

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :
Série :

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : PHYSIQUE THEORIQUE

OPTION : PHYSIQUE QUANTIQUE

THEME

Etude de Systèmes quantiques par l'intégrale de Chemin

Par

ALLAL MOHAMED SAID

SOUTENU LE : 08 / 04 / 2010

Devant le jury :

Président :	F. BENRACHI	Prof. Univ. Mentouri Constantine.
Rapporteur :	B. BENTAG	M.C. Univ. Mentouri Constantine.
Examineurs :	F. BENAMIRA	Prof. Univ. Mentouri Constantine.
	A. BOUNAMES	Prof. Univ. Jijel.

REMERCIEMENTS

Ce travail a fait l'objet d'un Mémoire de Magister élaboré au Département de Physique, Faculté des Sciences Exactes, Université Mentouri-constantine.

Je remercie particulièrement et vivement avec toute ma gratitude ma directrice de Mémoire de Magister, madame Bentag Baya, maître de conférences au laboratoire de physique mathématique et physique subatomique de l'Université Mentouri-constantine d'avoir suivi minutieusement ce travail et de m'avoir soutenu et encouragé tout au long de sa réalisation.

Je suis très reconnaissant pour son aide précieux, ses conseils et son soutien constant.

Je tiens à remercier Mme F. Benrachi, professeur à l'Université mentouri-constantine, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Mes remerciements aussi à Mr F. Benamira, professeur à l'université Mentouri-Constantine et Mr A. Bounames, professeur à l'université de Jijel d'avoir bien voulu accepter de participer au jury et d'examiner ce travail.

Table des matières

1	Introduction	4
I	Etude de Systèmes Quantiques Non Relativistes dans l'Espace Euclidien	8
2	La Formulation des Intégrales de Chemin	9
2.1	Introduction	9
2.2	Fondation du concept d'intégrale de chemin	9
2.3	Amplitude de probabilité	10
2.4	L'amplitude en mécanique quantique	11
2.5	Propagateur de l'équation de Schrödinger	11
2.6	Intégrales de Chemin	14
2.7	Expression de $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ en fonction des états propres de H	18
2.8	Propagateur dépendant de l'énergie	18
2.9	Action quadratique	19
2.10	Conclusion :	21
3	Traitement du Mouvement d'une Particule Soumise au Potentiel de Pöschl-Teller	22
3.1	Introduction	22
3.2	Calcul du propagateur dans l'espace de configurations :	24
3.2.1	Le propagateur dans le cas particulier, $k = \lambda$	24
3.2.2	Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés :	29

3.2.3	Le propagateur dans le cas général, k et λ quelconques	31
3.2.4	Spectre d'énergie et fonction d'onde des états liés	37
3.3	Traitement du potentiel de Pöschl-Teller dans l'espace des phases	38
3.3.1	Présentation de la technique de la fonctionnelle delta de Dirac	38
3.3.2	Calcul du propagateur pour $k = \lambda$	39
3.3.3	Fonction de Green :	46
3.3.4	Spectre d'énergies et fonctions d'onde des états liés	48
3.3.5	Propagateur pour k et λ quelconques	49
3.3.6	Fonction de Green :	53
3.3.7	Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés	54
3.4	Conclusion	55
 II Etude de Systèmes Quantiques Non Relativistes dans l'Espace Courbe		56
 4 Formulation de l'Intégrale de Chemin dans l'espace courbe		57
4.1	Introduction	57
4.2	Intégrale de chemin dans un espace courbe général	58
4.2.1	Quantification de l'Hamiltonien classique	58
4.2.2	Dérivation de l'intégrale de chemin	61
4.2.3	Prescription de " l'ordre de Weyl "	62
4.2.4	Prescription de la " forme produit " :	67
4.3	Conclusion :	70
 5 Etude du Mouvement d'une Particule sous l'action d'un Potentiel Super intégrable à trois Dimensions $U(r, \theta, \varphi)$ Dépendant d'une Fonction Radiale arbitraire $f(r)$		71
5.1	Introduction	71
5.2	Calcul du propagateur dans l'espace sphérique à 3 dimensions	74
5.2.1	Calcul du propagateur pour le potentiel de Smorodinsky-Winternitz (SW) sur S^3 :	82
5.2.2	Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés	84

5.2.3	Calcul du propagateur pour le potentiel de Kepler-Coulomb généralisé (GKC) sur S^3	85
5.2.4	Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés	86
5.3	Calcul du propagateur dans l'espace hyperbolique à 3 dimensions	88
5.3.1	Calcul du propagateur pour le potentiel de Smorodinsky-Winternitz (SW) sur H^3	90
5.3.2	Spectre d'énergie et fonctions d'onde	91
5.3.3	Calcul du propagateur pour le potentiel de Kepler-Coulomb généralisé (GKC) sur H^3	93
5.3.4	Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés	94
5.4	Conclusion :	95
6	Conclusion	96
	Appendices	98

Chapitre 1

Introduction

La mécanique quantique est le cadre théorique permettant de décrire le comportement de la matière (et de la lumière) aux échelles atomique et subatomique. Cependant, à peine énoncée cette définition paraît éminemment restrictive : elle semble ignorer les phénomènes quantiques macroscopiques, comme le superfluidité ou la supraconductivité qui ont aussi contribué au succès de la théorie quantique dans la seconde moitié du 20^{ème} siècle. Cette définition permet de toucher du doigt la nécessité d'un abandon des concepts de la physique dite classique (la mécanique newtonienne et l'électromagnétisme) lorsque nous nous intéressons aux échelles atomique et subatomique. En effet, les notions qui font le socle de la physique classique ont été forgées à partir de notre expérience immédiate. Or si nous pouvons deviner les lois fondamentales qui régissent le mouvement des corps matériels en analysant ce mouvement, il n'y a à priori pas de raison évidente pour que ces lois s'appliquent encore dans le monde atomique et subatomique. Il n'est donc pas surprenant que la description du comportement des atomes requiert d'autres concepts que ceux utilisés pour analyser la dynamique d'un corps macroscopique.

La mécanique quantique a été construite sur la base d'une analogie avec la théorie hamiltonienne de la mécanique classique. La raison réside dans le fait que la notion classique de coordonnées et d'impulsions canoniques comporte un analogue quantique très simple, avec la conséquence que la totalité de la théorie hamiltonienne classique peut être transposée avec tous ses détails dans le contexte de la mécanique quantique.

Il existe aussi une formulation alternative de la dynamique classique obtenue à partir du lagrangien. Celle-ci exige de considérer les coordonnées et les vitesses plutôt que les coordonnées

et l'impulsion. Bien évidemment il existe de forts liens entre les deux formalismes mais il y a des raisons de croire que le formalisme du lagrangien est le plus fondamental.

En premier lieu, la méthode lagrangienne permet de regrouper toutes les équations de mouvement et de les exprimer comme une propriété stationnaire d'une certaine fonction d'action. (Cette fonction d'action est justement l'intégrale temporelle lagrangien). Il n'existe pas de principe d'action correspondant exprimé en fonction des coordonnées est des impulsions dans la théorie hamiltonienne. En second lieu, l'approche lagrangienne peut aisément être exprimées dans un formalisme relativiste en tenant compte du fait que la fonction d'action est un invariant relativiste alors que l'approche hamiltonienne est essentiellement non relativiste puisqu'elle exprime une variable temporelle particulière comme la conjuguée canonique de la fonction hamiltonienne.

La mécanique quantique a commencé avec deux formulations mathématiques tout à fait différentes : l'équation différentielle de Schrödinger et l'algèbre des matrices de Heisenberg. Les deux approches, apparemment dissemblables, sont mathématiquement équivalentes. Ces deux points de vue sont en fait complémentaires et ont été unifiés dans le cadre de la théorie de la transformation de Dirac.

Dès la fin des années 1940, Feynman a élaboré une nouvelle formulation de la théorie quantique non relativiste. Cette formulation a été suggérée par certaines remarques de Dirac concernant la relation entre l'action classique et la mécanique quantique. Une amplitude de probabilité est associée à la totalité du mouvement d'une particule en fonction du temps, plutôt que simplement à la position de la particule à un instant donné. Il fait appel au langage des fonctionnelles qui permet de déduire les équations du mouvement lagrangiennes à partir des **intégrales de chemin**. Il a fallu une vingtaine d'années pour que cette nouvelle approche (l'intégrale de chemin) arrive à maturité mais elle est devenue incontournable, avec des applications dans de très nombreux domaines de la physique comme la diffusion des atomes, des molécules et des noyaux, la mécanique statistique et le mouvement brownien. Elle a également apporté un nouvel éclairage sur la théorie quantique. Ainsi l'intégrale de chemin permet aux physiciens de présenter un formalisme simple et riche qui transcrit aussi directement que possible les phénomènes physiques et tout particulièrement les phénomènes quantiques. Il introduit des notions élémentaires telle que l'action S , le lagrangien L , la trajectoire classique, . . . , c'est-à-dire que les outils de la

mécanique classique.

Le présent travail concerne principalement la maîtrise des techniques de l'intégrale de chemin à travers des applications diverses.

Le Mémoire est divisé en deux parties. La première partie représente l'application de l'intégrale de chemin dans l'espace plat, alors que la seconde est une extension de cette approche au traitement de potentiels super intégrables dans l'espace courbe.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons une description des systèmes quantiques non relativiste selon la méthode de Feynman qui porte le nom de l'intégrale de chemin et montre que l'intégrale de chemin peut se mettre sous deux définitions explicites : la première dite la forme hamiltonienne (l'intégrale de chemin dans l'espace des phases), et la deuxième, est la forme lagrangienne. Le propagateur caractérisé par l'action quadratique est complètement exprimé par la trajectoire classique. Nous aussi illustré d'une manière simple le rôle joué par la notion de trajectoire dans l'évaluation des amplitudes de probabilité de transition d'un point espace-temps à un autre et les avantages de l'intégrale de chemin lorsque les systèmes possèdent un nombre infini de degrés de liberté.

Dans le troisième chapitre, nous traitons le problème bien connu de Pöschl-Teller comme application. Il n'y a, en conséquence, aucun résultat fondamentalement nouveau. Cependant, c'est toujours agréable de retrouver des acquis anciens à partir d'un nouveau point de vue. Le nouveau point de vue que nous avons adopté s'avère plus directe. Grâce à des relations mathématiques simples, nous avons évalué, dans l'espace de configurations, le propagateur associé au potentiel de Pöschl-Teller pour deux cas différents à savoir $\lambda = k$ et λ et k quelconques. De plus, nous avons construit la fonction de Green pour ce même potentiel dans l'espace des phases en utilisant la méthode connue sous le nom de la fonctionnelle delta de Dirac. Les spectres d'énergie et les fonctions d'onde déduits sont exacts et concordent parfaitement avec ceux de la littérature.

- La deuxième partie est une application de l'intégrale de chemin dans l'espace courbe. La formulation de l'intégrale de chemin est reconsidérée dans ce cas et fait l'objet du quatrième chapitre. La courbure de l'espace est prise en compte au moyen du potentiel effectif. Comme application, nous avons traité, dans le cinquième chapitre, une classe de potentiels superintégrables dépendant des variables (r, θ, φ) et contenant une fonction radiale arbitraire $f(r)$. Nous

avons effectué le calcul du propagateur en adoptant la prescription dite « l'ordre de Weyl » et en utilisant les coordonnées polaires dans les espaces sphérique et hyperbolique à 3D. Par conséquent, nous avons séparé les parties angulaires en θ et φ de la partie radiale. Le potentiel de Smorodinsky-Winternitz comme le potentiel de Kepler-Coulomb appartiennent à cette classe de potentiel. Pour le potentiel de S-W, l'intégrale de chemin associée à la partie radiale est identifiée avec les propagateurs radiales de Pöschl-Teller (dans l'espace sphérique) et Pöschl-Teller modifié (dans l'espace hyperbolique à 3D). Cependant, pour le potentiel de K-C, elle est identifiée avec les potentiels de Rosen-Morse trigonométrique (dans l'espace sphérique) et Manning-Rosen (dans l'espace hyperbolique). Les spectres d'énergie et les fonctions d'onde ont été déduits.

Première partie

**Etude de Systèmes Quantiques Non
Relativistes dans l'Espace Euclidien**

Chapitre 2

La Formulation des Intégrales de Chemin

2.1 Introduction

L'intégrale de chemin est une formulation de la mécanique quantique équivalente aux formulations standards [1], offrant une nouvelle manière de regarder le sujet qui est, contestablement, plus intuitif que les approches habituelles. La base du formalisme fonctionnel est la relation profonde entre l'action classique et la mécanique quantique.

Ce chapitre repose sur les notions d'intégrale de chemins, c'est -à- dire sur la formulation "lagrangienne" de la mécanique quantique, introduite par Feynman. Nous allons dériver une expression intégrale de chemin pour le propagateur dans la mécanique quantique, et pour plus de simplicité, nous considérerons des particules se déplaçant dans une dimension.

2.2 Fondation du concept d'intégrale de chemin

En 1933, Dirac a fait l'observation que l'action joue un rôle central dans la mécanique classique (il a considéré que la formulation du lagrangien de la mécanique classique est plus fondamentale que celle de l'hamiltonien), mais qu'elle a semblé n'avoir aucun rôle important en mécanique quantique. Il a spéculé sur la façon dont cette situation pourrait être rectifiée, et il est arrivé à la conclusion que (en langage plus moderne) le propagateur dans la mécanique quantique

"correspond à" $\exp iS/\hbar$, où S est l'action classique évaluée le long du chemin classique.

En 1948, Feynman a développé la suggestion de Dirac, et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique, basée sur le fait que le propagateur peut être écrit comme une somme sur tous les chemins possibles (pas simplement un classique) entre les points initial et final. Chaque chemin contribue $\exp iS/\hbar$ au propagateur. Ainsi tandis que Dirac considérait seulement le chemin classique, Feynman a prouvé que tous les chemins contribuent dans un sens, la particule quantique prend tous les chemins, et les amplitudes pour chaque chemin s'ajoutent selon la règle de la mécanique quantique habituelle pour combiner des amplitudes. Feynman a postulé [2] que le calcul du propagateur revient à calculer la quantité $\langle q_b, t_b | q_a, t_a \rangle$ qui représente l'amplitude de probabilité pour que la particule, au point q_a à l'instant t_a , se trouve au point q_b à l'instant t_b et qui est constituée par une somme de contributions, une pour chaque chemin d'espace-temps reliant (q_a, t_a) à (q_b, t_b) .

2.3 Amplitude de probabilité

La probabilité d'arriver à un point q en empruntant deux chemins différents n'est pas la somme de la probabilité d'emprunter le premier chemin plus celle du deuxième [3]. En fait la courbe $P(q)$ est connue; il s'agit de la même courbe que celle de la dispersion d'une onde par deux fentes. Le plus facile pour représenter des amplitudes d'onde est d'utiliser les nombres complexes. Nous pouvons énoncer la loi pour $P(q)$ en disant que $P(q)$ est la valeur absolue au carré d'une certaine quantité complexe $\Phi(q)$ qu'on appelle amplitude de probabilité d'arriver en q . De plus $\Phi(q)$ est la somme de deux contributions : ϕ_1 , l'amplitude d'arriver par le chemin 1 plus ϕ_2 l'amplitude d'arriver par le chemin 2. En d'autres termes, nous avons les nombres complexes ϕ_1 et ϕ_2 tels que

$$\begin{aligned} p &= |\phi|^2, \\ \Phi &= \phi_1 + \phi_2, \\ p_1 &= |\phi_1|^2, \\ p_2 &= |\phi_2|^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.4 L'amplitude en mécanique quantique

Maintenant nous devons savoir comment chaque trajectoire contribue à l'amplitude totale pour aller de q_i à q_f . En mécanique quantique, ce n'est pas seulement le chemin pour lequel l'action est maximale qui est important mais tous les chemins possibles. Ils contribuent de façon égale à l'amplitude totale mais avec des phases différentes. La probabilité $P(q_f, q_i)$ d'aller du point q_i à l'instant t_i au point q_f à l'instant t_f est la valeur absolue au carré ($P(q_f, q_i) = |K(q_f, q_i)|^2$) d'une amplitude $K(q_f, q_i)$ pour aller de q_i à q_f . Cette amplitude est la somme des contributions de chaque chemin.

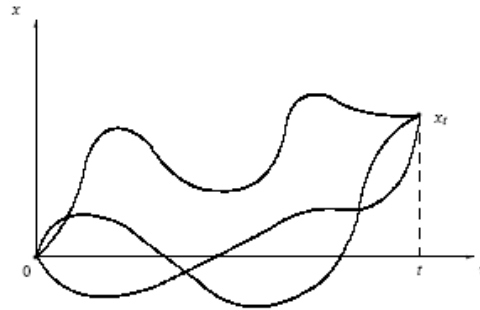


Fig (1) - transition entre deux états de localisation pour $q_i = 0$, $q_f = x_t$

$$K(q_f, q_i) = \sum_{\text{sur tous les chemins de } q_i \text{ à } q_f} \Phi[q(t)]. \quad (2.2)$$

La contribution de chaque chemin possède une phase proportionnelle à l'action S :

$$\Phi[q(t)] = \text{const } e^{(\frac{i}{\hbar})S[q(t)]}. \quad (2.3)$$

2.5 Propagateur de l'équation de Schrödinger

Rappelons que dans le point de vue de Schrödinger, les vecteurs d'état qui représentent le système physique, $|\Psi(t)\rangle$, dépendent du temps. Les observables, A , par contre, sont indépen-

dantes du temps.

Dans la représentation des positions Q , le vecteur $|\Psi(t)\rangle$ est représenté par sa fonction d'onde

$$\langle q | \Psi(t) \rangle = \Psi(q, t). \quad (2.4)$$

L'évolution du vecteur d'état $|\Psi(t)\rangle$ peut être décrite à l'aide de l'opérateur d'évolution $U(t_f, t_i)$ qui est unitaire (conséquence du fait que la translation dans le temps est une opération de symétrie) :

$$|\Psi(t_f)\rangle = U(t_f, t_i) |\Psi(t_i)\rangle. \quad (2.5)$$

Reportant (2.5) dans (2.4) et insérant la relation de fermeture sur les positions q :

$$\int dq_i |q_i\rangle\langle q_i| = I, \quad (2.6)$$

nous trouvons que l'expression (2.4) prend la forme :

$$\Psi(q_f, t_f) = \int dq_i \langle q_f | U(t_f, t_i) | q_i \rangle \Psi(q_i, t_i). \quad (2.7)$$

Dans ce formalisme, l'amplitude de probabilité s'écrit :

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \langle q_f | U(t_f, t_i) | q_i \rangle = K(q_f, t_f; q_i, t_i), \quad (2.8)$$

où $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ est le propagateur retardé du système puisque $t_f > t_i$.

Feynman s'est rendu compte qu'en raison de la loi fondamentale de composition de l'opérateur d'évolution du temps [4], l'amplitude (2.8) pourrait être décomposée en un grand nombre de produits, $(N + 1)$ expressions, d'opérateurs d'évolution du temps, chacun agissant le long d'un intervalle infinitésimal de temps de largeur $\varepsilon \equiv t_n - t_{n-1} = (t_f - t_i) / (N + 1) \gg 0$.

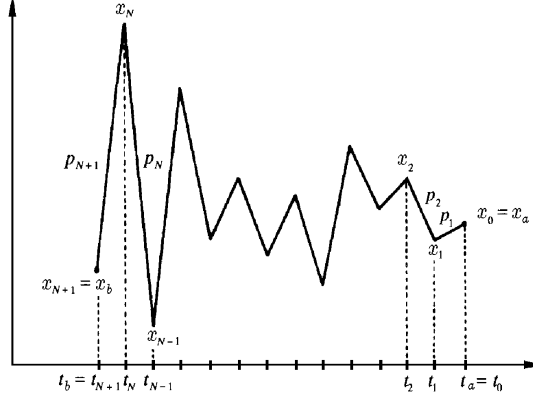


Fig (2) - un chemin d'espace-temps ($x \equiv q$)

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \langle q_f | U(t_f, t_N)U(t_N, t_{N-1}) \dots \\ &\dots U(t_n, t_{n-1}) \dots U(t_2, t_1)U(t_1, t_i) | q_i \rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec $t_f = t_b = t_{N+1}$, $t_i = t_a = t_0$.

En insérant un ensemble complet d'états entre chaque paire de U

$$\int dq_n | q_n \rangle \langle q_n | = I, \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.10)$$

l'amplitude devient un produit de N intégrales

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \prod_{n=1}^N \left[\int dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \\ &= \prod_{n=1}^N \left[\int dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} K(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

La fonction à intégrer est le produit des propagateurs élémentaires pour les intervalles infinitésimaux du temps, qui admet l'expression suivante

$$K(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1}) = \langle q_n | \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar} H\right) | q_{n-1} \rangle, \quad (2.12)$$

où H est l'opérateur hamiltonien

2.6 Intégrales de Chemin

Ici nous allons 'démontrer' la méthode d'intégration fonctionnelle à partir de la quantification canonique [5], dans le cas d'un système à un degré de liberté, celui d'une particule de masse m se déplaçant dans un potentiel $V(q)$. L'hamiltonien de ce système est indépendant du temps

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad [q, p] = i\hbar. \quad (2.13)$$

Rappelons que les opérateurs sont ici représentés par une lettre majuscule, alors que les quantités classiques correspondantes (ou les valeurs propres) le sont par une lettre minuscule. L'opérateur d'évolution temporelle est donné par

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H t\right). \quad (2.14)$$

Ce qui nous intéresse ici est le propagateur, c'est-à-dire l'élément de matrice de l'opérateur d'évolution dans la base des positions

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \langle q_f | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} (t_f - t_i) H\right) | q_i \rangle \\ &= \prod_{n=1}^N \left[\int dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} K(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Étant donné une particule observée au point q_{n-1} et au temps t_{n-1} , le propagateur

$K(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1})$ donne l'amplitude de probabilité pour que la particule soit observée au point q_n , au temps t_n . Commençons par calculer le propagateur pour un temps infinitésimal $\varepsilon = t_n - t_{n-1}$. Les calculs seront faits au premier ordre en ε . Premièrement, en utilisant la

relation de Campbell-Baker-Hausdorff, on trouve

$$\langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H\right) | q_{n-1} \rangle \simeq \langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon K\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\hbar}[K, V]\right) | q_{n-1} \rangle, \quad (2.16)$$

où $K = P^2/2m$ est l'énergie cinétique. Au premier ordre en ε , on peut négliger le dernier facteur. On insère ensuite une relation de complétude sur les impulsions

$$\begin{aligned} \langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon H\right) | q_{n-1} \rangle &\approx \int dp_n \langle q_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V\right) | p_n \rangle \langle p_n | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon K\right) | q_{n-1} \rangle \\ &\approx \int dp_n \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left\{ \frac{p_n^2}{2m} + V(q_n) \right\}\right) \langle q_n | p_n \rangle \langle p_n | q_{n-1} \rangle, \end{aligned} \quad (2.17)$$

on introduit la relation suivante :

$$\langle q | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}pq\right].$$

Il s'ensuit que le propagateur pour un temps infinitésimal s'écrit :

$$K(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1}) \approx \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ p_n (q_n - q_{n-1}) - \varepsilon \left(\frac{p_n^2}{2m} + V(q_n) \right) \right\}\right], \quad (2.18)$$

où

$$H(p_n, q_n; t_n) = \frac{p_n^2}{2m} + V(q_n). \quad (2.19)$$

Substituons le résultat obtenu (2.18) dans l'expression (2.15), et faisant $N \rightarrow \infty$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$, les termes en $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots$, sont négligeables selon la formule de Trotter

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i)H\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V} e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon T}\right)^{N+1}.$$

L'expression du propagateur prend la forme suivante :

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[\int dq_n \right] \prod_{n=1}^{N+1} \left[\int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} A^N \right\}, \quad (2.20)$$

avec

$$A^N = \sum_{n=1}^{N+1} [p_n (q_n - q_{n-1}) - \varepsilon H(p_n, q_n; t_n)]. \quad (2.21)$$

L'expression (2.20) représente la formulation de l'intégrale de chemin dans l'espace des phases sous forme discrète. Aussi on peut la mettre sous forme compacte comme suit

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \iint \mathbf{D}_q(t) \mathbf{D}_p(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} [p\dot{q} - H(p, q; t)] \right\}. \quad (2.22)$$

Partons de l'expression (2.20), en complétant le carré et en calculant l'intégrale gaussienne sur p_n .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \frac{i}{\hbar} \left[p_n (q_n - q_{n-1}) - \varepsilon \left(\frac{p_n^2}{2m} + V(q_n) \right) \right] = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m}{2\varepsilon} (q_n - q_{n-1})^2 - \varepsilon V(q_n) \right\}. \quad (2.23)$$

Ce dernier calcul n'est valide que si ε a une petite partie imaginaire négative. La quantité entre accolades n'est rien d'autre que l'action infinitésimale $S(q_{n-1}, q_n; \varepsilon)$ associée au passage du système de la position q_{n-1} à la position q_n dans un temps ε . Au premier ordre, on peut donc écrire

$$K(q_n, t_n; q_{n-1}, t_{n-1}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \exp S(q_{n-1}, q_n; \varepsilon). \quad (2.24)$$

Il se trouve, en fait, que le propagateur (2.15) admet une forme lagrangienne (ou intégrale de chemin dans l'espace de configuration) en remplaçant le résultat de l'intégration sur p_n (2.23),

qui est défini par

$$\begin{aligned}
K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right\}^{\frac{N+1}{2}} \prod_{n=1}^N \left[\int dq_n \right] \\
&\quad \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2\varepsilon} (q_n - q_{n-1})^2 - \varepsilon V(q_{n-1}) \right] \right\} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right\}^{\frac{N+1}{2}} \int \prod_{n=1}^N dq_n \exp \frac{i}{\hbar} S[q], \tag{2.25}
\end{aligned}$$

où $S[q]$ est l'action associée à la trajectoire discrète q_n , $n = 1, 2, \dots, N + 1$.

Si on définit la mesure d'intégration fonctionnelle suivante

$$\mathbf{D}_q(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right\}^{\frac{N+1}{2}} \prod_{n=1}^N dq_n, \tag{2.26}$$

alors, le résultat fondamental peut s'écrire comme suit

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \int \mathbf{D}_q(t) \exp \frac{i}{\hbar} S[q], \tag{2.27}$$

où l'action est, bien entendu, donnée par

$$S[q] = \int dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right). \tag{2.28}$$

L'interprétation de (2.27) est la suivante. Chaque trajectoire possible allant de q_i à q_f dans un temps t contribue à l'amplitude $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ avec un poids égal à l'exponentielle complexe de son action. En gros, on peut dire que les trajectoires qui contribuent appréciablement à l'amplitude sont celles dont l'action ne diffère de l'action classique $S[q_c]$ que par un terme d'ordre $\sim \hbar$. La limite classique est obtenue quand l'action de la trajectoire classique est beaucoup plus grande que \hbar : $S[q_c] \gg \hbar$. C'est le principe de correspondance.

2.7 Expression de $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ en fonction des états propres de H

Le propagateur peut être utilisé pour exprimer l'amplitude de probabilité qu'un état $|\Psi_i\rangle$ évolue dans un temps t vers un autre état $|\Psi_f\rangle$. En effet

$$\langle \Psi_f | U(t_f - t_i) | \Psi_i \rangle = \int dq_i dq_f \Psi_f^*(q_f) \Psi_i(q_i) \langle q_f | U(t_f - t_i) | q_i \rangle, \quad (2.29)$$

où $\Psi_i(q) = \langle q | \Psi_i \rangle$ est la fonction d'onde de l'état $|\Psi_i\rangle$ (idem pour $\Psi_f(q) = \langle q | \Psi_f \rangle$).

