كان كذلك وإذا كانت النظريات المؤسسة هي كذلك، وإذا كانت كل النظريات الرياضية هي أكسيوماتيكية، إذن المعطى الخارجي قد أعيد تكوينه من طرف المنهج الأكسيومي حيث النسق لا يرد إلى نظريات ساذجة بل إلى أنساق أخرى في الصرح الأكسيومي.

- الأكسيومات إذن هي مثل نواة تحدد طبيعة النسق وتسمح بالوصول إلى القضية أو نقيضها والنسق المشبع يحتوي على وحدة خاصة تختلف عن تلك الخاصة بالنظرية الساذجة ولا يمكن ردها إليها، وكنتيجة، يجب تحويل النسق الرياضي إلى تطابق الأنساق، حيث نبرهن على اللاتناقض والتشبع بينما استقلالية الأكسيومات أقل أهمية.

- إن التشبع يفرض نظرية للبرهنة، إذ يتعلق الأمر بإمكانية البرهنة على قضية ما أو نفيها، ولهذا يجب تحليل البراهين الممكنة في النسق، والبرهان الرياضي يجب أن يكون موضوعا لنظرية رياضية، كما هو الشأن بالنسبة لعالم الفلك أو الفيزيائي أو حتى الفلسفي الذي يهتم بنقد العقل، فيجب إذن تحليل البراهين الممكنة في النسق، وأن نبين أن لا برهان يؤدي إلى تناقض ولهذا فنظرية البرهنة تفرض ذاتها.

- وأخيرا فإن هلبرت سنة 1904، اعترف أن علم الحساب لا يمكن تأسيسه على المنطق، و قبل هذا العام وفي مقال "أسس الهندسة" أكد هلبرت أن المنهج المستعمل للبرهنة على التماسك في أسس الهندسة، لا ينطبق على علم الحساب، لأنه أولي ولا يمكن البرهنة

على لا تناقضه، فيقول هلبرت: " يجب هذه المرة الاعتماد على الطريق المباشر... أنا مقتنع بالنجاح... إذا ما طبقنا... المناهج... المعروفة لنظرية الأعداد اللاناطقة". فالمفاهيم المنطقية تفترض المفاهيم الرياضية، وخاصة العدد، ولكن على العكس الرياضيات تستخدم ومن ثم تفترض المنطق، إذن هما واحد، فيجب أن يتطورا (بالتوازي) وإعادة تعريفهما صوريا بواسطة أنساق الرموز والقواعد، وتأسيسهما بالعودة إلى نظرية البرهان.

- إن الحديث عن علاقة بل عن تطابق المنطق والرياضيات، يجعلنا نؤكد علاقة الصورنة بالأكسيوماتيكية، على أساس أن الأولى هي نقد البراهين والثانية هي نقد المبادئ العامة، كما أن الرموز تلعب دورا كبيرا في عملية الصورنة والأكسمة. فالإجراءات والمواضيع تمثل في نسق من الرموز، وهذا النسق يسمح باستنتاج مجموعة من القواعد، دون العودة إلى الحدس الحسي للمواضيع أو إلى القوانين الملازمة عن الفكر، كما أن الرموز لها أهميتها بالنسبة للتعبير عن القواعد المنطقية للبراهين.

الباب الثالث

الصورية الخالصة و المعدلة في الرياضيات

الفصل الأول :النسق الصوري وتطبيقاته في العلوم التجريدية

الفصل الثاني : الصورية الخالصة عند هلبرت

الفصل الثالث : الصورية المعدلة عند كفايس

إن ظهور الهندسات اللاإقليدية في القرن 19، أثبت أنه يمكن رفض إحدى المصادرات الخاصة بالنظرية الإقليدية دون الوقوع في تناقض، وهذا ما نتج عنه تغيير في طريقة وأسلوب البرهنة، فالأكسيومات لم تعد متفقة مع الواقع، والاستنتاجات لم تعد تابعة للحدس المكاني.ولهذا فالموضوع الرياضي لم يعد له علاقة بالواقع، هذا يعني أنه أصبح للرياضيات موضوعا جديدا، موضوعا خاصا بها، وفي هذا السياق ظهرت حركة جديدة هدفها تحقيق الدقة في البراهين وتعريف المواضيع بالتحديد، وقد ظهرت هذه الحركة في التحليل وفي الفروع الأخرى من الرياضيات،وهي الحركة الصورية التي تأسست مع ظهور المنهج الأكسيومي. بعد أن تطرق كفاييس بالتحليل للحدسانية و الأكسيوماتيكية و أهم الاتجاهات الصورية ،فقد خصص الباب الثالث من رسالته الأساسية لتحليل أهم إسهامات هلبرت و المتمثل في البرنامج الصوري خصائصه و مكوناته،كما أشار إلى الأنساق الصورية و هذا بعد أن عرض المبادئ العامة للنسق الصوري،فطبقه على المنطق الخاص بالقضايا و بالمحمول،و بعدها ركز على إسهام هلبرت الثاني و المتمثل في نظرية الأنماط عنده على غرار نظرية الأنماط عند راسل،ثم عرض قوانين عدم التناقض لغودل غزنن و هي القوانين التي استخدمت للاعتراض على الاتجاه الصوري.و بعد أن قام بعرض و تحليل و مناقشة الاتجاهات الثلاثة بصورة دقيقة ،أدلى بموقفه منها و البديل الذي جاء به فيما يخص أساس الرياضيات و كيفية تطورها .

الفصل الأول

النسق الصوري و تطبيقاته في العلوم التجريدية

المبحث الأول : البرنامج الصوري لهلبرت

المبحث الثاني : النسق الصوري و تطبيقه في المنطق

إن ما يميز بدايات المنطق الرياضي هو تأسيس نظرية البرهنة المتعلقة بمسألة الأسس، وهي المسألة الناتجة عن تطور التحليل الرياضي و وجود المفارقات في النظرية الأولية للمجموعات، و لحل هذه الإشكالية ظهرت ثلاثة اتجاهات: الأول التيار اللوجيستيني و الذي يمثلته فريجه و راسل اللذان يردان الرياضيات إلى المنطق، و الثاني الحدساني و يمثلته بروور و هيلبرت، و الثالث يتمثل في الحركة الصورية التي أسسها الرياضي الألماني هيلبرت، هذا الأخير رأى أن الوضعية الناجمة عن الصعوبات في نظرية المجموعات و الانتقادات الموجهة من طرف الحدسانيين هي غير مقبولة، ولهذا من الضروري و العاجل حل مسألة لاتناقض الرياضيات، و خاصة في علم الحساب و لهذا عرض برنامجه الخاص بالصورنة سنة 1904 ثم سنة 1926، هذا البرنامج يقوم باختزال الرياضيات إلى نسق أكسيومي صوري من حيث اللغة و الاستنتاج.

المبحث الأول: البرنامج الصوري لهيلبرت

إن هيلبرت هو متعدد التخصصات فهو عالم جبر و تحليل، و مختص في علم الحساب و الهندسة، لقد اهتم بكل الفروع الرياضية بالإضافة إلى المنطق الرياضي و فلسفة الرياضيات و الفيزياء⁽¹⁾، ففي 8 أوت 1900 اغتتم الفرصة التي منحت له من طرف المؤتمر الدولي للرياضيين في باريس، لعرض 23 مسألة توضح آراءه حول الرياضيات، وقد اختار هذا العدد من المسائل لأنه كان يظن أن الرياضيات تتقدم بحلها، فهي عبارة عن إشارة أو علامة لخصوبة وأهمية واستمرارية علم الرياضيات بصورة عامة، إذ كلما توصل الرياضي إلى حل مسألة، كلما تقدمت الرياضيات خطوة إلى الأمام⁽²⁾ و طبعاً هذه المسائل بتعبير هيلبرت تتفاوت في العمق وفي الصعوبة، ولكن يؤكد أنها قابلة للحل و غير مستحيلة، فهيلبرت إذن قدم تصوراً مستقبلياً للرياضيات (استشراف).

(1) Jean Dieudonné : David Hilbert (1862-1943), dans François Le Lionnais : Les grands courants de la pensée mathématique, Hermann, Paris, 1998, p293.

(2) Hilbert : Les fondements logiques des mathématiques, Op.cit, p 354.

وفي محاضرة ألقاها سنة 1904 حول البرهنة على عدم التناقض أكد أن "موضوع الفكر هو... الشيء الذي يرمز إليه بالإشارة"⁽³⁾، وهذا إن كان يدل على شيء فإنه يدل على أن هيلبرت أسس برنامجا على الإشارات وهذا ما أكده في موطن آخر بقوله: " في البداية كانت الإشارة، إنه القانون"⁽⁴⁾.

أولا - فلسفة الإشارة:

إن برنامج التأسيس للرياضيات كما أشرنا في الفصل السابق، حديث عن الصورة والحديث عن الصورة حديثا عن الإشارات والحديث عن الإشارات حديثا عن أنساق من رموز وقواعد العمل (*règles de emploi*)، القابلة للترجمة إلى النظريات والبراهين الخاصة بالرياضيات. والصورة حسب كفاييس تقوم بوظيفتين: أولاها عملية تعميم الحركات الصورية والأكسيوماتيكية للقرن 19، وثانيها هي مبررة بالتفكير في العمل الرياضي حسب ما جاء في نصوص هيلبرت، إذ أن هيلبرت بين أن الفكر يرفق بممارسة الإشارات، والتي تقوم الصورة بوضعها في نسق.

أ - مفهوم وأهمية الإشارة:

الرياضي لا يمكنه أبدا أن يتجنب الإشارات وألا يستخدمها، سواء أكانت رموزا تحليلية أو أشكالا هندسية. وقد قدم هيلبرت أمثلة حول مختلف فروع العلم: أعدادا عندما نكون عملية حسابية، إشارات جبرية كالأقواس والتي دونها لا يمكن كتابة أو حساب العبارات العامة، منحنيات، مجالات مغلقة، مستطيلات تسمح بإبراز النتائج المركبة للتحليل، أشكال النقاط، المستقيم، المثلث أو الدائرة في الهندسة، فمهما تكن النظريات الإشارات هي ذات تأثير إيجابي، تساعد على توجيه الرياضي سواء كان واعيا بذلك أم لم يكن. ويؤكد كفاييس هذا قائلا: " لا يمكن أبدا أن يتجاوز الرياضي شكل المثلث أو الدائرة بمركزها، أو علامة \times للإشارة إلى محاور الإحداثيات... إن الإشارات الحسابية هي عبارة

⁽³⁾ Hilbert : *sur les fondements de la logique et de l'arithmétique*, tr : H.Sinaceur, dans Rouilhan et F. Rivenc : *Logique et fondements des mathématiques*, p 258.

⁽⁴⁾ H.Sinaceur : *Différents aspects du formalisme*, dans Frédéric Nef : *Le formalisme en question le tournant des années 30*, J. Vrin, Paris, 1998, p 131.

عن أشكال مكتوبة، الأشكال الهندسية هي صيغ مرسومة، ويكون من المستحيل على الرياضي أن يتجاوزها أو يتجاهل الألفاظ أثناء الكتابة⁽⁵⁾، ولهذا فقد جعل أول الأكسيومات في الهندسة الفضاء كتصور رياضي و ليس كمكان، فالهندسة أصبحت علما خالصا مثل علم الحساب و الجبر، و هي ليست تعبيراً مثاليا عن الواقع المحسوس كما يرى أرسطو و لا بناءا للقوانين الصورية لإدراكنا للعالم كما جاء في كتاب نقد العقل الخالص عند كمنط، و ليست مجموعة من فرضيات سابقة عن معرفتنا للواقع، كما أنها ليست حوادثا تؤسس قاعدة للهندسة كما يرى هلمهولتز⁽⁶⁾.

فمن القول السابق لكفاييس على لسان هلبيرت، يتبين لنا أن هناك علاقة بين علم الحساب والهندسة التي هي عبارة عن أشكال هندسية، وهذا ما يستلزم ربط الرياضيات (علم الجبر و علم الحساب) بالهندسة، فالصيغة الرياضية على أساس أنها غير تامة تطلب من الرياضي أن يتممها ولن يكون له ذلك إلا إذا اعتمد على الرسم، وهذا الرسم يفتح المجال أمام الرياضي عند مجموعة من الاحتمالات، من الاتجاهات، يحاول اتباعها. وهذا ما يضفي الصبغة الحدسية التجريبية لرياضيات الجبريين، إلا أنه في محاضرة 1900 حاول هلبيرت أن يؤكد كما أشرت سابقا على أن "الحديث عن الأكسمة يبين عدم وجود وصف تجريبي"⁽⁷⁾، فالإشارات تؤدي إلى تحقيق سلامة وخصوصية البراهين.

فمن جهة عندما يكون الرياضي موجها بهذه الإشارات وقواعد التكوين الخاصة بها، فإن البدهة الحسية للتركيبات تساعد على إقامة برهنة سليمة، فتكون كذلك إذا و فقط كانت الرموز التي تؤسسها واضحة و متميزة. ومن جهة أخرى، يكفي كما يقول هلبيرت التأكيد على الفعالية الخاصة بالإشارة: " دون هذه الثقة، لا يمكن أبدا أن تطور علم الحساب، أو تطور الهندسة دون العودة إلى النظر في المكان"⁽⁸⁾.

والحديث عن الإشارات، حديث عن العمل الرياضي الذي يقوم أساسا على تفعيل الإشارات. ففي مقال نشره سنة 1925 بعنوان "حول اللامتناهي"، أشار هلبيرت إلى الفيلسوف

(5) J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 93.

(6) Hourya Sinaceur et Jean Pierre Bourguignon : *David Hilbert et les mathématiques du XX siècle, dans histoire des nombres, Tallandier, Paris, 2007, p50.*

(7) J. Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 93.

(8) Hilbert : *Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les 23 problèmes 1902*, tr L Laugel, Gaques Gabay, Paris, 2004, p9.

الألماني كانط يقول: "إننا متفقين مع الفلاسفة وخاصة كانط، هذا الأخير الذي أكد أن الرياضيات لها مضمون مستقل عن المنطق، وأنها لا يمكن أن تكون مؤسسة من طرف المنطق فقط...إن الشرط السابق لتطبيق الأقيسة المنطقية، وتنفيذ وتطبيق الإجراءات المنطقية هو وجود معطى في الإدراك يتمثل في معرفة وجود بعض المواضيع خارج المنطق (*extra logiques*) كإحساسات مباشرة تسبق كل تفكير"⁽⁹⁾.

و نستشف من هذا القول تأكيد هيلبرت على قبلية المعارف الرياضية، وهذا يعني استبعاده لميكانيزم بناء جديد في الحدس. و **كفايس** أيد هيلبرت واهتم كثيرا بالنظرية الهلبرتية للرمز⁽¹⁰⁾، و استخدم نفس المبادئ التي اعتمدها هيلبرت من أجل إصلاح البناء الكانطي ووضع الفعل التركيبي التوفيقي في مكانه المناسب.

ب - هيلبرت وكانط:

1 - الحدس و دوره في البناء:

من خلال القول السابق لهيلبرت، يتبين لنا وجود فرق بين تحليلاته و تلك الخاصة بكانط حول المنطق، يتمثل هذا الفرق في أن هيلبرت يرى أن المنطق والرياضيات متزامنان وأن العلمين مؤسسان على تجربة الإشارة، فالمنطق يقوم على البناء في الحدس مثله مثل الرياضيات، بينما كانط جعل من الحكم المنطقي نتاج الفكر المستقل في الحساسية (*sensibilite*)، أي أنه قبلي تركيبي بالإضافة إلى أن المنطق يمكنه توضيح الوظائف والتصورات الخاصة بالفهم، وما كتبه نقد العقل الخالص إلا برهان على ذلك.

فالرياضيات حسب كانط هي معرفة من خلال بناء التصورات، والحديث عن الرياضيات حديث عن فروعها علم الجبر، علم الحساب والهندسة فكلها إذن مبنية على التصورات، والفرق الموجود بينها أن الهندسة بناء ظاهري، واضح (*Ostensible*) بينما الجبر هو بناء رمزي (*Symbolique*)⁽¹¹⁾، وبناء التصور يعني عرض الحدس القبلي الذي يقابله، وهو مهم في كل الرياضيات، وغير ممكن إلا إذا كانت لدينا حدوسا قبلية توفرها صورتين

⁽⁹⁾ Hilbert : sur l'infini, dans Jean Largeault : Logique mathématique, Armand Colin, Paris, 1972, p 228.

⁽¹⁰⁾ H. Sinaceur : Différents aspects de formalisme, Op.cit, p 30.

⁽¹¹⁾ Jacqueline Boniface: Op.cit, p 238.

القبليتين للحساسية: المكان والزمان⁽¹²⁾، والمنطق دوره توضيح هذه التصورات، ولهذا يرى كفاييس: " أن المنطق عند كانط غير خالص ومرتبطة بالرياضيات، فهناك ارتباط وصلة بين الحدس والفكر المجرد"⁽¹³⁾. وإذا كان كانط قد اعتمد على الحدس، فإن هلبيرت يقرّه كذلك: "هناك معطى قبلي لبعض الأشياء، هذه الأشياء خارج المنطق (*extra - Logique*) هي حدسيا حاضرة باسم التجربة المباشرة الحاضرة قبل كل تفكير"⁽¹⁴⁾. وهذا ما يعني تأثر هلبيرت بكانط في هذا الجانب، فهو قد استخدم نفس الفكرة الكانطية، حيث يؤكد أن كل معرفة تستلزم حضور حدوس مباشرة تسبق كل تفكير.

ولكن يجب أن نحدد مفهوم الحدس عند كانط، فهو تمثل مرتبط مباشرة بحضور الموضوع، وهذا يعني أنه من الاستحالة " الحصول على حدس قبلي لأنه في هذه الحالة الحدس يجب أن يكون موجودا دون أن يتصل بالموضوع، ولا يمكن إذن أن يكون حدسيا"⁽¹³⁾. إن الحدس في اللوجيستيقا فقد مكانته التي أولاها إياه كانط، فبالنسبة لبولزانو وفريجه أساس الرياضيات الخالصة خاصة علم الحساب يكمن في نسق الحقائق الرياضية، وانطلاقا منها يمكن استنباط سلسلة متصلة من القضايا التحليلية، و عليه أساس ومناهج علم الحساب هي ناتجة عن القدرة التحليلية، والحدس تمّ إبعاده كلياً من الرياضيات الخالصة. ولهذا فهلبيرت أعاد للحدس دوره الأساسي، و لكن هل هلبيرت اعتمد الحدس على أساس أنه يضمن تأسيس علم الحساب، أو أن دوره أوسع من ذلك؟ إن الحدس يتدخل في كل الرياضيات وخاصة علم الجبر وهنا يتفق هلبيرت مع كانط. فالذي يمارس الرياضيات يستدل لا على التصورات العامة لكن على مواضيع أو رموز، على أفراد لا نعلم عنها أي خاصية مميزة، "لا تتم البرهنة على تصور المثلث ولكن على المثلث، الذي يمثل أو يرسم على الورقة، وهو الذي نبرهن عليه في الهندسة، وليس على العدد عامة، لكن على الحرف *a* التي يوجد في معادلة ويرمز للعدد الذي نستدل عليه في الجبر"⁽¹⁶⁾.

(12) محمود فهمي زيدان: كانط وفلسفته النظرية، مرجع سابق، ص 89.

(13) J. Cavailles : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 92.

(14) D.Hilbert : *Le fondement de l'arithmétique élémentaire 1930*, dans J.Largeault : *Intuition et intuitionnisme*, Op.cit, p 188.

(15) Jacqueline Boniface : *Op.cit*, p 247.

(16) *Ibid*, p 241.

ولكن كيف يمكن لهلبرت أن يكون قائدا للتيار الصوري وفي آن واحد متمسك بالتصور الكانطي؟ إن التطوير الهلبرتي لعلم الحساب يتم على "قاعدة حدسية للرموز الملموسة"⁽¹⁷⁾، فمواضيع علم الحساب، الأعداد، تكونت في الحدس ولا بطريقة حدسية، كتنابع الإشارات. هذه المواضيع هي مميزة بكونها خالية من المعنى، أي صورية خالصة فمثلا: $2, 3, =, a, b, c, \dots$ ومن خلالها تم تكوين تركيبات: $2+3=3+2$ ، $a+b=b+a$ ، \dots والحروف a, b, c, \dots هي متغيرات جبرية بالمعنى الكانطي.

ويرى هلبرت أن البرهنة على المساواة $a+b=b+a$ لا تتطلب الرجوع إلى الاستقراء، وإنما تتطلب منهج التحليل والتركيب للأرقام فيقول هلبرت: "فيما يخص البرهان على $a+b=a+b$ يؤكد فقط منهجا يقوم على التركيب والتحليل للأرقام، وهو منهج متميز عن مبدأ الاستقراء التام أو القياس، ويلعب دورا متقدما في علم الحساب"⁽¹⁸⁾. فعلم الحساب الذي أطلق عليه هلبرت اسم الحدسي، والساذج هو يقابل ما سماه كانط الجبر.

2- المكان والزمان عند كانط وهلبرت:

إذا كان كانط من قبل قد أقر أن المكان والزمان يكوّنان الصور الخالصة للحساسة، فالرياضيات أساسها حدس خالص للفضاء. المكان والزمان أساسا علم الحساب، وهذه معرفة تركيبية قبلية. والقول أن الزمان أساس علم الحساب، يعني "أنه يكوّن بنفسه تصورات العدد من خلال الجمع التسلسلي للوحدات في الزمان"⁽¹⁹⁾ بينما هلبرت لا يعتبر المكان كصورة قبلية ويوضح رأيه قائلا: "نسجل خاصة أنه توجد مبادئ يعتبرها كانط قبلية، ونحن نسندها إلى التجربة فمثلا مجموع العلاقات الأساسية للهندسة، وكذلك الخصائص الأولية للمكان وللمادة"⁽²⁰⁾.

إن المكان وكذا الزمان يعرفان حسب كانط كحدسين، لأنهما تمثلان مفردان، فهناك زمان واحد ومكان واحد. فالمكان هو واحد حتى وإن تعدد في ذاته هو معطى لانهائي ومطلق، والزمان هو صورة خالصة للحدس الحدسي، فهما إذن حدسان لا تصوران وهنا تأكيد على

⁽¹⁷⁾ Hilbert : Nouvelle fondation des mathématiques, , Op.cit, p 117.

⁽¹⁸⁾ Ibid,p118.

⁽¹⁹⁾ Louis Couturat : La philosophie des mathématiques de Kant, dans les principes des mathématiques ,Albert Blanchard , Paris, 1980, p 253.

⁽²⁰⁾ Hilbert : Le fondement de l'arithmétique élémentaire, Op.cit, p120.

التمييز بين الحدس والتصور، فالحدس يشير إلى صفة محددة أو شيء محدد في الخارج (حدس تجريبي) أما التصور فهو يتضمن خاصة أو خصائص عامة يمكن أن تشترك فيها عدة أشياء جزئية (تصور تجريبي كلي)⁽²¹⁾. بينما في المقابل هلبرت يعتبر أن القول بالمطلعية يجعل وجود الهندسات اللاإقليدية مستحيلا، وكذا النظرية النسبية جعلت من التفسير الكانطي للزمان تفسيراً كلاسيكياً تجاوزه الزمن. ولهذا فقد عوض هلبرت الزمان والمكان كشروط لإمكانية المعرفة، بالنهائية أو المتناهية* (*finitisme*) حيث "الإنتاج، الخاصية المميزة، التتابع... تكون حسية بالنسبة لنا"⁽²²⁾.

والحديث عن الخاصية المميزة والتتابع هي ميزة أساسية للزمان والمكان، وهذا ما فتح المجال أمام هلبرت لإمكانية وجود رموز بسيطة تعرّف الصورة المستقلة عن المكان، اللحظة، الظروف الخاصة، وكذا مختلف التغيرات أثناء الحركة، إنها إذن إشارات حسية لكن صورية خالصة وهي أساس المعرفة عند هلبرت:

وفيما يخص العدد، فإن هلبرت يعرفه انطلاقاً من الإشارة 1 والإشارة (+):

- الإشارة 1 هو عدد.

- الإشارة التي تبدأ بالعدد وتنتهي بالعدد حيث أنه في المجال + يكون متبوعاً دائماً بـ 1 و 1 يلي دائماً +، فهو أيضاً عبارة عن عدد مثلاً: 1+1، 1+1+1 هي عبارة عن أعداد⁽²³⁾.

ونفس الشيء بالنسبة لكانط الذي "عرّف العدد من خلال الإضافة المتتالية للوحدات"⁽²⁴⁾. وهنا نلاحظ من خلال تعريفين، أن كانط اهتم بالعدد كفعل يتوصل من خلاله الإنسان إلى معرفة هذا العدد، هذا الفعل الذي ينجز في زمن معطى، بينما هلبرت اهتم بموضوع العدد الذي يكونه تركيبياً بصورة خالصة. ولهذا يرى هلبرت أنه بحذف مفهوم الزمن من التعريف الكانطي يتحول إلى تعريف موضوعي، وبتعبير آخر بردّ شروط إمكانية

⁽²¹⁾ فهمي زيدان: مرجع سابق، ص 83.

* *finitisme* وترجمتها إلى النهائية (اجتهاد شخصي) و تعني إمكانية الإجراء على اللامتناهي باستعمال الوسائل المتناهية والمقصود بها الأكسمة ونظرية البرهان.

H.Sinaceur et J P Bourguignon :David Hilbert et les mathématiques du XXe siècle, revue la recherche, septembre 1993, V24, p988.

⁽²²⁾ Hilbert : *Nouvelle fondation des mathématiques, Op.cit, p 117.*

⁽²³⁾ *Ibid, p 117.*

⁽²⁴⁾ Jacques Laz : *Bolzano critique de Kant, J Vrin, Paris, 1993, p65.*

المعرفة أي الزمان والمكان إلى النهائية أي إلى التابع المميز للزمان والمكان، جعل هلبرت القبلية الكانطية موضوعية⁽²⁵⁾.

إنها إذن الخاصية المميزة والتتابع الخاص بالإشارات الخالصة، التي تحقق النظرية الكانطية للشروط القبلية لمعرفة علم الحساب وكل المعارف عامة. فالنهائية إذن تظهر كنسخة هلبرتية أو لنقل صبغة هلبرتية للصور القبلية للحدس الكانطي.

و مما سبق نستنتج وجود رابطة تصل كانط بهلبرت، إنها استمرارية تقوم على وضع مسألة المعرفة في حدود شروط الإمكان، هذه الشروط لا يتم البحث عنها في الذات العارفة بل في الموضوع، كما أن النظرية الهلبرتية فيها تراث كانطي، ولا يمكن الفصل بينهما مطلقاً.

ج - الإشارات التحليلية والفضاء التوفيقي:

مما سبق نصل إلى أن أساس برنامج هلبرت يقوم على الإشارات وخاصة التحليلية، واستعمال هذه الإشارات هو محكوم بمجموعة من قواعد حدها الرياضيون "فنكتل الإشارات لا يكون صيغة، ومتسلسلة من الصيغ لا تكون برهانا إلا عندما تخضع التركيبات إلى قواعد الأنساق أو الممارسة الرياضية"⁽²⁶⁾. هذه القواعد هي ضمنية، كما توجد أيضا قواعد شارحة، أكسيومات النسق.

إن القواعد الضمنية تخص الأكسيومات وعلى العموم توجد مجموعة من القواعد تضبط استعمال الإشارات، و هي عبارة عن أطر للأفعال (*Gestes*)، هذه الأفعال توجد كما قال كفاييس في فضاء توفيقي (*espace Combinatoire*) وهو من أهم مفاهيم الاستيمولوجية الكفاييسية، عبارة عن مجموعة الإشارات، كوحدات مثالية محددة، بنية مفروضة من قواعد التكوين، إنه "فضاء أو مكان مجرد متعدد الأبعاد، يؤدي إلى تعدد الدرجات في حرية الإجراء المحسوس واللامتوقع للتوفيق أو التركيب"⁽²⁷⁾. ومنه فالأفعال (*Gestes*) حسب كفاييس نوعان: إجرائية وتوفيقيّة.

ولكن ماذا يقصد كفاييس من تعدد الأبعاد للمكان المجرد والذي هو عبارة عن فضاء توفيقي؟ نأخذ مثال على ذلك من فرع علم الحساب:

⁽²⁵⁾ Jacqueline Boniface Op.cit,p 249.

⁽²⁶⁾ P C Noguès : Op.cit, p 105.

⁽²⁷⁾ J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 93.

- إن إشارة العملية الحسابية + تكون تامة عن اليمين واليسار بأعداد وبحروف وهنا تكون مصدرا لتأسيس فضاء جزئي للأعداد أو الحروف ذات بعدين.
- نفس الشيء إذا ما كان العدد مفتوحا نحو الأعلى على عدد (5^2) ومفتوح على اليسار واليمين على عدد أو عملية، فهنا الإجراء يكون على فضاء جزئي ثلاثي الأبعاد.
- كل إشارة تفتح على إشارات أخرى في اتجاهات وترتيب محددان، وهذا يفتح مجالا لتكوين بنية متعددة الأبعاد ومرتبة جزئيا. ولهذا فتعدد الأبعاد، يقصد بها كفاييس الربط بين الإشارات في أوجه متعددة⁽²⁸⁾.

الفضاء التكويني هو فضاء عقلائي أو لنقل هو نوع من الفضاء المجرد، وهو يعتمد في نشاطه على الفضاء (المكان) الأولي، إذ أن الأبعاد والترتيب للمكان التوفيقي ترتكز على تلك الموجودة في الفضاء الأولي: على اليمين، على اليسار، قبل، بعد،... فالإشارات تتكون من خلال الصور المرسومة ولا يمكنها أن ترتبط بإشارات أخرى إلا من خلال العودة إلى العلاقات التي كانت بين هذه الأشكال. فالفضاء التوفيقي راسخ في الفضاء الأولي ويعرض حسب نمط الفضاء الأولي.

الفضاء التوفيقي لا يعبر عن بنية عالم الأفكار المطابقة للعالم الأولي، إنه يساعد في التلاؤم مع الفضاء الأولي، ولهذا نجده يصنف بالحسي⁽²⁹⁾ مما يجعله غامضا مبهما، فمن جهة فهو يعتمد على إشارات (مجرد) ومن جهة ثانية هو حسي، وخاصيته الأولى تجعله بعيدا عن إدراك الطفل، ولهذا لا يتأسس إلا من خلال عمل الرياضي. إنه يتركب ويتكوّن من عناصر مثالية (مجردة) محددة نسبية خالصة، فهو إذن مجرد، وبما أنه أخذ من خصائص الصور المرسومة فهو كذلك حسي، ولذا فهو ثنائي أو مزدوج الطابع: عقلائي ومحسوس⁽³⁰⁾.

لماذا تطرق **كفاييس** إلى مفهوم البناء التوفيقي؟ إن إشارته إلى هذا المفهوم كان بغرض تأسيس تجارب وأفعال الرياضي، وفي هذا الإطار يشير **كفاييس** إلى ملاحظات هلبيرت النقدية لكانط. إن الفعل هو تركيب خاضع لقواعد التكوين لا إلى تصور الفهم، الفعل يعمل (يطبق) في الفضاء التوفيقي وهو فضاء مزدوج محدد بقواعد التكوين، عوض الفضاء الأولي أو الفضاء

⁽²⁸⁾ Ibid,p93.

⁽²⁹⁾ Ibid,p93.

⁽³⁰⁾ Ibid,p 94.

المعطى في الحساسية الإنسانية. فهو تركيب بسيط في الفضاء التوفيقي ربط بين الإشارات حسب قواعد العمل.

ولكن السؤال الذي يطرح مباشرة ويوجه لكفاييس هو: كيف يمكن لقواعد العمل أن تعوّض تصور الفهم وكيف يمكن للفعل (*Geste*) أن يكون كافيا للفكر؟ إنه السؤال الذي لم يجب عنه كفاييس.

د - الأشكال والصيغ:

" إن إشارات ورموز علم الحساب، هي عبارة عن أشكال مكتوبة، والأشكال الهندسية هي عبارة عن صيغ مرسومة ". لقد أكد كفاييس على هذا التحليل الهلبرتي ليستنتج وجود تجانس بين الصيغ والأشكال⁽³¹⁾. فالشكل الهندسي هو مركب من علامات \times صغيرة، من نقاط، أو خطوط والتي بدورها عبارة عن مستقيمات أو أشكال مستديرة التي هي عبارة عن دوائر. فالطفل يستطيع وينجح في الربط بين علامتين بواسطة خط، وخطوط عديدة من نقطة (بالنسبة للطفل تركيبات *Rond* حيث لا واحد يقطع الآخر، فالعلامات، الخطوط، المستدير) غير محدودة، لكن هذا الرسم الطفولي لا يمكن أن يكون شكلا هندسيا إلا عندما يتم إخضاع العلامات، الخطوط، والمستديرات إلى قواعد التكوين، والتي تكون واضحة من خلال الأكسيومات التي تمد البناءات الهندسية الدقة في البراهين الصورية. إن تطبيق الرموز الهندسية كمنهج دقيق للبرهنة، يفترض المعرفة الدقيقة للأكسيومات التي تشكل قاعدة هذه الأشكال والحصول التام على هذه الأكسيومات، وهذا يؤكد علاقة الصورية بالأكسمة. ويمكن في هذا المجال تطبيق الملاحظات الخاصة بالفضاء التوفيقي، فقواعد التكوين تؤدي إلى تشكيل علاقات بين الأشكال الأولية، وهذه العلاقات تعرف بنية لها أهمية في المجال الهندسي. وكالفعل الصوري فإن الفعل الهندسي ينجز في الفضاء التوفيقي في صورة مكونة نتيجة لنشاط الرياضي.

وهنا تجدر الإشارة إلى أن كفاييس اعتمد على المنهج الفينومينولوجي من أجل تحليل الإشارات التحليلية أو الأشكال والصيغ⁽³²⁾، وهذا ما يؤكد تأثره بالفيلسوف هوسرل، فالتحليل الذي قام به للإشارة عند هلبرت يمكن أن تطلق عليه اسم فينومينولوجيا الإشارة.

⁽³¹⁾ Hilbert : sur les problèmes futurs des mathématique, Op.cit, p8.

⁽³²⁾ J. Cavaillès : Op.cit, p 95.

ثانيا - كفاييس وكايط:

أشرنا إلى أن هلبرت عارض كايط في قوله بالفهم والحدس كأساس لبناء النسق الرياضي، و **كفاييس** بعد أن عرض الموقف الهلبرتي وجه بدوره ملاحظات إلى كايط "فهو من جهة وضح الشروط الداخلية للبناء، ومن جهة ثانية رفض الرجوع في البناء إلى الحدس الذي هو سابق عنه، وهذا إقرار ضمنى أن البناء يتم دون تصور، ومن جهة ثانية أن الشروط الداخلية للبناء تحدد بنية الفضاء الذي يتم فيه البناء ويؤدي وظيفته"⁽³³⁾، ويقصد **كفاييس** بالشروط الداخلية، قواعد العمل الخاصة بالإشارات المستعملة والفضاء الذي يتم فيه البناء هو فضاء توفيقى، الملازم للشروط الداخلية للبناء.

ولكن نلاحظ أن انتقادات **كفاييس** هي غامضة ولم يتم بتوضيحها، كما أن القول بأن الفضاء التوفيقى مزدوج الطابع كما أشرت سابقا يبقى سؤالاً مطروحا؟ فكيف لنسق صوري أكسيومي أن يكون عقلانيا مجردا وحسيا في آن واحد؟

إن **كفاييس** اعتمد على المقال الهلبرتي لسنة 1900 والذي أكد فيه "تطابق الأفكار الجديدة أو الرموز الجديدة، يجب اختيار هذه الأخيرة حيث تشير إلى الظواهر التي كانت مصدر الأفكار الجديدة"⁽³⁴⁾، فهلبرت هنا أكد على الصورة الحسية للرمز وعلى وظيفته أو استعماله الرياضي. إن الحسى يتجسد في الاستعمال الرياضي يقول **كفاييس**: "إن المحسوس أو الحسى يتدخل في تمثيل الإشارة و هذا ما يستدعي قواعد العمل، استدلال مكتوب لا يمكن أن يخطئ، لأنه أثناء رسمه تظهر الأشكال المبعدة"⁽³⁵⁾. فمن جهة، الإشارة في ماهيتها هي قاعدة عقلانية تبعد الخطأ، ومن جهة ثانية هي شرط الاكتشاف من خلال نشاطها في المحسوس!

يضيف **كفاييس**: "إذا كان التفكير المجرد يستلزم الضرورة، وإذا كان التطور الرياضي هو ظهور لحقيقة جديدة، فيجب أن يتم الاختراع في المحسوس الذي يمثل الفضاء التوفيقى"⁽³⁶⁾، فالحسى والعقلاني، الملموس والمجرد وجهان لشيء واحد، فالإشارة هي حسية

⁽³³⁾ P C Noguès : Op.cit, p 109.

⁽³⁴⁾ Hilbert : sur les problèmes futurs des l'arithmétique, Op.cit, p 8.

⁽³⁵⁾ J. Cavaillès : : Méthode axiomatique et formalisme ,Op.cit, p 94.

⁽³⁶⁾ Ibid, p 93.

في حدود ضمانها لخصوبة الفعل عند كانط، وهي عقلانية مجردة في حدود ضمانها لصحة البرهان عند هلبرت.

ونتيجة لازدواجية الإشارة، فقد اعتبر **كفاييس** هذه الخاصية سببا لمواجهة البرنامج السوري لبعض الصعوبات، لقد جعل هلبرت من الإشارة موضوعا محسوسا، معطى من الإدراك، والأنساق الصورية هي معرفة من خلال الأكسيومات، أي العلاقات بين الإشارات أو قواعد العمل بالنسبة للإشارات، وهذه العلاقات هي دون سابق رياضي. فالإشارات تعبر عن معطى خارج الرياضيات، والذي من خلاله الصورية تعيد بناء النظرية بتجنب كل افتراض رياضي. والصعوبة تكمن في أنه إذا كانت الإشارات هي مزدوجة، فإن الصورية ستستخدم إشارات محملة بالرياضيات، وهذا ما يتناقض مع المعطيات الأولية، يؤكد **كفاييس** "الاستخدام الغامض للإشارة حيث هي من جهة حسب ما يريده هلبرت، نقطة حركية في منطقة حرة، وممثل لعمليات أخرى حسية، لكن النتيجة مهمة بالنسبة للاستعمال العقلاني"⁽³⁷⁾. ولهذا فإن الحل الوحيد بالنسبة للصورية هو استرجاع ماضي الإشارات التي يستعملها، بصورنة كل الرياضيات منذ البداية.

وكخلاصة، فإن إسهامات هلبرت حول النشاط الرياضي يسمح بتحديد عمل الفعل التوفيقي، فالمنطق و الرياضيات مؤسسان على البناء في الحدس، ولا يسمحان بعزل الوظائف الخاصة للفكر، ويرفض **كفاييس** أن يكون الفهم مستقلا عن الحساسية، وأن التصور يكون خارج البناء، هذا البناء الذي هو أساس المنطق والرياضيات هو تركيب دون تصور. و أن الفعل لا يخضع إلا لقواعد الاستعمال، التي تسجل الإشارات في بنية متعددة الأبعاد ومرتبة جزئيا، فهو ينشط في البناء التوفيقي.

فالسؤال المطروح: كيف يمكن للفعل الرياضي أن يؤسس الرياضيات؟

ثالثا: العناصر المثالية في برنامج هلبرت

أ- منهج المثل:

لترسيخ برنامج التأسيسي ولبناء نظرية البرهنة، اعتمد هلبرت على منهج المثل "*La méthode des idéaux*". لقد عرف هلبرت هذا المنهج حتى يبرر تقديمه للامتناهي

⁽³⁷⁾ Ibid, p 94.

وإرجاع للرياضيات دورها في كونها " نمط أو نموذج للدقة والصدق " (38). فقد انطلق هلبرت من النظرية الديدكندية والتي مفادها أنه للانتقال من إجراء مستعمل في حقل محدد، يجب إيجاد خاصية قابلة لأن تأخذ قيمة كلية شاملة، يعني القيام بعملية التعميم لهذه الخاصية، ثم إعادة تعريف هذا الإجراء بالخاصية ذاتها فإذا مثلنا ذلك بمخطط نحصل على ما يلي:

إجراء → خاصية إجراء → تعميم الخاصية → تعريف الإجراء بالاعتماد على الخاصية.

ويؤكد **كفاييس** أن هلبرت لم يعد في تحليلاته إلى ديدكند، ولكنه اعتمد على نفس ما جاء فيها. فلتعميم النظرية ومنه توسيع مجال الرياضيات وتطويرها يجب إذن تعريف الإجراء تعريفاً سورياً، وهذا يعني عدم الرجوع إلى الحدس الحسي للمواضيع أو ما يقابلها واقعياً، فهي تقوم أساساً على قواعد الاستعمال بالنسبة للرموز.

إذن التعريف الصوري يقوم على تعميم الإجراء، ووضعه في ميدان مثالي يحتوي الميدان الأولي بالإضافة إلى مواضيع جديدة، هذه المواضيع هي "عناصر مثالية" وهي عبارة عن حدود، أو نتائج الإجراء المعمم (39) وبتعبير آخر هي "عبارة عن جواهر مثالية ليس لها وجود في فكرنا أكبر من الوجود ذاته" (40). ولهذا فأساس البرنامج الصوري الهلبرتي يقوم على مبدأ التعميم، وهو مبدأ كما يرى كفاييس خاضع لشروطين:

1- يجب على مواضيع الميدان المثالي، أن تترجم وتعرّف بواسطة مواضيع الميدان الأولي، فمثلاً الأعداد الناطقة التي تقدّم كعناصر مثالية بالنسبة للقسم المعممة، انطلاقاً من أعداد موجبة أو سالبة، هي مترجمة بأزواج من الأعداد الصحيحة. فهذا الشرط يؤكد أن مواضيع الميدان المثالي يمكن أن نتوصل إليها انطلاقاً من الحقل الأولي بواسطة نسق مركب من إجراءات.

2- يجب على الميدان المثالي أن يعيد بناء الميدان الأولي، أو أن الميدان الأولي يندمج في الميدان المثالي كجزء، ونتحقق أن مواضيع الميدان الأولي تنتمي إلى الميدان المثالي، وأن الإجراء المعمم الذي عرّف سورياً يتقاطع مع الإجراء المحدد في جزء من الميدان المثالي الموافق للميدان المحدد أو المحصور.

(38) Boniface : *Op.cit*, p 223.

(39) J. Cavallès : : *Méthode axiomatique et formalisme*, *Op.cit*, p 97.

(40) H. Sinaceur : *différents aspects du formalisme*, *Op.cit*, p 132.

فهذان الشرطان أقاما علاقة مضاعفة بين الميدان الأولي والميدان المثالي، تتمثل هذه العلاقة في: الانتقال الحر من الأسفل نحو الأعلى أي من الميدان الأولي نحو المثالي و إمكانية الانتقال من الأعلى نحو الأسفل أي العكس⁽⁴¹⁾.

ب - تطبيق منهج المثل على مسألة الأسس:

إذا ما طبقنا منهج المثل على علم الحساب المتناهي، فإن المواضيع هي عبارة عن أرقام: $1, 11, 111, 1111, \dots$ ، مركبة من خطوط أفقية، فالاستدلال يقوم على خطوط مرسومة على ورقة، و لهذا فعلم الحساب يقوم أساسا على قراءات تجريبية للأعداد المسطرة"قالوحدات هي إشارات ملموسة، تجري عليها مجموعة من عمليات"⁽⁴²⁾.

توجد إشارات للتواصل: +، =، >، 2، 3، 4 وهي عبارة عن اختصار لـ (I)، III، IIII، ...) والحروف a, b, c, \dots ، فإذا قلنا $3 > 2$ ، فهذا يعني أن III هو متسلسلة من خطوط أطول من II، ونتحقق من صحتها إذا ما قارنا بين II و III. وإذا ما كانت لدينا: $a + 1 = a + 1$ فهذا يدل على أن متتالية الخطوط المركبة من 1، ثم من المتتالية المكوّنة من a ، تتقاطع مع المتتالية المركبة من المتتالية المشار إليها من a ثم من 1، نكتب المتتاليتين ثم نحاول المقارنة بينها ونتحقق إن كانا يتقاطعان. فإشارات التواصل ترمز إلى الأرقام أي مجموعات من الأعداد أو عمليات تطبق على الأرقام، وفي كل مرة نتحقق من المعطيات، بالعودة إلى الخطوط المسطرة.

بالإضافة إلى ما سبق يمكن البرهنة على القوانين المنطقية بالعودة إلى الأعداد، فإذا كان لدينا أي قانون منطقي فيمكن إثباته حدسيا. و نأخذ كمثال مبدأ الثالث المرفوع: أ يختلف عن ب، أو أ يساوي ب ($a = b \vee a \neq b$) يترجم كالتالي: إما أن مجموعات الأعداد ورمزها a و b تتقاطع أو لا تتقاطع.

و عليه يؤكد هلبرت أن المنطق هو لغة خاصة بالأنساق المتناهية من المواضيع، لكن المسألة بالنسبة إليه هو تعميم القوانين المنطقية الخاصة بقضايا علم الحساب على كل القضايا الرياضية. وقد استوحى الحل من علم الجبر، على أساس أن الحروف المستخدمة فيه لا تُرد إلى الأرقام كما هو الشأن في علم الحساب، إنما يتم التعامل معها كما هي. فعندما نستنتج

(41) J. Cavaillès : : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 98.

(42) Hilbert : sur les fondements de la logique et de l'arithmétique, Op.cit, p 258.

$a + 1 = 1 + a$ كصيغة رياضية، فإذا ما تم الرجوع إلى الرقم الذي يشير إليه a ، نتحصل على $1 + a = 1 + a$ كصيغة جبرية مشتقة من أكسيوم التبديلية للجمع. ولهذا ف عوضا الاعتماد على البرهنة بالاعتماد على الأعداد المرسومة، فإنه يمكن للرياضي اتباع برهنة صورية تقوم على ربط صيغة جبرية بصيغة جبرية أخرى حسب قواعد معينة، فالبرهان الرياضي هو عبارة عن " لعب ميكانيكية للرموز " (43).

ويؤكد كفاييس أنه يمكن تطبيق المنهج الجبري على الرياضيات بالقيام ببعض الحسابات المنطقية، وبإضافة إشارات منطقية إلى الإشارات الرياضية كـ (و)، (أو) (يستلزم)، (لا)، (بالنسبة لكل)، (يوجد)، ونجردها من المعنى، كالحروف الجبرية (44):

"∪" ، "∩" ، "∅" ، "@" .

الوصل الفصل النفي الاستلزام

فالنظريات تترجم بالصيغ التي تحتوي الإشارات المنطقية والرياضية، وقواعد القياس كتبت بالاعتماد على الإشارات المنطقية، هذه القواعد صيغت كأكسيومات أضيفت إلى الأكسيومات الرياضية، وبها تتم البرهنة. فالبرهنة إذن هي متتاليات من صيغ مشتقة بعضها من الآخر، كذلك الخاصة بالجبر، والرياضيات ترد إلى أنساق من صيغ مجردة من المحتوى، ومرتبّة حسب القواعد المناسبة. فالرياضيات علم ذو محتوى يعتمد على لغة هي عبارة عن مخزون من الصيغ المكوّنة من الإشارات الرياضية المتسلسلة، هذا المخزون يحتوي إذن على صيغ تقابل القضايا الخاصة بعلم الحساب المتناهية وصيغ تقابل القضايا الخاصة بالرياضيات اللامتناهية.

و يمكن تمثيل برنامج هيلبرت في المخطط التالي (45):

(43) J. Cavailles : *Op.cit*, p 98

(44) Hilbert : *sur l'infini*, *Op.cit*, p233.

(45) Jacqueline Boniface : *Hilbert et la notion d'existence*, *Op.cit*, p252.

الشكل 34: اللغة الرمزية في الرياضيات المتناهية و اللامتناهية

إن الحديث عن اللامتناهي وعن المفهوم المجرد للمجموعة في النظرية الرياضية أعاد السؤال إلى ضرورة تعريف بعض المفاهيم الرياضية، وصور الاستدلال، وكان يجب التأكد من أن الصرح الرياضي هو خال من كل تناقض، وأن قواعد الاستنتاج المعتمدة لا يمكن أبدا أن تؤدي إلى مثل هذه الأخطاء المنطقية. وهلبرت، كان هدفه الأساسي من هذا البرنامج محاولة حل الإشكالية التالية المبلورة في المعطيات التالية:

إذا كان دليل تجانس الهندسة الإقليدية يمكن رده إلى لا تناقض الهندسة الديكارتيّة ذات الإحداثيات الواقعية، وإذا تمّ تكوين الأعداد الحقيقية من الأعداد الطبيعية، فهل يمكن البرهنة على لا تناقض أكسيوماتيك علم الحساب من خلال دليل يرد إلى نمط آخر؟
إن تاريخ الفكر الأكسيومي يبين أن الوضوح الذي تمّ الاعتماد عليه ليس معيار الصدفة، وبما أن الوجود يتطلب الحدس، فإنه يصبح من الضروري تحديد نمط الحدس الذي نعتمد عليه ونبرر الدور الذي يقوم عليه.

ولهذا فقد كانت نقطة بداية هلبرت، هو أن الرياضي يواجه نوعين من الوحدات:

1- الوحدات الواقعية أو المتناهية، وهي قابلة للمراقبة وللتحقق، ويتم الحصول عليها بواسطة تركيبات متناهية.

