Chapitre 2 : formulation mathématique.

2.1 - Introduction :

La majorité des écoulements rencontrés dans la nature et qui sont d'un intérêt pratique en industrie sont turbulents instables et très complexes. En général, tout écoulement turbulent est décrit par des équations différentielles aux dérivées partielles. Mais avec les ordinateurs de nos jours, il est pratiquement impossible de pouvoir résoudre les équations instables de Navier-Stockes. Des équations exactes peuvent dériver des équations générales de Navier-Stockes, mais malheureusement on tend vers une infinité de solutions (équations). De la on s'oriente vers le domaine de la modélisation de la turbulence. Divers méthodes sont alors appliquées aux écoulements turbulents pour la fermeture du système d'équations.

Dans le présent travail, nous avons appliqué le modèle connus dans les modèles de turbulence qui est le modèle (K-epsilon) pour l'étude de l'écoulement tridimensionnels turbulent dans un échangeur coaxial. Ce dernier, donne une description plus réaliste des phénomènes d'interaction turbulente en suivant l'évolution de chaque paramètre turbulent par les équations de transport.

Pour tous les écoulements, Fluent résout les équations de la conservation de masse, de quantité de mouvement. Pour des écoulements impliquant le transfert thermique ou la compressibilité une autre équation additionnelle pour la conservation d'énergie sera résolue, **des équations additionnelles de transport sont également résolues quand l'écoulement est turbulent.**

2.2 - Equations du mouvement en coordonnées cartésiennes :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_j\right) = 0 \qquad (1)$$

Dans le présent travail le fluide est supposé incompressible donc :

$\rho = cte$ D'où: $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ (2)

- **Equation de quantité de mouvement :** L'équation qui régit ce principe est :

Sous forme vectorielle : $\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}+\nabla.(\rho\vec{V}\vec{V})=\nabla(\bar{\sigma})+\vec{F}$.....(3)

- **Équation d'énergie :** L'équation d'énergie s'écrit comme :

$$\rho C_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}.grad\bar{.}T\right]=div(\lambda.grad\bar{.}T)+q+\Phi.....(4)$$

2.3 - Les hypothèses de travail : Dans notre étude en va considérer ces hypothèses :

- ✓ Le fluide est incompressible $(\rho = cons\tan t)$.
- ✓ Le fluide Newtonien
- ✓ L'écoulement est turbulent, tridimensionnel et permanent $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$.
- ✓ Le terme source est nul.
- ✓ Les forces de volume(Fi) sont négligeables.
- ✓ La dissipation visqueuse nulle.
- ✓ L'épaisseur des deux cylindres est négligeable (conduction négligée).

En tenue compte de ces hypothèses, les équations de l'écoulement de fluide deviennent en régime turbulent :

2.4 - Equations générales des écoulements turbulents :

Décomposition de Reynolds : Si l'on prend un mouvement turbulent composé de tourbillons transportés par un mouvement d'ensemble, on peut représenter le mouvement désordonné en un point fixe de l'espace, tel qui-il est apprécié à un instant donné par un observateur situé en ce point par la somme de deux mouvement : le premier représentant le mouvement d'ensemble et le second le mouvement de fluctuations. Autrement dit les valeurs instantanées des composantes de la vitesse (u, v) et la pression en un point seront remplacées par leurs équivalents : $U_i = \bar{U}_i + u_i' \quad P = \bar{P} + p'$ (*) (Règles de Reynolds).

Dans lesquels les quantités $\bar{U}_i$ et $\bar{P}$ représentent des moyennes de grandeurs :

$$\bar{U}_i = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} U_i dt \quad \bar{P} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^{\infty} P dt$$

Cette définition implique que le mouvement moyen est permanent $\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} = 0\right)$

En remplaçant dans les équations du mouvement les valeurs instantanées par la somme des valeurs moyennes (par rapport au temps) de ces équations des simplifications apparaîtront car la moyenne d'une valeur fluctuante est nulle $\overline{u_i'} = 0$, $\overline{p'} = 0$.