Signalons enfin que, dans la base des fonctions propres de l'hamiltonien, le propagateur a une forme particulièrement simple :

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= \langle q_f | \exp -\frac{i}{\hbar} H (t_f - t_i) | q_i \rangle \\ &= \sum_n \langle q_f | n \rangle \mathbf{e}^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_f - t_i)} \langle n | q_i \rangle \\ &= \sum_n \mathbf{e}^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t_f - t_i)} \Phi_n(q_f) \Phi_n^*(q_i). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Connaissant le propagateur exactement, on peut donc en extraire les niveaux d'énergie E_n et les fonctions propres Φ_n de l'hamiltonien, à une phase arbitraire près.

2.8 Propagateur dépendant de l'énergie

D'après l'équation (2.15), le propagateur K dépend seulement de la différence des périodes, c.-à-d.

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = K(q_f, q_i; T) \quad , \quad T = t_f - t_i. \quad (2.31)$$

Il est souvent plus simple d'utiliser la fonction de Green dépendante d'énergie $G(q_f, q_i; E)$ au lieu du propagateur $K(q_f, q_i; T)$. Les deux sont reliés par la transformation de Fourier [6] :

$$\begin{aligned}
G(q_f, q_i; E) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT e^{\frac{i}{\hbar}ET} K(q_f, q_i; T) \\
&= \frac{1}{i\hbar} \int_0^{\infty} dT e^{\frac{i}{\hbar}ET} K(q_f, q_i; T),
\end{aligned} \tag{2.32}$$

(puisque $K(q_f, q_i; 0) = 0$ pour $T(0)$). L'intégrale (2.32) peut toujours être faite pour converger si l'énergie E devient légèrement complexe avec une petite partie imaginaire positive (la prescription $i\eta$).

La transformation (2.32) de la série (2.30) donne le développement pour la fonction de Green dépendante de l'énergie

$$G(q_f, q_i; E) = \sum_n \frac{\Phi_n(q_f) \Phi_n^*(q_i)}{E - E_n}. \tag{2.33}$$

Puisque le spectre de H est réel, les singularités surgissent quand $\text{Im } E = 0$. Pour un spectre discret, nous admettons que les pôles de G sont les états liés et les résidus correspondants aux fonctions d'ondes d'état lié. Pour un spectre continu de H , la fonction G a une coupure.

2.9 Action quadratique

La classe la plus simple de systèmes dont la solution par l'intégrale de chemin est exacte est celle caractérisée par l'équation quadratique de l'action dans les coordonnées et les vitesses [7]. Par conséquent, elles fournissent de bons exemples pour la compréhension appropriée de diverses étapes mathématiques impliquées dans le calcul explicite des intégrales de chemin. D'ailleurs, elles sont également utilisées comme première approximation pour étudier des systèmes caractérisés par une action particulièrement complexe. Il est, donc, très souhaitable d'avoir des expressions explicites pour les propagateurs liés à des actions spécifiques généralement utilisées dans des calculs pratiques.

Entre deux points (q_i, t_i) et (q_f, t_f) il existe toujours une trajectoire classique $q_c(t)$. On peut donc décomposer une trajectoire arbitraire $q(t)$ ainsi : $q(t) = q_c(t) + y(t)$, où $y(t_i) = y(t_f) = 0$. On peut considérer le passage de $q(t)$ à $y(t)$ comme un changement de variables fonctionnel,

mais un changement très simple, puisqu'en chaque instant la nouvelle variable ne diffère de l'ancienne que par une constante $q_c(t)$. Le jacobien de ce changement de variable est donc égal à l'unité, c'est-à-dire que $[dq] = [dy]$. De plus, on a le développement de Taylor suivant :

$$S[q] = S[q_c] + \int dt \frac{\delta S}{\delta q(t)} y(t) + \frac{1}{2} \int dt dt' \frac{\delta^2 S}{\delta q(t) \delta q(t')} y(t) y(t') + \dots, \quad (2.34)$$

où toutes les variations sont calculées par rapport à la trajectoire classique q_c . Par définition de q_c , le deuxième terme est donc nul. Au deuxième ordre, on peut donc écrire

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = e^{\frac{i}{\hbar} S[q_c]} \int [dy] \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt dt' \frac{\delta^2 S}{\delta q(t) \delta q(t')} \Big|_c y(t) y(t') \right\}. \quad (2.35)$$

Dans le cas d'une action quadratique en $q(t)$, comme celle d'une particule libre ou d'un oscillateur harmonique, cette approximation au deuxième ordre est exacte. Écrivons l'action quadratique générale

$$S[q(t)] = \int dt (a\dot{q}^2 + bq\dot{q} + cq^2 + d\dot{q} + ex + f), \quad (2.36)$$

où a, b, \dots, f sont en général des fonctions de t . Nous supposons cependant que a, b et c sont indépendants du temps. Le développement au deuxième ordre donne

$$\begin{aligned} K(q_f, t_f; q_i, t_i) &= e^{\frac{i}{\hbar} S[q_c]} \int [dy] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (ay^2 + by\dot{y} + cy^2) \right\} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} S[q_c]} f(T), \quad (T \equiv t_f - t_i). \end{aligned} \quad (2.37)$$

où $f(T)$ est une fonction de l'intervalle de temps écoulé seulement, puisque le lagrangien, en fonction de y , ne dépend pas explicitement du temps t . Toute la dépendance dans les conditions initiale et finale se retrouve dans $S[q_c]$.

Le résultat exprimé par (2.37) est d'importance fondamentale et implique que la dynamique des systèmes quantiques caractérisés par l'action quadratique est complètement exprimée par la trajectoire classique.

2.10 Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre une nouvelle description des systèmes quantiques non relativistes selon la méthode de Feynman qui porte le nom l'intégrale de chemin. Et nous avons montré que l'intégrale de chemin peut se mettre sous deux définitions explicites. La première dite la forme hamiltonienne (l'intégrale de chemin dans l'espace des phases), et la deuxième, est la forme lagrangienne. Aussi, on a pu arboré que le propagateur caractérisé par l'action quadratique est complètement exprimé par la trajectoire classique.

Cette méthode possède les avantages suivants :

- Elle est plus intuitive, car la notion de trajectoire reprend quelques uns de ses droits.
- Elle donne un sens physique plus clair à la correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique.
- Elle permet certaines manipulations formelles, en particulier des changements de variables, avec une plus grande facilité que la quantification canonique, car elle se fonde sur l'espace des configurations et non sur l'espace des phases.
- On raisonne dans l'espace-temps, ce qui permet un passage à la relativité très aisé dans la formulation lagrangienne, par contre, dans la formulation hamiltonienne le temps est très privilégié et la covariance relativiste des équations n'est pas apparente.
- Le point de vue est global, c'est-à-dire, au lieu de considérer des amplitudes de probabilité pour un état à un instant donné, on associe une amplitude de probabilité à une histoire entière, ou chemin, du système. Ce point de vue se révèle souvent plus fructueux et plus intéressant.

En pratique les avantages de l'intégrale de chemin deviennent apparents lorsqu'on considère des systèmes ayant un nombre infini de degrés de liberté.

Chapitre 3

Traitement du Mouvement d'une Particule Soumise au Potentiel de Pöschl-Teller

3.1 Introduction

La résolution de l'équation de Schrödinger stationnaire pour un potentiel arbitraire peut se révéler délicate techniquement. Néanmoins, il est souhaitable de connaître tous les potentiels pour lesquels nous pouvons résoudre l'équation de Schrödinger et exprimer ses solutions en termes de celles des équations différentielles que nous pouvons actuellement résoudre car il est essentiel pour la physique d'avoir des solutions analytiques exactes afin d'expliquer avec certitude certaines expériences.

Les potentiels exactement solubles sont des exceptions dans la théorie quantique [8]. Seules certaines classes de potentiels admettent des solutions exactes (on dit alors que le problème est intégrable). Nous trouvons en effet parmi ceux-ci des potentiels solubles d'intérêt certain, pensons en particulier aux potentiels unidimensionnels harmoniques, de Pöschl-Teller et de Morse. Une des raisons d'une telle popularité est que leurs études modélisent la situation très fréquente où le système est au voisinage de l'équilibre. Les résultats obtenus pour ces potentiels pourront s'appliquer à l'étude des vibrations d'une molécule diatomique, des vibrations de

molécules plus complexes ou même des solides.

Dans l'approche de Feynman [9, 10], l'évaluation du propagateur a joué un rôle central dans un grand nombre de problèmes de la physique quantique non relativiste ; citons le cas des potentiels singuliers à l'origine pour lesquels des solutions analytiques sont hautement désirables et cela quelle que soit leur forme fonctionnelle.

Les transformations sur l'espace et sur le temps étaient l'outil mathématique puissant permettant de contourner beaucoup de difficultés rencontrées en utilisant le formalisme de Schrödinger [11]. Depuis, les résultats obtenus dans cette voie sont spectaculaires et sont parfaitement identiques à ceux trouvés par la résolution de l'équation de Schrödinger [12].

Dans ce chapitre, nous allons analyser, par l'intégrale de chemin, le comportement d'une particule de masse m dans un puits de potentiel de Pöschl-Teller unidimensionnel [13].

Le potentiel qui régit le mouvement est défini par :

$$V^{PT}(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{k(k-1)}{\sin^2 x} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2 x} \right], \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (3.1)$$

λ et k sont deux paramètres réels et $\lambda > 1$, $k > 1$.

Le problème en question a été étudié pour la première fois par Pöschl et Teller [14]. Une discussion détaillée, dans le cadre de l'équation de Schrödinger, est disponible dans le livre « problems in quantum mechanics » de Constantinescu et Magyari [12]. L'étude de ce potentiel symétrique dans le formalisme de l'intégrale de chemin a été effectuée suivant différentes approches [13, 15, 16]. L'approche développée dans ce chapitre consiste à traiter ce problème pour $\lambda = k$ et λ et k quelconques le plus naturellement et le plus simplement possible dans l'espace de configurations et aussi bien dans l'espace des phases en utilisant la technique de la fonctionnelle delta de Dirac [17].

3.2 Calcul du propagateur dans l'espace de configurations :

Nous nous proposons donc d'évaluer l'intégrale de chemin associée à ce problème dans deux cas différents en l'occurrence le cas particulier où $k = \lambda$ et le cas général où λ et k sont quelconques.

La construction du propagateur nous permettra d'obtenir directement le spectre de l'énergie et les fonctions d'onde convenablement normalisées des états liés.

3.2.1 Le propagateur dans le cas particulier, $k = \lambda$

Dans ce cas le potentiel défini par l'équation (3.1) se réduit à :

$$\mathbf{V}(x) = 2V_0k(k-1)\sin^{-2}2x, \quad (3.2)$$

où $V_0 = \frac{\hbar^2}{m}$, $k > 1$, et $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Suivant Feynman, le propagateur relatif à une particule de masse m en mouvement dans un espace à une dimension soumise au potentiel (3.2) s'écrit formellement

$$\mathbf{K}(x'', x'; T) = \int \mathbf{D}x(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T L(x, \dot{x}) dt\right), \quad (3.3)$$

avec le lagrangien du système

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - 2V_0k(k-1)\csc^2 2x, \quad (3.4)$$

et explicitement sous forme discrète

$$\mathbf{K}(x'', x'; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar}\right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^N \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1)\right], \quad (3.5)$$

où $S(j, j-1)$ est l'action élémentaire qui s'écrit en adoptant le principe du mid-point :

$$\begin{aligned}
S(j, j-1) &= \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta x_j)^2 - \varepsilon V(\tilde{x}_j) \\
&= \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta x_j)^2 - 2V_0 k(k-1)\varepsilon \csc^2 2\tilde{x}_j,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

avec $\tilde{x}_j = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}$.

Développons les quantités $\sin x_j \sin x_{j-1}$ et $\cos x_j \cos x_{j-1}$ autour du point moyen et retenons seulement les termes d'ordre 2 en Δx_j , c'est-à-dire d'ordre ε de sorte que

$$\begin{aligned}
\sin x_j \sin x_{j-1} &= \sin^2 \tilde{x}_j \left(1 - \frac{(\Delta x_j)^2}{4 \tilde{x}_j^2} \right), \\
\cos x_j \cos x_{j-1} &= \cos^2 \tilde{x}_j \left(1 - \frac{(\Delta x_j)^2}{4 \tilde{x}_j^2} \right).
\end{aligned}$$

Il est tout de même utile de rappeler que les termes qui contribuent à l'action sont de l'ordre de ε . Dans ces conditions, nous remplaçons $\sin^2 \tilde{x}_j$ par $\sin x_j \sin x_{j-1}$ et $\cos^2 \tilde{x}_j$ par $\cos x_j \cos x_{j-1}$, l'action élémentaire s'écrit

$$S(j, j-1) = \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta x_j)^2 - 2V_0 k(k-1)\varepsilon \csc(2x_j) \csc(2x_{j-1}), \tag{3.7}$$

avec $x_j = x(t_j)$, $t' = t_0$, $t'' = t_N$, $\varepsilon = \frac{T}{N}$, $T = t_N - t_0$, $x' = x(t_0)$, $x'' = x(t_N)$.

Pour simplifier, nous faisons le changement de variable $\theta_j = 2x_j$, $\theta_j \in]0, \pi[$. Les équations (3.5) et (3.7) se transforment en

$$\mathbf{K}(\theta'', \theta'; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} (2)^{1-N} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j \prod_{j=1}^N \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right], \tag{3.8}$$

et

$$S(j, j-1) = \frac{m}{8\varepsilon} (\Delta \theta_j)^2 - 2V_0 k(k-1)\varepsilon \csc(\theta_j) \csc(\theta_{j-1}). \tag{3.9}$$

Afin d'exprimer l'action en fonction de $\cos \Delta \theta_j$, nous utilisons le développement limité de

la fonction cosinus et retenons les termes d'ordre 4 en $\Delta\theta_j$:

$$\cos \Delta\theta_j = 1 - \frac{(\Delta\theta_j)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta_j)^4}{4!},$$

d'où

$$(\Delta\theta_j)^2 = 2 \left(1 - \cos \Delta\theta_j + \frac{(\Delta\theta_j)^4}{4!} \right), \quad (3.10)$$

donc, l'expression (3.9) se réécrit

$$S(j, j-1) = \frac{m}{4\varepsilon} (1 - \cos \Delta\theta_j) + \frac{m}{96\varepsilon} (\Delta\theta_j)^4 - \frac{2V_0 k(k-1)\varepsilon}{\sin \theta_j \sin \theta_{j-1}}. \quad (3.11)$$

A l'aide de la formule suivante [15]

$$\int_{-q}^q \exp \left[-\alpha y^2 + \beta y^4 + \beta' y^4 + O(y^6) \right] dy = \int_{-q}^q \exp \left[-\alpha y^2 + \beta y^4 + \frac{3}{4} \beta' \alpha^{-2} + O(\alpha^{-3}) \right] dy, \quad (3.12)$$

valable pour α grand et $q \rightarrow \infty$, nous pouvons remplacer le terme $(\Delta\theta_j)^4$ par son correspondant quantique

$$(\Delta\theta_j)^4 \rightarrow -\frac{48\hbar^2}{m^2} \varepsilon$$

l'action élémentaire (3.11) devient

$$S(j, j-1) = \frac{m}{4\varepsilon} (1 - \cos \Delta\theta_j) - \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon - \frac{2V_0 k(k-1)\varepsilon}{\sin \theta_j \sin \theta_{j-1}}. \quad (3.13)$$

En utilisant la propriété de la fonction cosinus

$$\cos \Delta\theta_j = \cos \theta_j \cos \theta_{j-1} + \sin \theta_j \sin \theta_{j-1}, \quad (3.14)$$

et en remplaçant $V_0 = \frac{\hbar^2}{m}$, l'expression (3.13) prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
S(j, j-1) &= \left(\frac{m}{4\varepsilon} - \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon \right) - \left(\frac{m}{4\varepsilon} \cos \theta_j \cos \theta_{j-1} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{m}{4\varepsilon} \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} + \frac{2\varepsilon \hbar^2}{m} \frac{k(k-1)}{\sin \theta_j \sin \theta_{j-1}} \right). \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Alors, nous aboutissons à l'exponentielle de l'action élémentaire

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right] &= \exp \left(\frac{im}{4\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{2m} \varepsilon \right) \exp \left(\frac{m}{4i\varepsilon \hbar} \cos \theta_j \cos \theta_{j-1} \right) \\
&\quad \exp \left(\frac{m}{4i\varepsilon \hbar} \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} - \frac{2i\varepsilon \hbar}{m} \frac{k(k-1)}{\sin \theta_j \sin \theta_{j-1}} \right). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Utilisant maintenant la formule asymptotique suivante [10]

$$\mathbf{I}_{|\gamma|}(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{=} (2\pi z)^{-1/2} \exp \left[z - \frac{1}{2z} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) \right], \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}, \quad (3.17)$$

où $\mathbf{I}_{|\gamma|}(z)$ sont les fonctions de Bessel modifiées, l'équation (3.16) devient :

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right] &= \exp \left(\frac{im}{4\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{2m} \varepsilon \right) \exp \left(\frac{m}{4i\varepsilon \hbar} \cos \theta_j \cos \theta_{j-1} \right) \\
&\quad \left(2\pi \frac{m}{4i\varepsilon \hbar} \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} \right)^{1/2} \mathbf{I}_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{4i\varepsilon \hbar} \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} \right). \quad (3.18)
\end{aligned}$$

substituons le résultat (3.18) dans l'expression (3.8) du propagateur, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta'', \theta'; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2)^{1-N} \left(\frac{m}{2i\varepsilon \hbar} \right)^N \exp \left(\frac{im}{4\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{2m} \varepsilon \right) \int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j \\
&\quad \prod_{j=1}^N (\sin \theta_j \sin \theta_{j-1})^{1/2} \exp \left(\frac{m}{4i\varepsilon \hbar} \cos \theta_j \cos \theta_{j-1} \right) \\
&\quad \mathbf{I}_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{4i\varepsilon \hbar} \sin \theta_j \sin \theta_{j-1} \right). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

A ce niveau, insérons la relation suivante [7]

$$\begin{aligned}
& (\sin \alpha \sin \beta)^{1/2-k} \mathbf{I}_{k-\frac{1}{2}}(z \sin \alpha \sin \beta) \exp(z \cos \alpha \cos \beta) \\
= & \frac{2^{2k} [\Gamma(k)]^2}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l) \Gamma(l+1)}{\Gamma(2k+l)} \mathbf{I}_{k+l}(z) \mathbf{C}_l^k(\cos \alpha) \mathbf{C}_l^k(\cos \beta), \quad (3.20)
\end{aligned}$$

où \mathbf{C}_l^k sont les polynômes de Gegenbauer, dans l'équation (3.19), le propagateur devient

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta'', \theta'; T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} (2)^{1-N} \left\{ \left(\frac{m}{2i\varepsilon\hbar} \right)^N \exp\left(\frac{im}{4\varepsilon\hbar} - \frac{i\hbar}{2m} \varepsilon \right) \frac{2^{2k} [\Gamma(k)]^2}{(\sqrt{2\pi} \frac{m}{4i\varepsilon\hbar})} \right\} \\
& \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{l_2=0}^{\infty} \dots \sum_{l_N=0}^{\infty} \frac{(k+l_1) \Gamma(l_1+1)}{\Gamma(2k+l_1)} \dots \frac{(k+l_N) \Gamma(l_N+1)}{\Gamma(2k+l_N)} \\
& \mathbf{I}_{k+l_1} \left(\frac{m}{4i\varepsilon\hbar} \right) \dots \mathbf{I}_{k+l_N} \left(\frac{m}{4i\varepsilon\hbar} \right) (\sin \theta_0 \sin \theta_N)^k \mathbf{C}_{l_1}^k(\cos \theta_0) \mathbf{C}_{l_N}^k(\cos \theta_N) \\
& \int_0^{\pi} (\sin^2 \theta_1)^k \mathbf{C}_{l_1}^k(\cos \theta_1) \mathbf{C}_{l_2}^k(\cos \theta_1) d\theta_1 \dots \dots \dots \\
& \dots \dots \dots \int_0^{\pi} (\sin^2 \theta_{N-1})^k \mathbf{C}_{l_{N-1}}^k(\cos \theta_{N-1}) \mathbf{C}_{l_N}^k(\cos \theta_{N-1}) d\theta_{N-1}. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Pour l'intégration par rapport à la variable θ_j , utilisons la relation d'orthogonalité des polynômes de Gegenbauer [18]

$$\int_{-1}^1 \mathbf{C}_n^k(t) \mathbf{C}_m^k(t) (1-t^2)^{k-1/2} dt = \frac{\pi 2^{1-2k} \Gamma(n+2k)}{n! (k+n) [\Gamma(k)]^2} \delta_{n,m}. \quad (3.22)$$

L'intégration sur la variable θ_j dans le cas $j = 1$, donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\sin \theta_1)^{2k} \mathbf{C}_{l_1}^k(\cos \theta_1) \mathbf{C}_{l_2}^k(\cos \theta_1) d\theta_1 &= \int_{-1}^1 \mathbf{C}_{l_1}^k(t) \mathbf{C}_{l_2}^k(t) (1-t^2)^{k-1/2} dt \\
&= \frac{\pi 2^{1-2k} \Gamma(l_1 + 2k)}{(l_1!) (k + l_1) [\Gamma(k)]^2} \delta_{l_1, l_2}. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Ainsi, après avoir effectué toutes les intégrations sur les variables angulaires, nous aboutissons à l'expression du propagateur suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta'', \theta'; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\varepsilon\hbar} \right)^{\frac{N}{2}} (2)^{2k} (2\pi)^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l) \Gamma(l+1)}{\Gamma(2k+l) [\Gamma(k)]^{-2}} \\
&\quad \left\{ \prod_{j=1}^N \exp\left(\frac{im}{4\varepsilon\hbar} - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m} \right) \mathbf{I}_{k+l} \left(\frac{m}{4i\varepsilon\hbar} \right) \right\} (\sin \theta_0 \sin \theta_N)^k \\
&\quad \mathbf{C}_l^k(\cos \theta_0) \mathbf{C}_l^k(\cos \theta_N). \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Finalement, en remplaçant $\mathbf{I}_{k+l} \left(\frac{m}{4i\varepsilon\hbar} \right)$ par la relation (3.17), le propagateur peut être alors écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(x'', x'; T) &= \frac{(2)^{2k}}{\pi} (\sin 2x_0 \sin 2x_N)^k \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(-i\hbar \frac{2}{m} (l+k)^2 T \right) \\
&\quad \frac{(k+l) \Gamma(l+1)}{\Gamma(2k+l) [\Gamma(k)]^{-2}} \mathbf{C}_l^k(\cos 2x_0) \mathbf{C}_l^k(\cos 2x_N). \tag{3.25}
\end{aligned}$$

3.2.2 Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés :

Nous avons vu, au deuxième chapitre, que le propagateur peut se développer sur les états propres de l'hamiltonien comme suit

$$\mathbf{K}(x'', x'; T) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x'') \Psi_n^*(x') \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n T\right). \quad (3.26)$$

Par identification, il découle que le spectre discret de l'énergie est alors donné par la relation

$$E_n = \frac{2\hbar^2}{m} (n+k)^2, \quad (3.27)$$

Aussi, les fonctions d'onde normalisées des états liés peuvent être facilement déduites

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= 4^k \Gamma(k) \left[\frac{(k+n) \Gamma(n+1)}{\pi \Gamma(2k+n)} \right]^{1/2} \\ &(\sin x \cos x)^k \mathbf{C}_n^K(1 - 2 \sin^2 x). \end{aligned} \quad (3.28)$$

En tenant compte de la relation entre les polynômes de Legendre et de Gegenbauer [18]

$$\mathbf{C}_n^K(t) = \frac{\Gamma(2k+n) \Gamma(k+1/2)}{\Gamma(2k) \Gamma(n+1)} \left\{ \frac{1}{4} (t^2 - 1) \right\}^{1/4-k/2} \mathbf{P}_{k+n-1/2}^{1/2-k}(t), \quad (3.29)$$

ainsi que de la propriété de la fonction gamma

$$\Gamma(2k) = \frac{2^{2k-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (3.30)$$

nous pouvons donner aux fonctions d'onde l'expression suivante :

$$\Psi_n(x) = \left[\frac{4(k+n) \Gamma(n+2k)}{\Gamma(n+1)} \right]^{1/2} (\sin x \cos x)^{1/2} \mathbf{P}_{k+n-1/2}^{1/2-k}(1 - 2 \sin^2 x). \quad (3.31)$$

3.2.3 Le propagateur dans le cas général, k et λ quelconques

Dans ce cas le lagrangien régissant la dynamique du système physique est défini par

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{k(k-1)}{\sin^2 x} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2 x} \right]. \quad (3.32)$$

La présentation discrète du propagateur s'écrit en notation standard comme suit

$$\mathbf{K}(x'', x'; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} dx_j \prod_{j=1}^N \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right], \quad (3.33)$$

où $S(j, j-1)$ est l'action élémentaire développée autour du point moyen

$$S(j, j-1) = \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta x_j)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon \left[\frac{k(k-1)}{\sin^2 \tilde{x}_j} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2 \tilde{x}_j} \right]. \quad (3.34)$$

En utilisant la moyenne géométrique à la place de la moyenne arithmétique c'est-à-dire, en remplaçant $\sin^2 \tilde{x}_j$ par $\sin x_j \sin x_{j-1}$ et $\cos^2 \tilde{x}_j$ par $\cos x_j \cos x_{j-1}$, cette action devient

$$S(j, j-1) = \frac{m}{2\varepsilon} (\Delta x_j)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon \left[\frac{k(k-1)}{\sin x_j \sin x_{j-1}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos x_j \cos x_{j-1}} \right]. \quad (3.35)$$

Au moyen du changement de variable $\theta_j = 2x_j$, les équations (3.33) et (3.35) se transforment en

$$\mathbf{K}(\theta'', \theta'; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} (2)^{1-N} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{N/2} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j \prod_{j=1}^N \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right], \quad (3.36)$$

et

$$S(j, j-1) = \frac{m}{2\varepsilon} \left(\frac{\Delta \theta_j}{2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon \left[\frac{k(k-1)}{\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2}} \right]. \quad (3.37)$$

Le développement à l'ordre 4 en $\Delta \theta_j$ de la fonction cosinus

$$\left(\frac{\Delta \theta_j}{2} \right)^2 = 2 \left(1 - \cos \frac{\Delta \theta_j}{2} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta \theta_j}{2} \right)^4 \right), \quad (3.38)$$

nous permet d'écrire l'action (3.37) sous la forme

$$\begin{aligned}
S(j, j-1) &= \frac{m}{\varepsilon} \left(1 - \cos \frac{\Delta\theta_j}{2} \right) + \frac{m}{24\varepsilon} \left(\frac{\Delta\theta_j}{2} \right)^4 - \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon \left[\frac{k(k-1)}{\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2}} \right]. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Suivant la relation (3.12), nous effectuons la substitution suivante $\frac{m}{24\varepsilon} \left(\frac{\Delta\theta_j}{2} \right)^4 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{8m} \varepsilon$ dans l'expression de l'action qui devient

$$\begin{aligned}
S(j, j-1) &= \frac{m}{\varepsilon} \left(1 - \cos \frac{\Delta\theta_j}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{8m} \varepsilon - \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \varepsilon \left[\frac{k(k-1)}{\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2}} \right]. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

La correction quantique $\left(-\frac{\hbar^2}{8m} \right)$ joue le rôle d'une pseudo-énergie.