2- الوحدات المثالية التي لا ترد إلى أي حد فيزيائي لأنها ليست إلا ترجمة مجردة. والتصور اللامتناهي الفعلي أو المتصاعد ناتج عن النمط الثاني من الوحدات، وبالضبط القضايا التي تطبق على أفراد مجال لا متناهي ينتمي إلى مجموعة القضايا المثالية. وكما هو واضح وجلي فإن الرياضيات التي تعتمد على هذا النوع من القضايا تتجاوز حقل الفكر الحدسي. لقد حاول البرهنة رياضيا للانتقال من المتناهي إلى اللامتناهي فإذا كان لدينا العدد التالي P ، حيث⁽⁴⁶⁾:

$$P = 170141183460469231731687303715884105727$$

يمكن البرهنة على أنه بين:

$$(P + 1) \text{ و } (P! + 1) \text{ يوجد عدد أولي.}$$

بينما لو كان لدينا القانون التالي حيث: $Q > P$

⁽⁴⁶⁾Hilbert : sur l'infini, Op.cit, p 229.

$(P + 1), (P + 2), \dots, (P + 1)$ فهنا العبارة لم تعد متناهية بل لامتناهية،

لقد انتقلنا من الواقعي إلى المثالي على حد تعبير هيلبرت⁽⁴⁷⁾.

وعن موقف هيلبرت من القضايا المثالية، فهو لا يريد إبعادها، لا يريد إبعاد القضايا المثالية، إذ يعتقد أن استعمالها له فائدة نظرية، ويعترف أن الرياضيين يمكنهم استعمال هذه القضايا إذ أنهم سيصلون إلى نتائج معتبرة، بالرغم أن مضمونها ومحتواها لا يمكنهما ضمان الدقة التامة للرياضيات. ولهذا فهيلبرت يرى أن القضايا المثالية، هي قضايا قد يلجأ إليها الرياضي لكي يبرهن على القضايا الواقعية، ومادام يلجأ إليها يجب أن يقتنع الرياضي باللامتناهي ويجعله تصورا معقولا من وجهة نظر المتناهي، وهذه المعقولية تنتقل من حدس الرمز للخضوع المحسوس، إلى وضوح الرمز بمعزل عن الموضوع، وبهذا يجب نقل الخطاب الرياضي نحو وضوح الرمز⁽⁴⁸⁾.

لكن فيما تتمثل هذه المعقولية؟ إنها تتمثل في اعتبار مواضيع نظرية الأعداد كإشارات، فهيلبرت حول مسألة الأسس من مسألة ابستمولوجية تفرض تعريفا للعمل الرياضي إلى مسألة رياضية. فتأسيس الرياضيات، يعني أن نبين أن القوانين المنطقية تعمم من الميدان الأولي لعلم الحساب المتناهي على الميدان المثالي للرياضيات اللامتناهية، وهذا إعلان عن ميلاد لعلم جديد هو ما بعد الرياضيات أو الميتارياضيات* (*méta mathématique*) و الذي هو عبارة عن نظرية في البرهنة تولد عنها المفهوم النهائي (*finitiste*)، وعليه فان منهج المثل سمح بتثبيت مبادئ البرنامج الصوري، ولهذا سنحاول أن نعرف الأنساق الصورية التي استخدمت في ما بعد الرياضيات ومحاولة تبيان قوة ومثانة النسق الأولي لعلم الحساب.

⁽⁴⁷⁾ *Ibid, p 230.*

⁽⁴⁸⁾ *Ibid, 230.*

*ترجم محمود يعقوبي مصطلح *métamathématique* بالرياضيات الشارحة و *métalogique* بالمنطق الشارح. (روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو الى راسل، ترجمة محمود يعقوبي، دار الكتاب الحديث، القاهرة، 2004، ص400).

ونتيجة لما سبق، فإن هلبرت لم يضع تعريفات واضحة للمستقيم والنقطة... لكن تعريفات كانت ضمنية بمثابة جواهر (*entités*)** تميز نسق الأكسيومات، وقد قارن برنامجه بلعبة الشطرنج:

- الرموز هي قطع اللعبة.
 - الأكسيومات هي القواعد.
 - النظريات هي الأوضاع التي تقرها القواعد.
- وأخيرا الانتقال من نظرية إلى أخرى بسماع من القواعد.
- فالرياضيات تتميز عن مابعد الرياضيات ولتوضيح ذلك يتم الاعتماد على لعبة الشطرنج، إنها تتكون من 64 رقعة، و32 قطعة مصنفة إلى قطع بيضاء وأخرى سوداء تخص اللاعبين، 16 قطعة تتكون من 8 جنود (*Pions*)، حصانين (*cavalier*)، فيلين (*fous*)، قلعتين (*tours*) الملك والملكة.

تكافؤ عبارة صورية مكونة جيدا يعني أنه لا توجد إلا قطعة واحدة في رقعة واحدة.

- الفيلين يوجدان على رقتين مختلفتين لونا.
- الأكسيوم الوحيد للعبة الشطرنج هي الوضعية الأولية للقطع.
- الحركات التي تطبق على القطع، عموديا أو أفقيا بالنسبة للقلعتين أو على شكل " L " بالنسبة للحصانين تكون خاضعة لمجموعة من قواعد، وحركة القطع هي مماثلة لاستنتاج أو اشتقاق الرياضي لنظرية من أخرى⁽⁴⁹⁾.

ونؤكد على أن الأكسيوم الذي يقول به هلبرت ليس حدسيا، لكن متجانسا مع الأكسيومات الأخرى للنسق، فيجب إذن البرهنة لا على صدق الأكسيوم، ولكن على تناسقه مع الأكسيومات الأخرى في النسق الذي يجب أن يكون متناسقا متجانسا، كاملا ولا متناقضا وهذه السمة الأولى له وهي التي تفرض نظرة شاملة للرياضيات التي كما أسلفنا الذكر أطلق عليها اسم مابعد الرياضيات، وهي الخطاب المصورن حول الرياضيات أو هي رياضيات الرياضيات تتميز باستعمال ديناميكي للرموز الموافقة للقواعد وهذا أضفى على برنامجه سمة

** *entité*: هي حقيقة مجردة لا تترك إلا بالعقل و لهذا ترجمت هذا المصطلح بالجواهر.

(*le petite Larousse illustré, Larousse, paris, p373*)

⁽⁴⁹⁾ *L échec de la formalisation des mathématiques :*

<http://w.w.w.Usherbrooke.ca/cavefour/crsnq/resultats2003>.

ثانية هي استخدام الآليات في الاستدلال، ومن هذين القطبين أسس هلبرت نسقا سوريا خالصا ولكي يكون كذلك يجب أن يثبت أنه تام ومتجانس وتقريرى⁽⁵⁰⁾.

و وجود ما بعد الرياضيات يفترض وجود ميتالغة (*Métalangue*) للحديث عن اللغات التي تعبر عن الأنساق التي نريد تحديد خصائصها، فحسب تارسكي الذي اهتم بتنسيق و تطوير تصور الميتارياضيات بعد هلبرت، عرف الميتالغة بأنها التي تحتوي على عبارات منطقية كافية مثل: إذا و فقط، بالإضافة إلى حدود تسمح بتعريف الرسم البياني، و بواسطة الميتالغة عرف الميتاتصورات (*metaconcepts*) التي تتحكم في صياغة النظرية⁽⁵¹⁾.

المبحث الثاني - النسق الصوري وتطبيقه في المنطق:

بعد أن تطرق كفاييس إلى الحديث عن أهمية اللغة الرمزية في صورة الرياضيات، ودور العناصر المثالية في ذلك، فقد حاول أن يتتبع مسار الحركة الصورية التي قادته إلى نسق مبادئ الرياضيات لراسل، كما أشار إلى الأنساق الصورية وهذا بعد أن عرض المبادئ العامة للنسق الصوري.

أولا: تعريف النسق الصوري

النسق الصوري ظهر نتيجة التفكير حول طبيعة النظريات الاستنتاجية⁽⁵²⁾، النسق الصوري هو مجموعة من النظريات التي يتم تكوينها بواسطة قواعد تحدد كيفية تحويل متتالية الرموز إلى متتالية أخرى. و العناصر التي يتم الاعتماد عليها في هذا النسق ليست الكلمات وإنما الرموز الخالية من كل معنى، والعبارة الرياضية تصبح تتابع بسيط للرموز كأن نكتب $2 > 3$ عوض اثنان أقل من ثلاثة، وبتعبير كفاييس فإن " النسق الصوري هو

⁽⁵⁰⁾ Jean Pierre Belna : *histoire de la logique, ellipses*, Paris, 2005, p 105.

⁽⁵¹⁾ Giles Gaston Granger : *Logique ,mathématique ,métamathématique ,dans Roshdi Rashed et Pierre Pellegrin, philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance*, Albert Blanchard, Paris, p209.

⁽⁵²⁾ Roger Martin : *Logique Contemporaine et formalisation* Puf, Paris, 1964, p 9.

تجمع للرموز أو الصيغ التامة والتي يمكن استنتاج من بعضها (متناه أو لامتناه) صيغا أخرى بواسطة منهج معين محدد⁽⁵³⁾.

إن تعريف النسق الصوري يحتوي على:

1- تحديد الوسائل الرمزية (رموز)، والشروط التي يجب توفرها في تجمعات الرموز التي ستكون مدروسة: صيغ خالية من المعنى، مع التمييز بين الصيغ التامة والصيغ الجزئية. وفي هذه المرحلة يجب:

أ- تحديد الرموز التي يجب استعمالها وتصنيفها إلى أنواع أو نماذج: رموز هي ثوابت بالنسبة للأفراد والدوال، رموز متغيرات بالنسبة للأفراد والدوال، ويرمز لمجموع رموز النسق بـ⁽⁵⁴⁾.

ب- تحديد الشروط التي يجب أن تتوفر في تجمعات الإشارات التي تدرس فقط الصيغ ورمزها f ، فتصنيف القواعد التي تسمح بتكوين صيغة انطلاقا من إشارات سابقة والمقصود بها قواعد التكوين.

2- عرض شروط الصدق، أي عدّ الصيغ التامة المقبولة منذ البداية، وكذا القواعد التي تسمح بالحصول على قواعد أخرى (قواعد الاستنتاج)، وهذا يعني تقديم الصيغ التي تسمح بأن تكون مقدمات للاستنتاجات وصور الأقيسة، أو قواعد التحويل التي تسمح باستنتاج صياغة من أخرى.

وبتعبير آخر فإن الأنساق الصورية هي عوالم فرضية مغلقة على ذاتها ولتكوين عالم من هذه العوالم يجب:

- 1- القيام بعملية جرد كل الرموز التي تستعمل في النسق الصوري.
- 2- إيجاد نحو خاص (*syntaxe*) أي قواعد معينة لتحديد العبارات المكوّنة جيدا.
- 3- تحديد قواعد القياس التي تسمح بتحويل عبارة إلى آخر.
- 4- اختيار مجموعة من الأكسيومات خاصة بالنسق التي يجب أن تكون تامة فتسمح باستنتاج نظريات جديدة أو صيغ جديدة، ويجب كذلك أن لا تسمح باستنتاج نظرية ونقيضها في آن واحد وهذا لكي تحقق تناسق وتجانس النسق.

⁽⁵³⁾ J. Cavailles : *formalisme et méthode axiomatique, Op.cit, p 101.*

⁽⁵⁴⁾ Roger Martin : *Logique Contemporaine et formalisation, Op.cit, p 15.*

وبتعبير رمزي، فالنسق الصوري يتميز باللغة الصورية والتي هي نسبة جبرية

صيغتها: $L = AL, Rf$ ، حيث:

AL هي مجموعة متناهية أو عدودة للرموز.

Rf هي مجموعة غير خالية ومنتاهية من قواعد التكوين التي تسمح بتعريف مجموعة

الصيغ الذرية والعبارات المصاغة جيدا (ebf).

AL بدورها تتكون من خمس مجموعات غير خالية:

ومن خلالها يتم تكوين مجموعة الحدود لـ S بالطريقة التالية:

- 1- مجموعة C * لثوابت الموضوع.
- 2- مجموعة Var لمتغيرات الموضوع.
- 3- مجموعة Pr رموز المحمول $P(i, n)$ ، حيث n يمثل ما صدق P .
- 4- مجموعة Fct رموز دوال الصدق $f(i, n)$.
- 5- مجموعة Cne للروابط المنطقية.

كما أن للنسق الصوري بنية منطقية تتكون من:

- 1- مجموعة متناهية أو عدودة، AX لـ ebf نسميها أكسيومات.
- 2- مجموعة متناهية Rtf لقواعد التحول.

وتتحصل من خلال التركيب بين البنية المنطقية واللغة الصورية على الرباعية التالية

للسق الصوري: $S = \{AI, Rf, AX, Rtf\}$

ويرى كفاييس أن الصورية إذا كانت مرتبطة بالمنطق، فإن الصيغ تسمى قضايا تتبع

سياق الاستنتاج والبرهان. ومن خلال هذه الرباعية نستنتج وجود نوعين من الأنساق:

- 1- الأول يصورن منطق القضايا والمحمولات.
- 2- الثاني يصورن النظريات كتلك في علم الحساب.

* C اختصار *Constante*

Variables : Var

Predicats : Pr

Foncteurs : Fct

Connecteurs : Cne

فالأنساق التي تصورن النظريات تختلف عن تلك التي لها استعمال منطقي خالص من خلال كونها تحتوي على ثوابت غير منطقية وكذلك مجموعة المبادئ الخاصة التي تسمح بإدراج ثوابت خاصة.

وقبل التطرق إلى الأنساق المصورة للنظريات، أشار كفاييس إلى نسق المنطق الصوري من خلال عرض مبادئ النسق الصوري الخاصة بحساب القضايا المنطقية من جهة وبحساب المحمول أو دوال القضايا من جهة ثانية.

ثانيا - النسق الصوري للمنطق:

المنطق الرياضي ظهر لأول مرة سنة 1879 بفضل إسهامات المنطقي جوتلوب فريجه، فهو الذي أسس الحساب الفضائي الحديث، وكذا حساب دوال القضايا أو حساب المحمولات، كما أنه توصل إلى صياغة لغة اصطناعية، وقام بصورنة المنطق من خلال وضعه لمبادئ النسق، ويعتبر من ممثلي اللوجيستيقية والتي مفادها أن الرياضيات تردّ إلى المنطق ومنه فهي امتداد له، وهذا ما تجسد في كتابه: "القوانين الأساسية لعلم الحساب 1893-1903"، حاول أن يشتق علم الحساب من المنطق. وبعد فريجه نجد برتراند راسل الذي باكتشافه لمفارقة نظرية المجموعات التي أصبحت تسمى باسمه، أسس نظرية الأنماط، وقبل تحليل هذه النظرية، نعرض النسق الصوري في المنطق المعاصر من خلال حساب القضايا وحساب المحمولات.

أ - النسق الصوري الخاص بمنطق القضايا:

يقول ايمانويل كانط: "... في مختلف اللغات، الفلاسفة يتكلمون نفس اللغة"، وكما يقول فرانس (A. France): "إننا لا نفكر ولا نستدل إلا باستخدام نحو دقيق ولغة دقيقة، أظن أن أول شعب في العالم هو الذي يمتلك أفضل نحو". إن هذين القولين يؤكدان على ضرورة بناء الرياضيات على لغة سليمة ودقيقة وعلمية، هذا إن لم نقل استخدام الرياضيات كلغة صورية وإن كان هناك من يعارض هذا، فالرياضيات ليست لغة ولا يمكن أن تكون لغة، وسواء كانت صورية أو لاصورية فلا تكون لغة للتواصل⁽⁵⁵⁾، وإذا كان الأمر يتعلق بالمنطق، فيجب إذن بناءه باستخدام لغة متطورة، لغة رمزية، تفهم من طرف الأخر، وهذا ما دفع

⁽⁵⁵⁾ Maurice. Caveing : Le problème des objets, p 126.

بالمناطق إلى بناء نسق صوري خاص بالقضايا وبالمباحث الأولى، هذا النسق الذي يؤكد بياحي أنه عبارة عن "ترجمة مجردة للعمليات المحسوسة وإذا ما تكلمنا عن الإجراءات الصورية فهي تبدأ نحو 11-12 سنة، وتفرض إعادة بناء موجه للتكتلات المحسوسة نحو مستوى جديد من الفكر" (56). إذا كان منهج المنطقي هو الاستدلال، وإذا كان المنطقي في حساب القضايا يهدف للوصول إلى التحقق من صدق القضايا المستنتجة، فإن هذا الصدق لن يثبت إلا من خلال تبيان كيفية استنتاج هذه الصيغة أو القضية المركبة من صيغة أخرى.

ويرى برتراند راسل ضرورة تحرير الرياضيات من التركيب الحدسي، ودليله في ذلك أن "تطور الرياضيات كان نتيجة النقد الباطني الذي نتج عنه ضرورة استبعاد كل حدس" (57). وفي تعريفه للقضايا المنطقية يقول راسل: "يتميز الحساب التحليلي للقضايا بحقيقة أن جميع قضاياها لها فروض ولها نتيجة هي تقرير لزوم مادي: ق يلزم عنها ك" (58)، وهذا يعني أن القضايا المنطقية التي يهتم بدراستها لا علاقة لها بالواقع المادي، والمنطق حسب رأيه يدرس علاقة اللزوم بين القضايا مما يدل أن أسس ومبادئ حساب القضايا وضعها راسل في صورة دقيقة في كتابه "برنكيبيا ماتيماتيكيا"، مع عدم إهمال جهود كل من فريجه وبيانو.

النسق الصوري لحساب القضايا ككل نسق صوري، يتشكل من (59):

- أ- الجانب المورفولوجي*: الذي يشمل تعريف فئة الصيغ.
 - ب- الجانب الأكسيوماتيكي: الذي يعرف الصيغ الصادقة أو النظريات.
 - ج- الجانب الاستنتاجي: الذي نعرّف من خلاله البراهين الخاصة بالرياضيات.
- إن كل نظرية هي صيغة رمزية (قضية مركبة)، لكن بعض الصيغ لا تكون بالضرورة نظريات.

1 - المورفولوجيا:

أ - حروف أبجدية مكونة من:

(56) Piaget : La psychologie de l'intelligence, Colin, Paris, 7^e édition, 1964, p 176.

(57) محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضية، مرجع سابق، ص 134.

(58) برتراند راسل: أصول الرياضيات، مرجع سابق، ص 45.

(59) A.Fuchs, G.Reeb : Logique, Office des publications universitaires , Alger, p 80.

- قائمة غير محدودة من المتغيرات العضوية س، ص ق، ك... .
- قائمة من الإشارات عبارة عن روابط: -، \bar{U} ، \bar{U} ، \bar{U} ، \bar{U} ... وقائمة هذه الروابط تتغير حسب المنطقة ولكنهم يشتركون في النفي، والوصل، والفصل، واللزوم والتكافؤ. ويمرون أيضا من خلالها بين الثوابت الأولية وأخرى مشتقة، فمثلا في نسق هيلبرت-أكرمان (*Hilbert- Ackermann*)، الثوابت الأولية هي النفي والفصل، وعند شيفر (*Scheffer*) هي رابطة شيفر، وعند راسل هي أيضا النفي والوصل وهكذا.

ب - قواعد تركيب:

و هي قواعد تسمح بتكوين مجموعة من الصيغ المكونة جيدا، انطلاقا من الحروف الأبجدية ، ويحتاج المنطقي هنا أيضا إلى الأقواس فلها أهميتها في تشكيل الصيغ. هذه القواعد هي قواعد التكوين (*règles de formation*) حيث:

- كل متغير قضائي هو صيغة.
- إذا كانت A هي صيغة، فإن نفي A (\bar{A}) هي أيضا صيغة.
- إذا كان A و B صيغتين، وإذا كان Y يرمز إلى رابط من مجموعة الروابط السابقة الذكر إذن BYA هي صيغة.

2 - الجانب الأكسيوماتيكي:

إن هذا الجانب يحتوي على قائمة من الأكسيومات، أو لنقل صيغا والتي بالتعريف هي نظريات، وقواعد الاستنتاج ونأخذ مثلا على ذلك: نسق وايتهد وراسل و يتكون من:

أ - الثوابت الأولية :

وهي النفي والفصل ومن خلالها تم تعريف الثوابت: الوصل، اللزوم، التكافؤ:

$$1-A \bar{B} \quad B \bar{U} \quad - \quad A \bar{U} B.$$

$$2-A \bar{U} B \bar{U} \quad - \quad (- A \bar{U} \quad - B).$$

$$3-A \bar{U} B \bar{U} \quad (A \bar{B} B) \bar{U} \quad (B \bar{B} A).$$

ويمكن التحقق من صدقها باستعمال جداول الصدق:

A	B	$A \bar{B}$	$\bar{A} \bar{B}$	$A \bar{B}$	$\bar{(A \bar{B})}$
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1

ب - قائمة الأكسيومات:

إذا ما تحدثنا عن نسق وإيتهد وراسل فإنه يحتوي على خمسة أكسيومات:

- $A_1. (A \bar{A}) \bar{A}$
- $A_2. B \bar{B}$
- $A_3. (A \bar{B}) \bar{(B \bar{A})}$
- $A_4. (A \bar{B} \bar{C}) \bar{(B \bar{C} \bar{A})}$
- $A_5. (B \bar{C}) \bar{[(A \bar{B}) \bar{(A \bar{C})}]}$

ج - قواعد الاستدلال أو الإشتقاق:

إذا كانت قائمة الأكسيومات تختلف من منطقي إلى آخر، فإن قواعد الاستنتاج لا تتغير، لأن الهدف منها استنتاج نظريات جديدة انطلاقاً من نظريات معروفة، هاته القواعد تتلخص في:

- قاعدة الاستبدال (Substitution):

وتقوم على استبدال (تعويض) صيغة رمزية بصيغة رمزية أخرى تساويها في قيمة الصدق، ومن ثم تحصل على صياغة للصورة الأولى تمكننا من استنباط قضايا أخرى، فإذا كانت لدينا: $\bar{C} \bar{B} \bar{A}$ يمكننا تعويض \bar{C} بـ $\bar{C} \bar{B}$ ونحصل على $(\bar{C} \bar{B}) \bar{B} \bar{A}$...، ويشترط تعويض كل الحروف المماثلة بصيغ مماثلة.

- قاعدة إثبات التالي:

وبتعبير كفاييس قاعدة الفصل أو التفريق (Separation)، فإذا كانت لدينا:

ق، ق \bar{I} ك إذن ك.

حيث: ق قضية صغرى وق \bar{I} ك قضية كبرى.

3 - الجانب الاستدلالي:

البرهنة على $A \bar{U} A$ - (مبدأ الثالث المرفوع)

- 1- نعتمد على الأكسيوم A_2 : $B \bar{D} (A \bar{U} B)$
- 2- نعوض B بـ A نحصل: $A \bar{D} (A \bar{U} A)$
- 3- نأتي بالأكسيوم A_5 : $B \bar{D} C \bar{D} [(A \bar{U} B) \bar{D} (A \bar{U} C)]$
- 4- نعوض A بـ A نتحصل: $B \bar{D} C \bar{D} [(-A \bar{U} B) \bar{D} (-A \bar{U} C)]$
- 5- نطبق تعريف اللزوم $A \bar{D} B \bar{U} - A \bar{U} B$ نستنتج:
 $B \bar{D} C \bar{D} [(A \bar{D} B) \bar{D} (A \bar{D} C)]$
- 6- نعوض B بـ $(A \bar{U} A)$ و C بـ A إذن:
 $(A \bar{U} A) \bar{D} A \bar{D} [(A \bar{D} (A \bar{U} A)) \bar{D} (A \bar{D} A)]$
- 7- نطبق قاعدة إثبات التالي لـ 6: $[A \bar{D} (A \bar{U} A) \bar{D} (A \bar{D} A)]$
- 8- بالنظر إلى 2
 $(A \bar{D} A) \bar{D} (A \bar{D} A)$
- 9- قاعدة إثبات التالي: $A \bar{D} A \bar{U} - A \bar{U} A$ وهو المطلوب.

نقدم مثالا آخر عن النسق السوري وهو ذلك الذي أسس من طرف لوكازيفتش،

الذي اعتمد على مجموعة من تعريفات و أكسيوماته (مسلمات أو مصادرات) كانت كالتالي:

$$A_1. (A \bar{D} B) \bar{D} [(B \bar{D} C) \bar{D} (A \bar{D} C)]$$

$$A_2. A \bar{D} (-A \bar{D} B)$$

$$A_3. (-A \bar{D} A) \bar{D} A$$

كما انه اعتمد على نفس قواعد النسق السابق.

ونلاحظ من خلال النسق السوري لحساب القضايا، أن الرياضي يبرهن على صدق

الصيغة من خلال اعتماده على صيغ أخرى، بعد أن يجري تغييرات حسب القواعد وحسب

الأكسيومات التي وضعها قبلها.

ولكن إذا كان كفاييس قد ركز على قاعدتين فقط من قواعد الاستنباط، فإن بعض المناطق قد أكدوا على قاعدة أخرى تتمثل في قاعدة الاستبدال بالتعريف⁽⁶⁰⁾ وهي القاعدة التي اعتمدت في البرهنة السابقة، ولكن لم تذكر كقاعدة قائمة بذاتها. كما توجد قاعدة أخرى هي قاعدة التقرير، ويطلق عليها اسم " مبدأ الوصل " وفحواها: " إذا كانت كل من A و B نظرية تمّ البرهان عليهما، كان عطفهما $A. B$ نظرية مبرهنة"⁽⁶¹⁾، وعموما تستخدم هذه القاعدة في البرهنة على تكافؤات مثل: $(- B \supset A) \supset (- A \supset B)$ ، كما لا يفوتنا التذكير أن جان بياجى بدوره وضع نسقا سوريا لمنطق حساب القضايا وهو الذي جسده في زمرة $INRC$ برهن من خلالها على مختلف التركيبات الممكنة للقضايا* .

ب - النسق السوري الخاص بحساب المحمول:

الحديث عن حساب القضايا، يعني دراسة القضية ككل، كوحدة شاملة أو كما يقول جان بياجى من خلال البنية فوقية، وهذا يعني أن للقضية بنية تحتية⁽⁶²⁾، داخلية قابلة لأن تحلل، وتحليلها يؤدي إلى حساب المحمولات.

نظرية حساب المحمولات من النظريات الحديثة التي أسسها راسل من خلال كتابه "برنكيبيا ماتيماتيكاً"، ومن خلال المقال الذي نشره سنة 1908 بعنوان: " المنطق الرياضي مستندا إلى نظرية الأنماط "، بعد أن وصل إلى أن القضية الكلية هي عبارة عن قضية شرطية متصلة، فصاغ أفكاره المنطقية صياغة جديدة.

إن حساب القضايا، كما نلاحظ يسمح بالبرهنة على الصيغة ككل، ومن ثم لا يهيمه إن برهن على كل العناصر أم لا، وهذا ما استدعي حساب المحمول الذي يسمح بالبرهنة على كل الموضوع: كل العناصر، أو بعض العناصر حسب القضية.

فإذا قلنا: 1- يوجد س حيث س يدرّس المنطق.

⁽⁶⁰⁾ محمد مهران رشوان : مقدمة في المنطق الرمزي، دار قباء للطباعة والتوزيع، القاهرة، 2004، ص 207.

⁽⁶¹⁾ نفس المرجع، ص 208.

* أنظر: المنطق الإجرائي عند جان بياجى (1896-1980) دراسة تحليلية نقدية، إعداد الطالبة بن ميسي زبيدة، إشراف الأستاذ: زوواي بغورة، قسم الفلسفة، جامعة قسنطينة 1998-1999.
⁽⁶²⁾ Jean. Piaget : *Traité de logique, étude de logistique opératoire*, Puf, 1949, p 36.

2- لكل س، إذا كان س مجتهدا، ف (س) هو ناجح .

فإن تحليل القضيتين يبين وجود اختلاف بينهما:

الأولى تحتوي على مكتم وجودي " يوجد " والثانية تحتوي على مكتم كلي " مهما يكن، أو لكل س "، فهما إذن يفتحان المجال لوجود نوع من القضايا تحتوي على متغير، فتتحول حينها من قضية إلى دالة قضية تقوم بالربط بين المتغير س والمحمول. فالمكتمات الوجودية أو الكلية تُلازم استعمال دوال القضايا، و عليه فحساب المحمول هو محدود في الصيغ الوجودية والكلية، ويطلق عليه اسم " منطق الترتيب الأول " (*Logique du premier ordre*)، ولهذا نثبت ما ذكرناه في بداية العنصر أن " حساب المحمول ينفذ إلى البناء الداخلي للقضية، ويعبر عن هذا البناء بلغة رمزية متكاملة " (63).

وهذا لا يعني الفصل الكلي بين حساب المحمول وحساب القضايا بدليل أن الأول يكمل نقائص الثاني كما أنه يعتمد على الثاني في بنائه للنسق الصوري، إلى درجة أن هناك من هو يعرف حساب المحمول على أنه حساب القضايا أضيف إليه إجراءان جديان لهما علاقة بإثباتات وجودية وكلية (64).

1 - الجانب المورفولوجي للنسق:

أ- الرموز: تتركب من:

1: قائمة الروابط المنطقية الخاصة بحساب القضايا (الثوابت المنطقية).

2: قائمة غير محدودة من المتغيرات الفردية: x, y, z, \dots

3: قائمة غير محدودة من المتغيرات الحملية: h, g, f, \dots

4: رمز السور الكلي: "

5: رمز السور الجزئي: S وأحيانا يستعمل الرمز $S!$ ويعني يوجد واحد وواحد

فقط.

ب - قواعد التركيب:

هذه القواعد تسمح بتكوين صيغ تركيبية حسنة التكوين.

- التركيبات: $P(x), Q(x, y), P(y), \dots$ هي صيغ.

(63) ماهر عبد القادر محمد علي: المنطق الرياضي، ج3، دار النهضة العربية، بيروت، 1985، ص 124.
(64) P.S Novikov : *Introduction à la logique mathématique, Op.cit, p101.*

- إذا كانت A, B صيغتين إذن: $(A -)$ هي صيغة، $A \cup B, A \cap B, A \bar{B}$ هي أيضا صيغ.

- إذا كانت A صيغة، و x متغير إذن:
 $x, A, \neg A$ هي صيغة.

x, S, A هي صيغة.

ملاحظة:

من الأفضل استعمال الصيغ $x, A(x)$ عوض $A(x)$ ، و لكتابة الثانية يجب إذن:
 تحديد أن A تحتوي على المتغير الحر x ، أما إذا كتبت $x, A(x)$ فهي واضحة.

2 - الجانب الأكسيومي:

أ - أكسيومات هيلبرت - أكرمان:

سنتطرق إلى الأكسيومات الخاصة بنسق هيلبرت - أكرمان الخاصة بأكسيومات حساب القضايا، بإضافة اثنين يخصان حساب المحمول.

$$A_1. (A \cup A) = a$$

$$A_2. a \bar{P} (a \cup b)$$

$$A_3. (a \cup b) \bar{P} (b \cup a)$$

$$A_4. (a \bar{P} b) \bar{P} [(c \bar{P} a) \bar{P} (c \bar{P} b)]$$

إذا كان P متغيرا حمليا:

$$A_5. (\forall x, p(x)) \bar{P} p(y)$$

إذا كانت P متغير حملي:

$$A_6. p(y) \bar{P} (\exists x, p(x))$$

ففي الأكسيومات الأربعة الأولى، فإن: a, b, c هي صيغ مغلقة أي قضايا، بينما في A_5 ،

A_6 المتغير y هو حر بالنسبة لـ x في $p(x)$ ، أي أنه غير مرتبط في $p(x)$ يعد تعويض y بـ x .

ب - قواعد الاستدلال:

وهي قواعد تسمح باستنتاج نظريات من نظريات معينة، فبالإضافة إلى قاعدة التعويض

أو الاستبدال وقاعدة الإثبات المثالي، نجد قاعدتين إضافيتين:

1 - قاعدة التقديم الخاصة بـ \forall : إذا كانت

$$A \supset B(x) \hat{=} A \supset \forall x B(x)$$

2- قاعدة الفصل الخاص بـ \exists : إذا كانت

$$A(x) \supset B \supset [\exists x A(x)] \supset B$$

إذا كانت لدينا أربع قضايا: (ك م) $A \neg$ ، ك (س) $E \neg$ ، ج م $I \neg$ ، ج س $O \neg$ ،
وإذا كانت a يرمز للموضوع، و b يرمز لمحمول القضية، فإن التعبير الصوري عن هذه
القضايا الأربعة كما يلي:

$$\forall x (a(x) \supset b(x)) \quad \text{كل } a \text{ هو } b \quad A: a b A$$

$$\forall x (a(x) \supset \overline{b(x)}) \quad \text{كل } a \text{ هو لا } b \quad E: a b E$$

$$x \exists (a(x) \hat{=} b(x)) \quad \text{بعض } a \text{ هو } b \quad I: a b I$$

$$x \exists (a(x) \hat{=} \overline{b(x)}) \quad \text{ليس بعض } a \text{ هو } b \quad O: a b O$$

$$A a b \hat{=} O a b \quad \text{ونضع:}$$

$$E a b \hat{=} I a b$$

ولا يمكن وضع هذه القضايا الأربعة في تقابل، كما هو الشأن بالنسبة للمربع الأرسطي
ولكن وضعها في مربعين كما يلي:

$$\begin{array}{ccc} & & E \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \forall x (a(x) \hat{=} b(x)) & \Rightarrow & \forall x (a(x) \supset b) \\ \downarrow & & \\ \forall x (a(x) \supset b(x)) & & \forall x (\overline{a(x)} \hat{=} b(x)) \\ \downarrow & \Rightarrow & \downarrow \\ \exists x (a(x) \hat{=} b(x)) & & \exists x (a(x) \hat{=} b) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \exists x (a(x) \supset b(x)) & & \exists x (a(x) \hat{=} \overline{b}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \exists x (a(x) \hat{=} \overline{b(x)}) & & \exists x (a(x) \supset \overline{b}) \end{array}$$

نلاحظ أن O, A يحددان القطر الأساسي للمربع الصغير، و E و I يحددان القطر الثاني
للمربع الكبير، وهذان الزوجان للقضايا هي متناقضة.

في المقابل نلاحظ أن A ليست في تداخل مع I ، وأن E ليست في تضاد مع A . وإذا ما
طبقت الصيغة الجديدة على الأقيسة والتي رمزها $\hat{=}$ لأنها تتكوّن من 3 قضايا: مقدمة كبرى
و مقدمة صغرى ونتيجة، نتحصل على ما يلي (بعض الأضرب):

- الضرب Barbara:

كل أ هي ب

كل ج هي أ

كل ج هي ب \

من وجهة نظر حساب المحمول:

$$\forall x (a(x) \dot{\equiv} b(x))$$

$$\forall x (C(x) \dot{\equiv} a(x))$$

$$\dot{\equiv} \forall x (C(x) \dot{\equiv} b(x))$$

$$x (a(x) \dot{\equiv} b(x)) \cdot " x (C(x) \dot{\equiv} a(x)) \dot{\equiv} " x (C(x) \dot{\equiv} a(x))]$$

["

وإذا ما عبرنا عن هذا القياس من خلال حساب القضايا:

$$[(p \dot{\equiv} q) \cdot (R \dot{\equiv} p)] \dot{\equiv} (R \dot{\equiv} q)$$

- الضرب *Celarent* :

لا أ هي ب

كل ج هي أ

لا ج هي ب \

$$(a(x) \dot{\equiv} \overline{\forall x (C(x) \dot{\equiv} a(x))} \dot{\equiv} \overline{\forall x (C(x) \dot{\equiv} b(x))})$$

$$[\forall x b(x)]$$

- الضرب *Darii* :

كل أ هي ب

بعض ج هي أ

بعض ج هي ب \

$$" x (a(x) \dot{\equiv} b(x)) \cdot x \exists (C(x) \cdot a(x)) \dot{\equiv} E x ((a(x) \dot{\equiv} b(x))$$

[

3- الاستدلال الصوري على بعض الأقيسة:

أ - الضرب *Barbara* :

الحد الأوسط: m ، الحد الأكبر: b ، الحد الأصغر: a

$$" x (a(x) \dot{P} m(x)) \setminus " x (a(x) \dot{P} b(x)) " x (m(x) \dot{P} b(x)) ,$$

البرهنة:

$$1- (a(x) \supset m(x)) \supset [(m(x) \supset b(x)) \supset (a(x) \supset b(x))]$$

$$2- (a(y) \supset m(y))$$

نضع

كفرضية:

$$3- " y (a(y) \supset m(y)) \supset (a(x) \supset m(x))$$

بتطبيق \forall :

قاعدة الفصل

$$4- (a(x) \supset m(x))$$

بتطبيق إثبات التالي ل 2

و3 نتحصل على

$$5- (m(x) \supset b(x)) \supset (a(x) \supset b(x))$$

بتطبيق إثبات التالي ل 1 و 4

نتحصل على

$$6- " y (m(y) \supset b(y))$$

بالفرضية:

$$7- " y (m(y) \supset b(y)) \supset (m(x) \supset b(x))$$

بتطبيق قاعدة الفصل

$$8- " y (m(y) \supset b(y)) \supset (a(x) \supset b(x))$$

بتطبيق

قاعدة القياس (5 و 7)

$$9- " y (m(y) \supset b(y)) \supset \forall x (a(x) \supset b(x))$$

بتطبيق قاعدة " :

التقديم

$$10- " x (a(x) \supset b(x))$$

بتطبيق قاعدة إثبات التالي (6 و 9) نتحصل على:

وهو المطلوب.

ب-الضرب Baraco:

$$" x (b(x) \supset m(x)) , \exists (a(x) \supset m(x)) \therefore \exists x (a(x) \supset b(x))$$

البرهنة:

$$1- \forall y (b(y) \supset m(y))$$

نأخذ كفرضية:

$$2- \forall y (b(y) \supset m(y)) \supset (b(x) \supset m(x))$$

بتطبيق

قاعدة الفصل لـ 1

$$3- b(x) \dot{P} m(x)$$

بتطبيق قاعدة إثبات

التالي لـ 1 و 2

$$4- \overline{m(x)} \dot{P} \overline{b(x)}$$

بتطبيق التكافؤ لـ 3:

$$5- a(x) \dot{U} \overline{m(x)} \dot{P} a(x) \dot{U} b(x)$$

ونأخذ على حدا.. المقدمة الصغرى
والنتيجة :

$$6- a(x) \dot{U} \overline{b(x)} \dot{P} \exists y a(y) \dot{U} b(y)$$

بتطبيق قاعدة المقدمة \exists

$$7- a(x) \dot{U} \overline{m(x)} \dot{P} \exists y (a(y) \dot{U} b(y))$$

بتطبيق قاعدة القياس لـ 5

و 6 نتحصل

$$8- \exists x (a(x) \dot{U} \overline{m(x)}) \dot{P} \exists y (a(y) \dot{U} b(y))$$

بتطبيق \exists لـ 7
قاعدة الفصل

$$9- \exists x (a(x) \dot{U} \overline{m(x)})$$

بالفرضية:

$$10- \exists y (a(y) \dot{U} \overline{b(y)})$$

بتطبيق قاعدة إثبات التالي لـ 8 و 9:

ومنه ومما سبق فإنه سواء بالنسبة لحساب القضايا، أو لحساب المحمول، " البرهنة على

لا تناقض القواعد والأكسيومات لا معنى لها "⁽⁶⁵⁾، بالإضافة إلى أننا وضحنا كيف تم إعادة

بناء كل منهما وفق نسق صوري خالص، وهذا من بين الإسهامات الفعالة لبرتراند راسل في

مؤلفه .

ثالثاً- نظرية الأنماط و أكسيوم الاختزال عند راسل:

أ- نظرية الأنماط:

إن حديثنا عن حساب المحمولات، يقودنا إلى الحديث عن أكسيوم الاختزال والحديث عن

هذا الأكسيوم مرتبط بالحديث عن نظرية الأنماط عند راسل.

لقد كانت نظرية الأنماط وأكسيوم الاختزال موضوع المقالين: " مفارقات المنطق"

و "نظرية الأنماط المنطقية"، تطرق فيهما إلى تحليل المفارقات أسبابها و حلولها الممكنة. لقد

أكد راسل أن مصدر المفارقات ناتج عن التعريف التالي: " إن التشكيلات المقصودة، تحتوي

⁽⁶⁵⁾ J.Cavaillés : formalisme et méthode axiomatique, Op.cit, p 108.

على المواضيع، حيث التعريف نفسه يشمل مفهوم التشكيلة ذاتها⁽⁶⁶⁾. فمثل هذا التعريف كما يقول راسل يؤدي إلى الدور، وقد اعتمد راسل على أقدم مفارقة هي تلك الخاصة بإيمندس (*Epimenides*) وهي مفارقة الكذاب وفحواها:

يقول إيمندس: أنا أكذب، فهو عادة يكذب.

لكن، هل الآن قال صدقا أو كذبا؟

فإن قال صدقا فهو لا يكذب، وإن كذب فهو صادق.

فالقضية: " أنا أكذب " تثبت خطأ القضايا التي قالها، وإنها أحد قضايها، بالرغم أن ما تثبته يجب أن تكون له قيمة بالنسبة لها فقط، وهنا يكمن التناقض و يتم الوقوع في الدور. فهو كاذب ويكذب دائما إذن كل قضايها خاطئة، لكنه أقر أنه يكذب فهو صادق، فهل قضيته هذه تدخل في الكل أم لا؟

نفس التحليل ينطبق على مفارقة راسل: فإذا كانت لدينا مجموعة المجموعات، هل هذه المجموعة تنتمي إلى ذاتها أم لا؟ الفرضيتان معا تؤديان إلى تناقض، وهي قضية "المجموعة تنتمي إلى ذاتها" سواء كانت صادقة أو كاذبة تؤدي إلى تناقض، ومنه تؤدي إلى دور، و لتفادي الوقوع في الدور اقترح راسل مبدأ أطلق عليه اسم "مبدأ الدور" (*principe du cercle vicieux*) و نصه: كل ما يحتوي متغيرا ظاهرا يجب أن يستبعد من القيم الممكنة لذا المتغير، والحالة الهامة لهذا المبدأ: كل ما يضم كلا، لا يمكن أن يكون عضوا في الكل⁽⁶⁷⁾، ويؤكد راسل أن هذا المبدأ ليس بحل و لكن هو نتيجة لنظرية يجب أن تتوصل إلى الحل.

لحل هذه المفارقات، اعتمد راسل على تسلسل الأنماط، فقد اهتم راسل منذ 1903، بالتمييز بين الحدود التي يمكن أن نقول أنها مواضيع قضايا (*Sujets*) ومحمولات، وعلاقات بين حدود القضية وهي عبارة كلها عن تصورات⁽⁶⁸⁾، الأفراد التي تكون نمطا

⁽⁶⁶⁾ B Russel : *la théorie des types logiques* , *Revue de métaphysique et de morale*, 1910, année 18, n° 3, p 263.

⁽⁶⁷⁾ B Russel : *les paradoxes de la logique*, *Revue de métaphysique et de morale*, 1906, année 14, n° 5, p 640.

⁽⁶⁸⁾ François Lepage : *La naissance de la théorie des types*, *revue philosophique*, Vol XI, N° 2, Octobre 1984, p281.

أولاً، والقضايا التي تحتوي الأفراد النمط الثاني، وهي قضايا الدرجة الأولى. والقضايا السابقة لا تحتوي على الكممات: مهما يكن، يوجد على الأقل، كل، أو بعض، وقضايا الدرجة 1 هي متغيرات لقضايا درجة 2، وقضايا درجة 2 هي متغيرات قضايا درجة 3.. الخ، وبهذه النظرية في الأنماط يمكن حلّ المفارقات، أين يكمن مفتاح اللغز حسب راسل؟ "إنه يكمن في كون الكممات تشمل الكليات، وتكوّن بهذا أنماطاً جديدة" (69).

و قد لخص بوانكري مبدأ هذا الحل على مفارقة الكذاب: "إن الكاذب من الدرجة الأولى هو الذي يكذب دائماً إلا عندما يقول أنني كاذب من الدرجة الأولى، والكاذب من الدرجة 2 هو الذي يكذب دائماً حتى إن قال أنني كاذب من الدرجة الثانية... وندهما يقول إيميئندس أنا كاذب، يجب أن نسأله: من أي درجة أنت" (70). فإذا عممنا قاعدة تسلسل نظرية الأنماط، فإن قضايا في درجة: $n + 1$ هي متغيرات قضايا $n + 2$ ، وهذه الأخيرة هي متغيرات قضايا $n + 3$ وهكذا... الخ، لكن نظرية الأنماط التي وضعها راسل "تمنع تكوين فئة كل الفئات، أي فئة شاملة، واحدة كما يمنع تكوين فئة خالية واحدة... فهي إذن فرضت قيوداً على القضايا" (71). فلا يمكن إذن تكوين قضية تقوم على كل القضايا أو قضايا كل الدرجات، فكل قضية تكون مرتبطة بدرجة أعلى منها مباشرة فهي إذن محدودة من الجانبين، من الأعلى ($n + 2$) أو من الأسفل (n) ولهذا فإن نظرية الأنماط سمحت بإبعاد المفارقات لكنها لم تستبعد إمكانية وجود الدور في قلب النمط (72)، ومن أجل إلغاء القيود المفروضة على نظرية الأنماط، اعتمد راسل على أكسيوم الاختزال.

ب - أكسيوم الاختزال:

طبق راسل أكسيوم الاختزال*، وأكد استخدامه له لأنه يبرر تعدد الاستدلالات (73)، وقد

اعتمد على المثال** التالي:

(69) B Russel : la théorie des types logiques, Op.cit, p264.

(70) Poincaré : Logique de l'infini, Revue de métaphysique et de morale, 1909, année 17, n° 4, p 467.

(71) Pierre Joray : La quantification dans la logique moderne, L'Harmattan, France 2005, p 127.

(72) B Russel : la théorie des types logiques, Op.cit, p289.

* يقصد بالاختزال رد الرياضيات وخاصة علم الحساب إلى المنطق لتفادي الوقوع في الدور

(73) Ibid, p289.

** المثال هو لراسل (Ibid, p290)

- القضية: نابليون له كل صفات القائد الكبير".

- فإذا رمزنا إلى دوال (الدرجة 1) المميزة بالخصائص: الشجاعة، الجرأة،

الإستراتيجية... الخ بـ $X!Q$ *

- " له كل صفات القائد الكبير " هي دالة فردية، من (درجة 2) تشمل كل الدوال السابقة

(درجة 1).

- القضية الشاملة رمزها: [نابليون Q ! E $(Q ! Z^U)$ F (Q)]

فالاتتماد على أكسيوم الاختزال يضمن وجود دالة عملية خاصة مكافئة لدالة (الدرجة

2). هذا يعني أن كل القائدين يشتركون في صفة مميزة، هذه الصفة هي بمثابة فصل نوعي

مختلفة عن الصفات الأخرى الخاصة بكل واحد على حدا، لأن عدد القائدين الكبار هو متناه،

وكل منهم له صفات لا يشترك فيها مع الآخرين مثلا تاريخ الميلاد، فصل المحمولات يشكل

محمولا مشتركا بين القائدين الكبار. فإذا رمزنا لهذا المحمول بـ $Z ! Y$ فإن العبارة أو

القضية التي كانت حول نابليون تكافئ $Y !$ نابليون. وهذا التكافؤ يبقى صادقا إذا عوضنا

نابليون بأي شخص آخر، فيصل بعدها إلى المحمول الذي يكافئ الخاصية التي وصفنا بها

نابليون.

فأكسيوم الاختزال إذن "يثبت أن هذا المحمول يوجد دائما، أي إذا كانت خاصية

لموضوع صادقة بالنسبة لمجموعة من الأفراد (المواضيع ج موضوع قضية)، فيوجد محمول

محدد صادقا بالنسبة لعناصر نفس المجموعة"⁽⁷⁴⁾. وهنا يطرح سؤال آخر، المجموعة قد

تكون متناهية أو لا متناهية، فإذا كانت متناهية يمكن من خلال الفصل المنطقي لمميزات كل

فرد، التوصل إلى دالة عملية، لكن إذا كان الأمر يتعلق بمجموعة لا متناهية، يقوم أكسيوم

الاختزال بدوره في الإقرار بوجود دالة عملية حتى وإن لم نعلم بتسميتها⁽⁷⁵⁾. إنه يثبت أن كل

دالة (س) تختزل إلى دالة عملية وحديثنا عن الدالة العملية يعني الحديث عن الفئات، ولهذا

فهذا الأكسيوم أطلق عليه راسل اسم: أكسيوم الفئات، استعمل لتأسيس الفئات وحساب الفئات،

* $X!Q$ هي صيغة رمزية للدالة القضائية، عبارة حيث مهما يكن قيمة X فهي قضية.

⁽⁷⁴⁾ Ibid, p292.

⁽⁷⁵⁾ Denis Vernant : La philosophie mathématique de Bertrand Russel, Op.cit, p 220.

هدفه خلق نوع من التجانس بين مختلف أنواع الأنماط المنطقية، ولهذا فهو ليس قضية منطقية، وإنما هو فرضية أو لنقل مصادرة نسلّم بصحتها وبضرورتها في التطبيق الرياضي. وهذا ما جعل راسل مقتنعا به، ويبدو ذلك واضحا من خلال ردّه على بوانكري الذي أقرّ في مقاله: "منطق اللامتناهي" أن هذا الأكسيوم هو نسخة أخرى لنفس المبدأ هو الاستقراء " فردّه عليه راسل: "إن أكسيوم الاختزال له مجال أعم وأوسع إنه يستخدم في قضايا عدة من المنطق الصوري، أين الاستقراء الرياضي لا يمكنه فعل شيء" (76).