Par conséquent l'approche statistique est adoptée, suggérée par Reynolds : les valeurs instantanées de la vitesse U_i la pression p sont séparées en quantités moyennes et fluctuantes. Cette opération de moyenne sur les expressions et est l'outil de base en turbulence. On emploie, ainsi quelques règles qui peuvent s'en déduire **[47]**.

$\overline{\phi}$: Valeur moyenne de la quantité instantanée ϕ

ϕ' : Valeur de la fluctuation de la quantité ϕ

$\bar{f}$: Valeur moyenne de la quantité instantanée f

f' Valeur de la fluctuation de la quantité f

Règle de Reynolds : en utilisant les règles de Reynolds, Heinz(1975) et qui sont les suivantes, Le calcul des moyennes permet d'écrire :

$$\overline{\phi}' = 0$$

$$\overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi}$$

$$f\overline{\phi} = \overline{f}\,\overline{\phi}$$

$$f\overline{\phi'} = \overline{f\phi'} = 0$$

$$f\overline{\phi} = \overline{f}\,\overline{\phi} + \phi'\overline{f}'$$

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial X} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial X}$$

Equation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\left(\overline{U}_i + u'_i\right) = 0 \qquad (5)$$

Et l'opérateur moyen d'ensemble appliqué à cette équation fournit

$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_i} = 0$, et par soustraction $\frac{\partial u_i'}{\partial X_i} = 0$

Les tensions de Reynolds : Considérons équations de N-S pour le mouvement instantané.

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial X_i} + \nu \frac{\partial}{\partial X_j}\left[\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right] \quad \text{.....(6)}$$

En remplaçant les expressions (*) dans (6), cette derrière équation devient:

$$\frac{\partial(\overline{U} + u_i')}{\partial t} + (\overline{U}_j + u_j')\frac{\partial(\overline{U}_i + u_i')}{\partial X_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\overline{P} + p')}{\partial X_i} + \nu \frac{\partial}{\partial X_j}\left[\frac{\partial(\overline{U}_i + u_i')}{\partial X_j} + \frac{\partial(\overline{U}_j + u_j')}{\partial X_i}\right]$$

En prenant la moyenne des termes il reste :

$$\frac{\partial(\overline{U}_i\overline{U}_j)}{\partial X_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)\right] - \frac{\partial(\overline{u_i'u_j'})}{\partial X_j}$$

En arrangeant cette dernière équation, on obtient :

$$\frac{\partial(\overline{U}_i\overline{U}_j)}{\partial X_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right) - u_i'u_j'\right] \quad \text{.....(7)}$$

Les neufs quantités $-\overline{u}_i\overline{u}'_j$ forment un tenseur (moyenne des produits des composantes de deux vecteurs). Et on appelle ces quantités tensions de Reynolds par analogie aux tensions de viscosité $\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)\right]$.

Les termes $-\overline{u}_i\overline{u}'_j$ donnent naissance aux tensions de Reynolds. Ils proviennent du non linéarité des équations de N-S et s'interprètent comme des contraintes.

Les équations de Reynolds peuvent aussi s'écrire :

$$\overline{U}_j\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial X_j}\left[-\underbrace{\rho\overline{u}_i'\overline{u}_j'}_{tensiende\ \mathrm{Re}\ ynolds} - \overline{p}\delta_{ij} + \underbrace{\mu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)}_{tensiendeN-S}\right] \quad \text{.....(8)}$$

Ou δ_{ij} est le terme de Kronecker

Si $i = j$ $\delta_{ij} = 1$; Si $i \neq j$ $\delta_{ij} = 0$

On a en général $-\overline{\rho u_i' u_j'} >> \mu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)$ ce n'est que près des parois que les tensions de N-S reprennent un rôle important **[5].** .

