

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE 1
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

N° de série :

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES en PHYSIQUE

Spécialité
ENERGÉTIQUE

Thème

Convection Forcée et Mixte dans un Espace Annulaire Elliptique
Horizontal et Incliné Rempli par une Mousse Métallique.

Par

BENMERKHI MERIEM

Soutenue le : 02/06/2016

Devant le jury

Président	L. BAHI	Prof	Université des Frères Mentouri Constantine 1
Rapporteur	M. AFRID	Prof	École Nationale Polytechnique de Constantine
Examineurs	A. OMARA	Prof	Université des Frères Mentouri Constantine 1
	A . RAHMANI	M.C.A	Université Larbi ben M'hidi Oum El Bouaghi



Remerciements

Je remercie en premier lieu Dieu le tout puissant pour m'avoir donné la force, la patience et la volonté d'accomplir ce travail.

*Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon enseignant Monsieur **AFRID MOHAMED** Professeur au Département de **Génie Mécanique** à l'**École Nationale Polytechnique de Constantine** pour m'avoir encadré le long de cette recherche, pour diriger mes travaux, pour sa patience, ses conseils et ses critiques.*

*Je remercie Monsieur le Professeur **Dominic Groulx**, Directeur du Laboratoire d'Ingénierie Thermique Multiphasique Appliquée (**LAMTE**) à L'Université de **Dalhousie (Canada)** pour sa contribution à la réalisation de ce travail.*

*Je remercie aussi Monsieur **Bahi Lakhdar**, Professeur à l'Université des **Frères Mentouri Constantine**, qui a bien voulu présider mon jury de thèse.
Monsieur **Omara Abdeslam**, Professeur à l'Université des **Frères Mentouri Constantine** et Monsieur **Rahmani Ahmed** Maître de Conférence à l'Université **Larbi ben M'hidi d'Oum El Bouaghi** qui ont bien voulu accepter de lire cette thèse et d'apporter des critiques pertinentes.*

Enfin, je ne saurais oublier tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont prodigué leurs encouragements et m'ont offert leurs soutiens.

Merci à tous.

Meriem

Table des Matières

Table des Figures

Liste des Tableaux

Partie 1 : Convection Forcée dans un Espace Annulaire Elliptique Horizontal Rempli par une Mousse Métallique.

Solution Analytique et Étude Numérique

Nomenclature

Introduction.....	14
Modèle Physique.....	25
Solution Analytique.....	28
3.1. Variables Adimensionnelles.....	29
3.2. Équation de Quantité de Mouvement.....	29
3.3. Équation d'Énergie.....	30
3.4. Champ de Température.....	32
Résultats	
4.1. Espace annulaire rempli de mousse et un espace annulaire vide.....	44
4.2. Modélisation Numérique et Validation des Résultats.....	47
4.3. Reproduction du nombre de Nusselt d'espace annulaire cylindrique.....	57
4.4. Simulation numérique tridimensionnelle et l'approximation d'écoulement axial uniforme.....	58
4.5. Effet du nombre de Reynolds sur le développement thermique.....	61
Conclusion.....	65
Références.....	66
Annexe A : Solution de $T_{1h}(\varepsilon, \eta)$ par la séparation des variables et la détermination des constantes de $T_1(\varepsilon, \eta)$	71
Annexe B : Détermination des valeurs caractéristiques a_{2r} et les vecteurs caractéristiques. A_{2n}^{2r}	72

Annexe C : Fonctions radiales normalisées et fonctions angulaires de Mathieu.....	73
---	----

Partie 2 : Convection Mixte dans un Espace Annulaire Elliptique
Incliné Rempli par une Mousse Métallique.
Propriétés du Fluide dépendent de la Température

Nomenclature	
Introduction.....	85
Modèle Physique.....	92
Modèle Mathématique.....	96
<i>Conditions initiales</i>	98
<i>Équation de continuité</i>	98
<i>Équation du mouvement suivant la direction radiale elliptique</i>	98
<i>Équation du mouvement suivant la direction angulaire elliptique</i>	98
<i>Équation du mouvement suivant la direction axiale elliptique</i>	99
<i>Équation d'énergie</i>	99
<i>Conditions aux limites</i>	99
Méthode Numérique.....	102
Résultats et Discussions	
5.1. <i>Écoulement secondaire</i>	105
5.2. <i>Écoulement axial</i>	109
5.3. <i>Chute de pression statique axiale</i>	117
5.4. <i>Champ thermique</i>	119
5.5. <i>Transfert thermique quantifié</i>	122
5.6. <i>Variations thermiques de la conductivité thermique et de la viscosité</i>	124
Conclusion et Recommandations.....	130
Références.....	132
Annexe D : Détails de la discrétisation numérique de toutes les équations modélisantes et les conditions aux limites.....	134
Annexe E : Rappel mathématique sur les coordonnées elliptiques.....	191

Table des Figures

Partie 1

Fig. 1. Géométrie du système étudié avec les conditions aux limites.....	26
Fig. 2. Profil de la température analytique à la surface intérieure de l'espace annulaire, à $\eta=\pi/2$, pour le cas étudié, $Re = 200$	41
Fig. 3. Température à la section de sortie de l'espace annulaire rempli de mousse métallique (à gauche) et de l'espace annulaire vide (à droite), $Re=200$	45
Fig. 4. Nombres de Nusselt axiaux des espaces annulaires avec et sans la mousse métallique, $Re=200$	46
Fig. 5. Un volume fini elliptique typique tridimensionnel.....	48
Fig. 6. Le maillage numérique ($42\times 202\times 84$). La longueur de l'espace annulaire est réduite 10 fois pour une meilleure représentation graphique.....	52
Fig. 7. La projection transversale du maillage numérique.....	53
Fig. 8. La variation axiale de la température numérique et analytique à l'intersection du cylindre intérieur et les axes elliptiques, $Re=200$	54
Fig. 9. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z=4.25$ $Re=200$	55
Fig. 10. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z=9.25$ $Re=200$	55
Fig. 11. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z=14.25$ $Re=200$	56
Fig. 12. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z=100$, $Re=200$	56
Fig. 13. Vitesse axiale à la section de sortie d'espace annulaire. $Re = 200$	60
Fig. 14. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z = 100$ $Re = 500$	61
Fig. 15. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z = 100$ $Re = 1000$	62
Fig. 16. Effet du nombre de Reynolds sur le nombre de Nusselt axial.....	63

Annexe C

Fig. C.1. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 0$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	73
Fig. C.2. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 2$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7	73
Fig. C.3. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 4$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	74
Fig. C.4. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 6$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	74
Fig. C.5. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 8$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	75
Fig. C.6. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 10$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	75
Fig. C.7. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 12$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	76
Fig. C.8. Fonction radiale normalisée de Mathieu pour $r = 14$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	76
Fig. C.9. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 0$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	77
Fig. C.10. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 2$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7	77
Fig. C.11. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 4$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7	78
Fig. C.12. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 6$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	78
Fig. C.13. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 8$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	79
Fig. C.14. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 10$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	79
Fig. C.15. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 12$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	80
Fig. C.16. Fonction angulaire de Mathieu pour $r = 14$ et $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6	80

Partie 2

Fig. 1. Géométrie du système et conditions aux limites.....	93
Fig. 2. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{3}$	106
Fig. 3. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{6}$	107
Fig. 4. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = 0$	107
Fig. 5. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{6}$	108
Fig. 6. Écoulement secondaire à la section de sortie d'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{3}$	108
Fig. 7. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = 0$	114
Fig. 8. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{6}$	114
Fig. 9. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire.	