Insérons ensuite la propriété de la fonction cosinus (3.14), l'action élémentaire prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
S(j, j-1) &= \left(\frac{m}{\varepsilon} - \frac{\hbar^2}{8m} \varepsilon \right) - \left(\frac{m}{\varepsilon} \cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} + \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2}} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{m}{\varepsilon} \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} + \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2m} \frac{k(k-1)}{\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2}} \right). \tag{3.41}
\end{aligned}$$

dont l'exponentielle est

$$\begin{aligned}
\exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right] &= \exp \left(\frac{im}{\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon \right) \exp \left(\frac{m}{i\varepsilon \hbar} \cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} - \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2}} \right) \\
&\quad \exp \left(\frac{m}{i\varepsilon \hbar} \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} - \frac{i\varepsilon \hbar}{2m} \frac{k(k-1)}{\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2}} \right). \tag{3.42}
\end{aligned}$$

A l'aide de la formule asymptotique (3.17), l'équation (3.42) se ramène à la décomposition

suivante :

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right] &= \exp \left(\frac{im}{\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon \right) \left(\frac{2\pi m}{i\varepsilon \hbar} \right) \left(\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \mathbf{I}_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{i\varepsilon \hbar} \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} \right) \mathbf{I}_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{i\varepsilon \hbar} \cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

D'après la relation existante entre la fonction de Bessel et celle de Bessel modifiée [18]

$$\mathbf{I}_\nu(z) = e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)\nu i} J_\nu \left(e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i} z \right), \quad (3.44)$$

valable pour $\left[-\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}\right]$, nous pouvons mettre l'équation (3.43) sous la forme

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right] &= \exp \left(\frac{im}{\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon \right) \left(\frac{2\pi m}{i\varepsilon \hbar} \right) e^{-i\frac{\pi}{2}(\lambda+k-1)} \\ &\quad \left(\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad J_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{me^{i\frac{\pi}{2}}}{i\varepsilon \hbar} \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} \right) J_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(\frac{me^{i\frac{\pi}{2}}m}{i\varepsilon \hbar} \cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

où nous avons posé $y = \frac{m e^{i\frac{\pi}{2}}}{i\varepsilon \hbar}$.

ou encore

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right] &= \exp \left(\frac{im}{\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon \right) (4\pi) e^{-i\frac{\pi}{2}(\lambda+k)} \left(\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left\{ \frac{y}{2} J_{k-\frac{1}{2}} \left(y \sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} \right) J_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(y \cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

Maintenant, il est facile de s'assurer que

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^N \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(j, j-1) \right] &= \left[\prod_{j=1}^N (4\pi) e^{-i\frac{\pi}{2}(\lambda+k)} \exp \left(\frac{im}{\varepsilon\hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sin \frac{\theta_j}{2} \sin \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta_j}{2} \cos \frac{\theta_{j-1}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
&\quad \frac{y}{2} J_{k-\frac{1}{2}} \left(y \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_0}{2} \right) J_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(y \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} \right) \dots\dots\dots \\
&\quad \dots\dots\dots \frac{y}{2} J_{k-\frac{1}{2}} \left(y \sin \frac{\theta_N}{2} \sin \frac{\theta_{N-1}}{2} \right) J_{\lambda-\frac{1}{2}} \left(y \cos \frac{\theta_N}{2} \cos \frac{\theta_{N-1}}{2} \right).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

En tenant compte du lien entre les fonctions de Bessel et les fonctions hypergéométriques [10]

$$\begin{aligned}
\frac{z}{2} J_\nu(z \sin \alpha \sin \beta) J_\mu(z \cos \alpha \cos \beta) &= (z \sin \alpha \sin \beta)^\nu (z \cos \alpha \cos \beta)^\mu \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \\
&\quad (\mu + \nu + 2l + 1) \frac{\Gamma(\mu + \nu + l + 1) \Gamma(\nu + l + 1)}{l! \Gamma^2(\nu + 1) \Gamma(\mu + l + 1)} \\
&\quad J_{\mu+\nu+2l+1}(z) F(-l, \mu + \nu + l + 1, \nu + 1; \sin^2 \alpha) \\
&\quad F(-l, \mu + \nu + l + 1, \nu + 1; \sin^2 \beta), \tag{3.48}
\end{aligned}$$

Et en utilisant la relation existante entre les fonctions hypergéométriques et les polynômes de Jacobi [18]

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} F \left(-n, \alpha + \beta + n + 1, \alpha + 1; \frac{1-x}{2} \right), \quad F \equiv {}_2F_1 \tag{3.49}$$

l'expression (3.47) admet l'écriture suivante :

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^N \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_j \right] &= \left[\prod_{j=1}^N (4\pi) e^{-i\frac{\pi}{2}(\lambda+k)} \exp \left(\frac{im}{\varepsilon\hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon \right) \right] \sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_N=0}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+\dots+l_N} \\
&(\lambda+k+2l_1) \dots (\lambda+k+2l_N) \frac{l_1! \Gamma(\lambda+k+l_1)}{\Gamma(k+l_1+\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda+l_1+\frac{1}{2})} \dots \\
&\dots \frac{l_N! \Gamma(\lambda+k+l_N)}{\Gamma(k+l_N+\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda+l_N+\frac{1}{2})} J_{k+\lambda+2l_1}(y) \dots J_{k+\lambda+2l_N}(y) \\
&\left(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_N}{2} \right)^k \left(\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_N}{2} \right)^\lambda P_{l_1}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_0) P_{l_N}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_N) \\
&\left\{ \left(\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right)^k \left(\cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right)^\lambda P_{l_1}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_1) P_{l_2}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_1) \right\} \dots \\
&\dots \left\{ \left(\sin^2 \frac{\theta_{N-1}}{2} \right)^k \left(\cos^2 \frac{\theta_{N-1}}{2} \right)^\lambda P_{l_N}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_{N-1}) P_{l_{N-1}}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_{N-1}) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

En substituant le résultat obtenu (3.50) dans l'expression (3.36), le propagateur relatif au potentiel (3.1) se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(\theta'', \theta'; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2)^{1-N} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar} \right)^{N/2} \left[\prod_{j=1}^N (4\pi) e^{-i\frac{\pi}{2}i(\lambda+k)} \exp \left(\frac{im}{\varepsilon\hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon \right) \right] \\
&\sum_{l_1=0}^{\infty} \dots \sum_{l_N=0}^{\infty} (-1)^{l_1+l_2+\dots+l_N} (\lambda+k+2l_1) \dots (\lambda+k+2l_N) J_{k+\lambda+2l_1}(y) \dots J_{k+\lambda+2l_N}(y) \\
&\frac{l_1! \Gamma(\lambda+k+l_1)}{\Gamma(k+l_1+\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda+l_1+\frac{1}{2})} \dots \frac{l_N! \Gamma(\lambda+k+l_N)}{\Gamma(k+l_N+\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda+l_N+\frac{1}{2})} \\
&\left(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_N}{2} \right)^k \left(\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_N}{2} \right)^\lambda P_{l_1}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_0) P_{l_N}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_N) \\
&\int_0^\pi d\theta_1 \left(\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right)^k \left(\cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right)^\lambda P_{l_1}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_1) P_{l_2}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_1) \dots \\
&\dots \int_0^\pi d\theta_N \left(\sin^2 \frac{\theta_{N-1}}{2} \right)^k \left(\cos^2 \frac{\theta_{N-1}}{2} \right)^\lambda P_{l_N}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_{N-1}) P_{l_{N-1}}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_{N-1}).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Nous envisageons, à présent, l'intégration sur les θ_j en utilisant la relation d'orthogonalité du polynôme de Jacobi [18]

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+\alpha)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx = \frac{\delta_{n,m}}{N_n^2}, \quad (3.52)$$

avec

$$N_l^{-2} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n! (\alpha + \beta + 1 + 2n)} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \beta + \alpha + 1)}. \quad (3.53)$$

Si nous considérons le cas $j = 1$, le résultat de l'intégration sur θ_1 via le changement de variable $x_1 = \cos \theta_1$ est

$$\int_0^\pi d\theta_1 \left(\sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right)^k \left(\cos^2 \frac{\theta_1}{2} \right)^\lambda P_{l_1}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_1) P_{l_2}^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_1) = 2^{-(\lambda+k)} \frac{\delta_{l_1, l_2}}{N_{l_1}^2}. \quad (3.54)$$

Après intégration sur la variable angulaire θ , il est clair que le propagateur devient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\theta', \theta'; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (2)^{1-N} \left(\frac{m}{2\pi i \varepsilon_j} \right)^{N/2} \left[\prod_{j=1}^N (4\pi) e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)i(\lambda+k)} \exp\left(\frac{im}{\varepsilon \hbar} - \frac{i\hbar}{8m} \varepsilon\right) \right] \\ &\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{Nl} (\lambda + k + 2l) \frac{l! \Gamma(\lambda + k + l)}{\Gamma(k + l + \frac{1}{2}) \Gamma(\lambda + l + \frac{1}{2})} [J_{k+\lambda+2l_1}(y)]^N \\ &\left(\sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta_N}{2} \right)^k \left(\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_N}{2} \right)^\lambda P_l^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_0) P_l^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(\cos \theta_N). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Grâce à la relation

$$J_\nu\left(e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)iz}\right) = (2\pi z e^{-i\pi\nu})^{-1/2} \exp\left[z - \frac{1}{2z} \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\right], \quad (3.56)$$

avec $e^{i\pi l} = (-1)^l$ pour l entier, le propagateur associé au potentiel de Pöschl-Teller peut être

finalement ramené à la forme appropriée suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(x'', x'; T) &= \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left(-i \frac{\hbar}{2m} (2l + k + \lambda)^2 T\right) (\lambda + k + 2l) \\
&\quad \frac{2 \left(l!\right) \Gamma(\lambda + k + l)}{\Gamma\left(k + l + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + l + \frac{1}{2}\right)} (\sin x_0 \sin x_N)^k (\cos x_0 \cos x_N)^\lambda \\
&\quad P_l^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(1 - 2 \sin^2 x_0) P_l^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(1 - 2 \sin^2 x_N). \tag{3.57}
\end{aligned}$$

3.2.4 Spectre d'énergie et fonction d'onde des états liés

Le spectre discret de l'énergie s'évalue de la même manière que dans le premier cas ($\lambda = k$). Nous obtenons dans ce cas

$$E_l = \frac{\hbar^2}{2m} (2l + k + \lambda)^2. \tag{3.58}$$

Les fonctions d'onde normalisées correspondantes à ces états liés sont directement déduites et valent :

$$\begin{aligned}
\Psi_l(x) &= \left[(2) (\lambda + k + 2l) \frac{l! \Gamma(\lambda + k + l)}{\Gamma\left(k + l + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\lambda + l + \frac{1}{2}\right)} \right]^{1/2} \\
&\quad (\sin x)^k (\cos x)^\lambda P_l^{(k-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(1 - 2 \sin^2 x). \tag{3.59}
\end{aligned}$$

3.3 Traitement du potentiel de Pöschl-Teller dans l'espace des phases

Dans cette partie, nous reconstruisons le propagateur associé au potentiel de Pöschl-Teller par une représentation intégrale basée sur l'action hamiltonienne et définie sur des chemins dans l'espace des phases. Le potentiel en question est analysé sous l'angle d'une approche qui utilise la fonctionnelle delta de Dirac. Cette approche s'inspire des critiques formulées par Katz [19] Concernant les méthodes de calcul jugées trop laborieuses et contenant trop de détails inutiles. Cette méthode a été par la suite développée par un des auteurs [20] et reformulée par Arlem Anderson et Scott B. Anderson [17].

Le problème du potentiel de Pöschl-Teller (3.1) a été reconverti dans les deux cas ($k = \lambda$, λ et k sont quelconques) à celui du potentiel de Morse. Le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés ont été alors obtenus exactement.

3.3.1 Présentation de la technique de la fonctionnelle delta de Dirac

L'approche de la fonctionnelle delta de Dirac est un outil puissant pour l'évaluation des intégrales de chemin pour des systèmes quantiques possédant un hamiltonien linéaire par rapport à la variable $q(t)$ qui caractérise la position de la particule au temps t , car elle met en œuvre des techniques de calcul simples. Pour les hamiltoniens plus généraux, la stratégie générale pour appliquer cette approche est de faire des transformations canoniques et autres qui permettent de donner à l'action une forme linéaire. A ce niveau, l'intégrale sur les variables de la position est directe et fait apparaître une fonction delta dont l'argument est l'équation différentielle du mouvement de la variable d'impulsion $p(t)$. Par conséquent, l'intégrale sur les moments conjugués est facile à manipuler et se réduit à une intégrale ordinaire sur une variable impulsion p_0 qui représente la condition initiale de la solution de l'équation du mouvement correspondant à un temps initial convenablement choisi. Notons que l'intégration sur les moments conjugués donne naissance à un facteur appelé facteur de composition dépendant des temps initial et final et de la dernière variable d'intégration p_0 (voir appendice A).

3.3.2 Calcul du propagateur pour $k = \lambda$

Le propagateur associé à une particule de masse ($m \equiv 1$) en mouvement dans un espace unidimensionnel et soumise au potentiel de Pöschl-Teller pour $k = \lambda$ s'écrit dans l'espace des phases

$$\mathbf{K}(b, T; a, 0) = \int \left[\frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left[\left(i \int^T p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} k(k-1) \sin^{-2} 2q \right) dt \right], \quad (3.60)$$

et explicitement sous forme discrète

$$\begin{aligned} K(b, T; a, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n \prod_{n=1}^{N-1} dq_n (2\pi)^{-N} \\ &\exp \left\{ i \sum_{n=0}^{N-1} \left[p_n (q_{n+1} - q_n) - \frac{1}{2} p_n^2 \varepsilon - \frac{1}{2} k(k-1) \sin^{-2} 2q_n \varepsilon \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

où $\varepsilon = \frac{T}{N}$, $q_0 = q(t_i = 0) = a$, $q_N = q(t_f = T) = b$.

Suivant l'approche de la fonctionnelle delta de Dirac, commençons par linéariser l'Hamiltonien en $q(t)$. Pour cela effectuons, en premier lieu, la transformation canonique définie par

$$Q = \cos 2q.$$

Il s'en suit que la mesure dq se transforme en $f'(Q) dQ$. En tenant compte du changement $(q, p) \rightarrow (Q, P)$

$$q = \frac{1}{2} \arccos Q = f(Q), \quad p = \frac{P}{f'(Q)}, \quad g^{\frac{1}{2}}(Q) = f'(Q) = -\frac{1}{2\sqrt{1-Q^2}},$$

où P est le moment conjugué à \dot{Q} .

Un préfacteur métrique apparaît dans la nouvelle expression de l'intégrale de chemin relative aux nouvelles variables (Q, P) .

$$[g(B) g(A)]^{\frac{-1}{4}} = 2 [(1 - B^2) (1 - A^2)]^{\frac{-1}{4}},$$

où $B = \cos 2b$ et $A = \cos 2a$.

Ce changement conduit aussi à un potentiel effectif V_e donné par

$$\begin{aligned} V_e &= V_e(Q) = \frac{9g'^2}{32g^3} - \frac{g''}{8g^2} \\ &= \frac{1}{2(1-Q^2)} - \frac{3}{2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En rassemblant ces résultats, le propagateur (3.60) s'écrit, en fonction des nouvelles variables (P, Q) , comme suite :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= (g(A)g(B))^{-\frac{1}{4}} \int \left[\frac{dP dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int^T \left(P\dot{Q} - \frac{1}{2} \left(\frac{P^2}{g} \right) - V(Q) - V_e(Q) \right) dt \right] \\ &= (g(A)g(B))^{-\frac{1}{4}} \int \left[\frac{dP dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int^T \left(P\dot{Q} - 2P^2(1-Q^2) - \frac{2(k-\frac{1}{2})^2}{(1-Q^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Le terme $\frac{1}{(1-Q^2)}$ peut être éliminé en changeant le moment $P \rightarrow \bar{P}$ de sorte que $P = \bar{P} - i\frac{k_e}{(1-Q^2)}$. Le propagateur se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= (g(A)g(B))^{-\frac{1}{4}} \int \left[\frac{d\bar{P} dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int^T \left(\bar{P}\dot{Q} - i\frac{k_e}{(1-Q^2)}\dot{Q} - 2\bar{P}^2(1-Q^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4ik_e\bar{P} + \frac{3}{2} \right) dt \right], \end{aligned} \quad (3.64)$$

où $k_e = \left(k - \frac{1}{2} \right)$,

L'intégrale du second terme se calcule aisément :

$$\int_0^T \frac{k_e \dot{Q}}{(1-Q^2)} dt = k_e (\operatorname{arcth} B - \operatorname{arcth} A).$$

Ce qui donne pour le propagateur (3.64)

$$\mathbf{K}(B, T; A, 0) = C \int \left[\frac{d\bar{P} dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int^T \left(\bar{P}\dot{Q} - 2\bar{P}^2 (1 - Q^2) + 4ik_e \bar{P} + \frac{3}{2} \right) dt \right]. \quad (3.65)$$

où $C = (g(A)g(B))^{-\frac{1}{4}} \exp [k_e (\text{arcth } B - \text{arcth } A)]$.

A ce niveau, nous remarquons que l'action n'est pas encore linéaire en $Q(t)$. Nous allons pour cela insérer, en deuxième lieu, l'identité suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \int [dx]_0^{\bar{b}} \exp \left(-i \int_0^T \frac{\dot{x}^2}{2} dt \right) = 1. \quad (3.66)$$

Cette identité représente l'intégrale sur toutes les positions possibles du point final du propagateur d'une particule libre.

Ensuite, appliquons le changement $\dot{x} \rightarrow \dot{x} + 2\bar{P}Q$ qui conduit à un potentiel effectif $\tilde{V}_e = -\frac{3}{2}$ et reportons le résultat dans (3.65). Le propagateur devient alors

$$\mathbf{K}(B, T; A, 0) = C \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \int [dx]_0^{\bar{b}} \int \left[\frac{d\bar{P} dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int^T \left(-\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \bar{P}\dot{Q} - 2\bar{P}^2 - 2\bar{P}Q\dot{x} + 4ik_e \bar{P} \right) dt \right]. \quad (3.67)$$

Intégrons par partie le 2^{ème} terme de l'action

$$\int_0^T \bar{P}\dot{Q} dt = \bar{P}(T)B - \bar{P}(0)A - \int_0^T \dot{\bar{P}}Q dt,$$

ainsi, l'expression (3.67) prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(B, T; A, 0) &= C \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \int [dx]_0^{\bar{b}} \int \left[\frac{d\bar{P}}{2\pi} \right] \exp [i (\bar{P}(T) B - \bar{P}(0) A)] \times \\
&\times \exp \left[i \int_0^T \left(-\frac{1}{2} \dot{x}^2 - 2\bar{P}^2 + 4ik_e \bar{P} \right) dt \right] \int [dQ] \\
&\times \exp \left[i \int_0^T \left(-\dot{\bar{P}} - 2\bar{P}\dot{x} \right) Q dt \right]. \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Maintenant, il est évident que l'intégration sur les $Q(t)$ s'effectue directement et produit une fonction $\delta(\dot{\bar{P}} + 2\bar{P}\dot{x})$ de Dirac. Sa substitution dans l'équation (3.68) donne pour le propagateur l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \int [dx]_0^{\bar{b}} \int [d\bar{P}] \exp [i (\bar{P}(T) B - \bar{P}(0) A)] \\
&\exp \left[i \int_0^T \left(-\frac{1}{2} \dot{x}^2 - 2\bar{P}^2 + 4ik_e \bar{P} \right) dt \right] \delta(\dot{\bar{P}} + 2\bar{P}\dot{x}). \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Suivant l'approche exposée explicitement dans l'appendice A , l'intégrale fonctionnelle sur les moments $\bar{P}(t)$ se réduit à une intégrale ordinaire sur la variable \bar{P}_0 . Il suffit de remplacer la variable $\bar{P}(t)$ par la solution de l'équation différentielle du mouvement $\dot{\bar{P}} + 2\bar{P}\dot{x} = 0$ dont la solution est

$$\bar{P}(t) = P_0 \exp(-2x), \tag{3.70}$$

pour la condition initiale $\bar{P}(t=0) = \bar{P}_0 \equiv P_0$ avec $x(t=0) = 0$, et $x(T) = \bar{b}$.

Dans ces conditions, le facteur de composition est donné par

$$\left[\frac{d\bar{P}(T)}{dP_0} \frac{d\bar{P}(0)}{dP_0} \right]^{\frac{1}{2}} = \exp(-\bar{b}). \tag{3.71}$$

Il découle de ce résultat que le propagateur (3.69) peut être alors écrit sous la forme :

$$\mathbf{K}(B, T; A, 0) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp(-\bar{b}) \int_{-\infty}^{+\infty} dP_0 \exp \left[iP_0 \left(Be^{-2\bar{b}} - A \right) \right] \int [dx]_0^{\bar{b}} \exp \left[-i \int^T \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + 2P_0^2 e^{-4x} - 4ik_e P_0 e^{-2x} \right) dt \right]. \quad (3.72)$$

Nous voyons facilement que l'intégrale fonctionnelle sur la variable $x(t)$ s'identifie au complexe conjugué du propagateur décrivant l'évolution d'une particule ($m = 1$) sous l'action d'un potentiel de Morse inversé (inverted Morse potential) à une dimension ; $V(x) = V_0 (e^{-4x} - 2\lambda e^{-2x})$, où $V_0 = -2P_0^2$ et $2\lambda V_0 = 4ik_e P_0$.

Il est bien connu que le potentiel de Morse inversé (inverted Morse potential) ne possède pas d'états liés en dessous du demi-plan supérieur. Cette difficulté peut être contournée en modifiant le contour d'intégration sur P_0 par rotation ; ainsi le contour modifié est formé d'un quart d'un cercle décrit dans le sens direct, centré en 0 et compris entre l'axe réel positif et l'axe imaginaire positif. Il n'existe pas de pôles P_0 situés à l'intérieur du contour fermé et l'intégrale sur l'arc tend vers zéro quand le rayon de cet arc tend vers l'infini. De ce fait, la rotation opérée sur le contour d'intégration change le potentiel de Morse inversé au potentiel de Morse standard. L'intégration sur les valeurs négatives P_0 est écartée car sa contribution est nulle (il n'existe pas d'états liés pour $P_0 < 0$).

Autrement dit

$$\oint_C f(P_0) dP_0 = \int_0^R f(P_0) dP_0 + \int_C f(P_0) dP_0 + \int_{iR}^0 f(P_0) dP_0. \quad (3.73)$$

Comme aucun pôle P_0 n'est inclu dans C , l'intégration sur le contour fermé est nulle, de plus l'intégration sur l'arc est nulle quand l'arc tend vers ∞ .

$$\int_0^\infty f(P_0) dP_0 = - \int_{i\infty}^0 f(P_0) dP_0 = \int_0^\infty f(iP_0) idP_0.$$

Le propagateur (3.72) devient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp(-\bar{b}) \int_0^{+\infty} idP_0 \exp\left[-P_0 \left(Be^{-2\bar{b}} - A\right)\right] \\ &\quad \int [dx]_0^{\bar{b}} \exp\left[-i \int^T \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - 2P_0^2 e^{-4x} + 4k_e P_0 e^{-2x}\right) dt\right], \end{aligned} \quad (3.74)$$

avec $V_0 = 2P_0^2$ et $\lambda = k_e P_0^{-1}$,

ou encore

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp(-\bar{b}) \int_0^{+\infty} idP_0 \exp\left[-P_0 \left(Be^{-2\bar{b}} - A\right)\right] \\ &\quad \mathbf{K}_M^*(\bar{b}, T; 0, 0), \end{aligned} \quad (3.75)$$

représente le complexe conjugué du propagateur associé au potentiel de Morse standard. Le calcul de ce propagateur a été donné par Anderson [17] :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_M^*(\bar{b}, T; 0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iET} \int_0^{+\infty} \frac{idS}{\sin(S)} e^{-2ik_e S} \exp\left[-iP_0 \cot(S) \left(e^{-2\bar{b}} + 1\right)\right] \\ &\quad I_{2\alpha}\left(-\frac{i2P_0 e^{-\bar{b}}}{\sin(S)}\right), \end{aligned} \quad (3.76)$$

où $2\alpha = (-8E\gamma^{-2})^{1/2} = (-2E)^{1/2}$, ($\gamma = 2$) avec $\text{Re}(2\alpha) > -1$, cela est satisfait pour $-\pi \leq \arg(E) \leq 0$ si $0 \leq \arg(\gamma) \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \arg(\gamma) \leq \frac{3}{2}\pi \pmod{2\pi}$.

L'étape suivante dans le calcul du propagateur $\mathbf{K}_M^*(\bar{b}, T; 0, 0)$ consiste à faire les changements suivants

$$y = -2P_0 e^{-2\bar{b}}, \quad x = -2P_0, \quad z = e^{-i2S},$$

et

$$\sin(S) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}(1-z)}{i2}, \quad \cos(S) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}(1+z)}{2},$$

nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_M^* (\bar{b}, T; 0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{iET} \int_0^{+\infty} -2dS e^{-i(2k_e+1)S} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{(1-z)} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(1+z)}{(1-z)} (x+y) \right] I_{2\alpha} \left(\frac{-2\sqrt{xyz}}{(1-z)} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

À l'aide de la formule de Hille-Hardy [10]

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1-z)} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(1+z)}{(1-z)} (x+y) \right] I_\gamma \left(\frac{2\sqrt{xyz}}{(1-z)} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n n! \frac{\exp \left[-\frac{1}{2} (x+y) \right]}{\Gamma(\gamma+n+1)} (xyz)^{\frac{\gamma}{2}} L_n^\gamma(x) L_n^\gamma(y), \end{aligned} \quad (3.78)$$

valable pour $|z| < 1$, où $L_n^\gamma(x)$ sont les polynômes de Laguerre, le propagateur $\mathbf{K}_M^* (\bar{b}, T; 0, 0)$ peut s'écrire maintenant de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_M^* (\bar{b}, T; 0, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-dE}{2\pi} e^{iET} \left\{ 2 \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{\exp \left[P_0 (e^{-2\bar{b}} + 1) \right]}{\Gamma(2\alpha+n+1)} \right. \\ &\quad \left. (-2P_0 e^{-2\bar{b}})^\alpha (-2P_0)^\alpha L_n^{2\alpha} (-2P_0 e^{-2\bar{b}}) L_n^{2\alpha} (-2P_0) D(E) \right\}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

où les variables x , y et z ont été séparées.

avec

$$D(E) = \int_0^{+\infty} dS e^{-i(2n+2\alpha+2k_e+1)S}. \quad (3.80)$$

Substituons le résultat obtenu dans l'expression (3.75), le propagateur associé au potentiel de Pöschl-Teller s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{iET} \left\{ \frac{C}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp(-\bar{b}) \int_0^{+\infty} dP_0 \exp \left[-P_0 (B e^{-2\bar{b}} - A) \right] \right. \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{\exp \left[P_0 (e^{-2\bar{b}} + 1) \right]}{\Gamma(2\alpha+n+1)} (-2P_0 e^{-2\bar{b}})^\alpha (-2P_0)^\alpha \times \\ &\quad \left. \times L_n^{2\alpha} (-2P_0 e^{-2\bar{b}}) L_n^{2\alpha} (-2P_0) D(E) \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Pour ramener l'intégrale sur la variable P_0 à une forme connue, nous suivons la même démarche utilisée pour changer $\int_{-\infty}^{+\infty} dP_0$. Dans ce cas, nous changeons $\int_0^{+\infty} dP_0$ en choisissant comme contour d'intégration le demi cercle dans le demi plan supérieur. Il s'ensuit que

$$\int_0^{\infty} f(P_0) dP_0 = - \int_0^{+\infty} f(-P_0) dP_0 ,$$

et en changeant E par $-E$, le propagateur (3.81) prend la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{-iET} \left\{ -\frac{C}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp(-\bar{b}) \int_0^{+\infty} dP_0 \exp \left[P_0 \left(B e^{-2\bar{b}} - A \right) \right] \times \right. \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{\exp \left[-P_0 \left(e^{-2\bar{b}} + 1 \right) \right]}{\Gamma(2\alpha' + n + 1)} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}} \right)^{\alpha'} (2P_0)^{\alpha'} \times \\ &\left. \times L_n^{2\alpha'} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}} \right) L_n^{2\alpha'} (2P_0) D(-E) \right\}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

avec $2\alpha' = (2E)^{\frac{1}{2}}$.