Equations de transport aux tensions de Reynolds : Le point de départ ce sont les équations de N-S.

$$\left(\overline{U}_j+u_j'\right)\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{U}_i+u_i'\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\overline{P}+p\right)}{\partial X_i}+\frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial\left(\overline{U}_i+u_i'\right)}{\partial X_j}+\frac{\partial\left(\overline{U}_i+u_i'\right)}{\partial X_i}\right)\right] \quad \ldots\ldots(9)$$

En prenant la moyenne statistique, on obtient :

$$\overline{U}_j\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial X_i}+\frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}+\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)\right]-\frac{\partial\left(\overline{u_i'u_j'}\right)}{\partial X_j} \quad \ldots\ldots(10)$$

Par soustraction entre (9) et (10) on a :

$$\overline{U}_j\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial X_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X_i}+\frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial X_i}\right)\right]-u_j'\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}-\frac{\partial}{\partial X_j}\left[u_i'u_j'-u_i'u_j'\right]$$

On obtient de même si on remplace l'indice i par n :

$$\overline{U}_j\frac{\partial \overline{u_n'}}{\partial X_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X_n}+\frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial u_n'}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial X_n}\right)\right]-u_j'\frac{\partial \overline{U}_n}{\partial X_j}-\frac{\partial}{\partial X_j}\left[u_n'u_j'-u_n'u_j'\right]$$

Multipliant alors par u_n' et par u_i' et puis additionnant membre à membre :

$$\overline{U}_j\frac{\partial\left(u_i'u_n'\right)}{\partial X_j}=-\frac{1}{\rho}u_n'\frac{\partial p}{\partial X_i}-\frac{1}{\rho}u_i'\frac{\partial P}{\partial X_n}+u_n'\frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial u_i'}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial X_i}\right)\right]+u_i'\frac{\partial}{\partial X_j}\left[\nu\left(\frac{\partial u_n'}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial X_n}\right)\right]$$

$$-u_n'u_j'\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}+u_n'\left[\frac{\partial u_i'u_j'}{\partial X_j}-\frac{\partial u_i'u_j'}{\partial X_j}\right]-u_i'u_j'\frac{\partial \overline{U}_n}{\partial X_j}+u_i'\left[\frac{\partial u_n''u_j'}{\partial X_j}-\frac{\partial u_n'u_j'}{\partial X_j}\right]$$

Après arrangement en prenant la moyenne, on a :

$$\underbrace{\overline{U}_j\frac{\partial\left(u_i'u_n'\right)}{\partial X_j}}_{(a)}=\underbrace{-\left[\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \overline{U}_n}{\partial X_j}+u_n'u_j'\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}\right]}_{(b)}\underbrace{-2\nu\left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial X_j}\frac{\partial \overline{u_n'}}{\partial X_j}\right)-\nu\left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial X_j}\frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial X_n}+\frac{\partial \overline{u_n'}}{\partial X_j}\frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial X_i}\right)}_{(c)}-$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{u_i'u_n'u_j'}+\delta_{nj}nj\frac{\overline{u_i'P}}{\rho}+\delta_{ij}\frac{\overline{u_n'P}}{\rho}-\nu\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial X_n}-\nu u_n'\frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial X_i}-\nu u_i'\frac{\partial u_j'}{\partial X_n}\right)}_{(d)}+\underbrace{\frac{\overline{P}}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial u_n}+\frac{\partial u_n'}{\partial X_i}\right)}_{(e)} \quad \ldots\ldots(11)$$

Les cinq termes s'appellent comme suit :

- (a): Taux de variation du tenseur des contraintes de Reynolds $\overline{u_i' u_n'}$ Le long d'une ligne de courant.
- (b) : Taux de production (source) de $\overline{u_i' u_n'}$ par interaction directe avec le taux moyen de déformation.
- (c) : Taux de dissipation de $\overline{u_i' u_n'}$ par l'action de viscosité sur les tourbillons à petite échelle de l'écoulement.
- (d) : Taux de diffusions de $\overline{u_i' u_n'}$.
- (e) : l'interaction pression /taux de déformation qui tend à « isotropie » les contraintes dans le champ de l'écoulement.

Bilan aux tensions de Reynolds : On obtient alors une équation pour le moment d'ordre 2 $\left(\overline{u_i' u_j'}\right)$ qui peut se mettre sous la forme suivante : $\frac{D\overline{u_i' u_j'}}{Dt} = P_{i,j} - \varepsilon_{i,j} + \Pi_{i,j} + D_{i,j}$

Cette équation est appelée équation des tensions de Reynolds ou équation de transport des tensions de Reynolds.