$\theta = \frac{\pi}{3}$	115
Fig. 10. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire.	
$\theta = \frac{\pi}{2}$	115
Fig. 11. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire	
$\theta = -\frac{\pi}{6}$	116
Fig. 12. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire.	
$\theta = -\frac{\pi}{3}$	116
Fig. 13. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire.	
$\theta = -\frac{\pi}{2}$	117
Fig. 14. Comparaison des nombres de Nusselt axiaux de la convection mixte et forcée.....	123
Fig. 15. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie d'espace annulaire.	
$\theta = -\frac{\pi}{2}$	125
Fig. 16. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie d'espace annulaire.	
$\theta = -\frac{\pi}{3}$	125
Fig. 17. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie d'espace annulaire.	
$\theta = -\frac{\pi}{6}$	126
Fig. 18. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie d'espace annulaire.	
$\theta = 0$	126
Fig. 19. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire.	
$\theta = \frac{\pi}{6}$	127
Fig. 20. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire.	
$\theta = \frac{\pi}{3}$	127
Fig. 21. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire.	
$\theta = \frac{\pi}{2}$	128

Annexe D

Fig. D.1. Projection du maillage sur la surface (η, z)	135
Fig. D.2. Projection du maillage sur la surface (η, ε)	135
Fig. D.3. Projection du maillage sur la surface (ε, z)	135
Fig. D.4. Projection du maillage décalé sur la surface (ε, z)	144
Fig. D.5. Projection du maillage décalé sur la surface (ε, η)	144
Fig. D.6. Projection du maillage décalé sur la surface (η, z)	155
Fig. D.7. Projection du maillage décalé sur la surface (η, ε)	155
Fig. D.8. Projection du maillage décalé sur la surface (ε, z)	166
Fig. D.9. Projection du maillage décalé sur la surface (η, z)	166
Fig. D.10. Maillage axial à la sortie du conduit.....	173

Annexe E

Fig. E.1. Systèmes de coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire.....	191
---	-----

Liste des Tableaux

Partie 1

1	Propriétés thermophysiques et paramètres de contrôle.....	27
2	Variables adimensionnelles et propriétés thermophysiques.....	29
3	Constantes mathématiques de la solution de $T_1(\varepsilon, \eta)$	33
4	Valeurs de constantes mathématiques du Tableau 3.1, $Re=200$	34
5	Constantes mathématiques de la solution de $T_2(\varepsilon, \eta, z)$	36
6	Les racines q_m^{2r} et leurs coefficients correspondants χ_m^{2r}	40

Partie 2

1	Propriétés thermophysiques et paramètres de contrôle.....	94
2	Variables adimensionnelles et propriétés thermophysiques.....	97
3	Maxima des vitesses radiales et azimutales des inclinaisons considérées.....	105
4	Composantes de la chute de pression vs les angles d'inclinaison considérés.....	119

Annexe D

D.1	Valeur de Débits, valeur absolue de la différence relative entre Débite et Débits, valeur de q_2 et valeur absolue de la différence relative entre q_1 et q_2	351
-----	---	-----

Partie 1 :

Convection Forcée dans un Espace Annulaire Elliptique Horizontal

Rempli par une Mousse Métallique.

Solution Analytique et Étude Numérique

Nomenclature

A_{2n}^{2r}	Vecteur caractéristique de la matrice dans l'équation. (49)
a	Demi distance focale (m)
a	Constante de la séparation dans les équations. (42) et (43)
a	Valeurs caractéristiques de la matrice dans l'équation. (49)
$ce_{2r}(\eta, q)$	Fonction angulaire définie dans l'équation. (47)
$Ce_{2r}(\varepsilon, q)$	Fonction radiale définie dans l'équation. (50)
C_f	Coefficient de Forchheimer.
C_p	Chaleur spécifique (J/kg K)
d_f	Diamètre de la fibre de la mousse métallique (m)
d_p	Diamètre du pore de la mousse métallique (m)
$d\varepsilon_n$	Distance radiale entre les points P et N
$d\varepsilon_s$	Distance radiale entre les points P et S
$d\eta_e$	Angle entre les points P et E
$d\eta_w$	Angle entre les points P et W
dz_b	Distance axiale entre les points P et B
dz_f	Distance axiale entre les points P et F
g	Accélération gravitationnelle = 9.81 (m/s ²)
h	Coefficient du transfert thermique convectif (W/m ² K)
h_1	Premier facteur d'échelle adimensionnel = $\sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}$
h_2	Deuxième facteur d'échelle adimensionnel = $\sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}$
h_3	Troisième facteur d'échelle adimensionnel = 1
k	Conductivité thermique du fluide (W/m K)
L	Longueur d'espace annulaire (m)
$Mc_{2r}(\varepsilon, q)$	Fonction radiale définie dans l'équation. (51)
N_{PPI}	Nombre de pores par pouce de la mousse métallique = 20
\mathcal{P}_i	Périmètre adimensionnel du cylindre elliptique intérieur
q	Valeurs propres du problème
q_w''	Flux de chaleur constant à la surface du cylindre intérieur (W/m ²)
S	Section droite adimensionnelle d'espace annulaire

t	Temps adimensionnel
T	Température adimensionnelle
V_ε	Vitesse radiale adimensionnelle
V_η	Vitesse angulaire adimensionnelle
V_z	Vitesse axiale adimensionnelle
z	Coordonnée axiale adimensionnelle

Symboles Grecs

ε	Coordonnée radiale elliptique
η	Coordonnée angulaire elliptique
κ	Perméabilité de la mousse métallique (m^2)
μ	Viscosité dynamique (Kg/m s)
ρ	Densité (Kg/m ³)
φ	Porosité de la mousse métallique = 0.92
$\Delta\varepsilon_P$	Taille radiale du volume fini
$\Delta\eta_P$	Angle du volume fini
Δz_P	Taille axiale du volume fini
ΔP	Chute de pression adimensionnelle
Δt	Pas du temps (s)

Exposants

*	Quantité dimensionnelle
l	Compteur de référence des fonctions de Mathieu
r	Compteur de référence des fonctions de Mathieu
t	Au temps t
$t + \Delta t$	Au temps $t + \Delta t$
$t - \Delta t$	At temps $t - \Delta t$

Indices

eff	Effective
f	Fluide
i	Surface du cylindre intérieur

j	Nombre des valeurs propres
m	Valeur moyenne de la température
m	Compteur des valeurs propres
o	Surface du cylindre extérieur
s	Solide
0	A l'entrée d'espace annulaire

Nombres adimensionnels

Da	Nombre de Darcy = $\frac{\kappa}{a^2}$
K	Conductivité thermique totale adimensionnelle du milieu poreux
$Nu(\eta, z)$	Nombre de Nusselt local définie dans l'équation. (61)
$Nu(z)$	Nombre de Nusselt axial définie dans l'équation. (62)
Nu	Nombre de Nusselt moyen définie dans l'équation. (63)
Pr	Nombre de Prandtl = $\frac{c_p^* \mu_f^*}{k_f^*}$
Re	Nombre de Reynolds = $\frac{\rho_f^* V_z^* a}{\mu_f^*}$

Introduction

Les mousses métalliques à cellules ouvertes ont une forme similaire à celle des cellules de la mousse qui remplit un volume dans l'espace. Ces dernières ont des formes géométriques qui sont des solutions du problème de Kelvin. Lord Kelvin [1] a résolu le problème en trouvant quel est l'arrangement des cellules avec des volumes égaux qui remplit l'espace avec une surface minimale ? La réponse était un tétrakaidécaèdre avec six faces carrées et huit faces hexagonales. La solution a été améliorée par la structure de Weaire-Phelan [2] avec deux types de cellules : un dodécaèdre avec 12 faces pentagonales et un tétrakaidécaèdre avec 2 faces hexagonales et 12 faces pentagonales.

