RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université les Frères Mentouri Constantine
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

N° d'ordre :

Série :

Thèse

De Doctorat en Sciences en Mathématiques

Option

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Thème

ÉTUDE VARIATIONNELLE DE QUELQUES PROBLÈMES EN MÉCANIQUE DU CONTACT

Présentée Par:

BENFERDI SABRINA

Devant le jury:

Président:	**M. DEGHDAK**	**Professeur**	**Université les Frères Mentouri**
Rapporteur :	**B. TENIOU**	**Professeur**	**Université les Frères Mentouri**
Examinateurs:	**B. MEROUANI**	**Professeur**	**Université F. Abess Sétif**
	D. A. CHACHA	**Professeur**	**Université K. Merbah Ouargla**
	A. YOUKANA	**Professeur**	**Université Hadj Lakhdar Batna**
	M. DALAH	**M.C.A**	**Université les Frères Mentouri**

Soutenue le: 14 /06 / 2015

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à Monsieur Boudjemaa Teniou, Professeur à l'université les Frères Mentouri Constantine, qui m'a proposé le sujet et diriger mon travail, je lui exprime ma profonde gratitude pour tous les efforts, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi que le soutien très précieux tout au long de cette étude.

Je voudrais aussi présenter mes très sincères remerciements au président du jury, Monsieur Messaoud Daghdak, Professeur à l'université les Frères Mentouri Constantine qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

J'adresse également un grand remerciement à Monsieur, Boubakeur Merouani , professeur à l'université de F. Abess, Sétif , Ahmed Djamel Chacha, professeur à l'université de K. Merbah, Ouargla, Ammar Youkana professeur à l'université de EL-H. Lakhdar, Batna et au Docteur Dalah Mohamed , Maitre de Conférence à l'université des Fréres Mentouri Constantine, d'avoir accepter d'expertiser mon travail de recherche et de faire partie du jury de cette thèse.

Enfin, mes vives remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse.

TABLE DES MATIÈRES

Notations

Ensembles

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

$\bar{\Omega}$: l'adhérence de Ω.

Γ : la frontière de Ω.

Γ_i : une partie de la frontière Γ, $(i = 1, 2, 3)$.

M_N : l'espace des matrices carrées d'ordre $N \times N$.

S_N : l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire : $S_N = \mathbb{R}_s^{N\times N}$.

Opérateurs

ε : l'opérateur de déformation.

div : l'opérateur de divergence.

$\partial_i \varphi$: la dérivée partielle de φ par rapport à la $i^{ième}$ composante.

Espaces fonctionnels

$C([0,T]; X)$: l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X.

$C^1([0,T]; X)$: l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ à valeurs dans X.

$L^P([0,T]; X)$: l'espace des fonctions f fortement mesurables de $]0,T[$ dans X telles que $\int_0^T |f(t)|^p < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.

$W^{1,p}(0,T;X) = \{u \in \mathcal{D}'(0,T;X)/D_j u \in L^p(0,T;X) \quad \text{pour } j = 0,1\}$ telle que D_j désigne la dérivée d'ordre j au sens des distributions

$\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment dérivables et de support compact dans Ω.

$\acute{\mathcal{D}}(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω.

$L^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions u mesurables sur Ω.

$H^1(\Omega)$: l'espace de Sobolev.

$H_0^1(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$D = \mathcal{D}(\Omega)^N$.

$D' = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N\times N}$.

$\mathcal{D} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$.

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N\times N}$.

$H = \left[L^2(\Omega)\right]^N$.

$\mathcal{H} = \left[L^2(\Omega)\right]_s^{N\times N}$.

$H_1 = \{u \in H : \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$.

$\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} : div\sigma \in H\}$.

$L^2(\Gamma)$: l'espace des fonctions définies sur Γ et de carré sommable pour la mesure surfacique.

$H^{1/2}(\Gamma)$: l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.

$H_\Gamma = H^{1/2}(\Gamma)^N$.

H'_Γ : dual de H_Γ.

Symboles :

ν : la normale extérieure à Γ.

v_ν : la composante normale de v.

v_τ : la composante tangentielle de v.

$r_+ = \max\{0, r\}$.

$\langle .,. \rangle_X$: produit scalaire dans X.

$\langle .,. \rangle_{X'\times X}$: produit de dualité entre X' et X.

p.p. : presque partout.

c : constante réelle strictement positive.

0_N : le zéro de $\mathbb{R}^N$ ou S^N.

Introduction

Les problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux matériaux déformables ou entre un matériau déformable et une fondation rigide abondent en industrie et dans la vie quotidienne. Le contact du sabot de frein avec le disque, de la chemise avec le piston, des pneus d'une voiture avec le sol, l'enfoncement progressif d'une personne dans un fauteuil et le contact entre les plaques tectoniques, sont des exemples courants. Vu l'importance de ces phénomènes physiques, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude de ces problèmes de contact. La littérature mathématique consacrée à l'étude des problèmes de contact est assez récente. La raison réside dans le fait que, accompagné de phénomènes physiques et de surfaces complexes, les processus de contact sont modélisés par des problèmes aux limites non-linéaires, très difficiles. L'une des premières publications mathématiques concernant ce sujet est celle de Signorini [24], où le problème de contact sans frottement entre matériau élastique linéaire et une fondation rigide est formulé. Il s'ensuit le travail de Fichera [11], où le problème de Signorini a été résolu en utilisant quelques arguments sur les inéquations variationnelles de type elliptique. Mais on peut dire sans aucun doute que l'étude mathématique des problèmes de contact a commencée avec le livre de Duvaut et Lions [7], dans lequel on trouve la formulation variationnelle de plusieurs problèmes de contact ainsi que des résultats d'existence et d'unicité mais dans le cas linéaire.

D'autres ouvrages incontournables sont les livres de Panagiotopoulos [20], Kikuchi et Oden [16], Hlavacek, Haslinger, Nečas et Lovisek [14], dans les deux derniers ouvrages, l'analyse numérique de quelques problèmes de contact étant présentée.

Le processus d'adhésion joue un rôle important dans l'industrie en particulier dans l'assemblage des matériaux composites, où les parties non métalliques sont collées ensemble, mais sous l'effet des tensions ces matériaux collés se décollent et se déplacent les uns par rapport aux autres. Pour mieux modéliser le processus de contact avec adhésion lorsque le collage n'est pas permanent et un décollage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrire le contact et l'adhésion ensemble. Pour cela M. Frémond [12], a introduit dans le modèle mathématique une variable interne de surface $\beta \in [0, 1]$, appelée champ d'adhésion, qui décrit la densité fractionnaire des adhésifs actifs sur la surface de contact. Lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs, lorsque $\beta = 0$, tous les adhésifs sont inactifs et il n'y pas d'adhésion et lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seulement une fraction β, des adhésifs est active.

Beaucoup de travaux portant sur la modélisation et l'analyse mathématique ainsi que l'approximation des problèmes de contact avec adhésion ont été réalisés, ont peut citer par exemple les monographes [8] et [28]. Des travaux traitant le même sujet ont été publiés par [23] où la loi de comportement et viscoélastique avec mémoire longue et [33] où la loi de comportement est viscoélastique avec mémoire longue mais la pénétration du matériau dans la fondation est borné. On peut citer aussi le travail de [3] dont l'objet est la modélisation asymptotique des coques minces élastiques non-linéaires dans le cas dynamique. Bien évidemment, cette énumération n'est pas exhaustive.

Notre travail est une généralisation de [26]. Le but de notre travail est d'apporter une contribution à l'étude mathématique de deux problèmes de contact avec adhésion et compliance normale et sans frottement. Nous considérons une loi de comportement non-linéaire pour des matériaux élastiques. Les conditions aux limites considérées sont les conditions de contact de Signiorini avec adhésion, les conditions de contact avec adhésion et compliance normale.

Cette thèse se compose de trois chapitres et une annexe. Elle est structurée de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions et résultats essentiels de la théorie des milieux continus et nous présentons les conditions aux limites utilisées dans les deux problèmes étudiés. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du contact avec adhésion entre un matériau élastique non-linéaire et une fondation rigide dans le processus quasi-statique et avec l'hypothèse des petites déformations. Le troisième chapitre est consacré à l'étude du contact avec adhésion entre un matériau élastique et une fondation déformable dans le processus quasi-statique et l'hypothèse des petites déformations. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité de la solution faible des deux problèmes. On termine cette thèse par une annexe où on rappelle quelques outils de l'analyse fonctionnelle et quelques résultats utiles pour l'étude des deux problèmes de contact.

CHAPITRE 1

Requis et préliminaires

Afin de faciliter la lecture de cette thèse, il nous est paru utile de présenter dans cette première partie le cadre physique dans lequel nous allons travailler. Nous allons commencer par une description de la loi constitutive pour un matériau élastique non linéaire, ensuite nous présentons quelques types de conditions aux limites avec adhésion et compliance normale.

1.1 *Contraintes, déformation et équations du mouvement*

On considère un matériau déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ ayant une frontière Γ supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude dans un intervalle de temps $[0, T]$, l'évolution du matériau dûe à l'application des forces intérieures de volume et extérieures de surface. On suppose que ce matériau est en adhésion avec une base sur une partie de sa frontière.

Les inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to R^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_N$ et le champ d'adhésion

$\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0, 1]$. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre les efforts extérieurs et le torseur des accélérations pour un système quelconque, conduit à l'équation du mouvement.

$$\operatorname{div}\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \qquad \text{dans} \quad \Omega \quad \forall t > 0.$$

Dans cette équation, $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse, $\ddot{u}$ est le champ des accélérations, $f_0 : \Omega \times [0;T] \to \mathbb{R}^N$ est le champ des densités des forces volumiques appliquées sur le matériau qui sont les données du problème, et $\operatorname{div}\sigma$ est la divergence du champ des contraintes.

Les processus d'évolution modélisés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$; il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques) ; ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le $\ddot{u}$ peut être négligé (processus quasi-statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient

$$\operatorname{div}\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \quad \forall t > 0$$

Dans la suite, on va considérer des matériaux élastiques dans le cadre des petites déformations. Dans ce cas, le champ des déformations $\varepsilon : \Omega \times [0,T] \to S_N$ est linéairisé, c'est- à-dire :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\partial_j u_i + \partial_i u_j\right) \text{ dans} \quad \Omega \quad \forall t > 0$$

Où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k. On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacement u, on va le noter $\varepsilon(u)$.

Les équations du mouvement sont insuffisantes, à elle seules pour décrire l'équilibre des matériaux, elles doivent être complétées par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériaux et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte, le tenseur de déformation et leur dérivées.

1.2 Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien qu'elles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Nous présentons ici les lois de comportement élastique linéaire et non linéaire

1.2.1 Loi de comportement élastique linéaire

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et connexe et soient σ le tenseur des contraintes et ε le tenseur des déformations. La loi de comportement élastique linéaire est donnée par :

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon \text{ i.e. } (\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh}\varepsilon_{kh}).$$

Où $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ijkh}$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes $\mathcal{E}_{ijkh}$, s'appellent coefficients d'élasticité, ils sont indépendents du tenseur des déformations. Dans le cas non-homogène les composantes $\mathcal{E}_{ijkh}$, dépendent du point $x \in \Omega$ et dans le cas homogène les composantes $\mathcal{E}_{ijkh}$, sont des constantes et sont données par :

$$\mathcal{E}_{ijkh} = \lambda\delta_{ij} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}\right).$$

Où les scalaires λ, μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. On suppose d'habitude que $\mathcal{E}$ est un tenseur symétrique et positivement défini c'est-à-dire :

$$\begin{cases} (i)\ \langle \mathcal{E}\tau_1, \tau_2 \rangle = \langle \tau_1, \mathcal{E}\tau_2 \rangle \qquad \forall \tau_1, \tau_2 \in S_N \\ (ii)\ \exists c > 0 \text{ tel que : } \langle \mathcal{E}\tau, \tau \rangle \geq c\,|\tau|^2 \;\; \forall \tau \in S_N \end{cases}$$

1.2.2 Loi de comportement élastique non linéaire

En général une loi de comportement élastique non-linéaire est de la forme :

$$\sigma = F(\varepsilon).$$

Où F est un opérateur non-linéaire.