Terme de production :

$$P_{i,j} = -\overline{u_i' u_k'} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} - \overline{u_j' u_k'} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}$$

Ce terme ne fait intervenir que le gradient de vitesse moyenne et le tenseur de Reynolds qui sont les inconnues principales du problème.

Taux de dissipation visqueuse :

$$\varepsilon_{i,j} = 2\nu \frac{\partial \overline{u_i'} \partial \overline{u_j'}}{\partial X_k \partial X_k}$$

Ce terme de dissipation est pris égal à $\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{i,j}$, ou' ε est le taux de dissipation de l'énergie cinétique de turbulence. La viscosité du fluide dissipe l'énergie de turbulence en agissant sur les plus petits tourbillons (échelle Kolmogorov) dont le comportement est en moyenne isotrope. On en déduit que, de manière approchée, les taux de dissipation des contraintes normales $u_i'^2$ sont égaux entre eux et que ceux des contraintes $\left(\overline{u_i' u_j'}\right)$ avec $i \neq j$ Sont nuls.

Corrélation pression – taux de déformation :

$$\Pi_{i,j} = \frac{P'}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial X_i}\right)$$

Il contribue à un échange entre les composantes ($u_1'^2$, $u_2'^2$, $u_3'^2$) sans modifier leur somme et, pour cette raison, on dit qu'il s'agit d'un terme de redistribution. Ce terme se compose de deux parties d'après Rodi (1980) ou Schiestel(1993) on a :

$$\frac{P'}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial X_i}\right) = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2}$$

$\phi_{ij,1}$ Étant engendré par des interactions purement turbulentes, $\phi_{ij,2}$ par des interactions entre turbulence et gradient de vitesse moyenne, sont généralement modélisés séparément, d'après la proposition de Rotta (1961) :

$\phi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u'}_i \overline{u_j'} - \frac{2}{3}\delta_{ij} k\right)$, Ou, $C_1 = 1.5$; ce terme favorise le retour à l'isotropie.

En fait, il est proportionnel à l'anisotropie de la turbulence. Il est négatif (donc un puits) si $\overline{u_i'^2} > \frac{2}{3}k$, C'est en fait un terme qui tend à redistribuer l'énergie turbulente ente les composantes normales $\overline{u_i'^2}$.

La deuxième partie est modélisée d'après Lander et Rodi (1975) :

$\phi_{ij,2} = -\gamma\left(P_{i,j} - \frac{2}{3}\delta_{ij} P\right)$; Avec $\gamma = 0.6$

Ou ' $P_{i,j} = -\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_k} - \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_k}$ et $P = -\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}$.

Ce terme est aussi redistribuai car sa trace est nulle. $\phi_{ij,2}$ Traduisant une interaction entre la turbulence et les gradients de vitesse moyenne, est analogue à $\phi_{ij,1}$: il est proportionnel à l'anisotropie du taux de production de $\left(\overline{u_i'u_j'}\right)$.

Pour tenir compte de l'effet de la paroi sur la turbulence le terme de corrélation pression – taux déformation utilisé dans le logiciel Fluent supposé égal à : $\frac{P'}{\rho}\left(\frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial X_j}+\frac{\partial \overline{u_j'}}{\partial X_i}\right)=\phi_{ij,1}+\phi_{ij,2}+\phi_{ij,w}$,

Ou' $\phi_{ij,w}$ est appelé terme de réflexion de la paroi, il est responsable de l'amortissement de la contrainte normale près de la paroi et perpendiculaire à celle-ci.il est modélisé comme suit :

$$\phi_{ij,w}\equiv C'\frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_k'u_m'}n_k n_m\delta_{ij}-\frac{2}{3}\overline{u_i'u_j'}n_j n_k-\frac{3}{2}\overline{u_j'u_k'}n_i n_k\right)\frac{k^{3/2}}{C_1.\varepsilon.y_P}+$$
$$C_2'\left(\phi_{Km,2}n_k n_m\delta_{ij}-\frac{2}{3}\phi_{ij,2}n_j n_k-\frac{3}{2}\phi_{ik,2}n_i n_k\right)\frac{k^{3/2}}{C_1.\varepsilon.y_P}$$

OU' $C_1'=0.5, C_2'=0.3, n_k$ est la composante x_k du vecteur unitaire normal à la paroi, y_p est la distance normale à la paroi, $C_1=C_\mu^{3/4/}/k$, ou $C_\mu'=0.09$ et est la constante de Von Karman égale à 0.4187.