Les mousses métalliques à cellules ouvertes sont des milieux poreux à porosité élevée caractérisés par leurs légèretés et leurs propriétés désirables telles que l'amélioration du mixage (en raison de leur surface spécifique élevée), le transfert de chaleur convectif accru, la distribution uniforme de la chaleur (en raison de leur structure isotrope), le temps transitoire court (à cause de la capacité thermique relativement faible) [3] et la conductivité thermique effective qui est beaucoup plus élevée que celle du fluide utilisé. La conductivité thermique effective mesurée de certaines mousses métalliques en aluminium saturées par l'eau est un ordre de grandeur plus élevé que celle de l'eau comme annoncé par le fabricant des mousses d'aluminium DUOCEL® [4].

En pratique, les mousses d'aluminium et du cuivre à cellules ouvertes ont des ligaments (fibres) avec des diamètres variables : le diamètre est plus grand au niveau des connexions des ligaments (nœuds) et plus petit plus loin d'eux [5]. Toutefois, pour les calculs pratiques un diamètre moyen estimé de ligament est souvent utilisé [6]. Les mousses à cellules ouvertes sont étiquetées par leur nombre de diamètres de pores par pouce, par exemple une mousse à cellules ouvertes 20 PPI est une mousse avec vingt pores par pouce. La simulation basée sur la Microtomographie du transport à travers les mousses métalliques à cellules ouvertes [7] a montré que les mousses métalliques à cellules ouvertes sont essentiellement isotropes et que, pour la même porosité, la conductivité thermique effective n'est pas très sensible à la diminution de la taille des pores.

Les mousses métalliques à cellules ouvertes ont été utilisées pour améliorer le transfert de chaleur dans les tuyaux et les canaux par l'amélioration de la conduction et la convection. La conduction est améliorée par la conductivité thermique effective du milieu poreux qui peut être beaucoup plus grande à celle du fluide [8]. Cette conductivité thermique effective

peut être augmentée par la conductivité de la dispersion thermique si importante [9]. La convection est améliorée par l'augmentation considérable du niveau de la vitesse à proximité des surfaces solides dans les tubes remplis de milieux poreux. En fait, il peut être facilement vérifié que pour les milieux poreux à faible nombre de Darcy dans les conduits, le débit est quasi uniforme sur la section transversale du conduit : à proximité des parois, l'épaisseur de la couche de variation de la vitesse est de l'ordre de la racine carrée du rapport du nombre de Darcy et la porosité. Cependant, il est établi que le transfert de chaleur amélioré obtenu avec des mousses métalliques se fait au prix d'une forte augmentation de la perte de charge.

L'amélioration de la convection forcée dans les milieux poreux est démontrée par de nombreuses études. C.Y. Zhao et al. [10] ont présenté des résultats expérimentaux sur le transfert thermique et la chute de pression par convection forcée d'un écoulement d'air avec un champ de vitesse complètement développé dans un canal ($0.127 \times 0.127 \times 0.012$) m³, rempli par deux mousses métalliques différentes : FeCrAlY (un matériau courant comprend du cuivre, d'aluminium, d'acier inoxydable et des alliages à base de fer à haute température) et le cuivre. Huit échantillons du FeCrAlY avec une conductivité thermique solide d'environ 20 W/m.K et six du cuivre avec une conductivité thermique solide d'environ 300 W/m.K. Différentes tailles du pore (PPI) égales à 10, 30 et 60 PPI et différentes densités relatives égales à 5, 7.5 et 10%, sont utilisées. La paroi inférieure du canal est soumise sous un flux de chaleur constant égal à 4000 et 8000 W/m². Ils ont trouvé que pour les deux types de mousse, l'augmentation de la densité relative et la diminution de la taille des pores augmentent le transfert de chaleur simultanément avec une grande augmentation de la perte de charge. Par exemple : avec un nombre de Reynolds (basé sur le diamètre hydraulique) $Re=6015.27$ et pour FeCrAlY, le nombre de Nusselt global (moyen) Nu d'échantillon 2 (10 PPI et 10%) est 162.758 avec un coefficient du frottement $f = 17.5226$, tandis que pour l'échantillon 1 (10 PPI et 5%) Nu est 115.56 et $f = 6.98079$. Le Nu d'échantillon 4 (30 PPI et 10%) est 145.45 et $f = 21.5944$. Pour le cuivre, le nombre de Nusselt d'échantillon 11 (30 PPI et 5%) est 289.035 et $f = 60.8869$, tandis que pour l'échantillon 9 (10 PPI et 5%) le nombre de Nusselt est 331.291 et $f = 20.1939$. Le nombre de Nusselt d'échantillon 12 (30 PPI et 10%) est 354.724 et le $f = 96.468$. Pour les échantillons du FeCrAlY, le transfert de chaleur est plus sensible à la densité relative qu'à la taille du pore, tandis que pour les échantillons du cuivre, le transfert de chaleur est plus sensible à la taille du pore qu'à la densité relative. A un Re donné, les nombres de Nusselt d'échantillons du cuivre sont environ 2 à 4 fois supérieurs à celles des échantillons du FeCrAlY. La chute de pression d'un

échantillon du cuivre est beaucoup plus élevée à celle d'un échantillon FeCrAlY pour le même PPI et la même densité relative. L'échantillon 1 du FeCrAlY (10 PPI et 5%) et l'échantillon 9 du cuivre (10 PPI et 5%) atteints la plus haute efficacité (c'est le rapport entre Nu et f) qui égale à 16.554, tandis que l'échantillon 6 du FeCrAlY (60 PPI et 10%) atteint la plus faible efficacité qui égale à 1.1295.

H.J. Xu et al. [11] ont étudié analytiquement et numériquement le transfert thermique par la convection forcée d'un écoulement d'air bidimensionnel complètement développé entre deux plaques parallèles rempli de mousses métalliques. Un flux de chaleur constant uniforme égal à 1000 W/m^2 est soumis sur les deux plaques du canal de longueur égale à 25 fois sa hauteur ($2H$) et une température d'entrée égale à 303°K . Les résultats montrent que la diminution de la porosité (ε) et l'augmentation de la taille des pores (w) peut améliorer le transfert thermique et augmenter la chute de pression. Toutefois, une valeur de saturation existe avec l'augmentation de w et w doit être appliquée au-dessous de la valeur de saturation pour le transfert de chaleur. Avec $H=0.01\text{m}$, une vitesse moyenne égale à 0.85m/s et un rapport de conductivités thermiques (solide/fluide) $k_s/k_f=10^4$, une performance globale $j=Nu/[Re(Pr.f)^{1/3}]$ définie en fonction du nombre de Nusselt (Nu), du facteur de frottement (f), du nombre de Reynolds (Re) et du nombre de Prandtl (Pr) est égale à 0.43, 0.385, 0.325 et 0.205 avec $w=10\text{PPI}$ et elle est égale à 0.485, 0.41, 0.31 et 0.17 avec $w=20\text{PPI}$, pour $\varepsilon = 0.8, 0.85, 0.9$ et 0.95 , respectivement. Elle est supérieure à celle d'un canal vide ($j = 0.01279$). Elle est maximale avec une gamme de porosité entre 0.8 et 0.95 et une taille des pores optimale entre 10 et 20 PPI, qui augmente avec la diminution de la porosité.