3.3.3 Fonction de Green :

La forme de l'équation (3.82) indique que le propagateur admet manifestement l'écriture suivante

$$\mathbf{K}(B, T; A, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{-iET} G_{PT}(B, A, E), \quad (3.83)$$

où $G_{PT}(B, A, E)$ est la fonction de Green associée au potentiel de Pöschl-Teller ; transformée de Fourier inverse du propagateur

$$\begin{aligned} G_{PT}(B, A, E) &= \frac{-C}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp(-\bar{b}) \int_0^{\infty} dP_0 \exp \left[P_0 \left(B e^{-2\bar{b}} - A \right) \right] \sum_{n=0}^{\infty} n! \\ &\frac{\exp \left[-P_0 \left(e^{-2\bar{b}} + 1 \right) \right]}{\Gamma(2\alpha' + n + 1)} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}} \right)^{\alpha'} (2P_0)^{\alpha'} \\ &L_n^{2\alpha'} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}} \right) L_n^{2\alpha'} (2P_0) D(-E), \end{aligned} \quad (3.84)$$

L'intégration sur la variable \bar{b} est possible en faisant le changement de variable $(z = 2P_0 e^{-2\bar{b}})$,

et en utilisant la formule suivante [18]

$$\int_0^{+\infty} e^{-St} t^\beta L_n^\delta(t) dt = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\delta+n+1)}{n! \Gamma(\delta+1)} S^{-\beta-1} F\left(-n, \beta+1, \delta+1; \frac{1}{S}\right), \quad (3.85)$$

valable pour $[\operatorname{Re} \beta) - 1, \operatorname{Re} S)0]$.

Un calcul immédiat donne le résultat suivant

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp(-\bar{b}) \exp\left[P_0 B e^{-2\bar{b}}\right] \exp\left[-P_0 e^{-2\bar{b}}\right] \left(2P_0 e^{-2\bar{b}}\right)^{\alpha'} L_n^{2\alpha'}\left(2P_0 e^{-2\bar{b}}\right) \\ &= \frac{1}{(8P_0)^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\alpha' + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\alpha' + n + 1)}{n! \Gamma(2\alpha' + 1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2}\right)^{-(\alpha' + \frac{1}{2})} \\ & F\left(-n, \alpha' + \frac{1}{2}, 2\alpha' + 1; \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2}\right)^{-1}\right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Maintenant, l'intégration sur P_0 peut être faite de la même manière que l'intégration sur \bar{b} en changeant $2P_0 \rightarrow y$ et en appliquant la relation (3.85) de sorte que

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} dP_0 \exp[-P_0 A] \exp[-P_0] (2P_0)^{\alpha'} \frac{1}{(8P_0)^{\frac{1}{2}}} L_n^{2\alpha'}(2P_0) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\alpha' + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2\alpha' + n + 1)}{n! \Gamma(2\alpha' + 1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2}\right)^{-(\alpha' + \frac{1}{2})} \\ & F\left(-n, \alpha' + \frac{1}{2}, 2\alpha' + 1; \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2}\right)^{-1}\right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

En suite, en utilisant les deux propriétés concernant la fonction spéciale gamma et la fonction hypergéométrique successivement

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \quad (3.88)$$

$$F(\alpha, \beta, 2\beta; z) = \left(1 - \frac{z}{2}\right)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}; \left(\frac{z}{2-z}\right)^2\right), \quad (3.89)$$

Nous aboutissons alors à l'expression de la fonction de Green exprimée en fonction des anciennes

variables a et b :

$$\begin{aligned}
G_{PT}(b, a, E) &= \frac{C}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \Gamma(2\alpha' + n + 1)}{n! 2^{4\alpha' + 2n} \Gamma^2(\alpha' + 1)} [\cos 2a \cos 2b]^n \\
&\quad [\cos^2 a \sin^2 b]^{-(\alpha' + n + \frac{1}{2})} F\left(\frac{-n}{2}, \frac{-n}{2} + \frac{1}{2}, \alpha' + 1; \frac{1}{\cos^2 2a}\right) \\
&\quad F\left(\frac{-n}{2}, \frac{-n}{2} + \frac{1}{2}, \alpha' + 1; \frac{1}{\cos^2 2b}\right) D(-E). \tag{3.90}
\end{aligned}$$

3.3.4 Spectre d'énergies et fonctions d'onde des états liés

Afin d'obtenir le spectre d'énergie et les fonctions d'onde, considérons la fonction de Green donnée par l'expression (3.90). L'intégration sur la variable S génère des pôles dans le plan de l'énergie

$$D(-E) = \int_0^{+\infty} dS e^{-i(2n+2\alpha'+2k_e+1)S} = \frac{1}{-i(2n+2\alpha'+2k_e+1)}, \tag{3.91}$$

le spectre discret de l'énergie est alors donné par l'équation $2n + 2\alpha' + 2k_e + 1 = 0$. Il se trouve en fait

$$E_n = 2(n+k)^2. \tag{3.92}$$

Les fonctions d'onde se déduisent directement à partir des résidus correspondants aux pôles c'est -à -dire

$$\Psi_n(b) \Psi_n^*(a) = \lim_{E \rightarrow E_n} \frac{E - E_n}{i} G_{PT}(b, a, E). \tag{3.93}$$

Après un simple calcul, nous aurons finalement

$$\begin{aligned}
\Psi_n(b) \Psi_n^*(a) &= \frac{(-1)^n 2^{2(n+2k)-1} \Gamma(-n-2k+1)}{n! \Gamma^2(-n-k+1)} \exp[k_e(\operatorname{arcth} B - \operatorname{arcth} A)] [\sin 2a \sin 2b]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad [\cos 2a \cos 2b]^n [\cos^2 a \sin^2 b]^{(k-\frac{1}{2})} F\left(\frac{-n}{2}, \frac{-n}{2} + \frac{1}{2}, -n-k+1; \frac{1}{\cos^2 2a}\right) \\
&\quad F\left(\frac{-n}{2}, \frac{-n}{2} + \frac{1}{2}, -n-k+1; \frac{1}{\cos^2 2b}\right). \tag{3.94}
\end{aligned}$$

3.3.5 Propagateur pour k et λ quelconques

Considérons dans ce paragraphe le propagateur correspondant au potentiel de Pöschl-Teller pour le cas λ et k quelconques,

$$\mathbf{K}(b, T; a, 0) = \int \left[\frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left[\left(i \int_0^T p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} [k(k-1) \sin^{-2} q + \lambda(\lambda-1) \cos^{-2} q] \right) dt \right], \quad (3.95)$$

ou encore en utilisant quelques relations des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(b, T; a, 0) = & \int \left[\frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left[\left(i \int_0^T p \dot{q} - \frac{1}{2} p^2 - k_e^2 (1 - \cos 2q)^{-1} - \lambda_e^2 (1 + \cos 2q)^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (1 - \cos^2 2q) \right) dt \right], \end{aligned} \quad (3.96)$$

avec $\varepsilon = \frac{T}{N}$, $q_0 = q(t_0 = 0) = a$, $q_N = q(t_N = T) = b$, $k_e = (k - \frac{1}{2})$, $\lambda_e = (\lambda - \frac{1}{2})$.

Le calcul de ce propagateur est basé de nouveau sur la procédure décrite dans l'appendice A. De ce fait, nous commençons par linéariser l'Hamiltonien par rapport à la variable q . Pour cela, nous appliquons la même transformation canonique $Q = \cos 2q$, utilisée dans le cas précédent où $k = \lambda$.

Comme il s'agit de la même transformation canonique; la nouvelle mesure, le préfacteur métrique est le potentiel effectif (V_e) gardent les mêmes expressions que celles trouvées dans le cas où $k = \lambda$.

Il s'ensuit alors que le propagateur peut être mis, en fonction des nouvelles variables (P, Q) , sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= (g(A)g(B))^{-\frac{1}{4}} \int \left[\frac{dP dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int_0^T \left(P \dot{Q} - \frac{1}{2} \left(\frac{P^2}{g} \right) - V(Q) - V_e(Q) \right) dt \right] \\ &= (g(A)g(B))^{-\frac{1}{4}} \int \left[\frac{dP dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int_0^T \left(P \dot{Q} - 2P^2 (1 - Q^2) - \frac{k_e^2}{(1 - Q)} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\lambda_e^2}{(1 + Q)} + \frac{3}{2} \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

où $g^{\frac{1}{2}}(Q) = -\frac{1}{2\sqrt{1-Q^2}}$, $[g(B)g(A)]^{\frac{-1}{4}} = 2[(1-B^2)(1-A^2)]^{\frac{-1}{4}}$ et $B = \cos 2b$, $A = \cos 2a$.

Nous remarquons que l'action n'est pas encore linéaire en Q à cause de la présence des termes $\frac{1}{(1-Q)}$ et $\frac{1}{(1+Q)}$. Le procédé direct pour les faire disparaître est de changer le moment P en \bar{P} via la relation $P = \bar{P} - i\frac{k_e}{2(1-Q)} - i\frac{\lambda_e}{2(1+Q)}$. Par suite le propagateur devient

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) = & (g(A)g(B))^{\frac{-1}{4}} \int \left[\frac{d\bar{P} dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int_0^T \left(\bar{P}\dot{Q} - i\frac{k_e}{2(1-Q)}\dot{Q} - i\frac{\lambda_e}{2(1+Q)}\dot{Q} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\bar{P}^2(1-Q^2) + 2i(k_e - \lambda_e)\bar{P}Q + 2i(k_e + \lambda_e)\bar{P} + \lambda_e k_e - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\lambda_e^2}{2} - \frac{k_e^2}{2} + \frac{3}{2} \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Il est commode d'intégrer immédiatement le deuxième et le troisième termes par rapport au temps

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{k_e \dot{Q}}{2(1-Q)} dt &= \frac{-k_e}{2} \ln \left(\frac{1-B}{1-A} \right), \\ \int_0^T \frac{\lambda_e \dot{Q}}{2(1+Q)} dt &= \frac{\lambda_e}{2} \ln \left(\frac{1+B}{1+A} \right), \end{aligned}$$

Ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) = & C \int \left[\frac{d\bar{P} dQ}{2\pi} \right] \exp \left[i \int_0^T \left(\bar{P}\dot{Q} - 2\bar{P}^2(1-Q^2) + 2i(k_e - \lambda_e)\bar{P}Q \right. \right. \\ & \left. \left. + 2i(k_e + \lambda_e)\bar{P} + \lambda_e k_e - \frac{\lambda_e^2}{2} - \frac{k_e^2}{2} + \frac{3}{2} \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

où nous avons posé $C = (g(A)g(B))^{\frac{-1}{4}} \left(\frac{1-B}{1-A} \right)^{-k_e/2} \left(\frac{1+B}{1+A} \right)^{\lambda_e/2}$ pour alléger l'écriture.

Pour rendre l'action complètement linéaire en Q , nous pouvons insérer l'identité (3.66) après avoir changer \dot{x} en $\dot{x} + 2\bar{P}Q + i(k_e - \lambda_e)$ ce qui donne un potentiel effectif $\tilde{V}_e = -\frac{3}{2}$.

En substituant cette identité, le propagateur aura pour forme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= C \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \int [dx]_0^{\bar{b}} \int \left[\frac{d\bar{P}}{2\pi} dQ \right] \exp \left[i \int_0^T \left(-\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \bar{P} \dot{Q} - 2\bar{P}^2 - 2\bar{P} Q \dot{x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2i(k_e + \lambda_e) \bar{P} - i(k_e - \lambda_e) \dot{x} \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Les résultats de l'intégration par partie du 2ème terme et de l'intégration du dernier terme :

$$\begin{aligned} \int_0^T \bar{P} \dot{Q} dt &= \bar{P}(T) B - \bar{P}(0) A - \int_0^T \dot{\bar{P}} Q dt, \\ \int_0^T i(k_e - \lambda_e) \dot{x} dt &= i(k_e - \lambda_e) \bar{b}, \end{aligned}$$

nous permettent d'écrire le propagateur comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= C \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp [(k_e - \lambda_e) \bar{b}] \int [dx]_0^{\bar{b}} \int \left[\frac{d\bar{P}}{2\pi} \right] \exp [i(\bar{P}(T) B - \bar{P}(0) A)] \\ &\quad \exp \left[i \int_0^T \left(-\frac{1}{2} \dot{x}^2 - 2\bar{P}^2 + 2i(k_e + \lambda_e) \bar{P} \right) dt \right] \\ &\quad \int [dQ] \exp \left[i \int_0^T \left(-\dot{\bar{P}} - 2\bar{P} \dot{x} \right) Q dt \right]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

A ce niveau, l'intégration sur les variables Q se fait sans difficulté et donne une fonction delta de Dirac $\delta \left(\dot{\bar{P}} + 2\bar{P} \dot{x} \right)$ de sorte que le propagateur (3.101) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp [(k_e - \lambda_e) \bar{b}] \int [dx]_0^{\bar{b}} \int [d\bar{P}] \exp [i(\bar{P}(T) B - \bar{P}(0) A)] \\ &\quad \exp \left[i \int_0^T \left(-\frac{1}{2} \dot{x}^2 - 2\bar{P}^2 + 2i(k_e + \lambda_e) \bar{P} \right) dt \right] \delta \left(\dot{\bar{P}} + 2\bar{P} \dot{x} \right). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Suivant la technique d'Anderson, l'intégration sur les moments \bar{P} se fait en remplaçant la dépendance en \bar{P} par la solution de l'équation différentielle du mouvement $\dot{\bar{P}} + 2\bar{P} \dot{x} = 0$ qui

admet comme solution

$$\bar{P}(t) = P_0 \exp(-2x), \quad (3.103)$$

avec la condition initiale appropriée $P_0 \equiv \bar{P}(t=0)$ et le facteur de composition suivant

$$\left[\frac{d\bar{P}(T)}{dP_0} \frac{d\bar{P}(0)}{dP_0} \right]^{\frac{1}{2}} = \exp(-\bar{b}). \quad (3.104)$$

Par substitution, le propagateur apparaît maintenant sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp[(k_e - \lambda_e - 1)\bar{b}] \int_{-\infty}^{+\infty} dP_0 \exp\left[iP_0(Be^{-2\bar{b}} - A)\right] \\ &\quad \int [dx]_0^{\bar{b}} \exp\left[-i \int_0^T \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + 2P_0^2 e^{-4x} - 2i(k_e + \lambda_e)P_0 e^{-2x}\right) dt\right]. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Il est clair que grâce à l'identité (3.66), le calcul du propagateur relatif au potentiel (3.1) a été ramené au calcul du potentiel relatif à un problème à une dimension qui peut être identifié avec un puits inversé de Morse dont l'expression est $V(x) = V_0(e^{-4x} - 2\eta e^{-2x})$, où $V_0 = -2P_0^2$ et $2\eta V_0 = 2i(k_e + \lambda_e)P_0$. Un calcul identique à celui du cas précédent (Pöschl-Teller pour $k = \lambda$) nous conduit à l'expression suivante du propagateur

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(B, T; A, 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{-iET} \left\{ -\frac{C}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp[(k_e - \lambda_e - 1)\bar{b}] \int_0^{+\infty} dP_0 \exp\left[P_0(Be^{-2\bar{b}} - A)\right] \right. \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{\exp\left[-P_0(e^{-2\bar{b}} + 1)\right]}{\Gamma(2\alpha' + n + 1)} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}}\right)^{\alpha'} (2P_0)^{\alpha'} \\ &\quad \left. L_n^{2\alpha'}(2P_0 e^{-2\bar{b}}) L_n^{2\alpha'}(2P_0) D(-E) \right\}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

avec $\text{Re}(2\alpha) > -1$, $2\alpha = (-2E)^{\frac{1}{2}}$, $2\alpha' = (2E)^{\frac{1}{2}}$ et

$$D(-E) = \int_0^{+\infty} dS e^{-i(2n+2\alpha'+k_e+\lambda_e+1)S}. \quad (3.107)$$

3.3.6 Fonction de Green :

Selon l'expression (3.106), le propagateur s'écrit sous la forme suivante

$$\mathbf{K}(B, T; A, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2i\pi} e^{-iET} G_{PT}(B, A, E), \quad (3.108)$$

où $G_{PT}(B, A, E)$ est la fonction de Green, transformée de Fourier du propagateur associé au potentiel de Pöschl-Teller

$$\begin{aligned} G_{PT}(B, A, E) &= \frac{-C}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp[(k_e - \lambda_e - 1)\bar{b}] \int_0^{\infty} dP_0 \exp\left[P_0 \left(B e^{-2\bar{b}} - A \right)\right] \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{\exp\left[-P_0 \left(e^{-2\bar{b}} + 1 \right)\right]}{\Gamma(2\alpha' + n + 1)} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}}\right)^{\alpha'} (2P_0)^{\alpha'} \\ &\quad L_n^{2\alpha'} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}}\right) L_n^{2\alpha'} (2P_0) D(-E). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Considérons maintenant les intégrations sur les variables \bar{b} et P_0 . Là aussi, le même procédé de calcul utilisé dans le cas précédent ($k = \lambda$) suffit pour trouver les résultats suivants :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{b} \exp[(k_e - \lambda_e - 1)\bar{b}] \exp\left[P_0 (B - 1) e^{-2\bar{b}}\right] \left(2P_0 e^{-2\bar{b}}\right)^{\alpha'} L_n^{2\alpha'} \left(2P_0 e^{-2\bar{b}}\right) \\ &= \frac{1}{2 (2P_0)^{\frac{1}{2}(\lambda_e - k_e + 1)}} \frac{\Gamma\left(\alpha' + \frac{1}{2}(\lambda_e - k_e + 1)\right) \Gamma(2\alpha' + n + 1)}{n! \Gamma(2\alpha' + 1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2}\right)^{-(\alpha' + \frac{1}{2}(\lambda_e - k_e + 1))} \\ &F\left(-n, \alpha' + \frac{1}{2}(\lambda_e - k_e + 1), 2\alpha' + 1; \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{2}\right)^{-1}\right), \end{aligned} \quad (3.110)$$

et

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} dP_0 \exp[-(A + 1)P_0] (2P_0)^{\alpha'} \frac{1}{2 (2P_0)^{\frac{1}{2}(\lambda_e - k_e + 1)}} L_n^{2\alpha'} (2P_0) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\alpha' + \frac{1}{2}(k_e - \lambda_e + 1)\right) \Gamma(2\alpha' + n + 1)}{n! \Gamma(2\alpha' + 1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2}\right)^{-(\alpha' + \frac{1}{2}(k_e - \lambda_e + 1))} \\ &F\left(-n, \alpha' + \frac{1}{2}(k_e - \lambda_e + 1), 2\alpha' + 1; \left(\frac{1}{2} + \frac{A}{2}\right)^{-1}\right). \end{aligned} \quad (3.111)$$

Et par voie de conséquence en portant les équations (3.110) et (3.111) dans l'équation (3.109), l'expression finale de la fonction de Green en fonction des anciennes variables est

$$\begin{aligned}
G_{PT}(b, a, E) &= \frac{-C}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\alpha' + n + 1)}{n! \Gamma^2(2\alpha' + 1)} \Gamma\left(\alpha' + \frac{1}{2}(k_e - \lambda_e + 1)\right) \Gamma\left(\alpha' + \frac{1}{2}(\lambda_e - k_e + 1)\right) \\
&\quad [\cos^2 a \sin^2 b]^{-(\alpha' + \frac{1}{2})} \left[\frac{\sin^2 b}{\cos^2 a} \right]^{(k_e - \lambda_e)} F\left(-n, \alpha' + \frac{1}{2}(\lambda_e - k_e + 1), 2\alpha' + 1; \frac{1}{\cos^2 b}\right) \\
&\quad F\left(-n, \alpha' + \frac{1}{2}(k_e - \lambda_e + 1), 2\alpha' + 1; \frac{1}{\cos^2 a}\right) D(-E). \tag{3.112}
\end{aligned}$$

3.3.7 Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés

Les pôles de la fonction de Green s'obtiennent à partir de l'intégration sur S

$$D(-E) = \int_0^{+\infty} dS e^{-i(2n+2\alpha'+k_e+\lambda_e+1)S} = \frac{1}{-i(2n+2\alpha'+k_e+\lambda_e+1)}, \tag{3.113}$$

le spectre discret de l'énergie pour le potentiel en question est alors donné par l'équation suivante

$$E_n = \frac{1}{2} (2n + k + \lambda)^2. \tag{3.114}$$

Les fonctions d'ondes s'obtiennent à partir de l'expression intégrée de la fonction de Green

$$\begin{aligned}
\Psi_n(b) \Psi_n^*(a) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(-n - \lambda - k + 1)}{n! \Gamma^2(-2n - \lambda - k + 1)} \Gamma\left(-n - \lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-n - k + \frac{1}{2}\right) [\cos a \sin b]^{2(n-1)} \\
&\quad [\sin^2 b \tan a]^k [\cos^2 a \cot b]^\lambda F\left(-n, -n - \lambda + \frac{1}{2}, -2n - \lambda - k + 1; \frac{1}{\cos^2 a}\right) \\
&\quad F\left(-n, -n - k + \frac{1}{2}, -2n - \lambda - k + 1; \frac{1}{\cos^2 b}\right). \tag{3.115}
\end{aligned}$$

3.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons calculé par les intégrales de chemin le propagateur relatif au potentiel de Pöschl-Teller pour $k = \lambda$ et k et λ quelconques dans deux espaces différents à savoir l'espace de configuration et l'espace des phases et avons obtenu le spectre d'énergie et les fonctions d'onde des états liés. Il convient de mentionner que le traitement de ce problème dans l'espace de configuration est exceptionnellement clair et direct du point de vue mathématique contrairement aux méthodes poursuivies par de nombreux auteurs. Nous avons montré que la construction du propagateur ne nécessite que la mise en œuvre de certaines relations mathématiques simples. En ce qui concerne l'étude de ce système physique dans l'espace des phases, nous avons adopté la démarche de la fonctionnelle delta de Dirac où la transformation canonique est à la base de la formulation de son intégrale de chemin.

Deuxième partie

**Etude de Systèmes Quantiques Non
Relativistes dans l'Espace Courbe**

Chapitre 4

Formulation de l'Intégrale de Chemin dans l'espace courbe

4.1 Introduction

La représentation intégrale de chemin de l'amplitude de transition pour une particule se déplaçant dans un espace courbe a présenté des défis inattendus depuis l'introduction des intégrales de chemin par Feynman. Beaucoup de problèmes de la physique théorique le rendent souhaitable pour la bonne modélisation des phénomènes physiques réels. La théorie générale existe grâce aux efforts de DeWitt [21], McLaughlin et Schulman [22], Mizrahi [23] et d'autres. Le résultat principal de leurs discussions est le suivant : nous devons soustraire du lagrangien original L une certaine correction quantique $\Delta V \sim \hbar^2$; $L_{eff} = L - \Delta V$ où L_{eff} est l'expression correcte du lagrangien utilisée pour construire les intégrales de chemin sur l'espace courbe. Malheureusement, les expressions de la correction ΔV dérivées par les auteurs cités ci-dessus ne conviennent pas apparemment. Cette confusion provient principalement des différentes définitions utilisées de l'intégrale de chemin ; par exemple, DeWitt préfère une formulation basée sur le pré-point, tandis que Mizrahi et Lee adoptent le point moyen. Pour remédier à ce problème, une prescription générale est imposée pour dériver l'intégrale de chemin et calculer la correction quantique ΔV [24].

Le plan de notre étude est le suivant : Dans le paragraphe suivant nous construisons en détails l'intégrale de chemin dans l'espace courbe où le propagateur a été formulé suivant deux

prescriptions à savoir la prescription dite " l'ordre de Weyl " et la prescription " forme produit ". Nous terminons le chapitre par une conclusion.

4.2 Intégrale de chemin dans un espace courbe général

La description quantique d'un système dynamique classique est en général compliquée. Les complications surgissent dans l'approche canonique standard comme dans l'approche de l'intégrale de chemin [7]. Dans l'approche canonique, l'ambiguïté est due au problème d'ordre des opérateurs qui ne commutent pas (le correspondant quantique d'une expression classique exige un ordre particulier des opérateurs). Concernant la difficulté relative à l'approche de l'intégrale de chemin, nous l'exposons dans les paragraphes qui suivent.

4.2.1 Quantification de l'Hamiltonien classique

Considérons un système dynamique décrit par un lagrangien général doté d'une métrique g_{ab} et un élément de ligne $ds^2 = g_{ab}dq^a dq^b$ de la forme

$$L_{cl} = \frac{m}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - V = \frac{m}{2} g_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b - V, \quad (4.1)$$

le potentiel V est en fonction des coordonnées q^a ($a = 1, 2, \dots, n$). La convention habituelle d'addition est prise en compte c'est-à-dire, l'indice répété implique une somme sur l'indice. Le lagrangien (4.1) décrit le mouvement d'une particule non relativiste dans un espace Riemannien homogène de métrique g_{ab} .

Nous commençons d'abord par écrire l'hamiltonien correspondant à l'équation (4.1). Les moments canoniques généralisés s'écrivent

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = g_{ab} \dot{q}^b, \quad (4.2)$$

et par conséquent, l'hamiltonien se met sous la forme

$$H = p_a \dot{q}^a - L = \frac{1}{2m} g^{ab} p_a p_b + V. \quad (4.3)$$

où (g^{ab}) est l'inverse de la matrice (g_{ab}) .

Avant de construire l'intégrale de chemin, nous présentons brièvement le procédé de quantification de l'hamiltonien classique (4.3). Dans la mécanique quantique, les coordonnées et les moments conjugués sont des opérateurs hermitiens notés par \hat{q} et \hat{p} respectivement. Dans la représentation de Schrödinger, nous introduisons les états propres $(|q, t\rangle)$ et $(|p, t\rangle)$ de ces opérateurs de sorte que

$$\hat{q}^i(t) |q, t\rangle = q^i |q, t\rangle, \quad \hat{p}_i(t) |p, t\rangle = p_i |p, t\rangle, \quad (4.4)$$

avec $q \equiv (q^1, \dots, q^n)$ et $p \equiv (p_1, \dots, p_n)$. Ces opérateurs satisfont les relations de commutations suivantes

$$[\hat{q}^a(t), \hat{q}^b(t)] = [\hat{p}_a(t), \hat{p}_b(t)] = 0, \quad [\hat{q}^a(t), \hat{p}_b(t)] = i\hbar \delta_b^a, \quad (4.5)$$

tandis que les états propres $(|q, t\rangle)$ constituent un ensemble orthonormé fermé c-à-d

$$\langle q'', t | q', t \rangle = g^{-1/2}(q') \delta(q'' - q'),$$

$$\int g^{1/2}(q) d^n q |q, t\rangle \langle q, t| = 1. \quad (4.6)$$

avec $g(q)$ est le déterminant du tenseur métrique et $\delta(q)$ est la fonction delta de Dirac à n dimensions et l'élément de volume est $g^{1/2}(q) d^1 q \dots d^n q$. Les vecteurs propres de l'opérateur moment dans la représentation des coordonnées ont la structure d'une onde plane c-à-d

$$\langle q, t | p, t \rangle = \langle q | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-n/2} (f(p) g(q))^{-1/4} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p \cdot q) \right], \quad (4.7)$$

où $(p \cdot q) = p_a q^a$ et $f(p)$ est une fonction arbitraire choisie pour définir $[f(p)]^{1/2} d^n p$ comme élément de volume dans l'espace des moments.