أما بالنسبة لكفاييس فيرى أن أكسيوم الاختزال هو مجرد فرضية ولهذا لا يمكن تأسيس الرياضيات وصرحها على أساس فرضي و يمكن التعبير عن موقفه كما يلي: "إن المنطق الخالص مثل الرياضيات الخالصة، يطمح أن يكونا صادقين في كل العوالم الممكنة... وليس فقط في أسفل العالم أين الصدفة تقيدنا... ومن وجهة نظر منطقية، لا أجد مبررا في التفكير أن أكسيوم الاختزال هو حقيقة ضروري منطقيا، وهذا ما يعني أننا نثبت أنه صادق في كل العوالم الممكنة، إنه إذن من الخطأ قبول هذا الأكسيوم في نسق المنطق حتى وإن كان تجريبيا صادقا" (77). إذن مادام، هو أكسيوم فرضي، فلا يمكن الاعتماد عليه في دحض المفارقات.

كما تجدر الإشارة إلى أن الرياضي رامساي (*F. Ramsay 1903-1931*) قد تعرض بالنقد إلى هذا الأكسيوم، ودعا صراحة إلى ضرورة التخلي عنه "إن كل الدوال الموجودة في كتاب برنكيبييا هي عملية ومحتواة في المتغير Cf ، ولهذا فلا حاجة إذن لأكسيوم الاختزال" (78).

أما هلبرت فمعارضته لراسل في اعتقاده لبناء المنطق بالاعتماد على نظرية الأنماط وقال: "إننا نعتبر علم الحساب كجزء من المنطق، ولتأسيس علم الحساب، نفترض عدد من المفاهيم التي نجدها في المنطق التقليدي، وإذا ما تمعنا في المنطق التقليدي، ندرك أن القوانين المنطقية التقليدية ترد إلى بعض المفاهيم الرياضية الخاصة بعلم الحساب كمفهوم المجموعة...وهنا نجد أنفسنا في دور، ولتفادي هذه المفارقة يجب تطوير قوانين المنطق

(76) *B Russel : la théorie des types logiques, Op.cit, p292.*

(77) *Pierre Joray : La quantification dans la logique moderne, Op.cit, p 130.*

(78) *F. Nef : Le formalisme, question le tournant des années 30, Op.cit, p 169.*

والرياضيات «(79)». وبناء على ذلك ومحاولة لتأسيس الرياضيات على أسس سليمة، اقترح كفايس تطبيق ما بعد رياضيات هلبيرت على نسق راسل ووايتهد.
و بناء على ما سبق فإن من نتائج البحث الذي قام به هلبيرت:

- بناء نظرية البرهنة باستخدام الحدود: صوري، حسي، واقعي، مثالي، هذه الحدود استخدمت من طرف هلبيرت بصورة دقيقة تختلف عن استعمالها العادي. كما أصبحت التناقضات مجرد/محسوس، حدسي/صوري لها معنى جديد لا علاقة له بالتناقض، فالصوري لا يهتم بالمعنى و لا يناقض إلا المحتوى، و الملموس هو بالمعنى الفيزيائي المرئي و منه فالتقابل بين صوري و ملموس (concret/formel) ليس تناقضاً، وإنما هناك ترابط بينهما. فالإشارة، الشكل، الرسم هي مواضيع صورية و محسوسة في آن واحد. و عليه فالمواضيع الرياضية هي صورية و حسية، هي حقيقية و مثالية، فالمواضيع الحقيقية هي أولية و المواضيع المضافة نتيجة الامتداد أو التعميم هي مثالية .

- برنامج هلبيرت هو من أجل إثبات لاتناقض أكسيومات علم الحساب بواسطة المناهج المتناهية .

- تأسيس علم الحساب و المنطق أدى إلى تأسيس ميتارياضيات و هي نظرية في البرهان، و هي عبارة عن ضمان الإجراء في اللامتناهي بواسطة الوسائل المتناهية. فالمتارياضيات المتناهية تضمن رياضيات اللامتناهي.

(79) Xavier Verley : Carnap, *Le symbolique et la philosophie*, L'Harmattan, Paris, 2003, p 180.

الفصل الثاني

الصورية الخالصة عند هلبرت

المبحث الأول : نظرية الأنماط عند هلبرت

المبحث الثاني : براهين عدم التناقض

إن مؤلف " برنكيبيا ماتيماتكا " الذي كان هدفه إعادة تأسيس المنطق في نسق صوري، قد فتح مجالاً أكبر للبحث في المسائل الرياضية. وهذا ما جعل الكثير من الرياضيين يدرسون

نسق برنكيبيا ومن بينهم هلبرت الذي أعاد البحث حول مسألة الأسس سنة 1917، مما جعله ينشر مقالا حول: " الفكر الأكسيوماتيكي "، وكما أشرنا من قبل إسهامه الخاص بأسس الرياضيات كان سنة 1905 من خلال مقاله " حول أسس المنطق وعلم الحساب " أراد فيه البرهنة على تناسق علم الحساب ولا تناقضه وكذا نظرية المجموعات، ولكن بقي الإشكال مطروحا، ولهذا اعتقد أن المسألة قد تم حلها من خلال أعمال راسل ووايتهد في برنكيبيا، فانكب على دراسة الكتاب وبعد سنوات رفض الحل اللوجستيقي الراسلي لتناسق علم الحساب، وهذا ما جعله في مقال 1923 يعرض حلولا جديدة.

لكن يبقى أن نؤكد أن كتاب برنكيبيا له أثر كبير في إسهاماته الجديدة والمتمثلة في الإجابة على السؤال التالي:كيف استطاع هلبرت تجاوز النقائص التي لوحظت على نسق برنكيبيا وكيف برهن على تناسق وتماسك علم الحساب؟

المبحث الأول: نظرية الأنماط عند هلبرت

أولا - أكسيوم المتصاعد:

أ- تعريف الأكسيوم و أهميته:

لقد اقترح هلبرت إضافة أكسيوم جديد يتجاوز أكسيوم الاختزال، وهذا الأكسيوم أطلق عليه اسم الدالة المنطقية e ، وقد عبّر عنها أيضا بأكسيوم المتصاعد ($axiome$ $transfinita$)⁽¹⁾. وفي البداية رمز هلبرت لهذه الدالة في مقاله: "الأسس المنطقية للرياضيات" الذي نشره 1923 بـ: $t A (a)$ أو ببسط الصيغ $t (A)$ حيث تربط بكل محمول $A (a)$ ذا المتغير a ، بشيء محدد هو $t (A)$ ، وقد قدم المثال التالي: إذا كان المحمول هو أن يكون مرتشيا، إذن $t (A)$ سترمز للإنسان المحدد الموهوب بالاستقامة، حيث إذا ما كشف عن فساده، كان كل الرجال بالضرورة كذلك⁽²⁾. وهنا تظهر $t (A)$ كممثل سلبي للخاصية A ، بل إنها تحتوي على الخاصية التي يمثلها، ولكن بنسبة ضعيفة أو أقل من العناصر الأخرى، وكذلك إذا شمل عليها، فكل عنصر آخر من الموضوع ($sujet$) ستتوفر فيه حتما. وبتعبير آخر فإن أكسيوم $t (A)$ هو الحدّ، أو النهاية الذي يحقق الخاصية لكل المواضيع أو العناصر

(1) Hilbert : les fondements logiques des mathématiques, Op.cit, p131.

(2) Ibid, p 137.

الأخرى، ولهذا يطلق عليه أيضا اسم ممثل-نهاية ، أو ممثل- حدّ، أو ممثل-لاتناهي⁽³⁾. وإذا ما عبرنا عن هذه الصيغة رمزيا نتحصل على: $A(a) \textcircled{R} A(t(A))$ ، وباللغة العادية: إذا كانت $t(A)$ تحتوي على الخاصية A ، إذن كل موضوع a يحتويها أيضا. إنه إذن أكسيوم المتصاعد الذي يقول عنه هيلبرت: " إنه يجب أن نعتبره كمصدر أو منبع لكل التصورات، مبادئ، وأكسيومات متصاعدة"⁽⁴⁾.

ولكن في مقال نشره سنة 1925 بعنوان: "حول اللامتناهي" غير هيلبرت من رمز الأكسيوم المتصاعد من t إلى e ⁽⁵⁾. ولكن التعبير أو الصيغة الرمزية أصبحت تكتب: $A(e(A)) \textcircled{R} A(a)$ ، وهذا ما يؤكد على أنه لم يقصد فقط تغيير الرمز وإنما مفهوم الأكسيوم ومحتواه. فلو تمعنا في الصيغتين :

الصيغة الأولى $A(t(A)) \textcircled{R} A(a)$

الصيغة الثانية $A(e(A)) \textcircled{R} A(a)$

لوجدناهما متعاكستين، فالدالة المنطقية e نعبّر عنها كالتالي: إذا كانت لدينا الصيغة التالية

$A(a)$ تحتوي على متغير حر a ، فإن الدالة e تحدد العنصر الذي يحقق A .

فالدالة e تربط الصيغة $A(a)$ بالعنصر $e(A)$ حيث: $A(e(A))$ تكون صادقة إذا كانت $A(a)$ صادقة بالنسبة لبعض عناصر الموضوع a .

وفي النسق الصوري الهيلبرتي الدالة المنطقية e تستخدم من أجل:

- تعريف المكتم الكلي والوجودي⁽⁸⁴⁾ حيث:

• يوجد X حيث $A(a)$ تكافئ $(A(\varepsilon))$

• لكل X ، $A(a)$ يكافئ $(A(-A))$

المكتم الكلي: $(A(a) \forall (\Leftrightarrow A(\varepsilon - A)))$

المكتم الوجودي: $(A(a) \exists (\Leftrightarrow A(\varepsilon(A))))$

وهنا استخدام الاستلزام في اتجاهين، يعني أن هناك تكافؤ بين الصيغتين (ليس المقصود بين المكتم الكلي والوجودي)، بين طرفي الصيغة الكاملة، وهذا لا يستبعد وجود علاقة بين المكتمين حيث العنصر أو الفرد الذي يحقق لا A ، يحقق أيضا A ، وهكذا الدالة e تقدم القضايا

⁽³⁾ Jacqueline Boniface : Op.cit, p 228.

⁽⁴⁾ Hilbert : les fondements logiques des mathématiques, Op .cit, p 137.

⁽⁵⁾ Hilbert : Sur l'infini, Op.cit, p 235.

المتصاعدة التي يقوم على عدد لامتناهي من الأفراد. ومن جهة أخرى، عندما تكون A غير محققة إلا في عنصر واحد فقط، الدالة e تحدد هذا العنصر. وعندما تكون A تكون صادقة بالنسبة لعدد من العناصر، فإن الدالة e تختار واحدا منها، وهنا الدالة e تلعب دور دالة الاختيار، أو أكسيوم الاختيار وهو أكسيوم استخدمه هيلبرت لإثبات النتائج بالنسبة للتكافؤ بين بعض الصور الخاصة بالبرهان في حساب المحمولات فدوره صوري خالص⁽⁶⁾.

إن غاية e (كبقية العناصر المثالية) السماح بتحويل الصيغ التي تحتوي على مكمل إلى صيغ دون مكمل، وهي التي تختزل إلى دوال الصدق. كما طبق هيلبرت الصورية على نظرية المجموعات، وهذا ما جعله يربط أكسيوم المتصاعد بأكسيوم الاختيار، مما جعله يؤسس أكسيوما جديدا هو أكسيوم الاختيار القوي⁽⁷⁾.

ب - برهان عدم التناقض:

يعبر هيلبرت عن ارتياعه لتوصله إلى الحساب المنطقي للقضايا فيقول: "لكن سعادتي التي أشعر بها جراء هذا النجاح هو توصلي لهذه الوسيلة الضرورية التي هي الحساب المنطقي... يوجد في الواقع شرط واحد فقط، ولكنه ضروري وبه يرتبط استخدام العناصر المثالية، هو معرفة ضرورة تقديم برهنة لعدم التناقض"⁽⁸⁾.

إن برهان عدم التناقض يرد إلى معرفة أن $1 \neq 1$ لا يمكن الحصول عليه، من خلال الأكسيومات المعتمدة، $1 \neq 1$ غير قابل للبرهان، كيف تتم البرهنة؟ اعتمد هيلبرت في البرهنة على العدد الناطق $\sqrt{2}$ ، فيكفي إذن إثبات استحالة إيجاد رقمين a و b حيث $a^2 = b^2$ ، ومن ثم البرهنة على استحالة تقديم أي برهان لهذه الصيغة.

إثبات أن العناصر المثالية لا يمكنها أن تنتج قضيتين منطقيتين متعارضتين A و A - في آن واحد. وانطلاقا من أكسيوم النفي فإن: $B \vdash A \neg$ ، بتعويض B بـ

$$0 \neq 0 \text{ نتحصل على: } 0 \neq 0 \vdash A \neg$$

⁽⁶⁾ Yvon Gauthier :La logique du continu sur la logique interne, L'Harmattan, Paris, 2004,p54.

⁽⁷⁾ Hilbert : Sur l'infini, Op.cit, p 235.

⁽⁸⁾ Ibid,p235.

* إن هيلبرت قد أشار لهذا البرهان في مقاله حول اللامتناهي سنة 1925، ولكن لم يوضحه إلا في مقال " أسس الرياضيات " الذي نشره سنة 1927.

يجب إثبات أنه في البرهنة وانطلاقاً من الأكسيومات لا يمكن أن نتحصل على $0 = 1$ كصيغة نهائية، ومنه $0 = 1$ غير قابلة للبرهنة⁽⁹⁾.

ومما سبق فإن هيلبرت يرى أنه توصل إلى مفاجئة سعيدة عندما استطاع أن يبرهن على عدم تناقض أكسيومات علم الحساب⁽¹⁰⁾.

ثانياً - محتوى النظرية

أ- المتغيرات و الترتيب:

لقد ميّز هيلبرت بين المتغيرات الخاصة بالأساس وبين أنماط المتغيرات، فأما الأولى فهي تخص الأفراد، وأما الثانية فلها علاقة بالأنماط العليا، بالدوال، بدوال الدوال⁽¹¹⁾.
نربط كل فئة من الأعداد الترتيبية بمتغير ينتمي إلى متغيرات الأساس، هذا المتغير يتميز بدلالته على محمول، الذي يعرف بدوره بصورة ضمنية بمجموعة من الأكسيومات. مثال:
بالنسبة للمتغير الحسابي، فإن a ترمز إلى عدد.

إذا كانت $Z(a)$ صادقة، و Z معرفة كما يلي⁽¹²⁾:

$$Z(0) = 0$$

$$Z(a) \text{ P } Z(a + 1)$$

وإذا وضعنا:

$$A(0) = a$$

$$A(a) \text{ P } A(a + 1)$$

نستنتج $Z(a) \text{ P } A(a)$ وهو مبدأ الاستقراء.

وفي هذه البرهنة استخدمنا متغيرات الأساس التي اعتمدت في حقيقة الأمر لتفسير وشرح أنماط المتغيرات، والتي تتميز بدورها بمحمول يتميز بنمط من المتغيرات، لكنه محدد بوضوح ويختزل إلى مجموعة من الرموز:

فإذا كان لدينا متغير دالة: لكل x .

$$F \text{ P } Z(x) \text{ P } Z(f(x))$$

(f):

وبتعميم هذا التعريف: لكل ط.

$$F_n(b) : (f_{n+1}) F_{n+1} \text{ P } Z(f_{n+1}(b))$$

f_{n+1} تحقق F_{n+1} وترمز إلى دالة دالة ... الدوال (ن - 1 مرة).

⁽⁹⁾ Hilbert : les fondements logiques des mathématiques, 1927, Op.cit, p 153.

⁽¹⁰⁾ Hilbert : Sur l'infini, Op.cit, p 236.

⁽¹¹⁾ Ibid,p 235.

⁽¹²⁾ Ibid,p235.

وبنفس الطريقة يتم الجمع بين النمط w والمتغير g حيث يرمزان إلى دالة تربط بين قيمة عددية ومنتالية الدوال f_n ، كل منها بنمط C . لكل n /

$$F(g) : F_n (f_n) \mathcal{P} Z (g (f_n))$$

وهكذا يمكن تكوين الدوال من خلال تعويض الحجة بمتغير جديد أو دالة جديدة، وكذلك من خلال التكرار (*réursion*) الذي يقوم باشتقاق قيمة الدالة $n + 1$ انطلاقاً من قيمتها بالنسبة لـ n (13).

ب - مسألة المتصل:

يقر **كفاييس** أن من النتائج التي توصل إليها هلبرت أثناء دراسته لنظرية الأنماط هي مسألة المتصل التي يقول عنها: "إنها الثمرة التي بها تعرف قيمة نظريته" (14). فهلبرت اعتمد على فكرة ربط الأعداد الترتيبية الخاصة بالفئة الثانية، بأنماط المتغيرات وتعريف الدوال الحسابية بالاعتماد على هذه الأنماط.

ولهذا فإن هناك تواز بين تكوين الأنماط وتكوين الأعداد الترتيبية (15)، فبتعويض المتغير من النمط n في الحجة بالنمط $n + 1$ يقابل ضم وحدة $+1$ ، وياتحاد كل أنماط منتالية عدودة التي تحقق نفس الشروط، تقابل الانتقال إلى النهاية، ولكن كما يقول كفاييس يمكن أن يكون هناك ربط بين الدوال ذاتها المعروفة بواسطة هذه الأنماط والأعداد الترتيبية، هذه الأعداد الترتيبية تكوينها يفرض العودة إلى المتصاعد (16).

وللبرهنة على فرضية المتصل والتي عرضها هلبرت في مؤتمر 1900 بباريس كأول مسألة، على رأس قائمة المسائل الهلبرتية حيث صاغها على الشكل التالي: هل يمكن إثبات فرضية المتصل الكانتورية، ومجموعة الأعداد الحقيقية هل يمكن أن تكون جيدة الترتيب؟ إن فرضية المتصل لكانتور ظهرت سنة 1878 نتيجة لامعدودية الأعداد الحقيقية، وهذا بعد تمييز المجموعات إلى متصلة مستمرة وأخرى عدودة، وأن قوة المتصل هي قوة

(13) *Ibid*, p 241.

(14) *J. Cavallès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 120.*

(15) *Ibid*, p120.

(16) *Ibid*, p 121.

الفئة الثانية من الأعداد $2^A 0$ ، لكن كانتور لم يستطع البرهنة على هذه الفرضية، وهذا ما جعل هيلبرت يفكر جدياً في حلها.

و تقوم برهنة هيلبرت على الجمع بين النظرية الكانتورية للمجموعات والصورية، حيث المنهج الميتاماثي (méta-mathématique) يقوم بحلّ هذه المسائل. فقد عبر هيلبرت عن رغبته في الحصول على إجابة مقنعة على فرضية المتصل، و"اعتقد أنه توصل إلى البرهنة على هذه الفرضية سنة 1926، ولكن كانت برهنته ناقصة، غير تامة"⁽¹⁷⁾. لقد اجتهد للإجابة على هذه الإشكالية من خلال السؤالين التاليين:

1- هل يوجد عدد ترتيبي من الفئة الثانية يكون وسط $A 0$ و $2^A 0$ ؟

2- هل مجموعة الأعداد الحقيقية لها نفس عدد أصلي مجموعة أعداد الفئة الثانية؟

أسس برهانه على قضيتين افترض صحتهما :

- الفرضية I: "إذا أمكننا نقض فرضية المتصل باستخدام الدوال المعرفة بواسطة e ، فإن هذه الدوال يمكن تعويضها في البرهان بدوال أخرى معرفة دون e ، باستخدام البرهان بالتراجع (recurrence) المتناهي أو المتصاعد، حيث الأخير لا يظهر إلا من خلال رمزين \bar{a} أو p "⁽¹⁸⁾.

- الفرضية II: "إذا كانت دالة الأعداد الطبيعية قد تم تكوينها بواسطة التراجع المتصاعد، أو بواسطة الأنماط التي يتم التوصل إليها عن طريق التراجع،... فإنه يمكن تعريفها بالتراجع العادي، باستخدام الأنماط من نفس المرجع أو المصدر فقط"⁽¹⁹⁾.

لقد اعتمد هيلبرت في البرهنة على الفرضيتين الأولى والثانية، و ما نلاحظه على الفرضيتين، أنه لم يستطع تجاوز مفهوم اللامتناهي أو المتصاعد، وهذا ما يبرر تأسيسه للأكسيوم المتصاعد e ونظرية الأنماط، وعليه فإن الحديث عن المتصل هو بالضرورة حديث عن اللامتناهي.

بالنسبة للفرضية الأولى فكما يقول كفاييس هي جزء من الفرضية العامة للميتاماثيات التي تؤكد قابلية حلّ كل مسألة رياضية محددة، فيكفي إذن وضع المسألة في مكانها

⁽¹⁷⁾ Belna : La notion du nombre chez Dedekind, Cantor, Frege, Op.cit, p 178.

⁽¹⁸⁾ J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 122

⁽¹⁹⁾ Ibid,p122.

الخاص. كل دالة محددة من الأعداد ، هي بالماهية قابلة للحساب، إذن أكسيوم e لا ينتمي إلى هذا المكان أو هذا الفضاء، ومنه " فمسألة المتصل يجب أن يحل دون اختيار"⁽²⁰⁾.

و في الفرضية الثانية، فإن إشارته إلى \bar{a} و p تعني استخدامه لزمريتين غير كافيتين لتمثيل المتصاعد، لأنهما يفرضان ضرورة تحديد العنصر أو الفرد، وهذا ما يبعدهما عن المتصاعد، ومن ثمة فالدوال لا يمكن أن تعرف بالتراجع الذي يفرض الحساب الفعلي لكل حجة (في دالة)، "في صورة تعريف الدالة، يجب أن نعتمد على الرمز e الذي يشير إلى عدد لا يمكن لأي حساب أن يتوصل إليه ف \bar{a} و p غير كافيين"⁽²¹⁾.

بالإضافة إلى ما سبق فإن الفرضية II تنص على أن لاتناهي دوال الأعداد الطبيعية والفئة II هما أصغر من أن يتم البرهنة عليها بالتراجع العادي. بينما في لاتناهي الدوال الخاصة بالمتغيرات الحقيقية، فإنه يمكن البرهنة عليها بالتراجع وهذا ما يبدو واضحا عند كفاييس. ولهذا فالنتيجة التي توصل إليها كفاييس هي فشل هلبرت في البرهنة على فرضية المتصل من خلال الفرضيتين التي تقبلهما دون برهان، لكن هذا لا ينفي أن محاولته فتحت آفاقا جديدة أمام الرياضيين الآخرين لأبحاث ودراسات جديدة كغودل، فون نومان، برنايز (1995-1891 Edward Louis Bernays)، وغيرهم، سواء فيما يخص المسألة في حد ذاتها أو تعريف الدوال بالتراجع والتوصل إلى تكوين الفئة II بواسطتها.

نستنتج بناء على دراسة هلبرت:

- أنه تم وضع مبادئ برنامجه موضع تساؤل من طرف لاحقيه.
- تكمن أهمية برنامجه في توضيحه لدلالة براهين التماسك، أي أنه وضع معنى البرهنة على تناسق النسق، كما وضع معنى البرهنة على عدم التناقض، وهذا ما اعتبره كريزل (Kreisel) * أصعب من البرهنة ذاتها⁽²²⁾. فما يهم إذن ليست نتائج البرهان وإنما رسم آفاقا جديدة لعلم الرياضيات.

⁽²⁰⁾ Ibid, p123.

⁽²¹⁾ Ibid, p123.

* جورج كريزل (Georges Kreisel) ولد سنة 1923، نمساوي الأصل، تطرق في مقاله إلى برنامج هلبرت بالتحليل، وكذا برهنة غودل وبين الإيجابيات والنقائص عند كل منهما.

⁽²²⁾ G. Kreisel : Le programme de Hilbert 1958, dans J.Largeault : Intuitionnisme et théorie de la démonstration, p 439.

- أهمية برنامج هلمبرت تكمن في اكتشافه أو تأسيسه لعلم رياضي جديد هو الميتارياضيات الذي يعتمد المنهج النهائي (*finitisme*).
- لقد نجح هلمبرت في توضيح مسألة أسس الهندسة بصورة تكاد تكون نهائية، بفضل برنامجه السوري الذي يعد من الانجازات الكبرى في نهاية القرن التاسع عشر و بداية اقرن العشرين⁽²³⁾.

المبحث الثاني: براهين عدم التناقض

إضافة إلى النتائج السابقة الذكر، فإن نتيجة محاولة برهنة هلمبرت الربط بين النظرية الكانتورية للمجموعة وبين قوة الصورية (الميتارياضيات)، إذن السؤال الذي يطرح: ما هو الحدّ الفاصل بين الرياضيات والميتارياضيات؟ إذ من قبل كان الفاصل واضحا ولكن لم يعد كذلك، لأن برهنة هلمبرت هي ميتارياضية من جهة، ومن جهة ثانية فإن المسألة المدروسة هي رياضية، كذلك الصرح المتناهي للنظرية تحول إلى إشكال جديد: يجب التفكير في تعريف الدالة التي تربط بين الأعداد الحقيقية والطبيعية في الفئة // والأنماط المقابلة تعريفا متصاعدا.

إن حل هذا الإشكال يعني استنباط الخاصية الجوهرية لنظرية البرهان، وللصرح الرياضي، وهذا ما دفعنا للتطرق لمسألة براهين عدم تناقض.

أولا: طرح الإشكالية

إن هدف الصوريين هو البحث الداخلي، للتأكيد أن تطور الرياضيات هو غير متناقض، فالبناء الأكسيومي السوري للنظرية يطرح إشكالية عدم تناقضها، هذا يعني أنه يجب أن يتأكد الرياضي أن البرهنة على القضية ونفيها في آن واحد يعني أن النسق يكون لامتماسكا (*non consistant*).

فالبرهان يقوم على إمكانية ترتيب العناصر الترتيبية المتناهية، حيث أن كل مجموعة جزئية منها تحتوي على عدد أول وعدد أخير، وتمثل ذلك من خلال الأكسيوم:

$$x < y \Rightarrow y < z \Rightarrow x < z$$

⁽²³⁾ Egmont Colerus : De Pythagore à Hilbert, Flammarion, France, 1947, p299.

فلاتناقض وصل الأكسيوم الجديد بالأكسيومات السابقة يمكن معرفته مباشرة بعد تحديد Z, Y, X كعناصر تمثل العدد الترتيبي المتناهي⁽²⁴⁾. فإذا أردنا البرهنة على لا تناقض النسق، نفترض وجود قضية واحدة خاطئة في النسق، وهذه القضية يكون رمزها ب - ⁽²⁵⁾.

فإذا كان لدينا W و $-W$ كقانونين من النسق، فإن:

$$-F > (W > (-W > F))$$

وبتطبيق قاعدة إثبات التالي نتحصل على:

$$W > (-W > F)$$

$$\text{ثم } -W > F$$

وأخيرا: F

ومنه إذا كانت F صادقة فإن $-F$ كاذبة ومن ثم فإن القانون الذي تمّ التوصل إليه في

النتيجة يتناقض مع الفرضية التي انطلقنا منها.

ويؤكد كفايس وجود ثلاث مناهج حاولت البرهنة على لا تناقض النسق، ومن ثم إثبات

اتساقها، وهذه المناهج زمنيا كانت سابقة عن نظرية غودل، وتتمثل في منهج أكرمان

(*Wilhelm Ackermann 1896-1962*) ووقون نومان، هيربراند و"لوفنهيم "

(*Léopold Löwenheim 1878-1957*)، وبرسبرغر (*Mojżesz Presburger*)

(*1904-1943*)، وهي المناهج التي كانت امتدادا لمنهج هلبيرت القائم أساسا على مفهوم

النهائي (*finitiste*)⁽²⁶⁾، حيث استطاعت البرهنة على الأنساق الجزئية الصورية، أنساق

محتواة في علم الحساب دون أكسيوم الاستقراء التام، هذا الأخير الذي تتولد عنه الكثير من

الصعوبات، فالمناهج المتناهية لم تستطع البرهنة على تناسق النسق الصوري الذي يحتوي

أكسيوم الاستقراء التام، وهذا ما أدى إلى ظهور أبحاث جديدة ودراسات لغودل وغنزن

(*Gerhard Gentzen 1909-1945*).

ثانيا - قانون عدم التمام (*incomplétude*) :

أ - عرض محتوى القانون:

⁽²⁴⁾ Hilbert : sur les fondements de la logique et de l'arithmétique, Op.cit, p 266.

⁽²⁵⁾ Gilbert Hottois : Penser la logique, Op.cit, p 68.

⁽²⁶⁾ J. Cavaillès : Op.cit, p 125.

في ثلاثينات القرن العشرين، انتقل المنطق من لغة ألمانية نحو اللغة الإنجليزية، فبعد انتشار النازية الألمانية، توجه مناطق ورياضيون كثيرون إلى الولايات المتحدة الأمريكية كما هو الشأن بالنسبة لتارسكي، جون فون نومان، ورودلوف كارناب (*Rudolf Carnap* 1891-1970)، وحينها شهد تاريخ المنطق انعراجا مهما توج بأعمال الرياضي غودل. كانت كتابات الرياضي غودل في البداية ألمانية، لكن بعد أن انتقل إلى جامعة *Princeton* بالولايات المتحدة الأمريكية، وبدأ ينشر باللغة الإنجليزية، ففي سنة 1930 في محاضرة ألقاها، عرض غودل قانونه الذي نشر بعد سنة في مقال بعنوان: "حول القضايا غير التقريرية صوريا لمبادئ الرياضيات والأنساق المقاربة".*

هذا القانون الذي أطلق عليه اسم قانون عدم تمام علم الحساب، يعني من جهة البرهنة على أنه في كل نسق مصورن متناسق غير متناقض، يمكن أن توجد قضايا غير تقريرية (غير قابلة للبت)، ومن جهة ثانية أن تناسق وتماسك النسق لا يمكن البرهنة عليه داخل النسق (أي داخليا)⁽²⁷⁾، وهذه الإشكالية أو لنقل التساؤلات لها جذور تاريخية قد تصل إلى اليونان، من خلال السوفسطائيين، ثم نجدها بعد اكتشاف الحساب اللامتناهي الصغر، عندما لاحظ الرياضيون وجود صعوبات ابستيمولوجية ناتجة عن استخدام الجذر المربع أو اللامتناهي، وهذا ما جعل فئة غير الرياضيين (السوفسطائيين) تقرر أن العلم مستحيل وأن العالم هو غير مفهوم، وأن الرياضيات هي غير متجانسة⁽²⁸⁾.

فإذا كان هلبرت قد اعتمد في تأسيسه لعلم الحساب وقضاياها على الإشارات والرموز، ووضع كل الأكسيومات الضرورية في مكانها المناسب في النسق، فإن المسألة تتعلق "بالبرهنة على أن كل قضية من المجموعة تأخذ قيمة الصدق بواسطة البرهان، أي من سلسلة متناهية من الاستلزامات المنطقية مصدرها الأكسيومات المكوّنة للنسق"⁽²⁹⁾.

فحسب هلبرت، كل قضية هي قابلة للبرهنة بواسطة الأكسيومات المحددة قبليا، ومن تم إضفاء قيمة الصدق لا يتم إلا بعد سلسلة من الاستلزامات، إلا أن غودل دحض هذا الحكم

* *Sur les propositions formellement indécidables des principia mathematica et des systèmes apparentés.*

⁽²⁷⁾ Jean Baudet : *Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques*, Vulbert, Paris, 2002, p 254.

⁽²⁸⁾ *Ibid*, p254.

⁽²⁹⁾ Roland Omnès : *Philosophie de la science Contemporaine*, Gallimard, 1954, Paris, p 175.

التقريبي، على أساس أنه أقرّ أنه يمكن تحديد قيمة الصدق لبعض القضايا دون المرور ببرهان، وهذا ما لا يمكن القيام به، دون الاعتماد على نظرية من مستوى أعلى خاصة بالميتالغة (مابعد اللغة)⁽³⁰⁾، وهذا ما يجعلنا نستنتج أن غودل قد أثبت وجود قضايا صادقة من وجهة نظر ميتالغوية، وأنه مستحيل البرهنة باستخدام الأدلة المتناهية، فهذه القضايا مستحيل دحضها أو إثباتها.

ب - برهان غودل

1 - المعطيات:

• P هو نسق صوري مكوّن من أكسيومات بيانو* بالنسبة لعلم الحساب، ومن نسخة مبسطة لبرنكيبيا ماتيماتيكيا لراسل بالنسبة للمنطق⁽³¹⁾.

• يعبر عن كل رمز، كل صيغة، كل برهان من P بعدد** طبيعي يطلق عليه اسم "عدد غودل***"، هذا العدد بمثابة رقم سري⁽³²⁾ هذه العملية تسمى بالترقيم****.

⁽³⁰⁾ *Ibid*, p 176.

* أكسيومات بيانو: إذا كانت N هي مجموعة الأعداد الطبيعية فإن التالي $S(n)$ للعدد الطبيعي هو العدد الطبيعي $n + 1$. أكسيومات النسق:

1. $\forall x / S(x) \neq 0$.
2. $\forall x \forall y / S(x) = S(y) \Leftrightarrow x = y$.
3. $\forall x / x + 0 = x$
4. $\forall x \forall y / x + S(y) = S(x + y)$.
5. $\forall x / x \cdot 0 = 0$.
6. $\forall x \forall y / x \cdot S(y) = S(x \cdot y)$.
7. $\forall x / x \cdot (x + y) = (x + y) \cdot x$.

Roland Hinnion : introduction à la logique Université de Bruxelles, Faculté des sciences, Département de mathématiques, 2^{ème} édition, Septembre 2003, p 41.
<http://www.Caudiulb.be/foum/index.php>

⁽³¹⁾ *Philippe Lauria : Cantor et le transfini mathématique et ontologie, Op.cit, p 120.*
<http://www.Caudiulb.be/foum/index.php>

* فقد رمز للإشارات: -, \bar{U} , p , (ϵ) ، s و o بالأرقام: 5، 7، 9، 11، 13، 3 و 1 على التوالي.
** إذا ما كان الرمز S من اللغة، نقوم بربطه بعدد طبيعي موجب ورمزه $ng(s)$ ، هو عبارة عن ترميز، أو رقم تسجيل (*matricule*) يسمى غودل لـ S .

$$A = S_0 S_1 S_2 \dots S_n \quad \text{فإذا كانت:}$$

$$a_0 = ng(S_0) \quad \text{وإذا كان:}$$

$$a_1 = ng(S_0) + ng(S_1) \quad \bar{P}$$

$$a_n = ng(S_0) + ng(S_1) + ng(S_3) \dots ng(S_n)$$

$$ng(A) = 2^{a_0} + 2^{a_1} + 2^{a_2} \dots 2^{a_n}$$

• ترجمة حسابيا بعض القضايا الميتارياضية بالنسبة لـ P . للبرهنة على الإشكالية الأولى من قانونه، كوّن غودل قضية من P ، تسمى G تترجم حسابيا القضية الميتارياضية، ولهذا فا: G غير قابلة للبرهنة.

• G تقول بنفسها أنها غير قابلة للبرهنة وهي رمز سري، وهنا تذكير بالقضية المناقضة في مفارقة الكذاب التي تؤكد بنفسها أنها غير صادقة (الفرق يكمن في تغيير الصدق بالقابلية للبرهان).

2- البرهنة:

- البرهنة على أن G قابل للبرهان إذا وفقط كان نفيه قابلا للبرهان.
- لكن إذا كانت القضية ونفيها قابلتين للبرهنة، هذا يستلزم أن P غير متناسق وغير متماسك.

- كنتيجة إذا كان P متماسكا متناسقا، وجدنا G من P غير قابل للبرهنة، غير قابل للتحض، إذن G تقريرية في النسق P .

- في الفرضية: P هو متناسق، توجد قضية G أو نفيها تكون صادقة (مبدأ الثالث المرفوع) لكن غير قابلة للبرهنة في P .

إذن P غير تام. لكن ماذا نلاحظ على برهنة غودل؟

- استخدم دليلا ميتارياضيا اعتمد فيه على وسائل تتجاوز تلك الخاصة بـ P فبين أن G صادق لكن غير قابل للبرهنة.

- تحتوي P على قضايا صادقة، لكن لا يمكن البرهنة عليها في P .

- ربط بين قابلية البرهنة والصدق لكنهما من طبيعة مختلفة، الأولى داخلية أي تكون داخل الأنساق الصورية مثل P أما الصدق فهو خارجي.

- لقد حصر هلبرت الميتارياضيات في البراهين المضمونية المتناهية، دون أن يحدد خصائص هذه البراهين، بينما غودل وضع أرقام سرية ($Codes$) للميتارياضيات في علم الحساب، وهذا باستخدام لغة الأعداد العادية، ومن ثم إمكانية الربط بين كل الجهاز الرمزي

ng هو عدد غودل. (Papion: Logique mathématique, Op.cit, p 217)

(32) Belna : histoire de la logique, Op.cit, p 107.

**** لترقيم أو الترميز أو التسجيل هي مترادفات، ترجمة لـ $codage, numérotation, matricule$

والأعداد الطبيعية، وهذا ما أكده كفاييس بقوله: " إن جديد غودل هو محاولته تحديد أن مناهج الميتالغة يمكن أن تكون مصورنة في اللغة" (33). فالأرقام السرية لغودل هي صورة جديدة لتفكير الرياضيات في ذاتها، إنها عبارة عن إضفاء الصبغة الحسية للعلاقات الميتاريادية وخاصة " قابلية البرهنة" (34).

إذن قانون غودل أثبت أن كل نسق صوري يحتوي علم الحساب هو غير متناسق ومنه هو غير تام. أما القانون الثاني فهو يثبت أن كل نسق صوري P ، إذا كان متماسكا متناسقا، فإن الترجمة الحسابية لهذا التناسق ينتج مثلا عن قضية غير مبرهنة في P . هي إذن "قضية غير تقريرية مكونة حيث توصلنا إلى النتيجة المقصودة، لكن لا تنتمي إلى القضايا التي تعود عليها الرياضي" (35).

وكنتيجة لما سبق، من المستحيل البرهنة على تناسق النسق الصوري الذي يحتوي على علم الحساب الأولي، باستخدام الوسائل المتناهية (*finitistes*) وإلا هذا النسق يجب أن يكون متناقضا (36)، يجب إذن الاعتماء على وسائل ميتاريادية، حتى نبرر وجود البراهين التي تتجاوز الأقسية المصورنة في علم الحساب. وبهذا فإن مساهمة غودل، أفشلت براهين هيلبرت، ووضعت حدا لأحلامه وآماله على حد تعبير "ديودوني" (*Jean Dieudonné 1906 - 1992*) (37)، لكن لم تضع حدودا لتأسيس أنساق صورية جديدة، أو لميتارياديات علم الأنساق ولا لنظرية البرهان المحققة بالممارسة الحدسية. والدليل على ذلك وجود براهين أخرى، بل استمرار الرياضيين ومواصلتهم في البحث عن براهين على عدم تناقض الأنساق الرياضية.

ثالثا - برهان الإتساق عند قنزن

إن النتائج التي توصل إليها غودل والتي كانت محل الانتقادات، لم تضع حدا للأبحاث والدراسات في الميتارياديات بل على العكس من ذلك فتحت المجال لأبحاث أخرى، ونذكر على سبيل المثال أبحاث الرياضي قنزن الذي قدم أول برهان على اتساق علم الحساب سنة 1935، وذلك من خلال مقاله: " حول اتساق علم الحساب الأولي " نشره سنة 1935 وقد

(33) *J Cavailles : méthode axiomatique et Formalisme, Op.cit, p144.*

(34) *H Sinaceur : Jean Cavailles : philosophie mathématique, Puf, 1994, p 68.*

(35) *Belna : histoire de la logique, Op.cit, p 109.*

(36) *Jean Dieudonné : abrégé d'histoire des mathématiques, Opcit, p 461.*

(37) *Ibid, p461.*

استند قنزن في برهنته على الاستقراء المتصاعد وهو ما يثبت الاستعمال الضروري والخفي لللامتناهي لتأسيس علم الحساب الأولي.

وفي سنة 1938 أعاد نشر المقال لكن في صورة جديدة بعنوان: " طبعة جديدة للبرهنة على اتساق علم الحساب الأولي "، وفي نفس السنة مقالاً ثالثاً: " الحالة الراهنة للأبحاث حول أسس الرياضيات ".

وهذا ما يؤكد أن التأسيس لعلم الحساب يتجاوز المناهج المتناهية إلى اللامتناهي أو المتصاعد، من خلال إدخال الاستقراء⁽³⁸⁾. فدقة البرهان كما يرى قنزن لا يتمثل في خاصيته المتناهية، ولا في اعتماده على اللامتناهي، ولكن يتمثل في كيفية استخدام اللامتناهي وكيفية توظيفه.

و قد طرح قنزن سؤالين⁽³⁹⁾:

1- لماذا البرهنة على اتساق الأنساق، هي ضرورية؟

2- كيف هي ممكنة؟

و الإجابة عنهما تكون كالتالي: أكد قنزن أنه لإثبات الاتساق يجب صوغ النظرية ككل من خلال⁽⁴⁰⁾:

1- صوغ القضايا الموجودة في علم الحساب الأولي.

2- صوغ مناهج البرهان المستخدم في علم الحساب الأولي.

فأما الأولى فتتم عن طريق تعويض اللغة العادية بلغة رمزية رياضية، فاقترح نسق رمزي حيث:

- الأعداد الطبيعية إشارتها: 1، 2، 3،

- إشارات الدوال المحددة: + .

- إشارات المحمولات المحددة: =، <، /،

- إشارات الإجراءات المنطقية \bar{U} ، \bar{U} ، \bar{E} ، \bar{S} ، " ...

أما بالنسبة لصوغ المناهج فهذا من خلال تحديد مجموعة من قواعد التركيب تسمح بتحويل إجراءات منطقية إلى إجراءات أخرى، وتعويض بقضايا أخرى، وقد رفض قنزن

⁽³⁸⁾ G. Gentzen : *La Consistance de l'arithmétique élémentaire* 1935, Op.cit, p 286.

⁽³⁹⁾ *Ibid*, p 298.

⁽⁴⁰⁾ *Ibid*, p 296.

استخدام: الفصل (\bar{U})، يوجد على الأقل (E) ورمز اللزوم (\bar{E}) وأبعدها من نسقه، وأكد على النفي (-)، الوصل (\bar{U})، مهما يكن (") المكتم الكلي، ولهذا فأبي صيغة تحتوي على الفصل، المكتم الوجودي، اللزوم يجب أن تحول إلى صيغة أخرى مكافئة تستخدم (") أو (-) وهذا ما سيحقق صحتها.

وعملية التحويل أو التعويض أطلق عليها فنزن اسم الاشتقاق، أي اشتقاق صيغة من أخرى⁽⁴¹⁾.

$$\begin{array}{l} \text{مثلا: } A \bar{U} B \quad \text{تعوض بـ:} \quad -B \quad \bar{U} \quad (-A) \quad - \\ - (A \cdot - B) \quad \quad \quad A \bar{E} B \\ - " x \quad - F(x) \quad \quad \quad \$ X f(x) \end{array}$$

وقد ميز فنزن في نسقه بين التصور الفعلي (*actualiste*) والتصوير البنائي أو التكويني (*constructiviste*) للامتناهي، وأكد أن الدور هو ناتج عن التصور الفعلي للامتناهي*.

فإذا كانت لدينا مجموعة M معرفة بالعودة إلى مجموعة كل المجموعات، هذه المجموعات صنفت إلى مجموعات من النوع الأول والثاني و M هي مكونة من الصنف (2). هذه المجموعة ذاتها تم عدها كعنصر من الجملة عندما تساءلنا إن كانت تنتمي إلى الصنف الأول أو الثاني، وهذا المنهج هو دوري: لا يحق لنا تعريف موضوع بواسطة جملة أو كل، ثم تصنيفه من جهته في هذه الجملة، حيث يعرف بتعريفه.

ولهذا عندما يكون لدينا تصورا صحيحا عن المجموعة M ، هذا يعني أنه إذا كانت لدينا مجموعة أو كل مركبة من مجموعات، هذه المجموعات صنفت إلى أولى وثانية، وإذا ما جمعنا مجموعات الأولى أو الثانية في مجموعة M ، فإن هذه الأخيرة تكون مجموعة جديدة لا يمكن أن تكون عنصرا من الكل.

⁽⁴¹⁾ *Ibid* :p 326.

* اللامتناهي الممكن (*Potentiel*) بالمعنى المقصود هو كذلك الذي يقوم على أن كل عدد طبيعي، يفترض وجود عدد أكبر منه مباشرة أي بعد P نجد وبعد $(P + 1)$ نجد $(P + 1) + 1$ وهكذا بينما الامتاهي الفعلي (*actuel*) فهو الذي يقوم بتأسيس الأعداد دفعة واحدة وهذا ما يؤدي إلى اللامتناهي الكانتوري. *Paul Bernays : philosophie des mathématiques, J Vrin, Paris, 2003, p 9.*

الإشكال يكمن في تصور المجموعة التي هي شيء محدد في ذاته، ومن ثم الكُل الذي يحدد مجموعة المجموعات، يمثل كلا محدد قبليا ومنجزا بمعزل عن الوسائل التي تعرّفها⁽⁴²⁾. ولهذا يرى قنزن أنه لتجنب الحلقة المفرغة ونظرا لأنه لا يوجد ما يبرر التصور الفعلي للامتتاهي، يجب إذن الاعتماد على التصور البنائي: "إن المجموعات لا يمكن أن تكون إلا بطريقة تكوينية، بتكوين دائم المجموعات جديدة"⁽⁴³⁾. وعليه، فإن الاستدلالات التي تقوم على التصور الفعلي للامتتاهي هي مشكوك فيها أي لا يمكن الاعتماد عليها في عملية البرهنة، وهذا ما دفعه إلى إعادة تأسيسها بواسطة أقيسة بنائية.

لقد قبل قنزن بمبادئ برنامج هلبرت، ولهذا وصف بأنه كان مخلصا* لتصور نظرية البرهان الهلبرتي⁽⁴⁴⁾ الذي قام بصورنة علم الحساب، واستنتاجاته كانت مبنية على أساس تحريك الرموز، فهي إذن تقابل حركية الرموز، وبالاعتماد على الميتارياضيات تثبت ونبرهن على أن هذه الحركية هي عملية متسقة، وأن البراهين المعتمدة في الميتارياضيات يجب أن تكون بنوية، وفي هذا السياق فإن النتائج الناتجة عن الاستدلالات المشكوك في صحتها يمكن أن تقبل إذا ما تمّ الاستعانة بعناصر مثالية.

وهكذا فإن البراهين الميتارياضية هي بنوية عوض أن تكون متناهية، هذه البراهين البنوية تنمو وتتطور إلى أن تصل إلى المتصاعد، مما يعني أن المنهج المعتمد عند قنزن هو ذا صبغة تطويرية كما يقول هلبرت خطوة خطوة: خطوة اختزال القضية وتقوم على تغييرها، خطوة الاختزال المطبق على الاشتقاق يبيّن من خلالها كيف يحوّل الاشتقاق، تركيب صيغة صحيحة إلى صيغة صحيحة جديدة⁽⁴⁵⁾.

فبطريقة بنوية، وللبرهنة على عدم تناقض علم الحساب ومن تمّ اتساقه اعتمد قنزن على الاستقراء المتصاعد (*induction transfini*)، الذي طبقه على قطعة من الفئة II والمتمثلة في $[0, \epsilon_0]$. إن هذا المبدأ الذي اعتمده قنزن لم يقنع كفاييس، وذلك لأن كفاييس

⁽⁴²⁾ G. Gentzen : *Op.cit*, p 290.

⁽⁴³⁾ *bid*, p290.

* قنزن هو الذي استخدم مصطلح "البرنامج" ليعبر عن مجموع أفكار هلبرت، ولهذا وأصل الدفاع عن هذا البرنامج (J.Laugeault : *Logique mathématique*, *Op.cit*, p 262)

⁽⁴⁴⁾ Jean Baptiste Jouet : *Nature et logique de G .Gentzen à J. y . Giard*.

<http://www.pabulo.Unit.paris 1.Fr/Jointe/Gentzen Giard, P d f>

⁽⁴⁵⁾ Gentzen : *Op.cit*, p 286.

يرى أن أهمية برهنة قنزن هي تثبيت الوسائل الضرورية للميتارياديات، عوض التأسيس لعلم الحساب على أساس بنيوي⁽⁴⁶⁾.

إن قنزن اقترح برهانين حول اتساق علم الحساب، الأول كان سنة 1935 ونشر سنة 1936، والبرهان الثاني سنة 1938⁽⁴⁷⁾، وكفاييس عند كتابته لأطروحته سنة 1937، لم يطلع إلا على البرهان الأول بينما الثاني لم يعالجه بالبحث في أطروحته (*Méthode axiomatique et formalisme*)، فالبرهانان يقومان على نفس المبدأ وهو مبدأ الاختزال (*réduction*).