K.P. Carpenter et al. [12] ont étudié expérimentalement l'effet des gradients de la taille de pore dans les mousses d'aluminium 10, 20 et 40 PPI montées dans un canal rectangulaire. La section transversale de la mousse est $(25.4 \times 6.4) \text{ mm}^2$ et sa longueur est 101.6 mm . La longueur des mousses est un seul segment ou coupé en deux ou quatre segments. La mousse est chauffée uniformément par le dessous et refroidi par un flux d'air contrôlé. Les résultats montrent que le coefficient du transfert de chaleur augmente avec la chute de pression pour toutes les mousses considérées comme ayant un effet négligeable de la coupure. Pour la même chute de pression égale à 4200 Pa , le coefficient du transfert de chaleur est égal à 290, 250 et $240 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ pour 10, 20 et 40 PPI, respectivement. Ils ont constaté que pour la même

puissance de pompage, le rendement thermique de la mousse 10 PPI est meilleur par rapport à ceux des segments 10/20, 20/10, 10/40, 40/10, 20/40 et 40/20 PPI.

La convection forcée d'air à travers des échantillons de mousses métalliques d'aluminium et du cuivre, montés sur la base d'un canal rectangulaire, a été étudié expérimentalement par S. Mancin et al. [13]. Les échantillons de 5, 10, 20 et 40 PPI avec une surface de base (100×100) mm² et une hauteur de 20 mm et 40 mm ont été utilisés. La base des échantillons était chauffée électriquement avec des puissances de 250, 325 et 400 W. Le débit massique d'air a été changé entre 2 et 7 Kg/m².s. Avec ces paramètres, il est rapporté que les échantillons du cuivre ont un meilleur transfert de chaleur en raison de leur conductivité thermique effective élevée. Le transfert de chaleur est renforcé par l'augmentation de la vitesse d'écoulement ou la diminution de la porosité. Pour l'échantillon d'aluminium 10 PPI, de porosité 0.926, l'augmentation du débit massique de 3 à 6 Kg/m².s augmente le coefficient du transfert de chaleur de 600 à 800 W/m².K. Pour l'échantillon d'aluminium 10 PPI, avec un débit massique égal à 6 Kg/m².s et une puissance de chauffage égale à 250W, la diminution de la porosité de 0.954 à 0.896 conduits à une augmentation du coefficient de transfert de chaleur de 700 à 1100 W/m².K. Il est rapporté que la chute de pression augmente avec le débit massique : pour l'échantillon d'aluminium 40 PPI, avec une porosité égale à 0.926, l'augmentation du débit massique de 4 à 6 Kg/m².s conduit à une augmentation de la chute de pression de 600 à 1150 Pa. L'augmentation du nombre de PPI conduit à une augmentation de la perte de charge : pour l'échantillon d'aluminium et un débit massique égal à 6 Kg/m².s, l'augmentation du PPI de 5 à 40, conduit à une augmentation de la chute de pression de 700 à 1100 Pa.

S. Guarino et al. [14] ont étudié expérimentalement le coefficient du transfert de chaleur et la chute de pression d'un écoulement forcé d'air humide à travers trois différents types de mousses en alliage d'aluminium 5, 10 et 20 PPI dans un canal avec une section transversale carrée de (20.5×20.5×40) mm³. La température de la mousse a été changée entre 50 et 125°C, alors que le niveau de la vitesse varie de 1 à 5 m/s. Les résultats montrent que la chute de pression augmente avec le débit massique pour toutes les températures. La chute de pression à travers la mousse 20 PPI est supérieure à celle des mousses à 10 et 5 PPI. Le remplacement de la mousse à 5 PPI par celle à 20 PPI et l'augmentation de la vitesse d'écoulement de 1 à 5 m/s, augmente la chute de pression de 200 à 5000 Pa/m. Les résultats démontrent que le coefficient du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation du débit d'air et/ou la

diminution de la température. Le meilleur rendement thermique est réalisé avec la mousse 10 PPI; l'effet combiné de la diminution de la température de la mousse de 125 à 50°C et l'augmentation de la vitesse d'écoulement de 1 à 5 m/s, conduit à une augmentation du coefficient de transfert de chaleur convectif de 60 à 335 W/m².K. Les mousses métalliques peuvent être utilisées pour améliorer les performances du transfert de chaleur des dissipateurs de chaleur utilisés dans le refroidissement des équipements électroniques.

S.S. Feng et al. [15] ont réalisé une combinaison des études expérimentale et numérique par les volumes finis du refroidissement d'un jet circulaire d'air des dissipateurs de chaleur d'une mousse métallique à ailettes (MMA) et d'une mousse métallique (MM). Les mousses d'aluminium 8 PPI avec 96.3% de porosité et quatre ailettes en plaques d'épaisseur 2 mm avec un espace de 12 mm entre eux ont été utilisées. La surface des dissipateurs de chaleur (MMA) ou (MM) est (68×68) mm². La hauteur (H) du (MMA) varie de 10 à 40 mm tandis que la hauteur du (MM) varie de 10 à 30 mm. L'épaisseur du substrat est 4 mm. La gamme du nombre de Reynolds (Re) est de 3000 à 12000. Le substrat de dissipateur de chaleur est isotherme. Pour Re=8000, quand la hauteur du (MM) augmente de 10 à 30 mm, le nombre de Nusselt (Nu) diminue de 500 à 400 ; et l'augmentation de la hauteur de (MMA) de 10 à 30 mm ; augmente le Nu de 700 à 1100. Une nouvelle augmentation de la hauteur de (MMA) à 40 mm diminue légèrement le Nu. Sous un débit donné ou une puissance de pompage donnée, le transfert de chaleur des dissipateurs de chaleur (MMA) peut être de 1.5 à 2.8 fois celle des dissipateurs de chaleur (MM) pour la même hauteur. En outre, à une puissance de pompage adimensionnelle égale à 6000, le transfert de chaleur du dissipateur de chaleur (MMA) est 1.5, 2 et 2.5 fois celle de dissipateurs de chaleur (MM) pour H=10, 20 et 30 mm, respectivement. La chute de pression augmente considérablement avec la diminution de la hauteur de la mousse avec la même vitesse de jet et elle est supérieure dans le cas de dissipateur de chaleur (MMA) par rapport à celui (MM). Pour le dissipateur de chaleur (MM) avec une vitesse de jet égale à 2.5 m/s, la chute de pression est égale à 15, 27 et 100 Pa pour H=30, 20 et 10 mm, respectivement. Pour le dissipateur de chaleur (MMA), avec la même vitesse de jet, la chute de pression est égale à 25, 45 et 115 Pa pour H=30, 20 et 10 mm, respectivement.

Z. Xiao et al. [16] ont étudié expérimentalement la convection forcée unidimensionnelle à travers un canal rempli d'échantillons de mousse du cuivre dont le nombre de pores variant entre 36 et 60 PPI. Six échantillons ont une seule couche, avec différentes porosités