Remarque 1.1 *Dans les deux problèmes qu'on va étudier, nous allons considérer une loi de comportement élastique non-linéaire.*

1.3 Conditions aux limites

Soit un matériau déformable occupant un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ dont la frontière Γ, supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3. Soit ν le vecteur normal unitaire extérieur à Γet v_ν et v_τ la composante normale et respectivement tangentielle du champ vectoriel $v = v_\nu v + v_\tau$ où $v_\nu = v \cdot \nu$. De même, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$. Il vient $\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu$, $\sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau$, c'est à dire :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu \qquad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu.$$

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de la frontière de Γ.

1.3.1 Conditions aux limites de déplacement-traction

Nous considérons les conditions aux limites suivantes :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\tag{1.1}$$

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times]0, T[\tag{1.2}$$

La condition (1.1) est appelée condition aux limites de déplacement, sa signification consiste que le matériau est encastré sur la partie $\Gamma_1 \times]0, T[$.

La condition (1.2) est appelée condition aux limites de traction, sa signification consiste en ce que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ est imposé sur la partie Γ_2 de la frontière Γ et f_2 représente la densité des forces appliquées de surface et constituent une donnée du problème.
Le matériau est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3 \times]0, T[$: C'est ici que commence toute la richesse des problèmes et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être diverses et donner ainsi lieu à une variété de modèles de contact avec ou sans frottement. Nous nous limitons à quelques exemples de conditions aux limites de contact.

1.3.2 Conditions aux limites de contact sans frottement

Les conditions aux limites de contact unilatéral (sans frottement) sont exprimées par la relation de complémentarité suivante dite conditions de Signiorini :

$$u_\nu \leq 0, \qquad \sigma_\nu \leq 0, \qquad \sigma_\nu u_\nu = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[$$

Cette condition exprime qu'en cas de contact c'est le matériau qui se déforme et qu'il ne peut y avoir d'interpénétration entre le matériau et la fondation. De plus, la réaction normale de la fondation sur le matériau est dirigée vers l'intérieur du matériau.
Si le point est en contact alors $u_\nu = 0$ et $\sigma_\nu \leq 0$, et si le point quitte la fondation $\sigma_\nu = 0$ et $u_\nu \leq 0$.
L'absence des forces tangentielles de frottement est donnée par :

$$\sigma_\tau = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[$$

1.3.3 Condition aux limites de contact avec compliance normale

La condition de compliance normale sur la surface potentielle de contact est donnée par :

$$\sigma_\nu = -p_\nu (u_\nu) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\tag{1.3}$$

Où u_ν représente le déplacement normale, p_ν est une fonction positive donnée. Les expressions générales de la forme (1.3) ont été utilisées dans [8, 10, 21, 26] pour l'étude des problèmes dynamiques pour des matériaux élastiques linéaires.

Comme exemple de la fonction de compliance normale p_ν, nous pourrions considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \tag{1.4}$$

Où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. La condition de non pénétration de Signorini est obtenue quand $c_\nu \to +\infty$. Nous pouvons aussi considérer la fonction

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ \text{ si } r \leq a \\ c_\nu a \text{ si } r > a \end{cases} \tag{1.5}$$

Où a est un coefficient positive relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.5) signifie que quand la pénétration est trop profond, i.e. quand elle dépasse a, l'obstacle se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration. Finalement nous supposons que le contact est sans frottement et ainsi la contrainte tangentielle σ_τ sur la frontière Γ_3 s'annule durant le processus.

1.3.4 Condition aux limites de contact avec adhésion et compliance normale

On considère un matériau déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$ dont la frontière Γ, supposée suffisamment régulière, est divisée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 telles que $\Gamma = \overset{3}{\underset{i=1}{\cup}} \overline{\Gamma_i}$ et $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$.

Nous supposons que le matériau est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3 \times]0, T[$. Nous étudions, l'évolution de ce matériau dûe à l'application des forces de volumes et de surfaces et de l'adhésion avec une fondation sur la partie Γ_3.

Pour décrire les conditions de contact avec adhésion sur Γ_3, on introduit la variable interne de surface β, définie sur Γ_3, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact Γ_3.

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale et adhésion :

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R(u_\nu)_+ \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times]0,T[$$

Où γ_ν est la constante de l'énergie de collage et $R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de troncature définie par :

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s > L \\ s & \text{si } |s| \leq L \\ -L & \text{si } s < -L \end{cases}$$

et $p_\nu (u_\nu)$ est la compliance normale.

On suppose que la résistance au mouvement tangentiel est générée par la colle en comparaison à ce que la traction tangentielle soit négligeable. Ainsi, elle dépend seulement de l'intensité d'adhésion et du déplacement tangentiel.

$$-\sigma_\tau = p_\tau (\beta) \overset{*}{R} (u_\tau) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0,T]$$

Où

$$\overset{*}{R}(s) = \begin{cases} s & \text{si } |s| \leq L \\ L\frac{s}{|s|} & \text{si } s > L \end{cases}$$

$p_\tau (\beta)$, est une fonction positive donnée. $L > 0$, est la longueur caractéristique des liens.

Le champ d'adhésion β, est défini par l'équation différentielle :

$$\dot{\beta} = -\left(\gamma_\nu \beta R(u_\nu)^2 - \epsilon_a\right)_+ \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times [0,T]$$

Où $R(s) = (-R(s))_+$, $R(s)^2 = [R(s)]^2$, et ϵ_a, est un coefficient d'adhésion donné.

CHAPITRE 2

PROBLÈME ÉLASTIQUE DE CONTACT AVEC ADHÉSION DANS LE PROCESSUS QUASI-STATIQUE

Nous considérons dans ce chapitre un problème de contact sans frottement entre un matériau déformable et une fondation rigide. Nous supposons que le processus est quasi-statique et la loi de comportement de ce matériau est élastique non-linéaire.

Dans ce chapitre, on va décrire le modèle mathématique du problème mécanique ensuite nous déduisons sa formulation variationnelle et nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution faible. La preuve est basée sur des arguments concernant les opérateurs fortement monotones, le théorème de Cauchy-Lipschitz et le point fixe de Banach. Ce chapitre a fait l'objet de la publication [32].

2.1 Position du problème mécanique

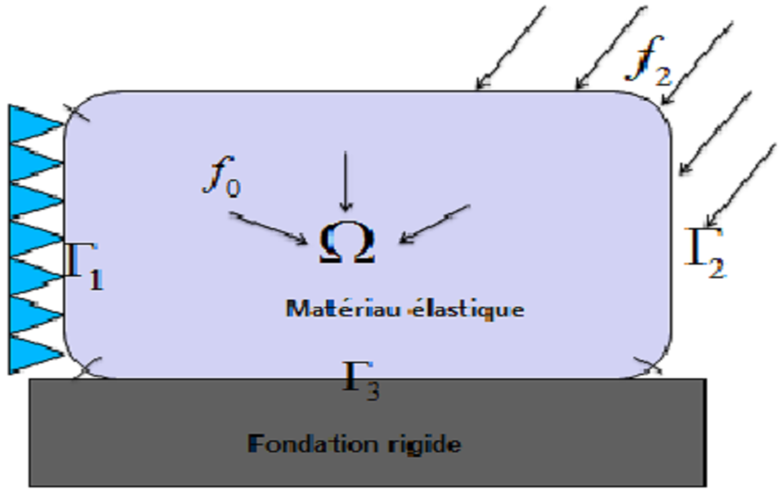

Figure 1

Considérons un matériau élastique dont les particules occupent un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3$ pour les applications), dont le bord Γ, est partitionné en trois parties mesurables disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3, tels que $mes\,(\Gamma_1) > 0$.

Nous étudions le processus d'évolution de l'état mécanique du matériau dans un intervalle de temps $[0, T]$, avec $T > 0$.

Le matériau est encastré sur la portion $\Gamma_1 \times]0, T[$, des tractions superficielles de densité f_2, agissent sur $\Gamma_2 \times]0, T[$ et des forces volumiques de densité f_0 agissent à l'intérieur du matériau. Nous supposons, que les forces et les tractions changent lentement avec le temps, de sorte que l'accélération du système soit négligeable. Le matériau est entré en contact sans frottement avec une fondation rigide le long de Γ_3, de plus les conditions de contact sont celles de Signorini avec adhésion et le champ d'adhésion β est décrit par une équation différentielle non-linéaire d'ordre un (voir Figure 1).

Avec ces conditions, le problème mécanique peut être formulé de la façon suivante :

Problème P : trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^N$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \to S_N$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0,T] \longrightarrow [0,1]$ tels que :

$$\sigma(t) = F(\varepsilon(u(t))) \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\tag{2.1}$$

$$\operatorname{div} \sigma(t) + f_0(t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,T[\tag{2.2}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times]0,T[\tag{2.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times]0,T[\tag{2.4}$$

$$u_\nu \leq 0,\ \sigma_\nu + \gamma_\nu R(u_\nu)\beta^2 \leq 0,\ \left(\sigma_\nu + \gamma_\nu R(u_\nu)\beta^2\right) u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0,T[\tag{2.5}$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0,T[\tag{2.6}$$

$$\dot{\beta} = -\left(\gamma_\nu \beta \left[(-R(u_\nu))_+\right]^2 - \epsilon_a\right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times]0,T[\tag{2.7}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \tag{2.8}$$

L'équation (2.1), est la loi de comportement élastique non-linéaire, l'équation (2.2), est l'équation d'équilibre, où f_0, est la densité des forces volumiques agissant sur le matériau déformable Ω. L'équation (2.3), indique que le matériau est encastré sur la portion $\Gamma_1 \times]0,T[$, l'équation (2.4), indique que des tractions superficielles f_2, s'appliquent sur Γ_2, Les conditions (2.5) représentent les conditions de contact de Signorini avec adhésion où γ_ν est un coefficient donné et R est une fonction de troncature définie par :

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s > L \\ s & \text{si } |s| \leq L \\ -L & \text{si } s < -L \end{cases} \tag{2.9}$$

Où $L > 0$ est la longueur caractéristique du champ d'adhésion.

La relation (2.6) représente la condition de contact sans frottement sur la partie Γ_3. La relation (2.7) décrit l'évolution du champ d'adhésion où ϵ_a est un coefficient d'adhésion donné. Finalement, la relation (2.8), représente la condition initiale dans laquelle β_0 est donné.