ففي البرهان الأول، استخدم قنزن نمط التحول في قواعد تركيب القضية، والذي يعبر عنه بخطوة الاختزال التي تقوم على تغيير القضية حيث يمنحها معنى احتوائيا أو مضمونيا، يسمح بتقييمها أي بالحكم عليها بالصدق أو الكذب. في آن واحد، خطوة اختزال القضية ينقص عدد الإشارات المنطقية في القضية، وهي التي تساعد في وضع القضية في صورتها النهائية. كما عرف قنزن خطوة الاشتقاق (*Dérivation*)، وبين كيف يحول الاشتقاق صيغة صحيحة التركيب إلى صيغة أخرى صحيحة التركيب أبسط منها.

وبهذا فإن قنزن قد حدد وعرف القواعد التي تسمح بتحويل البرهان على قضية، إلى برهان على قضية أخرى أكثر بساطة، وهكذا بالاعتماد على قواعد الاختزال يمكن الحصول على برهان على قضية صادقة في علم الحساب المتناهي، وهو ما يعتبر دليلا على اتساق علم الحساب وعدم تناقضه، أما إذا كان متناقضا فإنه لا يمكن تطبيق قواعد الاختزال عليه، وإذا كان النسق متناقضا، فإنه توجد براهين لا يمكن اختزالها وهذا ما يتنافى مع شروط الاختزال.

كما ربط قنزن بين البراهين (الاشتقاقات) والأعداد الترتيبية من الفئة II الأقل من العدد الترتيبي ϵ_0 ، حيث في كل مرحلة من الاختزال ينقص العدد الترتيبي للبرهان. لهذا فإن الاعتماد على الأعداد الترتيبية أصبح ضروريا بالنظر إلى أكسيوم الاستقراء التام⁽⁴⁸⁾، وإذا ما

⁽⁴⁶⁾ J.Cavaillés : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 161.

⁽⁴⁷⁾ G. Gentzen : Op.cit, p286.

⁽⁴⁸⁾ Ibid,p286.

* إن برهنة قنزن لم تستخدم سوي القطعة المحددة بالعدد ϵ_0

J.Cavaillés : *transfini et Continu*, dans les oeuvres complètes de philosophie des sciences, Hermann, Paris, 1994 , p 459.

تمّ تعويض الاستدلال المقابل للاستقراء التام بعدد متناهي، وفي المقابل يوجد عدد كبير من الاستدلالات الأولية و يجب أن يكون الرقم المقابل لنتيجة هذا الاستدلال أكبر من الرقم المقابل لسلسلة الاستدلالات المقابلة لها. ولهذا الأعداد المتناهية لن تكفي، ولهذا الاستقراء المتصاعد على القطعة $[0, \varepsilon_0]^*$ ، يؤكد أن الاختزال يصل إلى عدد متناهي من المراحل، وهذا ما يؤكد اتساق علم الحساب ففنزن إذن لم يكن بحاجة إلى استخدام الاستقراء المتصاعد على كل المجموعة، بل على قطعة منها، وبرهن على هذا الاستقراء بوسائل بنويوية.

وبناء على ذلك فإن فنزن قد أكد ضرورة التأسيس الميتارياضي لعلم الحساب، وأن للامتناهي الممكن دورا كبيرا في إعطاء المناهج الميتارياضية القوة الكامنة وضمان أكبر من تلك الخاصة بأنواع الصورية⁽⁴⁹⁾.

من الناحية الرياضية، النتيجة التي توصل إليها فنزن هي عبارة عن تطور للرياضيات عموما، ومن ناحية التأسيس لعلم الحساب، نصل إلى أن مناهج علم الحساب الكلاسيكي لا يمكن الوثوق بها كليا، فهي أقل دقة من الاستقراء المتصاعد المستعمل الذي يفرض وسائل أكثر قوة ودقة من علم الحساب، وبهذه الطريقة تدخل اللامتناهي في عملية البحث في منطقة الفكر الفعلي⁽⁵⁰⁾ (*la zone de la pensée actuel*).

و قد أكد بياجي أن فنزن كي يثبت لا تناقض علم الحساب الكلاسيكي اعتمد على المجموعات المتصاعدة، و بالتالي فقد اعتمد على وسائل أكثر قوة أي تكوين نسق يتجاوز النسق السابق و يضمه في آن واحد، لكن النسق الأعلى هو ذاته يحتاج لمن يبرهن على اتساقه و عد تناقضه، أي بحاجة إلى أنساق من مستوى أعلى من مستواه. وهذا ما يجعل الرياضيات عبارة عن هرم على أساس أن هناك تدرج في الأنساق و لنقل تسلسل، فكل نسق يحتوي على وسائل للبرهنة على النسق الذي تحته و هكذا.. ولهذا قمة الهرم لا يمكن تحيده فيبقى مفتوحا⁽⁵¹⁾.

وبالرغم من محاولة فنزن، إلا أن كفاييس بقي مترددا في قبول هذا الأساس القائم على الاستقراء المتصاعد، لأنه يعتبره جزءا من الرياضيات ولا علاقة له بالميتارياضيات.

⁽⁴⁹⁾ J. Cavallès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 268.

⁽⁵⁰⁾ J. Cavallès : *sur la logique et la theorie de la science*, Ed J Vrin , Paris, 1997, p131.

⁽⁵¹⁾ JPiaget : *Logique et connaissance scientifique*, Gallimard, Pris, 1967, p571.

ومما سبق وبعد التحليلات التي قام بها **كفاييس** نصل إلى ما يلي:

- النسق الصوري: هو مجموعة من قواعد ورموز تسمح بالتعريف والبرهنة على المعطيات الرياضية.

- النسق التام: هو النسق الذي فيه يمكن البرهنة على القضية أو نقيضها، ولهذا إذا لم يتمكن من البرهنة على القضية أو دحضها، فهنا يجد الرياضي نفسه في نسق غير تام وهو الذي يحتوي على قضية واحدة على الأقل غير تقريرية، أي لم يستطع دحضها أو قبولها وهو الذي يتمثل في قانون غودل.

وكما رأينا من قبل فإن **كفاييس** حلّ بدقة هذه الأنساق وهذا محاولة منه للإجابة على السؤال المطروح: ما أساس الرياضيات؟ وكيف تتم البرهنة على عدم التناقض؟ هل توصل كفاييس إلى الإجابة الصحيحة؟ ومنه ما أساس الرياضيات عنده، وما البديل الذي جاء به؟

الفصل الثالث

الصورية المعدّلة عند كفايس

المبحث الأول : موقف كفايس من مناهج الرياضيين

المبحث الثاني : الخصوبة الخالصة

المبحث الثالث : الصورية المعدّلة

لقد بحث كفاييس في مسألة أساس الرياضيات عند بروور، هلبيرت، غودل، غنزن وغيرهم، وهذا من خلال تحليله للاكسمة والصورنة، إلا أنه لم يستطع حل مسألة الأساس بصورة نهائية و لكن استطاع أن يوضح الإشكال المطروح⁽¹⁾ و تعتبر هذه خطوة ايجابية إن تحليل البرهنة على الاتساق أصعب من البرهنة ذاتها⁽²⁾، و عموما فان كفاييس لم يكن مقتنعا بالمحاولات التي قام بها الفلاسفة و المناطقة والرياضيون، فاضطر إلى إيجاد حل خارج الحلول السابقة، لكن قبل التطرق إلى الحل، نبين موقف كفاييس من الاتجاهات الثلاث التي حاولت التأسيس للرياضيات: اللوجيستيقا، الصورية، الحدسانية.

المبحث الأول: موقف كفاييس من مناهج الرياضيين

أولا- اللوجيستيقا:

إن اللوجيستيقا ظهرت نتيجة إدخال اللغة الرمزية إلى المنطق، و القيام بحساب مماثل لما هو موجود في الجبر و أول ممثليها: جورج بول، جيفونز، ديمورغان، بيرس، شرويدر⁽³⁾، و كفاييس عند عرضه لموقفه من اللوجيستيقا تطرق إلى فلسفتين مهمتين، لهما تأثير على تطوير الفلسفة بصورة عامة، أولاها فلسفة فتنجشتاين وثانيهما حلقة فينا.

أ - رسالة منطقية فلسفية وحلقة فينا:

1 - تحليل الرسالة المنطقية الفلسفية لفتنجشتين:

إن الحديث عن اللوجيستيقا ، حديث عن حلقة فينا، عن راسل، عن كارناب، نوراث،... الخ، حديث أيضا عن الفلسفة التي أثرت في هذه المدرسة، إنها فلسفة فتنجشتين من خلاله كتابه: رسالة منطقية فلسفية*. ويرى كفاييس أن هذا الكتاب قد⁽⁴⁾ لعب دورا في نشأة حلقة فينا وتميزها عن فلسفة ماخ في ألمانيا)

(1) Jean Cavaillès : *Transfinité et continu*, Op.cit, p459.

(2) Largeault : *logique mathématique*, Op.cit, p218.

(3) Augustin Sesmat : *les raisonnements, la logistique*, Hermann, Paris, 1951, p189.

(*) *Tractatus logico philosophicus*, Tr David Francis, Mc Gunnies, Rot Lodge, London, 2001.

(4) Jean Cavaillès : *L'école de vienne dans le congrès de Prague, revue de métaphysique et de morale*, Armond Colin, Paris, année 42, 1935, p 137.

هذا الكتاب هو عبارة عن أبحاث، عن أطروحات عددها ثلاث، وردت فيها سبع قضايا أساسية رقمها فتجنشتين بالأعداد الصحيحة: 1، 2، 3...7، وكل قضية من هذه القضايا تتكون أيضا من عبارات فرعية رقمها بالأعداد العشرية⁽⁵⁾.

أهم الأفكار الواردة في كتابه:

- اللغة هي صورة العالم، فمن جهة كل العالم هو معطى في ذاته مستقل عن المعرفة الذي هي مجرد رسم (*description*).
- العالم هو مجموع الوقائع (*Faits*) الأشياء (*choses*) " و الوقائع هي الوحدات الأولى التي ينتهي إليها تحليل العالم وهذه الوقائع تتحل بدورها إلى أشياء التي لا يمكن اعتبارها الوحدات النهائية لتحليل العالم"⁽⁶⁾.
- والقول بتحليل العالم إلى وقائع، كان بسبب ضرورة وجود وحدات أولية ينحل إليها العالم مقابل الوحدات الأولية التي تتحل إليها اللغة، حيث يتوقف صدق الوحدات الأولية للغة وهي القضايا الذرية، على وجود أو عدم وجود هذه الوحدات التي ينحل إليها العالم (الوقائع الذرية)*.

- الرسم هو نموذج للوجود الخارجي، إنه يصف الوجود الخارجي بتمثيله لإمكان وجود أو عدم وجود الوقائع الذرية.
- المنطق لا يفرض وجود عالم فعلي، لكن فقط وجود عالم⁽⁷⁾.
- كل رسم (*image*) هو أيضا رسم منطقي.
- الرسم المنطقي يمكن أن يصف العالم.

⁽⁵⁾ لودفيج فتجنشتين: رسالة منطقية فلسفية، ترجمة عزمي إسلام، مكتبة الأنجلومصرية، القاهرة، 1968، ص 16.

⁽⁶⁾ نفس المرجع، ص 168.

* لقد تخطى فتجنشتين عن فكرة تحليل اللغة إلى مجموعة من قضايا أولية أو ذرية، والتي صدقها أو كذبها يتوقف على صدق أو كذب الوقائع المقابلة لها، فأصبحت اللغة عنده هي " وسيلة للاتصال بين الناس " طورت بحيث تخدم الأغراض المختلفة لنشاطات حياتهم المتعددة.

(فتجنشتين: رسالة منطقية فلسفية، نفس المرجع، ص 169).

⁽⁷⁾ Jean Cavaillès : *L'école de vienne dans le congrès de Prague, Op.cit, p 138.*

- الرسم المنطقي للعالم هو فكر، والفكر في حد ذاته يمتد في اللغة إذن القضية هي الفكرة صادقة حسيا.

- يوجد تقابل ثنائي بين العالم الحقيقي وعالم الخطاب (اللغة) فالأشياء تقابل الأسماء، والعلاقات بينها تقابل محتوى القضايا⁽⁸⁾.

- هناك شيء مشترك بين بنية الجملة وبنية الواقعة، بين القضية والواقعة، فالقضية هي مثال للواقع:

و من هذه الأفكار توصل كفايس إلى النتيجتين التاليتين:

1- حدود اللغة هي حدود العالم.

2- حدود المنطق هي حدود العالم:

فلا يمكن إذن تصور عالم دون منطق وهذا ما يؤكد فتجنشتين بقوله: "إننا لا نستطيع التفكير في شيء ما تفكيراً غير منطقي، وإلا كان علينا أن نفكر بطريقة ير منطقية... وأن نعبر عن شيء يناقض اللغة، فهذا أمر مستحيل استحالة أن تقدم الهندسة بخطوطها شكلاً هندسياً يناقض قوانين المكان... " ⁽⁹⁾ فقد ربط فتجنشتين بين المنطق واللغة، والمنطق والعالم فلا يوجد في العالم ما لا يمكن التعبير عنه عن طريق اللغة، وهذا ما يعني ضمناً رفضه للقضايا الميتافيزيقية فهي دون معنى.

- القضية ليست خليطاً من كلمات بل هي ما تفصح عن شيء، ومنه فهي علامة الواقعة، والوقائع وحدها هي التي تدل على معنى، أما المجموعة المفككة من أسماء فلا تدل على شيء.

- الفكر هو قضية ذات معنى، واللغة هو مجموع القضايا، وللإنسان قدرة على إنشاء لغات يمكن التعبير فيها عن كل معنى⁽¹⁰⁾.

- أما عن اللغة التي تكون حدودها غامضة وتركيباتها معقدة فهي لغة يجب إبعادها، لأنه لا يمكن التحقق من قضاياها، فحسب فتجنشتين يوجد معيار صدق واحد ألا وهو مطابقة القضية مع الواقعة ولا يوجد معيار ثاني.

⁽⁸⁾ Ibid, p138.

⁽⁹⁾ فتجنشتين: مرجع سابق، ص 71.

⁽¹⁰⁾ نفس المرجع، ص 82.

- أما الرسالة الثانية في كتابه، فقد تطرق فيها إلى الحديث عن القضية، صدقها وكذبها، ورموزها. فالقضايا المنطقية التي لا محتوى لها، هي تكرارية، " وجميع قضايا المنطق تقول شيئاً نفسه، أعني لا تقول شيئاً " (11).

- القضية قد تكون صادقة أو كاذبة بكونها رسماً للوجود الخارجي، فإذا كانت ص عبرنا عنها بـ (ق)، وإذا كانت كاذبة بـ (-ق).

- القضايا هي عبارة عن دالات صدق للقضايا الأولية، والقضية الأولية هي دالة صدق نفسها ودالة الصدق تسيطر على الحساب المنطقي.

فإذا كان لدينا ن قضايا أولية، فيوجد 2^ن من التركيبات الممكنة لقيم ص و ك. وإذا كانت

لدينا قضية مرتبطة بـ ن قضايا، يمكن تحديد علاقة الارتباط بين صدقها وصدق ن قضايا

بـ 2^ن طريقة مختلفة (12). وبالتالي إذا كانت القضايا ق و ك، توجد 16 دالة صدق فمثلاً

الدالة ق \bar{I} ك، وهذا الجدول يمثل إمكانات الصدق:

ق	ك	ق \bar{I} ك
ص	ص	ص
ص	ك	ك
ك	ص	ص
ك	ك	ك

ويرى فتجنشتين أن إمكانات صدق القضايا الأولية، تعني إمكانات وجود وعدم وجود الوقائع الذرية (13) وأن دالة الصدق الأبسط هي دالة شيفر، التي تعتمد على النفي المتكرر

(لا ق و لا ك) (ق/ك) (14). والصورة العامة لدالة الصدق: [ق، \bar{C} ، \bar{C} ، ن(ع)].

حيث \bar{C} ق: تمثل جميع القضايا الذرية.

(11) Jean Cavaillès : L'école de vienne dans le congrès de Prague, Op.cit, p 139.

(12) Ibid,p139.

(13) فتجنشتين: مرجع سابق، ص 101.

(14) Jean Cavaillès : L'école de vienne dans le congrès de Prague, Op.cit, p 139.

ع : تمثل مجموعة من القضايا.

ن (ع) : وتمثل النفي بالنسبة لجميع القضايا التي تكون ع

نسق دوال الصدق المعرفة بالنسبة لـ ن قضايا يتميز بطرفين متناقضين: التحصيل الحاصل والتناقض: فإذا كانت القضية صادقة بالنسبة لكل الإمكانيات فالصدق هو تحصيل حاصل، وإذا كانت القضية كاذبة بالنسبة لكل الإمكانيات، فهنا نكون بصدد التناقض. التحصيل الحاصل والتناقض ليسا رسمين من رسوم الوجود الخارجي وهما لا يمثلان أي شيء ممكن.

وعن منهج الفلسفة يرى فتجنشتين أن المنهج الصحيح للفلسفة يكمن في ألا نقول شيئا إلا مما يمكن قوله، أي قضايا العلم الطبيعي، كل ما ليس له علاقة بالفلسفة، وبعدها كلما يرغب شخص في أن يقول شيئا ميتافيزيقيا، نبرهن له أنه استعمل في عباراته جملة من الإشارات (الألفاظ) خالية من المعنى⁽¹⁵⁾. وبهذه النتيجة أنهى فتجنشتين رسالته ، التي كانت نقطة انطلاقه مدرسة فينا، لكن هذا لا يعني أنهم اعتمدوا جميع أفكاره.

فتجنشتين قد افرغ المنطق من كل مادة كي يحوله إلى صورة خالصة ، و قضايا المنطق التكرارية ليست خالية من المعنى لكن لا محتوى لها، و لم تعد هناك ثوابت بمعناها عند راسل، بل أضحت كل لقضايا المنطقية تقول الشيء ذاته أي أنها لا نقول شيئا⁽¹⁶⁾،

(15) فتجنشتين: مرجع سابق، ص 163.

(16) سالم يفوت: درس الابدستيمولوجيا ،دار دوبقال للنشر،المغرب،ط3، 2001،ص81.

(17) روبرير بانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو إلى راسل، مرجع سابق ،ص395.

* إن حلقة فيينا تضم مجموعة من الرياضيين و المناطقة نذكر منهم موريس شليك (*Maurice Otto* 1936-1882 *schlick*)، هانس هاهن (*Hans Hahn* 1879-1964)، نوراث (*Otto Neurath* 1882-1945)،

كارناب (*Rudolf Carnap* 1891-1970)، غودل، و قد نشرت هذه الحلقة نصا تاريخيا حول التصور العلمي للعالم و هو عبارة عن التعريف بالمهمات الفلسفية العلمية السياسية لتصور العلمي، و قد كانت هذه الحلقة غير معروفة بين ح ع ا و ح ع II ، و قد نشر كفاييس مقالا حول هذه الحلقة فعندما قام بتحليل أعمال المؤتمر الخاص بالحركة الوضعية المنطقية المنعقد في براغ سنة 1935، و تعد دراسته الأولى في فرنسا، و فيها صاغ ملاحظاته حول هذه الحلقة و كذا أبحاث المنطقي فتجنشتين.

Jan Sebestick : le cercle de Vienne, doctrines et controverses, l'Harmattan, Paris, 2001, p52.

وموقفه من المنطق كان دافعا قويا لانتقاد فلاسفة الرياضيات اهتمامهم المفرط بالبحث في تصور العدد و أسس الرياضيات كوسيلة ناجحة للخروج من الأزمة التي لحقت بالرياضيات في حين انه كان يجب اخذ الرياضيات كما هي و إن كانت هناك أزمة ففي عقول الرياضيين و الفلاسفة لا في لرياضيات⁽¹⁷⁾، و هذا النقد قد وجه لراسل لفرجه و كل رياضي سعى لإيجاد حلّ لإشكالية الأسس. و لهذا نستج أن فتجنشتين أبعدنا عن حل أزمة الرياضيات .

2 - حلقة فيينا* :

هي عبارة عن نادي فلسفي نشط في فيينا، برلين، براغ خاصة في المرحلة ما بين 1929 إلى غاية مقتل موريس شليك يوم 22 جوان 1936. ويرى كفايس أن نظرية اللغة الفتجنشتانية كانت موضوعا للكثير من المقالات والمدخلات في مؤتمر براغ، ففليب فرانك، شليك، رايشنباخ، اهتموا بالمفهوم الرياضي الخاص بالتقابل بين اللغة والواقع. كارناب ونورث ركزا في مداخلتيهما على المسائل الخاصة بالتركيب والدور الخاص بالفلسفة أو منطق العلم⁽¹⁸⁾.

ب - كفايس واللوجستيكا عند كارناب:

فاللوجستيكا مفادها أن الرياضيات هي جزء من المنطق، فكتاب راسل - وايتهد "برنكييا ماتيماتيكيا" كان دعوة صريحة إلى تأسيس الحركة اللوجستيقية أو لنقل الأساس اللوجستيقي، وذلك من خلال إعادة بناء الرياضيات باستخدام وسائل منطقية خالصة⁽¹⁹⁾. و قد قدم كفايس ملاحظتين :

- 1- من جهة أكد على الرموز الصورية، فلها معنى يبرر استعمالها، ومعنى الرمز يتمثل في كيفية استعماله في النسق الصوري، وهنا نقطة اختلاف مع فتجنشتين.
- 2- إن مفهوم التحصيل حاصل الذي أكد عليه راسل وحدده، يبين الصدق المشروط بالمنطق، ومنه كنتيجة كون الرياضيات هي جزء من هذا المنطق، و هذا كان هدف راسل المتمثل في الإقرار أن الرياضيات تردّ إلى المنطق.

⁽¹⁸⁾ Jean Cavaillès : *L'école de vienne dans le congrès de Prague, Op.cit, p 141*

⁽¹⁹⁾ Sandra Laugier : *Carnap et la construction logique du monde, J.Vrin, Paris, 2001, p 22.*

ولهذا يرى **كفاييس** أن براهين عدم التناقض المقدمة من طرف اللوجستيين، هي عبارة عن إثبات لعملية الردّ، لا البحث في مسألة الأسس. فكل رمز منطقي يمثل مفهوما واضحا بالحدس، وكل إشارة رياضية لها عدة معاني منطقية خالصة. أما بالنسبة للتحصيل حاصل فهي تمثل التحوّلات التركيبية للقضايا، والقضية التكرارية تثبت وجود عبارتين متكافئتين تظهر متطابقتين في صورة التركيب.

بالإضافة إلى ما سبق يؤكد **كفاييس** أن نظرية اللغة كصورة للعالم، أمدت التكرارية أو التحصيل حاصل معناها السلبي⁽²⁰⁾، فالقضايا المنطقية ولأنها تركيبية ليس لها محتوى تجريبي، فهي لا تعلمنا شيئا عن هذه الوقائع وهذا ما أكدته فتجنشتين من قبل.

كما أشار **كفاييس** إلى أعمال المنطقي كارناب الذي دافع في البداية (إلى غاية 1930) عن اللوجستيقا⁽²¹⁾ وقد لخصها في نقطتين: الأولى تتلخص في أن التصورات الخاصة بالرياضيات يمكن أن تشتق من تصورات منطقية بواسطة تعريفات واضحة، بينما الثانية قوانين الرياضيات يمكن أن تشتق من أكسيومات منطقية بواسطة استنتاج منطقي، وهذا تأكيد صريح على علاقة المنطق بالرياضيات وهي علاقة تكامل أو تأثير متبادل. لكن بعد 1931 توصل كارناب إلى بعض الملاحظات هي عبارة عن صعوبات ظهرت أثناء تطبيق هذا الصرح.

فأما الصعوبة الأولى تتمثل في استخدام راسل و وايتهد لأكسيومات لا يتوفر فيها الوضوح، حتى يتم تصنيفها كأكسيومات منطقية، فأكسيوم اللامتاهي وأكسيوم الاختيار تجردا من هذه الخاصية أي لا يكونا من الأكسيومات المنطقية، لأن المنطق لا يهتم إلا بما هو ممكن ولا يمكن أن يبحث ويتساءل من أجل معرفة إذا كان الشيء يوجد أو لا يوجد⁽²²⁾.

أما الصعوبة الثانية ناتجة عن أكسيوم الاختزال الذي لا يمكن اعتباره بدوره أكسيوما منطقيا.

ما عدا هاتين الصعوبتين، فإن كارناب مقتنع بما جاء في الأطروحة اللوجستيقية حيث الأبحاث التي قام بها، دفعته إلى البحث في دراسة التركيب المنطقي للغات " قابلة لأن تعبر على إعادة بناء عقلائي للعلم، وهو ما وجه كارناب إلى مفهوم البناء (**Ausflar**) ".

(20) Jean Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 165.

(21) Sandra Laugier : *Op.cit*, p 22.

(22) *Ibid*, p 23.

وطبعا هذه الدراسة الجديدة لا تعني أبدا تخليه عن اللوجستيقا، فما يرفضه كارناب هو أن القضايا المنطقية والرياضية مرتبطة بمعاني الرموز المنطقية، وهي المعاني التي يجب تحديدها مسبقا في القضايا وهذا لن يكون إلا من خلال مجموعة قواعد. و التركيب المنطقي عند كارناب هو مزود بمجموعة من قواعد:

1- قواعد التكوين: التي تراعي الخصائص المنطقية للقضايا بتحديد تركيب ونمط الرموز التي تكونها، وهي تقابل القواعد التركيبية بالمعنى الضيق، لأن تطبيقها يسمح بتكوين القضايا⁽²³⁾. لكن التركيب المنطقي وظيفته أيضا مراعاة العلاقات المنطقية الموجودة بين القضايا وهذا ما يتم باستخدام النوع الثاني من القواعد.

2- قواعد التحويل: وهي التي تقوم بحساب الروابط أو العلاقات المنطقية للقضايا:

علاقة النتيجة* (*Relation de conséquence*)، علاقة التناقض.

وميز بين نوعين من القواعد⁽²⁴⁾:

قواعد *L*: وهي قواعد منطقية خالصة خالية من المعنى.

قواعد *P*: قواعد فيزيائية تركيبية لها معنى، لأنها تصف العالم من خلال التعبير عن قاعدة من الطبيعة، أو قضية جزئية تعكس ظاهرة جزئية.

فتكوين اللغة إذن هو مدرك كنتاج لاختيار حر من قواعد *L* وقواعد *P* والتي توضع اتفاقيا منذ البداية، يمكن تكوين إذن من القواعد لغة تحقق الأنساق المنطقية أو الفيزيائية وهذا ما يتم عن طريق تطبيق مبدأ التسامح للتركيب (*Principe de tolerance des syntaxes*). وهو مبدأ وضعه كارناب في مقدمة بحثه: "في المنطق لا يوجد قانون، لكن إمكانات غير محدودة للاختيار من بين هذه القوانين"⁽²⁵⁾.

وهذا يعني أنه في المنطق لا يوجد اتفاق " فكل واحد يمكنه تكوين اللغة التي يراها مناسبة، بشرط أنه كلما أراد الكلام، يحدد بوضوح القواعد التركيبية عوض الشروحات الفلسفية"⁽²⁶⁾.

⁽²³⁾ Frédéric Nef : *Le formalisme en question le tournant des années 30, Op.cit, p 308.*

* وهذا ما يؤكد أن اللغة عند كارناب تتميز بتعريفها للنتيجة أي الشروط التي يجب توفرها كي تكون القضية نتيجة لفئة من القضايا، شروط تحدد البنية التركيبية

⁽²⁴⁾ Frédéric Nef : *Op.cit, p308.*

⁽²⁵⁾ Jean Cavailles : *Sur la logique et la théorie des sciences, Op.cit, p 48.*

⁽²⁶⁾ Jean Cavailles : *L'école de vienne, Op.cit, p 142.*

فالمنطق لم يعد مجموعة من الأنساق السورية، لكن مجموعة التركيبات للأنساق السورية وعليه مبدأ التسامح عند كارناب يعني الطابع النسبي للغة، حيث يجوز لكل شخص تأسيس لغة خاصة بشرط أن يستخدمها استخداماً منسقاً، ومن ثم ليس في وسع المنطق أن ينهي عن استخدام لغة معينة ما دامت تلتزم القواعد التي وضعتها بدقة⁽²⁷⁾.

فكارناب إذن لا يعترض على تكوين مجموعة من لغات، ما دامت تشترط فيها القواعد الموضوعية بدقة، فهناك حرية لتكوين لغته الخاصة، منطقته الخاص كما يريد وفي هذا يختلف عن فنتجشين الذي يؤكد وجود لغة واحدة.

يرى **كفاييس** أن هذا المبدأ يطرح تساؤلات⁽²⁸⁾:

- هل هذه القواعد و الإشارات مقبولة؟
- كيف يمكن تكوين لغة محددة؟
- ألا يمكن لهذا التسامح أن يهدم الأطروحات الخاصة باللوجيستيقا؟

في نظر **كفاييس** "الوضوح المنطقي زال، أو على الأقل تمّ إبعاده من الأسس إلى تسلسل المناهج"⁽²⁹⁾. يعتبر **كفاييس** أن هذه التسلسلات ذات ترتيب رياضي و هو ما يجعل المنطق جزءاً من الرياضيات لا العكس. والدليل الذي اعتمده كفاييس يقوم على مفهوم الترجمة (*Traduction*) و هو من وضع غودل، واستخدمه كارناب لتعريف اللغة، ويؤكد على أنه "لا وجود لقضايا خاصة بمنطق العلم. إن قضايا التركيب هي قضايا علم الحساب، جزء من قضايا الفيزياء والتي هي عبارة عن قضايا تركيبية، وهي كذلك نتيجة بنيتها السورية أو الصياغة اللغوية"⁽³⁰⁾.

وبناء على ذلك فإن التركيب المنطقي هو جزء من علم الحساب لا العكس كما أكد اللوجستيقون. و قد كانت هذه فرصة لفرض الصورة الهلبرتية، بل على حدّ تعبير كفاييس "انتصارها"، فمن جهة صورنة الرياضيات لا يمكن أن تتم بالترجمة في المنطق، بل بإعادة تأسيس أو بناء العلمين. ومن جهة ثانية "إعادة البناء يجب أن يكون سورياً، بالمعنى

(27) مراد وهبة: المعجم الفلسفي، دار قباء للطباعة والنشر، القاهرة، 1998، ص 194.

(28) Jean Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 167.*

(29) *Ibid, p167.*

(30) *Ibid, 167.*

الهلبرتي، أي دون أن تكون له صلة بمعنى الإشارات، فيكفي تحديد بعض القضايا والعلاقات التي تؤدي إلى النتيجة" (31).

ومنه فحسب كفاييس الصورة أظهرت كذلك عيوباً ونقائصاً في اللوجستيقا وهذا ما أكده سنة 1939 في مداخلة بعنوان: "الفكر الرياضي" حيث أن هناك تصورين تمّ إبعادهما من الرياضيات أولهما اللوجستيقا، فقد بينت الصورة أن اللوجستيقي عندما استعمل المفاهيم والإجراءات جردها من المعنى، ولهذا فالصوري عندما يستعمل الرمز، فإن معناه هو الذي يحدد نمط استعماله أو وظيفته في النسق الصوري (32). كما بينت الصورة أنه من المستحيل، بموجب قانون غودل " وضع الرياضيات في نسق صوري وحيد، لأن كل نسق يحتوي علم الحساب هو بالضرورة غير تام على أساس أن علم الحساب يحتوي قضايا غير تقريرية ".

ثانياً - الصورية

إذا كانت الصورية قد أشارت إلى تقلص و تضيق مجال اللوجستيقا، فهل هذا يعني أنها بمعزل عن الانتقادات؟

إن الصورية قابلت بين الرياضيات الحدسية التي تقوم على المتناهي و الرياضيات الصورية التي تقوم على اللامتناهي. و اعتبرت الرياضيات الحقيقية هي التي تقوم على اللامتناهي، وهي تختزل إلى أنساق من الإشارات وقواعد التركيب والتي من خلالها يمكن استنتاج مجموعة من صيغ متتالية.

والحديث عن الصورية، حديث عن الرياضي هلبرت، الذي وضع برنامجاً صورياً من أجل التأسيس للرياضيات بالاعتماد على الميتارياضيات وقد كان هدف هلبرت البرهنة على لا تناقض الأنساق الصورية مستخدماً الوسائل المتناهية.

لكن كما أشرنا من قبل، فإن غودل أثبت أن برنامج هلبرت لا يمكن إنجازه، كما أقرّ فون نومان هذه النتيجة وأكد أنها حاسمة" فإذا كانت الرياضيات تكتسب مصداقيتها الموضوعية من عرض مقدماتها في نسق، أو تشكيلة أنساق تتكون من إشارات خالية من كل معنى، ما عدا المعنى الذي تمده إياها قواعد التكوين وقواعد الاستنتاج، ومع استحالة وجود

(31) *Ibid*, p 168.

(32) *Jean Cavailles et Lautman : La pensée mathématique Société française de philosophie, 4 février 1939, p 50.*

البرهنة على اللاتناقض، فإن الصرح سينهار⁽³³⁾. وانتهيار الصرح الرياضي راجع إلى أهمية البرهنة على لا تناقض النسق، فالبرهنة هذه إذن هي التي تمد النسق دلالة ووضوحا. والبرهنة على عدم تناقض النسق الذي يحتوي علم الحساب، لا تتم إلا بواسطة مناهج أكثر قوة من تلك المناهج المصورنة في النسق، ولهذا فإن الميتارياضيات لا يمكنها أن تقوم بهذه الوظيفة لأنها مرتبطة بطرق ووسائل متناهية، وهذا ما دفع فنز إلى الاستجداء بالاستقراء المتصاعد في عملية البرهنة على لا تناقض علم الحساب، لكن الاستقراء المتصاعد المستعمل يتجاوز التجارب الحدسية للاستدلال المتناهي، فيقول كفاييس: "إن الاستقراء المتصاعد الخاص بقنزن، ليست تجريبيا بأي صورة من الصور، إنه ينتمي إذن إلى الرياضيات"⁽³⁴⁾. ولهذا فقنزن أيضا لم يحقق الشرط والمتمثل في استخدام وسيلة أكثر قوة، وهذا ما جعل غودل يبعد كل تصور صوري للرياضيات.

و يؤكد كفاييس موقف غودل من خلال قوله: " من المستحيل ضم كل الرياضيات في نسق صوري وحيد"⁽³⁵⁾. و هو لم يركز في الصورية على هلبرت، بل أيضا على الرياضي فون نومان من خلال نسقه الفرضي-الاستنباطي المقترح، فما موقفه؟ إن فون نومان ركز على أهم مبدأ، ويتمثل في " وجود إمكانيات عديدة للنسق الصوري، هي غير محدودة"⁽³⁶⁾. ففون نومان يرى أن النسق الفرضي الاستنباطي ليس نسقا صوريا وحيدا، وإنما هناك أنساقا صورية تكونت اعتباطيا وكونت في مجموعها رياضيات.

هذا التصور الفرضي-الاستنباطي كما يرى كفاييس أصبح مستحيلا معتمدا على نتيجة لقانون غودل: إن لا تناقض النسق الصوري الرياضي الحاوي لنظرية الأعداد لا يمكن البرهنة عليه إلا بواسطة الوسائل الرياضية غير ممثلة في النسق⁽³⁷⁾. وكننتيجة، من غير المعقول تعريف الرياضيات كمجموعة أنساق فرضية-استنباطية، لأنه كي نصف الأنساق الصورية بأنها استنباطية، فإنه يجب الاعتماد على الرياضيات ذاتها. ولهذا فلا يمكن أن نعرف الرياضيات بالرياضيات ذاتها لأننا سنجد أنفسنا في حلقة مفرغة أو في دور.

(33) Jean Cavailles : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 164.

(34) *Ibid*, p 165.

(35) Jean Cavailles - Lautman : *La pensée mathématique*, Op.cit, p55.

(36) Sinaceur: *Jean Cavailles Philosophie mathématique*, Op.cit, p 73.

(37) Jean Cavailles : *La pensée mathématique*, Op.cit, p 55.

لكن **كفاييس** في مقاله الذي نشر **1939** (الفكر الرياضي) نجده قد أعاد الثقة في مبدأ الاستقراء المتصاعد لقنزن، والذي يرى فيه منهجا رياضيا خارج نظرية الأعداد، ولهذا فهو يصلح أن يستخدم للبرهنة على لا تناقض علم الحساب، يقول: "عدم تناقض أكسيومات هيلبرت في الهندسة الإقليدية غير مبرهن إلا من خلال بناء نسق مستمد من نظرية الأعداد، ولهذا نحن مجبرون للاستجد بالاستقراء المتصاعد" (38).

و من خلال ما سبق، فإن **كفاييس** لم يرفض جملة الصورية وخاصة أنه يرى " أن قانون عدم التمام لغودل لا يقضي على الصورية الهلبرتية" (39). إنه " قانون ضد المناهج التركيبية المستعملة إلى حد الآن" (40). ولكن عموما فإن الصورية لم تتجح كذلك في التأسيس الرياضيات أو التعريف بها.

ثالثا - الحدسانية

بعد فشل اللوجستيقا والصورية، هل يمكن القول أن الحدسانية يمكنها حل المسألة ومن ثمة تجاوز الاتجاهين السابقين؟

إن الحدسانية عند بروور هي عبارة عن إعادة بناء للرياضيات حسب المعايير الدقيقة، مع رفض مبدأ الثالث المرفوع، وكذلك رفض كل ما يدل في العبارة على الوجود كالمكم الكلي والوجودي. والحديث عن الحدسانية، حديث عن الرياضيات الكلاسيكية، حديث عن المنطق الكلاسيكي، فحسب هيتغ المنطق الكلاسيكي = منطق حدسي + مبدأ الثالث المرفوع. لكن ما موقف **كفاييس** من الحدسانية؟ لعرض نظريته أشار **كفاييس** إلى رأي هربراند وقنزن ومن خلالهما صرح بموقفه.

يرى هربراند أن الاستدلال الحدساني هو استدلال يحقق الشروط التالية:

1- لا يمكن اعتباره كعدد متناه محدد من المواضيع، من الأشياء، من الدوال، هذه الأخيرة، هي معرفة جيدا، تعريفها يسمح بحساب قيمها (41).

2- لا نثبت أبدا وجود شيء (موضوع) دون إعطاء وسيلة لتكوينه.

(38) *Ibid*, p 56.

(39) *Sinaceur : Jean Cavailles Philosophie mathématique , Op.cit, p 73.*

(40) *Jean Cavailles : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 153.*

(41) *Boniface : Hilbert et la notion d'existence, Op.cit, p 256.*

3- لا نعتبر أبدا مجموعة كل الأشياء المتسلسلة لا متناهية، وعندما نقول أن الاستدلال هو صادق لكل س، فهذا يعني كل س على حدا⁽⁴²⁾.

وما نستنتجه من هذه الشروط التي وضعها هربراند تأكيده على مسألتين:

- أ- مسألة تنتهي الرياضيات الكلاسيكية، وربط المواضيع المكوّنة بالوجود الفعلي.
ب- رفض كلي للاستدلالات التي تقوم على اللامتناهي ومن تمّ إعادة الرياضيات خطوات إلى الوراء.

وهو نفس ما أكده بروور حيث أنه حاول تسطير مراحل تطور النشاط الرياضي من الحدس ولكنه توقف أمام اللامتناهي، الذي أصبح آفاق النشاط الرياضي الحدساني. وأيضا هو نفس ما أكده قنزن عندما أقر أن المنطق الحدسي يقوم على الدلالة الطبيعية للروابط المنطقية⁽⁴³⁾.

ولهذا وكما يقول هلبرت: " لا نترك أحدا يطردنا من جنة كانتور" وهي الجنة التي تفتح مجالا واسعا أمام تطور الفكر الرياضي و هذا ما يؤكد موقفه الراض للحدسانية، لكن في المقابل غودل أثبت إمكانية ترجمة علم الحساب الأولي في علم الحساب الخاص بهييتنغ، وهذا ما يعني أن كل " قضية مبرهنة بمبدأ الثالث المرفوع قابلة للترجمة إلى قضية مبرهنة دون ثالث مرفوع"⁽⁴⁴⁾. هذا التكافؤ بين القضيتين حسب غودل يؤدي إلى نتيجة صاغها كفاييس: " إن الرياضيات الكلاسيكية يجب أن تهتم بالتمثيل الأسرع أو المتجانس: إن الرياضيات الحقيقية هي الحدسانية"⁽⁴⁵⁾.

ولكن كفاييس غير مقتنع بالحدسانية و مازال ينظر إليها على أنها غير كافية لان تكون أساسا للرياضيات " لا ضرورة لفرض حواجز حدسانية ، ومنه فإن الأساس الحدساني ليس كافيا كغيره من الأسس".

وبناء على ما سبق فإن كفاييس قد عرض المناهج الثلاثة وقام بإبداء ملاحظاته، وتبين له في النهاية، أنها لم تستطع حل المسألة سواء أكانت خاصة بالتعريف أو بالأساس، كما خلص إلى اعتراف يتمثل في أن هذا العمل صعب جدا، فيقول: " إنه عمل صعب جدا،

⁽⁴²⁾ Thierry Coquand : Herbrand et le programme de Hilbert, 15 Février 2008, P 43.

<http://www.dma.ens.fr/herbard2005coquand-Slides.pdf>.

⁽⁴³⁾ Ibid.

⁽⁴⁴⁾ Sinaceur : Jean Cavaillès et la philosophie mathématique, Op.cit, p 72.

⁽⁴⁵⁾ Jean Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 170.

سأحاول تقديم بعض الأفكار، صحيح هي ما زالت لم تتضح بعد، ولكن سأقوم بعرض التي تحققت فيها نسبة معينة من اليقين⁽⁴⁶⁾. وقد توصل **كفاييس** إلى النتائج التالية:

1- " ضرورة التخلي عن فكرة تعريف الرياضيات"⁽⁴⁷⁾، لأن كل من الاتجاهات الثلاث

لم تفلح في تحقيق هذا الغرض، فمن الأفضل ترك هذه المسألة جانبا.

إلا أن شريكر (*M.Schrecker*) ردا على **كفاييس** في المداخلة ، أكد أن مسألة التعريف تخص كل العلوم، لا الرياضيات فقط، فلا يوجد علم قادر على تقديم تعريف من خلال وسائله ومناهجه. ولهذا تساءل هل يمكن أن يكون خارج العالم حتى يتسنى له الوصول إلى تعريف ميدانه؟⁽⁴⁸⁾ ولهذا فتعريف الرياضيات لا يعني استخدام وسيلة لا تنتمي إليها، إن الرياضيات هي علم فرضي-استنباطي وإذا ما رفض **كفاييس** تعريف الرياضيات بأنها: " فرضية-استنباطية، فسيجد نفسه في حلقة مفرغة أو في نسق لا منفذ له (دون مدخل ودون مخرج)"⁽⁴⁹⁾.

2- ضرورة تحليل الرياضيات كتطور، وتبيان كيفية تطورها من مرحلة إلى أخرى،

و لأجل هذا يتطرق إلى اللامتناهي، من جهة ومن جهة ثانية إلى تعميق علاقتها بالعالم، وهذا ما أطلق عليه **كفاييس** بالخصوبة الخالصة⁽⁵⁰⁾.

المبحث الثاني: الخصوبة الخالصة

إن ثمرة تحليل المناهج الثلاث هو تأسيس **كفاييس** لما يعرف بالخصوبة الخالصة

(*la fécondité propre*)، التي تجعل من الرياضيات تطورا^{*} معقولا، فكيف ينظر **كفاييس**

للتطور؟

⁽⁴⁶⁾ Jean Cavailles: *La pensée mathématique, Op.cit, p 56.*

⁽⁴⁷⁾ *Ibid, p56.*

⁽⁴⁸⁾ *M. Schrecker, dans, Jean Cavailles : La pensée mathématique, Op.cit, p 78.*

⁽⁴⁹⁾ *Ibid, 78.*

⁽⁵⁰⁾ *Jean Cavailles : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 171.*

* *Devenir : futur, avenir, progression(Le petit Larousse illustré, Larousse, 2007, p357).*

** يعرفها بن منظور: النظرية هي ترتيب أمور معلومة على وجه يؤدي إلى استعمال ما ليس بمعلوم، وقيل النظرية طلب العلم من العلم.

كما يعرفها لالاند هي إنشاء تأملي للفكر يربط نتائج بمبادئ... هي بناء فرضي استنباطي يعكس رؤية

العالم حول قضية متنازع حولها. (*Lalande :vocabulaire technique et critique de la*

philosophie, Op.cit, p1128

أولاً- التطور الرياضي:

أ- تعريفه:

إن الرياضيات هي في تطور، فليس فقط من المستحيل ردها إلى شيء آخر غير الرياضيات، بل إن كل تعريف يظهر في مرحلة هو ناتج عن هذه المرحلة، أي تابع للتاريخ الذي انبثق منه، فلا يوجد إذن تعريف، أولي تعريف قبلي. والحديث عن التطور يتم من خلال المراحل السابقة إلى غاية المرحلة الحالية، وكل مرحلة تنحل إلى مجموعة من النظريات، والنظرية** هي حقل من التصورات، من المواضيع المتناسقة فيما بينها حيث يتم الانتقال من المبادئ إلى النتائج، فهي تتصف بالوحدة الداخلية وكل نظرية هي قابلة لأن تدحض أو تعدل بنظرية أخرى، وهكذا يتم التطور.

ولهذا" في الحدسانية أكد هيتغ أن الرياضيات عبارة عن نسق عضوي يتطور باستمرار، ومن المستحيل وضع حدود لها"⁽⁵¹⁾. فالرياضيات هي في تطور وما يجب فعله هو فهم التاريخ، حتى نستطيع فهم المراحل التي مرت عليها الرياضيات. فكيف تتطور الرياضيات؟ الرياضي يسجل مجموعة من المسائل، ويفترض ضرورة ظهور مفهوم جديد يظهر بالفعل ويقوم بحل المسائل المطروحة فعلا، ولهذا فالضرورة تؤدي إلى تحقيق النجاح. ولقد قدم **كفاييس** أمثلة على كيفية التطور من خلال مؤلف كانتور ونسق فون نومان، إذ أن علم الحساب تأسس من خلال تطبيق منهج العدّ، الذي يؤدي إلى تكوين عدد جديد بالاعتماد على مجموعة الأعداد المكونة، هذا المنهج الذي يبيّن تماسك وتناسق علم الحساب في مجال المتناهي بل كذلك في مجال المتصاعد، إذ أنه يبيّن وحدة النظرية الترتيبية. أما بالنسبة لوحدة النظرية الأصلية، فهي كذلك من خلال تطبيق منهج كانتور الذي يعتبر وسيلة لتأسيس الأعداد الأصلية⁽⁵²⁾.

إن الرياضيات تتطور في حركة مزدوجة حيث أنها تؤسس نظريات جديدة، وتقوم بتعديل أو تحويل النظريات القديمة. ولهذا فإن الإجراءات والمواضيع لم تؤسس مرة واحدة، أو دفعة واحدة، بل كانت هناك مفاهيم بسيطة تشكل قاعدة للرياضيات، ولكن لم تكن أولية ولهذا فهي تطورت في خط مواز لتطور الرياضيات. فالرياضيات اليونانية تختلف كليا عن

⁽⁵¹⁾ Jean Cavailles: *La pensée mathématique, Op.cit, p 56.*

⁽⁵²⁾ Jean Cavailles : *Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 178.*

رياضيات القرن 19 أو 20، فالأعداد والأشكال الهندسية مثلا ليست هي نفسها كما كانت عند اليونان.

ولكن علينا التأكيد أن الرياضيات لا تتطور انفصاليا بل اتصاليا، فإذا كانت الفيزياء تتطور بتعويض نظرية بأخرى فإن الرياضيات تتطور بالدقة والعمق في التفكير، وهذا ما يؤدي إلى تراكم الفكر الرياضي فكل إسهام وكل مفهوم له أثر في تطور الفكر الرياضي. إذن نؤكد على أن الرياضيات هي خاضعة إلى تطور حقيقي وأن النظرية الحالية هي مرحلة انتقالية هي صورة في المستقبل، يقول **كفاييس**: " إن المعنى الحقيقي للنظرية ليس في الطابع الذي أدركه الرياضي ذاته على أساس أنه ضروري، ولكن في المستقبل التصوري الذي لا يمكن أن يتوقف "(53).

إن التطور هو حركة من خلالها تنتظم النظريات وتأخذ طابع النظريات. فالرياضيات هي مرادفة للتطور والذي يقوم باختراق المجالات المتناهية، يوسعها ويغيرها(54).

ولهذا ومما سبق فإن الرياضيات هي من جهة:

- 1- مجموعة من النظريات، من أنساق مكوّنة من إجراءات ومواضيع.
- 2- الرياضيات هي حركة مزدوجة حيث تتكوّن نظريات جديدة وتتغير وتحول النظريات القديمة، والانتقال من نظرية إلى أخرى يتم عن طريق سياقات متنوعة.

ب - خصائص التطور:

إن تطور الرياضيات يخضع لمجموعة من خصائص هي:

1- الاتصال (*continuité*):

كما رأينا أعلاه، فإن هناك اتصال وترابط بين النظريات القديمة والجديدة، أو لنقل النظريات السابقة التي تهيئ المجال المناسب لابتكار واختراع أفكار جديدة، تؤدي بدورها إلى تأسيس نظريات جديدة تقوم بتغيير النظريات السابقة التي انطلقت منها. ولهذا فحسب **كفاييس** الرياضيات الجديدة يتم تحضيرها في النظريات القديمة، ولكنه يستدرك ويؤكد أن

(53) Jean Cavaillès : Sur la logique et la théorie des sciences, Op.cit, p 23.