nominales variant de 60 à 80% et quatre échantillons ont une couche double avec une épaisseur de 1 à 4 mm et une porosité nominale 60% et une autre 80%. Le canal d'écoulement est de 20 mm de largeur, 5 mm de hauteur et 30 mm de longueur. Le débit d'écoulement d'eau de refroidissement varie de 0.2 à 1 L/min. La partie supérieure de la mousse est chauffée par un flux thermique fixe égal à 250 kW/m². Ils ont trouvé une relation linéaire entre le gradient de pression et la vitesse de Darcy. Pour les échantillons à une couche simple ou double, le gradient de pression augmente avec la diminution de la porosité. Lorsque la vitesse de Darcy augmente de 0.033 à 0.167 m/s, le gradient de pression de l'échantillon à une seule couche (avec une porosité égale à 62.5%) augmente de 1 à 5.2 MPa/m et celle de l'échantillon à une couche double (avec une porosité égale à 76.2%) augmente de 0.2 à 0.7 MPa/m. Par comparaison à un canal vide, l'introduction d'un échantillon du cuivre poreux renforce le coefficient du transfert de chaleur 8.5 fois. Les coefficients du transfert de chaleur des échantillons à une simple et double couche augmentent lorsque la vitesse de Darcy augmente. L'augmentation de la vitesse de Darcy de 0.033 à 0.167 m/s, augmente le coefficient du transfert de chaleur du canal vide de 3 à 5 kW/m².K. Cependant, il augmente le coefficient du transfert de chaleur du canal avec mousse à une seule couche (avec 62.5% de porosité) de 15 à 36 kW/m².K. Les échantillons du cuivre poreux avec des couches doubles de porosités 60% et 80% ont souvent des coefficients de transfert de chaleur inférieurs à ceux de leurs homologues à une seule couche avec les mêmes porosités totales parce que l'écoulement de refroidissement s'écoule principalement à travers la couche de porosité élevée. Pour la même porosité égale à 69.4% et la même vitesse de Darcy égale à 0.167 m/s, le coefficient du transfert de chaleur est égal à 28, 24 et 17 kW/m².K pour la couche simple, la couche double de grande porosité (H) et la couche double de faible porosité (L), respectivement. Pour la même structure à double couche, l'ordre de la couche double a un grand effet sur le coefficient de transfert de chaleur. Placer la couche à haute porosité à côté d'une source de chaleur est plus efficace que l'inverse. Pour la même vitesse de Darcy égale à 0.1 m/s, le coefficient de transfert de chaleur est égal à 27 et 15.5 kW/m².K pour les échantillons à couche double H/L et L/H, respectivement, où chaque première couche est attachée au bloc thermique.

Mahjoob et Vafai [17] ont étudié la performance des échangeurs de chaleur à tube contre-courant, avec des tubes intérieurs remplis par les mousses métalliques d'aluminium 23 PPI. Ils ont rapporté que le taux de transfert de chaleur est amélioré par 8 à 13 fois lorsque la mousse métallique est utilisée. Cependant, la chute de pression peut être plus de 200 fois

plus grande lorsque cette mousse est utilisée. La chute de pression peut être réduite par l'inclinaison du conduit, ce qui entraîne un gain de pression hydrostatique, ou par la réduction de la vitesse d'écoulement sur une distance d'écoulement plus court, si possible.

La convection forcée thermiquement développée avec un non-équilibre thermique local, dans un tube avec un flux de chaleur constant rempli d'une mousse métallique d'aluminium a été étudiée par Yang et al. [18]. Ils ont présenté une solution exacte d'un problème du transfert thermique convectif d'un écoulement complètement thermiquement développé dans un tube infini rempli par des mousses métalliques d'Aluminium (d'une porosité égale à 0.95) avec la considération du modèle du non équilibre thermique. La paroi de tube est chauffée par un flux de chaleur constant. Une solution approximative basée sur une méthode intégrale a été également présentée pour confirmer la validité de la solution exacte. Les résultats montrent que la température du solide est toujours sensiblement plus élevée à celle du fluide. Le nombre de Nusselt (Nu) basé sur le diamètre du tube (D), augmente significativement avec le nombre de Péclet (Pe) ; basé sur le diamètre des pores (d_m) tel que $D/d_m=10$; dû à la fois à la conductivité thermique stagnante élevée et la dispersion thermique résultante de la présence de la mousse métallique, $Nu = 100, 270$ et 550 pour $Pe=1, 10$ et 100 . Par conséquent, l'hypothèse d'équilibre thermique local ne parvient pas à être valable et elle peut échouer pour le cas de la combinaison (mousse métallique/air), avec la condition de flux de chaleur constant à la paroi. La solution approximative convient assez bien avec la solution exacte. Yang et al. [19] ont étudié la convection forcée thermiquement développée, avec le déséquilibre thermique local, dans un espace annulaire cylindrique rempli par la combinaison (mousse métallique d'aluminium/air). Le cylindre intérieur est uniformément chauffé et le cylindre extérieur est thermiquement isolé. Pour les conditions d'une paroi chauffée à l'équilibre thermique local et une paroi chauffée avec un flux de chaleur local et uniforme, ils ont constaté une défaillance de l'équilibre thermique local dans l'espace annulaire. Phanikumar et Mahajan [20] ont rapporté que l'hypothèse de l'équilibre thermique local est mieux satisfaite pour un système (eau/mousse d'aluminium) que pour (air/mousse d'aluminium).

Une analyse bidimensionnelle du transfert de chaleur par convection forcée dans les échangeurs de chaleur à tube circulaire et elliptique a été effectuée par Matos et al. [21]. Du point de vue de transfert thermique, ils ont montré que la configuration elliptique fonctionne mieux que la circulaire. Un gain maximum relatif du transfert de chaleur jusqu'à 13%, avec

une excentricité d'ellipse égal à 0.65 et un nombre de Reynolds basé sur la longueur d'arrangement égal à 465, est observé dans l'arrangement elliptique optimal, par comparaison à celui circulaire optimal.

K. Zerari et al. [22] ont présenté une simulation numérique tridimensionnelle par la méthode des volumes finis de la convection mixte et forcée laminaire, avec des propriétés physiques constantes et variables entre deux cylindres horizontaux elliptiques confocaux. Le cylindre intérieur est uniformément chauffé tandis que l'extérieur est adiabatique. Pour les paramètres géométriques, dynamiques et thermiques considérés, ils ont trouvé que le transfert de chaleur obtenu par la convection mixte avec des propriétés physiques dépendent de la température devient significativement plus élevé que celui de la convection forcée avec des propriétés physiques constantes, en particulier avec l'augmentation du chauffage entrant.

Le transfert de chaleur par convection dans un espace annulaire cylindrique rempli d'un milieu poreux a été considéré par de nombreux chercheurs. Certaines études, présentées à titre d'exemples, fournissent des données qui permettent la validation de certains résultats de cette thèse (section 4.3), à la limite où les ellipses convergent vers des cercles. Chikh et al. [23] ont présenté une solution analytique de la convection forcée complètement développée dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques. L'écoulement est modélisé avec le modèle de Darcy-Brinkman. Le cylindre intérieur est chauffé avec un flux de chaleur constant et le cylindre extérieur est thermiquement isolé. Une couche poreuse, ayant une épaisseur inférieure ou égale à la différence des rayons des cylindres, est fixée sur la surface du cylindre intérieur. Pour un espace annulaire totalement poreux et un rapport des rayons (intérieur et extérieur) égal à 0.5, les résultats montrent que le transfert de chaleur est systématiquement augmenté par l'augmentation du rapport des conductivités thermiques (effective et du fluide) pour des nombres de Darcy entre 10^{-2} et 10^{-4} . Chikh et al. [24] ont étudié le transfert de chaleur par convection forcée en développement thermique et par convection forcée développée dans un échangeur de chaleur annulaire partiellement ou totalement rempli d'un milieu poreux. Les conditions aux limites d'un flux de chaleur constant et d'une température constante à la paroi du cylindre intérieur sont considérées, tandis que le cylindre extérieur est supposé adiabatique. Lorsque le canal est complètement rempli d'un milieu poreux, ayant un rapport de conductivité thermique égal à 1, le nombre de Darcy égal à 10^{-5} , pour le flux de chaleur constant, la longueur d'entrée thermique non-dimensionnelle normalisée par le nombre de Peclet est égale à 2×10^{-5} et le nombre de Nusselt