Terme de transport diffusif : $D_{i,j}=\frac{\partial}{\partial X_k}\left(-\overline{u_i'u_j'u_k'}+\nu\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial X_k}-\frac{\overline{P'}}{\rho}\left(\overline{u_i'}\overline{\delta}_{jk}+\overline{u_j'}\overline{\delta}_{ik}\right)\right)$

Le deuxième terme (diffusion de $\left(\overline{u_i'u_j'}\right)$ par interaction moléculaire) est négligeable aux grands nombre de Reynolds. Aussi, le troisième terme diffusif par la fluctuation de pression est considéré négligé dans la plupart des travaux disponibles dans la littérature. Pour la triple corrélation des fluctuations de vitesse, Daly et Harlow ont proposé(1970) la relation suivante :

$\overline{u_i'u_j'u_k'}=-Cs'\frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k'u_l'}\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_l}$ Ou , $Cs'\approx 0.22$

Les indices ijk ne présentent aucune symétrie. Shir (1973) a apporté une expression plus simplifiée en employant un coefficient de transport isotrope :

$\overline{u_i'u_j'u_k'}=-Cs'\frac{k^2}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}$ **[47,5].**

2.5 - Le modèle $k-\varepsilon$: C'est un modèle à deux équations de transport pour deux paramètres de turbulence proposé par Jones et Launder (1972) qui se base sur le concept Boussinesq (1877) utilisant l'analogie entre l'échange de quantité de mouvement par

interaction moléculaire à l'échelle microscopique (contraintes visqueuses) et l'échange de quantité de mouvement par la turbulence à l'échelle macroscopique (contrainte de Reynolds) Ce modèle a trouvé le plus grand champ d'application dans des domaines d'intérêt pratique et industriel, Il résout en plus des équations des champs moyens des équations de l'énergie cinétique de la turbulence k et son taux de dissipation ε **[40,46]**.

2.6 - concept de Boussinesq : Où la viscosité turbulente est donnée par la relation suivante : $$-\overline{u_i'u_j'} = \nu_i\left[\frac{\partial \overline{U_i'}}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U_j'}}{\partial X_i}\right] - \frac{2}{3}k\delta_{ij}$$

$\nu_t = C_\mu\left(k^2/\varepsilon\right)$; Avec $\mu_t = \nu_t\rho$ viscosité dynamique turbulente.

C_μ : Constante empirique.

k : est l'énergie cinétique de turbulence défini par :

$$k = \frac{1}{2}\overline{u_i'^2} = \frac{1}{2}\left(\overline{u_1'^2} + \overline{u'^2}_2 + \overline{u_3'^2}\right)$$

ε : Le taux de dissipation de l'énergie de turbulence k donné par la relation suivante :

$$\varepsilon = \nu\left[\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x_j}\right]^2$$

Ce terme de dissipation qui apparait dans l'équation de l'énergie de turbulence reste à déterminer. L'échelle typique de longueur des grosses structures de la turbulence L est déduite de : $\varepsilon = k^{3/2}/L$ **[58,59].**

Cette loi de comportement de la turbulence fait intervenir un coefficient de même dimension que la viscosité moléculaire appelé viscosité turbulente. Mais à la différence de la viscosité moléculaire, la viscosité turbulente dépend de l'état de la turbulence en chaque point et diffère pour un même fluide d'un écoulement turbulent à un autre.