(54) Jean Cavaillès: La pensée mathématique, Op.cit, p 59.

الاتصال غير قوي حيث يفهم الآخر أن المنهج واحد والإجراء واحد، ولكن هناك قطيعة جزئية ولهذا فالالاتصال يجب أن يكون نسبياً⁽⁵⁵⁾.

2- الضرورة (*nécessité*):

إن الضرورة المقصودة ليست المنطقية التي تستلزم تسلسل للقوانين أو المقدمات، وليست رياضية التي تستلزم تطبيق منهج معين، لكن الضرورة المقصودة هي انتقال من نظرية إلى أخرى، والتطور التاريخي للنظرية. وهذا ما جسده **كفاييس** أثناء دراسته لتكوين نظرية المجموعات. فكل ما يمكنه إعاقة التطور يعزل، وحينها يمكن معرفة كيف تغيرت النظرية، ولهذا تطور الرياضيات هو مستقل، وذلك لأن الإبستيمولوجي يرى أنه من الممكن إيجاد تسلسل ضروري من خلال الأحداث التاريخية... كما أن المفاهيم المقدمة هي مفروضة من الحلّ المقدم لمسألة ما، ومن خلال حضورها فإنها تطرح بدورها مسائل جديدة وهكذا...⁽⁵⁶⁾. ولهذا فالإبستيمولوجي يستنتج وجود تطور " والرياضي يجد نفسه في مغامرة لا يمكن توقيفها بالبساطة التي يعتقدها، لأن كل لحظة منها هي عبارة عن جديد"⁽⁵⁷⁾.

إن التطور هو ضروري من جهة كون أسباب التطور هي ظواهر داخل المجالات الخاضعة للتطور، حيث أنه يمكن تفسير التطور دون الاعتماد على أي بنية خارجية. فالمجال يحمل في طياته أسباب تطوره، ولكنه لا يحدده بصورة مبرهنة.

إن ضرورة التطور تتمثل في المسائل والمناهج الرياضية، و في هذا يقول **كفاييس**: " هذا ما حاولت القيام به بالنسبة لنظرية المجموعات، لا أقول أن عملي كان ناجحاً، لكن أثناء تطور هذه النظرية التي تبدو منالاً للنظرية الرائعة، الناتجة عن اكتشافات جذرية غير متوقعة بدا لي التوصل إلى ضرورة داخلية: إنها بعض المسائل الخاصة بالتحليل التي أدت إلى نشأة المفاهيم الخاصة، وأحدثت بعض الطرق كما هون الشأن عند بولزانو وديرشلي".

إلا أن بول ليفي قد وافق **كفاييس** في كون الضرورة الداخلية تلعب دوراً كبيراً في التطور، ولكن من المستحيل أن نبين أن مثل هذا القانون يجب أن يظهر في هذا التاريخ بالذات، فإذا لم يتوصل العالم إلى نظرية بعينها في عصر معين، وإذا كان القانون لم يبرهن

⁽⁵⁵⁾ *Ibid*, p 60.

⁽⁵⁶⁾ *Ibid*, p 57.

⁽⁵⁷⁾ *Ibid*, p 57.

في سنة ما، فإنه سيتم الاكتشاف بعد 5 سنوات أو 10 سنوات، والدليل الذي قدمه بول ليفي أنه يوجد عدد كبير من القوانين تم اكتشافها بفارق زمني بسيط من طرف الكثير من العلماء، لأنها تلبي دعوة ضرورة تطور الفكر الرياضي في هذه المرحلة⁽⁵⁸⁾.

3- اللاتوقع (imprévisibilité):

إن التطور هو حقيقي، أي أنه غير متوقع يقول كفاييس: " لن يكون غير متوقع بالنسبة للرياضي الذي أثناء نشاطه يتصور من أي جهة يجب أن يبحث ولكنه غير متوقع في الأصل". فإذا كانت المفاهيم الجديدة تظهر كضرورة بالنسبة للمسائل المطروحة، فإن هذا الجديد هو جديد كامل، أي أنه لا يمكن من خلال تحليل بسيط للمفاهيم المستعملة، إيجاد داخلها مفاهيم جديدة⁽⁵⁹⁾.

وأقرب مثال، نجد الطوبولوجيا* العلم الذي ظهر في أقل من 50 سنة، وكل يوم يأخذ طابعا جديدا وتطورا غير منتظر، يؤثر أكثر فأكثر في كل الفروع الرياضية.

وحول هذه الخاصية، كارتان أكد أن التطور الرياضي قد يكون متوقعا أحيانا و أحيانا أخرى غير متوقع، والدليل على ذلك تاريخ الرياضيات الذي يثبت العكس: " التاريخ يعلمنا أنه في تاريخ الرياضيات- التي أعرفها وعشتها- بعض التوقعات، فوجدت سنة 1900،

⁽⁵⁸⁾ Paul Lévy, dans Jean Cavaillès: *La pensée mathématique, Op.cit, p 68.*

⁽⁵⁹⁾ Jean Cavaillès: *La pensée mathématique, Op.cit, p 57.*

* الطوبولوجيا أو الهندسة اللاكمية فرع من الرياضيات يُعنى بدراسة خواص الأشكال الهندسية. وهذه الخواص لا تتغير علي الرغم مما يحدث للشكل من ثني أو مدّ. ولا يميز علم الطوبولوجيا بين شكل هندسي كروي وشكل هندسي مكعب، لأنه يمكن تشكيل أو دمج هذه الأشكال بعضها ببعض. إلا أن من أهم خصائص علم الطوبولوجيا ومميزاته أنه يميز بين الشكل الهندسي الكروي وشكل الحلقة لأنه لا يمكن تعديل الشكل الهندسي الكروي، وتحويله إلى شكل حلقي دون تمزيق لشكل الحلقة. وغالبًا ما يُعرف علم الطوبولوجيا بالشريحة الهندسية المطاطية لأن أشكاله يمكن تعديلها وتحويلها. ولا شك أن هناك اختلافًا بين الطوبولوجيا والهندسة الإقليدية إذ إن الطوبولوجيا لا تُعَبَأُ بالإستقامة أو التوازي أو المسافة لأن التعديل والتحويل يمكن أن يطرأ على هذه الأشكال الهندسية. أما علم الطوبولوجيا فيدرس المسائل الأخرى، مثل كم مرة يُمكن للمنحنى أن يتقاطع مع نفسه، وهل كان سطحًا مغلقًا أو أن له حدودًا واضحة أم غير ذلك، وهل كان سطحًا متصلًا أم غير متصل. وعلم الطوبولوجيا يفترض نظريات علمية ثم يُحاول إثباتها. وهو بهذا يُشبه علم الهندسة الإقليدي. فعلى سبيل المثال: يُمكن تطبيق نظرية الألوان الأربعة على الخرائط. وهذه النظرية تنص على أن كل ما يُحتاج إليه لتلوين أية خريطة جغرافية هو أربعة ألوان، وهذه الألوان تكفي لجعل البلدان المتجاورة تأخذ لونًا يميز كلاً منها عن الأخرى. وهذه النظرية قد أثبتتها العالم الرياضي الأمريكي كنيث أبيل والعالم الرياضي الألماني وولف جانج هيكن في عام 1967م. ويُعد العالم الرياضي الفرنسي هنري بوانكاريه (1854-1912م) رائدًا في حقل الطوبولوجيا النظرية.

محاضرة هلبيرت حول المسائل المستقبلية للرياضيات، وهي محاضرة أثارت الانتباه...، هلبيرت حدد المسائل التي يجب أن تطرح أثناء تطور الرياضيات خلال 50 سنة على الأقل، وتوقع المسائل الأكثر أهمية التي طرحت بالفعل⁽⁶⁰⁾. وهناك جانب غير متوقع، غير منظر. ولهذا قلنا من قبل أن الطوبولوجيا تأخذ كل يوم طابع جديد وتطور غير متوقع. أما بول ليفي فقد عارض أيضا هذه الخاصية وأكد أن تطور الرياضيات هو متوقع والدليل الذي قدمه كان مثال عن نظرية رياضية هي نظرية التكامل التي كان لوبسغ قد صاغها بصورة نهائية. إن هذه النظرية مهمة جدا في الرياضيات ولكن يقول ليفي إذا لم يوجد لوبسغ، هل هذا يعني أن النظرية لم توجد؟ يؤكد ليفي أن النظرية كانت ستوجد بحضور أو دون لوبسغ، هل هذا أن بورال كان سيكتشفها، أو إحدى تلامذته لا نعم؟ لكن ما يجب معرفته أنه بعد أعمال بورال و "جوردان" (1837-1912)، كانت هناك ضرورة حتمية لتكوين نظرية التكامل في أجل لا يتعدى العشر سنوات أو 15 سنة، فالضرورة هنا هي التي تجعل التطور متوقعا غير مفاجئ⁽⁶¹⁾.

ولكن هناك بعض الاكتشافات تكون قبل وقتها وأهميتها قد لا يتم التوصل إليها إلا بعد وقت طويل، فهي تجسد خاصية اللاتوقع للتطور.

4 - التكامل (intégrité):

إن تطور النظريات هو متكامل، حيث أن هناك علاقة تأثير متبادل بين النظريات فإذا ما تم تطبيق مفهوم في نظرية، فإنها تطبق أيضا في النظريات المجاورة لها، حيث تكون قادرة لإنتاج مفاهيم جديدة تطبق من جديد على النظرية الأولى.

ولهذا فالتطور يقوم بتنشيط كل النظريات المجاورة، وهي تتطور بصورة متكاملة. يقول كفاييس: "إن تطور الرياضيات الكاملة يتم حسب وتيرة ضرورية، يوجد تكيف متبادل لمفاهيم وتوسيعات تحدثها تطبيقاتها الإجبارية في الميادين المجاورة"⁽⁶²⁾.

5 - الاختزال (réduction):

⁽⁶⁰⁾ Cartan ,dans Jean Cavaillès: dans *La pensée mathématique*, Op.cit, p 67.

⁽⁶¹⁾ Ibid, p 69.

⁽⁶²⁾ Jean Cavaillès: *mathématiques et formalisme*, *Revue internationale de philosophie*, N° 8, 53, 1949, p 6.

إن التطور الذي يتصف بالاتصال والتكامل، لا يمكن أن نختزله في مرحلة معينة أو في نظرية مستقلة، إنه عبارة عن تسلسل ضروري للمفاهيم والنظريات. ولهذا يصعب تعريف الرياضيات، لأن تعريفها يعني ردها إلى شيء آخر أو إلى جزء منها وهذا ما يرفضه **كفاييس**: "إن الرياضيات تؤسس تطور مفردا، فليس فقط من المستحيل ردها إلى شيء آخر غيرها،... لا يوجد تعريف نهائي" (63).

إن تعريف الرياضيات، حسب **كفاييس** يعني إما أن الرياضيات ليست رياضيات وهذا غير معقول، وإما إحصاء المناهج المستعملة من طرف الرياضيين، وهذا أيضا غير مقبول، لأنه لا يوجد رياضي يقبل أن يقوم بإحصاء بصورة نهائية المناهج المستعملة، فيمكن إحصاؤها في فترة معينة، لكن من غير الممكن القول أن هذه فقط رياضية وما بعدها غير رياضي (64). ويرى **كفاييس** أن هذا ما يفسر فشل كانتور في توحيد الرياضيات بواسطة النظرية الترتيبية فيما يخص نظرية المجموعات (65).

بناء على ما سبق فإن النظريات تتطور بصورة ضرورية وتتموضع في صرح جديد بصورة متناسقة متكاملة، تتواصل فيما بينها دون أن ترد إحداها إلى أخرى، ودون أن تضم إحداها الأخرى. إن الرياضيات هي حركة أين تتكون وتتحول النظريات، تتصل فيما بينها وتتكيف في تطورها.

ج - اللحظات الجدلية (*les moments dialectiques*):

عندما تحدث **كفاييس** عن خاصية اللاتوقع أشار إلى الجدل الأساسي في الرياضيات وعرفه: "إذا كانت المفاهيم الجديدة تظهر كضرورة من طرف المسائل المطروحة، فإن هذه الجديدة هي بالفعل كاملة،... هي معرفة إذا كان نشاط الرياضيين هو نشاط تجريبي" (66). ويقصد **كفاييس** بالتجربة نسقا من الأفعال محكوما بقاعدة وخاضعا لشروط مستقلة عن الأفعال، وهذا يعني أن كل منهج رياضي يعرف بالنسبة إلى وضعية رياضية سابقة، متعلق

(63) Jean Cavailles: *La pensée mathématique*, Op.cit, p 51.

(64) *Ibid*, p 56.

(65) Jean Cavailles: *mathématiques et formalisme*, Op.cit, p 8.

(66) Jean Cavailles: *La pensée mathématique*, Op.cit, p 55.

بها جزئيا، ومستقل عنها، حيث نتيجة الفعل يجب أن تستنتج من تطبيقها، ومن تم تعريف التجربة الرياضية.

ويؤكد كفاييس ضرورة تفريق التجربة الرياضية عن التجربة الفيزيائية، فالثانية لا تتميز بالخاصية المتمثلة في أن الأفعال هي منجزة وفق قواعد، ومن جهة أخرى النتيجة ليست لها دلالة في النسق ذاته، وهما خاصيتان نجدهما في التجربة الرياضية حيث الفعل يكون منجزا ونتيجته تأخذ مكانها في النسق الرياضي الذي هو تطوير لنسق السابق⁽⁶⁷⁾. و نتيجة لما سبق يطرح كفاييس سؤاله: كيف تحقق هذه التجارب؟

اقترح طريقتين:

1 - الموضوعانية (Thematisation):

يقصد بها كفاييس " أن الأفعال المنجزة على نمط أو مجال من الأفراد يمكن بدورها أن تعامل كأفراد، فتكون مجالا جديدا يكون محل اهتمام الرياضي"⁽⁶⁸⁾، ويعرفها أيضا: " تحوّل الإجراء من مجال إجرائي أعلى إلى عنصر"⁽⁶⁹⁾.

مثال: التحوّلات الهندسية: الدوران والانتقال هي أفعال، هي إجراءات، تطبق على نقاط الفضاء. و من خلال الموضوعانية، فهي حوّلت (ترجمت) إلى مجال من الأشياء ، خاضعة إلى إجراء الجمع، التركيب وهذا ما يضيف عليها بنية الزمرة⁽⁷⁰⁾.

إن هذا المنهج يسمح بتطابق الأنشطة الرياضية، كما تكمن أهميته أيضا في تبيان الرابطة الموجودة بين النشاط المحسوس للرياضي في اللحظات الأولى لتطوره والإجراءات الأكثر تجريدا، لأن الرابطة توجد حيث نسق الأشياء يعتبر نسقا للإجراءات، التي تعتبر إجراءات تطبق على إجراءات أخرى والتي تجد نفسها مطبقة على الأشياء المحسوسة⁽⁷¹⁾.

إن الموضوعانية هي عبارة عن انقلاب (renversement) تصبح من خلاله الإجراءات المنجزة مواضعا لإجراء من درجة أعلى في نظرية جديدة. ولقد تطرق كفاييس إلى هذا المنهج عندما عرض برهنة ديدكند حول وجود المجموعة اللامتناهية، فقد قدم الموضوعانية كإجراء يتم داخل النظرية، إذ أنها تجعل من الفكر موضوعا لفكر الفكر، ثم من

⁽⁶⁷⁾ Ibid, p 58.

⁽⁶⁸⁾ Ibid, p 58.

⁽⁶⁹⁾ Jean Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 177.

⁽⁷⁰⁾ P C Noguès : De l'expérience mathématique, Op.cit, p 136.

⁽⁷¹⁾ Jean Cavaillès : la pensée mathématique ,Op.cit,p58.

هذا التضاعف موضوعا مماثلا للوحدة، التي يمكن إخضاعها للإجراء الذي يضيف وحدة لأخرى، فالموضوعانية ك لحظة جدلية، تتدخل إذن في الانتقال من نظرية إلى أخرى.

2- الأمثلة (idéalisation):

ونعني به أن الإجراء الذي وجد بصورة عرضية محمدا ببعض الظروف الخارجية، وهذا لن يكون إلا من خلال وضع نسق من ⁷²سيكون محررا من هذه الظروف" (المواضيع لا تتقاطع مع مواضيع الحدس، وبهذه الطريقة تمّ تعميم مفهوم العدّ، فالأمثلة إذن تقوم على إزالة الحدود التي فرضت على الفعل الرياضي، وهو ما عبر عنه كفايس بقوله: " ماذا نعني في الواقع من الأمثلة؟ إنها صقل الظاهري، الخارجي كفايس بقوله: " (73) " *raboter l'extrinsèque*)

إن الأمثلة تطرح مسألة طبيعة المواضيع الرياضية هل هي موجودة حسيا؟ وإذا كان كفايس قد رفض الوجود الحسي، فهل هذا يعني أن المواضيع الرياضية لها وجود خاص بها، على أساس وجود تضاف بين الموضوع والفعل الذي ينجز من طرف الرياضي.

هل يمكن أن توجد مواضيع مثالية موجودة في ذاتها؟

إن هذه التساؤلات كانت أيضا محل نقاشات حلقة فينا وهلبرت حول إمكانية وجود جزء من المواضيع المثالية ترجع إليها الرياضيات، وهو ما يسميه فنزن الترييض (*mathématisation*) في ذاته (74) ، هذا الأخير الذي قام بعملية التوفيق بين الرياضيات في ذاتها والوجود البنوي للحدسانية، أما راسل فيرى أن إدراك الأنساق الخاصة بالمواضيع الرياضية ذات الوجود الذاتي، غير ضروري لضمان الاستدلال الرياضي، فمثلا إذا تعلق الأمر بالمتصل، فلا يمكن أن نعتمد على مواضيع رياضية موجودة في ذاتها، لأن المتصل يتطلب الاستمرارية والتواصل الواقعي، فهو وجود، و مثل هذه المواضيع تعيق تطور الرياضيات والتفكير في هذا التطور (75).

(72) *Ibid*,p59 .

(73) *Jean Cavaillès : Sur la logique et la théorie des sciences, Op.cit, p 81.*

(74) *Jean Cavaillès : La pensée mathématique, Op.cit, p 59.*

(75) *Ibid*,p59.

بينما **كفاييس** يرى أنه إذا ما تم الاعتماد عليها فإنه من الصعب تحديد ما تعنيه، كما أنه توصل إلى مجموعة من الصعوبات تجبر الرياضي على التخلي عنها، يذكر على سبيل المثال لا الحصر مفارقة سكولم ، فلقد برهن سكولم سنة 1930 النتيجة التالية: "إذا كانت مجموعة عدودة من صيغ حساب المحمول من الدرجة الأولى لها نموذج M ، يوجد نموذج غير عدود M' مكافئ لـ M " ⁽⁷⁶⁾، وهذا ما يدل على تكافؤ المجموعة العدودة و غير العدودة و منه خلافا لما أثبتته كانتور $\dot{A}_0 < 2 \dot{A}_0$ فان المفارقة تؤكد على أن: $\dot{A}_0 = 2 \dot{A}_0$ هذه المفارقة بنيت على أساس وجود تناقض في نظرية المجموعات **ZFC** ، ولتوضيح وشرح هذه المفارقة لجأ إلى استعمال الصورة ⁽⁷⁷⁾.

فإذا كان للرياضي نموذج (*modèle*) ، فإنه يفترض أنه يحقق نسق الأكسيومات، ومن الممكن تكوين نموذج قابل للعدّ يحقق نفس نسق الأكسيومات، وكمثال نسق الأكسيومات الخاص بنظرية المجموعات الذي يطابق نموذج قابل للعد.

وإذا افترض الرياضي مجموعة من الأكسيومات التي تعبر عن خصائص الموضوعات كما يريد، فلا يمكن أن يفترض أن نفس هذه الأكسيومات تفترض وجود المواضيع في نفس الوقت، ولهذا يجبر الرياضي على افتراض وجود حقل من المواضيع يمكن استنتاجها من خصائص مواضيع أخرى.

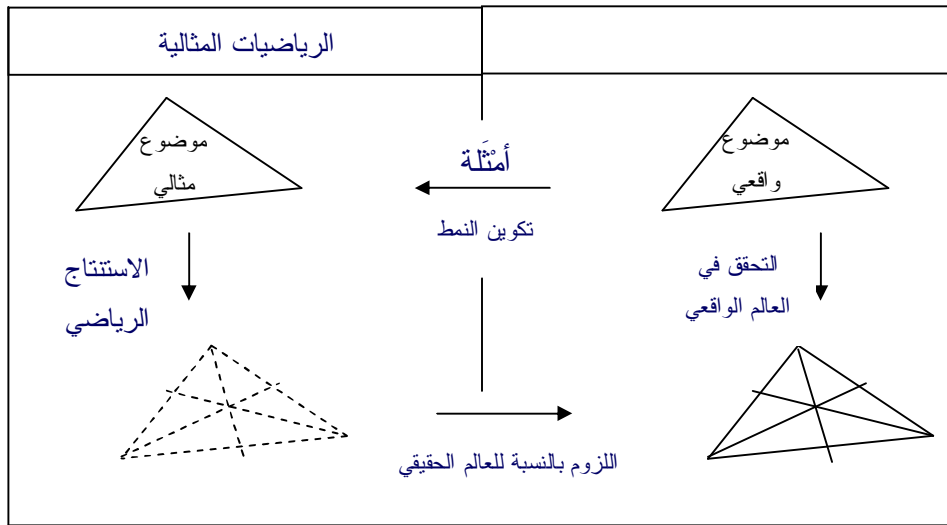
و يبين **كفاييس** وهو يشرح الأمثلة، أن ما لا يمكن قوله هو أن هذا الحقل من المواضيع مميز ظاهريا من خلال نسق الأكسيومات الموجودة (الموضوعة)، وهذا ما يفترض إبعاد التصور المثالي من وجود المواضيع الرياضية، وكذلك التأكيد على التكامل الموجود بين لحظات التطور الرياضي، كما يؤكد **كفاييس** أنه لا يمكن دراسة الرياضيات تاريخيا من خلال إبراز التحولات والتغيرات التي طرأت على الهندسة الإقليدية خاصة الرياضيات عامة، ولهذا ما يهم هو البحث عن كيفية التطور، والتوقف عند كل مرحلة لمعرفة كيف تأسست المفاهيم وكيف تطورت و ما هي النتائج المترتبة عن دحض بعض المفاهيم، مما أدى إلى ظهور مفاهيم جديدة وهو بدوره ما يؤدي إلى تطور الرياضيات، ولهذا فإن مفهوم وجود

⁽⁷⁶⁾ Hourya Sinaceur : corps et modèles essai sur l'histoire de l'algèbre, Op.cit, p197.

⁽⁷⁷⁾ Jean Cavailles : La pensée mathématique, Op.cit, 60.

المواضيع الرياضية هي مهمة خاصة، وعلى الخصوص بالنسبة للفيلسوف الذي يطرح دائما مسألة مفهوم " الوجود " لمواضيع الفكر .

فما هو الموضوع الرياضي إذا كان ليس الوجود؟
يمكن تمثيل الأمثلة من خلال الرسم التالي (78):



مخطط الأمثلة

هذا المخطط يبين أن الرياضيات اليوم أصبحت تهتم بالمواضيع المثالية بمعزل عن الواقع أو العالم المحسوس، معيار صدقها ليس مدى تحققها في العالم الواقعي، وإنما تتأسق المبادئ والنتائج في الاستنتاج الرياضي.

الأمثلة هي ناتجة عن التعميم الذي " هو روح الرياضيات ونتائجها هي وظيفية بالنسبة للحالات المماثلة " (79). فالتعميم إذن هو الذي يؤدي إلى إدخال عناصر جديدة، مواضيع جديدة، تمثل بالنسبة للعناصر الأولية عناصراً مثالية، إذ أن الطرح والقسمة المعرّفتان كمقلوب للجمع والجداء، تسمح بإدخال أعداد سلبية وناطقة، ولهذا يقول كفاييس: "وهكذا تتكون مختلف

(78) J David Philip, Harsh Renben : *L'univers mathématique*, tr L chambadal, Gautier Villars, Bordas, Paris, 1985, p 124.

(79) John Mason : *l'esprit mathématique*, De Boock Université, 1997, Paris, p 7.

التعميمات لمفهوم العدد⁽⁸⁰⁾. وفي تحليل هلبيرت، فإن التعريف الشامل الذي يحدد التعميم هو صورنة، فالتعميم عنده هو مؤسس على الصورنة.

3 - الصورنة، التعميم، الأمثلة:

الصورنة كما أشرنا من قبل قد تطبق على الإجراءات كالجمع والجداء كما هو الشأن عند قراسمان وهانكل، قد تكون في الجبر وهي التي نجدها عند هلبيرت، صورنة المناهج عند ديدكند، صورنة البراهين بواسطة الحساب المنطقي، ومهما يكن المستوى و المجال، فإن الصورنة تقوم بتعريف إجراء منجز في مجال معطى، بمعزل عن هذا المجال و المستوى. والإجراء أو العملية (*Geste*) الذي هو تجسيد لفعل، يُمثل بتركيبات من الإشارات، وخصائصه يُترجم بقواعد تطبق على تركيب الإشارات، ومنه عندما نعرّف الإجراء (*Geste*) يجب أن يتحقق الشرط والمتمثل في أن الإشارات التي تمثله تحقق القواعد التي توضحها.

فالجمع المطبق على الأعداد الطبيعية يتحول إلى إجراء لا محدود رمزه (+) يطبق على مواضيع لا محددة *a, b, c, o* ... تحقق فقط الخصائص أو القواعد للخاصية التبديلية ($a + b = b + a$)، والعنصر الحيادي ($a = a + o$)، ومنه فالإجراء (*Geste*) تم إخراجها من المجال الحدسي، الذي ظهر فيه، وتم نقله إلى الحقل المجرد.

فالصورنة إذن هي عبارة عن لحظة جدلية، تؤدي إلى تكوين نظرية جديدة بالاعتماد على النظرية القديمة في التعميم، تعرف الإجراء لتمديده خارج المجال الابتدائي، فالإجراء يمكن أن يستقل عن الحقل الابتدائي وحدوده، ويطبق على الحقل الموسّع، وهذا ما يفرض جمع العناصر المثالية بالمجال الابتدائي وهذا ما جعل كفاييس يؤكد بقوله: " إن العناصر المثالية هي نتائج ممكنة للإجراء ".

فالإجراء هو فعل، الذي انطلقا من موضوع أو مواضيع يصل إلى موضوع جديد، إجراء معمم، الأفعال (*Gestes*) تتجاوز الحقل الأولي، وابتداء من المواضيع الحدسية

⁽⁸⁰⁾ Jean Cavaillès : *La pensée mathématique, Op.cit, p 57.*

يصل إلى العناصر المثالية، ثم تتحول هذه العناصر إلى أفعال وهكذا... فالصورنة والتعميم يحققان من جهة التجريد ومن جهة ثانية تمديد الإجراء⁽⁸¹⁾.

ولهذا فإن كفاييس ربط بين الصورنة والتعميم، بين التعميم و الأمثلة ، ومنه الربط بين الصورنة و الأمثلة، ففي حالة وجود صعوبات يلجأ الرياضي إلى الصورنة، وأثناء العمل فهو أفلاطوني (مثالي)⁽⁸²⁾. ولكن هذا لا ينفي وجود اختلاف بين الصوري والمثالي ويتمثل " في مسألة الوجود والواقع، ولكنهما يتفقان حول مبادئ البرهنة المسموح بها عند تطبيق الرياضيات "⁽⁸³⁾.

ومما سبق نصل إلى أن الأمثلة والموضوعانية يقومان بصنع مواضيع جديدة ذات نمط مخالف، فالأمثلة تقوم بتوسيع المجال الإجرائي الأولي على العناصر المثالية التي تواجه الحدوس القديمة و هذا بفضل التعميم، والموضوعانية تقوم بتكوين البنية التي تسمح بتركيب العناصر القديمة والحديثة تركيباً موضوعياً، تكوين مجموعة من العناصر تسمح بالانتقال إلى مستوى أعلى، فالأمثلة إذن توسع من المجال والموضوعانية تؤسس الصرح الرياضي. فاللحظات الجدلية هي التي تحدد التطور الرياضي.

4- الحركة المزدوجة للتطور الرياضي:

في اللحظات الجدلية التي تعتبر أساس البناء و التطور الرياضي يمكن التمييز بين حركتين:

1.4- الحركة الصاعدة:

في الحركة الصاعدة، اللحظة الجدلية تكون نظرية جديدة أكثر تجريداً بالاعتماد على النظرة القديمة أكثر حدسية، ففي التعميم الإجراء المنجز في مجال معطى هو معرف صورياً، بعيداً عن الحدود الملازمة للمجال المقصود، وكذلك الخارجة عنها لكي تسمح بدمجها في مجال جديد.

في الصورنة، الإجراء المنجز في المجال المعطى، هو معرف بواسطة الخصائص الضرورية المحددة بقواعد تركيب الإشارات، والمنجزة في مجال المواضيع المجردة، أفرغت

⁽⁸¹⁾ Jean Cavaillès : *Méthode axiomatique et formalisme*, Op.cit, p 178.

⁽⁸²⁾ Patrick Tratal : *La violence de l'enseignement des mathématiques et des sciences*, L'Harmattan, France, 1997, p 53.

⁽⁸³⁾ *Ibid*,p53.

من المحتوى الحدسي للمواضيع المقصودة ، فالمواضيع المجردة هي عبارة عن أمكنة فارغة أو احتمالات للمواضيع الحدسية. والموضوعانية تسمح بتحديد البنية ليست الخاصة بالمواضيع وإنما بالإجراءات المنجزة.

وبناء على ما سبق فالحركة الصاعدة هي الانتقال من الأكثر حدسية إلى أكثر تجريدا وأكثر عقلانية. فأما النظريات المجردة تحدد ماهية الإجراءات الحدسية، تبين بنيتها وتحررها من حدودها وتضع العناصر المثالية، في المقابل الإجراءات الحدسية هي إما إجراءات تحدد وحدة النظرية الحدسية، وإما هي إجراءات ثانوية محددة في النظرية الحدسية بعد أن توضع. أما النظريات الجديدة فهي أكثر تجريد وأكثر عقلانية، وتتأسس على النظريات القديمة، فلا يمكن إذن تكوين نظرية جديدة دون المرور بالنظرية القديمة والمقابلة بينهما.

إن الموضوعانية تبين هذه العلاقة: " إن الصلة تتقطع بين النشاط الحسي للرياضي منذ اللحظات الأولى لتطوره والإجراءات الأكثر تجريدا "(84). فالنظريات إذن هي كالشجرة ذات فروع أفقية تبدأ تفرعاتها من الأسفل نحو الأعلى، حيث لا يمكن فصل النظرية عن الشجرة وإيعادها عن النظريات التحتية الأخرى.

فلا معنى للنظريات الجديدة دون أن تؤسس على أساس النظريات القديمة، وبتعبير آخر لا يمكن التفكير في النظرية المجردة إذا ضيعنا أو نسينا النظرية الحدسية. فعلى الرياضي أن يحتفظ دائما بتسلسل النظريات من الحدسي نحو المجرد.

2.4- الحركة النازلة:

إن النظرية الجديدة التي يتم التوصل إليها تحدد العناصر المثالية، ماهية وبنية الإجراءات المنجزة في النظرية القديمة. إنها تقوم بتوضيح النظرية القديمة ، فتوجد علاقات تربط الأدنى بالأعلى كما توجد روابط تصل الأعلى بالأدنى ، وهذا ما أشار إليه ديزنتي (Jean Toussaint Desanti 1914-2002) بقوله: " إن الماضي يفكر فيه من خلال الحاضر، إنه يبدو غامضا، غير كامل مقارنة بالحاضر... إن الاستمولوجي لا يفهم الماضي إلا من خلال سلبياته بالنسبة للحاضر "(85). وهذا يعني أنه لا يمكن فهم الماضي إلا من خلال

(84) Jean Cavaillès : *La pensée mathématique, Op.cit, p 58.*

(85) J.T.Desanti : *les idéalités mathématiques, le Seuil, Paris, p 8.*

الحاضر، فالنظرية الجديدة هي التي تساعد على فهم النظرية القديمة، التي تبقى دائما كعنصر مكون للنظرية الجديدة.

لكن نؤكد ما أشرنا إليه من قبل، أن هذا لا يعني أن النظرية الجديدة هي تطوير للنظرية القديمة، بل توجد قطيعة جزئية بينهما، فالتوحيد بينهما غير ممكن بصورة مطلقة. إن النظرية القديمة قد تكون معدلة ومعقدة وقد تكون متغيرة كليا وكما يقول **كفاييس**: " التطور هو مراجعة مستمرة للمحتويات بالتعميق أو الشطب " (86).

ومما سبق فإن الرياضيات تتطور بالحركة المزدوجة، أين تتكون نظريات جديدة أو يعاد تأسيس النظريات القديمة، ففي الحركة الصاعدة تتكون نظريات جديدة وفي الحركة النازلة تتعمق النظريات القديمة أو يتم تغييرها حتى يمكن دمجها في النظريات القديمة، ففي الحركة الصاعدة يتم الانتقال من الأرضية نحو القاعدة، وفي الحركة النازلة من القمة نحو القاعدة. وبهذه الشجرة يؤكد **كفاييس** على التكامل الموجود بين النظريات ومنه تكامل التطور. " في كل الأحوال يتم الحصول على خصوبة العمل الفعلي، من خلال القطيعة التي تحدث في نسيج الرياضيات هذا الانتقال الجدلي من نظرية ذات حدود إلى نظرية أعلى لا تعرفها بالرغم أنها تسبقها " (87).

و نتيجة للتحليل السابق نستنتج ما يلي:

- أن اللحظات الجدلية هي التي تصنع التطور التاريخي، إنها تترجم مراحل التطور، التغييرات التي تحدث خلال التطور، إنها إذن تكشف عن " قدرة الاختراع " (88). ولكن كيف يتسنى لهذه القدرة اختراع نظريات جديدة؟

- من جهة ثانية يبدو وكأن المستقبل في حالة كمون في الماضي، والرياضي يقوم فقط بإخراجها من حالة كمون إلى حالة قوة.

- هل بالفعل و نتيجة لما سبق: التطور هو غير متوقع أم انه متوقع بدليل وجود علاقة تكامل وضرورة بين نظريات الرياضيات؟ هل الاتصال أو الاستمرارية هي ضعيفة أم هي قوية؟

(86) Jean Cavaillès : Sur la logique et la théorie des sciences, Op.cit, p 90.

(87) Jean Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p 172.

(88) Ibid, p 173.

إنها تساؤلات، أطرحها كنتيجة للتحليلات السابقة فبالنظر إلى خصائص التطور وإلى اللحظات الجدلية والحركة الصاعدة والنازلة للتطور تبدو لنا الإجابات واضحة على تساؤلات فرضت نفسها فرضاً. فهل يمكن القول أن كفاييس وجد نفسه في آخر المطاف غارقاً في الغموض؟

المبحث الثالث: الصورية المعدلة

لقد عرضنا في المبحث الأول لهذا الفصل، موقف كفاييس من مناهج الرياضيين: الحدسانية، اللوجستيقية، والصورية، وقد كان الحل الذي اقترحه هو ما يعرف " بالصورية المعدلة " (*le formalisme modifié*) .

أولاً - وحدة الصورية المعدلة

إن الحلّ الذي قدمه كفاييس بالنسبة لمسألة الأسس هو الصورية المعدلة، إذ أن الإجراءات الرياضية هي مؤسسة كأفعال (*Gestes*) طبيعية في أنساق مكونة من إشارات وقواعد التكوين. و كفاييس بصورته اقترب من هلبرت ، و لكن هذا لايعني أن صوريتهما واحدة.

أ - مستوى الصورية المعدلة

الصورية المعدلة هي تحليل ذات مستويين، فأما المستوى الأول يقوم أساساً على اللحظات الجدلية ، وأما الثاني على التجارب والإجراءات (*Gestes*) الخاصة بالتسلسل الحسي. هذان المستويان أساسيان للردّ على الحدسانية.

فمن جهة اللحظات الجدلية التي تطبق ابتداءً من المصدر، تحدد المعنى المزدوج للمعرفة الرياضية، وتتمثل هذه الازدواجية في كون النظريات المجردة أكثر فأكثر، تحدد تدريجياً كل العناصر المثالية و كذلك الرياضيات تعمق وتغير العالم كي يستطيع الاندماج، فهو مُرَبِّض (*mathématiser*) بتكامله مع النظريات الحدسية، وفي كل مرحلة من التطور الرياضي يراجع (إعادة النظر) ذاته والنظريات أيضاً. ولهذا إذا كانت النظريات الحدسية هي ناتجة عن العالم الحسي في اللحظات الجدلية، فإن مصدر الرياضيات مرتبط بالقدرة على

الاكتشاف التي تحقق تطورها " إنه من الاستيمولوجيا الساذجة، ننشئ المواضيع الرياضية من خلال التجريد انطلاقاً من الواقع "(89).

أما الجهة الثانية تحدد الوضعية (*objectivation*) الرياضية للامتتاهي، بينما الحركات المنجزة على الإشارات تؤسس الإجراءات المنجزة على اللامتتاهي، وبهذا يتم تبرير إقحام اللامتتاهي والإجراءات المطبقة عليه. فاللامتتاهي الرياضي يتكون من خلال تطبيق مبدأ امتداد الإجراء من خلال التعميم.

فمثلاً العدّ أساسه إنتاج عدد بتكوين مجموعة من الأعداد المكوّنة من قبل، فهو يطبق بداية على المتتاهي ويكون على التوالي الأعداد الصحيحة، ومن الأعداد الصحيحة نحو العدد الأصلي المتصاعد ومنه يفتح مجال المتصاعد. أما إذا انطلقنا من متتالية قابلة للحساب للأعداد الناطقة أي محددة بقانون التراجع، فإن الإجراءات المطبقة على المتتالية الجمع والجداء، تظهر مستقلة عن حدود المتتاليات، فهي إذن ممتدة إلى متتاليات غير محددة للأعداد الناطقة، وهذا ما ينتج الأعداد الحقيقية، ومنه اللامتتاهي، والإجراء الذي يطبق على اللامتتاهي هو ناتج عن تطبيق الحركات على الإشارات.

وقد جمع كفاييس بين المستويين، مما جعله يطرح مسألة علاقتهم وأكد وجود صعوبتين.

ب - صعوبات تحليل الصورية المعدلة:

1 - التفكير والإجراء الحسي:

إن الصعوبة الأولى تتمثل في الذكاء ذاته، فمن أجل تأسيس الرياضيات الكلاسيكية، يجب أن نقابل بين النظريات كوحدات إجرائية وأنساق الإشارات والقواعد، بين الإجراءات على المواضيع الرياضية والأفعال (*Gestes*) الطبيعية على الإشارات، بين الأفعال الرياضية التي هي أفعال من خلال التحول والأفعال التي هي استعمال الأشياء، بين الفكر الرياضي والفعل على إشارات الذات.

فأما الفكر الرياضي فله علاقة بالفكر الرياضي، بينما الثاني له علاقة بالعالم المحسوس، وبالرغم من هذا لا يكونان مجالين مختلفين، بل هما وجهان لعملة واحدة بل أكثر

(89) J Cavallès : *Du collectif au pari, revue de métaphysique et du moral, t 47, 1940, p150.*

من ذلك ونتيجة لما سبق حول علاقة المحسوس بالمجرد، هما متداخلان: "النسق الحسي، الطابق الحدسي (*étage intuitif*) هو تضاعف ملازم للنسق التصوري (*conceptuel*)"⁽⁹⁰⁾ والعكس التفكير هو ملازم للفعل (*Geste*) الحسي: " الرياضيات هي تحليل دون نهاية لنواة الأفعال المحسوسة، إنه حكم مسبق أو خطأ نفسي، أننا نظن أنه يمكن تعريف هذه الأفعال والتفكير الذي هو ملازم لها"⁽⁹¹⁾.

من خلال هذا التداخل بين التفكير الرياضي والفعل المطبق على الإشارة، فإنهما يكونان وحدة واحدة، وهنا السؤال يطرح كيف يمكن أن تكون هناك وحدة بين الفكر المجرد والفعل الحسي، ولهذا كيف يمكن لهذا الفعل الحسي أن يؤسس الفكر المجرد، وكيف يمكن للتفكير أن يندمج في الفعل؟ يجب كفاييس، لحل هذا الإشكال يجب تعريف الفعل المطبق على الإشارة، كفعل تركيبى لا مجرد فعل طبيعي، وهذا طبعا تقاديا للوقوع في التناقض.

2- القدرة على الاكتشاف:

إن الصعوبة الثانية تتمثل في أن النظريات تنشأ من بعضها البعض في العالم ، فكل نظرية قديمة تؤسس للنظرية القديمة في اللحظات الجدلية. ونظرا لأن الإجراءات الكلاسيكية تتأسس من خلال تطبيق الفعل على الإشارات، فيجب أن يضع الرياضي تسلسل أنساق الأفعال بالتوازي مع النظريات.

ومنه فإن بداية التطور الجدلي للنظريات يجب أن تتطابق والنسق الأول وكذا وتطور أنساق الأفعال. فيجب إذن أخذ وضعية أنساق الأفعال والتطور بعين الاعتبار، وهذا ما يؤدي إلى وجود تقابل بين اللحظات الجدلية والفعل، ومنه تحديد التجربة التي لها القدرة على الاكتشاف.

إن اللحظات الجدلية تشير إلى القدرة على الاكتشاف، القدرة على تجاوز المحسوس للوصول إلى المجرد إلى المثالي، تجاوز كل نظرية للوصول إلى نظرية مثالية. و القدرة على

⁽⁹⁰⁾ J Cavallès : *transfini et continu*, Op.cit, p 273.

⁽⁹¹⁾ J Cavallès : *Réflexions sur le fondement des mathématique, dans œuvres complètes de philosophie des sciences, Hermann, Paris, 1994, p 579.*

الاختراع تترجم من خلال العمل، التجارب، وأفعال على الإشارات مثلها مثل الإجراءات الرياضية.

ثانياً-امتداد التجربة:

لحل إشكالية تلازم المحسوس والمجرد (الفعل والتفكير الرياضي)، اقترح **كفاييس** أن نتعامل مع الفعل كفعل تركيبى والذي هو عبارة عن تجربة، فالتجربة إذن هي نسق من الأفعال، فكيف تساهم في تطوير الفكر الرياضي؟

لقد استخدم **كفاييس** تحليلات هلبرت لإعادة النظر في المفهوم الكانطي للبناء في الحدس، فمن جهة المنطق أساسه البناء مثله مثل الرياضيات، وهو لا يتعلق بالفكر الخالص كما لا يوجد أي علم مرتبط بالفكر الخالص بعيداً عن الحساسة، ولهذا فلا توجد أي ملكة خاصة بالفكر قائمة بذاتها ومستقلة عن الحساسة، ويمكن بذلك قبول التصورات الناتجة عن البناءات في الحدس، والفعل (**Geste**) هو تركيب دون تصور لكن من جهة أخرى هو خاضع لقواعد العمل، وتطبيق هذه القواعد تكون الإشارات كوحدات مثالية ويتم دمجها في بنية مجردة.

إن الإشارات هي عناصر من فضاء تركيبى (توفيقي)، والفعل التوفيقي هو تركيب دون تصور يقوم على إشارات من فضاء توفيقي، وهو تصور ملائم لهذه المجالات، التي هي أنساق مكونة من إشارات حسية وقواعد، والفعل التوفيقي هو التصور الملائم لاستعمال هذه الإشارات التي هي فعل طبيعي. ولهذا فإن المسألة حسب **كفاييس** تتمثل في تكوين الفضاءات التوفيقية المتتالية التي من خلالها تكوّن الرياضيات.

والحسي وظيفته ضمان خصوبة ودقة الاستدلال، والعمل الرياضي يمر بالتجربة الحسية، وتطور الرياضيات لا يمكن أن يتم خارج العالم المحسوس. **كفاييس** يرفض هذا الطرح الأنطولوجي الذي يميز بين العالم الحسي والرياضي فيقول: " لا يوجد من جهة عالم حسي معطى، ومن جهة أخرى عالم رياضي بعده". ولهذا عوض الانطلاق من هذه الأنطولوجيا الكانطية، يقترح **كفاييس** تتبع تطور الرياضيات وامتداد التجربة من البداية الحسية. فالتحليل الرياضي " هو اقتراح التجربة بالنسبة لامتداد التجربة ذاتها" ⁽⁹²⁾ هذا ما قاله

⁽⁹²⁾ L. Brunschvicg : *Les étapes de la philosophie mathématique, Op. cit, p 572.*

برنشفيك الذي تطرق إلى امتداد التجربة في النسبية النقدية*، فهو يرى أنها تتطور من خلال الحوار مع العقل.

ففي البدء، التجربة هي تجربة بمعنى الكلمة، غريبة عن العقل، مكونة من احساسات خالصة، والعقل يتدخل في التجربة الابتدائية بضم الظواهر في علاقات عقلية، تكون صور التجربة الإنسانية. لهذا هناك تفاعل بين التجربة والعقل أو لنقل حوارا، هذا الأخير مرّ بثلاث مراحل:

1- التجربة اقترحت للعقل بصورة سلبية، مجموعة من الظواهر فوضوية تطلب منه تنظيمها.

2- العقل أجاب التجربة وذلك من خلال إيجاد رابطة بين الظواهر: وحدة الموضوع أثناء التعدد، علاقة المساواة بين التشكيلات. والرابطة المقدمة بين الظواهر تم ربطها من جهة أخرى بالتطبيق، الفعل في التجربة ملاءمة الرسم للموضوع، استبدال الواحد بالآخر.

3- التطبيق يحقق الرابطة المقترحة من طرف التجربة، والمكتشفة بالعقل.

والظواهر المترابطة تكوّن وحدات جديدة، والظواهر التي خضعت لدليل الرسم قد ردت إلى وحدة الصورة الدقيقة، والتشكيلتان من الأشياء اللتان تم استبدال أحدهما بالآخر، ثم جمعها بواسطة علاقة المساواة. فالوحدات المكونة تكوّن مستوى التجربة، مركبا من جذور غير إنسانية وصورة إنسانية، وتتواصل التطبيقات في هذا المستوى إلى أن تنتج ظواهر أخرى فوضوية فيتدخل العقل من أجل ترتيبها وهكذا.

لقد تطرق **كفاييس** إلى علاقة التجربة بالعقل⁽⁹³⁾ عند برنشفيك والأزمة الثلاث، فأستأذنه قد ركز على تجربة الأشياء ذاتها، بينما كفاييس ركز أثناء تحليله على تجربة الإشارات، فيقابل بين التطبيق كأفعال في التجربة، وتوفيقات الإشارات في الفضاء التوفيقي، ولكن **كفاييس** لم يؤكد على مفهوم امتداد التجربة وركز على مفهوم التطور الرياضي.

*النسبية النقدية هو اتجاه فلسفي يبحث في طبيعة المعارف الموضوعية وهو مستنتج من أفكار كانط: حول العلوم الفيزيائية والرياضية. وقد استخدم هذا المصطلح على الخصوص من طرف برنشفيك في أعماله، وإشكالية النسبية النقدية هي شرح كيف يمكن أن تكون المعرفة موضوعية.

(Messant, : La philosophie de Léon Brunschvicg, Paris, J.Vrin, 1938, p 155.)

⁽⁹³⁾ J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p176.

فقد أكد مرة أخرى على أن التطور ضروري، وأن النظريات الحالية هي نتيجة تطور ضروري والمنبع التي تصدر منه النتائج التي تقوم بتحويل النظريات⁽⁹⁴⁾.

تم نجد **كفاييس** يصف التطور بالاتصال القوي (وهذا طبعاً بعد أن وصفه من قبل بالاتصال الضعيف) فيقول: " لا يوجد تعريف وتفسير للمواضيع الرياضية لا يكون رياضياً، أي وكما يقول بروور، تسلسل تاريخها منذ الثنائية"⁽⁹⁵⁾. ومن خلال قول كفاييس، نلاحظ وجود تناقض بين ما ورد في قوله هذا، وموقفه من حدسانية بروور، فلماذا استشهد ببروور إذا كان قد انتقده من قبل؟

إن انتقاد **كفاييس** للحدسانية قائم على أساس استمرارية البناءات المتتالية، التي تقوم برد الإجراءات المجردة إلى متسلسلة من إجراءات أولية انطلاقاً من حدس الثنائية. فاللحظات الجدلية تبدو أنها أحدثت القطائع وميزت التطور ذا الصبغة الرياضية والبناء التطوري للحدسانية. ولتقادي هذا التناقض يرى **Noguès** أن **كفاييس** لم يكن في موضع واحد، أو لنقل في مستوى واحد⁽⁹⁶⁾. في مستوى المعنى فإن بروور أخطأ بقوله بتسلسل البناءات. و في مستوى الإشارة وامتداد التجربة، فإنه قد أصاب عندما قال بتسلسل البناءات.

فحسب **كفاييس** التسلسل لا يكون أبداً في المعنى أو في الوعي (**Conscience**)، بل في المحسوس، في امتداد التجربة، في امتداد المحسوس فيقول: " من جهة أخرى، إنه (تلاحق الأحداث) غير مؤسس في منطقة الوعي، المميز بحدس (من نوع خاص **Sui generis**)، الحدس هنا ليس إلا امتداداً، الحدس الحسي الحقيقي يتغير فهو غير ثابت في المستويات الأولى للوعي المتجزأ"⁽⁹⁷⁾. فإتساع مجال وعي التجربة والتطور الجدلي للتجربة يتقاطعان، ويؤديان إلى تكوين لا محدود من المواضيع وهي التي تكون " الحقل الموضوعاتي " أو " المجال الموضوعاتي " (**le champ thématique**)⁽⁹⁸⁾، ومن بين المناهج التي تؤدي إلى تكوين هذا الحقل: التعميم، الصورنة، الموضوعانية.