dans la zone complètement développée est égal à 6.3345. Dans le cas de la température constante à la paroi, avec les mêmes paramètres, la longueur d'entrée thermique est égale à 5×10^{-5} et le nombre de Nusselt totalement développé est égal à 5.4860. Dans la zone en développement thermique, il y a une épaisseur critique de la couche poreuse correspondant à un nombre de Nusselt minimum, mais la longueur d'entrée thermique est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche. Dans la zone thermiquement développée, le nombre de Nusselt augmente avec l'épaisseur de la couche. Qu et al. [25] ont étudié analytiquement la convection forcée thermiquement développée dans un espace annulaire cylindrique partiellement et totalement rempli des mousses métalliques. Le cylindre intérieur est chauffé alors que l'extérieur est thermiquement isolé. La modélisation du déséquilibre thermique local est considérée pour le transfert de chaleur dans les espaces annulaires poreux (mousse métallique/air). Pour un espace annulaire totalement rempli de la mousse métallique 10PPI, un rapport de rayons 3, une porosité 0.9, $Re = 1500$ et un rapport de conductivités thermiques air-solide 10^{-4} , ils ont rapporté des différences significatives des températures des matières solide et fluide. Pour un espace annulaire partiellement rempli, la fraction d'écoulement dans la partie de la mousse métallique est très faible pour 10PPI et plus ; mais elle augmente considérablement lorsque l'épaisseur de la mousse métallique se rapproche de celle de l'espace annulaire. Les profils de température de l'espace annulaire partiellement rempli des mousses métalliques sont situés entre celles de l'espace annulaire totalement rempli et de l'espace annulaire vide. Pour la plupart des espaces annulaires partiellement remplis des mousses métalliques, il y a une porosité optimale pour le meilleur transfert de chaleur. Avec une porosité fixe, le nombre de Nusselt augmente avec le nombre de PPI, mais se stabilise pour 20 PPI ou plus. L'effet de l'épaisseur relative de la couche poreuse sur le Nusselt dépend du rapport des conductivités thermiques du fluide et du solide. Pour des rapports supérieurs ou égaux à 10^{-1} , le nombre de Nusselt est inférieur à celui des espaces annulaires vides ; cependant, pour des rapports inférieurs à cette limite, le nombre de Nusselt augmente avec l'épaisseur relative de la couche poreuse. Hashemi et al. [26] ont étudié analytiquement le transfert de chaleur, thermiquement développé, par la convection forcée dans les micro-conduites annulaires circulaires concentriques poreuses. L'équilibre thermique local est considéré. Un écoulement d'air est considéré dans un milieu raréfié. Deux conditions aux limites thermiques distinctes sont analysées : un flux de chaleur constant au cylindre extérieur et un cylindre intérieur isolant (Cas I) et un flux de chaleur constant au cylindre intérieur et un cylindre extérieur isolant (Cas II). Les résultats montrent que dans les deux cas, le nombre de Nusselt diminue quand le nombre de Knudsen augmente. Les

résultats sont présentés pour trois valeurs du paramètre de la forme de milieu poreux S : 1, 10 et 30 tel que $S = \frac{1}{\sqrt{M Da}}$, M est le rapport de viscosité et Da est le nombre de Darcy. Le nombre de Nusselt diminue quand le rapport des rayons (intérieur au l'extérieur) augmente. L'augmentation du paramètre de la forme du milieu poreux a une conséquence positive sur le nombre de Nusselt. Wang et al. [27] dérivent une solution exacte pour les distributions de température de fluide et solide à l'intérieur d'un micro-espace annulaire rempli d'un milieu poreux avec un régime d'écoulement d'air dans un milieu raréfié. Un modèle de déséquilibre thermique local (LTNE) est utilisé pour modéliser la convection forcée, hydrodynamiquement et thermiquement développée, dans le milieu poreux. Deux cas distincts des conditions aux limites thermiques sont considérés : un flux de chaleur constant à la paroi extérieure et une paroi intérieure adiabatique (cas I) et un flux de chaleur constant à la paroi intérieure et une paroi extérieure adiabatique (Cas II). Les résultats de l'équilibre thermique local sont obtenus avec un nombre de Biot infini. Avec les mêmes paramètres de contrôle, les valeurs des nombres de Nusselt évaluées pour le cas II sont supérieures à celles obtenues pour le cas I. Les effets du rapport des rayons, du nombre de Knudsen, du nombre de Biot, du rapport des conductivités thermiques (du fluide et du solide) et du facteur de forme des milieux poreux sur le nombre de Nusselt sont présentés.

Dans la partie 1 de la présente thèse, nous considérons des solutions analytiques et numériques de la convection forcée dans un espace annulaire elliptique rempli par une mousse d'aluminium à 20 PPI. Le transfert de chaleur par convection est tridimensionnel, laminaire et en développement thermique. Dans cette première partie, les propriétés d'eau et d'aluminium sont considérées constantes. Les résultats du modèle analytique développé sont utilisés pour étudier l'impact de la mousse métallique sur les caractéristiques du transfert de chaleur dans l'espace annulaire et pour valider le code numérique personnel développé pour les études d'écoulement dans les espaces annulaires elliptiques poreux. Les résultats de la convection forcée validées fournissent un état de référence pour l'étude de la partie 2 de cette thèse, où nous présenterons les résultats de la convection mixte avec des propriétés physiques variables dans un espace annulaire elliptique incliné rempli par une mousse d'aluminium à 20 PPI.

Modèle Physique

De la Figure 1, le système étudié est composé de deux cylindres elliptiques confocaux. Les rayons elliptiques intérieur et extérieur sont $\varepsilon_i = 0.8$ et $\varepsilon_o = 1.4$, respectivement. La longueur des cylindres est égale à 100 fois la demi distance focale elliptique ($a = 0.08$ m). Le cylindre intérieur est statique et chauffé par un flux de chaleur constant $q_w'' = 3750$ W/m². Le cylindre extérieur est également statique mais considéré parfaitement isolé (adiabatique). L'espace annulaire est rempli par une mousse d'aluminium, comme un milieu poreux homogène et isotrope avec un faible nombre de Darcy, une porosité φ et un nombre de pores par pouce N_{PPI} .

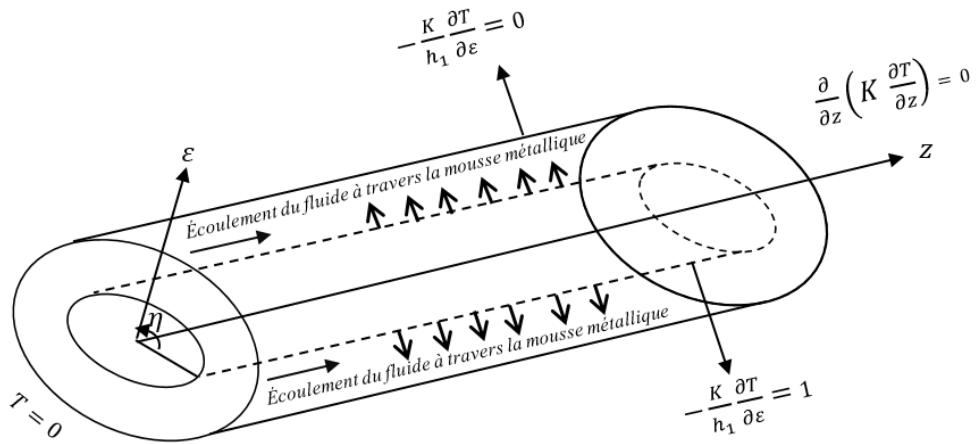


Fig. 1. Géométrie du système étudié avec les conditions aux limites
(Les dimensions ne sont pas à l'échelle)