D'où l'idée de la relier aux caractéristique de la turbulence. Bien après Boussinesq, Kolmogorov et Prandtl proposent indépendamment une relation qui lie la viscosité turbulente au produit d'une échelle de vitesse des grosses structures de la turbulence et d'une échelle caractéristique de la longueur. L'échelle caractéristique des fluctuations de vitesse est $k^{\frac{1}{2}}$

L'échelle typique des longueurs est définie par $k^{\frac{3}{2}}/\varepsilon$ Comme l'énergie de la turbulence est contenue essentiellement dans les grosses structures de la turbulence, (Tennekes et lumley). C'est cette même énergie qui a été prise comme base de l'échelle de vitesse.

$$\nu t = c\mu\left(k^{\frac{1}{2}}\right)\left(k^{\frac{3}{2}}/\varepsilon\right) = c\mu k^2/\varepsilon$$

, $c\mu = cte$ Empirique.

L'hypothèse de la viscosité dynamique turbulente peut-être alors exploitée en écrivant μt en fonction de k et ε telle que : $\mu t = C_p \frac{k^2}{\varepsilon}$

- **Les équations de transport de k et ε :** Les équations de transport semi-empiriques de l'énergie cinétique turbulente k et son taux de dissipation ε sont :

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial k}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\overline{U}_j \frac{\partial k}{\partial X_j}}_{(2)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\nu}{\sigma_{k,L}} + \frac{\nu t}{\sigma_{k,t}}\right)\frac{\partial k}{\partial X_j}}_{(3)} + \underbrace{\nu t\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}}_{(4)} - \underbrace{\varepsilon}_{(5)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}}_{(a)} + \underbrace{\overline{U}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j}}_{(b)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\nu}{\sigma_{\varepsilon,L}} + \frac{\nu t}{\sigma_{\varepsilon,t}}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial X_j}}_{(c)} + c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}\underbrace{\nu t\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j}}_{(d)} - \underbrace{c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}}_{(e)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Ces deux équations donnent k et ε qui permettent à leur tour de calculer la viscosité νt connaissant νt, on peut calculer le tenseur des contraintes $\overline{u_i' u_j'}$, Ce qui permet la résolution des équations de Reynolds. Les constantes standard du modèle sont celles données par Launder et Spalding(74). Elles sont réunies dans le tableau suivant **[4,5]** :

$C\mu$	$C\varepsilon 1$	$C\varepsilon 2$	$\sigma_{k,L} = \sigma_{k,t}$	$\sigma_{\varepsilon,L}$	$\sigma_{\varepsilon,t}$
0.09	1.44	1.92	1.0	1.0	1.3

Tableau (2.1) : Les constantes standard du modèle données par Launder et Spalding(1974).

- Le terme (1) de l'équation représente le taux de variation de l'énergie cinétique turbulente k.
- Le terme (2) représente le transport par convection de l'énergie cinétique turbulente k

- Le terme (3) représente le transport par diffusion de l'énergie cinétique turbulente k.
- Le terme (4) représente la production par cisaillement de l'énergie cinétique turbulente k.
- Le terme (5) représente la dissipation de l'énergie cinétique turbulente k.
  - Le terme (a) de l'équation de la dissipation d'énergie représente, le taux de variation de dissipation ε de l'énergie cinétique.
  - Le terme (b) : représente le transport par convection de la dissipation de l'énergie cinétique.
  - Le terme (c) : représente le transport par diffusion de la dissipation de l'énergie turbulente.
  - Le terme (d) : représente la production (source) de ε.
  - Le terme (e) : représente la dissipation (puits) de ε.

Ces deux équations donnent k et ε qui permettent à leur tour de calculer la viscosité turbulente μ_t Connaissant μ_t , on peut déduire le tenseur des contraintes de Reynolds **[55,56].**

Traitement à la paroi : Les effets d'une paroi sur le champ turbulent sont nombreux et complexes, on peut citer cependant les principaux :

- ✓ La contribution réfléchie des corrélations pression-déformation
- ✓ La création d'une zone adjacente à la paroi dans laquelle la viscosité moléculaire est prédominante.
- ✓ Le caractère fortement anisotrope de la turbulence près de la paroi