⁽⁹⁴⁾ *Ibid*, p 177.

⁽⁹⁵⁾ *Ibid*, p 177.

⁽⁹⁶⁾ *P.C.Noguès : De l'expérience mathématiques, Op.cit, p 177.*

⁽⁹⁷⁾ *J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, Op.cit, p176.*

⁽⁹⁸⁾ *Ibid*,p176.

أما عن التطور و إستمراريته، فيرى **كفاييس**، أنه يرفض إعطاء العقل الوظيفة التي أسندت له في النسبية النقدية. ففيها العقل يحدث القطائع أثناء تطور التجربة، وفي قلب الحوار بين التجربة والعقل، العقل يعيق تطبيقه من أجل اكتشاف رابطة جديدة، التي تسمح بإعادة التطبيق في مستوى آخر للتجربة. و اكتشاف التطبيق ليس تطبيقا إنه العمل الداخلي للعقل الذي له علاقة بالتجربة، لكن يسيطر عليها حسب **كفاييس**.

العقل يفكر حول الأفعال، حول التجربة، لكن لا يفكر داخل الأفعال وداخل التجربة، وإذا كان التطور هو تسلسل مستمر، يجب أن يتم هذا التسلسل في التجربة، و امتداد التجربة لا تأتي من حساب العقل حول نسق معطى من الإشارات والقواعد كما هو الشأن عند برنشفيك. فالعقل إذا أنجز حسابا فإنه سيكون توفيقا و تركيبا من إشارات حيث يتحقق في فضاء توفيقى، ويكون حينها فعلا في تجربة.

هذه الفضاءات التوفيقية تتكون في التجارب والأفعال التوفيقية، وامتداد التجربة ناتج عن التجارب والأفعال داخل التجربة لا العقل. و في فلسفة برنشفيك، تطور التجربة هو إنتاج خاص بالعقل الإنساني، التجربة لا تحدد العقل إلا سلبيا، بفرض شروط التطور، لكن العقل يستخرج من ذاته الروابط التي يطبقها على التجربة، هذه الروابط لا توجد بأي صورة من الصور في التجربة، إنها منتجة من طرف العقل، وهو حر، بتجريب روابط أخرى، ولهذا في المقابل إذا كان التطور ضروري، فإن امتداد التجربة مفروض من التجربة إن التجربة التحتية تحدد التجاوز الخاص بها، إن لم يكن بصورة إيجابية فبصورة كامنة. و منه فالرياضي لا يقوم إلا بادراك و إتباع السبل الكامنة في التطور.

إذن ومما سبق نستنتج ما يلي :

- إن التطور هو عبارة عن تسلسل حيث الماضي ينادي على المستقبل، وإن محاولات الرياضي توجه بطبيعة المسائل المطروحة، المفاهيم الكامنة في النظريات المتكوّنة. فإذا كانت هناك مسألة مطروحة في نظرية ما، فإن المفاهيم المفروضة لحلّها هي كامنة في نظرية، التي هي بدورها كامنة في فضاء توفيقى.

- امتداد التجربة ناجمة عن الفعل الذي يستطيع التوصل إلى هذه المفاهيم الكامنة بواسطة تركيب من الإشارات، الذي يقوم بقلب حقل التجربة وفتح فضاء جديد توفيقى، وطبعاً نستنتج

أن الكمون هي خاصية متعددة. فالمفاهيم الكامنة في النظرية، هي ذاتها كامنة في الفضاء التوفيقي، وكلها كذلك في الفضاء التوفيقي.

- الفعل الذي يقوم بمد التجربة يتمثل في التقاط الجواهر (*entités*) الكامنة في الفضاء التوفيقي بواسطة تركيب جديد من الإشارات. والقدرة على فهم وإدراك الجوهر الكامن في حقل التجربة بواسطة فعل داخل التجربة يسمى الانتشار (*empiétement*) فالانتشار إذن وظيفته تحديد القدرة على الاختراع الذي يضم تطور الرياضيات.

- إذا كانت الصعوبة الناجمة عن الصورية المعدلة هي الربط بين مستويي التحليل: التطور الجدلي للإجراءات الرياضية وتسلسل الأفعال على الإشارات، فإنه تم إبعاد هذه الصعوبة بواسطة مفهوم الكمون والانتشار.

- كنتيجة فإن الصورية المعدلة هي حل لمسألة الأسس وتقوم على تحليل مستويين: للتطور العقلاني الجدلي والتسلسل الحسي. ومن أجل الربط بينهما، تم تجاوز الأفعال الطبيعية إلى الأفعال التوفيقية، ومن ثم تم تحقيق وحدة الفكر والعقل، أو بتعبير آخر وحدة الفعل الإجرائي والفعل التوفيقي هذا من جهة، ومن جهة ثانية وجود القدرة على الاكتشاف كقدرة الأفعال في التجربة، أي قدرة الأفعال التوفيقية.

- إن الرياضيات تتطور بالتعمق من جهة وبالامتداد من جهة أخرى. الرياضيات تتطور نتيجة وجود ضروريات داخلية التي تؤدي إلى إصلاحها، ومنه تغييرها.

خاتمة

بعد التحليل و البحث ،نخلص إلى أهم النتائج التي نوردتها كما يلي:

- يقول ميشال فوكو: "من بين الفلاسفة الذين شاركوا في المقاومة أثناء الحرب، أحدهم كان **كفاييس** مؤرخا لعلم الرياضيات اهتم كثيرا بتطور بنياتها الداخلية، حيث لا واحد من الفلاسفة السياسيين لا سارتر و لا سيمون دي بوفوار و لا ميرلوبونتي فعلوا مثل ما فعل"⁽¹⁾، انه إذن **جان كفاييس** الذي حقق هدفين في ما يقارب العشرين سنة من حياته، فأما الأول يتمثل في دراساته حول فلسفة الرياضيات و اهتمامه بمراحل تطورها، و ثانيها دفاعه عن وطنه فهو فيلسوف جسد فلسفته في الواقع ،"فقد اختار من بين طرق المنطق ،منطق المقاومة"⁽²⁾.

- في مؤلفاته المنهج الأكسيومي و الصورية و ملاحظات حول تكوين النظرية المجردة للمجموعات، درس **كفاييس** نشأة نظرية المجموعات و مسألة أسس الرياضيات من ما قبل التاريخ مع بولزانو إلى غاية أكسمة زرمولو و فرانكل، و برنامج هلبيرت حتى وصل إلى صورنة الرياضيات و المنطق، وكذلك تأسيس نظرية جديدة للرياضيات المفتوحة. و قد دعم **كفاييس** كتابيه بأبحاث أخرى حيث وضح من خلالها بعض أفكاره مؤكدا على الخطوات الكبرى للتطور التي وجهت العمل الأكسيومي للنظريات الأكسيوماتيكية و من ثم معالجة إشكالية نظرية العلم المؤسسة على المنطق و النظريات. فمؤلفات **كفاييس** إذن اهتمت بتكوين نظرية المجموعات و دراسة أسس الرياضيات، وتكوين النظرية المجردة بإنتاج المفارقات التي تبدو أنها اعترضت على وحدة الرياضيات وأدت بالضرورة إلى أزمة الرياضيات، و لهذا اهتم الرياضي بملاحظة العلاقات التي توحد النظريات الرياضية بنظرية المجموعات، وهذا تأكيد على تأثيرها في كل الرياضيات، و لهذا كما صرح **كفاييس** فإن مسألة

(1) *Michel Foucault : Dits et écrits 1954-1988, Gallimard, IV, 1980-1988, Paris, p586.*

(2) *Marie-Christine Granjon : Penser avec Michel Foucault théorie critique et pratiques politiques, Karthala, 2005, Paris, p28.*

نظرية المجموعات هي مسألة أساس الرياضيات. و هي النظرية الكانتورية في الأعداد المتصاعدة التي أعجب بها هلبيرت و وصفها بالوردة (**rose**) و تمام العقل الرياضي، فهي إحدى الاكتشافات الرائعة للنشاط العقلاني الخالص، و لهذا نجده يؤكد على مقولته: لا يجب أن نطرد من الجنة التي أسسها لنا كانتور.

- اهتمام **كفاييس** بنظرية المجموعات هو ما جعله يقف على أهم مراحل و عوامل تطورها مركزا على اللامتتاهي، فالبدائيات الأولى للامتتاهي تعود إلى الفكر اليوناني من خلال إبقائه على اللامتتاهي الممكن، ورفضه الكلي للامتتاهي الفعلي الذي كان مرعبا بالنسبة إليهم لأنه جعل أفكارهم عن الإله مضطربة، إلا أننا نجد العكس في الفلسفة الحديثة: فديكارت مثلا اتخذ كدليل على إثبات وجود الله. و لكن نتيجة للدراسات التي قام بها كانتور، تحول اللامتتاهي من فلسفي ميتافيزيقي إلى رياضي مجرد، و هذا يدل على وجود نوعين من

اللامتناهي: الممكن والفعلي فأما الأول فإنه يفقد إلى صبغة اللامتناهي، وأما الثاني فهو الحقيقي وهو محور و أساس نظرية المجموعات. و قد تم إثبات وجوده من خلال إثبات وجود أعداد تختلف عن الأعداد الطبيعية والنسبية والناطقة والمركبة إنها الأعداد المتصاعدة والتي بدورها نوعان: أعداد ترتيبية وأعداد أصلية .

-نتيجة اكتشاف اللامتناهي تمّ إثبات وجود نوعين من المجموعات :المتناهية واللامتناهية، واللامتناهية نوعان: العدودة واللاعدودة.و قد استخدم كانتور منهج قطر كانتور ونظرية المتصل، لإثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي لاعدودة وقوتها تختلف عن قوة N ، و ان قوة المتصل هي نفسها قوة R أي 2^X و استنتج في الأخير أنه لا وسط بين N_0 و 2^X .

- تكوين النظرية المجردة للمجموعات مر بثلاث مراحل،ففي المرحلة الأولى تمّ تحليل طرق الرياضيين المهتمين بنظرية المجموعات التي ظهرت وتجلت في تحليل القرن 19. أما المرحلة الثانية فتمثلت في اهتمام كانتور بهذه الطرق و تطويرها ،و قد نتج عنه من جهة تحديد القوى في نظرية التكافؤ،و من جهة ثانية امتداد العدّ في النظرية الترتيبية.بينما المرحلة الثالثة تجسدت في الأكسمة، بداية من التحضير للنظرية المجردة من طرف ديدكند إلى تأسيس علم الحساب وامتداده من طرف زرمولو للبرهنة على أن أكسيوم الاختيار يسمح بالبرهنة على الترتيب الجيد.

- ظهور نظرية المجموعات على يد كانتور في العقد الأخير من القرن الماضي كان حلقة مهمة من حلقات تطور الرياضيات التي ميّزت القرن 19، فنظرية المجموعات تشكل دعامة هذه الدقة، فأصبحت الأساس المتين الذي يقوم عليه الصرح الرياضي.و لهذا فقد فتح المجال أمام الأبحاث في نظرية المجموعات،حيث اهتم الرياضيون بالبحث في أكسمة نظرية المجموعات ،أصلية المتصل،فهم إذن ورثة كانتور و لكن هذا لا ينفي وجود معارضين له ، و لهذا فان نظرية كانتور أدت إلى وجود تيارين:

أ-التيار المؤيد: و من أنصاره هلبرت ،ديدكند، بيانو، فريجه، راسل الذين رفضوا الخروج من الجنة التي أسسها كانتور على حد تعبير هلبرت في محاضرة ألقاها سنة 1925: " لأحد يمكنه أن يطردنا من الجنة التي اكتشفها كانتور"،فهؤلاء أكدوا على أن مبدأ

عدم التناقض هو معيار كاف للوجود الرياضي، كما أثبتوا أيضا أن الأكسمة الدقيقة تدحض كل المفارقات الناشئة عن نظرية المجموعات .

ب- التيار المعارض: ويمثله كرونكر ، بوانكري،بير،بورال،لوبيسغ، بروور و وايل مؤسسا الحدسانية.

وبالرغم من وجود التيار المعارض، وبالرغم من الانتقادات التي وجهت لنظرية كانتور فقد كانت لها أهمية على مستوى المنطق الرياضي الذي من بين عوامل نشأته و تطوره أزمة الأسس في الرياضيات و اكتشاف كانتور للامتتاهي ،أما في العلم الرياضي فقد أصبحت نظرية المجموعات قاعدة ضرورية للتحليل، اكتشفت من أجل تحديد و توضيح و تعميم المفاهيم الأساسية للحساب التكاملي و نظرية الدوال،و في نظرية المجموعات لا يوجد نوع واحد ،حيث توجد مجموعات محددة ،متناهية ،و مجموعات لامتناهية،مجموعات عدودة و أخرى لا عدودة ،و بما أننا بصدد الحديث عن نظرية المجموعات و نظرا لكون العلاقة توطدت بين المنطق الرياضي و الرياضيات فإن نظرية المجموعات لها علاقة بمنطق الفئات،كما ان لها علاقة بمبحث العلاقات .

-إن الطرق والمناهج التي استخدمها كانتور استخدمت كذلك في النظرية المجردة، التي يمكن القول أنها سمحت بأكسمة الاكتشاف الكانتوري، كانتور طور نظرية التكافؤ لحلّ مسائل التحليل وبيّن أن مجموعات النقاط اللامتناهية تنقسم إلى فئتين: العود والمتصل، مع العلم نظرية التكافؤ تقوم أساسا على المجموعات الموجودة في الرياضيات الكلاسيكية، وتحاول أن تحدد علاقاتها.

- كانت محاولة الرياضيين تهدف إلى إقامة التحليل على أسس حسابية أي على الأعداد الطبيعية N إلا أن نظرية المجموعات سعت إلى استنتاج مفهوم العدد من المجموعة، فالعدد هو قوة المجموعة، ولا يرّد إلى موضوعات تحصى بل إلى علاقة تقابل (واحد بواحد). و الأكسمة ليست اكتشافا لنظرية، ولكنها تطوير لنظرية بسيطة وجدت قبلها، إذن النظرية البسيطة هي قاعدة وأساس ومنطلق النظرية الأكسيوماتيكية، إنها توضح وتبين البنية الحقيقية لنظرية المجموعات وفي آن واحد، تحلّ التناقضات الظاهرة فيها. هذه الأكسمة تواصلت بعرض أكسمة زرمولو ، فرانكل و فون نومان، والذي نتج عنها الفصل بين النظرية

المبدئية والرياضيات الكلاسيكية، بالرغم من ضرورة الوصل بينهما ودمجها معا في الصرح الرياضي كما أكد كفاييس .

- في نهاية القرن التاسع عشر تمّ أكسمة الهندسة نتيجة ظهور هندسات لإقليدية، حيث تمّ فيها نفي حقيقة المسلمة الخامسة الخاصة بالتوازي. و لهذا لم تعد الأكسيومات لها علاقة بالحدسي بالواقع، بالواضح بل بتناسقها مع الأكسيومات الأخرى، وبناء على ذلك تمّ التأكيد على تناسق و قوة و لاتناقض النسق، و هذا ما ميّز برنامج هيلبرت الذي يفترض نظرة شاملة للرياضيات من خلال الميتارياديات و التي هي عبارة عن خطاب مصورن حول الرياضيات: إنها رياضيات الرياضيات. فالاستنتاج مصورن و الحجج مصورنة، و هذا يعني تأسيس متتاليات متناهية من الرموز المكونة حسب عدد متناهي من القواعد فتصبح ذاتها كائنات رياضية ثم تتحول إلى موضوع لنظرية أخرى الخاصة بالأدلة الصورية و هي التي تسمى بالميتارياديات، هذه الأخيرة مبنية على مبادئ و طرق ذات طابع تركيبى أولي أو كما قال هيلبرت متناهي، فحسب رأيه المناهج المتناهية تصبح في مستوى ما بعد النظرية (ميتا نظرية) تسمح بالتحقق المباشر للاتناقض النظرية و خاصة علم الحساب. و في هذا السياق يؤكد هيلبرت إعجابه بالنظرية الكانتورية في الأعداد المتصاعدة و لهذا وصفها بالوردة (rose) و تمام العقل الرياضي، و إحدى الاكتشافات الرائعة للنشاط العقلاني الخالص، و لهذا قال مقولته: لا يجب أن نطرد من الجنة التي أسسها لنا كانتور، فقد جعل من اللامتناهي الكانتوري لامتناهيا معقولا، و قد بحث عن هذه المعقولية في استخدامه للوسائل المتصاعدة من وجهة نظر متناهية.

- إلا أن هذا لم يمنع من تصدع برنامجه و تعرضه للفشل من خلال قانون عدم التمام لغودل الخاص بعلم الحساب سنة 1931، والذي مع غزنن و برنايز أعادو النظر في المقصود من البرهنة و من جهة أخرى ما ينتج عن تعميم المناهج المتناهية الهلبرتية و هذا ما أدى إلى التطرق إلى الحدسانية أو التكوينية، هاتان المدرستان عرفتا بنقدهما للمناهج و أسس التحليل لرياضي و النظرية الكلاسيكية للمجموعات، و كذا نقد التعاريف التي لا يمكن التحقق من صدقها بواسطة الأشياء المنتمية لمجموعة الأشياء التي تعرفها، بالإضافة إلى نقد قوانين الوجود التي و منه نقد مبدأ الثالث المرفوع .

- إن مسار فلسفة **كفاييس** الرياضية تؤكد وجود أربع فلسفات: فلسفة كانط، فلسفة بولزانو، فلسفة كار ناب و فلسفة هوسرل و ظواهريته، فأما فلسفتا كارناب و بولزانو فهما مؤسستان على المنطق، فبولزانو اهتم بمجال الجواهر المنطقية و الرياضية المجردة، و كارناب كوّن العالم انطلاقاً من العلاقة الموجودة بين المعطيات الحسية و المنطق، و الرياضيات هي وسيلة لوصف و تعريف العالم. كما اعترف **كفاييس** بتأثره بأستاذه برنشتريك و خاصة كتابه "مراحل الفلسفة الرياضية" بالرغم أن اعتماده عليه كان قليلاً.

- أراد **كفاييس** تكييف نسق كانط مع العلم المعاصر، ولهذا ركز على تحاليل هلبرت، هذا الأخير الذي أكد على دور الرمز في العمل الرياضي، ففي الهندسة تستخدم الأشكال كالمثلث و الدائرة، و في الجبر و المنطق تستخدم الصيغ المركبة من حروف أبجدية و رموز إجرائية كـ (+)، (-)، (\bar{P})، فتكتب صيغة لها علاقة بالصيغ الأخرى مع إمكانية التحويل، فالعمل الرياضي يعتمد على الأشكال و الصيغ و الرسم، و بالاعتماد على مفهوم البناء في الحدس حاول كانط الرجوع إلى الرسم في الهندسة و تمديده في الجبر.

- لقد ميز **كفاييس** بين مستويين في الرموز: مستوى الإشارات و مستوى العناصر المثالية، و قد استعمل **كفاييس** مصطلح أفعال (*gestes*) للإشارة للبناءات القائمة على إشارات و كذا البناء المعتمد على العناصر المثالية، فأما الأول هو تركيبى و أما الثاني هو إجرائى و لتوضيح الأول اعتمد **كفاييس** على كانط و هلبرت.

- ميّز **كفاييس** بين الصورنة و التعميم و الموضوعانية، فأما الأولى تكون عندما يطبق الإجراء على الأشياء الحدسية ثم المجردة، أما التعميم فيقوم على أساس أن الإجراء المطبق على مجال ضيق من الميدان يطبق على كل الميدان، فمثلاً طرح عددين، الثاني يكون أقل من الأول، لكن الإجراء عمم و طبق دون شروط و هذا ما جعل جراء الطرح أكثر اتساعاً من الأعداد الموجبة و السالبة، أما في الموضوعانية فالإجراءات المطبقة في مجال معين تحول إلى موضوعات لإجراءات جديدة و هكذا.

- أكد **كفاييس** أن التطور الرياضي هو ضروري، وهو نتيجة وجود مسائل مطروحة و مناهج في مرحلة سابقة، وأسباب التطور هي كامنة في مجال التطور فمن غير الممكن إذن البحث عن تأسيس الرياضيات على تحليل أفعال الوعي إذ يجب إتباع مسار التطور و عزل المسائل و المناهج التي توجه هذا التطور و من ثمة تحديد بناء الرياضيات، إن المجال

الرئيسي للابستيمولوجي ليس حقل الوعي لكن التجربة الرياضية و اتساق الإجراءات المنطقية أثناء التطور الرياضي.

-إن دراسة **كفاييس** ليست دراسة تاريخية لتطور العلم و لا وصفا لحالتها الراهنة،فلقد درس الرياضيات من خلال علاقتها بالوجود فحلل لغتها ،موضوعها ،و مضمونها،فهل لها مضمون خالص خاص بها؟هل لغتها هي مجرد رموز خالية من المعنى؟أم مجموعة من التحولات و التغيرات؟وما العلاقة بين الإشارات و الأنساق الصورية و المواضيع ؟كيف يمكن ربط العالم الحسي بالأنساق الصورية للرياضيات؟ما علاقة الرياضيات بالفيزياء؟ لقد تساءل **كفاييس** عن كيفية تطور الرياضيات،وعن الخاصية التاريخية للحقائق و أكد على طريقتين:الاستمرارية و التعارف لا التراكم والتعارض.فالرياضيات تتصف بالتاريخانية التكوينية،و التاريخ الرياضي اقل اتصال بالمجال الذي نشط فيه ،إن "ما بعد" يفسر "ما قبل"،فهي مجال معرفي يرادف التطور ،إن الرياضيات هي تطور و دور الرياضي فهم التطور ،فتأسيس الرياضيات ليس إجراء مطلقا أو نهائيا إن مجاله مفتوحا و غير محدود.

- إن **كفاييس** كان من أهم ممثلي الفلسفة الفرنسية وبالضبط فلسفة العلوم و تاريخ العلوم ،فكانت أبحاثه عاملا قويا في تعريف الفرنسيين بالفلسفة الألمانية، و منه جلب الفلسفة الألمانية إلى فرنسا ،و الانطلاق منها إلى إحداث نهضة فلسفية في بداية القرن العشرين، و قد بدا تأثيره واضحا بدليل انه أشار إليهم في كل مؤلفاته.

- هناك سؤال طرحناه في المقدمة،و الإجابة عنه في نهاية هذا البحث أصبحت

ممكنة:هل **كفاييس** مؤرخ؟هل استخدم منهجا تاريخيا؟هل بحثه يصنف في التاريخ؟

لقد اهتم **كفاييس** بالرياضيات و تاريخها ،فأما اهتمامه بالرياضيات فكان من خلال تعريفها حيث يرى أنها من المستحيل أن تعرف من الخارج ،أي بالاعتماد على عوامل خارجية و يقصد خاصة المنطق،و هذا لا يعني نفي وجود صلة بينها و بين المنطق ، والفيزياء أو الفلسفة و كذا علم النفس لكن بالنظر إلى حالتها الخالصة فهي عبارة عن تجريد، و منه فهي مستقلة عن العلوم الأخرى ،و لهذا فقد أكد على خاصية الاستقلالية للرياضيات.

أما الحديث عن طبيعة الرياضيات يقودنا للحديث عن تطور الرياضيات، بل أن **كفاييس** يؤكد أنهما حديث واحد و بحث واحد،و لهذا فالرياضيات تمتاز بالتسلسل الرياضي الذي يحتوي على التناسق الداخلي. و قد اعتمد **كفاييس** على دليل يتمثل في كتاب أستاذه

برنشفيك: "مراحل فلسفة الرياضيات"، الذي يثبت أن التاريخ هو منهج يؤدي إلى معرفة طبيعة الرياضيات، هذه الخاصية تستلزم دراسة فلسفية لمعرفة أن نظرية الحقيقة ليست بعيدة عن سياق التطور التاريخي للمعرفة، و هي الدراسة التي ميزت كل كتابات **كفاييس**، فهو يعود إلى مطلع القرن العشرين مع النظرية المجردة للمجموعات الخاصة بزرمولو، فرانكل، و فون نومان، ثم يعود قليلا إلى الوراء في القرن التاسع عشر و يشير إلى الكثير من النتائج: برهنة عدم قانون بولزانو، الحساب الرمزي لغراشمان و هاملتون، تكوين الأعداد الحقيقية من خلال مناهج ديدكند و وايستراس و هاين و كانتور، معادلة الأوتار الاهتزازية، معادلة الحرارة، التكامل عند كوشي، إسهامات دي بوا ريمون حول نمو الدوال، و يعود أكثر إلى الوراء و بالتحديد إلى القرنين السابع عشر والحدس عند ديكارت و كانط، و هكذا فقدر **كفاييس** على تتبع تطور المفاهيم الرياضية.

و لكن ماذا عن نظرية المجموعات؟ يؤكد **كفاييس** أن دراسة نظرية المجموعات هي محاولة فلسفية لتقديم مثال حول الاختراع الرياضي، إن التاريخ هو المنهج الصحيح السليم لطرح الأسئلة المختلفة و إيجاد حلول لها. إنه يمدّ معارفنا بما هو مفيد و قيّم، بما نحتاجه لمعرفة الحاضر، نتعلم فيه كيف نتعامل مع الحقائق و لا نخرج عن نطاقها، و هذا ما جسده **كفاييس** في كتابه: "فلسفة الرياضيات"، التكوين المجرد لنظرية المجموعات، فهو يؤكد أهمية الدراسات التاريخية و ضرورة العودة إلى الأصل لإيجاد مختلف الروابط سواء الظاهرة منها أو الخفية، فالتاريخ يساعد على اكتشاف التسلسلات الضرورية، و لا يجب أن يفهم من هذا أن **كفاييس** من الذين يتمسكون بالماضي و يريدون العيش فيه، بل على العكس هو يريد فهم الحاضر بالشكل الصحيح و التام، و يهدف إلى جعل الماضي وسيلة لتحديد المعرفة الحالية الراهنة.

إن الرياضيات هي نسيج مكوّن من إجراءات مترابطة متقاربة أو متباعدة في الزمن، أو منفصلة من خلال تمايز المجالات الرياضية، هذا الترابط يجعلها متصلة و مستمرة، و لهذا فإننا عندما نحدد مرحلة ما و لتكن في بداية القرن العشرين، نجد أنفسنا نتراجع زمنيا إلى الوراء، إلى إقليدس أو أرخميدس، و إعادة بناء المسار الذي ينقلنا من القدامى إلى ديكارت و ليبنز و أولر و برنولي كي نصل إلى هلبرت و بيانو و زرمولو و بورال. إذن: الرياضيات

هي صيرورة ،هي تطور، و هذا التطور هو طارئ غير متوقع ،و هذا لا يعني القطيعة بين مراحل تطور الرياضيات بل التأكيد على الترابط الداخلي و هو الذي جعل من إقليدس قريب من هلبرت .

لقد تأثر **كفاييس** بهلبرت الذي أعلن في مداخلته الشهيرة سنة 1900 :أن الرياضيات غير قابلة للانقسام و أنها عبارة عن جهاز يستمد قوته من ترابط أعضائه و عناصره، و كلما تطورت أدى ذلك إلى تحقيق وحدتها و توضيح معالمها أكثر فأكثر ،فالرياضيات تتطور دون حدود أو نهاية ،و هو نفس ما أكده الفيلسوف هيتنغ.

كما ربط **كفاييس** الرياضيات بالنشاط الرياضي، بالفعل ،حيث نتيجة هذا الفعل تأخذ مكانا لها في النسق الرياضي الذي يكون امتدادا للنسق القديم،و وجود نتيجة لفعل يكون مرتبطا بمجموعة مزدوجة:الأولى التي انحدرت منها ،و الثانية التي أنتجتها ،قطيعة و استمرارية في آن واحد. فالرياضي عندما يقوم بنشاط رياضي بفعل رياضي، فإنه يصل إلى نتيجة لها مضمون تاريخي تقوم بتغيير الرياضيات،و النشاط الرياضي هو مقيد بجملة من الإشكاليات و المناهج و النتائج و هذا هو سر تغير و تطور الرياضيات .

و مما سبق فالتاريخ عند **كفاييس** يتضاعف (يتطور و يثرى)نتيجة التطور النقدي للنتائج،انه دراسة تاريخية نقدية ،انه تتبع مسار تكون المفاهيم ،تحديد الروابط الفعلية و الحقيقية مع مختلف الإشكاليات ،إن الثقافة التاريخية هي ضرورية لأي متخصص في فلسفة العلوم ،وهي عند **كفاييس** تشمل كل الرياضيات من الهندسة إلى نظرية المجموعات مرورا بالتحليل و الجبر و التكامل.

فعند كتابة تاريخ نظرية رياضية كنظرية المجموعات نجد أن ما يهم الرياضي هو استخراج دلالتها الحقيقية لا التاريخية و لهذا فالتاريخ هو مساعد لكن لا يتدخل في تحديد الحقائق الرياضية.فتاريخ الرياضيات يدرس من اجل فهم الحاضر و توقع المستقبل ،و من أجل فهم الترابط لموجود بين الأجزاء،و بين القضايا،و استخراج التسلسل الممكن للابتكارات و الاكتشافات الضرورية و اللامتوقعة في آن واحد .و هذه الخاصية تؤسس الجدلية الأساسية للرياضيات.و نستشهد بموقف بياجي الذي يرى أن الرياضيات هي عبارة عن هرم قمته ترتفع باستمرار و لكن دون أن يكون لها حدا .

و عليه انطلاقا مما سبق، **كفاييس** لم يكن مؤرخا و لا تصنف دراساته في التاريخ،
و لكنه استخدم المنهج التاريخي، لا للوقوف على أهم مراحل تطور الرياضيات لان هذه
مهمة المؤرخ، و لكن لمعرفة كيفية و آليات التطور انه اختصاص فلسفة العلوم، **كفاييس**
إذن مختص في فلسفة الرياضيات أو بصورة أدق في الإبستمولوجيا الرياضية .
و بتوفيق من الله عز و جل نكون قد انهينا بحثنا حول الرياضي **جان كفاييس**
و فلسفته الرياضية، و كلنا أمل ألا تكون هذه الخاتمة نهاية بل بداية و منطلقا لأبحاث
و دراسات أخرى في هذا المجال.

قائمة المصادر و المراجع

أولا - الكتب :

1. *J. Cavailles : La philosophie mathématique, Hermann, Paris, 1981.*
2. *J. Cavailles : Méthode axiomatique et formalisme, Essai sur le problème du fondement des mathématiques, Hermann, Paris, 1981.*
3. *J. Cavailles : correspondance Cantor- Dedekind, Hermann, Paris 1981.*
4. *J. Cavailles : oeuvres complètes de philosophie des sciences, Hermann, Paris 1994.*
5. *J. Cavailles : Réflexions sur le fondement des mathématiques, dans œuvres complètes de philosophie des sciences, Hermann, Paris, 1994.*
6. *J. Cavailles : transfini et Continu, dans les œuvres complètes de philosophie des sciences, Hermann, Paris, 1994, p 459*
7. *J. Cavailles : sur la logique et la théorie de la science, J Vrin, Paris, 1997 .*

ثانيا - المقالات:

1. *J. Cavailles : Les œuvres complètes de George Cantor, Revue philosophique de la France et de l'étranger, dirigée par Lévy Bruhl, année 57, N°7-8, librairie Félix Alcan, Juillet, Décembre 1932.*
2. *J. Cavailles : Les ages de l'intelligence, revue philosophique de la France et de l'étranger, T 119, Janvier, Février 1935.*
3. *J. Cavailles : L'école de vienne au congrès de Prague, Revue de métaphysique et de moral 1935 pages 137-149.*
4. *J. Cavailles et Lautman : La pensée mathématique, Société française de philosophie, 4 février 1939.*
5. *J. Cavailles : Du collectif au pari, revue de métaphysique et du moral, t 47, 1940.*
6. *Jean Cavailles : mathématiques et formalisme, Revue internationale de philosophie, N° 8, 53, 1949.*

المراجع:

أولا - الكتب:

أ - بالعربية :

1. إدوار موروسير: الفكر الفرنسي المعاصر، ترجمة عادل العوا، منشورات عويدات، بيروت، د. ت.
2. ألبير بايي: الثورات العقلانية، ترجمة عادل العوا، دار الشمال، (دم)، 1996.
3. أميرة حلمي مطر: الفلسفة اليونانية تاريخها ومشكلها، دار المعارف، مصر، 1988.
4. برتراند راسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسي أحمد، مؤسسة سجل العرب، 1962.
5. برتراند راسل: فلسفتي كيف تطورت، ترجمة عبد الرشيد الصادق، مكتبة الأنجلو-مصرية، مصر، 1963.
6. برتراند راسل: تاريخ الفلسفة الغربية، الكتاب الثالث، الفلسفة الحديثة، ترجمة محمد فتحي الشنيطي، المكتبة المصرية، 1977.
7. برتراند راسل: أصول الرياضيات، ترجمة محمد مرسي أحمد وفؤاد الأهواني، ج1، ج3، ج4، دار المعارف بمصر، ط2 (د.ت).
8. بوخينسكي: تاريخ الفلسفة المعاصرة في أوروبا، ترجمة محمد عبد الكريم الوافي، مكتبة الفرجاني، ليبيا، (د.ت).
9. جون كوتنغهام: العقلانية فلسفة متجددة، ترجمة محمود منقذ الهاشمي، مركز الإنماء الحضاري، حلب، الطبعة الأولى، 1997.
10. حسن شعبان: برونشفيك و باشلار بين الفلسفة و العلم، دار التنوير للطباعة والنشر، لبنان، ط1، 1993.
11. حسن شعبان: النزعة العقلانية في فلسفة العلم المعاصر، منشأة المعارف، الإسكندرية، 1998.
12. حسن شعبان: مشكلات فلسفية معاصرة، (دم)، 2000.
13. خالد قطب: العقلانية العلمية دراسة نقدية، المكتبة الأكاديمية، القاهرة، ط1، 2005.
14. ديكارت: مقال في المنهج، ترجمة محمد الخضير، الطبعة 3، الهيئة المصرية العامة للكتاب القاهرة 1985.
15. روبنسون جروف: رسل، ترجمة إمام عبد الفتاح إمام، المجلس الأعلى للثقافة، القاهرة، الطبعة 1، 2005.
16. روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو إلى راسل، ترجمة محمود يعقوبي، دار الكتاب الحديث، القاهرة، 2004.
17. روبير بلانشي: نظرية العلم، ترجمة محمود يعقوبي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.
18. زكرياء إبراهيم: كانت أو الفلسفة النقدية، مكتبة مصر، القاهرة، ط2، 1972.
19. زكي نجيب محمود: نحو فلسفة علمية، مكتبة الأنجلومصرية، القاهرة، 1958.

20. سالم يفوت: فلسفة العلم و العقلانية المعاصرة، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت، ط 1، 1982.
21. سالم يفوت: درس الابدستيمولوجيا، دار دويقال للنشر، المغرب، ط3، 2001.
22. ستيوارت هامشير: عصر العقل فلاسفة القرن 17، ترجمة ناظم الطحان، منشورات وزارة الثقافة والإرشاد القومي، دمشق، 1975.
23. صلاح محمود عثمان محمد: الاتصال و اللاتماهي بين العلم و الفلسفة، منشأة المعارف، الاسكندرية، 1998.
24. عثمان أمين: ديكارت، المكتبة الأنجلومصرية، القاهرة، ط 6، 1976.
25. غاستون باشلار: الفكر العلمي الجديد، ترجمة: عادل العوا، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت، ط4، 1996.
26. فاروق عبد المعطي: فيثاغورس فيلسوف علم الرياضة، دار الكتب العلمية، لبنان، ط1، 1994.
27. فدوي حافظ طوقان: العلوم عند العرب، دار القراءة، بيروت، ط2، 1983.
28. كامل محمد محمد عويضة: أفليدس بين الفلسفة والمنهج الرياضي، دار الكتب العلمية، لبنان، ط1، 1994.
29. لودفيج فتجنتشين: رسالة منطقية فلسفية، ترجمة عزمي إسلام، مكتبة الأنجلو مصرية، القاهرة، 1968.
30. ماهر عبد القادر محمد علي: المنطق الرياضي، ج3، دار النهضة العربية، بيروت، 1985.
31. محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، ط 1، 1969.
32. محمد ثابت الفندي: فلسفة العلوم و مناهجها، دار المعرفة الجامعية، الإسكندرية، 1996.
33. محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور العقل العلمي، مركز دراسات الوحدة العربية، لبنان، 2002، الطبعة 5.
34. محمود فهمي زيدان: كانط وفلسفته النظرية، دار الوفاء للطباعة والنشر، الإسكندرية، 2004.
35. محمد مهران رشوان: مقدمة في المنطق الرمزي، دار قباء للطباعة والتوزيع، القاهرة، 2004.
36. محمد وقيدي: فلسفة المعرفة عند غاستون باشلار، دار الطليعة، لبنان، ط 1، 1980.
37. محمد وقيدي: ما هي الابدستيمولوجيا؟ مكتبة المعارف، (دم)، ط2، (دت).
38. نجيب بلدي: دروس في تاريخ الفلسفة. دار بوبقال للنشر المغرب ط1 1987.

39. هانزر رايشنباخ: نشأة الفلسفة العلمية، ترجمة فؤاد زكرياء، دار الوفاء لطباعة والنشر، الإسكندرية، دت.
40. هنري بوانكري: العلم والفرض، ترجمة حمادي جاب الله، المنظمة العربية للترجمة، بيروت، 2002 .
41. ياسين خليل: المنطق و الرياضيات، المجمع العلمي العراقي، بغداد، 1964.
42. يوسف كرم: تاريخ الفلسفة الحديثة دار المعارف، القاهرة ط6، 1976.

ب- بالفرنسية :

1. Aylan Aglan et J.P Azema : *Jean Cavaillès résistant ou la Pensée en actes. Flammarion 2002Lyon,1998*
2. Gilbert Arzac : *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie ,Aléas Irem,*
3. *Aristote: Physique, traduction de A Stevens, J. Vrin, 1999.*
4. *G Bachelard :la philosophie du non,Puf,Paris,3^{eme} édition,1988.*
5. *G Bachelard : le nouvel esprit scientifique, Puf, Paris, 13^{eme} édition, 1990.*
6. *Gaston Bachelard : L'oeuvre de Jean Cavaillès ,dans Ferrières : Jean Cavaillès, un Philosophe dans la guerre.*
7. *Paul Barbarin : La géométrie non euclidienne, Ed Jacques Gabay, Paris, 3^{me} édition, 1990.*
8. *Hervé Barreau : L'épistémologie, PUF, Paris, 1^{ere} edition, 1990.*
9. *Jean Baudet : Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques, Vulbert, Paris, 2002.*
10. *Anne Becco : Du simple selon G.W.Leibniz, discours de métaphysique et de monadologie, J.Vrin, Paris, 1975.*
11. *Jean.Pierre Belna: La notion de nombre chez Dedekind, cantor, Frege, Librairie JVrin, 1996.*
12. *Jean Pierre Belna : histoire de la logique, ellipses, Paris,2005.*
13. *Paul Bernays : philosophie des mathématiques, Vrin, Paris, 2003.*
14. *Joseph Bertrand : traité d'arithmétique, hachette, Paris, 1849.*
15. *Rudolph Bkouche : Euclide, Klein, Hilbert et les autres, dans la rigueur et le calcul, Cedic, Paris, 1982.*
16. *Robert Blanché :L'axiomatique,Puf,Paris,1999.*
17. *Marcel Boll :Les deux infinis,Larousse,Paris.*
18. *Bolzano : les Paradoxes de l'infini, trad H.Sinaceur le seuil, Paris, 1993.*
19. *Jacqueline Boniface : Hilbert et la notion d'existence en mathématiques, JVrin,2004.*
20. *Borel :quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles,dans Rivenc – Rouilhan, Logique et fondements des mathématique .*

21. **Borel** : *Cinq lettres sur la théorie de ensembles, dans Rivenc - Rouilhan, Logique et fondements des mathématiques.*
22. **Borel** : *Leçons sur la théorie des fonctions (éléments et principes de la théorie des fonctions), Gouthière Villars, Paris ,3^{ème} éd,1928.*
23. **Borel** : *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions, Gouthière Villars, Paris,1922.*
24. Francisque **Bouillier** : *Théorie de la raison impersonnelle, E Joubert, Paris, 1844.*
25. Nicolas **Bouleau** : *philosophies des mathématiques et de la modélisation, L'Harmattan, 1999.*
26. Nicolas **Bourbaki** : *Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris, 2^{ème} éd, 1969 .*
27. Pierre **Boutroux** : *l'idéal scientifique des mathématiques, Puf,1955.*
28. Renée **Bouveresse** : *Spinoza et Leibniz. L'idée d'animisme universel, J. Vrin, Paris, 1992.*
29. **J Brouwer** : *les principes logiques ne sont pas sûr , traduction J.Bouveresse, 1908,dans Logique et fondements des mathématiques.*
30. **Brouwer**: *Qu'on ne peut pas se fier aux principes logiques (1908), dans Largeault : intuitionnisme et théorie de la démonstration..*
31. **J Brouwer** : *Sur le rôle du principe du tiers exclu dans les mathématiques, spécialement en théorie des fonctions,1923, dans Largeault : intuitionnisme et théorie de la démonstration.*
32. **J Brouwer** : *Conscience, philosophie et mathématique 1923, dans Largeault : intuitionnisme et théorie de la démonstration.*
33. **J Brouwer** : *L'effet de L'intuitionnisme sur l'algèbre classique de la logique, dans Largeault : intuitionnisme et théorie de la démonstration.*
34. Jan **Brouwer** : *Mathématiques, Science, langage, dans Largeault : intuitionnisme et théorie de la démonstration.*
35. **Brunschvicg** : *L'expérience humaine et la causalité, Alcan, Paris, 3eme édition, 1940.*
36. **Brunschvicg** : *Ecrits philosophiques,T₂, Puf, Paris, 1954.*
37. **L .Brunschvicg** : *les étapes de la philosophie mathématique, A.Blanchard, Paris, 1993.*
38. Claude Paul **Bruter**: *de l'intuition à la controverse, Albert Blanchard, Paris, 1987.*
39. Georges **Canguilhem**: *Vie et mort de Jean Cavailles, Editions Allia, Paris, 2004.*
40. Georges **Cantor** :*sur les fondements de la théorie des ensemble transfinis, Editions jacques Gabay, 1898.*
41. Francis **Casiro**: *L'infini, le fini, le discret et le Continu, Edition Pole , Paris, 2006.*
42. Augustin Louis **Cauchy** : *cours d'analyse de l'école royale Polytechnique 1^{ère} Partie, analyse algébrique édition, Jacques Gabay, Paris, 1821.*

43. **Maurice Caveing** : *le problème des objets dans la pensée mathématiques*, J.Vrin, paris, 2004.
44. **Michel Chasles** : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Jacques Gabay, paris, 1989.
45. **Egmont Colerus** : *De Pythagore à Hilbert*, Flammarion, France, 1947.
46. **L. Couturat** : *logique de Leibniz*, Félix Alcan, Paris, 1901
47. **Louis Couturat** : *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Alcan, Paris, 1903.
48. **Louis Couturat** : *De l'infini mathématique*, Albert Blanchard, Paris, 1973.
49. **Louis Couturat** : *Les principes des mathématiques*, George Holm Verlag, New York, 1979.
50. **Louis Couturat** : *La philosophie des mathématiques de Kant, dans les principes des mathématiques*, Albert Blanchard, Paris, 1980.
51. **Kim. Sang Ong- Van - Cung** : *Descartes et l'ambivalence de la création*. J.Vrin. Paris, 2000.
52. **Marcelo Dascal** : *La sémiologie de Leibniz*, Aubier Montaigne, Paris, 1978.
53. **Simone Davel** : *philosophie des sciences*, Puf, Paris, 1ere édition, 1950.
54. **Dedekind** : *lettre à Kiferstein du 27 Février 1890*, traduction A. Sinaceur, dans *logique et fondements des mathématiques*, (sans édition), 1992.
55. **Jean Louis Déotte** : *Appareils et formes de la sensibilité*, L'Harmattan, Paris, 2005.
56. **J.T.Desanti** : *les idéalités mathématiques*, le Seuil, Paris.
57. **R. Descartes** : *Œuvres de Descartes, Méditations VI*, FG Levrault, Paris, 1824.
58. **R Descartes** : *La géométrie*, Hermann, Paris, 1886.
59. **René Descartes** : *Discours de la méthode*, J. Vrin, Paris, 1987.
60. **Jean Dieudonné** : *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1996.
61. **Jacques Dubucs**: *Des nombres transfinis, dans le mystère des nombres*, le Pommier, 2007.
62. **Pierre Dugac** : *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, J.Vrin, 1976.
63. **Euclide** : *les éléments*, tr Bernard Vitrac, Puf, Paris.
64. **Leonhard Euler** : *Introduction à l'analyse infinitésimal*, tome 1, traduction J B Labey, Jacques Gabay, Paris, 1987.
65. **G .Ferrières** : *Jean Cavaillès, un Philosophe dans la guerre (1903-1944)*, le Félin, Paris, 2003.
66. **Michel Foucault** : *Dits et écrits 1954-1988*, Gallimard, IV, 1980-1988, Paris.
67. **A.Fuchs, G.Reeb** : *Logique*, Office des publications universitaires, Alger.

68. **Galilée** : *Discours concernant deux sciences nouvelles*, traduction Maurice Clavelin, PUF, Paris, 1995.
69. François de **Gaudit** : *Husserl et Galilée : sur la crise des sciences européennes*, J.Vrin, Paris, 2004.
70. Yvon **Gauthier** : *La logique du continu sur la logique interne*, L'Harmattan, Paris, 2004.
71. G.**Gentzen** : *La Consistance de l'arithmétique élémentaire* 1935, dans J.Largeault : *intuitionnisme et théorie de la démonstration*.
72. Jacqueline **Guichard** : *L'infini au carrefour de la philosophie et des mathématiques*, Ellipses, Paris, 2000.
73. Roger **Godement** : *Analyse mathématique*, Springer, 2^{ème} édition, 2001.
74. Christian **Godin**: *La totalité3, la philosophie*, Champ Vallon, 1998.
75. Henri **Gouhier**: *La pensée métaphysique de Descartes*, J. Vrin, Paris, 1987.
76. Gilles Gaston **Granger** : *pensée formelle et sciences de l'homme*, Aubier Montaigne, Paris, 1^{ere} édition, 1967.
77. Giles Gaston **Granger** : *Logique ,mathématique ,métamathématique* ,dans Roshdi Rashed et Pierre Pellegrin, *philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance*, Albert Blanchard , Paris.
78. Marie-Christine **Granjon** : *Penser avec Michel Foucault théorie critique et pratiques politiques*, Karthala, 2005, Paris.
79. 11- Jeremy **JGray** : *Le défi de Hilbert, un siècle de mathématique*, Tr Christos Grammatikas, Dunod, 2003.
80. Ernest **Havet** : *Pensées de Pascal*, Dezobry-E Magdeleine, Sorbonne, 1852.
81. **Hilbert** : *Les principes fondamentaux de la géométrie* traduction L.Laugel, Gautier – Villars, Paris, 1900.
82. **Hilbert** : *Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les 23 problèmes* 1902, tr L Laugel, Gaques Gabay, Paris, 2004.
83. **Hilbert** : *sur les fondements de la logique et de l'arithmétique* 1905, tr :H.Sinaceur, dans Rouilhan et F. Rivenc : *Logique et fondements des mathématiques*.
84. D.**Hilbert** : *Nouvelle fondation des mathématiques*(1922), Première communication, dans Largeault : *intuitionnisme et théorie de la démonstration*.
85. **Hilbert** : *les fondements logiques des mathématiques* (1923), dans Largeault : *intuitionnisme et théorie de la démonstration*.
86. **Hilbert** : *sur l'infini*(1926), dans Largeault : *Logique mathématique*, Armant Colin, Paris, 1972.
87. D.**Hilbert** : *Le fondement de l'arithmétique élémentaire* (1930), dans J.Largeault : *Intuition et intuitionnisme*.
88. **Gilbert Hottois** : *Penser la logique, Une introduction technique et théorique à la philosophie de la logique et du langage*, De Boeck Université, 2^e ed, 2002.