L'équation (4.7) nous aide à obtenir les éléments de matrice pour n'importe quelle fonction des opérateurs moments. Ainsi

$$\langle q', t | (\hat{p}_a)^r | q, t \rangle = \int [f(p)]^{1/2} d^n p \langle q | (\hat{p}_a)^r | p \rangle \langle p | q \rangle$$

$$= [g(q)g(q')]^{-1/4} \int (2\pi\hbar)^{-n} d^n p (p_a)^r \exp \left[\frac{i}{\hbar} p (q' - q) \right]. \quad (4.8)$$

L'opérateur moment \hat{p} admet, dans la représentation des coordonnées, l'écriture suivante

$$\hat{p}_a = -i\hbar \left(\partial_a + \frac{1}{2} \Gamma_a \right), \quad \Gamma_a = \Gamma_{ka}^k = \partial_a \ln \sqrt{g}, \quad (4.9)$$

avec la notation standard $\partial_a = \partial/\partial q^a$ et Γ_{ab}^k est la connexion affine où le symbole de Christoffel de deuxième espèce est défini par

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}). \quad (4.10)$$

La dynamique quantique est maintenant décrite par l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = \hat{H} \Psi(q, t), \quad (4.11)$$

où \hat{H} est l'hamiltonien quantique. Comme \hat{H} est hermitien, la norme de la fonction d'onde est

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int g^{1/2}(q) d^n q |\Psi(q, t)|^2. \quad (4.12)$$

Puisque nous considérons le cas non relativiste, la fonction d'onde est une grandeur scalaire. La question qui s'impose est la suivante : quelle est la forme de \hat{H} ? En l'absence de l'évidence expérimentale nous n'avons aucune réponse exacte. Une prétention normale à faire est que \hat{H} soit invariable sous les transformations de coordonnées générales. En outre, si nous supposons que l'opérateur hamiltonien dans l'espace courbe possède la même forme que dans l'espace plat, alors l'hamiltonien quantique du système prend la forme

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{LB} + V, \quad (4.13)$$

où Δ_{LB} est l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{LB} = g^{-1/2} \partial_a \left(g^{1/2} g^{ab} \partial_b \right). \quad (4.14)$$

L'expression (4.13) peut maintenant être écrite sous forme d'opérateurs avec l'aide de la relation (4.9) :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} g^{-1/4}(\hat{q}) \hat{p}_a g^{1/2}(\hat{q}) g^{ab}(\hat{q}) \hat{p}_b g^{-1/4}(\hat{q}) + V(\hat{q}). \quad (4.15)$$

Cette forme de l'hamiltonien correspond à un ordre particulier des opérateurs \hat{q} et \hat{p} .

4.2.2 Dérivation de l'intégrale de chemin

Dans le deuxième chapitre nous avons vu comment construire l'intégrale de chemin de Feynman dans un espace plat où l'Hamiltonien possède une forme simple $H = T(p) + V(q)$. Cependant, dans le cas de l'espace courbe doté d'une métrique arbitraire g_{ab} , la formulation de l'intégrale de chemin n'est pas aussi facile [28]. La première investigation à l'origine de la formulation de l'intégrale de chemin pour un ordre particulier d'opérateurs est due à Dewitt (1957). Ce dernier définit le propagateur comme suit

$$\begin{aligned} K(q_f, q_i; T) &= \int_{q(t')=q'}^{q(t'')=q''} \sqrt{g} D_{Dew} q(t) \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} \left[\frac{m}{2} g_{ab}(q) \dot{q}^a \dot{q}^b - V(q) + \frac{\hbar^2 R}{6m} \right] dt \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{Nn}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \int \sqrt{g(q_{(j)})} d^n q_j \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[\frac{m}{2} g_{ab}(q_{(j-1)}) \Delta q_j^a \Delta q_j^b - \varepsilon V(q_{(j-1)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon \hbar^2}{6m} R(q_{(j-1)}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec

$$R = g^{ab} \left(\Gamma_{ab,c}^c - \Gamma_{cb,a}^c + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^c - \Gamma_{cb}^d \Gamma_{ad}^c \right), \quad \Gamma_{ab,c}^c = \frac{\partial \Gamma_{ab}^c}{\partial q^c}, \quad (4.17)$$

est la courbure scalaire.

La correction quantique $\Delta V_{Dew} = \frac{\hbar^2 R}{6m}$ est indispensable pour le propagateur (4.16) qui consti-

tue la solution de l'équation de Schrödinger associée à l'espace courbe

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{LB} + V(q) \right] \Psi(q, t), \quad (4.18)$$

où $\Psi(q, t)$ est l'état d'évolution dans le temps écrite par l'intermédiaire du propagateur $K(q_f, q_i; T)$

$$\Psi(q_f, t_f) = \int d^d q_i \sqrt{g(q_i)} K(q_f, q_i; T) \Psi(q_i, t_i). \quad (4.19)$$

Les termes de la métrique contenus dans l'expression de l'action sont évalués au pré-point $q_{(j-1)}$. Notons que l'intégrale de chemin (4.16) peut être définie en adoptant d'autres points, comme le post-point $q_{(j)}$ ou le mid-point $\bar{q}_{(j)} = \frac{1}{2} (q_{(j)} + q_{(j-1)})$. La correction quantique ΔV change selon le point adopté. En réalité, les différentes formes de l'intégrale de chemin selon le point où elle est évaluée correspondent à un ordre d'opérateurs particulier de l'hamiltonien quantique.

Maintenant, nous allons présenter deux prescriptions connues sous le nom " l'ordre de Weyl " et "forme produit" pour construire le propagateur.

4.2.3 Prescription de " l'ordre de Weyl "

La définition de l'intégrale de chemin obtenue par le choix du point moyen nous ramène à la même théorie quantique décrite par l'opérateur hamiltonien en suivant la règle de l'ordre de Weyl. Dans le cadre de cette règle, si nous considérons une quantité classique $q^m p^n$, l'ordre de Weyl de l'expression quantique $(\hat{q}^m \hat{p}^n)_w$ est juste la moyenne arithmétique de tout ordre possible des facteurs \hat{q} et \hat{p} par exemple

$$(F(\hat{q}) \hat{p})_w = \frac{1}{2} [F(\hat{q}) \hat{p} + \hat{p} F(\hat{q})], \quad (4.20)$$

$$(F(\hat{q}) \hat{p}^2)_w = \frac{1}{4} [F(\hat{q}) \hat{p}^2 + 2\hat{p} F(\hat{q}) \hat{p} + \hat{p} F(\hat{q})]. \quad (4.21)$$

A l'aide de ces relations, il est facile de montrer que

$$\begin{aligned}
(\widehat{q}^m \widehat{p}^n)_{Weyl} &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^m m_{c_l} \widehat{q}^{m-l} \widehat{p}^n \widehat{q}^l, \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^m \sum_{l=0}^m \frac{m!}{l!(m-l)!} \widehat{q}^{m-l} \widehat{p}^n \widehat{q}^l.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Nous construisons maintenant l'opérateur de l'ordre de Weyl correspondant à l'équation (4.3). Pour cela, notons que

$$(V(\widehat{q}))_w = V(\widehat{q}), \tag{4.23}$$

d'autre part, il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}
\left[g^{ab}(\widehat{q}) \widehat{p}_a \widehat{p}_b\right]_W &= \frac{1}{4} \left[\widehat{p}_a \widehat{p}_b g^{ab}(\widehat{q}) + 2\widehat{p}_a g^{ab}(\widehat{q}) \widehat{p}_b + g^{ab}(\widehat{q}) \widehat{p}_a \widehat{p}_b \right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{4} \left(4g^{ab} \left[\partial_a \partial_b + \Gamma_a \partial_b + \frac{1}{2} (\partial_a \Gamma_b) + \frac{1}{4} \Gamma_a \Gamma_b \right] + \right. \\
&\quad \left. + 4 \left(\partial_a g^{ab} \right) \left(\partial_b + \frac{1}{2} \Gamma_b \right) + \left(\partial_a \partial_b g^{ab} \right) \right) \\
&= -\hbar^2 \left(\Delta + \frac{1}{4} R + \frac{1}{4} g^{ab} \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d \right),
\end{aligned} \tag{4.24}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami défini par (4.14) et

$$R = g^{ab} R_{ab}, \tag{4.25}$$

est la courbure scalaire. Le tenseur de Ricci $R_{ab} = R_{ab,c}^c$ est défini par

$$R_{ab} = \partial_b \Gamma_{ac}^c - \partial_c \Gamma_{ab}^c + \Gamma_{ac}^d \Gamma_{bd}^c - \Gamma_{ab}^d \Gamma_{cd}^c. \tag{4.26}$$

Substituons les relations (4.23) et (4.24) dans l'équation (4.3), nous pouvons écrire l'opérateur hamiltonien relatif à l'ordre de Weyl par

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_w &= \frac{1}{2m} \left(g^{ab}(\widehat{q}) \widehat{p}_a \widehat{p}_b \right)_w + (V(\widehat{q}))_w \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\widehat{q}) - \frac{\hbar^2}{8m} \left(R + g^{ab} \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d \right).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

En comparant l'expression ci-dessus avec l'opérateur hamiltonien \hat{H} de l'Eq (4.13), nous déduisons que \hat{H}_w et \hat{H} sont liés par la relation

$$\hat{H} = \hat{H}_w + \Delta V_w, \quad (4.28)$$

où ΔV_w représente la correction quantique donnée par

$$\begin{aligned} \Delta V_w &= \frac{\hbar^2}{8m} \left(R + g^{ab} \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{8m} \left(g^{ab} \Gamma_a \Gamma_b + 2 \left(g^{ab} \Gamma_a \right)_{,j} + g^{ab}{}_{,ab} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Cette correction est proportionnelle à \hbar^2 et disparaît à la limite classique ($\hbar \rightarrow 0$).

A ce niveau, l'équation (4.28) représente le résultat central pour la construction de l'intégrale de chemin dans l'espace courbe.

Construction du propagateur :

Nous utilisons maintenant la procédure standard pour dériver une intégrale de chemin basée sur la formule du produit de Kato-Trotter (voir chapitre 2). Le propagateur est l'amplitude de transition pour une particule repérée par le point initial $q_{(i)}$ à l'instant t_i et le point final $q_{(f)}$ à l'instant t_f . Il s'écrit

$$K(q_{(f)}, t_f; q_{(i)}, t_i) = \langle q_{(f)} | \exp \left(\frac{-i}{\hbar} (t_f - t_i) \hat{H} \right) | q_{(i)} \rangle, \quad (4.30)$$

où \hat{H} est défini par (4.13).

Subdivisons l'intervalle de temps $[t_f, t_i]$ en N intervalles infinitésimales (N grand) et utilisons la relation de fermeture (4.6) pour écrire le propagateur (4.30) comme suit

$$K(q_{(f)}, t_f; q_{(i)}, t_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} [g(q_{(k)})]^{1/2} d^n q_{(k)} \prod_{j=1}^N \langle q_{(j)} | \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H} \right) | q_{(j-1)} \rangle, \quad (4.31)$$

où $\varepsilon = (t_f - t_i)/N$ et $q(t_i) = q_{(i)}$, $q(t_N) = q_{(f)}$.

Notre tâche est d'évaluer le propagateur pour un intervalle de temps infinitésimaux

$$K(q_{(j)}, q_{(j-1)}; \varepsilon) = \langle q_{(j)} | \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H}\right) | q_{(j-1)} \rangle, \quad (4.32)$$

à cette fin, il est convenable d'écrire \hat{H} sous la forme (4.28) et de ne garder que les termes d'ordre ε par rapport au temps. Il découle que le propagateur infinitésimal (4.32) devient

$$K(q_{(j)}, q_{(j-1)}; \varepsilon) \simeq \langle q_{(j)} | \left[1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left(\frac{1}{2m} \left(g^{cd}(\hat{q}) \hat{p}_c \hat{p}_d \right)_w + V(\hat{q}) + \Delta V(\hat{q}) \right) \right] | q_{(j-1)} \rangle. \quad (4.33)$$

Maintenant, nous utilisons les relations (4.22) et (4.8) pour dériver la formule suivante

$$\langle q_{(f)} | (\hat{q}^m \hat{p}^r)_w | q_{(i)} \rangle = [g(q_{(f)}) g(q_{(i)})]^{-\frac{1}{4}} \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} p^r \left(\frac{q_{(f)} + q_{(i)}}{2} \right)^m \exp\left[\frac{i}{\hbar} p (q_{(f)} - q_{(i)}) \right]. \quad (4.34)$$

Ce résultat peut être généralisé comme

$$\langle q_{(f)} | (F(\hat{q}) \hat{p}^r)_w | q_{(i)} \rangle = [g(q_{(f)}) g(q_{(i)})]^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{\hat{q}_{(f)} + \hat{q}_{(i)}}{2}\right) \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} p^r \exp\left[\frac{i}{\hbar} p (q_{(f)} - q_{(i)}) \right]. \quad (4.35)$$

La dérivation de la formule (4.35) exige d'écrire $F(\hat{q})$ sous forme d'une série de Taylor en puissances de \hat{q} pour ensuite évaluer chaque terme en utilisant la relation (4.34). Avec l'aide de ce résultat, il est maintenant facile d'écrire l'expression du propagateur (4.33) comme

$$\begin{aligned} K(q_{(j)}, q_{(j-1)}; \varepsilon) &= [g(q_{(j)}) g(q_{(j-1)})]^{-\frac{1}{4}} \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon \left[\frac{1}{2m} g^{cd}(\bar{q}_{(j)}) p_c p_d + V(\bar{q}_{(j)}) + \Delta V(\bar{q}_{(j)}) \right] \right\} \times \\ &\exp\left(\frac{i}{\hbar} p (q_{(j)} - q_{(j-1)})\right) \\ &= [g(q_{(j)}) g(q_{(j-1)})]^{-\frac{1}{4}} \int \frac{d^n p}{(2\pi\hbar)^n} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} [p (q_{(j)} - q_{(j-1)}) - \varepsilon H_{eff}(\bar{q}_{(j)}, p)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

avec $\bar{q}_{(j)} = (q_{(j)} + q_{(j-1)}) / 2$ et $H_{eff}(\bar{q}_{(j)}, p)$ est l'hamiltonien effectif

$$H_{eff} = H + \Delta V = \frac{1}{2m} g^{cd} p_c p_d + V + \Delta V \quad (4.37)$$

évalué au point moyen $\bar{q}_{(j)}$. H_{eff} est une fonction des variables q_c et p_c et s'identifie à l'hamiltonien classique à la différence d'un terme supplémentaire dépendant de la constante de Planck (ΔV). La forme de ΔV est similaire à celle de (4.29).

Après insertion de (4.36) dans (4.31), le propagateur intégral prend la forme suivante

$$K(q_{(f)}, q_{(i)}; T) = \lim_{n \rightarrow \infty} [g(q_{(f)}) g(q_{(i)})]^{-\frac{1}{4}} \int \prod_{k=1}^{N-1} \int d^m q_{(k)} \prod_{j=1}^N \left(\int \frac{d^n p_{(j)}}{(2\pi\hbar)^n} \right) \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_{j=1}^N \left[p_j \frac{(q_{(j)} - q_{(j-1)})}{\varepsilon} - H_{eff}(\bar{q}_{(j)}, p_{(j)}) \right] \right\}. \quad (4.38)$$

L'expression (4.38) est la représentation de l'intégrale de chemin dans l'espace des phases. Elle peut être écrite sous forme compacte comme

$$K = [g(q_{(f)}) g(q_{(i)})]^{-\frac{1}{4}} \int D[q(t)] D[p(t)] \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [p \dot{q} - H_{eff}] \right), \quad (4.39)$$

où

$$D[q(t)] = \prod_t d^m q(t) ; D[p(t)] = \prod_t \left(\frac{d^n p(t)}{(2\pi\hbar)^n} \right), \quad t_i \leq t \leq t_f. \quad (4.40)$$

L'arrangement d'opérateurs par la règle de Weyl a mené au choix naturel du principe de point moyen pour désigner le point auquel les fonctions vont être évaluées dans le contexte de l'intégrale de chemin.

Afin d'obtenir la formulation lagrangienne de l'intégrale de chemin, nous effectuons l'intégration sur les moments en utilisant le résultat de l'intégrale Gaussienne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2 \pm bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right), \quad (4.41)$$

ce qui donne

$$\int d^n p \exp \left[-\frac{i\varepsilon}{2m\hbar} g^{cd} p_{c,(j)} p_{d,(j)} + \frac{i}{\hbar} \left(\Delta q_{(j)}^c \cdot p_{c,(j)} \right) \right] = \left(\frac{2m\pi\hbar}{i\varepsilon} \right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det(g_{cd})} \exp \left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon} g_{cd} \Delta q_{(j)}^c \Delta q_{(j)}^d \right) \quad (4.42)$$

Finalement, nous obtenons l'intégrale de chemin suivant la prescription de " l'Ordre de Weyl " dans l'espace de configurations par rapport au mid-point (MP) :

$$K(q_{(f)}, q_{(i)}; T) = [g(q_{(f)}) g(q_{(i)})]^{-\frac{1}{4}} \int_{q(t_i)=q_{(i)}}^{q(t_f)=q_{(f)}} \sqrt{g} D^{MP} [q(t)] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t''} L_{eff}(q, \dot{q}) dt \right], \quad (4.43)$$

ou encore sous forme discrète

$$K(q_{(f)}, q_{(i)}; T) = [g(q_{(f)}) g(q_{(i)})]^{-\frac{1}{4}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{Nn}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \left(\int dq_{(j)} \right) \prod_{j=1}^N \sqrt{g(\bar{q}_{(j)})} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[\frac{m}{2\varepsilon} g_{cd}(\bar{q}_{(j)}) \Delta q_{(j)}^c \Delta q_{(j)}^d - \varepsilon V(\bar{q}_{(j)}) - \varepsilon \Delta V_W(\bar{q}_{(j)}) \right] \right\}. \quad (4.44)$$

4.2.4 Prescription de la " forme produit " :

L'adoption de cette dernière prescription est par fois très utile pour la formulation des intégrales de chemins sur l'espace courbe. Cette prescription est basée sur l'hypothèse que le tenseur métrique g_{ab} soit réel et symétrique et de rang n [29]. De ce fait, nous pouvons le mettre sous la forme

$$g_{ab}(\hat{q}) = h_{a\gamma}(\hat{q}) h_{b\gamma}(\hat{q}), \quad (4.45)$$

où $h_{a\gamma}$ et $h_{b\gamma}$ sont deux matrices $n \times n$ réelles, symétriques et satisfont la relation $h_{a\gamma} h^{\gamma b} = \delta_a^b$.

La racine carrée du déterminant de g_{ab} et les symboles de Christoffel Γ_a sont définis par

$$\sqrt{g} = \det h_{ab} = h, \quad \Gamma_a = \frac{h_{,a}}{h}, \quad h_{,a} = \frac{\partial h}{\partial q^a}, \quad (4.46)$$

donc, le moment \hat{P}_a s'écrit sous forme

$$\hat{P}_a = \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{h_{,a}}{2h} \right), \quad (4.47)$$

l'opérateur de Laplace-Beltrami exprimé en h^{ab} est donné par

$$\begin{aligned} \Delta_{LB} = & g^{-1/2} \partial_a \left(g^{1/2} g^{ab} \partial_b \right) \\ & \left\{ h^{a\gamma} h^{b\gamma} \frac{\partial^2}{\partial q^a \partial q^b} + \left[\frac{\partial h^{a\gamma}}{\partial q^a} h^{b\gamma} + h^{a\gamma} \frac{\partial h^{b\gamma}}{\partial q^a} + \frac{h_{,a}}{h} h^{a\gamma} h^{b\gamma} \right] \frac{\partial}{\partial q^b} \right\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

A l'aide de l'opérateur de moment (4.47), nous dérivons l'hamiltonien suivant la prescription de la forme produit comme

$$H = \frac{1}{2m} h^{a\gamma}(\hat{q}) \hat{p}_a \hat{p}_b h^{b\gamma}(\hat{q}) + V(\hat{q}) + \Delta V_{PF}(\hat{q}), \quad (4.49)$$

avec la correction quantique correspondante

$$\begin{aligned} \Delta V_{PF}(\hat{q}) = & \frac{\hbar^2}{8m} \left[4h^{a\gamma} h^{b\gamma}{}_{,ab} + 2h^{a\gamma} h^{b\gamma} \frac{h_{,ab}}{h} \right. \\ & \left. + 2h^{a\gamma} \left(h^{b\gamma} \frac{h_{,a}}{h} + h^{b\gamma}{}_{,a} \frac{h_{,b}}{h} \right) - h^{a\gamma} h^{b\gamma} \frac{h_{,a} h_{,b}}{h^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Construction du propagateur :

En suivant le même procédé de calcul utilisé dans le paragraphe précédent, nous parvenons à la construction des intégrales de chemin suivant la prescription de la " forme produit " comme suit :

Reconsidérons l'expression du propagateur (4.36)

$$\begin{aligned} K(q_{(f)}, t_f, q_{(i)}, t_i) &= \langle q_{(f)} | \exp \left(\frac{-i}{\hbar} (t_f - t_i) \hat{H} \right) | q_{(i)} \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} [g(q_{(k)})]^{1/2} d^m q_{(k)} \prod_{j=1}^N \langle q_{(j)} | \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H} \right) | q_{(j-1)} \rangle, \end{aligned} \quad (4.51)$$

dans ce cas, \hat{H} est l'hamiltonien correspondant à la forme produit (4.49).

Développons $\exp\left(\frac{-i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right)$ en série en ne gardant que les termes d'ordre ε . Alors, le propagateur infinitésimal s'écrit

$$\begin{aligned}\langle q_{(j)} | \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right) | q_{(j-1)} \rangle &\simeq \langle q_{(j)} | \left(1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right) | q_{(j-1)} \rangle = \\ &= \langle q_{(j)} | \left(1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon \left[\frac{1}{2m} h^{a\gamma}(\hat{q}) \hat{p}_a \hat{p}_b h^{b\gamma}(\hat{q}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + V(\hat{q}) + \Delta V_{FP}(\hat{q}) \right] \right) | q_{(j-1)} \rangle\end{aligned}\quad (4.52)$$

Nous utilisons maintenant les propriétés (4.6) et (4.7) pour obtenir le résultat suivant

$$\begin{aligned}\langle q_{(j)} | \left(1 - \frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right) | q_{(j-1)} \rangle &= \frac{[g(q_{(j)}) g(q_{(j-1)})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi\hbar)^n} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}p(q_{(j)} - q_{(j-1)})\right) d^n p \\ &\quad - \frac{i\varepsilon}{2m} \langle q_{(j)} | h^{a\gamma}(\hat{q}) \hat{p}_a \hat{p}_b h^{b\gamma}(\hat{q}) | q_{(j-1)} \rangle \\ &\quad - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \langle q_{(j)} | (V(\hat{q}) + \Delta V_{FP}(\hat{q})) | q_{(j-1)} \rangle,\end{aligned}\quad (4.53)$$

où

$$\begin{aligned}\langle q_{(j)} | (V(\hat{q}) + \Delta V_{FP}(\hat{q})) | q_{(j-1)} \rangle &= \frac{[g(q_{(j)}) g(q_{(j-1)})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi\hbar)^n} [V(q_{(j)}) + \Delta V_{FP}(q_{(j)})] \\ &\quad \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}p(q_{(j)} - q_{(j-1)})\right) dp,\end{aligned}\quad (4.54)$$

et

$$\begin{aligned}\langle q_{(j)} | h^{a\gamma}(\hat{q}) \hat{p}_a \hat{p}_b h^{b\gamma}(\hat{q}) | q_{(j-1)} \rangle &= h^{a\gamma}(q_{(j)}) h^{b\gamma}(q_{(j-1)}) \times \\ &\quad \times \int d^n p d^n q \langle q_{(j)} | \hat{p}_a \hat{p}_b | p \rangle \langle p | q \rangle \langle q | q_{(j-1)} \rangle\end{aligned}\quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}&= h^{a\gamma}(q_{(j)}) h^{b\gamma}(q_{(j-1)}) \frac{[g(q_{(j)}) g(q_{(j-1)})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi\hbar)^n} \\ &\quad \times \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}p \Delta q_{(j)}\right) p_a p_b d^n p,\end{aligned}\quad (4.56)$$

La substitution des expressions (4.54) et (4.55) dans l'équation (4.43) nous permet de déduire

que

$$\begin{aligned}
\langle q_{(j)} | \exp\left(\frac{-i}{\hbar} \varepsilon \hat{H}\right) | q_{(j-1)} \rangle &\simeq \frac{[g(q_{(j)}) g(q_{(j-1)})]^{-\frac{1}{4}}}{(2\pi\hbar)^n} \int d^n p \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} p \Delta q_{(j)} - \frac{i\varepsilon}{2m\hbar} h^{a\gamma}(q_{(j)}) h^{b\gamma}(q_{(j-1)}) p_a p_b \right. \\
&\left. - \frac{i\varepsilon}{\hbar} (V(q_{(j)}) + \Delta V_{FP}(q_{(j)}))\right]. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Trotter, nous arrivons à la **formulation hamiltonienne** du propagateur dans la prescription de la " **forme produit** "

$$\begin{aligned}
K(q_{(f)}, q_{(i)}; T) &= [g(q_{(f)}) g(q_{(i)})]^{-\frac{1}{4}} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{N-1} \left(\int dq_{(j)} \right) \prod_{j=1}^N \left(\int \frac{dp_{(j)}}{(2\pi\hbar)^n} \right) \\
&\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N \left[p \Delta q_{(j)} - \frac{\varepsilon}{2m} h^{a\gamma}(q_{(j)}) h^{b\gamma}(q_{(j-1)}) p_a p_b \right. \right. \\
&\left. \left. - \varepsilon (V(q_{(j)}) + \Delta V_{FP}(q_{(j)})) \right] \right\}. \tag{4.58}
\end{aligned}$$

L'intégration sur les moments p , nous donne la **formulation lagrangienne** du propagateur dans cette même prescription " **forme produit** "

$$\begin{aligned}
K(q_{(f)}, q_{(i)}; T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{Nn}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} \int \sqrt{g(q_{(j)})} dq_{(j)} \\
&\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{J=1}^N \left[\frac{\varepsilon}{2m} h^{a\gamma}(q_{(j)}) h^{b\gamma}(q_{(j-1)}) \Delta q_{(j)}^a \Delta q_{(j)}^b \right. \right. \\
&\left. \left. - \varepsilon (V(q_{(j)}) + \Delta V_{FP}(q_{(j)})) \right] \right\}. \tag{4.59}
\end{aligned}$$

4.3 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons rappelé d'une manière détaillée la définition de l'intégrale de chemin sur un espace courbe dans deux prescriptions à savoir la prescription dite " l'ordre de Weyl " et la prescription " forme produit ".

Chapitre 5

Etude du Mouvement d'une Particule sous l'action d'un Potentiel Super intégrable à trois Dimensions $U(r, \theta, \varphi)$ Dépendant d'une Fonction Radiale arbitraire $f(r)$

5.1 Introduction

La théorie des systèmes super-intégrables représente un des domaines les plus actifs de la physique mathématique. Elle réunit des idées et des méthodes très variées allant de l'analyse fonctionnelle classique à la géométrie algébrique. Elle est également riche en applications aux problèmes concrets d'origine physique et technique. Dans sa version moderne, la théorie des systèmes super-intégrables réunit les puissantes méthodes analytiques avec les méthodes algébriques de la théorie des groupes et l'algèbre de Lie (surtout en dimension infini).

Au cours des dernières décennies la liste des systèmes super-intégrables s'est considérablement enrichie par des exemples fournis par la géométrie différentielle : surfaces à courbure moyenne constante, applications harmoniques dans les espaces symétriques, surfaces Lagran-

giennes hamiltoniennes stationnaires dans les espaces hermitiens symétriques, etc.

Dans ce qui suit, nous allons donner une courte introduction historique sur les modèles super-intégrables en commençant par les définir.

Les systèmes super-intégrables sont les systèmes dont les solutions exactes s'expriment sous formes de quadratures, c'est-à-dire par un nombre fini de calculs d'intégrales et d'autres opérations algébrique. Au-delà de la possibilité d'obtenir la solution exacte du système lui-même, ces systèmes se prêtent beaucoup mieux à l'analyse qualitative et à la généralisation aux problèmes où les solutions ne peuvent être trouvées que par des méthodes numériques approchées ou même à des systèmes possédant une solution exacte mais qui ne s'exprime pas en quadratures. C'est pour ces raisons que les systèmes super-intégrables jouent un rôle particulier en physique mathématique classique. Généralement, dans un espace à n dimensions, on réunit tous les exemples de modèles super-intégrables dans le cadre général d'un système hamiltonien possédant le nombre maximal d'intégrales du mouvement. Si ce nombre est égal à $(2n-2)$ (l'énergie comprise) ce système est dit super-intégrable « minimally ». Cependant si ce nombre est égal à $(2n-1)$, le système est dit super-intégrable « maximally ». Sur cette base, une classification des systèmes super-intégrables classiques sur un espace Euclidien tridimensionnel avec tous les systèmes de coordonnées permettant la séparation des variables a été établie par Evans [30].