Pour l'étude variationnelle du problème mécanique (Problème P), on considère les hypothèses suivantes :

Hypothèses.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nous supposons que l'opérateur d'élasticité } F : \Omega \times S_N \to S_N \\ \text{satisfait les hypothèses suivantes} \\ (a)\ \exists m > 0 \text{ tel que : } (F(x,\varepsilon_1) - F(x,\varepsilon_2)).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m\,|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \qquad \text{p.p. } x \in \Omega \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \\ (b)\ \exists L > 0 \text{ tel que : } |F(x,\varepsilon_1) - F(x,\varepsilon_2)| \leq L\,|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \qquad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \ \ \text{p.p. } x \in \Omega \\ (c)\ x \to F(x,\varepsilon), \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S_N \\ (d)\ x \to F(x, 0_N) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \tag{2.10}$$

On suppose que les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 ont la régularité :

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Omega)^N), \qquad f_2 \in W^{1,\infty}(0,T; L^2(\Gamma_2)^N) \tag{2.11}$$

Les coefficients d'adhésion satisfont :

$$\gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \ \gamma_\nu \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \tag{2.12}$$

$$\epsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \ \epsilon_a \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3 \tag{2.13}$$

Finalement, l'adhésion initiale β_0 satisfait

$$\beta_0 \in Q \tag{2.14}$$

Où

$$Q = \left\{\beta \in C\left([0,T]; L^2(\Gamma_3)\right) / 0 \leq \beta(x,t) \leq 1, \forall t \in [0,T], \ \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \ \beta(0) = \beta_0\right\} \tag{2.15}$$

Pour le champ des déplacements on a besoin du sous-espace fermé V de H_1, défini par :

$$V = \{u \in H_1 : \gamma u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \tag{2.16}$$

On munit l'espace V du produit scalaire suivant :

$$\langle u, w\rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall u, v \in V$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée par $|.|_V$, elle est équivalente à la norme $|.|_{H_1}$ sur V. Donc $(V, |.|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

On définit l'ensemble des "déplacements admissibles" U par :

$$U = \{v \in V : v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\} \tag{2.17}$$

La fonction $v \to \langle f_0(t), v\rangle_H + \langle f_2(t), v\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}$ est une forme linéaire et continue sur V ; il résulte grâce au théorème de représentation de *Riesz-Fréchet* l'existence d'un élément unique $f(t) \in V$, tel que :

$$\langle f(t), v\rangle_V = \langle f_0(t), v\rangle_H + \langle f_2(t), v\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N} \ \ \forall v \in V, \, t \in [0,T] \tag{2.18}$$

La relation (2.11), entraîne que

$$f \in W^{1,\infty}(0,T;V) \tag{2.19}$$

Enfin on définit la fonctionnelle de contact $j : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$j(\beta, u, v) = -\int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 \left[-R(u_\nu)\right]_+ v_\nu ds \tag{2.20}$$

2.2 Formulation variationnelle du problème mécanique

En appliquant la formule de Green et en utilisant l'équation d'équilibre et les conditions aux limites, on déduit facilement la formulation variationnelle suivante du problème mécanique (Problème P).

Problème PV. Trouver le champ des déplacements $u : [0,T] \longrightarrow V$, et le champ d'adhésion $\beta : [0,T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que :

$$u(t) \in U, \begin{cases} \langle F(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v - u(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v - u(t)) \geq \\ \langle f(t), v - u(t)\rangle_V \quad \forall v \in U, \quad t \in]0,T[\end{cases} \tag{2.21}$$

$$\dot{\beta}(t) = -\left(\gamma_\nu \beta(t)\left[(-R(u_\nu(t)))_+\right]^2 - \epsilon_a\right)_+ \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[\tag{2.22}$$

$$\beta(0) = \beta_0 \tag{2.23}$$

2.3 Existence et unicité de la solution faible

Le résultat suivant garantit l'existence et l'unicité de solution du problème variationnel (Problème PV).

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses* $(2.10)-(2.13)$ *le problème variationnel (Problème* PV*) admet une solution unique* $\{u, \beta\}$, *ayant la régularité*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V), \qquad \beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)).$$

Un triplet (u, σ, β), qui satisfait (2.1) et (2.21) $-$ (2.23) est appelé solution faible du Problème P. Par conséquent ce théorème entraîne que le problème mécanique admet une seule solution faible.

La régularité de la solution faible en termes de contraintes est donnée par :

$$\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$$

En effet ; posons $v = \varphi \in D(\Omega)$, dans (2.21) et utilisons la loi de comportement (2.1), (2.18) on obtient :

$$\operatorname{div} \sigma(t) + f_0(t) = 0$$

Maintenant cette égalité et (2.11) implique que $\operatorname{div} \sigma \in W^{1,\infty}(0,T;H)$ qui à son tour implique $\sigma \in W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{H}_1)$.

La preuve de ce théorème se fait en quatre étapes.

Soit $\beta \in Q$ donné.

(i) Dans la première étape on considère le problème auxiliaire suivant dans lequel $\beta \in Q$, est donné.

Problème PV1 : Trouver le champ de déplacement $u_\beta : [0,T] \longrightarrow V$ tel que :

$$u_\beta(t) \in U, \quad \begin{cases} \langle F(\varepsilon(u_\beta(t))), \varepsilon(v - u_\beta(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u_\beta(t), v - u_\beta(t)) \geq \\ \qquad \langle f(t), v - u_\beta(t)\rangle_V \quad \forall v \in U, \quad t \in]0,T[\,. \end{cases} \tag{2.24}$$

Lemme 2.2 *Le problème variationnel (Problème* **PV**1), *admet une solution unique u_β ayant la régularité :*

$$u_\beta \in C([0,T];V)$$

Preuve. <u>**Existence et unicité**</u> : Soit $t \in [0,T]$. Nous considérons l'opérateur $A_t : V \longrightarrow V$ défini par :

$$\langle A_t u, v\rangle_V = \langle F(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) \quad \forall u, v \in V \tag{2.25}$$

Soient $u_1, u_2 \in V$, on a :

$$\begin{cases} \langle A_t u_1 - A_t u_2, u_1 - u_2\rangle_V = \langle F(\varepsilon(u_1)) - F(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(u_1 - u_2)\rangle_{\mathcal{H}} \\ \qquad +j(\beta, u_1, u_1 - u_2) - j(\beta, u_2, u_2 - u_1) \end{cases}$$

Car

$$j(\beta, u, -v) = -j(\beta, u, v) \qquad \forall v \in V.$$

On a aussi

$$j(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

En effet ; en utilisant la relation (2.20), ainsi que les propriétés (2.9), de l'opérateur R, nous trouvons

$$\begin{aligned} j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta_1^2 \left([-R(u_{1\nu})]_+ - [-R(u_{2\nu})]_+\right)(u_{1\nu} - u_{2\nu})\, ds \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \left(\beta_1^2 - \beta_2^2\right)[-R(u_{2\nu})]_+ (u_{1\nu} - u_{2\nu})\, ds \\ &\leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2|\, |u_1 - u_2|\, ds. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de trace de Sobolev, on obtient :

$$j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c\, |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Gamma_3)} |u_1 - u_2|_V . \tag{2.26}$$

Pour $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, on obtient

$$j(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \tag{2.27}$$

En utilisant maintenant (2.27), (2.10) (a), l'inégalité de Korn et l'équivalence des deux normes $|.|_{H_1}$ et $|.|_V$, on trouve que :

$$\langle A_t u_1 - A_t u_2, u_1 - u_2\rangle_V \geq c\, |u_1 - u_2|_V^2 .$$

L'opérateur A_t est donc fortement monotone.

Soient $u_1, u_2, v \in V$, nous avons :

$$\begin{cases} |\langle A_t u_1 - A_t u_2, v\rangle_V| \leq |\langle F(\varepsilon(u_1)) - F(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}| + \\ \qquad + |j(\beta, u_1, v) - j(\beta, u_2, v)| \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz , et la relation $(2.10)\,(b)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\langle F(\varepsilon(u_1)) - F(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}}\right| &\leq \left|\langle F(\varepsilon(u_1)) - F(\varepsilon(u_2))\rangle_{\mathcal{H}}\right| |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\
&\leq L\,|\varepsilon(u_1) - \varepsilon(u_2)|\,|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \\
&\leq c\,|u_1 - u_2|_V\,|v|_H\,.
\end{aligned}$$

Avec des calculs similaires, et comme la fonction de trancature R, est Lipschitzienne on trouve l'inégalité suivante

$$|j(\beta, u_1, v) - j(\beta, u_2, v)| \leq c_2\,|u_1 - u_2|_V\,|v|_V\,. \tag{2.28}$$

D'où

$$|A_t u_1 - A_t u_2|_V \leq c\,|u_1 - u_2|_V \quad \forall u_1, u_2 \in V.$$

Donc l'opérateur A_t est de Lipschitz . Comme U est un ensemble convexe fermé et non vide de V, alors il existe un unique élément u_β, tel que :

$$u_\beta \in U,\ \langle A_t u_\beta, v - u_\beta\rangle \geq \langle f, v - u_\beta\rangle_V \quad \forall v \in U$$

En utilisant (2.25), nous obtenons :

$$u_\beta(t) \in U, \begin{cases} \langle F(\varepsilon(u_\beta(t))), \varepsilon(v - u_\beta(t))\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u_\beta(t), v - u_\beta(t)) \geq \\ \qquad \langle f(t), v - u_\beta(t)\rangle_V \quad \forall v \in U, \quad t \in \,]0, T[\end{cases}$$

Régularité de la solution : Nous montrons maintenant que $u_\beta \in C(0, T; V)$. Soient t_1, $t_2 \in [0, T]$. Notons $u_\beta(t_i) = u_i$, $\beta(t_i) = \beta_i$ et $f(t_i) = f_i$ pour $i = 1, 2$. Nous avons :

$$\begin{cases} \langle F(\varepsilon(u_1)) - F(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(u_1 - u_2)\rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle_V + \\ \qquad + j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \end{cases}$$

Par $(2.10)\,(a)$ on a :

$$\begin{cases} m\,|\varepsilon(u_1 - u_2)|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle_V + \\ + j(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \end{cases}$$

Moyennant l'inégalité de Korn et le fait que les deux normes $|.|_{H_1}$ et $|.|_V$ sont équivalentes, l'inégalié de Cauchy-Schwarz et (2.26) on obtient :

$$|u_1 - u_2|_V \leq c \left(|f_1 - f_2|_V + |\beta_1 - \beta_2|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \tag{2.29}$$

De cette inégalité, le fait que $\beta \in Q$ et la régularité de f donnée par (2.19) il s'ensuit que :

$$u_\beta \in C\left(0, T; V\right)$$

■

(ii) **Dans la seconde étape nous utilisons le champ de déplacement u_β, obtenu dans le Lemme 2.2 et nous considérons le deuxième problème auxiliaire suivant :**

Problème PV2. Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta_\beta}(t) = -\left(\gamma_\nu \theta_\beta(t) \left[\left(-R\left(u_{\beta\nu}(t) \right) \right)_+ \right]^2 - \epsilon_a \right)_+ \quad \text{p.p.} \quad t \in]0, T[\tag{2.30}$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0 \tag{2.31}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3 *Le problème variationnel (Problème $PV2$), admet une solution unique θ_β, qui satisfait*

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}\left(0, T; L^\infty(\Gamma_3)\right) \cap Q$$

Preuve. Soit la fonction $F_\beta : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie par

$$F_\beta(t, \theta_\beta) = -\left(\gamma_\nu \theta_\beta(t) \left[\left(-R\left(u_{\beta\nu}(t) \right) \right)_+ \right]^2 - \epsilon_a \right)_+$$

Soient $\theta_1, \theta_2 \in L^\infty(\Gamma_3)$ (où $\theta_{\beta_i} = \theta_i \;\; i = 1, 2$)

En utilisant (2.9)-(2.12) et (2.13), On obtient :

$$\begin{aligned} |F_\beta(t, \theta_1) - F_\beta(t, \theta_2)| &= \left| \left(\gamma_\nu \theta_1 \left[\left(-R\left(u_{\beta\nu}(t) \right) \right)_+ \right]^2 - \varepsilon_a \right) - \left(\gamma_\nu \theta_2 \left[\left(-R\left(u_{\beta\nu}(t) \right) \right)_+ \right]^2 - \varepsilon_a \right) \right| \\ &\leq c\, |\theta_1 - \theta_2|_{L^\infty(\Gamma_3)} \end{aligned}$$