Les diamètres du pore et de la fibre de cette mousse métallique peuvent être calculés en utilisant les équations suivantes [6] :

$$d_p = \frac{0.0254\text{m}}{N_{PPI}} = 1.27 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (1)$$

$$d_f = d_p \frac{1.18 \sqrt{\frac{1-\varphi}{3\pi}}}{\left[1 - \exp\left(\frac{\varphi-1}{0.04}\right)\right]} = 1.597 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (2)$$

qui peuvent être utilisés pour évaluer la perméabilité de la mousse métallique [6] :

$$\kappa = 0.00073 [1 - \varphi]^{-0.224} \left[\frac{d_f}{d_p}\right]^{-1.11} d_p^2 = 2.071 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \quad (3)$$

Le nombre de Darcy associé et le coefficient d'inertie de Forchheimer [4] pour cette configuration d'écoulement dans le milieu poreux sont :

$$Da = \frac{\kappa}{a^2} = 3.237 \times 10^{-6}$$

$$C_f = \frac{0.00212}{\left([1-\varphi]^{0.132} \left[\frac{d_f}{d_p}\right]^{1.63}\right)} = 8.69 \times 10^{-2} \quad (4)$$

Le fluide considéré dans cette simulation est l'eau. Le débit à l'entrée du système est uniforme et reste uniforme sur tout l'espace annulaire. Pour cet écoulement, la vitesse axiale est $V_{z0}^* = 2.5 \times 10^{-3}$ m/s, 6.25×10^{-3} m/s et 1.25×10^{-2} m/s. l'écoulement à l'entrée est isotherme à la température de référence $T_0^* = 20^\circ\text{C}$. A la sortie, le flux de chaleur conductif normal à la sortie est constant. Toutes les propriétés thermodynamiques sont considérées constantes et fournies dans le Tableau 1.

Tableau 2 Propriétés thermophysiques et paramètres de contrôle

Cp_s^*	896 J/kg K
ρ_s^*	2707 kg/m ³
k_s^*	218 W/m K
Cp_f^*	4180 J/kg K
ρ_f^*	1000 kg/m ³
k_f^*	0.597 W/m K
μ_f^*	0.001 kg/m s

Par conséquent, les nombres associés de Reynolds et Prandtl sont $Re=200$ et $Pr=7$, respectivement. Enfin, l'inertie thermique totale non dimensionnelle et la conductivité thermique non dimensionnelle de ce système poreux peuvent être définies en utilisant les équations [8, 9 et 28] :

$$[\rho Cp]_{eff} = \varphi + [1 - \varphi] \left[\frac{\rho_s^* Cp_s^*}{\rho_f^* Cp_f^*} \right] = 0.9664 \quad (5)$$

$$K = \left(\varphi + 0.19 [1 - \varphi]^{0.763} \frac{k_s^*}{k_f^*} \right) + (0.06 \sqrt{Da} Re Pr |\vec{V}|) = 11.1746 \quad (6)$$

Tel que le premier terme dans l'équation. (6) est la conductivité thermique effective du milieu poreux (eau / mousse métallique) et le second terme est la conductivité thermique de la dispersion. Le terme de la dispersion est proportionnel au module de la vitesse (voir l'équation (7)). Si la mousse métallique n'est pas utilisée, la conductivité thermique adimensionnelle est égale à 1. Pour le système (eau/mousse métallique), $K = 11.17, 11.40$ et 11.77 obtenus avec $Re = 200, 500$ et 1000 , respectivement.

Modèle Analytique

Cette section présente la construction du modèle analytique utilisé pour la résolution d'écoulement d'eau en développement thermique dans un espace annulaire elliptique rempli par la mousse métallique. La transformation des coordonnées elliptiques aux cartésiennes et les facteurs d'échelle correspondants (h_1 , h_2 et h_3) sont présentés dans [22].

3.1. Variables Adimensionnelles

Noter que dans ce document, les variables dimensionnelles sont indiquées en utilisant un *. Ces variables dimensionnelles et les propriétés thermophysiques sont normalisées par des échelles caractéristiques pour obtenir des quantités non dimensionnelles présentées dans le Tableau 2.

Tableau 2 Variables adimensionnelles et propriétés thermophysiques

$h_1 = \frac{h_1^*}{a}$	$h_2 = \frac{h_2^*}{a}$
$z = \frac{z^*}{a}$	$t = \frac{V_{z0}^* t^*}{a}$
$T = \frac{T^* - T_0^*}{\frac{q_w a}{k_f^*}}$	$V_z = \frac{V_z^*}{V_{z0}^*}$
$V_\eta = \frac{V_\eta^*}{V_{z0}^*}$	$V_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon^*}{V_{z0}^*}$
$\Delta P = \frac{\Delta P^*}{\rho^* V_{z0}^{*2}}$	

3.2. Équation de Quantité de Mouvement

Les équations de quantité de mouvement sont facilement traitées en reconnaissant que puisque l'épaisseur adimensionnelle de la couche limite hydrodynamique est de l'ordre $\sqrt{\frac{Da}{\phi}} = 1.876 \times 10^{-3}$, où il est très faible par rapport à l'épaisseur adimensionnelle minimale d'espace annulaire (0.813), il est raisonnable de considérer que l'écoulement est axial et uniforme à travers tout l'espace annulaire. Cette hypothèse sera justifiée à la section 4.4. La vitesse non dimensionnelle est :

$$\vec{V} = V_z \vec{k} = 1 \vec{k} \quad (7)$$

Bien que la valeur de V_z dans ce travail est l'unité, l'utilisation de V_z sera maintenue pour la définition de certaines quantités physiques comme le débit et la température moyenne.

3.3. Équation d'Énergie

L'équation d'énergie stationnaire non dimensionnelle dans les coordonnées elliptiques tridimensionnelles est :

$$\frac{\partial(V_z T)}{\partial z} = \frac{1}{RePr} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

(8)

ε est la coordonnée radiale elliptique, η est la coordonnée angulaire elliptique (originale sur l'axe elliptique majeur et positive dans le sens antihoraire) et z est la coordonnée axiale elliptique. Les conditions aux limites de ce problème sont :

À la surface du cylindre intérieur ($\varepsilon = \varepsilon_i$) – flux thermique constant à la paroi :

$$-\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1 \quad (9)$$

À la surface du cylindre extérieur ($\varepsilon = \varepsilon_o$) – isolée : $-\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0$ (10)

À l'entrée d'espace annulaire ($z = 0$) – température constante : $T = 0$ (11)

À la sortie d'espace annulaire ($z = L/a = 100$) – flux thermique diffusif axial constant :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

La solution d'équation. (8) avec les conditions aux limites spécifiées est composée de trois parties :

$$T(\varepsilon, \eta, z) = \alpha z + T_1(\varepsilon, \eta) + T_2(\varepsilon, \eta, z) \quad (13)$$

Dans l'équation. (13), le premier terme représente l'augmentation de la température axiale. Le deuxième terme modélise les variations radiales et angulaires de la température qui satisfont les conditions aux limites thermiques radiales et la périodicité angulaire. La somme de premier et second termes modélise correctement le champ de la température dans la zone thermiquement développée d'espace annulaire. Le troisième terme, corrige la température donnée par la somme des deux premiers termes dans la zone qui est en développement thermique mais s'estompe dans la zone thermiquement développée. $T_1(\varepsilon, \eta)$ satisfait aux conditions aux limites thermiques radiales imposées exprimées par les équations (9) et (10). Par conséquent, $T_2(\varepsilon, \eta, z)$ doit satisfaire les conditions adiabatiques aux deux limites radiales, ainsi que l'équation (12) :

$$\text{À } \varepsilon = \varepsilon_i, \quad -\frac{K}{h_1} \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (14)$$

$$\dot{\lambda} \varepsilon = \varepsilon_o, \quad -\frac{K}{h_1} \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (15)$$