L'objectif de ce chapitre est d'étudier un de ces systèmes dont le potentiel est défini par

$$U_e = f(r) + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{y^2} + \frac{B_3}{z^2}, \quad (5.1)$$

Ce potentiel sera traité dans les coordonnées polaires à 3D dans deux espaces Riemanniens à courbure constante à savoir l'espace sphérique \mathbf{S}^3 et l'espace hyperbolique \mathbf{H}^3 [31]. De ce fait,

$$U_e \implies \begin{cases} U_s = f(r) + \frac{1}{\sin^2 r} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \theta} + \frac{B_2}{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi} + \frac{B_3}{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \right), & \text{sur } \mathbf{S}^3 & (5.1.a) \\ U_h = f(r) + \frac{1}{\sinh^2 r} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \theta} + \frac{B_2}{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi} + \frac{B_3}{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \right), & \text{sur } \mathbf{H}^3 & (5.1.b) \end{cases}$$

avec θ et $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Le propagateur sera construit en adoptant la prescription dite « l'ordre de Weyl » dans \mathbf{S}^3 et \mathbf{H}^3 (paragraphes 5.2 et 5.3). Le calcul explicite sera effectué dans deux cas particuliers :

* Le potentiel de Smorodinsky-Winternitz (SW)

pour

$$f(r) = \begin{cases} \beta_0 \tan^2 r, & \text{sur } \mathbf{S}^N, r \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \beta_0 r^2, & \text{sur } \mathbf{E}^N, r > 0. \\ \beta_0 \tanh^2 r, & \text{sur } \mathbf{H}^N, r > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

* Le potentiel de Kepler-Coulomb généralisé (GKC)

pour

$$f(r) = \begin{cases} -\hat{k}/\tan r, & \text{sur } \mathbf{S}^N, r \in]0, \pi[\\ -\hat{k}/r, & \text{sur } \mathbf{E}^N, r > 0. \\ -\hat{k}/\tanh r, & \text{sur } \mathbf{H}^N, r > 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Le spectre ainsi que les fonctions d'onde normalisées sont déduits.

5.2 Calcul du propagateur dans l'espace sphérique à 3 dimensions

En suivant la prescription de l'ordre de Weyl, le propagateur (4.46) relatif à une particule soumise au potentiel

$$U_s = f(r) + \frac{1}{\sin^2 r} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \theta} + \frac{B_2}{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi} + \frac{B_3}{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \right), \quad (5.4)$$

dont la métrique

$$g_{ab} = \text{diag} (1, \sin^2 r, \sin^2 r \sin^2 \theta), \quad (5.5)$$

avec

$$g = \sqrt{\det g_{ab}} = \sin^2 r \sin \theta, \quad (5.6)$$

et un élément de ligne

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\theta^2 + \sin^2 r \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5.7)$$

est donné comme suit :

$$\begin{aligned} K_s(r_N, r_0; \theta_N, \theta_0; \varphi_N, \varphi_0; T) &= \left[(\sin r_N \sin r_0)^2 (\sin \theta_N \sin \theta_0) \right]^{\frac{-1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi \hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{3N}{2}} \\ &\int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \quad d\theta_j \quad d\varphi_j \prod_{j=1}^N (\sin^2 \bar{r}_j \sin \bar{\theta}_j) \\ &\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N A(j, j-1) \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

avec l'action élémentaire

$$\begin{aligned}
A(j, j-1) = & \left\{ \frac{M}{2\varepsilon} (\Delta r_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \Delta \varphi_j^2) - \right. \\
& - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left[f(\bar{r}_j) + \frac{1}{\sin^2 \bar{r}_j} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \bar{\theta}_j} + \frac{B_2}{\sin^2 \bar{\theta}_j \cos^2 \bar{\varphi}_j} + \frac{B_3}{\sin^2 \bar{\theta}_j \sin^2 \bar{\varphi}_j} \right) \right. \\
& \left. \left. + \Delta \tilde{V}_W(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) \right] \right\}, \tag{5.9}
\end{aligned}$$

où

$$\Delta V_W = \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \tilde{V}_W, \quad \Delta \tilde{V}_W = - \left(1 + \frac{1}{4 \sin^2 \bar{r}} + \frac{1}{4 \sin^2 \bar{r} \sin^2 \bar{\theta}} \right). \tag{5.10}$$

Notre objectif est la séparation des variables pour arriver à une forme intégrable du propagateur. A cette fin, nous utilisons la moyenne géométrique à la place de la moyenne arithmétique pour l'intégrale fonctionnelle dépendante de la variable φ , c'est-à-dire, nous remplaçons $\sin^2 \bar{\varphi}_j$ par $\sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1}$ et $\cos^2 \bar{\varphi}_j$ par $\cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1}$. Par conséquent, l'action élémentaire devient :

$$\begin{aligned}
A(j, j-1) = & \left\{ \frac{M}{2\varepsilon} (\Delta r_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \Delta \varphi_j^2) - \right. \\
& - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left[\frac{1}{\sin^2 \bar{r}_j} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \bar{\theta}_j} + \frac{B_2}{\sin^2 \bar{\theta}_j \cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1}} + \frac{B_3}{\sin^2 \bar{\theta}_j \sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1}} \right) \right. \\
& \left. \left. + f(\bar{r}_j) + \Delta \tilde{V}_W \right] \right\}, \tag{5.11}
\end{aligned}$$

de plus, nous utilisons le développement de la fonction cosinus :

$$\Delta \varphi_j^2 = 2 \left(1 - \cos \Delta \varphi_j + \frac{1}{4!} \Delta \varphi_j^4 \right), \tag{5.12}$$

alors, l'expression (5.11) admet l'écriture suivante

$$\begin{aligned}
A(j, j-1) = & \left\{ \frac{M}{2\varepsilon} (\Delta r_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j - 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \cos \Delta \varphi_j \right. \\
& + \frac{1}{12} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \Delta \varphi_j^4) - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left[f(\bar{r}_j) + \Delta \tilde{V}_W + \frac{1}{\sin^2 \bar{r}_j} \times \right. \\
& \left. \left. \times \left(\frac{B_1}{\cos^2 \bar{\theta}_j} + \frac{B_2}{\sin^2 \bar{\theta}_j \cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1}} + \frac{B_3}{\sin^2 \bar{\theta}_j \sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1}} \right) \right] \right\}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons séparer la variable φ des variables r et θ . Pour celà, nous remplaçons

$\Delta\varphi_j^4$ par son correspondant quantique, en utilisant la formule suivante :

$$\int_{-q}^q \exp [-\alpha y^2 + \beta y^4 + \beta' y^4 + O(y^6)] dy = \int_{-q}^q \exp \left[-\alpha y^2 + \beta y^4 + \frac{3}{4} \beta' \alpha^{-2} + O(\alpha^{-3}) \right] dy, \quad (5.14)$$

d'où

$$\frac{M}{24\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \Delta\varphi_j^4 \longrightarrow -\frac{\hbar^2 \varepsilon}{8M \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j}.$$

Ensuite, à l'aide de la relation

$$\cos \Delta\varphi_j = \cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1} + \sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1}, \quad (5.15)$$

l'action prend la forme suivante

$$\begin{aligned} A(j, j-1) = & \left\{ \frac{M}{2\varepsilon} (\Delta r_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \right. \\ & - 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1} - 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1} \\ & - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left[f(\bar{r}_j) + \Delta \tilde{V}_W + \frac{1}{4 \sin^2 \bar{r}} \frac{1}{\sin^2 \bar{\theta}_j} + \frac{1}{\sin^2 \bar{r}_j} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left(\frac{B_1}{\cos^2 \bar{\theta}_j} + \frac{B_2}{\sin^2 \bar{\theta}_j \cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1}} + \frac{B_3}{\sin^2 \bar{\theta}_j \sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1}} \right) \right] \right\}. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Pour alléger les calculs, nous posons

$$\begin{aligned} z_j &= \frac{M}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1}, \\ y_j &= \frac{M}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_2 &= \left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) \implies \gamma = \pm \sqrt{B_2 + \frac{1}{4}}, \\ B_3 &= \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) \implies \lambda = \pm \sqrt{B_3 + \frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

alors l'exponentielle de l'action élémentaire (5.16) s'écrit

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} A(j, j-1) \right] &= \exp \left\{ \frac{i M}{\hbar 2\varepsilon} (\Delta r_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j) - \frac{i \hbar \varepsilon}{2M} [f(\bar{r}_j) \right. \\ &\quad \left. + \Delta \tilde{V}_W + \frac{1}{4 \sin^2 \bar{r} \sin^2 \bar{\theta}_j} + \frac{1}{\sin^2 \bar{r}_j} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \bar{\theta}_j} \right) \right] \Big\} \\ &\quad \exp \left\{ z_j - \frac{\left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right)}{2z_j} \right\} \exp \left\{ y_j - \frac{\left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right)}{2y_j} \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

A ce niveau, nous remarquons que l'expression ci-dessus peut être exprimée en fonction des fonctions de Bessel modifiées grâce à la formule asymptotique (3.17). Alors, l'équation (5.17) se ramène à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} A(j, j-1) \right] &= \exp \left\{ \frac{i M}{\hbar 2\varepsilon} (\Delta r_j^2 + \sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j) - \frac{i \hbar \varepsilon}{2M} [f(\bar{r}_j) \right. \\ &\quad \left. + \Delta \tilde{V}_W + \frac{1}{4 \sin^2 \bar{r} \sin^2 \bar{\theta}_j} + \frac{B_1}{\sin^2 \bar{r}_j \cos^2 \bar{\theta}_j} \right] \Big\} \\ &\quad \left\{ 2\pi (z_j y_j)^{1/2} I_\gamma(z_j) I_\lambda(y_j) \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

En remplaçant $\Delta \tilde{V}_W$ par son expression (5.10), nous obtenons la forme suivante

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{i}{\hbar} A(j, j-1) \right] &= \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left(f(\bar{r}_j) - \frac{1}{4 \sin^2 \bar{r}_j} - 1 \right) \right] \right\} \\ &\quad \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} (\sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j) - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \frac{B_1}{\sin^2 \bar{r}_j \cos^2 \bar{\theta}_j} \right] \right\} \\ &\quad \left\{ 2\pi (z_j y_j)^{1/2} I_\gamma(z_j) I_\lambda(y_j) \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pour plus de simplicité, nous posons :

$$B(\bar{r}_j) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left(f(\bar{r}_j) - \frac{1}{4 \sin^2 \bar{r}_j} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (5.20)$$

et

$$C(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} (\sin^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j) - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \frac{B_1}{\sin^2 \bar{r}_j \cos^2 \bar{\theta}_j} \right] \right\}. \quad (5.21)$$

Maintenant, nous utilisons la relation qui lie les fonctions de Bessel modifiées $I_\nu(x)$ aux fonctions de Bessel $J_\nu(x)$:

$$I_\nu(x) = e^{-(\pi\nu i)/2} J_\nu\left(e^{(i\pi)/2} x\right), \quad \text{pour } \left[-\pi < \arg x \leq \frac{\pi}{2}\right], \quad (5.22)$$

il en résulte que l'équation (5.19) se met sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \exp\left[\frac{i}{\hbar} A(j, j-1)\right] &= \left[\left(B(\bar{r}_j) C(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) 2\pi e^{-\pi i(\lambda+\gamma)/2} \right) \left(\frac{M}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \right) \right. \\ &\quad \left. (\cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1})^{1/2} (\sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1})^{1/2} \right. \\ &\quad \left. J_\gamma \left(\frac{M e^{\pi i/2}}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1} \right) \right. \\ &\quad \left. J_\lambda \left(\frac{M e^{\pi i/2}}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1} \right) \right]. \quad (5.23) \end{aligned}$$

Après avoir posé $x_j = \frac{M e^{\pi i/2}}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j$, il se trouve, que l'exponentielle de l'action totale prend la forme suivante

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N \exp\left\{\frac{i}{\hbar} A\right\} &= \prod_{j=1}^N \left[\left(B(\bar{r}_j) C(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) 4\pi e^{-\pi i(\lambda+\gamma+1)/2} \right) \right. \\ &\quad \left. \prod_{j=1}^N \left[(\sin \varphi_j \sin \varphi_{j-1})^{\frac{1}{2}} (\cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1})^{\frac{1}{2}} \right] \right. \\ &\quad \left. \left\{ \frac{x_1}{2} J_\gamma(x_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_0) J_\lambda(x_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_0) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots \frac{x_N}{2} J_\gamma(x_N \cos \varphi_N \cos \varphi_{N-1}) J_\lambda(x_N \sin \varphi_N \sin \varphi_{N-1}) \right\} \right]. \quad (5.24) \end{aligned}$$

A ce niveau, nous remarquons que les variables φ_j , r_j et θ_j ne sont pas encore séparées. Dans ce sens, nous utilisons la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} J_\nu(z \sin \alpha \sin \beta) J_\mu(z \cos \alpha \cos \beta) &= (z \sin \alpha \sin \beta)^\nu (z \cos \alpha \cos \beta)^\mu \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \\ &\quad (\mu + \nu + 2l + 1) \frac{\Gamma(\mu + \nu + l + 1) \Gamma(\nu + l + 1)}{l! \Gamma^2(\nu + 1) \Gamma(\mu + l + 1)} \\ &\quad J_{\mu+\nu+2l+1}(z) {}_2F_1(-l, \mu + \nu + l + 1, \nu + 1; \sin^2 \alpha) \\ &\quad {}_2F_1(-l, \mu + \nu + l + 1, \nu + 1; \sin^2 \beta), \quad (5.25) \end{aligned}$$

et à l'aide de la relation qui lie les fonctions hypergéométriques ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)$ aux fonctions de Jacobi $P_\gamma^{(\alpha, \beta)}(x)$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{(n!) \Gamma(\alpha + 1)} {}_2F_1\left(-n, \alpha + \beta + n + 1, \alpha + 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (5.26)$$

Il en résulte, que l'équation (5.24) admet l'écriture suivante

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N \exp\left\{\frac{i}{\hbar} A\right\} &= \prod_{j=1}^N \left[\left(B(\bar{r}_j) C(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) 4\pi e^{-\pi i(\lambda + \gamma + 1)/2} \right) \right. \\ &\quad \left[(\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\lambda + \frac{1}{2}} (\cos \varphi_j \cos \varphi_{j-1})^{\gamma + \frac{1}{2}} \right] \\ &\quad \prod_{j=1}^{N-1} \left[(\sin^2 \varphi_j)^{\frac{1}{2} + \lambda} (\cos^2 \varphi_j)^{\frac{1}{2} + \gamma} \right] \sum_{l_1, \dots, l_N=0}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^N (-1)^{l_j} \right. \\ &\quad \left. (\gamma + \lambda + 2l_j + 1) \frac{(l_j!) \Gamma(\gamma + \lambda + l_j + 1)}{\Gamma(\gamma + l_j + 1) \Gamma(\lambda + l_j + 1)} \right. \\ &\quad \left. J_{\gamma + \lambda + 2l_j + 1}(x_j) P_{l_j}^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_j) P_{l_j}^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_{j-1}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

L'intégration sur φ_j peut être effectuée maintenant par un simple calcul en utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Jacobi

$$\begin{aligned} \int \prod_{j=1}^{N-1} d\varphi_j \prod_{j=1}^N \exp\left\{\frac{i}{\hbar} A\right\} &= \prod_{j=1}^N \left[\left(B(\bar{r}_j) C(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) 4\pi e^{-\pi i(\lambda + \gamma + 1)/2} \right) \right] \\ &\quad \left[(\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\frac{1}{2} + \lambda} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_N)^{\frac{1}{2} + \gamma} \right] \\ &\quad \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{Nl} 2^{N-1} \prod_{j=1}^N (J_{\gamma + \lambda + 2l + 1}(x_j)) \\ &\quad (\gamma + \lambda + 2l + 1) \frac{(l!) \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1)}{\Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(\lambda + l + 1)} \\ &\quad P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_0) P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_N). \end{aligned} \quad (5.28)$$

A ce niveau nous allons nous occuper de l'intégration par rapport aux variables θ_j :

$$\begin{aligned}
& \int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^N (\sin^2 \bar{r}_j \sin \bar{\theta}_j) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N A(j, j-1) \right\} \\
= & \prod_{j=1}^N \left[\left(B(\bar{r}_j) 4\pi e^{-\pi i(\lambda+\gamma+1)/2} \right) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{Nl} 2^{N-1} (\gamma + \lambda + 2l + 1) \frac{(l!) \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1)}{\Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(\lambda + l + 1)} \right. \\
& \left. \left[(\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\lambda} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\gamma} \right] P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_0) P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_N) M(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) \right], \tag{5.29}
\end{aligned}$$

où

$$M(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) = \int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j \prod_{j=1}^N \sin^2 \bar{r}_j \sin \bar{\theta}_j C(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) J_{\gamma+\lambda+2l+1}(x_j), \tag{5.30}$$

nous substituons $C(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j)$ et x_j par leurs expressions, nous aurons :

$$\begin{aligned}
M(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) = & \int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j \prod_{j=1}^N \sin^2 \bar{r}_j \sin \bar{\theta}_j J_{\gamma+\lambda+2l+1} \left(\frac{M e^{\pi i/2}}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \right) \\
& \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} (\sin^2 \bar{r}_j \Delta\theta_j^2 + 2 \sin^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j) - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M \sin^2 \bar{r}_j \cos^2 \bar{\theta}_j} B_1 \right] \right\}. \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Dans le but de découpler les variables r_j et θ_j , nous adoptons un raisonnement analogue à celui utilisé pour la variable φ . De ce fait, nous remplaçons $\sin^2 \bar{\theta}_j$ par $\sin \theta_j \sin \theta_{j-1}$, $\cos^2 \theta_j$ par $\cos \theta_j \cos \theta_{j-1}$, $\Delta\theta_j^2$ par $2 \left(1 - \cos \Delta\theta_j + \frac{1}{4} \Delta\theta_j^4 \right)$, $\cos \Delta\theta_j$ par l'équation (3.14), et $\Delta\theta_j^4$ par son correspondant quantique. Cela permet d'écrire $M(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
M(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) = & \prod_{j=1}^N 2(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-i\pi(k+1)/2} \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M} \sin^2 \bar{r}_j \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{M}{\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{8M \sin^2 \bar{r}_j} \right) \right] \\
& \int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j \prod_{j=1}^N (\sin \theta_j \sin \theta_{j-1})^{1/2} (\cos \theta_j \cos \theta_{j-1})^{1/2} \\
& \left\{ \frac{G_j}{2} J_{\xi}(G_j \sin \theta_j \sin \theta_{j-1}) J_k(G_j \cos \theta_j \cos \theta_{j-1}) \right\}, \tag{5.32}
\end{aligned}$$

où $\gamma + \lambda + 2l + 1 = \xi$, $k = \pm \sqrt{B_1 + \frac{1}{4}}$, et $G_j = \frac{M e^{i\pi/2}}{i\hbar\varepsilon} \sinh^2 \bar{r}_j$.

Finalement, l'intégration sur les variables θ_j se calcule de la même manière que l'intégration sur les variables φ_j , et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
M(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) &= (\cos \theta_0 \cos \theta_N)^{\frac{1}{2}+k} (\sin \theta_0 \sin \theta_N)^{\frac{1}{2}+\xi} \left\{ \prod_{j=1}^N 2 (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-i\pi(k+1)/2} \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M} \sin^2 \bar{r}_j \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{M}{\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{8M \sin^2 \bar{r}_j} \right) \right] \right\} \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{nN} (k + \xi + 2n + 1) \frac{(n!) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)} \\
&\quad P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_0) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_N) \prod_{J=1}^N J_{k+\xi+2n+1} \left(\frac{M e^{\pi i/2}}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \right).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

L'insertion de l'expression ci-dessus dans (5.29) nous conduit à :

$$\begin{aligned}
&\int \prod_{j=1}^{N-1} d\theta_j d\varphi_j \prod_{j=1}^N (\sin^2 \bar{r}_j \sin \bar{\theta}_j) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N A(j, j-1) \right\} \\
&= (2\pi)^{3N/2} (2)^{N+1} (\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\lambda} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\gamma} (\cos \theta_0 \cos \theta_N)^{\frac{1}{2}+k} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{N(l+n)} \\
&\quad (k + \xi + 2n + 1) (\gamma + \lambda + 2l + 1) \frac{(l! n!) \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(\lambda + l + 1) \Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)} \\
&\quad (\sin \theta_0 \sin \theta_N)^{\frac{1}{2}+\xi} P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_0) P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_N) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_0) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_N) \\
&\quad \prod_{j=1}^N e^{-\pi i(\lambda + \gamma + k + 1)/2} \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M} \sin^2 \bar{r}_j \right)^{\frac{1}{2}} J_{k+\xi+2n+1} \left(\frac{M e^{\pi i/2}}{i\hbar\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j \right) \times \\
&\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 + \frac{M}{\varepsilon} \sin^2 \bar{r}_j - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} (f(\bar{r}_j) - 1) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

D'après la relation suivante (3.56) :

$$J_\nu \left(e^{i\pi/2} x \right) = (2\pi e^{i\pi\nu} x)^{1/2} \exp \left(x - \frac{\nu^2 - 1/4}{2x} \right),$$

et

$$e^{\pi i l} = (-1)^l, \quad l \text{ entier,}$$

l'expression finale du propagateur (5.8) devient :

$$\begin{aligned}
K_s(r_N, r_0; \theta_N, \theta_0; \varphi_N, \varphi_0; T) &= (\sin r_0 \sin r_N)^{-1} (\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\lambda} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\gamma} \\
&(\cos \theta_0 \cos \theta_N)^{\frac{1}{2}+k} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k + \xi + 2n + 1) (\gamma + \lambda + 2l + 1) \\
&\frac{l! n! \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(\lambda + l + 1) \Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)} \\
&(\sin \theta_0 \sin \theta_N)^\xi P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_0) P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_N) \\
&P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_0) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_N) \mathbf{Y}_s(\hat{r}, T). \tag{5.35}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Y}_s(\hat{r}, T)$ est la partie du propagateur dépendante de la variable radiale r ($\hat{r} \equiv (r_N, r_0)$) dont l'expression est

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_s(\hat{r}, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi \hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \prod_{j=1}^N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\
&\left. \left. \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} (f(\bar{r}_j) - 1) \right] - \frac{i \hbar \varepsilon}{2M} \frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sin^2 \bar{r}_j} \right\}. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

Après avoir construit le propagateur associé au potentiel (5.4) , nous passons au calcul explicite de l'intégrale de chemin pour les cas particuliers de la fonction radiale $f(r)$ citée dans le premier paragraphe.

5.2.1 Calcul du propagateur pour le potentiel de Smorodinsky-Winternitz (SW) sur S^3 :

Dans ce cas, la fonction radiale est de la forme

$$f(r) = \beta_0 \tan^2 r. \tag{5.37}$$

Le propagateur $\mathbf{Y}_s(\hat{r}, T)$ s'écrit :

$$\mathbf{Y}_s^{SW}(\hat{r}, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \frac{\hbar^2\varepsilon}{2M} (\beta_0 \tan^2 \bar{r}_j - 1) \right] - \frac{i\hbar\varepsilon}{2M} \frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sin^2 \bar{r}_j} \right\}. \quad (5.38)$$

Pour ramener ce propagateur à une forme familière, nous utilisons la relation suivante :

$$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad (5.39)$$

le propagateur $\mathbf{Y}_s^{SW}(\hat{r}, T)$ admet la forme

$$\mathbf{Y}_s^{SW}(\hat{r}, T) = \exp \left[\frac{i\hbar}{2M} (\beta_0 + 1) T \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \frac{\hbar^2\varepsilon}{2M} \left(\frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sin^2 \bar{r}_j} + \frac{\beta_0}{\cos^2 \bar{r}_j} \right) \right] \right\}. \quad (5.40)$$

Il est clair que le noyau radial s'identifie à celui relatif au potentiel de Pöschl-Teller (voir section 3.2.2) dont la solution est bien connue

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_s^{SW}(\hat{r}, T) &= \exp \left[\frac{i\hbar}{2M} (\beta_0 + 1) T \right] K^{PT}(\hat{r}; T) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2M} \left((2m + \mu + \eta)^2 - \beta_0 - 1 \right) T \right] (\lambda + \eta + 2m) \\ &\quad \frac{2 (m!) \Gamma(\eta + \mu + m)}{\Gamma(\mu + m + \frac{1}{2}) \Gamma(\eta + m + \frac{1}{2})} (\sin r_0 \sin r_N)^\mu (\cos r_0 \cos r_N)^\eta \\ &\quad P_m^{(\mu - \frac{1}{2}, \eta - \frac{1}{2})}(\cos 2r_0) P_m^{(\mu - \frac{1}{2}, \eta - \frac{1}{2})}(\cos 2r_N), \end{aligned} \quad (5.41)$$

où $\mu = k + \xi + 2n + \frac{3}{2}$ et $\eta = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\beta_0 + \frac{1}{4}}$.