Donc F_β est Lipchitzienne par rapport au second argument θ. D'autre par F_β est uniformément continue par rapport au temps t. En outre pour tout $\theta \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \mapsto F_\beta(t, \theta_\beta)$ appartient à $L^\infty(0,T; L^\infty(\Gamma_3))$. Alors le théorème de Cauchy-Lipschitz entraîne l'existence d'une fonction unique
$\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T; L^\infty(\Gamma_3))$, qui satisfait (2.30) et (2.31).
L'appartenance de θ_β à l'espace Q est une conséquence de (2.30), (2.31) et de l'hypothèse $0 \leq \beta_0 \leq 1$ pour tout, $t \in [0,T]$. En effet ; l'équation (2.30) implique que pour pesque tout point $x \in \Gamma_3$, la fonction $t \to \theta_\beta(x,t)$ est décroissante, dérivable et s'annule quand $\gamma_\nu \theta_\beta \left[(-R(u_{\beta\nu}(t)))_+\right]^2 \leq \varepsilon_a$, et tenant compte de l'inégalité $0 \leq \beta_0 \leq 1$, on déduit que $\theta_\beta \in Q$. ■

(iii) Dans la troisième étape, pour tout $\beta \in Q$, on note par u_β la solution du premier problème variationnelle, par θ_β la solution du deuxième variationnelle problème et on définit l'opérateur $\Lambda : Q \longrightarrow Q$ par :

$$\Lambda\beta = \theta_\beta. \tag{2.32}$$

Lemme 2.4 *L'opérateur Λ, admet un point fixe unique β^*.*

Preuve. On note par u_i, la solution du Problème $PV1$ et par θ_i la solution du Problème $PV2$, pour $\beta = \beta_i, i = 1, 2$.

Soit $t \in [0,T]$, en utilisant (2.24) et (2.26), on obtient

$$\begin{cases} \langle F(\varepsilon(u_1(t)) - F(\varepsilon(u_2(t)))), \varepsilon(u_1(t) - u_2(t))\rangle_{\mathcal{H}} \leq \\ \qquad c\,|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}\,|u_1(t) - u_2(t)|_V \end{cases}$$

En utilisant le fait que F est fortement monotone, l'inégalité de Korn et l'équivalence des normes $|.|_V$, $|.|_{H_1}$on aura

$$|u_1(t) - u_2(t)|_V \leq c\,|\beta_1(t) - \beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \tag{2.33}$$

D'où

$$\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V\, ds \leq c \int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}\, ds$$

Et on a de (2.30) et (2.31)

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\gamma_\nu \theta_i(s)\left[(-R(u_{i\nu}(s)))_+\right]^2 - \epsilon_a\right)_+ ds \quad i = 1, 2$$

Donc :

$$\left\{\begin{array}{c} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\ c\int_0^t \left|\theta_1(s)\left[(-R(u_{1\nu}(s)))_+\right]^2 - \theta_2(s)\left[(-R(u_{2\nu}(s)))_+\right]^2\right|_{L^2(\Gamma_3)} ds \end{array}\right.$$

En utilisant maintenant la définition de trancature (2.9) et l'égalité $\theta_1 = (\theta_1 - \theta_2) + \theta_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq\ & c\int_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ & + c\int_0^t |u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds \end{aligned}$$

En utilisant maintenant le lemme de Gronwall (voir Lemme A.11 page 53), on obtient :

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds \tag{2.34}$$

En utilisant (2.32) et (2.34), on obtient :

$$|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds$$

De (2.33) on trouve :

$$|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds \tag{2.35}$$

En notant par Λ^p la composée d'ordre p de l'opérateur Λ, il découle de (2.35)

$$|\Lambda^p\beta_1 - \Lambda^p\beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \leq c^p \underbrace{\int_0^t \int_0^v \ldots \int_0^q}_{p \text{ intégrales}} |\beta_1 - \beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} dr.....ds$$

Pour tout $t \in [0,T]$ et $p \in \mathbb{N}$, cette inégalité donne alors

$$|\Lambda^p \beta_1 - \Lambda^p \beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^p T^p}{p!} |\beta_1 - \beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \quad \forall p \in N \tag{2.36}$$

L'inégalité (2.36) montre, pour p assez grand, que l'opérateur Λ^p est contractant dans l'espace de Banach $C(0,T;L^2(\Gamma_3))$. Puisque Q est un sous-espace fermé non-vide de l'espace de Banach $C(0,T;L^2(\Gamma_3))$, alors Λ^p est une contraction de Q dans Q, donc Λ^p admet une seul point fixe $\beta^* \in Q$. Par conséquent l'opérateur Λ admet un seul point fixe $\beta^* \in Q$. ■

(iv) **Dans la quatrième étape on utilise les trois lemmes précédents pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique.**

Preuve.

Existence : Soit β^* le point fixe de Λ et u^* la solution du premier problème auxiliaire (problème $PV1$), pour $\beta = \beta^*$, c.à. d $u^* = u_{\beta^*}$.

Des arguments similaire à ceux utilisés dans la preuve de l'inégalité (2.32), nous conduisent à l'inégalité

$$|u_1^* - u_2^*|_V \leq c\,|\beta_1^* - \beta_2^*|_{L^2(\Gamma_3)} \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T] \tag{2.37}$$

Puisque $\beta^* = \theta_{\beta^*}$, il s'ensuit du lemme 2.3 que $\beta^* \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$.

L'inégalité (2.37) entraîne que $u^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$. Maintenant de (2.24), (2.30) et (2.31) nous concluons que (u^*, β^*) est une solution du problème PV ayant la régularité

$$u^* \in W^{1,\infty}(0,T;V), \qquad \beta^* \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$$

Unicité : L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et de l'unicité de la solution du premier problème auxiliaires (Problème $PV1$) ainsi que celle du deuxième problème auxiliaire (Problème $PV2$).

En effet ; soit (u, β) une solution du Problème $PV1$, ayant la régularité

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V), \qquad \beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$$

Comme $\beta \in Q$, il résulte de (2.21) que u est solution du problème $PV1$, mais le lemme 2.2 implique que ce problème auxiliaire admet une solution unique notée u_β, donc on a :

$$u = u_\beta \tag{2.38}$$

En mettant $u = u_\beta$ dans (2.22) et en utilisant la condition intiale (2.23) on voit bien que β est une solution du second problème auxiliaire (problème $PV2$), mais le lemme 2.3 implique que ce problème admet une solution unique θ_β, donc on a :

$$\beta = \theta_\beta \tag{2.39}$$

En appliquant l'opérateur Λ, défini auparavant, à l'égalité (2.25), on obtient :

$$\Lambda\beta = \beta \qquad\qquad \text{(car } \Lambda \text{ est contactant sur l'espace de Banach } Q\text{).}$$

Mais d'après le lemme 3.4, l'opérateur Λ admet un seul point fixe β^*, par conséquent on a :

$$\beta = \beta^* \tag{2.40}$$

■

CHAPITRE 3

PROBLÈME DE CONTACT AVEC ADHÉSION ET COMPLIANCE NORMALE

Nous considérons dans ce chapitre un problème quasi-statique de contact entre un matériau déformable et une fondation déformable. La loi de comportement du matériau est élastique non-linéaire.

Le contact est avec adhésion et compliance normale et l'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle non-linéaire du premier ordre.

Ce chapitre est divisé en trois section. Dans la première section nous décrivons le problème mécanique et nous donnons les hypothèses nécessaires pour l'étude variationnelle de ce problème mécanique. Dans la seconde, nous établissons sa formulation variationnelle et nous démontrons dans la troisième section, l'existence et l'unicité de la solution variationnelle en utilisant un théorème sur les inéquations variationnelles elliptiques, le théorème de Cauchy-Lipschitz, un lemme de Gronwall ainsi que le point fixe de Banach. Ce chapitre a fait l'objet de la publication [31].

3.1 Formulation du problème mécanique et hypothèses

Le contexte physique est le suivant :

On considère un matériau élastique qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^N$, ($N = 2, 3$, pour les applications) de frontière Γ, suffisamment régulière, divisée en trois parties disjointes et mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3, telles que $mes\,(\Gamma_1) > 0$. Soit $[0, T]$ un intervalle de temps et $T > 0$. Le matériau est supposé fixé sur la partie Γ_1, c'est-à-dire le champ des déplacements est nul sur $\Gamma_1 \times]0, T[$, de sa frontière. Des forces volumiques et surfaciques de densités f_0 et f_2, agissent respectivement dans $\Omega \times]0, T[$ et sur $\Gamma_2 \times]0, T[$. Sur $\Gamma_3 \times]0, T[$ le matériau est en adhésion sans frottement avec une fondation déformable. En outre, le processus est quasi-statique et l'évolution du champ d'adhésion β est décrite par une équation différentielle non linéaire.

Sous ces hypothèses, le problème mécanique considéré se formule de la façon suivante.

Problem P : Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to R^N$ et un champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_N$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \to [0, 1]$ tels que :

$$\sigma = F\left(\varepsilon\left(u\left(t\right)\right)\right) \qquad \text{dans } \; \Omega \times]0, T[\tag{3.1}$$

$$Div\sigma + f_0 = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times]0, T[\tag{3.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[\tag{3.3}$$

$$\sigma\nu = f_2 \qquad \text{sur } \; \Gamma_2 \times]0, T[\tag{3.4}$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu\left(u_\nu\right) - \gamma_\nu \beta^2 \left(-R\left(u_\nu\right)\right)_+ \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\tag{3.5}$$

$$\sigma_\tau = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\tag{3.6}$$

$$\dot{\beta} = -\left[\gamma_\nu \beta \left[\left(-R\left(u_\nu\right)\right)_+\right]^2 - \epsilon_a\right]_+ \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times]0, T[\tag{3.7}$$

$$\beta\left(0\right) = \beta_0 \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{3.8}$$

L'équation (3.1) représente la loi de comportement élastique non linéaire. La relation (3.2) représente l'équation d'équilibre. Les équations (3.3) et (3.4) sont les conditions aux limites de déplacement-traction et $(3.5) - (3.7)$ représentent les conditions aux limites de contact avec compliance normale et adhésion où p_ν est une fonction positive donnée, γ_ν est un coefficient donné et R est une fonction de troncature définie par :

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s > L \\ s & \text{si } |s| \leq L \\ -L & \text{si } s < -L \end{cases} \tag{3.9}$$

où $L > 0$, est la longueur caractéristique du champ d'adhésion, au-delà duquelle il n'offre pas de tractions supplémentaires. L'introduction de la fonction R, définie ci-dessus, est motivée par un argument mathématique mais en termes d'applications, elle n'est pas une restriction, car aucune restriction ne sera faite sur la longueure L. Ainsi, en choisissant L très grande, on peut supposer que $R(u_\nu) = u_\nu$. La condition (3.6) indique que le contact est sans frottement car la contrainte tangentielle est nulle sur la surface de contact durant le processus. L'équation différentielle (3.7) décrit l'évolution du champ d'adhésion où les paramètres γ_ν et ϵ_a, sont donnés. Enfin dans l'égalité (3.8), β_0 représente la valeur initiale du champ d'adhésion.