89. **K.Jaouiche** : *la théorie des parallèles en pays d'islam*, J.Vrin, Paris, 1986.
90. **Pierre Joray** : *La quantification dans la logique moderne*, L'Harmattan, France 2005.
91. **E Kant** : *Critique de la raison pure*, T₁, Librairie philosophique de Ladrangé, Paris, 2^{ème} édition, 1845.
92. **G. Kreisel** : *Le programme de Hilbert 1958*, dans J.Largeault : *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*.
93. **Albert Lautman** : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, J.Vrin, 2006.
94. **J Largeault** : *intuitionnisme et théorie de la démonstration*, J Vrin, 1992.
95. **Jean Largeault** : *Intuition et intuitionnisme*, J.Vrin, Paris, 1993.
96. **J Largeault** : *logique mathématique*, Armond Colin, Paris, 2001.
97. **Sandra Laugier** : *Carnap et la construction logique du monde*, J.Vrin, Paris, 2001.
98. **Philippe Lauria** : *Cantor et le transfini mathématique et ontologie*, l'Harmattan, 2004.
99. **Jacques Laz** : *Bolzano critique de Kant*, J Vrin, Paris, 1993.
100. **Henri Lebesgue** : *La mesure des grandeurs*, Paris, A.Blanchard, 1975.
101. **Lebesgue** : *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Ed Gauthier- Villas, Paris, 2^{ème} édition, 1928.
102. **Leibniz** : *Nouvelles lettres et opuscules inédits de Leibniz*, Auguste Durand, Paris, 1857.
103. **François Le Lionnais** : *Les grands courants de la pensée mathématique*, Hermann, Paris, 1998.
104. **Tony Levy** : *Figures de l'infini*. Editions du seuil, Paris, 1987.
105. **François Le Lionnais** : *Les grands courants de la pensée mathématique*, Hermann, Paris, 1998.
106. **Augustin Louis** : *Cauchy cours d'analyse de l'école royale Polytechnique 1^{ère} Partie, analyse algébrique édition*, Jacques Gabay, Paris, 1821.
107. **François Lurçat** : *L'autorité de la science*, édition Cerf, Paris, 1995.
108. **Roger Martin** : *Logique Contemporaine et formalisation*, Puf, Paris, 1964.
109. **John Mason** : *l'esprit mathématique*, De Boeck Université, 1997, Paris.
110. **Vladimir Maz'ya, Tatiana Shaposhnikova** : *Jacques Hadamard: un mathématicien universel*, tr: Gérard Tronel, ed Edp Sciences, 2005.
111. **Maurice Meigne** : *Recherches sur une logique de la pensée créatrice en mathématiques*, Albert Blanchard, Paris, 1964.
112. **Messant** : *La philosophie de Léon Brunschvicg*, Paris, J.Vrin, 1938.

113. **Françoise Monnoyeur** : *Infini des mathématiciens, infini des Philosophes (ouvrage collectif)*, E Belin, 1999.
114. **Jacques Morizot**: *de l'histoire aux fondements, dans la rigueur et le calcul*, Cedic, Paris, 1982.
115. **Aloyse Raymond Ndiaye** : *La philosophie d'Antoine Arnauld*, J. Vrin, Paris, 1994.
116. **Frédéric Nef** : *Le formalisme, question le tournant des années 30*, J. Vrin, Paris, 1998.
117. **Pierre Cassou Noguès** : *De l'expérience mathématique*, J Vrin, Paris, 2001,
118. **Newton**: *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, tr: Marquise du châtelet, Jacques Gabay, 1990.
119. **Novikov** : *Introduction à la logique mathématique* Dinard, Paris, 1964.
120. **Roland Omnès** : *Philosophie de la science Contemporaine*, Gallimard, 1954, Paris.
121. **J-F Pabion**: *Logique mathématique*, Hermann, Paris, 1976.
122. **J David Philip, Harsh Renben** : *L'univers mathématique*, tr L chambadal, Gautier Villars, Bordas, Paris, 1985.
123. **Piaget** : *Traité de logique, étude de logistique opératoire*, Puf,, 1949
124. **Jean Piaget** : *Introduction à l'épistémologie génétique, la pensée mathématique*, Puf, Paris, 1950 .
125. **Piaget** : *La psychologie de l'intelligence*, Colin, Paris, 7^e édition, 1964.
126. **Piaget** : *Logique et connaissance scientifique*, Gallimard, Paris, 1967
127. **Piaget** : *La formation du symbole chez l'enfant*, Delachaux et Niestlè , Paris, 6^{eme} édition, 1976.
128. **Henri Poincaré** : *dernières pensées*, Ernest, Flammarion, Paris, 1913.
129. **Henri Poincaré** : *Sciences et méthode*, Flammarion, 1918.
130. **Poncelet** : *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris, 1822.
131. **Arnauld Raymond** : *les principes de la logique et critique contemporaine*, J Vrin,, Paris.
132. **Evelyne Le Rest** : « *Il faut que j'y songe encore* » (les axiomes de la géométrie), dans *la rigueur et le calcul*, CEDIC-Nathan Paris, 1982.
133. **Paul Rholmos**: *introduction à la théorie des ensembles*, Gauthier –Villars, Paris, 2^{me} édition, 1970.
134. **Rouilhan et F. Rivenc** : *Logique et fondements des mathématiques*, Editions Payot, 1992.
135. **Jan Sebestik**: *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano* ,J Vrin, Paris, 1992.
136. **Jan Sebestick** : *le cercle de Vienne, doctrines et controverses*, l'Harmattan, Paris, 2001.

137. **Brigitte Sénechal** : *Geometrie classique et mathematiques modernes*, Hermann, Paris, 1979.
138. **Michel Serres** : *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, PUF, Paris, 1990.
139. **Augustin Sesmat** : *les raisonnements ,la logistique*, Hermann, Paris, 1951.
140. **Bernard Sichère** : *Cinquante ans de philosophie française*, ADFP, Paris, 1998.
141. **Hourya Sinaceur** : *Corps et modèles sur l’histoire de l’algèbre réelle*, J.Vrin, 1991.
142. **H Sinaceur** : *Jean Cavaillès : philosophie mathématique*, Puf, 1994.
143. **H Sinaceur** : *Différents aspects du formalisme, dans Frédéric Nef : Le formalisme en question le tournant des années 30*, J. Vrin, Paris, 1998.
144. **H Sinaceur et Jean Pierre Bourguignon** : *David Hilbert et les mathématiques du XX siècle, dans histoire et nombres*, Tallandier, Paris, 2007.
145. **Jules Tannery** : *Introduction à la théorie des fonctions d’une variable*, Herman, Paris, 1886.
146. **René Taton** : *Histoire générale des sciences, La science contemporaine, le XIX siècle, Volume I*, Puf, Paris, 1^{ere} ed, 1995.
147. **Philippe Thiry** : *Notions de logique, ed de Boeck, 3^{me} édition*, 1998.
148. **Patrick Trabal** : *La violence de l’enseignement des mathématiques et des sciences*, L’Harmattan, France, 1997.
149. **De Georges Vanhout** : *Et que le nombre soit !...*, De boeck université, 1994.
150. **Xavier Verley** : *Carnap, Le symbolique et la philosophie*, L’Harmattan, Paris, 2003.
151. **Denis Vernant** : *La philosophie mathématique Bertrand Russel*, J.Vrin, Paris, 1993.
152. **Pierre Wagner** : *Les philosophes et la science* Gallimard, Paris, 2002.
153. **André Warusfel** : *Les mathématiques modernes*, Ed Seuil, Paris, 1969.
154. **Weyl** : *Sur la crise contemporaine des fondements des mathématiques, 1921, dans Largeault : intuitionnisme et théorie de démonstration*, J Vrin, 1992.
155. **Zermelo** : *nouvelle démonstration de la possibilité du bon ordre*, tr F.Longy, dans Rivenc. Rouilhan, *Logique et fondements des mathématiques* Bibliothèque Scientifique Payot, Paris, 1992
156. **Zermelo** : *Recherches sur les fondements de la théorie des ensembles, dans Rivenc – Rouilhan, logique et fondements des mathématiques.*

157. **Heyting** : *Disputation, in Paul Benacerraf, Hilary Putnam: the philosophy of mathematics*, Cambridge, New York, 2^{ème} edition, 1983.
158. **Gary Gutting** : *french philosophy in the twentieth century*, Cambridge, London, 2001.
159. **Wladyslaw Tatarkiewicz** : *twentieth century philosophy (1900-1950)*, Belmont, California.
160. **John Wallis**: *the arithmetic of infinitesimals*, (1656) Springer-Verlag 2004.
161. **Dedekind**: *was sind us was sollen die Zahlen?* Brunschvicg, 1888.

المقالات:

1. **D'Alembert** : *opuscules mathématiques ou mémoires sur différents sujets de géométrie, de mécanique optique, d'astronomie*, Paris, tome 1 : 1^{er} mémoire, T 4 : 25^{eme} mémoire.
2. **Bolzano** : *Démonstration purement analytique* », Trad. Sebestik, *Revue française d'histoire*, 1964.
3. **Elisabeth Busser** : *Le labyrinthe du continu, dans L'Infini, in Tangente, Hors série N° 13, troisième trimestre 2002.*
4. **Michel Eytan**: *Des ensembles et de leurs axiomatiques esquisse de quelques points de vue, Revue mathématiques et Sciences humaines, t13, 1965.*
5. **Vincent Gérard** : *La mathesis universalis est-elle l'ontologie formelle ? dans annales de phénoménologie, N°1, 2002.*
6. **Gergonne** : *Géométrie de situation. Double théorème de géométrie à trois dimensions*, *Annales des mathématiques pures et appliquées*, T 19, 1828-1829.
7. **D Hilbert** : *problèmes mathématiques*, *revue l'enseignement mathématique*, volume 2, 1900.
8. **D Hilbert** : *méthode axiomatique*, *revue l'enseignement mathématique*, volume 20, 1918.
9. **Félix Klein** : *La géométrie dite non euclidienne*, tr L Laugel, *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, T11, N°4, 1897
10. **Lebesgue** : *sur les fonctions représentables analytiquement* *journal des mathématiques pures et appliquées*, Gautier -Villars, Paris, Tome 1, Année 1905
11. **Hervé Lehning** : *la diagonale de Cantor, dans L'infini, Tangente N°13*

12. François **Lepage** : *La naissance de la théorie des types*, revue philosophique, Vol XI, N° 2, Octobre 1984.
13. Paul **Lévy** : *Axiomes de Zermelo et Nombres transfinis*, Annales scientifiques de l'ENS, Tome 67, 1956.
14. Julien **Linassier** : *Faut-il choisir l'axiome du choix ? dans L'infini, Tangente* , N°13.
15. Georges **Noel** : *le mouvement et les arguments de Zénon d'Élée*, revue de métaphysique et de morale, société française de philosophie, 1893.
16. Jean-Luc **Périllié** : *la découverte des incommensurables et le vertige de l'infini*, conférence 16 mai 2001, Grenoble.
17. Henri **Poincaré** : *La logique de l'infini*, revue de métaphysique et de morale, année 17, Vol 5, 1909.
18. Jules **Richard** : *principes des mathématiques et le problème des ensembles*, Revue générale des sciences pures et appliquées Année 1905/juin N°: 12.
19. Benoit **Rittaud** : *Les rationnels pour atteindre les réels*, dans *L'infini, tangente Hors serie*, N°13, ed Pole, Paris, 2006.
20. Bertrand **Russell**: *Les paradoxes de la logique*, revue de métaphysique et de morale, année 14, Vol 5, 1906.
21. B **Russel** : *la théorie des types logiques* , Revue de métaphysique et de morale, 1910, année 18, n° 3.
22. H. **Sinaceur** et J P Bourguignon : *David Hilbert et les mathématiques du XXe siècle*, revue la recherche, septembre 1993, V24.
23. Hourya **Sinaceur** : *l'infini*, la recherche, N°268, volume 25, septembre 1994.

المعاجم و الموسوعات:

أولا - بالعربية:

1. روني إيلي الفا : *موسوعة أعلام الفلسفة العرب و الأجانب*، ج 1، ج 2، دار الكتب العلمية، لبنان، ط 1، 1992.
2. سعد الله و اخرون: *معجم مصطلحات الرياضيات فرنسي - عربي*، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، ط 4، 1989.
3. سهيل ادريس : *المنهل، قاموس فرنسي عربي*، دار الآداب، بيروت لبنان، ط 28، 2000.
4. مراد وهبة : *المعجمي الفلسفي*، دار قباء للطباعة و النشر و التوزيع، القاهرة، 1998.

5. القاموس:انجليزي - عربي ، دار الكتب العلمية ، بيروت لبنان، ط 1 ، 2003.
6. معجم الرياضيات(فرنسي عربي) و (عربي فرنسي)،المعهد التربوي الوطني، 1972.

ثانيا - بالفرنسية:

1. *A Lalande : Vocabulaire technique et critique de la philosophie. Puf, Paris, 1960.*
2. *Fourier: Dictionnaire de la langue philosophique, Puf, Paris, 1962.*
3. *A S Montferrier : Encyclopédie mathématique d'après les principes de la philosophie des mathématique,T1,2,3,4 ,Amyot , Paris .*
4. *Dictionnaire français allemand /allemand- français,2003.*
5. **Petite Encyclopédie des mathématiques**, 1ere édition française, 1980.
6. **Le petite Larousse illustré**, Larousse, paris, 2007.

المواقع الالكترونية:

- *Jean- Pierre **Belna** :comment Cantor introduisit l'infini en mathématiques ,dans les belles lettres , Figures du savoir 2000 ,le 27 avril 2000,p5. <http://revue.de.livres.free.fr/cr/belna.html>*
- ***Erwan Bomstein** :Leibniz et Pascal : l'infini comme principe de réforme ,mémoire de maîtrise ,université IV de paris, Sorbonne, 2001-2002.*
<http://PagesPerso-range.fr/erwanonline/Memoire.Pdf>
- *JGiordano **Bruno**, <http://fr.wikipedia.org/wiki/GiordanoBruno>*
- *Thierry **Coquand** : Herbrand et le programme de Hilbert, 15 Février 2008, P 43.*
<http://www.dma.ens.fr/herbard2005coquand-Slides.pdf>
- *Jean **Dhombres** : un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18e siècle ,Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques (Cah. Sémin. Hist. math.) ISSN 0767-7421 Paris*

1988, n°9.

http://archive.numdam.org/ARCHIVE/CSHM/CSHM_1988_9.pdf

- *Denis Diderot et Jean le Rond d'Alembert : Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, V3,1753,p 337.*
<HTTP://poveil.atilf.fr/cgi.bin/getobjet/var/antfla/encyclopedie/Te sadata>
- *L. Euler : de l'utilisation des fonctions discontinues en analyse. Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques Tome 9. 1988.* http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1988_9
- *M. Eytan : Des ensembles et de leurs axiomatiques esquisse de quelques points de vue, mathématiques et Sciences humaines T 13-1965.*http://archive.numdam.org/ARCHIVE/MSH/MSH_1965_13/_MSH_1965_13_41_0/MSH_1965_13_41_0.pdf
- *J. Paul Henner : d'Euclide à Gauss, dans la Méridienne.*
<http://w.w.w.Uriv-orelans.fr/irem/groupes/epistemus/meridieme/templates/htm>
- *Roland Hinnion : introduction à la logique, Université de Bruxelles, Faculté des sciences, Département de mathématiques, 2^{ème} édition, Septembre 2003,p 41.*
<http://www.Caudiulb.be/foum/index.php>
- *Jean Baptiste Jouet : Nature et logique de G .Gentzen à J. y . Giard.*<http://www.pabilo.Unit.paris 1.Fr/Joinite/Gentzen Giard, pdf>.
- *Jean. Claude pont : Le nombre et son statut vers le milieu du XIX^e siècle à la lumière des quelques traités, actes du colloque de PEYRESQ, la pensée numérique, 1999,*
<http://w.w.w.peiresq.org/new%20suite/actes,Hombres/Pont.Pdf>
- *Jean Sebestik : la dispute de Bolzano avec kant. .Fragment d'un dialogue sur la connaissance mathématique ,Revue philosophie N° 1 vol 30/2003*
<http://www.erudit.org/revue/philoso/2003/v30/n1/007731ar.pdf>.
- *Hourya Benis Sinaceur :La Pensée mathématique de l'infini, 2 février 2004 .*
http://lyc-henri4.scola.ac-paris.fr/assos/philo/19_infini.html

- *Hourya Sinaceur: Infini mathématique, Dictionnaire de philosophie et d'Histoire des Sciences, 1999.*
http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/histoire/l'infini_en_math%C3%A9matiques.htm.
- *Henri Volken : « Je le vois, mais je ne le crois pas... » Preuves et vérités, dans les sciences formelles, Octobre 2003.*
<http://www.unil.ch/webdav/site/ima/shared/CahiersIMA/cahier34.pdf>.
- *Michel waldschmidt : les dbuts de la théorie des nombres transcendants(à l'occasion du centenaire de la transcendance de π). Cahiers seminaires d'histoire des mathématique, 1983.*
http://www.numdam.org/item?id=CSHM_1983_4_93_0
- *Mathématiciens de l'Antiquité : <http://PagesPerso-orange.fr/jean-Paul.davalan/hist/index.html>*
- *Constante d'Euler , http://serge.mehl.free.fr/anx/int_elli.html*
- *Les axiomes de théorie des ensembles (Zermelo-Fraenkel)*
<http://www.dma.ens.fr/culturemath/maths/pdf/logique/zf.pdf>.
<http://villemin.gerard.free.fr>.
- *L échec de la formalisation des mathématiques :*
<http://w.w.w.Usherbrooke.ca/cavefour/crsnq/resultats2003>

الفه ارس

فهرس الاشكال

الصفحة	الشكل	
34	التقسيم اللانهائي للمكان	01
35	التقسيم اللانهائي للمسافة	02
39	الأعداد المستطيلة	03
44	جدول التقابل بين الأعداد و مربعاتها	04
52	التمثيل البياني للمعادلة	05
56	التمثيل الديكارتي للمعادلة $x+y=5$	06
57	تمثيل برهان المعادلات التربيعية	07
61	الحركة الأفقية للحبل الاهتزازي.	08
64	التمثيل البياني للدالة	09
93	البرهنة على الأعداد المتصاعدة بالفواصل و الترتيب	10
208	التناقض عند الحدسانيين	11
220	الحساب الإشعاعي	12
227	تقاطع (D) و (D')	13
237	توازي (D) و (D')	14
240	توظيف المصادر الخمسة في البرهنة على تساوي الزوايا	15
241	البرهنة على الفرضية الزاوية المنعرجة	16
242	البرهنة على فرضية الزاوية الحادة	17
243	تمثيل الهندسة الزائدية	18
248	تمثيل هندسة إقليدس	19
249	هندسة لوباتشفسكي	20
249	هندسة ريمان	21
255	التناظر بين النقاط و المستقيمات	22
261	أكسيوم التلاقي	23
262	أكسيوم II -انتماء النقاط الى نفس المستوى	24
262	أكسيوم III	25
262	نقاط تقاطع مستويين	26
266	تناظر مثلثين	27

267	أكسيوم أرخميدس	28
270	تناظر المثلثات عند ديزارغ	29
271	قانون ديزارغ في الهندسة الإسقاطية	30
273	تمثيل الجداء و الجمع في المقاطع	31
274	الخاصية التبديلية للجمع في المقاطع	32
275	الخاصية التجميعية للجداء	33
308	اللغة الرمزية في الرياضيات المنتاهية و اللامنتاهية	34

فهرس المصطلحات

باللغة الأجنبيةة	باللغة العربية
<i>continuité</i>	الاتصال
<i>réduction</i>	الاختزال
<i>quaternions</i>	الأربعيات
<i>Gestes</i>	أفعال
<i>nombres oblongs</i>	الأعداد المستطيلة
<i>les nombres mystérieux</i>	الأعداد الغريبةك: i, c, e, π و $i = \sqrt{-1}$ و $i^2 = -1$
<i>Nombres ordinaux transfinis</i>	الأعداد الترتيبية المتصاعدة
<i>Nombres Naturels</i>	الأعداد الطبيعية
<i>Nombres relatifs</i>	الأعداد النسبية
<i>Nombres rationnels</i>	الأعداد الناطقة
<i>Nombres irrationnels</i>	الأعداد اللاناطقة
<i>Décimales</i>	الأعداد العشرية
<i>Nombres algébriques</i>	الأعداد الجبرية
<i>Nombre exponentiel</i>	العدد الأسى: "e"
<i>Nombres transfinis</i>	الأعداد المتصاعدة
<i>nombres transcendantaes</i>	الأعداد المتعالية
<i>nombres reels</i>	الأعداد الحقيقية
<i>esthétique transcendantale</i>	الأستطيقا المتعالية
<i>induction transfini</i>	الاستقراء المتساعد
<i>indépendance d'affirmation</i>	استقلالية الإثبات
<i>Indépendance de sens</i>	استقلالية المعنى
<i>exponentiation</i>	الأسية

<i>choses</i>	الأشياء
<i>cardinal</i>	أصلي
<i>axiomatisation</i>	أكسمة
<i>Axiomatisation de la géométrie finitiste</i>	أكسمة الهندسة النهائية
<i>Axiome de détermination</i>	أكسيوم التحديد
<i>Axiomes catégoriques</i>	الأكسيومات اليقينية
<i>Axiomes Hypothétiques</i>	الأكسيومات فرضية
<i>axiome de l'ensemble vide</i>	أكسيوم المجموعة الخالية
<i>axiome de l'infini</i>	أكسيوم اللامتاهي
<i>axiome de séparation</i>	أكسيوم الانفصال أو الفصل
<i>axiome de l'ensemble des parties</i>	الأكسيوم الخاص بمجموعة الأجزاء
<i>axiome de l'ensemble réunion</i>	الأكسيوم خاص بالاتحاد
<i>axiome d'accouplement axiome des paires</i>	أكسيوم المزوجة
<i>axiome de resolubilité</i>	أكسيوم قابلية الحل
<i>Congruence</i>	أكسيومات التقايس
<i>Intégrité</i>	أكسيوم التكامل
<i>Axiomes planaires</i>	الأكسيومات المستوية
<i>Axiomes spatiales</i>	الأكسيومات الفضائية
<i>axiome transfini</i>	أكسيوم المتصاعد
<i>Axiome de l'induction total</i>	أكسيوم الاستقراء التام
<i>idéalisation</i>	الأمثلة
<i>appartenance</i>	الانتماء
<i>systèmes apparentés</i>	الأنساق المقاربة
<i>axiome du choix</i>	بديهية الاختيار
<i>analyse réelle</i>	التحليل الحقيقي
<i>ordre circulaire</i>	الترتيب الدائري
<i>Ordre transfini</i>	الترتيب المتصاعد
<i>mathématisation</i>	الترييض
<i>saturation</i>	تشبع
<i>constructiviste</i>	التصور البنائي أو التكويني
<i>actualiste</i>	التصور الفعلي

<i>multiplicité</i>	التضاعف
<i>Substitution</i>	التعويض
<i>Définition par récurrence</i>	التعريف بالتراجع
<i>relation biunivoque</i>	تقابل واحد بواحد
<i>bijection</i>	تقابل واحد بواحد
<i>coupures</i>	التقطعات
<i>Paraboliques</i>	التكافئية
<i>intégrité</i>	التكامل
<i>Incidence</i>	التلاقي
<i>Représentation analytique</i>	تمثيل تحليلي
<i>engendrement</i>	التوالد
<i>Sommant</i>	الجامع
<i>entités</i>	جواهر
<i>Intuition Sui generis</i>	حدس من نوع خاص
<i>intuitionnisme</i>	الحدسانية
<i>la fécondité propre</i>	الخصوبة الخالصة
<i>Fonctions continues</i>	الدوال (المستمرة)
<i>Fonctions discontinues</i>	الدوال اللامستمرة
<i>imaginaires</i>	الدوال الحقيقية أو الخيالية
<i>Fonctions croissantes</i>	الدوال المتزايدة
<i>Description</i>	رسم
<i>rigide</i>	زمرة التحويلات الصلبة
<i>chaîne</i>	سلسلة
<i>la chaîne propre</i>	السلسلة الخالصة q chaîne
<i>le réseau de référence</i>	شبكة المرجعية
<i>raboter l'extrinsèque</i>	صقل الظاهري، الخارجي
<i>La formalisation</i>	الصورنة
<i>formalisme</i>	الصورية
<i>le formalisme modifié</i>	الصورية المعدلة
<i>formules</i>	الصيغ
<i>Formules des mathématiques</i>	الصيغ الرياضية

<i>nécessité</i>	الضرورة
<i>itération</i>	الضم
<i>étage intuitif</i>	الطابق الحدسي
<i>Compter</i>	عدّ
<i>nombrement</i>	العدّ
<i>nombre complexe</i>	العدد المركب
<i>nombre cardinal</i>	العدد الأصلي
<i>nombre ordinal</i>	العدد الترتيبي
<i>Relation de conséquence</i>	علاقة النتيجة
<i>individualisme</i>	فردانية
<i>hypothèse du continu</i>	فرضية المتصل
<i>espace Combinatoire</i>	فضاء توفيقوي
<i>Entendement Pur</i>	الفهم الخالص
<i>Supra - dénombrable</i>	فوق المعدود
<i>dénombrable</i>	القابل للعدّ
<i>calculable</i>	القابلة للحساب
<i>théorème des valeurs intermédiaires</i>	قانون القيم الوسيطة
<i>indécidables indécidables</i>	قضايا غير تقريرية (غير قابلة للبت)
<i>règles de formation</i>	قواعد التكوين
<i>indécidable</i>	لا تقريرية
<i>incomplétude</i>	اللاتمام
<i>imprévisibilité</i>	اللاتوقع
<i>l'infini</i>	اللامتناهي
<i>l'infini potentiel</i>	لا متناهي ممكن
<i>l'infini actuel</i>	لا متناهي فعلي
<i>Infini en puissance</i>	لامتناهي بالقوة
<i>les moments dialectiques</i>	اللحظات الجدلية
<i>Indéfini</i>	اللامحدود
<i>logistique</i>	اللوجستيقا
<i>Principe de tolerance des syntaxes</i>	مبدأ التسامح للتركيب
<i>principe d'arrêt</i>	مبدأ التوقف أو الغلق

<i>principe de dualité</i>	مبدأ الثنائية
<i>principe du cercle vicieux cercle vicieux</i>	مبدأ الدور
<i>axiomatisés</i>	المبدهنة
<i>suites</i>	المتتاليات
<i>suites trigonométriques</i>	المتتاليات المثلثية
<i>inéquations</i>	متراجحات
<i>équinumériques</i>	متساوية
<i>équipotents</i>	متساويين في القوة
<i>series</i>	متسلسلات
<i>continu</i>	المتصل
<i>Transsubjective</i>	المتعالية
<i>Isomorphes</i>	متماثلة متكافئة
<i>homographies</i>	المتناظرات
<i>paradoxes</i>	المتناقضات
<i>le champ thématique</i>	المجال الموضوعاتي
<i>ensembles boréliennes</i>	المجموعات البورالية
<i>Les ensembles infinis</i>	المجموعات اللامتناهية
<i>Ensemble infini des nombres naturels</i>	مجموعة لامتناهية الأعداد الطبيعية N
<i>totalemt ordonné</i>	مجموعة مرتبة كلياً
<i>ensemble bien ordonné</i>	المجموعة المرتبة جيداً
<i>mathématisé</i>	مُرَيضٌ
<i>Continu</i>	المستمر
<i>nommable nommable</i>	المسمى
<i>contentuels</i>	المضمونية
<i>catégoricité</i>	المطلقية
<i>équations</i>	المعادلات
<i>Dénombrabilité</i>	معدودية
<i>antinomies</i>	المفارقات
<i>grandeur</i>	المقدار
<i>Intrasubjective</i>	الملازمة أو الذاتية
<i>Logique du premier ordre</i>	منطق الترتيب الأول

<i>la zone de la pensée actuel</i>	منطقة الفكر الفعلي
<i>discontinu</i>	المنفصل
<i>le procédé de diagonale</i>	منهج القطر
<i>La méthode des idéaux</i>	منهج المثل
<i>thématisation</i>	الموضوعانية
<i>méta mathématique</i>	الميتارياضيات بالرياضيات الشارحة
<i>Métalangue</i>	ميتالغة
<i>elliptiques</i>	الناقصية
<i>Relativité Critique</i>	النسبية النقدية
<i>la systématisation</i>	النسقية
<i>conceptuel</i>	النسق التصوري
<i>théorie des types</i>	نظرية الأنماط
<i>Théorie naïve des ensembles</i>	النظرية البسيطة للمجموعات
<i>théorie de la mesure et de l'intégration</i>	لنظرية القياس تكامل النظريات
<i>finitisme</i>	النهائية
<i>géométrie non euclidiennes</i>	الهندسات اللاإقليدية
<i>Hyperbolique</i>	الهندسة الزائدية
<i>géométrie descriptive</i>	الهندسة الوصفية
<i>géométrie métrique</i>	الهندسة المترية
<i>géométrie projective</i>	الهندسة الإسقاطية
<i>affine</i>	الهندسة التألفية
<i>Ostensible</i>	واضح
<i>conjonction</i>	وصل
<i>objectivation</i>	الوضعنة
<i>Faits</i>	الوقائع

أبرقلس (<i>Proclus 410 - 485</i>) فيلسوف يوناني ينتمي إلى الأفلاطونية المحدثة ،من أقواله: عندما يوجد العدد يوجد الجمال. ص ص 42-238.
آبل (<i>Niels Henrik Abel 1802-1829</i>) هو رياضي نرويجي، عرف بأبحاثه في التحليل الرياضي،حول المتسلسلات و المتتاليات . ص72.
أرخميدس (<i>Archimède 287 ق م -212 ق م</i>)عالم طبيعة و رياضي يوناني.ص ص40-268
أرسطو (<i>Aristote 384 ق م -322 ق م</i>) فيلسوف يوناني ، مؤسس علم المنطق و له مؤلفات في الطبيعة و الميتافيزيقا. صفحات 35-36-37-38-39-41-103
أرثمان (<i>Ehresmann 1905-1979</i>) رياضي فرنسي ،من مؤلفاته: "الجبر" المقولات و البنيات".ص8.
آرغون (<i>Jean Robert Argand 1768-1822</i>) رياضي سويسري ،اكتشف منهج الهندية الممثلة للأعداد المركبة. ص18.
إقليدس (<i>360 ق م - 295 ق م</i>) رياضي يوناني ومؤسس علم الهندسة. صفحات: 39-40-41-230-232-233-234-235-236-239-243-247-248
أكرمان (<i>Wilhelm Ackermann 1896-1962</i>) رياضي ألماني،هو تلميذ هلمبرت له إسهامات في المنطق الرياضي،و البرهنة على تناسق الأنساق الصورية. ص343.
أولر (<i>Euler 1707-1783</i>) رياضي و فيزيائي سويسري. ص ص58-59.
أوم (<i>Martin Ohm 1782-1872</i>) هو رياضي ألماني و هو أخ الفيزيائي جورج أوم . ص214.
بارمنيدس (أواخر ق 6 ق م-منتصف ق 5 ق م) فيلسوف يوناني، ص33.
باسكال (<i>Blaise Pascal 1623-1662</i>) هو رياضي ،فيزيائي،فيلسوف و عالم لاهوت فرنسي. ص ص231-270.
موريس باش (<i>Moritz Pasch 1843-1930</i>) رياضي ألماني مختص في الهندسة. صفحات258-259-260-264.
غاستون باشلار (<i>Gaston Bachelard 1884-1962</i>) فيلسوف فرنسي اهتم بفلسفة

العلوم. صفحات6-16-21-22-234.
جوزيف برتراند (<i>Joseph bertrand 1822-1900</i>) هو رياضي و اقتصادي و مؤرخ علوم فرنسي،ص 77.
هنري برغسون (<i>Henri Bergson 1859-1941</i>) هو فيلسوف فرنسي،ص 18.
برنايز (<i>Edward Louis Bernays 1891-1995</i>)،ص 341.
"برنستين" (<i>Félix Bernstein 1878-1956</i>) رياضي ألماني اشتهر بنظريته حول تكافؤ مجموعات كانتور، كما انه بحث في الأعداد الترتيبية المتصاعدة،ص 118.
برنشفيك (<i>Léon Brunschvicg 1869-1944</i>) فيلسوف فرنسي ارتبط اسمه بالمثالية الفرنسية، بالعقلانية الفرنسية. صفحات: 3-21-197-200-201.
جوهان برنولي (<i>Johan Bernoulli 1667-1748</i>) رياضي سويسري، أخ جاكوب برنولي و أب دانيال برنولي وهو أستاذ أولر،ص 58.
دانيال برنولي (<i>Daniel Bernoulli 1700-1782</i>) طبيب و فيزيائي و رياضي سويسري. ص 60.
جيوردانو برونو (<i>Giordano Bruno 1548-1600</i>) فيلسوف ايطالي. من مؤلفاته : "اللامتناهي، الكون و العوالم" سنة 1584،ص 47.
جان بروور (<i>Jan Brouwer 1881-1966</i>) فيلسوف ألماني و مؤسس الرياضيات الحدسانية، صفحات: 39-202-203-205-206-210-211-291-369.
روبير بلانشي (<i>Robert Blanche 1898-1975</i>) فيلسوف فرنسي و مؤلف " في الرياضيات من زاوية فلسفية"، صفحات: 23-24-235.
ماكس بلانك (<i>Max Karl Ernst Ludwig Planck 1858-1949</i>) فيزيائي ألماني تحصل على جائزة نوبل سنة 1918،ص: 18.
هنري بوا نكري (<i>Poincaré 1854-1912</i>): رياضي، فيزيائي و فيلسوف فرنسي. صفحات: 18-39-132-202-329
بورال (<i>Émile Borel 1871-1956</i>): رياضي فرنسي، مختص في نظرية دوال و الاحتمالات. صفحات: 172-173-174-175-176-179-180-376
بورالي-فورتني (<i>Cesare Burali-Forti 1861-1931</i>): رياضي ايطالي، و مكتشف مفرقة نظرية المجموعات، صفحات: 118-119-120-128.
بوغلي (<i>Célestin Bouglé 1870-1940</i>): فيلسوف و عالم اجتماع فرنسي،ص 4.
جورج بول (<i>Georges Boole 1815-1864</i>): رياضي و منطقي و فيلسوف

بريطاني، مؤسس جبر المنطق، ص ص 214-356.
بولزانو " (1848-1781 <i>Bernard Bolzano</i>): هو فيلسوف و رياضي ألماني. صفحات: 213-139-137-103-85-66-65-64-53-52-51-50-49.
بولياي (<i>János Bolyai</i> 1856-1792): رياضي مجري من مؤسسي الهندسة اللاإقليدية. ص ص: 246-243.
بونسلي " (<i>Poncelet Jean-Victor</i> 1867-1788): رياضي فرنسي، بحث في الرياضيات العامة و في الهندسة، ص 253.
جان بياجى (<i>Jean Piaget</i> 1980-1889): فيلسوف و عالم نفس سويسري، مؤسس النظرية التكوينية في المعرفة، ص ص: 354-320.
جيوسب بيانو (<i>Giuseppe Peano</i> 1932-1858): رياضي ألماني، احد مؤسسي المنطق الرياضي و نظرية المجموعات، أول من قال بأكسمة نظرية الأعداد الطبيعية. صفحات: 347-316-227-226-225.
جاك بيرى (<i>Jacques Perret</i> 1992-1901): أستاذ في كلية الآداب في مونبولي. ص ص 8-132.
جورج بيكوك (<i>Georges Peacock</i> 1858-1791): هو رياضي انجليزي، بحث في علم و نشر سنة 1830 "بحث في الجبر" حاول فيه تأسيس الجبر على قاعدة علمية. ص 214.
تورينغ (<i>Alan Mathison Turing</i> 1954-1912): رياضي بريطاني، و احد مؤسسي الإعلام الآلي، بحث في صورة التصورات الرياضية، ص 105.
ثابت بن قرة (862-901) عالم و طبيب و رياضي عربي، ص ص 43-42.
جرقون (<i>Joseph Diaz Gergonne</i> 1859-1771): رياضي فرنسي، مختص في الهندسة الإسقاطية، ص ص 254-214.
جوردان (<i>Albert Paul Gordan</i> 1912-1837): رياضي ألماني، اهتم بتأسيس النظرية و الهندسة الجبرية، كما انه بسط دليل تعالي p و e ، ص 376.
دالمبر (<i>Jean le Rond D'Alembert</i> 1783-1717): رياضي و فيلسوف فرنسي، اشتهر بتأليفه للموسوعة الرياضية مع ديدرو، كما انصب بحثه على المعادلات التفاضلية، و المشتقات الجزئية، ص 61.
لوراند دوزو (<i>Douzou Laurent</i>) هو أستاذ تاريخ المعاصر بقسم الدراسات السياسية بجامعة ليون من الأوائل الذين اهتموا عن قرب بصورة كفاييس، من أهم مؤلفاته " المقاومة الفرنسية " 2005، ص 2.
دونجوي " (<i>Arnaud Denjoy</i> 1974-1884): رياضي فرنسي، مؤسس نظرية التكامل، ص: 7.

<p>ديدكند (<i>Julius Wilhelm Richard Dedekind</i> 1831-1916) رياضي ألماني. صفحات: 72-73-74-75-82-86-88-92-123-124-126-133-135- 136-137-138-139-141-142-144-153-167-220-222-223- 224-225-280-304-379.</p>
<p>ديرشلي (<i>Peter Gustav Lejeune-Dirichlet</i> 1805-1859): هو رياضي ألماني. ص ص 62-70.</p>
<p>ديزارغ (<i>Girard Desargues</i> 1591-1661) هندسي و مهندس فرنسي، يعتبر مؤسس الهندسة الإسقاطية. صفحات: 253-270-271-274-275.</p>
<p>ديزنتي (<i>Jean Toussaint Desanti</i> 1914-2002): فيلسوف فرنسي، مختص في فلسفة الرياضيات، أهم مؤلفاته: المثاليات الرياضية، أبحاث إبستمولوجية حول تطور نظرية الدوال للمتغيرات الحقيقية، ص 385..</p>
<p>رينيه ديكارت (<i>René Descartes</i> 1596-1650): فيلسوف و رياضي و فيزيائي فرنسي، يعتبر من المؤسسين الأوائل للفلسفة الحديثة. صفحات: 20-45-55-57-58-180-181-182-183-184-185-186.</p>
<p>دي مورغان (<i>Auguste De Morgan</i> 1806-1871): رياضي ألماني أسس مع جورج بول المنطق الحديث، يشتهر بصياغته لقوانين تحمل اسمه، ص ص 214-356.</p>
<p>ديودوني (<i>Jean Dieudonné</i> 1906-1992): رياضي فرنسي له إسهامات في علم الجبر و في الطوبولوجيا. من مؤلفاته: عناصر الهندسة الجبرية، ص 348.</p>
<p>برتراند راسل (<i>Bertrand Russel</i> 1872-1970): رياضي ، منطقي ، فيلسوف ، رجل سياسي و إبستمولوجي بريطاني. صفحات: 75-110-129-130-131-145-226-227-228-229-291- 315-316-321-327-328-330-331-380.</p>
<p>نيكول راسين (<i>Nicole Racine</i>) مختصة في تاريخ المتقين، من مؤلفاتها "التاريخ الثقافي المعاصر" 2005، ص 2.</p>
<p>ريشارد (<i>Jules Richard</i> 1862-1956): رياضي فرنسي عرف بالمفارقة التي تعرف باسمه. ص ص 131-174.</p>
<p>بول ريكور (<i>Paul Ricœur</i> 1913-2005): فيلسوف فرنسي اختص بالتأويل، ص 10.</p>
<p>ريمان (<i>Georg Friedrich Bernhard Riemann</i> 1826-1866): رياضي ألماني اهتم بالهندسة التفاضلية. صفحات: 243-247-249.</p>
<p>دي بوا ريمون (<i>Du Bois Reymond</i> 1818-1896): فيزيولوجي و رياضي</p>

ألماني . ص ص: 62-105 .
زرمولو (Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo 1871-1953): رياضي ألماني بحث في أسس الرياضيات . صفحات: 110-145-146-148-150-152-153-157-158-159-161- 162-166 .
زينون الإيلي (Zénon D'élée) ولد حوالي 495 ق م و توفي 430 ق م، فيلسوف يوناني من تلامذة برمنيدس ،من أهم مؤلفاته: في الاعتراضات. صفحات 33-34-35-41. ساكيري (Giovanni Girolamo Saccheri 1667-1733) رياضي إيطالي اهتم بالبرهنة على صدق أكسيومات إقليدس. صفحات 238-240-242-243 .
باروخ سبينوزا (Baruch de Spinoza 1632-1677) فيلسوف فرنسي اهتم بنقد الديكارتية، ص: 20.
ستاكيل " (P. Staeckel 1862-1919)، ص: 5.
"ستينتز" (Ernest Steinitz 1871-1928) رياضي ألماني، ص: 280.
سكولم (Thoralf Albert Skolem 1887-1963): رياضي و منطقي نرويجي، عرف بأبحاثه في المنطق الرياضي و نظرية المجموعات، ص ص : 7-380 .
حورية سيناصور "eur (Hourya Sinaceur) (1940...) هي مغربية الأصل، تخصص فلسفة العلوم مؤلفة لعدة كتب حول كفاييس من بينها "فلسفة الرياضيات عند جان كفاييس" 1994، ص ص: 2-99 .
شازلس (Michel Chasles 1793-1880) رياضي فرنسي، من مؤلفاته: "بحث في الهندسة العليا" 1852، ص ص : 255-256 .
شرويدر (Ernst Schröder 1841-1902) رياضي ألماني، ص ص 124-356 .
شونفليز (Arthur Moritz Schönflies 1853-1928): رياضي ألماني بحث في الهندسة بأنواعه و بالطوبولوجيا، ص: 5.
طانيري (Tannery 1848 - 1910) رياضي ألماني ، ص ص: 77-78 .
عمر الخيام (1040-1131) شاعرٌ فارسي، وعالم في الفلك والرياضيات ، ص: 239 .
غاليلي (Galilée 1564-1642) فيزيائي و عالم فلكي إيطالي. أعماله كانت عاملا أساسيا في الثورة العلمية و في تأسيس الفيزياء الحديثة، ص ص 44-103 .
غنزن (Gerhard Gentzen 1909-1945) رياضي و منطقي ألماني، مؤلفه الأساسي حول نظرية البرهنة. صفحات: 7-344-349-350-351-352-353-367-380 .
- غودل " (Kurt Godel 1906-1978)، رياضي و منطقي أهم إسهاماته بقانون اللاتمام سنة 1931 . صفحات: 7-104-341-344-347-348-366-367-370 .

غوس (1855-1777 <i>Johann Carl Friedrich Gauss</i>) رياضي، فيزيائي و عالم فلكي ألماني، صفحات 123-214-244-247.
جان غوسي (1912-1944 <i>Jean Gosset</i>) فيلسوف ومقاوم فرنسي، ص 10.
"فابلن" (1880-1960 <i>Oswald Veblen</i>) رياضي أمريكي، هندسي، و طوبولوجي، أعماله طبقت في الفيزياء الذرية و النظرية النسبية، ص ص 283-284.
فتجنشين (1889-1951 <i>Ludwig Josef Johann Wittgenstein</i>) فيلسوف مجري ثم بريطاني، له إسهامات في المنطق و في نظرية أسس الرياضيات و في فلسفة اللغة. صفحات: 356-357-358-360-361.
فرانكل (1891-1965 <i>Abraham Adolf Halevi Fraenkel</i>) رياضي ألماني، اهتم بالنظرية الاكسيوماتيكية للمجموعات. صفحات 5-158-159-161-162-166.
بنوا فرني " (<i>Benoît Verny</i>) مؤرخ فرنسي.
فريجه (1848-1925 <i>Gotlob Frege</i>): رياضي، منطقي و فيلسوف ألماني، له إسهامات في المنطق الرياضي و في الفلسفة التحليلية.
فريشي (1878-1973 <i>Maurice René Fréchet</i>) رياضي فرنسي، رياضي سياسي، إسهاماته كانت حول الطوبولوجيا، الإحصاء و الاحتمالات.
فوريي (1768-1830 <i>Joseph Fourier</i>) رياضي و فيزيائي فرنسي، اشتهر بأبحاثه حول تفكيك الدوال الدائرية و المتسلسلات المثلثية التي تعرف باسمه.
فويت (1540-1603 <i>François viète</i>) رياضي فرنسي و من المؤسسين الأوائل للجبر، ص: 61.
قراسمان (1809-1877 <i>Hermann Grassman</i>) رياضي و لغوي ألماني. صفحات: 215-219-220-224-383.
فون نومان (1903-1957 <i>Von Neumann</i>) فون نومان رياضي و فيزيائي أمريكي من أصل مجري، له إسهامات في المنطق الرياضي، في الميكانيكا، في نظرية المجموعات و الإعلام الآلي. من مؤلفاته: الأسس الرياضية للميكانيكا. صفحات: 7-162-164-165-166-167-341-343-367.
فيرشتراس (1815-1897 <i>Karl Theodor Wilhelm Weierstrass</i>) رياضي ألماني أهم إسهاماته حول الدوال البيضاوي (<i>elliptiques</i>)، ص ص 71-72.
غابرييل فرييرس (1900-2001 <i>Gabrielle Ferrières</i>) أخت كفايبس، ص 2.
رودولف كارناب (1891-1970 <i>Rudolf Carnap</i>) فيلسوف ألماني من ممثلي الوضعية المنطقية. صفحات: 344-362-363-364.
كارتان (1869-1951 <i>Élie Cartan</i>) رياضي فرنسي، أهم مؤلفاته "هندسة الفضاءات" 1925 "نظرية الزمر المستمرة و الفضاءات المعقدة" 1935، ص 7.

<p>جورج كانتور (1845-Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) - (1918)رياضي ألماني و مكتشف نظرية المجموعات. صفحات: 18-31-80-82-86-87-88-89-91-92-94-95-96-97-98- 99-100-104-108-110-112-115-118-120-121-128-150- 151-164-167.</p>
<p>كانغيلم (1995-1904 Georges Canguilhem) هو فيلسوف و ابستمولوجي فرنسي مختص في تاريخ العلوم، ص ص 16-20.</p>
<p>كانط (1804-1724 Emmanuel Kant)فيلسوف ألماني صاحب الفلسفة النقدية المثالية. صفحات: 3-191-192-193-194-195-198-199-200-201-294- 295-296-297-298-302-315.</p>
<p>كايلاي (1895-1821 Arthur Cayley)رياضي بريطاني و احد مؤسسي المدرسة البريطانية الحديثة للرياضيات الخالصة،ص ص 255-256.</p>
<p>كرونيك (1891-1823 Léopold Kronecker)رياضي و منطقي ألماني صاحب مقولة الله هو خالق الأعداد،و ما عداها من صنع الإنسان.صفحات: 39-124-202.</p>
<p>كريزل (1923 Georg Kreisel...)رياضي منطقي نمساوي ،اهتم بكل مجالات المنطق و خاصة نظرية البرهنة،ص341.</p>
<p>كلاين (1925-1849Felix Klein) رياضي ألماني ،اشتهر بنظرية الزمر ،نظرية الدالة والهندسة اللاإقليدية و علاقتها بنظرية الزمر،صفحات: 4-256-257.</p>
<p>نيكولا كوبرنيك (1543-1473 Nicolas Copernic)عالم فلكي بولوني،صاحب نظرية الشمس توجد في مركز الكون، ص:48.</p>
<p>كوشي (1857-1789 Augustin Louis, baron Cauchy)رياضي فرنسي.من مؤلفاته:"دروس في التحليل"1821،"دروس حول تطبيقات الحساب اللامتناهي على الهندسة"1826.صفحات:65-66-67-68.</p>
<p>بول كوهن (2007-1934 Paul Cohen) رياضي أمريكي برهن سنة 1963 على فرضية المتصلو أكد انها منفصلة عن أكسيومات فرانكل -زرمولو،ص:105.</p>
<p>كويري (1964-1892 Alexandre Koyré)فيلسوف فرنسي ذو أصل روسي.أبحاثه في الابستمولوجيا و تاريخ العلوم ركزت على غاليلي و علم الفلك ، ص20.</p>
<p>كيرشوف (1887-1824Gustav Robert Kirchhoff)،فيزيائي ألماني ،ص 279.</p>
<p>لاغرانج (1813-1736 Giuseppe Lodovico Lagrange) رياضي إيطالي من مؤلفاته:إسهامات حول الحلول الجبرية1771،الميكانيكا التحليلية 1787،ص63.</p>

<p>لالاند اندريه (1967-1963 <i>André Lalande</i>)، فيلسوف فرنسي، أهم مؤلفاته: العقل و المعايير، نظريات الاستقرار و التجريب، ص 32.</p>
<p>لوباتشفسكي (<i>Nikolai Ivanovitch Lobatchevski</i> 1856-1792) رياضي روسي من الأوائل الذين أسسوا الهندسة اللاإقليدية. صفحات: 243-244-245-249.</p>
<p>هنري لوبسغ (<i>Henri Léon Lebesgue</i> 1875-1941) رياضي فرنسي اشتهر بتأسيسه لنظرية التكامل سنة 1902. من مؤلفاته: دروس حول لمتسلسلات المثلثية 1906. صفحات: 40-68-146-176-177-178-179-180.</p>
<p>لوتمان (<i>Albert Lautman</i> 1908-1944) رياضي فرنسي ساهم في الحرب العالمية الثانية و توفي سنة 1944، من مؤلفاته: بحث حول مفاهيم البنية و الوجود في الرياضيات، بحث حول وحدة العلوم الرياضية، ص 7-9.</p>
<p>لوجندر (<i>Adrien-Marie Legendre</i> 1752-1833): رياضي فرنسي له إسهامات في علم الحساب و التحليل و الهندسة، ص ص: 70-243.</p>
<p>لوكازيفيتش (<i>Lukasiewicz</i> 1878-1956) فيلسوف و منطقي بولوني مؤسس المنطق الثلاثي القيم، ص: 10.</p>
<p>لومبار (<i>Johann Heinrich Lambert</i> 1728-1777) رياضي، فيزيائي و فلكي ألماني . ص 243.</p>
<p>بول ليفي (<i>Paul Lévy</i> 1886-1971) رياضي فرنسي من مؤسسي نظرية الاحتمالات. من مؤلفاته: حساب الاحتمالات سنة 1925، ص: 149.</p>
<p>ليبنز (<i>Gottfried Wilhelm von Leibniz</i> 1646-1716) فيلسوف و رياضي ألماني. صفحات: 20-46-48-49-58-103-186-187-188-189-191.</p>
<p>ليوفيل (<i>Joseph Liouville</i> 1809-1882) رياضي فرنسي مؤسس مجلة الرياضيات النظرية و التطبيقية، ص ص: 89-90.</p>
<p>شارل مراي (<i>Hugues Charles Robert Méray</i> 1835-1911) هو رياضي فرنسي . ص ص: 72-80.</p>
<p>منصور بن سيرجون (<i>Jean Damascène</i> 675-750)، ص 43.</p>
<p>"نوثر" (<i>Emmy Noether</i> 1882-1935)، رياضية ألمانية، ص 6.</p>
<p>نوراث (<i>Otto Neurath</i> 1882-1945) فيلسوف، عالم اجتماع و اقتصادي نمساوي ص: 362.</p>

<p>هادامار (<i>Jacques Hadamard 1865-1963</i>) هو رياضي فرنسي اهتم بنظرية الأعداد. ص: 146.</p>
<p>هاس (<i>Helmut Hasse 1898-1979</i>) رياضي ألماني اهتم بنظرية الأعداد الجبرية، ص 6.</p>
<p>هاملتون (<i>William Rowan Hamilton 1805-1865</i>) رياضي، فيزيائي و عالم فلك إيرلندي ص ص 214-219.</p>
<p>هانكل " (<i>Hermann Hankel 1839-1873</i>) رياضي ألماني. صفحات: 215-217-218-220-383.</p>
<p>ادوارد هاين (<i>Edouard Heine 1821-1881</i>) رياضي ألماني اشتهر بأبحاثه حول الدوال الخاصة و التحليل الحقيقي، ص ص 72-80.</p>
<p>هربراند (<i>Jacques Herbrand 1908-1931</i>) رياضي و منطقي فرنسي توفي في حادث في الجبل. من مؤلفاته: "كتابات منطقية"، ص ص: 5-343.</p>
<p>هرقليدس (حوالي 544 ق م - 480 ق م) فيلسوف يوناني، ص: 33.</p>
<p>هلبيرت (<i>David Hilbert 1862-1943</i>) رياضي ألماني. صفحات: 211-213-261-264-267-268-269-270-272-273-275-276-277-278-279-280-281-282-284-286-291-292-294-296-297-298-299-302-303-304-306-307-308-309-310-311-312-313-314-315-316-317-318-319-320-321-322-323-324-325-326-327-328-329-330-331-332-333-334-335-336-337-338-339-340-341-342-343-344-345-346-347-348-349-350-351-352-353-354-355-356-357-358-359-360-361-362-363-364-365-366.</p>
<p>هلمولتز (<i>Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz 1821-1894</i>) طبيب و فيزيائي ألماني، ص ص: 124-248.</p>
<p>هوسرل (<i>Edmund Husserl 1859-1938</i>) فيلسوف ألماني مؤسس الظواهرية المتعالية. ص ص: 4-18.</p>
<p>هنتغتون (<i>Edward Vermilye Huntington 1874-1952</i>) رياضي أمريكي. ص ص: 283-284.</p>
<p>هيتنج (<i>Arend Heyting 1898-1980</i>) رياضي و منطقي نيرلندي و هو تلميذ بروور. صفحات: 202-209-291-372.</p>
<p>هيدغر (<i>Martin Heidegger 1889-1976</i>) فيلسوف ألماني، فينومينولوجي، ص 6.</p>
<p>وايتهد (<i>Alfred North Whitehead 1861-1947</i>)، ص ص 227-362.</p>

وايل (*André Weil* 1906-1998)رياضي فرنسي انصبت أبحاثه حول نظرية

الأعداد و الهندسة الجبرية ،احد مؤسسي جماعة بورباكي،ص8.