Le caractère fortement non homogène du champ de la turbulence de ce fait, il existe au moins deux régions dans la couche limite en cas de forte turbulence. L'une loin de la paroi, est contrôlée par la turbulence et l'autre près de la paroi dominée par la viscosité. Ces deux régions sont raccordées par une région appelée région logarithmique à cause de la loi suivie par le profil des vitesses. Il existe deux types de formulations pour incorporer la condition à la limite près de la paroi. La première est celle de la fonction de la paroi, dans la deuxième région, appelée aussi sous-couche visqueuse, zone très fine, la proximité de la paroi cause des difficultés pour l'incorporation des conditions aux limites près de la paroi. D'après Patankar et Spalding (1970), la deuxième formulation est celle utilisant les modèles à faible nombre de Reynolds. Pour les fonctions de paroi le premier point du maillage près de la paroi doit être

situé dans la zone logarithmique ; pour les modèles à faible nombre de Reynolds un nombre de nœuds est utilisé dans la sous couche visqueuse **[57].**

Comme le modèle des contraintes de Reynolds s'adapte bien aux nombre de Reynolds élevés ainsi que pour le modèle de turbulence à deux équations $k-\varepsilon$, on emploie donc une fonction de paroi basée sur la loi logarithmique afin d'arriver à des résultats satisfaisants. La vitesse moyenne, l'énergie cinétique et son taux de dissipation obtenus par les équations suivantes au niveau du nœud de la paroi :

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{U_\tau}{k y_p} \quad \text{et} \quad \frac{U}{U_\tau}=\frac{1}{k}\ln\left(E\frac{y_p U_\tau}{\nu}\right); \qquad k=C_\mu .U^{-1/2}{}_\tau \quad , \quad \varepsilon=\frac{U_\tau}{k.y_p}$$

k : Constante de Von-Karman (k=0.09)

y_p : Distance entre le nœud adjacent à la paroi et la paroi…

ν : viscosité laminaire du fluide

E : Constante, (E=9, pour paroi lisse)

U_τ : est la vitesse de frottement (égale à $\sqrt{\tau_p/\rho}$)

τ_p : est la contrainte de cisaillement à la paroi.

Plusieurs auteurs, par exemple Lien- Leshnizer(1992) ont essayé d'imposer les valeurs de toutes les contraintes dans les nœuds proches de la paroi, comme une fonction de l'énergie cinétique turbulente k. ces valeurs peuvent être dérivées dans une région logarithmique en imposant le terme de production de k en équilibre avec la dissipation, c'à-d $p_k=\rho\varepsilon$.

Les contraintes de Reynolds obtenues par les modèles de GL (GL : Gibson-Launder, 1981) et SSG (S : Speziale et al (1991) sont **[5]** :

	$\frac{\overline{u_1'^2}}{k}$	$\frac{\overline{u_2'^2}}{k}$	$\frac{\overline{u_3'^2}}{k}$	$\frac{\overline{u_1'^2}\,\overline{u_2'}}{k}$
GL	1.098	0.297	0.655	- 0.255
SSG	1.067	0.413	0.520	- 0.314

Loi logarithmique de la vitesse : Dans les régions au voisinage des parois solides, le modèle de turbulence $k-\varepsilon$ ne peut être appliqué que pour des écoulements à très grand nombre de

Reynolds. La résolution numérique du problème demande donc un maillage très fin. C.-à-d.un nombre de point de calcul important. Ne disposant pas d'un nombre de points suffisamment grand, et afin d'éviter d'éventuelles difficultés numériques, le recours a été fait à la version du traitement de paroi donné par Launder et Spalding(1974) qui négligent la présence d'une sous-couche laminaire et considère une distribution uniforme de la contrainte de cisaillement près de la paroi. On notera ainsi que dans cette zone, le bilan de l'énergie cinétique turbulente se simplifie en un équilibre local : Production de la turbulence égale à la dissipation **[58,59].**