Hypothèses.

$$\begin{cases} \text{Nous supposons que l'opérateur d'élasticité } F : \Omega \times S_N \to S_N \text{ satisfait les hypothèses suivantes} \\ (a)\ \exists m > 0 \text{ tel que } \left(F(x,\varepsilon_1) - F(x,\varepsilon_2)\right).(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m\,|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \\ \text{p.p. } x \in \Omega \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \\ (b)\ \exists L > 0 \text{ tel que } |F(x,\varepsilon_1) - F(x,\varepsilon_2)| \leq L\,|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \\ \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S_N \ \text{ p.p. } x \in \Omega \\ (c)\ x \to F(x,\varepsilon), \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in S_N \\ (d)\ x \to F(x, 0_N) \in \mathcal{H} \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{la fonction compliance normale } p_\nu \text{ satisfait les hypothèses suivante}\\(a)\qquad p_\nu:\Gamma_3\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ \text{ tel que}\\(b)\ \exists L_\nu>0 \text{ tel que } \left|p_\nu\left(x,r_1\right)-p_\nu\left(x,r_2\right)\right|\leq L_\nu\left|r_1-r_2\right|\\\text{p.p. } x\in\Omega\qquad\forall r_1,r_2\in\mathbb{R}\\(c)\ \ \left(p_\nu\left(x,r_1\right)-p_\nu\left(x,r_2\right)\right)\left(r_1-r_2\right)\geq 0\\\text{p.p. } x\in\Omega\qquad\forall r_1,r_2\in\mathbb{R}\\(d)\ x\to\ p_\nu\left(x,r\right),\text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r\in\mathbb{R}\\(e)\ p_\nu\left(x,r\right)=0\ \ \forall r\leq 0,\quad \text{p.p. } x\in\Gamma_3\end{array}\right.\tag{3.11}$$

Les forces volumiques f_0 et surfaciques f_2 satisfont :

$$f_0\in W^{1,\infty}(0,T;H),\qquad f_2\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_2)^N).\tag{3.12}$$

Nous supposons que les coefficients d'adhésion satisfont :

$$\begin{aligned}\gamma_\nu\ &\in\ L^\infty\left(\Gamma_3\right),\ \gamma_\nu\geq 0\quad\text{p.p. sur } \Gamma_3. &(3.13)\\\epsilon_a\ &\in\ L^2\left(\Gamma_3\right),\ \epsilon_a\geq 0\qquad\text{p.p. sur } \Gamma_3.\end{aligned}$$

Finalement la donnée initiale β_0 satisfait :

$$\beta_0\in L^2\left(\Gamma_3\right),0\leq\beta_0\leq 1,\ \text{p.p. sur } \Gamma_3.\tag{3.14}$$

La fonction $v\to\left\langle f_0\left(t\right),v\right\rangle_H+\left\langle f_2\left(t\right),v\right\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}$ est une forme linéaire et continue sur V, il résulte grâce au théorème de représentation de *Riesz-Fréchet* l'existence d'un élément unique $f(t)\in V$, tel que :

$$\left\langle f\left(t\right),v\right\rangle_V=\left\langle f_0\left(t\right),v\right\rangle_H+\left\langle f_2\left(t\right),v\right\rangle_{L^2(\Gamma_2)^N}\ \forall v\in V,\ \ t\in[0,T]\tag{3.15}$$

Où (3.12) entraîne que :

$$f\in W^{1,\infty}(0,T;V)\tag{3.16}$$

Enfin on définit la fonctionnelle d'adhésion $j:L^\infty\left(\Gamma_3\right)\times V\times V\to\mathbb{R}$ par :

$$j\left(\beta,u,v\right)=-\int_{\Gamma_3}\gamma_\nu\beta^2\left[-R\left(u_\nu\right)\right]_+v_\nu ds.\tag{3.17}$$

Et la fonctionnelle de compliance normale : $k : V \times V \to \mathbb{R}$ par :

$$k(u,v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu)\, v_\nu ds. \tag{3.18}$$

Remarque 3.1 *On remarque que j et k sont linéaires par rapport au dernier argument et donc*

$$j(\beta,u,-v) = -j(\beta,u,v), \qquad k(u,-v) = -k(u,v). \tag{3.19}$$

Ensuite, en utilisant (3.17), ainsi que les propriétés de (3.9) de l'opérateur de troncature R, on trouve

$$j(\beta_1,u_1,u_2-u_1) + j(\beta_2,u_2,u_1-u_2) \le c\int_{\Gamma_3} |\beta_1-\beta_2|\,|u_1-u_2|\, ds. \tag{3.20}$$

En utilisant le fait que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)} \le c\,|v|_v \quad \forall v \in V.$$

On obtient

$$j(\beta_1,u_1,u_2-u_1) + j(\beta_2,u_2,u_1-u_2) \le c\,|\beta_1-\beta_2|_{L^2(\Gamma 3)}\,|u_1-u_2|_V\,. \tag{3.21}$$

Des calculs similaires, basés sur la continuité de R, nous donnent l'inégalité suivante :

$$|j(\beta,u_1,v) - j(\beta,u_2,v)| \le c\,|u_1-u_2|_V\,|v|_V \tag{3.22}$$

Nous prenons maintenant $\beta = \beta_1 = \beta_2$, dans (3.21) pour déduire

$$j(\beta,u_1,u_2-u_1) + j(\beta,u_2,u_1-u_2) \le 0 \tag{3.23}$$

Nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.23), ensuite nous utilisons l'égalité $R(0) = 0$ et (3.19) pour déduire que :

$$j(\beta,v,v) \ge 0 \tag{3.24}$$

Maintenant, nous utilisons la définition de la fonctionnelle de compliance normale (3.18), on montre facilement que :

$$|k(u_1,v)-k(u_2,v)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu})-p_\nu(u_{2\nu})|\,|v_\nu|\,ds$$

Et donc de $(3.11)\,(b)$, on obtient :

$$|k(u_1,v)-k(u_2,v)| \leq c\,|u_1-u_2|_V\,|v|_V\,. \tag{3.25}$$

La définition (3.18), montre que :

$$k(u_1,u_2-u_1)+k(u_2,u_1-u_2)=\int_{\Gamma_3}(p_\nu(u_{1\nu})-p_\nu(u_{2\nu}))\,(u_{2\nu}-u_{1\nu})\,ds.$$

En utilisant $(3.11)\,(c)$, on obtient :

$$k(u_1,u_2-u_1)+k(u_2,u_1-u_2)\leq 0. \tag{3.26}$$

En prenant $u_1=v$ et $u_2=0$ dans l'inégalité précédente et en utilisant $(3.11)\,(e)$ et (3.19) on obtient :

$$k(v,v)\geq 0. \tag{3.27}$$

3.2 Formulation variationnelle du problème mécanique

En appliquant la formule de Green et en utilisant l'équation d'équilibre et les conditions aux limites, on déduit facilement la formulation variationnelle suivante du problème mécanique P (Problème P).

Problème PV : *trouver un champ de déplacement* $u:[0,T]\to V$ *et un champ d'adhésion* $\beta:[0,T]\to L^\infty(\Gamma_3)$ *tels que :*

$$\begin{cases} \langle F(\varepsilon(u(t))),\varepsilon(v-u(t))\rangle_{\mathcal{H}}+j(\beta(t),u(t),v)+k(u(t),v)= \\ \qquad =\langle f(t),v-u(t)\rangle_V \ \ \forall v\in V,\ t\in[0,T] \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\dot{\beta}(t)=-\left(\gamma_\nu\beta(t)\left[(-R(u_\nu(t)))_+\right]^2-\epsilon_a\right)_+ \quad \text{p.p.} \quad t\in[0,T] \tag{3.29}$$

$$\beta(0)=\beta_0 \tag{3.30}$$

3.3 Existence et unicité de la solution faible

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses* $(3.10) - (3.14)$, *le problème variationnel (Problème PV) admet une solution unique* (u, β), *qui satisfait :*

$$u \in W^{1,\infty}(0,T;V), \qquad \beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^{\infty}(\Gamma_3)) \cap Q \tag{3.31}$$

La démonstration de ce théorème sera faite en quatre étapes.

(i) Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant dans lequel $\beta \in Q$***, est donné.***

Problème PV1 :Trouver un champ des déplacements $u_\beta : [0,T] \to V$ tel que :

$$\langle F(\varepsilon(u_\beta(t))), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u_\beta(t), v) + k(u_\beta(t), v) = \langle f(t), v\rangle_V \quad \forall v \in V,\ t \in [0,T] \tag{3.32}$$

La solution unique du problème auxiliaire (Problème **PV**1) est donnée par le résultat suivant :

Lemme 3.3 *: Le problème* **PV**1 *admet une solution unique* $u_\beta \in C([0,T];V)$.

Preuve. Supposons que $\beta \in Q$ est donnée et soit $t \in [0,T]$. Nous considérons l'opérateur $A_t : V \longrightarrow V$ défini par :

$$\langle A_t u, v\rangle_V = \langle F(\varepsilon(u(t))), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} + j(\beta(t), u(t), v) + k(u(t), v) \quad \forall u, v \in V \tag{3.33}$$

Soient $u_1, u_2 \in V$ On a :

$$\begin{cases} \langle A_t u_1 - A_t u_2, u_1 - u_2\rangle_V = \langle F(\varepsilon(u_1)) - F(\varepsilon(u_2)), \varepsilon(u_1 - u_2)\rangle_{\mathcal{H}} \\ +j(\beta, u_1, u_1 - u_2) - j(\beta, u_2, u_2 - u_1) + k(u_1, u_1 - u_2) + k(u_2, u_2 - u_1) \end{cases}$$

En utilisant (3.26), (3.23), (3.10) (a), l'inégalité de Korn et l'équivalence des deux normes $|.|_{H_1}$, $|.|_V$, on montre que :

$$\langle A_t u_1 - A_t u_2, u_1 - u_2\rangle_V \geq c\,|u_1 - u_2|_V^2$$

C'est-à-dire l'opérateur A_t est fortement monotone.

Soient $u_1, u_2,\, v \in V$. Nous avons :

$$\begin{aligned}\left|\langle A_t u_1 - A_t u_2, v\rangle_V\right| &\leq \left|\langle F\left(\varepsilon\left(u_1\right)\right) - F\left(\varepsilon\left(u_2\right)\right), \varepsilon\left(v\right)\rangle_{\mathcal{H}}\right| + \\ &+ \left|j\left(\beta, u_1, v\right) - j\left(\beta, u_2, v\right)\right| + \left|k\left(u_1, v\right) - k\left(u_2, v\right)\right|\end{aligned}$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (3.10) (b) et (3.22), (3.25), on obtient

$$\left|\langle A_t u_1 - A_t u_2, v\rangle_V\right| \leq c\left|u_1 - u_2\right|_V$$

C'est à-dire l'opérateur A_t est de Lipschitz comme U est un sous-ensemble convexe fermé et non-vide de V, alors il existe un unique élément u_β tel que :

$$u_\beta \in U, \langle A u_\beta, v\rangle_V = \langle f, v\rangle_V \quad, \forall v \in U$$

Ceci est équivalent à :

$$u_\beta(t) \in U,\;\; \langle F\left(\varepsilon\left(u_\beta\left(t\right)\right)\right), \varepsilon\left(v\right)\rangle_{\mathcal{H}} + j\left(\beta\left(t\right), u_\beta\left(t\right), v\right) + k\left(u_\beta\left(t\right), v\right) = \langle f\left(t\right), v\rangle_V \quad \forall v \in U,\, t \in [0, T]$$

Nous montrons maintenant que $u_\beta \in C([0,T]; V)$.