وايل (*Hermann Weyl* 1885-1955)رياضي ألماني له أبحاث حول الطوبولوجيا و

الهندسة خاصة الهندسة الريمانية، ص 210.

واليس جون (*Jean Wallis* 1616-1703)، فيلسوف ،منطقي و رياضي انجليزي

عرف بدراساته في حساب التكامل و التفاضل و إليه يرجع الفضل في اكتشاف رمز اللامتناهي.

كانت له اتصالات مع باسكال و *Fermat* وكانت أبحاثه تمهيدا لأبحاث نيوتن أهم مؤلفاته:

The arithmetic of infinitesimals،ص32.

فهرس الموضوعات

أ-ي	المقدمة
مدخل: جان كفاييس الفيلسوف المنطقي و المقاوم و أهم أعماله (2-25)	
2	أولا- جان كفاييس :حياته و أعماله
2	أ- جان كفاييس الفيلسوف،المقاوم
3	1- كفاييس قبل منحة روكفلر
4	2- كفاييس بعد منحة روكفلر
10	ب- مؤلفات جان كفاييس
14	ج- مميزات شخصية جان كفاييس
16	ثانيا-الفلسفة في فرنسا ما بين الحربين العالميتين
16	أ- أزمة الفيزياء و الرياضيات
17	ب-أزمة العقلانية
الباب الأول:نظرية المجموعات(26-161)	
الفصل الأول: نظرية المجموعات قبل كانتور(30-84)	
32	المبحث الأول: أزمة اللامتناهي
33	أولا- من اللامتناهي في الفكر القديم إلى اللامتناهي في الفكر اليوناني
33	أ- دحض الانقسام اللامتناهي عند زينون الإيلي
35	ب - اللامتناهي الأرسطي
39	ج- اللامتناهي الإقليدي
41	ثانيا-اللامتناهي في العصور الوسطى
41	أ- اللامتناهي عند الفلاسفة المسلمين
43	ب- اللامتناهي في الفلسفة المسيحية
44	ثالثا- اللامتناهي في العصر الحديث
44	أ- الأعداد اللامتناهية عند غاليلي
45	ب- اللامتناهي الميتافيزيقي عند ديكارت
46	ج- اللامتناهي الفلسفي و الرياضي عند ليبنز
49	د- اللامتناهي الفعلي عند بولزانو

52	المبحث الثاني: الأعداد الحقيقية والمتتاليات المثنائية
55	أولاً- الجبر الديكارتي و الحساب اللامتاهي
55	أ- جبرنة الهندسة عند ديكارت
58	ب- ليبنز و حساب اللامتاهي
58	ثانياً- تطور نظرية التحليل
58	أ - أولر و الدوال
60	ب- الأوتار الاهتزازية عند برنولي
61	ج- متتالية فوريي
63	د- الدوال التحليلية عند لاغرانج
64	ثالثاً:تحسيب الرياضيات عند بولزانو
66	رابعاً-الأعداد الحقيقية
66	أ-الأعداد الحقيقية و متتالية كوشي
68	ب-الأعداد الحقيقية عند لوبسغ
71	المبحث الثالث: الأعداد الناطقة و اللاناطقة
71	أولاً- منهج فيرشتراس وإسهاماته
72	ثانياً- منهج ديدكند ،طانيري
72	أ- ديدكند و اكتشاف الأعداد اللاناطقة
73	1 - خصائص الأعداد الناطقة
74	2- اكتشاف الأعداد اللاناطقة
77	ب- طانيري
80	ثالثاً- منهج كانتور ، هاين

	الفصل الثاني: لاكتشاف الكانتوري لنظرية المجموعات (85-121)
86	المبحث الأول : المرحلة الأولى للاكتشاف
87	أولا- لا معدودية الأعداد الحقيقية
87	أ- تعريف المعدودية
89	ب- لا معدودية الأعداد الحقيقية
92	ثانيا- مفهوم المتصل
92	أ- اللامتناهي و المتصل
95	ب- مفهوم القوة و التكافؤ
96	المبحث الثاني: المرحلة الثانية للاكتشاف
96	أولا- منهج الاشتقاق
98	ثانيا- الأعداد المتصاعدة
98	أ-الأعداد الأصلية المتصاعدة
100	ب - الأعداد الترتيبية المتصاعدة
103	ج- قوة الأعداد الحقيقية
103	1 - فرضية المتصل
105	2- منهج القطر
109	المبحث الثالث: النسقية
109	أولا- المجموعات اللامتناهية
110	ثانيا- النظرية الأصلية
113	ثالثا- أنماط الترتيب
115	رابعا - نظرية الأعداد الترتيبية
115	أ - نظرية الترتيب الجيد
116	ب- علم الحساب المتصاعد
118	خامسا - مفارقة بورالي-فورتي
	الفصل الثالث : أكسمة نظرية المجموعات (122-168)
123	المبحث الأول : بواذر ظهور أكسمة نظرية المجموعات
123	أولا - ديدكند من خلال مؤلفه 1888
127	ثانيا - المفارقات الرياضية
127	أ- مفارقة بورالي فورتي
128	ب- مفارقة كانتور
129	ج- مفارقة راسل

131	د - مفارقة ريشارد
133	المبحث الثاني: النظرية الكاملة للمجموعة المنتهية
133	أولاً- النسق والتطبيق والسلسلة
133	أ- النسق و التطبيق عند ديدكند
134	ب - السلسلة
134	1- تعريف السلسلة و السلسلة الخاصة
135	2- الاستقراء التام
136	ثانياً- المجموعات اللامتناهية:
136	أ- اللامتناهي عند ديدكند
138	ب- الموضوعانية و الترتيب
140	ج - التعريف بالتراجع
142	ثالثاً- المجموعات المنتهية
144	رابعاً- ديدكند وبديهية الاختيار
151	المبحث الثالث: أنواع البدهنة و الأكسمة
152	أولاً-أكسمة نظرية المجموعات بعد ديدكند
152	أ- الأكسمة ونظرية المجموعات عند زرمولو
153	ب- النسق الأكسيومي عند زرمولو
158	ثانياً - دور فرانكل في أكسمة نظرية المجموعات
158	أ - تغيير المفاهيم الأساسية للأكسيوماتيك
159	ب- النظرية العامة للمجموعات
161	ج- استقلالية الأكسيومات عند فرانكل
162	ثالثاً- فون نومان والأعداد الترتيبية المتصاعدة
163	أ- العدد الترتيبي والعدّ
165	ب- النظرية الترتيبية والنظرية الأصلية
166	ج- أكسمة زرمولو-فرانكل و فون نومان
الباب الثاني: الأكسمة و الصورية في الرياضيات(169-276)	
الفصل الأول: نتائج أزمة نظرية المجموعات(171 - 211)	
172	المبحث الأول: الحلول التقنية لمشكلة أسس الرياضيات
172	أولاً- تجريبية بورال
173	أ - التعريف في الرياضيات

174	ب - موقف بورال من مفارقة ريشارد
175	ج - إصلاح الرياضيات عند بورال
176	ثانيا-التعريف عند لوبسغ و نتائجه
176	أ- دلالة التعريف عند لوبسغ
177	ب- موقف لوبسغ من أكسيوم الاختيار
178	ج- المسمى عند لوبسغ
180	المبحث الثاني:الحلول المقترحة في الفلسفة الكلاسيكية
180	أولا- ديكارت و المعرفة الرياضية
180	أ- فلسفة ديكارت
181	ب- مستويات المعرفة عند ديكارت
182	ج- طرق التفكير
186	ثانيا- ليبنز و العلم الرياضي
186	أ-الامتداد عند ليبنز
188	ب- المعرفة الإلهية، الإرادة الإلهية و الرياضيات عند ليبنز
191	ثالثا- كانط و الصورة الحدسية للرياضيات
191	أ- الأحكام الرياضية
194	ب- المكان في البناء الرياضي
194	1 - خصائص المكان عند كانط
195	2- الخبرة و العقل
198	ج- الزمان في البناء
198	1 - تعريف الزمان الكانطي
199	2 - تفسير كفايبس للزمان و المكان عند كانط
202	المبحث الثالث: المدرسة الحدسية المعاصرة
202	أولا- الرياضيات في نظر بروور
203	ثانيا- مراحل النشاط الرياضي
203	أ- الحالة المؤقتة
204	ب- الحالة السببية
204	ج- الحالة الاجتماعية
206	ثالثا - نقد مبدأ الثالث المرفوع
209	رابعا- نتائج رفض مبدأ الثالث المرفوع
	الفصل الثاني: الصورية و الأكمة في القرن التاسع عشر(212-)

	(250)
215	المبحث الأول: الاتجاهات السورية
215	أولاً- الحركة السورية عند فراسمان و هانكل
215	أ- سورية الأعداد
217	ب- السورية عند هانكل
219	ج- السورية عند فراسمان
220	ثانياً- نسق ديديكند
220	أ- منهج التعميم
222	ب- خصائص النسق السوري عند ديديكند
225	ثالثاً- الصورنة والأكسمة عند بيانو وراسل
225	أ- أكسيومات بيانو
227	ب- الأكسيوم عند راسل
229	المبحث الثاني: الأكسمة في الهندسة
230	أولاً- النسق الإقليدي والأكسمة
230	أ- أكسيوم إقليدس
234	ب- لماذا فشل أقليدس؟
236	ثانياً- المصادر الخمسة والهندسات اللإقليدية
236	أ- تحليل المصادر
238	ب- نشأة الهندسات اللإقليدية
244	ج- من الهندسة الى الهندسات
244	1- اثبات فرضية الزاوية الحادة
247	2- إثبات فرضية الزاوية المنفرجة
	الفصل الثالث: أكسمة الهندسة الإسقاطية (252- 287)
253	المبحث الأول: الهندسة الإسقاطية
253	أولاً- المحاولات الأولى لهندسة نسقية
253	أ- الإسقاط عند بونسلي
254	ب- جرفون و مبدأ الثنائية
255	ج- الهندسة المجردة عند شارلس و كايلاي
256	د- الزمرة عند كلاين
258	ثانياً-أكسمة الهندسة الإسقاطية
258	أ- قواعد و مكونات النسق

259	ب- شروط المصادرات
261	المبحث الثاني:النسق الأكسيومي عند هلبرت
261	أولا - أكسيومات النسق الهلبرتي
261	أ- عرض الأكسيومات
267	ب- تحليل الاكسيومات
268	ج- شروط و خصائص الأكسيومات
269	ثانيا - الهندسة الفضائية و الهندسة المستوية
270	أ-الحساب الديزارغي
272	ب - الحساب المقطعي
272	1 - الجمع و الجداء
273	2- التبديلية و التجمعية في الحساب المقطعي
276	المبحث الثالث: المنهج الأكسيومي
277	أولا- ضرورة المنهج الأكسيومي
280	ثانيا- خصائص المنهج الأكسيومي
281	أ-اللاتناقض
282	ب -الاستقلالية
283	ج- الكفاية أو التشبع
285	ثالثا- هل الأكسمة كافية لتأسيس الرياضيات؟
الباب الثالث:الصورية الخالصة والمعدّلة في الرياضيات(288-382)	
الفصل الأول: النسق الصوري و تطبيقاته في العلوم التجريدية(290-332)	
(332)	
291	المبحث الأول: البرنامج الصوري لهلبرت
292	أولا- فلسفة الإشارة
292	أ - مفهوم وأهمية الإشارة
294	ب- هلبرت وكانط
294	1 - الحدس و دوره في البناء
297	2- المكان والزمان عند كانط و هلبرت
299	ج- الإشارات التحليلية والفضاء التوفيقي
301	د- الأشكال والصيغ:
302	ثانيا - كفاييس وكانط

304	ثالثا: العناصر المثالية في برنامج هلبيرت
304	أ- منهج المثل
305	ب- تطبيق منهج المثل على مسألة الأسس
312	المبحث الثاني: النسق الصوري وتطبيقه في المنطق
312	أولاً: تعريف النسق الصوري
315	ثانياً - النسق الصوري للمنطق
315	أ- النسق الصوري الخاص بمنطق القضايا
317	1 - المورفولوجيا
318	2- الجانب الأكسيوماتيكي
319	3 -الجانب الاستدلالي
321	ب- النسق الصوري الخاص بحساب المحمول
322	1 - الجانب المورفولوجي للنسق
323	2 - الجانب الأكسيومي
325	3- الاستدلال الصوري على بعض الأقيسة
327	ثالثاً- نظرية الأنماط و أكسيوم الاختزال عند راسل
327	أ- نظرية الأنماط
329	ب- أكسيوم الإختزال
	الفصل الثاني: الصورية الخالصة عند هلبيرت(333 - 354)
334	المبحث الأول: نظرية الأنماط عند هلبيرت
334	أولاً- أكسيوم المتصاعد
334	أ- تعريف الأكسيوم و أهميته
336	ب- برهان عدم التناقض
337	ثانياً : محتوى نظرية
337	أ- المتغيرات و الترتيب
339	ب- مسألة المتصل
342	المبحث الثاني: براهين عدم التناقض
342	أولاً- طرح الإشكالية
344	ثانياً - قانون عدم التمام
344	أ- عرض محتوى القانون

346	ب- برهان غودل
348	ثالثا- برهان الإتساق عند فنزن
	الفصل الثالث: الصورية المعدلة عند كفاييس (355-395)
356	المبحث الأول: موقف كفاييس من مناهج الرياضيين
356	أولا- اللوجيستيقا
356	أ- رسالة منطقية فلسفية وحلقة فينا
356	1 - تحليل الرسالة المنطقية الفلسفية لفتجنشتين
361	2 - حلقة فيينا
362	ب- كفاييس واللوجستيقا عند كارناب
366	ثانيا- الصورية
368	ثالثا- الحدسانية
371	المبحث الثاني: الخصوبة الخالصة
371	أولا- التطور الرياضي
371	أ- تعريفه
373	ب- خصائص التطور
373	1- الاتصال
374	2- الضرورة
375	3- اللاتوقع
376	4- التكامل
377	5- الاختزال
378	ج- اللحظات الجدلية
378	1- الموضوعانية
379	2- الأمثلة
383	3- الصورنة، التعميم، الأمثلة
384	4- الحركة المزدوجة للتطور الرياضي
387	المبحث الثالث: الصورية المعدلة
387	أولا- وحدة الصورية المعدلة
387	أ - مستويا الصورية المعدلة
389	ب - صعوبات تحليل الصورية المعدلة
389	1 - التفكير والإجراء الحسي
390	2 - القدرة على الاكتشاف

390	ثانيا - امتداد التجربة
396	الخاتمة
406	
407	قائمة المصادر والمراجع
424	
	الفهرس
	فهرس الأشكال
	فهرس المصطلحات
	فهرس الأعلام
	فهرس الموضوعات (445-456)

المُلخَص

بالعربية:

ظهرت الرياضيات لتلبية حاجات الإنسان الضرورية كالقيام بالحسابات في الأعمال التجارية، وقياس المقادير كالأطوال والمساحات، وتوقع الأحداث الفلكية، ولهذا فقد كانت شديدة الارتباط بالواقع العملي والحسي وبالممارسة اليومية للإنسان، وتعتبر هذه المرحلة الجينية للرياضيات، ونجدها في الحضارات القديمة كالحضارة الفرعونية و البابلية.

ومن هذه المرحلة وانطلاقاً من الحاجات الثلاثة، انبثقت الأقسام أو الفروع الثلاثة للرياضيات، وهي دراسة البنية، والفضاء، والمتغيرات. فدراسة البنيات أدت إلى ظهور الأعداد بداية بالأعداد الطبيعية والأعداد الصحيحة والعمليات الحسابية المطبقة عليها، ثم أدت الدراسات المعمقة في مجال الأعداد إلى ظهور نظرية الأعداد كنظرية قائمة بذاتها أي علم الكم المنفصل، وفضلاً عن ذلك أدت نتيجة البحث عن الطرق لحل المعادلات إلى ظهور علم الجبر، كما تمّ تطبيق الفكرة الفيزيائية المتمثلة في الشعاع إلى الفضاءات الشعاعية وتمت دراستها في الجبر الخطي. و بدراسة الفضاء تأسست ما يعرف بالهندسة، التي هي علم الكم المتصل، ووضع إقليدس أول نسق استنباطي هندسي، فسميت بذلك الهندسة نسبة إليه الهندسة الإقليدية. ونظراً لنسقية الهندسة، اعتبرت الرياضيات عند اليونان علماً نظرياً للمعرفة اليقينية لا يرقى إليها الشك. وظل كتاب العناصر (الأصول) لمؤلفه إقليدس (حوالي 300 قبل الميلاد) المرجع الوحيد للرياضيين مدة قرون عديدة لما شمله من تجديد نتيجة اهتماماته المنطقية، وقد أدى ذلك إلى هيمنة الهندسة الإقليدية حتى القرن 18. و عندما نتكلم عن الرياضيات في اليونان لا يمكننا بأي حال من الأحوال أن نتجاهل مساهمة العديد من الرياضيين اليونانيين منهم مينولوس، طاليس، أبولونيوس، أرخميدس، والتي كانت هامة ليست فقط في الهندسة، بل في شتى الفروع الرياضية الأخرى.

وفي نهاية القرون الوسطى، أخذت الهندسة توجهات جديدة بفضل اكتشاف مبادئ الهندسة الإسقاطية والهندسة الوصفية، واكتمال التطور فيما يتعلق بالترميز الجبري تحت تأثير فييت (*François viète*) في القرن 16، وبإسهاماته و اكتشافاته دخلت فرنسا مرحلة جديدة من الرياضيات وهي مرحلة الرياضيات الحديثة، التي أسس فيها الجبر الحديث والذي اهتم ديكارت بتوضيح معالمه لاحقاً، كما انه بالتنسيق والتعاون مع فرمات (*Fermat*) أسس الهندسة التحليلية و جبرنة الهندسة. وتوالت الأبحاث في القرنين السابع والثامن عشر مع ديزارغ (*Desargues*) الذي انكب على إرساء معالم الهندسة الإسقاطية، و عرّف الرياضيات بأنها علم اللامتاهي و المتمثل في الهندسة، وهذا ما أكده لاحقاً باسكال (*Blaise Pascal*) و ليبنز (*Leibniz*)، وغيرهم من الرياضيين

الذين كانت لهم إسهامات في تطوير الرياضيات، التي بلغت ذروتها في القرن التاسع مع اكتشافات ديدكند وكانكتور للامتتاهي، ومنه وجود المجموعات اللامتتاهية، واكتشاف الأعداد الحقيقية والأعداد الخيالية والمركبة، فتطور علم الجبر وعلم الحساب وعلم التحليل، أما في الهندسة تم إعادة النظر في النسق الإقليدي وخاصة المسلمة الخامسة لإقليدس، وهذا ما أدى إلى تأسيس الهندسات اللاإقليدية، كما تطور المنطق من خلال إسهامات جورج بول، فريجه، بيانو، راسل. إن هذه الاكتشافات غير المألوفة، وكذا استنتاج وجود متناقضات في مختلف الفروع الرياضية تم بلورتها فيما يعرف بـ "أزمة الرياضيات" وهي أزمة الأسس، وهذا ما دعا إلى ضرورة إعادة النظر في هذه الأسس التي يجب الانطلاق منها لتأسيس رياضيات قوية متناسقة و غير متناقضة، رياضيات خصبه و يقينية، ولم تعد الإشكالية تخص الرياضيين فقط بل كل العلماء على اختلاف تخصصاتهم (وهذا نتيجة تأثير الرياضيات في علومهم)، الفلاسفة والمناطقه، وهذا ما يبرر شرعية وجود فلسفة الرياضيات التي اهتمت وما زالت تهتم بهذه الإشكالية الفلسفية الرياضية، و نجم عن ذلك ظهور اتجاهات عديدة كالاتجاه الحدسي والاتجاه الصوري والاتجاه اللوجستيقي، فأى اتجاه يجب أن تعتمد عليه الرياضيات لإعادة بناء صرحها الشامخ؟

كما تزامن ظهور هذه الأزمة في الرياضيات، إعلان بلانك عن نظرية الكوانتوم سنة 1900، واينشتين عن نظرية النسبية سنة 1905، وهي النظرية التي أطاحت بالنموذج النيوتيني، كما شهدت سنة 1916 توسع المجال الثوري للنظرية النسبية الخاصة أي ميلاد النظرية النسبية العامة. إنها انجازات ثلاث غيرت من مسار و ملامح العلم الفيزيائي و عملت على ترسيخ ملامح الثورة الفيزيائية و جعلها محور نظرية المعرفة العلمية أي الابستيمولوجيا.

و لهذا تميز الربع الأول من القرن العشرين أي قبل الحرب العالمية الثانية بظهور ثورات معرفية التي أثرت بدورها على الفلسفة الفرنسية التي عرفت أزمة في العقلانية، هذا ما أدى إلى بناء العقلانية العلمية عند باشلار و العقلانية الرياضية عند برنشفيك و بعده روبرير بلانشي، و لهذا فالابستيمولوجيا و فلسفة العلوم في فرنسا تطورتا بأبحاث برنشفيك، باشلار، كويري (*Koyré*)، ديزنتي (*Desanti*)، وكونغيلم (*Canguilhem*) و كل إسهاماتهم هي تجسيد لأزمة العقلانية .

و لهذا تميز الربع الأول من القرن العشرين أي قبل الحرب العالمية الثانية بظهور ثورات معرفية التي أثرت بدورها على الفلسفة الفرنسية التي عرفت أزمة في العقلانية، هذا

ما أدى إلى بناء العقلانية العلمية عند باشلار و العقلانية الرياضية عند برنشفيك و بعده روبرير بلانشي ،و لهذا فالابستيمولوجيا و فلسفة العلوم في فرنسا تطورتا بأبحاث برنشفيك،باشلار، كويري(*Koyré*) ،ديزنتي (*Desanti*)، وكونغيلم (*Canguilhem*) و كل إسهاماتهم هي تجسيد لأزمة العقلانية .

في هذا الإطار المعرفي تدرج فلسفة جان كفاييس و ابستيمولوجيته الرياضية، إذ يعتبر كفاييس من أهم ممثلي الفلسفة الفرنسية في الفترة السائدة ما بين الحربين العالميتين الأولى والثانية، حيث في هذه الحقبة الزمنية شهدت الفلسفة عموما في فرنسا يقظة على غرار ما كان سائدا في ألمانيا، وكان هناك اهتمام بمختلف المجالات الفلسفية سواء في المنطق أو في الرياضيات أو في العلوم المادية.و قد كان كفاييس من بين الداعين إلى ضرورة النهوض بالفلسفة، و لكونه رياضيا انصب اهتمامه على الرياضيات لا من الناحية الرياضية البحتة فحسب و إنما من الناحية الفلسفية أيضا.وعلى ضوء ما سبق، تم اختياري لموضوع فلسفة الرياضيات عند هذا الرياضي والمنطقي و الفيلسوف لمعرفة إسهاماته. وعلى ضوء ما سبق فان الإشكالية المحورية في هذا البحث تدور حول التعريف بالفلسفة الرياضية عند جان كفاييس ودوره في تطوير هذا المبحث الفلسفي من خلال معالجته للمسائل الإبتيمولوجية الرياضية و الحلول المقدمة لها. وللإجابة على الإشكالية تم الاعتماد على الخطة التالية:

Ø المقدمة: عرفنا فيها الموضوع وأهميته وأسباب ودواعي اختياره، ثم حددنا الإشكالية المحورية والمشكلات الفرعية، فالمنهج المعتمد وبعدها تحليل الخطة المعتمدة وبعض الصعوبات والعراقيل الموضوعية التي اعترضت البحث.

Ø مدخل عام: عنوانه جان كفاييس حياته و أعماله ،وقد تعرضنا فيه إلى حياة الفيلسوف جان كفاييس بقليل من التفصيل لأنه غير معروف بصورة شبه مطلقة، فاضطرت إلى عرض هذا المحور في المدخل كي أفيه حقه ،ولم أركز على الجانب الشخصي في حياته بل على الجوانب التي أثرت في فلسفته في مختلف مراحل حياته:طفلا، مراهقا،جامعيا،لاهوتيا ،رياضيا ،فيلسوبا ومقاوما، وعلاقاته بالفلاسفة الذين عاصروهم في ألمانيا أو في فرنسا وأثر ذلك في فلسفته،كما تطرقنا أيضا إلى أهم أعماله،ثم أشرنا إلى الحقبة الزمنية التي ظهر فيها و ذاع صيته و هي فترة ما بين الحربين العالميتين. لنقف عند أهم مميزاتها،والمتمثلة في ظهور العقلانية الجديدة .

بعد ذلك قسمنا البحث إلى ثلاثة أبواب، كل باب يحتوي على فصول وكل فصل يحتوي على مباحث .

Ø الباب الأول وعنوانه: نظرية المجموعات، اعتمدنا فيه على تحليل كتاب كفاييس فلسفة الرياضيات، ملاحظات حول تكوين النظرية المجردة في المجموعات ، وقد قسم الباب إلى ثلاثة فصول:

• الفصل الأول: نظرية المجموعات قبل كانتور، أبرزنا فيه بداية الأزمة الرياضية في القرن التاسع عشر من خلال التطرق إلى أزمة اللامتناهي ، وذلك عن طريق الرجوع إلى البدايات الأولى لهذا التصور و تتبع مساره التطوري ، من الفكر القديم الى الفكر الحديث و المعاصر، من المنظور الفلسفي إلى المنظور الرياضي، بعدها تطرقت إلى اكتشاف الأعداد الحقيقية، الناطقة و اللاناطقة و المتتاليات المثلية و دورها في تطوير نظرية المجموعات.

• الفصل الثاني: أشرنا فيه إلى الاكتشاف الكانتوري لنظرية المجموعات، من خلال المراحل التي مر بها للوصول إلى النتيجة ، و المتمثلة في المرحلة الأولى للاكتشاف (873-1877) حيث تم فيها إثبات لامعدودية الأعداد الحقيقية ، و علاقة اللامتناهي بالمتصل ، المرحلة الثانية للاكتشاف (1879-1883) و فيها تم تأسيس نظرية الأعداد الأصلية و الترتيبية ، و البرهنة على قوة الأعداد الحقيقية، وبعدها في المبحث الثالث التطرق إلى نسق نظرية المجموعات مع كانتور.

• الفصل الثالث: أكسمة نظرية المجموعات وفيه تطرقت إلى نظرية المجموعات عند ديدكند و أهم المفارقات التي ظهرت و دورها في تطوير النظريات الرياضية ، و كذا التحضير لنظرية مجردة للمجموعات، بالإضافة إلى الحديث عن أكسيوم الاختيار ودوره في بناء المجموعات وأنواع الأكسمة في هذه النظرية.

Ø الباب الثاني: الأكسمة و الصورية في علم الحساب و الهندسة ، وهو الباب المخصص لتحليل كتاب كفاييس: المنهج الأكسيوماتيكي والصورية. في هذا الباب خصصت الحديث فيه عن علم الحساب وتأثره بالأزمة الناتجة في الهندسة وهو بدوره ينفرع إلى ثلاثة فصول:

• الفصل الأول: أزمة نظرية المجموعات وأثرها في علم الحساب، تطرقت فيه إلى الحلول التي قدمها كل من بورال ولويسغ لحل المفارقات التي ظهرت في الرياضيات،

وبعدها نتيجة لعدم حل هذه المفارقات من طرفهما، تطرق كفاييس إلى الفلاسفة ديكرت، لبيتز، كانط وبين الحلول المقترحة من طرفهم والتي بنيت أساسا على الحدس. ثم المبحث الثالث من هذا الفصل أشرت إلى الحدسانية عند بروور ومن ثم عرض موقف الاتجاه الحدسي من أسس الرياضيات.

• الفصل الثاني: الأكسمة والصورية في القرن 19، ركزت فيه على الاتجاهات الصورية كالحركة الصورية عند قراسمان وهانكل، نسق ديدكند في علم الحساب، ثم الصورنة والأكسمة عند بيانو وراسل، و في الأخير أشرت إلى الأكسمة في الهندسة من خلال عرض النسق الأقليدي والأكسمة، وبينت سبب فشله وبعده حللت المصادرة الخامسة و سبب انتقاد الرياضيين لها وهذا ما أدى إلى ظهور هندسات لإقليدية جديدة كهندسة لوباتشفسكي، هندسة غوس، هندسة بولياي وهندسة ريمان وكيف حاولت التأسيس للرياضيات المعاصرة وخاصة الهندسة.

• الفصل الثالث: تطرقت فيه إلى أكسمة الهندسة الاسقاطية، و هذا كي نثبت أن الرياضي اهتم بأكسمة كل فروع الرياضيات، بما فيها الهندسة الاسقاطية المغايرة لهندسة إقليدس، ثم عدت إلى هلبرت للحديث عن نسقه الأكسيومي و هل هو كاف للتأسيس للرياضيات.

Ø الباب الثالث: و قد عنوانه بالصورية الخالصة و المعدلة في الرياضيات، وفيه تم تحليل النسق الهلبرتي خصائصه ومميزاته، والأنساق الهلبرتية المعاصرة له كنسق راسل وأهمية فلسفة الإشارة في الصورية وبراهين عدم التناقض. و يتفرع إلى ثلاثة فصول:

• الفصل الأول: و قد عنوانه بالنسق الصوري حيث حللت فيه البرنامج الصوري لهلبرت و مكوناته، و بعدها تطرقت إلى النسق الصوري و تطبيقاته على منطق القضايا و حساب المحمول و انهينا هذا الفصل بنظرية الأنماط عند راسل، و دور أكسيوم الاختزال في حل المفارقات .

• الفصل الثاني:الصورية الخالصة عند هلبرت، استهليناه بالحديث عن نظرية الأنماط عند هلبرت و اعتماده على أكسيوم جديد هو الأكسيوم المتصاعد، و في المبحث الثاني ركزت على الانتقادات الموجهة إلى هلبرت من خلال عرض براهين عدم التناقض خاصة عند غودل و غزنن .

• و أخيرا الفصل الثالث و هو عبارة عن حوصلة لما جاء في الفصول السابقة و تأسيس النظرية الخاصة بكفاييس و المتمثلة في الصورية المعدلة ،فهو فصل يحل موقف كفاييس من المسائل المطروحة السابقة ،وخاصة الاتجاهات الثلاث حول أسس الرياضيات،كما يعالج هذا الفصل إشكالية التطور الرياضي عند كفاييس و تفسيره لتقدمها.

Ø و أخيرا تأتي خاتمة اجتهدنا أن نصيغ فيها أهم النتائج التي توصلنا إليها من خلال البحث.

Le résumé

les mathématiques sont apparus pour répondre aux besoins de la nécessité pour les droits des comptes dans les affaires, et de mesurer la longueur des montants et des espaces, et attendre les événements astronomiques, mais cela a été très concrète la réalité et la perception sensorielle et la pratique quotidienne pour tout le monde et c'est le stade embryonnaire de mathématiques, trouvée dans les civilisations anciennes, ancienne civilisation babylonienne.

C'est cette étape et les besoins des trois divisions ,apparues trois branches des mathématiques, une étude de la structure, l'espace et des variables. L'examen des structures ont conduit à l'émergence des nombres naturels et relatifs et le calcul appliqué sur ces nombres, ensuite leurs études avancées ont mené à l'émergence de la théorie des nombres c'est à dire la science des quantités séparées, et comme un résultat de ce qui a entraîné la recherche de moyens de résoudre les équations de la réparation à l'émergence de la science, a également été l'application de l'idée de l'espace physique. Étudier l'espace et a fondé ce que on appelle la géométrie , qui étudie les quantités alignées , et les premières lignes d'Euclide conçu un système géométrique déductif , c'est pourquoi la géométrie s'est appelée la géométrie euclidienne. En raison de la systématisation de la géométrie ,les mathématiques chez les grecques ont été considérées comme la théorie de la connaissance au-delà de certitudes doute. Le livre éléments d'Euclide (environ 300 avant JC), la seule référence aux mathématiciens pour une période de plusieurs siècles couverts par le renouvellement de la suite logique de ses préoccupations, a conduit à une position dominante La géométrie euclidienne jusqu'au 18 siècle. Lorsque nous parlons de mathématiques en Grèce ne peut en aucun cas ignorer la contribution de nombreux mathématiciens grecs ont été Minolos, Thales, Apulonios, d'Archimède, ce qui est important non seulement dans la géométrie, mais dans d'autres branches des mathématiques.

À la fin du Moyen-âge, sont les nouvelles orientations de géométrie grâce à la découverte des principes de la géométrie descriptive et la géométrie des projections descriptive, et de l'exhaustivité de l'évolution en matière du symbolisme d'algèbre sous l'influence de François Viète dans le 16^e siècle, et par ses découvertes, la France est entrée dans une nouvelle phase de mathématiques qui est les mathématiques modernes, qui avait à clarifier les caractéristiques Descartes plus tard, la coordination et la coopération avec Fermat ont fondé la géométrie analytique et l'algèbre de la géométrie d'algèbre. Poursuite des recherches dans le septième et huitième siècles avec Desargues qui a travaillé à définir les paramètres de la géométrie projective, et les mathématiques sont connues sous le nom science de l'infini qui est la géométrie, ce qui a été confirmé plus tard par Blaise Pascal et Leibniz, et d'autres mathématiciens et leurs contributions dans le développement des mathématiques, qui ont abouti à la neuvième siècle avec les découvertes de Cantor Dedekind de l'infini ce qui a entraîné la présence des ensembles infinis, et la découverte des nombres réels et les nombres imaginaires et complexes, ce qui a résulté le développement de l'algèbre, l'arithmétique et l'analyse, que ce soit en géométrie a été d'examiner le système euclidienne et en particulier le cinquième postulat d'Euclide, et c'est ce qui a conduit à la fondation des géométries non euclidiennes, aussi la logique est évoluée à travers les contributions de Georges Boole, Frege, Peano, Russell. Ces découvertes inhabituelles, ainsi que la constatation de contradictions dans les différentes branches des mathématiques a été mis au point ce que l'on appelle la "crise des mathématiques". Il est nécessaire de fondations, et c'est ce qui a souligné la nécessité de réexaminer les fondements sur lesquels doit s'appuyer sur eux de dresser un système cohérent et puissant en mathématiques, pas contradictoires, cette problématique n'est plus spécifique aux athlètes, mais tous les scientifiques dans leurs différentes spécialisation (et cela est dû à

l'impact des Mathématiques en Sciences) , des philosophes et des logiciens, et c'est ce qui justifie la légitimité de l'existence de la philosophie des mathématiques qui ont concerné et sont toujours intéressés par cette problématique philosophique mathématique , et a abouti à l'émergence de nombreuses tendances : l'intuitionnisme, le formalisme et la logistique , quelle direction nous devons compter sur les mathématiques pour reconstruire le noble édifice?

Elle a également coïncidé émergence de cette crise dans le domaine des mathématiques, la Déclaration sur la théorie de Blanc en 1900, la théorie d'Einstein de comparatifs en 1905, un modèle théorique qui a renversé la physique de Newton , en 1916 a également assisté à l'expansion de la zone la théorie révolutionnaire de la relativité toute spéciale c'est la théorie générale de la relativité. Ces trois réalisations ont changé les caractéristiques physiques de la science et ont travaillé à établir les caractéristiques physiques de la révolution et d'en faire l'objet de la théorie de la connaissance scientifique c'est-à-dire l'épistimologie .

En dépit de que précède ,le premier quart du vingtième siècle, avant la Seconde Guerre mondiale est caractérisé par l'émergence de la révolution du savoir, qui à son tour affecté la philosophie française connue sous le nom de la crise dans la rationalité, c'est ce qui a conduit à la construction de la rationalité scientifique chez Bachelard et la rationalité mathématique chez Brunschvicg et Robert Blanche, et pour cela l'épistimologie et la philosophie des sciences en France ont été évoluées par les recherches de Brunschvicg, Bachelard, Koyré, Desanti, et Canguilhem ,et toutes leurs contributions sont l'incarnation de la rationalité crise.

Dans ce contexte, on trouve la philosophie de Jean Cavaillès et son épistimologie, il est l'un des plus importants représentants français de la philosophie qui prévaut dans la période entre la Première et la Seconde Guerre mondiale, où, en cette période de temps généralement

considérée philosophie en France la vigilance dans le sens de ce qui existe déjà en Allemagne et a été Il existe plusieurs domaines d'intérêt à la fois philosophique dans la logique ou en mathématiques ou en sciences physiques. Cavailles a été parmi les partisans de la nécessité pour la promotion de la philosophie, et parce qu'il est mathématiquement concentré son attention sur les mathématiques, non seulement purement mathématique, mais aussi philosophiquement. Compte tenu de Qu'est-ce qui a déjà été choisi pour le sujet à cette philosophie des mathématiques et de logique mathématique et philosophe de voir ses contributions.

À la lumière de ce qui précède, le problème central dans cette recherche s'articule autour de la définition de la philosophie des mathématiques chez Jean Cavailles , et son rôle dans le développement de cette étude ,et les solutions données aux questions philosophiques abordées au cours de l'èpistimologie mathématique .

Pour répondre à ce problème en se fondant sur le plan suivant:

- introduction: on a défini le sujet et sa pertinence et les causes et les raisons de choix, et a ensuite identifié le problème central et les problèmes sous-comité, approuvé la méthodologie et l'analyse au-delà du plan approuvé et certaines difficultés et obstacles rencontrés dans la recherche de fond.

- entrée: Jean Cavailles :sa vie et ses œuvres , qui a été soumis à une vie du philosophe Jean Cavailles peu de détail, car il n'est pas connu presque absolue, nous avons dû offrir cet axe afin de compléter leur entrée, ne se concentre pas sur le côté personnel dans sa vie, mais sur les aspects Qui ont influencé sa philosophie à divers stades de la vie: l'enfant, l'adolescent, l'universitaire, théologien, mathématicien , philosophe et résistant, et ses relations avec les philosophes qui vivent en Allemagne ou en France et son impact sur la philosophie, comme Nous l'avons également abordé avec la plupart de ses travaux, sa réputation est connue pour la période comprise entre la Première

Guerre mondiale.

Après que la recherche divisé en trois chapitres , chaque chapitre contient des sous chapitres divisés en titres et sous titres .

- le premier chapitre intitulé: la théorie des ensembles qui ont adopté l'analyse de de l'œuvre de Cavaillès : philosophie des mathématiques remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles , ce chapitre a été divisé en trois sous chapitres:
 - Sous chapitre I: la théorie des ensembles avant de Cantor
 - Sous chapitre II: la découverte cantorienne de la theories des ensembles.
 - Sous chapitre III: l'axiomatisation de la théorie des ensembles.
 - Le deuxième chapitre intitulé : l'axiomatisation et le formalisme de l'arithmétique et de la géométrie, qui, à son tour, fourche en trois sous chapitres:
 - Sous chapitre I: la crise de la théorie des ensembles et son impact sur l'arithmétique .
 - Sous chapitre II:l'axiomatisation et le formalisme dans le 19 siècle.
 - Sous chapitre III: l'axiomatisation de la géométrie projective.
 - Le troisième chapitre : le formalisme propre et modifié en mathématiques. Et fourche en trois sous chapitres:
 - Sous chapitre I: le systeme formel de Hilbert.
 - Sous chapitre II: quand le formalisme propre de Hilbert.
 - Le sous chapitre III : est un résumé de ce qui est venu dans les chapitres précédents et la constitution de la theorie propre de Cavailles qui est le formalisme modifie.

et enfin Conclusion s'efforcer de conception les plus importants résultats que nous avons à respecter par la recherche.

Summary:

mathematics have emerged to meet the need for the rights of accounts in business, and measure the length of the amounts and spaces, and wait for the astronomical events, but it was very concrete reality and sensory perception and daily practice for everyone and this is the embryonic stage of mathematics, found in ancient civilizations, ancient Babylonian civilization.

It is this stage and needs of three divisions, emerged three branches of mathematics, a study of the structure, space and variables. An examination of structures have led to the emergence of natural numbers and relative and the calculation applied to these numbers, then their advanced studies led to the emergence of the theory of numbers that is the science of quantities separated, and as a result of what has led the search for ways to solve the equations of reparation to the emergence of science, has also been implementing the idea of physical space. Studying space and founded what is known geometry, which studies quantities aligned, and the first lines of Euclid devised a system geometric deductive, which is why geometry was called Euclidean geometry. Because of the systematization of geometry, mathematics from the Greeks were seen as the theory of knowledge beyond doubt certainties. The book features Euclid (around 300 BC), the only reference to mathematicians for a period of several centuries covered by the renewal of the logical continuation of its concerns, led to a dominant position Euclidean geometry until 18 century . When we talk about mathematics in Greece can not in any case ignore the contribution of many Greek mathematicians were Minolos, Thales, Apulonios, Archimedes, which is important not only in geometry, but in other branches of mathematics.

In the late Middle Ages, are the new guidelines geometry thanks to the discovery of the principles of geometry and geometry projections descriptive, and completeness of developments in the field of symbolism algebra under the influence François Viète in the 16 century, and its

discoveries, France has entered a new phase of mathematics which is modern mathematics, which had to clarify the characteristics Descartes later, coordination and cooperation with Fermat founded geometry Analytical algebra and geometry algebra. Continued research in the seventh and eighth centuries with Desargues who has worked to define the parameters of the projective geometry and mathematics are known as the science of infinity which is the geometry, which was confirmed later by Blaise Pascal and Leibniz, and other mathematicians and their contributions to the development of mathematics, which led to the ninth century with the discoveries of Cantor Dedekind of infinity leading to the presence of infinite sets, and the discovery of numbers real and imaginary numbers and complex, which has resulted in the development of algebra, arithmetic and analysis, whether in geometry was to examine the Euclidean system and in particular the fifth postulate Euclid, and this led to the founding of non-Euclidean geometry, so the logic is advanced through the contributions of George Boole, Frege, piano, Russel. These discoveries unusual, and the recording of contradictions in the different branches of mathematics was developed what is called the "crisis of mathematics," It is necessary foundations, and this has emphasized the need to review the foundations upon which must rely on them to draw up a coherent system and powerful mathematics, not contradictory, this problem is more specific to athletes, but all scientists in their different specialization (and this is due to impact of Mathematics Sciences), philosophers and logicians, and this justifies the legitimacy of the existence of the philosophy of mathematics who are still concerned and interested in this issue philosophical mathematics, and led to 'emergence of numerous trends: intuitionism, formalism and logistics, what direction we need to rely on mathematics to rebuild the noble edifice?

It also coincided emergence of the crisis in mathematics, the Declaration on the theory of Blanc in 1900, Einstein's theory of comparative in 1905, a theoretical model that overthrew the Newtonian

physics in 1916 also attended the expansion of the zone revolutionary theory of special relativity is the general theory of relativity. These three achievements have changed the physical characteristics of science and worked to establish the physical characteristics of the revolution and to be the theory of scientific knowledge in the epistemology.

At that rate above the first quarter of the twentieth century, before the Second World War is characterized by the emergence of the knowledge revolution, which in turn affected the French philosophy known as the crisis in rationality, c That is what led to the construction of scientific rationality in Bachelard and rationality in mathematical Brunshvieg and Robert Blanche, and why the epistemology and philosophy of science in France have been advanced by research Brunshvieg, Bachelard, Koyré , Desanti and Canguilhem, and all their contributions are the embodiment of rationality crisis.

In this context, is the philosophy of John and his Cavaillès epistemology, it is one of the largest French representatives of the prevailing philosophy in the period between the First and Second World War, where in this period of time generally considered philosophy in France vigilance along the lines of what already exists in Germany and was There are several areas of interest both in philosophical logic or mathematics or physical sciences. Cavaillès was among the supporters of the need for the promotion of philosophy, and because it is mathematically focused its attention on mathematics, not only purely mathematical, but also philosophically. Given what has already been chosen for the subject to this philosophy of mathematics and mathematical logic and philosopher to see its contributions.

In light of the foregoing, the central problem in this research revolves around the definition of the philosophy of mathematics at Jean Cavaillès, and its role in the development of this study, and data solutions to the philosophical questions raised during epistemology of mathematics.

To address this problem by relying on the following plan:

- introduction: it defines the subject and its relevance and the causes and reasons of choice, and then identified the central problem and problems subcommittee approved the methodology and analysis beyond the approved plan and some difficulties and obstacles encountered in seeking substantive.

- Admission: Jean Cavailles: his life and works, which was submitted to a life of the philosopher Jean Cavailles little detail because it is not known almost absolute, we had to offer this axis in order to complete their entry, not not focus on the personal side in his life, but on aspects Who influenced his philosophy in various stages of life: the child, adolescent, scholar, theologian, mathematician, philosopher and resistant, and its relations with philosophers who live in Germany or France and its impact on philosophy, as we have also dealt with most of his work, his reputation is known for the period between the First World War.

After that research divided into three chapters, each chapter contains sub divided into chapters titles and subtitles.

- the first chapter entitled: set theory that have adopted the analysis of the work of Cavailles: philosophy of mathematics remarks on the formation of abstract theory of sets, this chapter has been divided into three chapters:

- Under Chapter I: the set theory before Cantor

- Under Chapter II: The discovery of the theories cantorienne sets.

- Under Chapter III: axiomatization of set theory.

- The second chapter entitled: axiomatisation and the formalism of arithmetic and geometry, which in turn forks into three chapters:

- Under Chapter I: the crisis of set theory and its impact on the arithmetic.

- Under Chapter II: axiomatisation and formalism in the 19 century.

- Under Chapter III: axiomatisation of projective geometry.

- The third chapter: formalism prore and amended in mathematics. And

fork into three chapters:

- Under Chapter I: the formal system of Hilbert.
- Under Chapter II: when the formalism own Hilbert.
- Under Chapter III: is a summary of what has come in the previous chapters and the formation of the theory's own Cavailles which is the formal change.

Conclusion and try to design the most important results that we have to abide by research