Finalement, la substitution de ce résultat dans l'expression du propagateur relatif au pro-

blème traité (5.35) conduit à l'expression finale suivante :

$$\begin{aligned}
K_s^{sw}(\hat{r}; \hat{\theta}; \hat{\varphi}; T) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2M} \left((2m + \mu + \eta)^2 - \beta_0 - 1 \right) T \right] \\
& (\sin r_0 \sin r_N)^{-1} (\sin r_0 \sin r_N)^{\mu} (\cos r_0 \cos r_N)^{\eta} (\sin \theta_0 \sin \theta_N)^{\xi} \\
& (\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\frac{1}{2} + \lambda} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_N)^{\frac{1}{2} + \gamma} (\cos \theta_0 \cos \theta_N)^{\frac{1}{2} + k} \\
& (k + \xi + 2n + 1) (\gamma + \lambda + 2l + 1) (\lambda + \eta + 2m) \\
& \frac{2 \binom{m!}{m!} \binom{l!}{l!} \binom{n!}{n!} \Gamma(\eta + \mu + m)}{\Gamma(\mu + m + \frac{1}{2}) \Gamma(\eta + m + \frac{1}{2})} \\
& \frac{\Gamma(\gamma + \lambda + l + 1) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(\lambda + l + 1) \Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)} \\
& P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_0) P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_N) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_0) \\
& P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_N) P_m^{(\mu - \frac{1}{2}, \eta - \frac{1}{2})}(\cos 2r_0) P_m^{(\mu - \frac{1}{2}, \eta - \frac{1}{2})}(\cos 2r_N).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

5.2.2 Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés

Les énergies et les fonctions d'onde peuvent être déduites à partir du développement du propagateur sur les états propres de l'hamiltonien

$$K_s^{sw}(\hat{r}; \hat{\theta}; \hat{\varphi}; T) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n,l,m} T} \Phi_{l,n,m}^*(r_N, \theta_N, \varphi_N) \Phi_{l,n,m}(r_0, \theta_0, \varphi_0), \tag{5.43}$$

où

$$\Phi_{l,n,m}(r, \theta, \varphi) = (\sin r)^{-1} S_{l,n}(\theta, \varphi) \Psi_n^{PT}(r). \tag{5.44}$$

Par conséquent, le spectre d'énergies et les fonctions d'onde sont donnés par

$$\begin{aligned}
\Psi_m^{PT}(r) &= \left[2(\lambda + \eta + 2m) \frac{m! \Gamma(\eta + \mu + m)}{\Gamma(\mu + m + \frac{1}{2}) \Gamma(\eta + m + \frac{1}{2})} \right]^{1/2} \\
& (\sin r)^{\mu} (\cos r)^{\eta} P_m^{(\mu - \frac{1}{2}, \eta - \frac{1}{2})}(\cos 2r),
\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
S_{l,n}(\theta, \varphi) &= [(k + \xi + 2n + 1)(\gamma + \lambda + 2l + 1) \\
&\quad \frac{l! n! \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(\lambda + l + 1) \Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)}]^{1/2} \\
&\quad (\sin \varphi)^{\frac{1}{2} + \lambda} (\cos \varphi)^{\frac{1}{2} + \gamma} (\cos \theta)^{\frac{1}{2} + k} (\sin \theta)^\xi \\
&\quad P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta). \tag{5.46}
\end{aligned}$$

et

$$E_{n,l,m} = \frac{\hbar^2}{2M} \left((2m + \mu + \eta)^2 - \beta_0 - 1 \right). \tag{5.47}$$

5.2.3 Calcul du propagateur pour le potentiel de Kepler-Coulomb généralisé (GKC) sur S^3

Considérons maintenant le cas du potentiel généralisé de Kepler-Coulomb (GKC). Ce potentiel est défini dans l'espace sphérique par

$$f(r) = -\hat{k} / \tan r. \tag{5.48}$$

En insérant cette fonction dans l'expression de la partie radiale du propagateur $\mathbf{Y}_s(\hat{r}, T)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_s^{GKC}(\hat{r}, T) &= \exp \left[i\hbar \frac{T}{2M} \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi \hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left(-\hat{k} \cot \bar{r}_j + \frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sin^2 \bar{r}_j} \right) \right] \right\}. \tag{5.49}
\end{aligned}$$

Il est évident que ce noyau est bien celui du potentiel de Rosen-Morse trigonométrique (voir Appendice B.1). Sa solution se trouve dans plusieurs articles [32]. Par conséquent, l'expression (5.49) se met sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_s^{GKC}(\hat{r}, T) &= \exp \left[\frac{\hbar T}{i 2M} \right] K^{RMt}(\hat{r}; T) \\
&= \exp \left[\frac{\hbar T}{i 2M} \right] \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_m T} \Psi_m^{*RMt}(r_0) \Psi_m^{RMt}(r_N) \tag{5.50}
\end{aligned}$$

Sachant que le potentiel (GKC) est formé par le potentiel propre de Kepler-Coulomb avec

un paramètre \hat{k} et deux autres termes constituant deux barrières centrifuges ; alors, nous posons ($B_3 = 0$) dans l'expression du propagateur relatif au problème étudié. De ce fait, nous obtenons le résultat suivant

$$\begin{aligned}
K_s^{GKC}(\hat{r}; \hat{\theta}; \hat{\varphi}; T) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \exp \left[\frac{-i}{\hbar} \left(E_m - \frac{\hbar^2}{2M} \right) T \right] \\
&(\sin r_0 \sin r_N)^{-1} (\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\lambda} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\gamma} (\cos \theta_0 \cos \theta_N)^{\frac{1}{2}+k} \\
&(\sin \theta_0 \sin \theta_N)^{\xi} (k + \xi + 2n + 1) (\gamma + \lambda + 2l + 1) \\
&\frac{l! n! \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(\lambda + l + 1) \Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)} \\
&P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_0) P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_N) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_0) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_N) \\
&\Psi_m^{*RMt}(r_0) \Psi_m^{RMt}(r_N)
\end{aligned} \tag{5.51}$$

5.2.4 Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés

Il est facile de remarquer que le propagateur ci-dessus peut admettre l'écriture suivante

$$K_s^{GKC}(\hat{r}; \hat{\theta}; \hat{\varphi}; T) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n,l,m} T} \Phi_{l,n,m}^*(r_N, \theta_N, \varphi_N) \Phi_{l,n,m}(r_0, \theta_0, \varphi_0), \tag{5.52}$$

où

$$\Phi_{l,n,m}(r, \theta, \varphi) = (\sin r)^{-1} S_{l,n}(\theta, \varphi) \Psi_n^{RMt}(r). \tag{5.53}$$

Il vient que les fonctions d'onde et l'énergie sont donnés par

$$\Psi_m^{RMt}(r) = e^{-r \frac{\beta_m}{2}} (1 + \cot^2 r)^{\frac{\alpha_m}{2}} C_m^{(\alpha_m, \beta_m)}(\cot r), \tag{5.54}$$

$S_{l,n}(\theta, \varphi)$ est donnée par l'équation (5.46).

et

$$\begin{aligned}
E_{n,l,m} &= E_m - \frac{\hbar^2}{2M} \\
&= -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\left(m + k + \xi + 2n + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{\hat{k}^2}{4 \left(m + k + \xi + 2n + \frac{3}{2} \right)^2} + 1 \right],
\end{aligned} \tag{5.55}$$

avec $\alpha_m = -\left(m + k + \xi + 2n + \frac{3}{2}\right)$ et $\beta_m = \frac{\hat{k}}{\left(m+k+\xi+2n+\frac{3}{2}\right)}$.

5.3 Calcul du propagateur dans l'espace hyperbolique à 3 dimensions

Considérons maintenant le traitement du problème dans l'espace hyperbolique à 3 dimensions. La particule est soumise à un potentiel défini par

$$U_h = f(r) + \frac{1}{\sinh^2 r} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \theta} + \frac{B_2}{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi} + \frac{B_3}{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi} \right), \quad (5.56)$$

dont la métrique est

$$g_{ab} = \text{diag} (1, \sinh^2 r, \sinh^2 r \sin^2 \theta), \quad (5.57)$$

avec

$$g = \sqrt{\det g_{ab}} = \sinh^2 r \sin \theta, \quad (5.58)$$

et un élément de ligne

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2 + \sinh^2 r \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.59)$$

Le propagateur s'écrit en adoptant la même prescription « l'ordre de Weyl » comme suit :

$$\begin{aligned} K_h(r_N, r_0; \theta_N, \theta_0; \varphi_N, \varphi_0; T) &= \left[(\sinh r_N \sinh r_0)^2 (\sin \theta_N \sin \theta_0) \right]^{\frac{-1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi \hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{3N}{2}} \\ &\int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \quad d\theta_j \quad d\varphi_j \prod_{j=1}^N (\sinh^2 \bar{r}_j \sin \bar{\theta}_j) \\ &\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^N A(j, j-1) \right\}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

avec l'action élémentaire

$$\begin{aligned}
A(j, j-1) = & \left\{ \frac{M}{2\varepsilon} (\Delta r_j^2 + \sinh^2 \bar{r}_j \Delta \theta_j^2 + \sinh^2 \bar{r}_j \sin^2 \bar{\theta}_j \Delta \varphi_j^2) - \right. \\
& - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left[f(\bar{r}_j) + \frac{1}{\sinh^2 \bar{r}_j} \left(\frac{B_1}{\cos^2 \bar{\theta}_j} + \frac{B_2}{\sin^2 \bar{\theta}_j \cos^2 \bar{\varphi}_j} + \frac{B_3}{\sin^2 \bar{\theta}_j \sin^2 \bar{\varphi}_j} \right) \right. \\
& \left. \left. + \Delta \tilde{V}_W(\bar{r}_j, \bar{\theta}_j) \right] \right\}, \tag{5.61}
\end{aligned}$$

où

$$\Delta V_W = \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \tilde{V}_W \quad \text{et} \quad \Delta \tilde{V}_W = \left(1 - \frac{1}{4 \sinh^2 \bar{r}} - \frac{1}{4 \sinh^2 \bar{r} \sin^2 \bar{\theta}} \right). \tag{5.62}$$

D'après l'expression du propagateur (5.60), nous pouvons directement remarquer que l'intégrale de chemin dans l'espace hyperbolique \mathbf{H}^3 pour le potentiel (5.1.b) admet une expression identique à celle associée au potentiel (5.1.a) dans l'espace sphérique \mathbf{S}^3 . Il suffit de remplacer la fonction trigonométrique par la fonction hyperbolique dans la partie dépendante de la variable radiale r .

$$\begin{aligned}
K_h(r_N, r_0; \theta_N, \theta_0; \varphi_N, \varphi_0; T) = & (\sinh r_0 \sinh r_N)^{-1} (\sin \varphi_0 \sin \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\lambda} (\cos \varphi_0 \cos \varphi_N)^{\frac{1}{2}+\gamma} \\
& (\cos \theta_0 \cos \theta_N)^{\frac{1}{2}+k} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (k + \xi + 2n + 1) (\gamma + \lambda + 2l + 1) \\
& \frac{l! n! \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(\lambda + l + 1) \Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)} \\
& (\sin \theta_0 \sin \theta_N)^\xi P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_0) P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi_N) \\
& P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_0) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta_N) \mathbf{Y}_h(\hat{r}, T), \tag{5.63}
\end{aligned}$$

où $\mathbf{Y}_h(\hat{r}, T)$ est définie, dans ce cas, par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_h(\hat{r}, T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi \hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \prod_{j=1}^N \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} (f(\bar{r}_j) + 1) \right] - \frac{i \hbar \varepsilon (k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{2M \sinh^2 \bar{r}_j} \right\}. \tag{5.64}
\end{aligned}$$

A ce niveau, nous allons calculer l'intégrale de chemin pour deux cas particuliers de la fonction radiale $f(r)$ correspondant à deux potentiels à savoir le potentiel de Smorodinsky-Winternitz (SW) et le potentiel généralisé de Kepler-Coulomb (GKC).

5.3.1 Calcul du propagateur pour le potentiel de Smorodinsky-Winternitz (SW) sur H^3

D'après la métrique de l'espace hyperbolique, le potentiel de Smorodinsky-Winternitz (SW) a la forme suivante

$$f(r) = \beta_0 \tanh^2 r \quad . \quad (5.65)$$

Le propagateur (5.64) associé au potentiel ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h^{SW}(\hat{r}, T) = & \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} (\beta_0 \tanh^2 \bar{r}_j - 1) \right] - \frac{i\hbar \varepsilon}{2M} \frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sinh^2 \bar{r}_j} \right\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Afin d'avoir une écriture plus adéquate du noyau $\mathbf{Y}_h^{SW}(\hat{r}, T)$, nous utilisons la relation suivante

$$\tanh^2 r = 1 - \frac{1}{\cosh^2 r}, \quad (5.67)$$

qui nous permet d'aboutir à la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h^{SW}(\hat{r}, T) = & \exp \left[\frac{\hbar(\beta_0 + 1)}{i} \frac{T}{2M} \right] \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left(\frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sinh^2 \bar{r}_j} - \frac{\beta_0}{\cosh^2 \bar{r}_j} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Nous remarquons que le propagateur (5.68) correspond au potentiel de Pöschl-Teller modifié. Par conséquent, d'après [13] (*voir Appendice B.2*) la partie radiale $\mathbf{Y}_h^{SW}(\hat{r}, T)$ du problème

sous considération est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_h^{SW}(\hat{r}, T) &= \exp\left[\frac{\hbar(\beta_0 + 1)}{i} T\right] K^{PTm}(\hat{r}; T) \\
&= \exp\left[\frac{\hbar(\beta_0 + 1)}{i} T\right] \left\{ \sum_{m=0}^{G_{\max}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_m T} \Psi_m^*(r_0) \Psi_m(r_N) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty dh e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{h^2}{2M} T} \Psi_h^*(r_0) \Psi_h(r_N) \right\}, \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Finalement, en faisant appel aux solutions relatives au potentiel de Pöschl-Teller modifié, nous obtenons une expression compacte du propagateur associé au système traité contenant les états liés et les états continus

$$\begin{aligned}
K_h^{sw}(\hat{r}; \hat{\theta}; \hat{\varphi}; T) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{G_{\max}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n,l,m} T} \Phi_{n,m,l}^*(r_N, \theta_N, \varphi_N) \Phi_{n,m,l}(r_0, \theta_0, \varphi_0) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty dh e^{-\frac{i}{\hbar} E_h T} \Phi_{n,h,l}^*(r_N, \theta_N, \varphi_N) \Phi_{n,h,l}(r_0, \theta_0, \varphi_0) \right\}. \tag{5.70}
\end{aligned}$$

5.3.2 Spectre d'énergie et fonctions d'onde

Les fonctions d'onde ainsi que le spectre d'énergie admettent, d'après l'équation (5.70), les expressions suivantes :

- **Pour les états discrets :**

Les fonctions d'onde s'écrivent comme

$$\Phi_{n,m,l}(r, \theta, \varphi) = (\sinh r)^{-1} \Psi_m(r) S_{l,n}(\theta, \varphi), \tag{5.71}$$

où

$$\begin{aligned}
S_{l,n}(\theta, \varphi) &= \left[\frac{l! n! \Gamma(\gamma + \lambda + l + 1) \Gamma(k + \xi + n + 1)}{\Gamma(\gamma + l + 1) \Gamma(\lambda + l + 1) \Gamma(k + n + 1) \Gamma(\xi + n + 1)} \right. \\
&\quad \left. (k + \xi + 2n + 1) (\gamma + \lambda + 2l + 1) \right]^{\frac{1}{2}} (\sin \varphi)^{\frac{1}{2} + \lambda} (\cos \varphi)^{\frac{1}{2} + \gamma} \\
&\quad \times (\cos \theta)^{\frac{1}{2} + k} (\sin \theta)^\xi P_l^{(\lambda, \gamma)}(\cos 2\varphi) P_n^{(\xi, k)}(\cos 2\theta), \tag{5.72}
\end{aligned}$$

et

$$\Psi_m(r) = \left(\frac{2 m! (2\mu - 1) \Gamma(2\mu - m - 1)}{\Gamma(2\eta + m) \Gamma(2\mu - 2\eta - m)} \right)^{1/2} (\sinh r)^{2\eta-1/2} (\cosh r)^{2m-2\mu+3/2} P^{[2\eta-1, 2(\mu-\eta-m)-1]} \left(\frac{1 - \sinh^2 r}{\cosh^2 r} \right), \quad (5.73)$$

avec $G_{\max} \langle \mu - \eta - 1/2, \mu = \frac{1}{2} [1 \pm (\beta_0 + 1/4)^{1/2}] \rangle$ et $\eta = \frac{1}{2} [1 \pm (k + \xi + 2n + 1)]$.

Le spectre d'énergie discret est donné par

$$\begin{aligned} E_{n,l,m} &= E_m + (\beta_0 + 1) \\ &= \frac{\hbar^2}{2M} \left[(\beta_0 + 1) - [2(\mu - \eta - m) - 1]^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

- Pour les états continus :

Les fonctions d'onde admettent l'expression suivante

$$\Phi_{n,h,l}(r, \theta, \varphi) = (\sinh r)^{-1} \Psi_h(r) S_{l,n}(\theta, \varphi), \quad (5.75)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_h(r) &= N_h (\cosh r)^{2\mu-1/2} (\sinh r)^{2\eta-1/2} \\ &{}_2F_1 \left(\mu + \eta - h', \mu + \eta + h' - 1, 2\eta; -\sinh^2 r \right), \end{aligned} \quad (5.76)$$

avec

$$N_h = \frac{1}{\pi \Gamma(2\eta)} \left(\frac{h \sinh \pi h}{2} \right)^{1/2} \left[\Gamma(\mu + \eta - h') \Gamma(-\mu + \eta + h') \Gamma(\mu + \eta + h' - 1) \Gamma(-\mu + \eta - h' + 1) \right]^{1/2}$$

$S_{l,n}(\theta, \varphi)$ est la même que l'équation (5.72).

Le spectre d'énergie des états continus est donné par

$$E_h = \frac{\hbar^2}{2m} (h^2 + \beta_0 + 1). \quad (5.77)$$

avec $\hbar' = \frac{1}{2}(1 + ih)$ et h est un réel positif.

5.3.3 Calcul du propagateur pour le potentiel de Kepler-Coulomb généralisé (GKC) sur H^3

Considérons à nouveau le potentiel généralisé de Kepler-Coulomb (GKC). Dans l'espace hyperbolique à 3D ce potentiel a pour expression

$$f(r) = -\hat{k}/\tanh r \quad (5.78)$$

En substituant $f(r)$ dans l'équation (5.64), la partie radiale du propagateur en question prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h^{GKC}(\hat{r}, T) &= \exp\left[\frac{\hbar}{i} \frac{T}{2M}\right] \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2\varepsilon}{2M} \left(-\hat{k} \coth \bar{r}_j + \frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sinh^2 \bar{r}_j}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

La forme de $\mathbf{Y}_h^{GKC}(\hat{r}, T)$ est reconnue comme le potentiel de Manning-Rosen. Sa solution a été discutée dans [33] et s'écrit comme (*voir Appendice B.3*)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h^{GKC}(\hat{r}, T) &= \exp\left[\frac{\hbar}{i} \frac{T}{2M}\right] K^{MR}(\hat{r}; T) \\ &= \exp\left[\frac{\hbar}{i} \frac{T}{2M}\right] \sum_{m=0}^{D_{\max}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_m T} \Psi_m^{*MR}(r_0) \Psi_m^{MR}(r_N) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Par conséquent, le propagateur $K_h^{GKC}(\hat{r}; \hat{\theta}; \hat{\varphi}; T)$ pour $(B_3 = 0)$ admet l'expression suivante

$$K_h^{GKC}(\hat{r}; \hat{\theta}; \hat{\varphi}; T) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{D_{\max}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_{n,l,m} T} \Phi_{l,n,m}^*(r_N, \theta_N, \varphi_N) \Phi_{l,n,m}(r_0, \theta_0, \varphi_0), \quad (5.81)$$

où

$$\Phi_{l,n,m}(r, \theta, \varphi) = (\sin r)^{-1} S_{l,n}(\theta, \varphi) \Psi_m^{MR}(r). \quad (5.82)$$

5.3.4 Spectre d'énergie et fonctions d'onde des états liés

Les fonctions d'onde et l'énergie de ces états sont respectivement donnés par

$$\Psi_m^{MR}(r) = \left[\left(1 + \frac{4M|\alpha|}{\hbar(s+2m+1)^2} \right) (2q-2m-s-2) \frac{m! \Gamma(2q-m-1)}{\Gamma(m+s+1) \Gamma(2q-s-m-1)} \right]^{1/2} (1-e^{-2r})^{(s+1/2)} e^{-2r \frac{(q-s)}{(s-m-1)}} P_m^{(2q-2m-s-2, s)}(1-2e^{-2r}). \quad (5.83)$$

où $D_{\max} \langle \sqrt{M\alpha/2}/\hbar - \frac{1}{2}(s+1), \alpha = \frac{\hbar^2 \hat{k}}{2m}, q = \frac{(1+(s+2m+1)/2 + 2M\alpha/\hbar^2(s+2m+1))}{2}$, $s = 2(k + \xi + 2n + 1)$, $m + 1/2 - q < 0$ et $S_{l,n}(\theta, \varphi)$ est identique à l'expression de l'équation (5.72).

Le spectre d'énergie est donné par

$$\begin{aligned} E_{n,l,m} &= E_m + \frac{\hbar^2}{2M} \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{8M} (s+2m+1)^2 - \frac{2M\alpha^2}{\hbar^2 (s+2m+1)^2} + \frac{\hbar^2}{2M} \right). \end{aligned} \quad (5.84)$$

5.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons montré que le propagateur associé à une famille de potentiels super intégrables, peut être calculé par l'approche des intégrales de chemin dans l'espace Riemannien à courbure constante notamment sur l'espace sphérique et hyperbolique à $3D$ en utilisant le système des coordonnées polaires. L'intégrale de chemin a été effectuée dans le cadre de la prescription de l'ordre de Weyl d'une manière simple et élégante. Nous avons pu ramener le calcul de l'intégrale de chemin sur un espace courbe dépendant de trois variables (r, θ, φ) au calcul d'une intégrale de chemin unidimensionnelle radiale (r) sur un espace plat. Nous avons traité deux cas particuliers pour la fonction $f(r)$ en l'occurrence le potentiel de Smorodinsky-Winternitz et le potentiel généralisé de Kepler-Coulomb (sur \mathbf{S}^3 et \mathbf{H}^3). L'intégrale de chemin pour le potentiel SW se ramène à celle relative aux potentiels de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié dans les espaces sphérique et hyperbolique respectivement. Concernant le potentiel de KC, nous aboutissons aux intégrales de chemin relatives aux potentiels de Rosen-Morse trigonométrique et Manning-Rosen dans les espaces sphérique et hyperbolique respectivement. Le spectre d'énergies et les fonctions d'ondes sont exactement déduits .

Chapitre 6

Conclusion

Dans ce travail nous avons traité certains problèmes de la mécanique quantique non relativiste au moyen de l'approche des intégrales de chemin de Feynman. Comme une première application, nous avons analysé dans l'espace Euclidien le problème bien connu de Pöschl-Teller. Grâce à des relations mathématiques simples, nous avons évalué, dans l'espace de configurations, le propagateur pour deux cas différents à savoir $\lambda = k$ et λ et k quelconques. De plus, nous avons construit la fonction de Green pour ce même potentiel dans l'espace des phases en utilisant la méthode connue sous le nom de fonctionnelle delta de Dirac. Les spectres d'énergie et les fonctions d'onde déduits sont exacts et concordent parfaitement avec ceux de la littérature.

La deuxième partie est une application de l'intégrale de chemin dans l'espace courbe. La formulation de l'intégrale de chemin est reconsidérée dans ce cas et fait l'objet du quatrième chapitre. La courbure de l'espace est prise en compte au moyen du potentiel effectif. Comme application, nous avons traité, dans le cinquième chapitre, une classe de potentiels super intégrables dépendant des variables (r, θ, φ) avec en plus une fonction radiale arbitraire $f(r)$. Nous avons effectué le calcul du propagateur en adoptant la prescription dite « l'ordre de Weyl » et en utilisant les coordonnées polaires dans les espaces sphérique et hyperbolique à 3D. Par conséquent, nous avons séparé les parties angulaires en θ et φ de la partie radiale. Le potentiel de Smorodinsky-Winternitz comme le potentiel de Kepler-Coulomb appartiennent à cette classe de potentiels. Pour le potentiel de (SW), l'intégrale de chemin associée à la partie radiale est identifiée avec les propagateurs de Pöschl-Teller (dans l'espace sphérique) et Pöschl-Teller modifié (dans l'espace hyperbolique). Cependant, pour le potentiel de K-C, elle est identifiée

avec les potentiels de Rosen-Morse trigonométrique (dans l'espace sphérique) et Manning-Rosen (dans l'espace hyperbolique). Les spectres d'énergie et les fonctions d'onde ont été déduits.

Appendices

Appendice A : Exposition de la technique de la fonctionnelle delta de Dirac

Appendice B : Solution par l'intégrale de Chemin de :

*** B.1. Le Potentiel de Rosen-Morse trigonométrique**

*** B.2. Le Potentiel de Pöschl-Teller modifié**

*** B.3. Le Potentiel de Manning-Rosen**

Appendice C : Présentation du concept de l'espace courbe

Appendice A

exposition de la technique de la fonctionnelle delta de Dirac

Considérons l'intégrale de chemin dans l'espace des phases correspondant à un Hamiltonien linéaire en $q(t)$

$$K(b, T; a, 0) = \int \left[\frac{dp dq}{2\pi} \right] \exp \left\{ i \int [p\dot{q} - f(p) q - h(p)] dt \right\}, \quad (\text{A.1})$$

sa représentation discrète définie en mid-point en q s'écrit

$$K(b, T; a, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n \prod_{n=1}^{N-1} dq_n (2\pi)^{-N} \exp \left\{ i \sum_{n=0}^{N-1} \left[p_n (q_{n+1} - q_n) - \frac{1}{2} f(p_n) (q_{n+1} + q_n) \varepsilon - h(p_n) \varepsilon \right] \right\} \quad (\text{A.2})$$

avec la notation standard suivante $\varepsilon = \frac{T}{N} = t_n - t_{n-1}$, $q(t_0 = 0) = q_0 = a$, $q(t_N) = q_N = b$.

Le p_n est le moment situé au temps entre q_n et q_{n+1} . L'intégration sur les dq_n nous donne un produit des fonctions delta de Dirac de la variable impulsion p_n . Il s'en suit que, l'équation (A.2) devient

$$K(b, T; a, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=0}^{N-1} dp_n (2\pi)^{-1} \prod_{n=1}^{N-1} \delta \left(p_{n-1} - p_n - \frac{1}{2} f(p_{n-1}) \varepsilon - \frac{1}{2} f(p_n) \varepsilon \right) \times \exp \left\{ i (p_{N-1} b - p_0 a) - i \sum_{n=0}^{N-1} h(p_n) \varepsilon \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Il est clair que l'expression (A.3) contient une intégrale dp_n de plus que les fonctions delta. De ce fait, l'intégrale fonctionnelle sur les moments conjugués $p(t)$ se réduit en une intégrale ordinaire. Le moment relatif à un point quelconque le long du chemin peut être choisi comme variable d'intégration supplémentaire maintenue. Ce moment servira de condition initiale pour résoudre l'équation du premier ordre du mouvement.

Choisissons d'intégrer sur tous les p sauf sur p_k .

Considérons d'abord l'intégration sur dp_{k+1} , Nous devons alors intégrer la fonction delta suivante

$$\delta \left(p_k - p_{k+1} - \frac{1}{2} f(p_{k+1}) \varepsilon - \frac{1}{2} f(p_k) \varepsilon \right).$$

Or, l'argument de cette fonction delta est une fonction de p_{k+1} . Pour cela, nous devons utiliser l'identité suivante

$$\delta (g(p)) = \sum_{r \in \text{racines}} \frac{\delta(p - p_r)}{|g'(p_r)|}, \quad (\text{A.4})$$

où p_r sont les racines de l'équation $g(p) = 0$ pour que la fonction delta retrouve sa forme linéaire en p_{k+1} .

Supposons que l'équation du mouvement de la variable impulsion représentant l'argument de la fonction delta en question admet une seule racine, dans ce cas la fonction delta se réduit à

$$\frac{\delta(p_{k+1} - F(p_k, (k+1)\varepsilon))}{1 + \frac{1}{2} f'(p_{k+1}) \varepsilon},$$

Il est facile de déduire que l'intégration sur l'intervalle des moments conjugués $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_{N-1}$ donne, pour un ordre n , la fonction delta suivante

$$\frac{\delta(p_n - F(p_k, n\varepsilon))}{1 + \frac{1}{2} f'(p_n) \varepsilon}, \quad (\text{A.5})$$

où $F[p_k, n\varepsilon]$ est la solution de l'équation en impulsion du mouvement au temps $n\varepsilon$ et qui donne le moment initial p_k au temps $k\varepsilon$.

Dans l'intervalle des moments conjugués inférieurs ou égales à p_{k-1} , le même procédé de calcul conduit au résultat suivant

$$\frac{\delta(p_n - F(p_k, n\varepsilon))}{1 - \frac{1}{2} f'(p_n) \varepsilon}. \quad (\text{A.6})$$

Notons que le changement de signe dans l'équation ci-dessus est dû au changement de signe dans l'argument de la fonction delta correspondante.

En reportant le résultat de l'intégration sur les moments $p(t)$ dans (3.62), il s'en suit que le

propagateur peut être écrit sous la forme

$$K(b, T; a, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{dp_k}{(2\pi)} \exp \left\{ i(p_{N-1} b - p_0 a) - i \sum_{n=0}^{N-1} h(p_n) \varepsilon - \frac{1}{2} \sum_{n=k+1}^{N-1} f'(p_n) \varepsilon + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k-1} f'(p_n) \varepsilon \right\}, \quad (\text{A.7})$$

où $p_n = F(p_k, n \varepsilon)$ est la solution de l'équation du mouvement au temps $n \varepsilon$ et p_k est la condition initiale au temps $k \varepsilon$.

A la limite $N \rightarrow \infty$, la somme sur $f'(p_n)$ devient une intégrale

$$-\frac{1}{2} \int_{t_k}^T f'(p) dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_k} f'(p) dt. \quad (\text{A.8})$$

Puisque $\dot{p} = -f(p)$ est l'équation du mouvement en $p(t)$, l'équation (3.67) s'intègre directement et donne

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{f(p(T)) f(p(0))}{f(p_k)^2} \right), \quad (\text{A.9})$$

Et en tenant compte de la relation $\frac{dp(t)}{dt} = \frac{dp(t)}{dp_k} \frac{dp_k}{dt}$, nous pouvons écrire $f(p(T)) = \frac{dp(T)}{dp_k} f(p_k)$.