Soient $t_1,\, t_2 \in [0, T]$, et notons respectivement $u_\beta\left(t_i\right)$, $\beta\left(t_i\right)$, et $f\left(t_i\right)$ par u_i, β_i et f_i (pour $i = 1, 2$).On aura :

$$\begin{aligned}\langle F\left(\varepsilon\left(u_1\right) - F\varepsilon\left(u_2\right)\right), \varepsilon\left(u_1 - u_2\right)\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle_V + j\left(\beta_1, u_1, u_2 - u_1\right) + \\ &+ j\left(\beta_2, u_2, u_1 - u_2\right) + k\left(u_1, u_2 - u_1\right) + k\left(u_2, u_1 - u_2\right)\end{aligned}$$

En utilisant (3.10) (a) et (3.26) , (3.21) dans cette égalité, l'inégalité de Korn et le fait que les deux normes $|.|_{H_1}$ et $|.|_V$ sont équivalentes sur V, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient :

$$\left|u_1 - u_2\right|_V \leq c\left(\left|f_1 - f_2\right|_V + \left|\beta_1 - \beta_2\right|_{L^2(\Gamma_3)}\right) \tag{3.34}$$

De l'inégalité précédente, du fait que $\beta_1, \beta_2 \in Q$ et de la régularité des fonctions f_1 et f_2 donné par (3.16), on déduit que $u_\beta \in C([0,T]; V)$. ■

(ii) **Dans la seconde étape nous utilisons le champ de déplacement u_β, obtenu par le Lemme 3.3 et nous considérons le deuxième problème auxiliaire suivant :**

Problème PV2 : Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0,T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta_\beta}(t) = -\left(\gamma_\nu \theta_\beta(t)\left[(-R(u_{\beta\nu}(t)))_+\right]^2 - \epsilon_a\right)_+ \quad \text{p.p.} \quad t \in]0,T[\tag{3.35}$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0 \tag{3.36}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.4 *Le problème $PV2$, admet une solution unique θ_β, ayant la régularité :*

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q} \tag{3.37}$$

Preuve. Soit la fonction $F_\beta : [0,T] \times L^\infty(\Gamma_3) \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie par :

$$F_\beta(t,\theta_\beta) = -\left(\gamma_\nu \theta_\beta(t)\left[(-R(u_{\beta\nu}(t)))_+\right]^2 - \epsilon_a\right)_+$$

Soient $\theta_1, \theta_2 \in L^\infty(\Gamma_3)$ (où $\theta_i = \theta_{\beta_i}$ $\ i = 1,2$)

En utilisant (3.9) et (3.13), On obtient :

$$\begin{aligned} |F_\beta(t,\theta_1) - F_\beta(t,\theta_2)| &= \left|\left(\gamma_\nu \theta_1\left[(-R(u_{\beta\nu}(t)))_+\right]^2 - \varepsilon_a\right) - \left(\gamma_\nu \theta_2\left[(-R(u_{\beta\nu}(t)))_+\right]^2 - \varepsilon_a\right)\right| \\ &\leq c\,|\theta_1 - \theta_2|_{L^\infty(\Gamma_3)} \end{aligned}$$

Donc F_β est Lipchitzienne par rapport au second argument θ.

D'autre par F_β est uniformément continue par rapport au temps t et pour tout $\theta_\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \mapsto F_\beta(t,\theta_\beta)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$. Alors le théorème de Cauchy-Lipschitz entraine l'existence d'une fonction unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$ qui satisfait (3.35) et (3.36).

L'appartenance de θ_β à l'espace Q est une conséquence de (3.35), (3.36) et de l'hypothèse $0 \leq \beta_0 \leq 1$ pour tout, $t \in [0,T]$. En effet ; l'équation (3.35) implique que pour presque tout point $x \in \Gamma_3$, la fonction $t \rightarrow \theta_\beta(x,t)$ est décroissante, dérivable et s'annule quand $\gamma_\nu \theta_\beta \left[\left(-R\left(u_{\beta\nu}(t)\right)\right)_+ \right]^2 \leq \varepsilon_a$, et tenant compte de l'inégalité $0 \leq \beta_0 \leq 1$, on déduit que $\theta_\beta \in Q$. ■

(iii) **Dans la troisième étape, pour tout $\beta \in Q$, on note par u_β la solution du Problème $PV1$ et par θ_β la solution du Problème $PV2$, en outre on définit l'opérateur $\Lambda : Q \longrightarrow Q$ par :**

$$\Lambda\beta = \theta_\beta \tag{3.38}$$

Lemme 3.5 *L'opérateur Λ, admet un point fixe unique β^*.*

Preuve. Il suffit de montrer, que pour tout entier positif p, l'opérateur Λ^p est contractant sur Q. Pour cela supposons que β_i, $(i = 1,2)$ sont deux fonctions de Q et notons par u_i et θ_i les fonctions obtenues respectivement dans le lemme 3.3 et le lemme 3.4, pour $\beta = \beta_i$, $i = 1,2$.

Soit $t \in [0,T]$, en utilisant (3.32), (3.21) et (3.26), on obtient :

$$\begin{cases} \left\langle F\left(\varepsilon\left(u_1(t)\right) - F\left(\varepsilon\left(u_2(t)\right)\right)\right), \varepsilon\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle_{\mathcal{H}} \leq \\ \qquad c\left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|_{L^2(\Gamma_3)} \left|u_1(t) - u_2(t)\right|_V \end{cases}$$

En utilisant le fait que F, est fortement monotone, l'inégalité de Korn et l'équivalence des deux normes $|.|_V$, $|.|_{H_1}$ sur V, on obtient :

$$\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_V \leq c\left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|_{L^2(\Gamma_3)} \tag{3.39}$$

Ceci implique

$$\int_0^t \left|u_1(s) - u_2(s)\right|_V ds \leq c\int_0^t \left|\beta_1(s) - \beta_2(s)\right|_{L^2(\Gamma_3)} ds \tag{3.40}$$

D'autre part il s'ensuit de (3.35) et (3.36)

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t \left(\gamma_\nu \theta_i(s)\left[\left(-R\left(u_{i\nu}(s)\right)\right)_+\right]^2 - \epsilon_a\right)_+ ds \quad i = 1,2$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{c} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\ c\int\limits_0^t \left| \theta_1(s)\left[(-R(u_{1\nu}(s)))_+\right]^2 - \theta_2(s)\left[(-R(u_{2\nu}(s)))_+\right]^2 \right|_{L^2(\Gamma_3)} ds \end{array} \right.$$

En utilisant la définition (3.9) et l'égalité $\theta_1 = (\theta_1 - \theta_2) + \theta_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c\int\limits_0^t |\theta_1(s) - \theta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ &\quad + c\int\limits_0^t |u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds \end{aligned}$$

En utilisant maintenant un lemme de Gronwall et le théorème de trace de Sobolev, il résulte que :

$$|\theta_1(t) - \theta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int\limits_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds \tag{3.41}$$

En utilisant la définition (3.38) dans l'inégalité précédente on obtient :

$$|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int\limits_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_V ds \tag{3.42}$$

En combinant (3.40) et (3.42) on déduit que :

$$|\Lambda\beta_1(t) - \Lambda\beta_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\int\limits_0^t |\beta_1(s) - \beta_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)} ds$$

En réitérant cette inégalité pour t temps donnés dans $[0, T]$, on obtient :

$$|\Lambda^p\beta_1 - \Lambda^p\beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \leq c^p \underbrace{\int\limits_0^t \int\limits_0^v \ldots \int\limits_0^q}_{p \text{ intégrales}} |\beta_1 - \beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} dr.....ds$$

C'est-à-dire dire :

$$|\Lambda^p\beta_1 - \Lambda^p\beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^pT^p}{p!}\,|\beta_1 - \beta_2|_{C(0,T;L^2(\Gamma_3))} \quad \forall p \in N. \tag{3.43}$$

Et comme $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{c^pT^P}{p!} = 0$, alors (3.43) entraîne, pour p assez grand, que l'opérateur Λ^p est contractant dans l'espace de Banach $C\left(0,T;L^2\left(\Gamma_3\right)\right)$. Comme Q est un sous espace fermé non vide de l'espace de Banach $C\left(0,T;L^2\left(\Gamma_3\right)\right)$, alors Λ^p est une contraction de Q dans Q. Le théorème de point fixe entraîne que Λ^p, admet un seul point fixe $\beta^* \in Q$. Par conséquent Λ admet un seul point fixe $\beta^* \in Q$. ■

(iv) **Dans la quatrième étape, on utilise les trois lemmes précédents pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution faible du problème mécanique.**

Preuve.

Existence : Soit β^* le point fixe de Λ et u^* la solution du premier problème auxiliaire (Problème $PV1$), pour $\beta = \beta^*$, c.à.d. $u^* = u_{\beta^*}$.

Des arguments similaire à ceux utilisés dans la preuve de l'inégalité (3.39), nous conduisent à l'inégalité

$$|u_1^* - u_2^*|_V \leq c\,|\beta_1^* - \beta_2^*|_{L^2(\Gamma_3)} \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T] \tag{3.44}$$

Puisque $\beta^* = \theta_{\beta^*}$, il s'ensuit du lemme 3.4 que $\beta^* \in W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\Gamma_3))$.

L'inégalité (3.44) entraîne que $u^* \in W^{1,\infty}(0,T;V)$. Maintenant de (3.32), (3.35) et (3.36) nous concluons que (u^*, β^*) est une solution du Problème PV ayant la régularité (3.31).

Unicité : L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ et de l'unicité de la solution du premier problème auxiliaires (Problème $PV1$) ainsi que celle du deuxième problème auxiliaire (Problème $PV2$).

En effet ; soit (u, β) une solution du Problème PV, ayant la régularité (3.31). Comme $\beta \in Q$, il résulte de (3.28) que u est solution du Problème $PV1$, mais le lemme 3.3

implique que ce problème auxiliaire admet une solution unique notée u_β, donc on a :

$$u = u_\beta \tag{3.45}$$

En mettant $u = u_\beta$ dans (3.29) et en utilisant la condition initiale (3.30) on voit bien que β est une solution du second problème auxiliaire (Problème $PV2$), mais le lemme 3.4 implique que ce problème admet une solution unique θ_β, donc on a :

$$\beta = \theta_\beta \tag{3.46}$$

En appliquant l'opérateur Λ, défini auparavant, à l'égalité (3.46), on obtient :

$$\Lambda\beta = \beta \qquad\qquad \text{(car } \Lambda \text{ est contactant sur l'espace de Banach } Q\text{).}$$

Mais d'après le lemme 3.5, l'opérateur Λ admet un seul point fixe β^*, par conséquent on a :

$$\beta = \beta^* \tag{3.47}$$

L'unicité de la solution faible du problème mécanique est maintenant une conséquence de (3.45) et (3.47). ∎

Conclusion et perspectives

Après l'étude de ces deux problèmes de contact, on peut tirer les conclusions suivantes :

• Il y a une variété d'hypothèses lors de la modélisation des phénomènes de contact.

• La prise en compte des différentes conditions aux limites de contact et des lois de comportement, de plus en plus complexes, conduit à des modèles mathématiques nouveaux et non standards.

• En général, le système d'équations aux dérivées partielles, associé aux conditions aux limites et aux conditions initiales, obtenu à l'étape de modélisation, n'admet pas de solution classique. La raison réside principalement dans les non-linéarités prises en considération dans la description du contact. Pour palier à cette difficulté et dans le but de donner un sens au modèle mathématique obtenu, on est obligé de passer par la formulation faible (dite parfois formulation variationnelle) du modèle mathématique. Cette formulation faible a l'avantage de prendre en considération d'une manière intrinsèque les frontières libres et les différentes conditions aux limites et bien souvent elle conduit à des inéquations variationnelles.

• Il serait intéressant de compléter l'étude des deux problèmes de contact avec une étude des propriétés de la solution (dépendance de la solution par aux données du problème) et aussi une étude numérique.