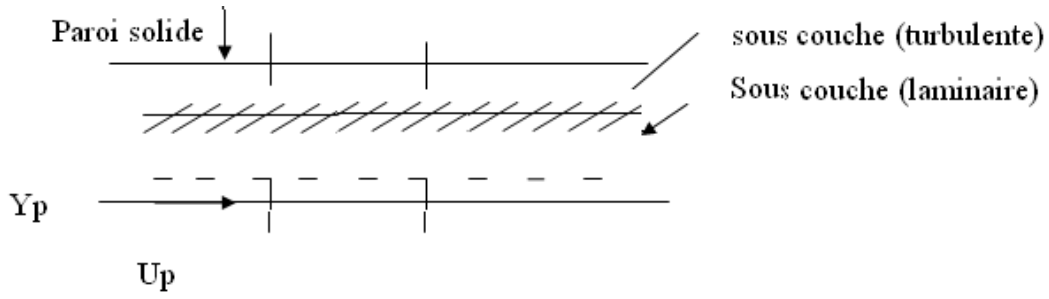

Figure (2.1) : traitement au voisinage de la paroi.

On préfère donc utiliser la région de turbulence ou' une loi logarithmique de vitesse peut être appliquée entre la paroi et les points localisées à une distance Yp La loi logarithmique est vérifiée expérimentalement pour $\frac{Yp - U\tau}{\nu} \geq 30$ $\frac{Up}{U\tau} = \frac{1}{x}\ln\left(E.Yp.\frac{U\tau}{\nu}\right)$

E : Constante (E=9, pour paroi lisse).

x : Constante de Van-Karman (x=0,42).

ν : viscosité laminaire du fluide.

$U\tau$: vitesse de frottement.

$U\tau = \sqrt{\frac{\tau f}{\rho}}$, ou τf = contrainte à la paroi.

Expression de contrainte près de la paroi : Près de la paroi les transports par convection et diffusion de k sont négligeables.

Donc : $P_k = \mu t\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2 = \rho\varepsilon$ En substituant μt par $\rho.C\mu.\frac{k^2}{\varepsilon}$, on obtient : $C\mu k^2\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2 = \varepsilon^2$

Comme le gradient de vitesse $\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)=\frac{\tau f}{\mu t}$, alors l'expression devient : $\tau_f=\rho.C\mu.^{\frac{1}{2}}.k$

L'expression peut s'écrire encore : $U\tau=\frac{x.UP}{U\tau}$, $Ln.(E.YP.\bar{v})$

Comme $\tau_f=\rho.U_\tau^{\,2}$ En remplaçant $U\tau$ par son expression, on obtient :

$$\tau_f=\frac{\rho.x.C\mu.^{\frac{1}{4}}.k^{\frac{1}{2}}.Up}{Ln\left(\frac{E.C\mu^{\frac{1}{4}}.\rho.k^{\frac{1}{é}}.Yp}{\mu}\right)}$$, Et puisque : $\tau_f=\mu t.\left(\frac{Up}{Yp}\right)$

$$\mu t=\frac{\rho.x.C\mu.^{\frac{1}{4}}.k^{\frac{1}{2}}.Yp}{Ln\left(\frac{E.C\mu^{\frac{1}{4}}.k^{\frac{1}{é}}.Yp}{\nu}\right)}$$

Enfin l'identification avec donne :

Expression de P_k et ε près de la paroi étant donné que près de la paroi la production est en équilibre avec la dissipation, l'équation de transport de k s'écrit : $0=P_k-\rho\varepsilon$

$P_k=-\overline{\rho u}'\overline{v}'\frac{\partial U}{\partial Y}$ Donc : $-\overline{\rho u}'\overline{v}'=\mu_t\frac{\partial U}{\partial Y}$

Alors P_k devient : $P_k=\mu_t\left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2=\tau_f\frac{\partial U}{\partial Y}$

En dérivant l'équation par rapport à Yp on obtient : $P_k=\frac{\tau_f}{\rho}\frac{U\tau}{x.Yp}$

Après réarrangement devient : $P_k=\rho\frac{C_\mu^{\frac{3}{4}}.k^{\frac{3}{2}}}{x.Yp}$, $\varepsilon=\frac{C_\mu^{\frac{3}{4}}.k^{\frac{3}{2}}}{x.Yp}$ **[55,56].**