De plus l'exponentielle de l'équation (3.68) donne le Facteur de Composition suivant

$$\left[\frac{dp(T)}{dp_k} \frac{dp(0)}{dp_k} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.10})$$

Finalement, nous obtenons pour une intégrale de chemin linéaire par rapport à la variable position $q(t)$, le résultat général suivant :

$$K(b, T; a, 0) = \int \frac{dp_k}{2\pi} \left[\frac{dp(T)}{dp_k} \frac{dp(0)}{dp_k} \right]^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ i[p(T) b - p(0) a] - i \int_0^T h(p) dt \right\}. \quad (\text{A.11})$$

Appendice B

Solution par l'intégrale de Chemin de :

B.1. Le Potentiel de Rosen-Morse trigonométrique :

La solution via les intégrales de chemins pour le potentiel de Pöschl-Teller se trouve dans [32].

$$\begin{aligned}
 K^{MRt}(\hat{r}; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i \varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left(-\hat{k} \cot \bar{r}_j + \frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sin^2 \bar{r}_j} \right) \right] \right\} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} E_m T} \Psi_m^{*MRt}(r_0) \Psi_m^{MRt}(r_N)
 \end{aligned} \tag{B.1.1}$$

avec $(0 < r < \pi)$.

Les fonctions d'onde et le spectre d'énergie des états liés sont donnés par

$$\Psi_m^{MRt}(r) = e^{-r \frac{\beta_m}{2}} (1 + \cot^2 r)^{\frac{\alpha_m}{2}} C_m^{(\alpha_m, \beta_m)}(\cot r), \tag{B.1.2}$$

et

$$E_{RMt} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left[\left(m + k + \xi + 2n + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{\hat{k}^2}{4 \left(m + k + \xi + 2n + \frac{3}{2} \right)^2} + 1 \right], \tag{B.1.3}$$

avec $\alpha_m = -\left(m + k + \xi + 2n + \frac{3}{2}\right)$ et $\beta_m = \frac{\hat{k}}{\left(m + k + \xi + 2n + \frac{3}{2}\right)}$.

B.2. Le Potentiel de Pöschl-Teller modifié :

Le cas du potentiel de Pöschl-Teller modifié est traité dans [13] :

$$\begin{aligned}
K^{PTm}(\hat{r}; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2\varepsilon}{2M} \left(\frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sinh^2 \bar{r}_j} - \frac{\beta_0}{\cosh^2 \bar{r}_j} \right) \right] \right\} \\
&= \left\{ \sum_{m=0}^{G_{\max}} e^{\frac{-i}{\hbar} E_m T} \Psi_m^*(r_0) \Psi_m(r_N) + \int_0^\infty dh e^{\frac{-ih^2}{2M} T} \Psi_h^*(r_0) \Psi_h(r_N) \right\} \quad \text{(B.2.1)}
\end{aligned}$$

où $r \rangle 0$.

Les fonctions d'onde ainsi que le spectre d'énergie sont donnés par :

- **Pour les états discrets**

$$\begin{aligned}
\Psi_m(r) &= \left(\frac{2 m! (2\mu - 1) \Gamma(2\mu - m - 1)}{\Gamma(2\eta + m) \Gamma(2\mu - 2\eta - m)} \right)^{1/2} (\sinh r)^{2\eta-1/2} (\cosh r)^{2m-2\mu+3/2} \\
&\quad P^{[2\eta-1, 2(\mu-\eta-m)-1]} \left(\frac{1 - \sinh^2 r}{\cosh^2 r} \right), \quad \text{(B.2.2)}
\end{aligned}$$

Les $P_n^{(\alpha, \beta)}$ sont les polynômes de Jacobi, et $G_{\max} \langle \mu - \eta - 1/2, \mu = \frac{1}{2} [1 \pm (\beta_0 + 1/4)^{1/2}]$, $\eta = \frac{1}{2} [1 \pm (k + \xi + 2n + 1)]$.

Le spectre discret s'écrit comme

$$E_m = -\frac{1}{2M} [2(\mu - \eta - m) - 1]^2. \quad \text{(B.2.3)}$$

- **Pour le cas continu**

les fonctions d'onde ont pour expression

$$\begin{aligned}
\Psi_h(r) &= N_h (\cosh r)^{2\mu-1/2} (\sinh r)^{2\eta-1/2} \\
&\quad {}_2F_1 \left(\mu + \eta - h', \mu + \eta + h' - 1, 2\eta; -\sinh^2 r \right), \quad \text{(B.2.4)}
\end{aligned}$$

où

$$N_h = \frac{1}{\pi\Gamma(2\eta)} \left(\frac{h \sinh \pi h}{2} \right)^{1/2} \left[\Gamma(\eta + \mu - h) \Gamma(\eta - \mu + h) \Gamma(\eta + \mu + h' - 1) \Gamma(\eta - \mu - h' + 1) \right]^{1/2}, \quad (\text{B.2..5})$$

les ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; r)$ sont les fonctions hypergéométriques.

Le spectre continu est donné par l'équation

$$E_h = \frac{\hbar^2}{2M} h^2, \quad (\text{B.2..6})$$

avec $h' = \frac{1}{2}(1 + ih)$.

B.3. Le Potentiel de Manning-Rosen :

Nous pouvons trouver la solution de l'intégrales de chemins pour le potentiel de Manning-Rosen dans [33] :

$$\begin{aligned} K^{MR}(\hat{r}; T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{M}{2\pi\hbar i\varepsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \int \prod_{j=1}^{N-1} dr_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N \left[\frac{M}{2\varepsilon} \Delta r_j^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hbar^2 \varepsilon}{2M} \left(-\hat{k} \coth \bar{r}_j + \frac{(k + \xi + 2n + 1)^2 - 1/4}{\sinh^2 \bar{r}_j} \right) \right] \right\}. \\ &= \sum_{m=0}^{D_{\max}} e^{-\frac{i}{\hbar} E_m T} \Psi_m^{*MR}(r_0) \Psi_m^{MR}(r_N), \quad r > 0. \quad (\text{B.3.1}) \end{aligned}$$

Les fonctions d'onde et le spectre d'énergie sont donnés par

$$\begin{aligned} \Psi_m^{MR}(r) &= \left[\left(1 - \frac{4M|\alpha|}{\hbar(s+2m+1)^2} \right) (2q - 2m - s - 2) \frac{m! \Gamma(2q - m - 1)}{\Gamma(m + s + 1) \Gamma(2q - s - m - 1)} \right]^{1/2} \\ &\quad (1 - e^{-2r})^{(s+1/2)} e^{-2r \frac{(q-s)}{(s-m-1)}} P_m^{(2q-2m-s-2, s)}(1 - 2e^{-2r}). \quad (\text{B.3.2}) \end{aligned}$$

Les $P_n^{(\alpha, \beta)}$ sont les polynômes de Jacobi, avec $D_{\max} \langle \sqrt{M\alpha/2}/\hbar - \frac{1}{2}(s+1) \rangle$, $\alpha = \frac{\hbar^2}{2m} \hat{k}$, $s = 2\eta$,

$q = (1 + (s + 2m + 1) / 2 + 2M\alpha / \hbar^2 (s + 2m + 1)) / 2$ et $m + 1/2 - q < 0$.

Le spectre s'écrit comme

$$E_m = -\frac{\hbar^2}{8M} (s + 2m + 1)^2 - \frac{2M\alpha^2}{\hbar^2 (s + 2m + 1)^2}. \quad (\mathbf{B.3.3})$$

Appendice C

Présentation du concept de l'espace courbe

C.1. Espace courbe

La notion d'espace (intrinsèquement) courbe a mis beaucoup de temps avant de s'imposer. Pour la définir il convient de dépasser le premier modèle de géométrie systématiquement développée qu'est la géométrie d'Euclide [25]. De ce point de vue, l'émergence au début du XIXe siècle des géométries non-euclidiennes a joué un rôle déterminant, qui a été encore amplifié par l'oeuvre révolutionnaire de Bernhard Riemann en 1854. Ce contexte mathématiquement riche sera complété par la reconnaissance par Albert Einstein qu'il pouvait servir de cadre à sa théorie de la Relativité Générale, qui identifie les effets gravitationnels à la courbure de l'espace. Le sujet n'a cessé de se développer tout au long du XXe siècle, avec notamment la recherche de conséquences sur la topologie globale de l'espace d'hypothèses sur la courbure vérifiées en chaque point sur la topologie globale de l'espace. A partir des années 1970 la considération systématique d'espaces moins réguliers a été un important moteur de la recherche.

Le concept d'espace courbe est aujourd'hui utilisé pour modéliser des réalités très diverses [26]. Il apparaît par exemple dans l'étude des défauts cristallins en physique du solide. Il joue également un rôle important dans des appareils de technologie avancée comme le "Global Positioning System" (= GPS), qui permettent déjà de localiser un récepteur GPS à quelques mètres près, et qui doivent pour cela prendre en compte des effets complexes de relativité générale eux-mêmes liés à la courbure de l'espace.

La relativité générale ajouta à cette vision que la présence de matière pouvait déformer localement l'espace-temps lui-même (et non pas juste les trajectoires. voir Figure 1), de telle manière que des trajectoires dites géodésiques c'est à dire intuitivement de longueur minimale à travers l'espace-temps ont des propriétés de courbure dans l'espace et le temps. Les géodésiques sont les trajectoires vérifiant le principe de moindre action, suivies par les particules test (c'est à dire dont l'influence sur le champ de gravitation dans lequel elles se déplacent est négligeable, ce qui est le cas par exemple d'un satellite artificiel autour de la Terre ou bien d'un photon passant à côté du Soleil mais pas d'une étoile orbitant autour d'une autre dans un système

binaire oscillant rapidement), elles ont donc une importance pratique très importante pour la compréhension intuitive d'un espace courbe.

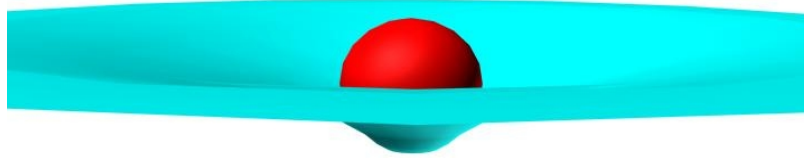


Figure 3. Représentation schématique à 2 dimensions de la courbure de l'espace induite par une planète

C.2. Géométrie non-euclidienne

La description géométrique de la théorie physique due à Einstein trouve ses origines dans les avancées de la géométrie non euclidienne, qui résultent des différentes tentatives au cours des siècles de démontrer le cinquième postulat d'Euclide, qui énonce que : « par un point on ne peut mener qu'une parallèle à une droite donnée ». Ces efforts culminèrent au XIXe siècle avec la découverte par les mathématiciens Nicolaï Ivanovitch Lobatchevsky, János Bolyai et Carl Friedrich Gauss que ce postulat pouvait être remplacé par un autre (plusieurs parallèles possibles, ou pas de parallèle du tout), et ne constituait donc qu'un axiome arbitraire. Les géométries non-euclidiennes sont toutes les géométries qui satisfont non nécessairement tous les axiomes de Hilbert mais sans en contredire aucune (contrairement aux anciens axiomes d'Euclide et en particulier celui sur les parallèles).

Une représentation particulière de ce type de géométrie consiste à définir les points comme étant répartis sur la surface d'une sphère (ce sont les intersection des diamètres de la sphère avec la surface), et les lignes, pour généraliser le concept de droite, (nous disons maintenant "géodésique"), comme les intersections de la surface de la sphère avec les plans contenant le centre de la sphère. Deux points définissent alors de façon unique une ligne et un point est toujours donné par l'intersection de deux lignes. Cependant, dans cette géométrie, si nous nous donnons une ligne AB et un point P, il n'existe aucune ligne passant par P et ne coupant pas

AB. Ainsi, le cinquième postulat d'Euclide n'est pas satisfait car en P nous ne pouvons tracer aucune parallèle à AB (voir Figure 4).

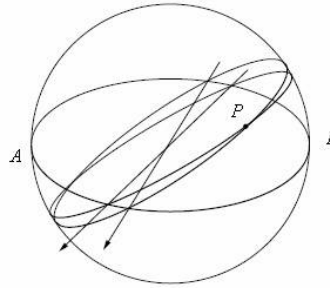


Figure 4

En géométrie, une géodésique désigne le chemin le plus court, ou l'un des plus courts chemins s'il en existe plusieurs, entre deux points d'un espace pourvu d'une métrique (un moyen de mesurer les distances). Les différentes géométries peuvent être caractérisées par une quantité appelée courbure. Les espaces plats sont de courbure nulle (figure 1). La sphère étant l'exemple typique de surface à courbure positive (figure 4, 6), comme celle de Riemann (1867) (somme des angles d'un triangle supérieure à 180° , parallèles se rejoignant aux pôles), les espaces avec de telles courbures sont appelés sphériques. Enfin il existe des espaces à courbure négative (figure 7), comme celle de Lobatchevsky (1829) et Bolyai (1832) (somme des angles d'un triangle inférieur à 180° , nombre infini de parallèles possibles à une droite par un point), que l'on appelle espaces hyperboliques.



Figure 5. Surfaces à courbure nulle : cylindre et cône.

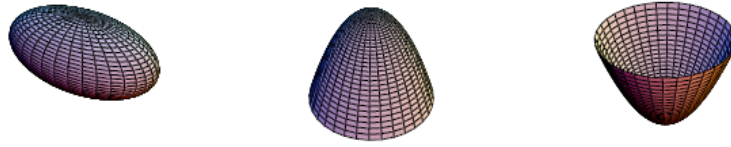


Figure 6. Surfaces à courbure positive : ellipsoïde, maximum local, minimum local.



Figure 7. Surfaces à courbure négative : col, hyperboloïde à une nappe.

La géométrie communément appelée « géométrie de Riemann » est un espace sphérique à trois dimensions, espace fini et cependant sans bornes, à courbure régulière, alternative au postulat euclidien des parallèles.

Le système de coordonnées de Riemann est une géométrie adaptée aux espaces courbes qui fait intervenir une composante appelée le tenseur dont la réalité physique ne change pas et dont les lois sont invariantes par rapport à un certain nombre de transformation – ses propriétés de symétrie sont préservées, mais dont les composantes, les valeurs des grandeurs, se modifient en fonction du référentiel. Ce tenseur représente les composantes de chaque point de l'espace.

Dans les quatre dimensions d'un espace- temps euclidien repéré par une métrique minkowskienne, il faut quatre paramètres pour connaître l'intervalle entre deux événements. Le développement de cette somme se traduit par une équation différentielle de 16 termes en chaque point !

Dans l'espace de Riemann ou les axes de coordonnées sont des courbes variables, le fameux "mollusque" qu'affectionnait Einstein il faut pouvoir déterminer l'angle de courbure. Sans cette détermination l'équation du rayon vecteur ds n'est plus un invariant. Pour retrouver cette invariance le système de coordonnées de Gauss s'impose. En appliquant des lois de transformation sur la composante $g_{\mu\nu}$, le tenseur métrique de rang deux du tenseur du courbure de Riemann

– Christoffel, on obtient une relation dérivée covariante.

Le tenseur de Riemann-Christoffel, dit tenseur de courbure et le tenseur-clé de la théorie généralisée d'Einstein. Il dispose de quatre indices et est symbolisé par $R^\lambda_{\mu\nu k}$ (l,m,n et K en notation latine). Le tenseur de courbure $R^\alpha_{\beta[\mu\sigma]}$ se décompose en deux parties, le tenseur de Weyl, $C_{[\alpha\beta][\mu\tau]}$ et le tenseur de Ricci, $R_{\beta\nu}$ comportant chacun 10 composantes, 10 rayons de courbure différents [27] !

C.3. Les composantes du tenseur métrique

Dans un espace à 2 dimensions, le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ à 3 composantes indépendantes, il y en a 6 dans un espace à 3 dimension et 10 dans l'espace-temps à 4 dimensions, cela par application de la de la formule $N(N + 1)/2$ ou N est le membre de dimension de l'espace considéré.

Utilisons le théorème de Pythagore pour mesurer l'intervalle ds^2 qui sépare deux à la surface d'une sphère d'un espace à 2 dimensions :

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2, & (C.1) \\ ds^2 &= g_{XX}(x, y) dx^2 + g_{XY}(x, y) dx dy + g_{YX}(x, y) dy dx + g_{YY}(x, y) dy^2, \\ ds^2 &= g_{11} dx^2 + g_{12} dx dy + g_{21} dy dx + g_{22} dy^2. \end{aligned}$$

Les trois fonctions $g_{XX}(x, y), g_{XY}(x, y)$ et $g_{YX}(x, y)$ sont appelées les composantes du tenseur métrique.

Dans un espace -temps à 2 dimensions, si les $\{x^1, x^2\}$ forment le système de coordonnées, l'équation de Pythagore s'écrit :

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^2 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (C.2)$$

Disposons les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique dans une matrice carrée :

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{12} &= 2, \\ g_{21} &= 3, & g_{22} &= 1. \end{aligned}$$

Si l'espace-temps se courbe, les axes ne seront plus perpendiculaires entre eux et nous devons utiliser les produits $dx dy$ dans l'équation (C.1) car les composantes g_{12} et g_{21} seront différentes de 0.

Bibliographie

- [1] R. MacKenzie, Path integral methods and applications, cours donné aux Rencontres du Vietnam : VIth Vietnam School of Physics, Vung Tau, Vietnam, 27 December 1999 - 8 January 2000. Texte complet disponible sur l'ArXiv : quant-ph/0004090.
- [2] C. Cohen-Tannoudji et S. Haroche, Complements de Mécanique quantique (C. Cohen-Tannoudji), Notes de cours rédigées en 1966 par Serge Haroche.
- [3] F. Gimbert, Intégrales de Chemin et Fentes d'Young. (Rapport JANUS, Clermont-Ferrand, 2005).
- [4] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, and Polymer Physics, and Financial Markets (World Scientific; 3rd Ed., 2004).
- [5] David Sénéchal, Mécanique Quantique. Notes de Cours (PHY-731), Université de Sherbrooke, Québec 2000.
- [6] M. Chaichian and A. Demichev, Path Integrals in Physics, Volume I, Stochastic Processes and Quantum Mechanics, I. O. P. Publishing, Bristol, 2001.
- [7] D. C. Khandekar, S. V. Lawande and K. V. Bhagwat, Path Integral Methods and their Applications. (World Scientific Publishing, Singapore, 1993).
- [8] Ching-teh Li, Chinese Journal of Physics, Vol. 32, No.4, Augst 1994.
- [9] C. Dewitt-Morette, Annales de l'I.H.P., section A, tome 11, n° 2 (1969), p. 153-206.
- [10] C. Grosche, An Introduction into the Feynman path integral, cours donné au Quantenfeldtheorie und deren Anwendung in der Elementarteilchen- und Festkörperphysik, Universität Leipzig, 16-26 November 1992. Texte complet disponible sur l'ArXiv : hep-th/9302097.
- [11] C. Grosche, G. S. Pogosyan and A. N. Sissakian, DESY 94 - 018, February 1994.

- [12] F. Constantinescu and E. Magyari, Problems in Quantum Mechanics.(Pergamon Press, Oxford, 1971).
- [13] C. Grosche, J. Phys. A : Math. Gen. 22 (1989) 5073-5087.
- [14] G. Pöschl and E. Teller, Z. Phys, 83 (1933) 143.
- [15] A. Inomata and M. A. Kayed, Phys. Lett, Vol 108, n° 1, March 1985.
- [16] A. O. Barut, A. Inomata and R. Wilson, J. Phys. A : Math. Gen. 20(1987) 4075.
- [17] A. Anderson and S. B. Anderson, Phase Space Path Integration of Integrable Quantum Systems ; Annals of Physics, **199** (1990) 155-186.
- [18] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products ; Academic Press, Seventh Edition, New York, (2007) .
- [19] A. Katz, “Classical Mechanics, Quantum Mechanics, Field Theory,” Academic Press, New York, 1965.
- [20] S. B. Anderson, PhD thesis, Montana State Univ., 1984, unpublished.
- [21] B.S. DeWitt, Rev. Mod. Phys. 29 (1957) 377.
- [22] D.C. McLaughlin, L.S. Schulman : J. Math. Phys. 12 (1971) 252.
- [23] M. Mizrahi, J. Math. Phys. 16 (1975) 2201.
- [24] C. Grosche and F. Steiner, Z. Phys. C - Particles and Fields 36, 699-714 (1987).
- [25] J.-P. Bourguignon, Espaces courbes, in “Qu’est-ce que l’univers ?”, Université de tous les savoirs, sous la direction d’Y. Michaud, vol. 4, Odile Jacob (2001), 152–163.
- [26] P. de la Harpe, Espaces Courbes, Université de Genève, (2001).
- [27] P. Tourrec, “Relativité et Gravitation”, Armand Colin,1992, p61 et suivantes.
- [28] C. Grosche, Path Integrals, Hyperbolic Spaces, and Selberg trace formulae, (World Scientific, Singapore, 1996) .
- [29] C. Grosche, The Product Form for Path Integrals on Curved Manifolds, DESY 87-160 (1987).
- [30] N.W. Evans, Superintegrability in classical mechanics, Phys. Rev. A, 1990, V.41, N 10, 5666–5676.

- [31] F. J. Herranz and A. Ballesteros, Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications, Vol. 2 (2006), Paper 010, 22 pages.
- [32] C. Grosche, Path Integral Discussion of Scarf-like Potentials, Il Nuovo Cimento, Vol. 108 B, N. 12, Dicembre 1993.
- [33] C. Grosche, desy 99-011, quant-ph/9902017, 1999.

Abstract

This work is devoted to the study of non-relativistic movements in the context of Feynman path integral formalism. While placing itself initially, in Euclidean space, and in second place, in a Riemannian space.

In the first part, we study the behaviour of a particle being driven in a potential of Pöschl-Teller in a Euclidian space, for ($\lambda=k$ and λ and k unspecified), in the space of configuration and the space of the phases. In this last, the functional technique of delta of Dirac was adapted. The spectrum and the functions of wave were obtained using certain mathematical relations and are exactly identical to those obtained by the resolution of the equation of Schrödinger.

In the second part, we treat, in space Riemannian with a constant curve, the movement of a particle subjected to a class of superintegrable potential, dependent on an arbitrary radial $f(r)$ function. The study was made in spherical and hyperbolic with 3D spaces, by using the system of polar coordinate where the system admits a separation of variables. The propagator was evaluated by adapting the prescription called "the order of Weyl" and by applying some mathematical formulas. With an elegant and more natural manner one could bring back the path integral in a curved space dependent on the variables (r, θ, φ) has an path integral dependent only on the (r) variable in a flat space.

We treated two particular cases of $f(r)$, namely the potential of Smorodinsky-Winternitz and the potential of Kepler-Coulomb (in each space mentioned above). The path integrals for the case of the Smorodinsky-Winternitz potential, in spherical and hyperbolic with 3D spaces, were brought back to the path integrals relating to the potentials of Pöschl-Teller and modified Pöschl-Teller respectively. For the potential of Kepler-Coulomb, we brought back the problem to those of trigonometrical Rosen-Morse and Manning-Rosen respectively. The energies spectra and the wave functions are exactly deduced.

Key Words: Path Integral, Propagator, Green function, Spectrum, Energy, Superintegrable Potential, Space, Metric, Curvature.

ملخص

تخص هذه الرسالة دراسة الحركات غير النسبية في إطار نظرية تكامل المسالك لـ Feynman في فضاء اقليدس، ثم في فضاء ريمان.

في الجزء الأول، تم دراسة سلوك جسيم يتحرك داخل كمون Pöschl-Teller في فضاء اقليدس. باستعمال تمثيل فضاء الإحداثيات ثم في فضاء الأطوار. في هذا الأخير، تم استعمال تقنية الدالة دالتا لـ Dirac. لقد تم الحصول على طيف الطاقة و دوال الموجة المرافقة عن طريق استخدام بعض العلاقات الرياضية وهي مطابقة تماما لتلك التي تم الحصول عليها عن طريق حل معادلة شرودنجر.

في الجزء الثاني، ندرس في فضاء ريمان ذو انحناء ثابت، حركة جسيم يخضع لفئة كمون فانق التكامل، تتعلق بدالة قطرية اختيارية $f(r)$. أجريت الدراسة في الفضاء الكروي و فضاء القطع الزائد ذو ثلاثة أبعاد، وذلك باستخدام نظام الإحداثيات القطبية. إن الناشر تم تقييمه من خلال خاصية تسمى "نظام Weyl"، بتطبيق بعض الصيغ والمعادلات الرياضية. بطريقة أنيقة تم تحويل الناشر في الفضاء المنحني ذو ثلاثة أبعاد (r, θ, φ) إلى ناشر قطري أحادي البعد (r) في الفضاء المستوي.

لقد عالجتنا حالتين خاصتين لـ $f(r)$ هما كمون Smorodinsky-Winternitz و كمون Kepler-Coulomb (في الفضائين المذكورين أعلاه). تكامل المسالك في حالة كمون Smorodinsky-Winternitz, في الفضاء الكروي و فضاء القطع الزائد, قد تم تحويلهم إلى تكامل المسالك المتعلقة بكمون Pösch-Teller و Pöschl-Teller Modifié على التوالي. فيما يخص كمون Kepler-Coulomb, لقد تم تقليص المسألة إلى تلك المتعلقة بكمون Rosen-Morse المثلي و Manning-Rosen على الترتيب. لقد تم في كلتا الحالتين استنتاج أطياف الطاقة ودوال الموجة.

مفاتيح الكلمات

تكامل المسالك, الناشر, دالة Green, طيف, طاقة, كمون فانق التكامل, فضاء, المترية, الانحناء.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de mouvements quantiques d'une particule non relativiste dans le cadre du formalisme des intégrales de chemins de Feynman. En se plaçant en premier lieu, dans un espace Euclidien, et en deuxième lieu, dans un espace Riemannien.

Dans la première partie, nous étudions le comportement d'une particule se mouvant dans un potentiel de Pöschl-Teller dans un espace Euclidien, pour ($\lambda=k$ et λ et k quelconques), dans l'espace de configuration et l'espace des phases. Dans ce dernier, la technique fonctionnelle de delta de Dirac a été adoptée. Le spectre et les fonctions d'onde ont été obtenus à l'aide de certaines relations mathématiques et sont exactement identiques à ceux obtenus par la résolution de l'équation de Schrödinger.

Dans la deuxième partie, nous traitons, dans l'espace Riemannien avec une courbure constante, le mouvement d'une particule soumise à une classe de potentiels super intégrable, dépendante d'une fonction radiale arbitraire $f(r)$. L'étude a été faite dans les espaces sphérique et hyperbolique à 3D, en utilisant le système de coordonnées polaires où le système admet une séparation de variables. Le propagateur a été évalué en adoptant la prescription dite " l'ordre de Weyl " et en appliquant successivement quelques formules mathématiques. Avec une manière élégante et plus naturelle on a pu ramener l'intégrale de chemin dans un espace courbe dépendante des variables (r, θ, φ) à une intégrale de chemin dépendante seulement de la variable (r) dans un espace plat.

Nous avons traité deux cas particuliers de $f(r)$, à savoir le potentiel de Smorodinsky-Winternitz et le potentiel de Kepler-Coulomb (dans chaque espace mentionné ci-dessus). Les intégrales de chemin Pour le cas du potentiel de Smorodinsky-Winternitz, dans l'espace sphérique et hyperboliques à 3D, ont été ramenées aux intégrales de chemin relatives aux potentiels de Pöschl-Teller et Pöschl-Teller modifié respectivement. Pour le potentiel de Kepler-Coulomb, le problème s'est converti à ceux de Rosen-Morse trigonométrique et Manning-Rosen respectivement. Les spectres d'énergie et les fonctions d'ondes sont exactement déduits.

Mots clés : Intégrales de Chemin, Propagateur, Fonction de Green, Spectre, Energie, Potentiel Superintégrable, Espace, Métrique, Courbure.