• Dans les deux problèmes étudiés, nous avons supposé que le matériau déformable était bloqué sur une partie de sa frontière, ce qui nous permet d'appliquer l'inégalité de Korn. On peut étudier ces deux problèmes où cette condition de blocage n'existe pas. Dans ce cas l'inégalité de Korn n'est pas vérifiée par conséquent la solution n'est pas unique et les méthodes de résolution de ces deux problèmes de contact diffèrent alors de celles utilisées.

• Enfin, l'étude menée dans cette thése pourrait être étendue aux grandes déformations et par conséquent à des applications industrielles plus réalistes.

• On peut aussi étendre les espaces fonctionnels d'étude de ces problèmes de contact à des espaces qui ne sont pas Hilbertiens (espace de Banach par exemple).

ANNEXE A

Annexe

Afin de faciliter la lecture de cette thèse, il nous est paru utile de rappeler, quelques éléments d'analyse non-linéaire dans les espaces de Hilbert et des résultats concernant les inéquations variationnelles elliptiques. Ensuite on y introduit les espaces de distributions et les espaces de Sobolev associés aux opérateurs de déformation et divergence et on présente l'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$, on rappelle le théorème de Cauchy- Lipschitz et un lemme de Gronwall. Pour plus de détails sur cette annexe on revoie le lecteur aux références [1] , [4] , [7] , [19] , [28] et [29] .

A.1 Analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans cette section nous rappelons quelques notions fondamentales sur les espaces de Hilbert.

Définition A.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire : $\langle .,. \rangle_H : H \times H \to \mathbb{R}$ et complet pour la norme associée :*

$$|u|_H = \langle u, u \rangle_H^{\frac{1}{2}}$$

Nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\forall u, v \in H : |\langle u, v \rangle_H| \leqslant |u|_H \, |v|_H \tag{A.1}$$

Définition A.2 *: On appelle dual de l'espace H et on le note H', l'espace des formes linéaires et continues sur H. Le produit de dualité est noté $\langle ., . \rangle_{H' \times H}$ et vérifie :*

$$\left|\langle g, v \rangle_{H' \times H}\right| \leqslant |g|_{H'} \, |v|_H \qquad \forall v \in H \tag{A.2}$$

où $|.|_{H'}$ est la norme dans H', définie par :

$$|g|_H = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{\left|\langle g, v \rangle_{H' \times H}\right|}{|v|_H}$$

Théorème A.3 *(théorème de représentation de Riesz-Fréchet)*

Soient H un espace de Hilbert et $\varphi \in H'$, alors il existe un élément unique $f \in H$, tel que :

$$\langle \varphi, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \qquad \forall v \in H \tag{A.3}$$

De plus on a :

$$|f|_H = |\varphi|_{H'}$$

A.2 Opérateur fortement monotone et inéquations variationnelles

Définition A.4 *: Soit $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, où H est un espace de Hilbert.*

(i) *On dit que l'opérateur A est fortement monotone, s'il existe $m > 0$ tel que*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_H \geqslant m\,|u - v|_H^2 \qquad \forall u, v \in H. \tag{A.4}$$

(ii) *$A : H \to H$ est de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que :*

$$|Au - Av|_H \leq M\,|u - v|_H \qquad \forall u, v \in H. \tag{A.5}$$

Soit $A : H \to H$ un opérateur non linéaire, $\varphi : H \to \left]-\infty, +\infty\right]$, une fonction propre et $f \in H$. Un bon nombre de problèmes aux limites ainsi qu'en mécanique des milieux continus ont un rapport avec les deux problèmes mathématiques suivants :

Trouver u tel que

$$u \in K, \ \ \langle Au, v - u\rangle_H \geqslant \langle f, v - u\rangle_H \qquad \forall v \in K \tag{A.6}$$

Où K est un sous-ensemble convexe fermé et non vide. Le problème $(A.6)$ est appelé inéquation variationnelle elliptique de premier espèce sur H

Trouver u tel que :

$$u \in H, \ \ \langle Au, v - u\rangle_H + \varphi(v) - \varphi(u) \geqslant \langle f, v - u\rangle_H \qquad \forall v \in H \tag{A.7}$$

Le problème $(A.7)$ est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H.

Théorème A.5 *: Soient H un espace de Hilbert et $A : H \to H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in H$, l'inéquation variationnelle $(A.7)$ admet une solution unique. En outre la solution dépend continûment- Lipschitz de f.*

Pour la preuve de ce théorème voir [26], page 72.

Remarque A.6 *Le problème $(A.6)$ est un cas particulier du problème $(A.7)$. en effet prenons $\varphi = 0$ dans $(A.7)$*

Donc la démonstration du théorème d'existence et d'unicité de ce problème est la même que celle du problème $(A.7)$.

A.3 Espaces fonctionnels utiles

Quand on veut résoudre un problème aux limites en cherchant une autre formulation du problème, on est amené à introduire des espaces dans lesquels vont être contenues des informations utiles.
Nous donnons ici quelques espaces fonctionnels nécessaires dans l'étude de nos deux problèmes de contact.

Espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et espaces liés aux opérateurs de déformation et divergence
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.
On note par :

$$\begin{aligned}
D &= \left\{\varphi = (\varphi_i) \diagup \varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega),\, i = \overline{1, N}\right\} = \mathcal{D}(\Omega)^N \\
D' &= \left\{\varphi = \left(\varphi_{ij}\right) \diagup \varphi_{ij} = \varphi_{ji} \in \mathcal{D}(\Omega),\, i, j = \overline{1, N}\right\} = \mathcal{D}(\Omega)_s^{N\times N} \\
\mathcal{D} &= \left\{u = (u_i) \diagup u_i \in \mathcal{D}'(\Omega),\, i = \overline{1, N}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)^N \\
\mathcal{D}' &= \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \diagup \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathcal{D}'(\Omega),\, i, j = \overline{1, N}\right\} = \mathcal{D}'(\Omega)_s^{N\times N}
\end{aligned}$$

Où $\mathcal{D}(\Omega)$ représente l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω et $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω.
les produits de dualité entre D et D', $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ seront définis par :

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle_{D'\times D} &= \langle u_i, v_i\rangle \\
\langle \sigma, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times D} &= \left\langle \sigma_{ij}, \varphi_{ij}\right\rangle
\end{aligned}$$

L'espace $H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial_i u \in L^2(\Omega),\, i = \overline{1, N}\right\}$. est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \partial_i u, \partial_i v\rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

Et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left(\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On note par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

On note aussi par :

$$\begin{aligned} H &= \left\{u = (u_i) : u_i \in L^2(\Omega),\, i = \overline{1, N}\right\} = \left[L^2(\Omega)\right]^N, \\ \mathcal{H} &= \left\{\sigma = (\sigma_{ij}) \diagup \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega),\, i, j = \overline{1, N}\right\} = \left[L^2(\Omega)\right]_s^{N\times N} \end{aligned}$$

On munit les espaces H, $\mathcal{H}$ des produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \langle u, v\rangle_H &= \int_\Omega u_i v_i dx \qquad \forall u, v \in H \\ \langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega u_i v_i dx \qquad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

Les espaces $(H, \langle ., .\rangle_H)$, $(\mathcal{H}, \langle ., .\rangle_{\mathcal{H}})$ sont des espaces de Hilbert et leurs normes sont définies de la façon suivante :

$$|u|_H = \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u \in H \quad ; \quad |\sigma|_{\mathcal{H}} = \left(\int_\Omega |\sigma|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}$$

Et nous avons les relations :

$$\langle u, v\rangle_H = \langle u, v\rangle_{D'\times D} \qquad \forall u \in H,\, v \in D, \quad \langle \sigma, \tau\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \sigma, \tau\rangle_D \qquad \forall \sigma \in \mathcal{H},\, \tau \in D$$

Et les inclusions suivantes :

$$D \subset H \subset D' \quad ; \quad \mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$$

Espace lié à l'opérateur de déformation

L'espace $H_1 = \{u \in H, \text{ tel que : } \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\}$ lié à l'opérateur de déformation ε, est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H_1} = \langle u, v\rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v)\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall u, v \in H_1 \tag{A.8}$$

Et la norme associée

$$|u|_{H_1}^2 = |u|_H^2 + |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}}^2 \qquad \forall u \in H_1 \tag{A.9}$$

Où l'opérateur de déformation linéarisé ε est défini par :

$$\varepsilon : H \to \mathcal{H},\ \varepsilon(u) = \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \quad \forall u \in H$$

Espace lié à l'opérateur divergence

L'espace $\mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H},$ tel que : $div\sigma \in H\}$ lié à l'opérateur divergence div, est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire :

$$\langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma, \tau \rangle_{\mathcal{H}} + \langle div\sigma, div\tau \rangle_H \qquad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H} \tag{A.10}$$

et la norme associée

$$|\sigma|^2_{\mathcal{H}_1} = |\sigma|^2_{\mathcal{H}} + |div\sigma|^2_H \qquad \forall \sigma \in \mathcal{H} \tag{A.11}$$

Où l'opérateur divergence est défini par :

$$div : \mathcal{H} \to H, \qquad div\sigma = \partial_j \sigma_{ij} \quad \forall i, j = \overline{1, N}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}$$

Nous avons aussi les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$$

Quelques propriétés sur les espaces H_1 et H_1 :

$$\begin{aligned} |u|_H &\leq |u|_{H_1}, \qquad |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \leq |\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}_1} \quad \forall u \in H_1 \\ |\sigma|_{\mathcal{H}} &\leq |\sigma|_{\mathcal{H}_1}, \qquad |div\sigma|_H \leq |div\sigma|_{H_1} \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

Théorème de trace, formule de Green et inégalité de Korn

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N = 1, 2, 3)$ de frontière Γ de classe C^1 par morceaux, nous avons le théorème suivant.

Théorème A.7 *(Théorème de trace) : Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$ vérifiant l'égalité*

$$\gamma v = v_{/\Gamma} \qquad \forall v \in C\left(\bar{\Omega}\right)^N$$

S'il n'ya pas d'ambiguïté à craindre, on écrit v au lieu de γv. En outre, il existe une constante c, strictement positive dépendant seulement de Ω, vérifiant :

$$|v|_{L^2(\Gamma)^N} \leq c\,|v|_{H_1} \quad \forall v \in H_1.$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to L^2(\Gamma)^N$, n'est pas surjective. Limage de H_1, par cette application est notée H_Γ, ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^N$. Désignons par H'_Γ le dual de H_Γ, et $\langle .,. \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ.

Pour tout $\sigma \in H'_\Gamma$ et H_Γ, il existe un élément noté $\sigma\nu \in H'_\Gamma$ tel que :

$$\langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle div\sigma, u \rangle_H \qquad \forall u \in H_1, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1 \tag{A.12}$$

Et si $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})_s^{N \times N} = \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in C^1(\bar{\Omega}),\, i,j = \overline{1,N} \right\}$, nous avons la formule.

$$\langle \sigma\nu, \gamma u \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu u \; ds \qquad \forall u \in H_1$$

Donc, si σ est assez régulier nous avons la formule suivante (Formule de Green) :

$$\langle \sigma, \varepsilon(u) \rangle_{\mathcal{H}} + \langle div\sigma, u \rangle_H = \int_\Gamma \sigma\nu u \; ds \qquad \forall u \in H_1, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H}_1$$

Soit maintenant $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, une partition de Γ

Théorème A.8 *(inégalité de Korn)*

Soit mesure $\Gamma_1 > 0$. Alors, il existe une constante $c > 0$, qui dépend de Ω et Γ_1 telle que :

$$|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \geq c\, |u|_{H_1} \quad \forall u \in V \tag{A.13}$$

où V est un sous-espace fermé de H_1, défini par :

$$V = \{ u \in H_1 : \gamma u = 0 \quad p.p.\ sur\ \Gamma_1 \}$$

et le produit scalaire dans V est défini par :

$$\langle u, v \rangle_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V$$

Pour la démonstration de ce théorème voir [19], page 79.

Remarque A.9 *Grâce à l'inégalité de Korn, on peut vérifier facilement que les normes* $|.|_V$ *et* $|.|_{H_1}$*, sont équivalentes sur* V*. par conséquent* $(V, |.|_V)$ *est un espace de Hilbert. En outre du théorème de Sobolev et de l'équivalence des normes* $|.|_V$ *et* $|.|_{H_1}$ *on déduit l'existence d'une constante* $c > 0$ *qui dépend de* Ω, Γ_1 *et* Γ_3, *telle que :*

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^N} \leq c\,|v|_V \quad \forall v \in V$$

A.4 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Soient $|.|_X$ et $\langle .,. \rangle_X$ la norme et le produit scalaire d'un espace de Hilbert X et $T > 0$.

pour $p \in [1, \infty]$. On définit l'espace

$$W^{1,p}(0,T;X) = \{u \in \mathcal{D}'(0,T;X) / D_j u \in L^p(0,T;X) \quad \text{pour } j = 0,1\}$$

Ou D_j désigne la dérivée d'ordre j au sens des distributions.

$W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de Sobolev pour la norme

$$|u|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \left(\int_0^T |u(t)|_X^p \, dt + |\dot{u}(t)|_X^p \, dt \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty.$$

D'autre part $W^{1,\infty}(0,T;X)$ est un espace de Sobolev pour la norme

$$|u|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \max \left\{ |u(t)|_{L^\infty(0,T;X)} + |\dot{u}(t)|_{L^\infty(0,T;X)} \right\} \quad \text{si } p = \infty.$$

et nous dénotons par $C([0,T];X)$ l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans X, et de norme

$$|x|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} |x|_X \, .$$

Ainsi nous dénotons par $C^1([0,T];X)$ l'espace des fonctions dérivables est leurs dérivées appartiennent à $C([0,T];X)$ et de norme :

$$|x|_{C([0,T];X)} = \max_{t \in [0,T]} |x|_X + \max_{t \in [0,T]} |\dot{x}|_X$$

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème A.10 *Soient* $(X, |.|)$ *un espace de Banach réel et* $F(t,.) : X \to X$ *un opérateur défini presque partout. sur* $]0,T[$, *qui satisfait les conditions suivantes :*

1) *Il existe* $L_F > 0$ *tel que* $|F(t,x) - F(t,y)|_X \leq L_F |x-y|_X \quad \forall x, y \in X,$ *p.p.* $t \in]0,T[$

2) *Il existe* $p \geq 1$ *tel que* $t \to F(t,x) \in L^p(0,T;X) \quad \forall x \in X.$

Alors pour tout $x_0 \in X$, *il exite une fonction* $x \in W^{1,p}(0,T;X)$ *telle que*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) & p.p.\ t \in]0,T[\\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans [29], page 60.

Lemme de Gronwall

Lemme A.11 *Soient* $f,\ g \in C([0,T], \mathbb{R}_+), a \in \mathbb{R}_+$ *et* $\varphi \in C([0,T], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} Si \quad \varphi(t) &\leq a + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds, \quad t \in [0,T] \\ Alors\ on\ a \quad : \quad \varphi(t) &\leq \left(a + \int_0^t f(s)ds\right) \exp \int_0^t g(s)ds, \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

Pour le cas particulier $f \equiv 0$, *ce lemme devient :*

Corollaire A.12 *Soient* $g \in C([0,T], \mathbb{R}_+), a \in \mathbb{R}_+$ *et* $\varphi \in C([0,T], \mathbb{R})$ *alors :*

$$\begin{aligned} Si \qquad \varphi(t) &\leq a + \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds, \quad t \in [0,T] \\ Alors\ on\ a \quad \varphi(t) &\leq a \exp \int_0^t g(s)ds, \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

Références

[1] **R. S Adams**, *Sobolev spaces, Academic press*, New York (1974).

[2] **A. Amassad, C. Fabre and M. Sofonea**, *A Quasistatic Viscoplastic Contact Problem with Normal Compliance and Friction*, IMA Journal of Applied Mathematics, 69, PP. 463-482 (2004).

[3] **A. Bensayah, D. Chacha and A. Ghezal**, *Asymptotic of a Signorini problem of generalized Marguerre-von Karman shallow shells*, Applicable Analysis, 2013, Vol. No. 9, 1848-61862.

[4] **H. Brézis**, *Equations et Inéquations non Linéaire dans les Espaces Vectoriels en Dualité*, Ann. Inst. Fourrier, 18 (1968), p 115-175.

[5] **P. G. Ciarlet,** *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris 1986.

[6] **O. Chau, J. R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea,** *Variational and Numerical Analysis of a Quasistatic Viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl.Math, 159 (2003), 431-465.

[7] **G. Duvaut, J. L. Lions**, *Les inéquations en Mécanique et en Physique.* Dunod. Paris (1972).

[8] **C. Eck, J. Jarusek and M. Krbec**, *Unilateral contact problems : Variational methods and existence theorems*, In Pure and Applied Mathematics, Chapman-Hall/CRC Press, New York, **270** (2005).

[9] **J. R. Fernández, M. Shillor,W. Han, M. Sofonea,** *Analysis and Numerical Simulations of a Dynamic Contact Problem with Adhesion*, Math. Comput. Modeling 37(2003), PP. 1317-1333.

[10] **J. R. Fernández, M. Sofonea,** *Variational and Numerical Analysis of the Signorini's Contat Problem in Viscoplasticity with damage*, J. Appl. Math. 2. (2003), PP. 87-114.

[11] **G. Fichera**, *Problemi Elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I, 5, PP. 91-140 (1964).

[12] **M. Fremond**, *Adhérence des solides,* Journal Mécanique Théorique Appliqué 6 (1987), p.p. 383-407.

[13] **W. Han, M. Sofonea**, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, American Mathematical Society-International Press, 2002.

[14] **I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Necăs, J. Lovíšek**, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics,* New York, Springer-Verlag, 1988.

[15] **I. Ionescu and M. Sofonea**, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[16] **N. Kikuchi, J.T. Oden,** *Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadelphia, 1988.

[17] **K. Kuttler and M. Shillor**. *Dynamic Contact With Signorin's Condition and Slip Rate Dependent Friction*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004(2004), No. 83, pp. 1–21. ISSN : 1072-6691.

[18] **J. A. C. Martins, M. D. P. Monteriro Marques**, eds., *Contact Mechanics,* Dordrecht, Kluwer, 2002.

[19] **J. Necas and I. Halvacek**, *Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies* : An introduction, Studie in Applied Mechanic, Vol.3, Elsevier Scientifc, Amsterdam, 1981.

[20] **P. D. Panagiotopoulos**, *Inequality Problems in Mechanics and Applications,* Birkhäuser, Boston, 1985.

[21] **M. Raous, M. Jean, J. J. Moreau**, eds., *Contact Mechanics*, Plenum Press, New York, 1995.

[22] **M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu**, *A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Engrg. **177** (1999), pp. 383-399.

[23] **M. Selmani and M. Sofonea**, *A Viscoelstic Frictionless Contact Problems With Adhesion,* Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications, Volume 2006, Article ID 36130, Pages 1–22 doi 10.1155/JIA/2006/3613.

[24] **A. Signorini,** *Sopra alcune questioni di elastostatica*, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze,* 1933.

[25] **M. Sofonea,** *Modélisation mathématique en Mécanique du Contact*, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, 2005, PP. 67-74 ISSN : 1223-6934.

[26] **M. Sofonea, T. V. Hoarau-Mantel,** *Elastic Frictionless Contact Problems With Adhesion.* Advances in Mathematical Sciences and Application Vol.14, No.1 2004, pp.25-40.

[27] **M. Sofonea,** *Problèmes Non-linéaires dans la théorie de l'Elasticité,* Cours de Magister de Mathématiques Appliquées, Université de Sétif, Algérie 1993.

[28] **M. Sofonea, W. Han and M. Shillor**, *Analysis and approximation of contact problems with adhesion or damage*, Monographs and textbook in Pure and Applied Mathematics **276**, Chapman-Hall/CRC Press, New York, 2006.

[29] **P. Suquet,** *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris6, 1982.

[30] **B. Teniou and M. Sofonea,** *Contact with adhesion between a deformable body and a foundation*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Application, Volume5, Issue 2, Article 9, pp.1-11, 2008.

[31] **B.Teniou and S. Benferdi**, *A contact Problem with Normal Compliance and Adhesion,* Annals of the University of Bucharest (mathematical series), 4 (LXII) (2013), 243-252.

[32] **B.Teniou and S. Benferdi**, *Quasistatic Elastic Contact with Adhesion,* Hindawi Publishing Corporation International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2011, Article ID 686139, 13 pages doi :10.1155/2011/686139.

[33] **A. Touzaline,** *Analysis of a Viscoelastic Frictionless Contact Problem with Adhesion,* REV. Roumaine Math. Pures APPL, 55 (2010), 5, 411–430.

Résumé

Le but de cette thèse est l’étude de deux problèmes aux limites de contact. Le premier est le contact avec adhésion et sans frottement entre un matériau élastique non-linéaire et une fondation rigide. Le deuxième est le contact avec adhésion et sans frottement entre un matériau élastique non-linéaire et une fondation déformable. Le processus est quasi-statique, le champ d’adhésion est décrit par une équation différentielle non-linéaire du premier ordre. Dans l’étude des deux problèmes de contact le tenseur des déformations est supposé linéaire. Nous modélisons les deux problèmes, nous déduisons leurs formulations variationnelles ensuite nous démontrons l’existence et l’unicité de leurs solution faibles.

Mots clés : élasticité non-linéaire, contact sans frottement, adhésion, condition de Signiorini, compliance normale, solution faible, opérateur fortement monotone, point fixe de Banach.

Abstract

The purpose of this thesis is the study of two boundary contact problems. The first is the frictionless contact with adhesion between a nonlinear elastic material and a rigid foundation. The second is the frictionless contact with adhesion between a nonlinear elastic material and a deformable foundation. The process is quasi- static , the bonding field is described by a non-linear differential equation of the first order .
In the study of the two contact problems the strain tensor is assumed linear. We modelize both problems, we deduce their variational formulations then we prove the existence and uniqueness of their weak solution.

Key words: nonlinear elasticity , frictionless contact , adhesion, Signiorini condition , normal compliance, weak solution , strongly monotone operator , Banach fixed point .

ملخص

الغرض من هذه الأطروحة هو دراسة مسألتين حديتين, الأولى هي تلامس دون إحتكاك مع الإلتصاق بين جسم مرن غير خطي و قاعدة صلبة . و الثانية هي تلامس دون احتكاك مع الإلتصاق بين جسم مرن خير خطي و قاعدة قابلة للتشوه في سياقات شبه سكونية .و حقل الالتصاق يعطى على شكل معادلة تفاضلية غير خطية من الرتبة الأولى.
في دراسة مسألتي الإتصال يفترض أن التشوه خطي . نقدم نموذج لكل من المسألتين، و نستنتج الصيغ التغيرية ثم نثبت وجود و وحدانية الحلول الضعيفة.

الكلمات المفتاحية: المرونة غير الخطية, تماس دون احتكاك, التصاق, شروط سينيوريني, تشوه عمودي, حل ضعيف مؤثر رتيب بقوة, النقطة الثابتة لبناخ.