À l'entrée d'espace annulaire ($z = 0$), suivant l'équation. (11) :

$$T(\varepsilon, \eta, 0) = T_1(\varepsilon, \eta) + T_2(\varepsilon, \eta, 0) = 0 \quad (16)$$

Ce qui entraîne :

$$T_1(\varepsilon, \eta) = -T_2(\varepsilon, \eta, 0) \quad (17)$$

La température moyenne à une section transversale d'espace annulaire est définie selon la définition usuelle :

$$T_m(z) = \frac{\int_0^\pi \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z T(\varepsilon, \eta, z) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta}{\int_0^\pi \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z h_1 h_2 d\varepsilon d\eta} \quad (18)$$

Qui s'applique séparément aux trois composantes constituant $T(\varepsilon, \eta, z)$. Ainsi, la température moyenne, en utilisant l'équation (13), est :

$$T_m(z) = \alpha z + T_{1m} + T_{2m}(z) \quad (19)$$

Puisque $T_2(\varepsilon, \eta, z)$ a des conditions aux limites radiales adiabatiques et s'estompe au-delà de la longueur d'entrée thermique (au-delà de cette position axiale, $T_{2m} = 0$), sa moyenne doit être égale à zéro et invariante axialement :

$$T_{2m}(z) = 0 \quad (20)$$

Calculant la température moyenne à $z = 0$ en utilisant l'équation. (16), et sachant par l'équation (20) que $T_{2m}(0) = 0$, conduit à $T_{1m} = 0$. De l'équation (19), on obtient :

$$T_m(z) = \alpha z \quad (21)$$

Afin de déterminer la valeur de α , l'équation. (13) est utilisée dans l'équation. (8). Le résultat est multiplié par le volume elliptique différentiel $h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz$ (avec $h_3=1$) puis intégré sur le domaine d'espace annulaire de longueur z :

$$\begin{aligned} & \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(V_z (\alpha z + T_1(\varepsilon, \eta) + T_2(\varepsilon, \eta, z)) \right) \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\ &= \frac{1}{RePr} \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} (\alpha z + T_1(\varepsilon, \eta) + T_2(\varepsilon, \eta, z)) \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\ &+ \frac{1}{RePr} \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\alpha z + T_1(\varepsilon, \eta) + T_2(\varepsilon, \eta, z)) \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\ &+ \frac{1}{RePr} \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \left[K \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\alpha z + T_1(\varepsilon, \eta) + T_2(\varepsilon, \eta, z)) \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \end{aligned} \quad (22)$$

Le côté gauche de l'équation. (22) est multiplié et divisé par le débit volumique, qui est le dénominateur utilisé pour calculer la température moyenne présentée dans l'équation. (18) :

$$\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z h_1 h_2 d\varepsilon d\eta = S V_z \quad (23)$$

Où S est la surface de la section transversale adimensionnelle d'espace annulaire (égale à 9.136). En déplaçant les intégrales sur ε et η à l'intérieur de la dérivée, ce qui permet

l'introduction de la température moyenne sur le côté gauche de cette équation. Sur le côté droit, le premier terme est intégré sur ε , le deuxième sur η et le troisième sur z :

$$\begin{aligned}
V_z S \int_0^z \frac{\partial}{\partial z} [T_m(z)] dz &= \frac{1}{RePr} \int_0^z \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{K}{h_1} \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_0} - \frac{K}{h_1} \frac{\partial T_1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_i} \right) + \left(\frac{K}{h_1} \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_0} - \right. \\
&\left. \frac{K}{h_1} \frac{\partial T_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_i} \right) \Big] h_1 d\eta dz + \frac{1}{RePr} \int_0^z \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} \left[\left(\frac{K}{h_2} \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \Big|_{2\pi} - \frac{K}{h_2} \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \Big|_0 \right) + \left(\frac{K}{h_2} \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \Big|_{2\pi} - \right. \\
&\left. \frac{K}{h_2} \frac{\partial T_2}{\partial \eta} \Big|_0 \right) \Big] h_2 d\varepsilon dz + \frac{1}{RePr} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} \left[\left(K \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_z - K \frac{\partial T_2}{\partial z} \Big|_0 \right) \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (24)
\end{aligned}$$

En évaluant la partie gauche de l'équation par l'utilisation de l'équation. (21), en utilisant les conditions aux limites présentées dans les équations. (9), (10), (14) et (15) pour le premier terme sur le côté droit, les conditions de périodicité à 0 et 2π dans le second terme du côté droit et en considérant les flux de chaleur transversaux moyens de la température T_2 à chaque section étant égal à 0 comme une extension logique de l'équation. (20) ; l'équation. (24) devient :

$$V_z S[\alpha z] = \frac{1}{RePr} \mathcal{P}_i z \quad (25)$$

\mathcal{P}_i est le périmètre du cylindre intérieur :

$$\mathcal{P}_i = \int_0^{2\pi} h_1(\varepsilon_i, \eta) d\eta = 7.063 \quad (26)$$

De l'équation (25) :

$$\alpha = \left[\frac{1}{RePr} \right] \frac{\mathcal{P}_i}{V_z S} = 5.5223 \times 10^{-4} \quad (27)$$

$\alpha = 5.5223 \times 10^{-4}$, 2.2089×10^{-4} et 1.1045×10^{-4} pour $Re = 200$, 500 et 1000 , respectivement.

3.4. Champ de Température

L'expression analytique du champ de température est obtenue en résolvant l'équation (8) avec l'utilisation de l'équation (13) :

$$V_z \left(\alpha + \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) = \frac{1}{RePr} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{RePr} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right] \quad (28)$$

La solution de cette équation peut être obtenue par les solutions simultanées des deux équations suivantes pour T_1 et T_2 , respectivement :

$$V_z \alpha = \left[\frac{1}{RePr} \right] \frac{\mathcal{P}_i}{S} = \frac{1}{RePr} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \varepsilon^2} + \frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} \right] \quad (29)$$

$$V_z \frac{\partial T_2}{\partial z} = \frac{1}{RePr} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{K}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \eta^2} + \frac{K \partial^2 T_2}{\partial z^2} \right] \quad (30)$$

La solution de l'équation. (29) est une superposition d'une solution particulière $T_{1p}(\varepsilon, \eta)$ et une solution homogène (complémentaire) $T_{1h}(\varepsilon, \eta)$:

$$T_1(\varepsilon, \eta) = T_{1p}(\varepsilon, \eta) + T_{1h}(\varepsilon, \eta) \quad (31)$$

La solution particulière satisfait l'équation. (32) :

$$\frac{\partial^2 T_{1p}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 T_{1p}}{\partial \eta^2} = \frac{P_i}{KS} h_1 h_2 = \frac{P_i}{2KS} (\cosh(2\varepsilon) - \cos(2\eta)) \quad (32)$$

$T_{1p}(\varepsilon, \eta)$ doit être périodique le long de la direction angulaire η avec une période égale à π pour satisfaire la symétrie angulaire par rapport aux axes elliptiques.

Une solution de l'équation. (32) est :

$$T_{1p}(\varepsilon, \eta) = C_1 \cosh(2\varepsilon) + C_2 \varepsilon + C_3 + C_4 \cos(2\eta) \quad (33)$$

C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes à déterminer. En utilisant l'équation (33) dans l'équation (32), on obtient les expressions de C_1 et C_4 présentées dans le Tableau 3. Les constantes C_2 et C_3 seront déterminées plus tard.

La solution complémentaire $T_{1h}(\varepsilon, \eta)$ satisfait l'équation différentielle partielle homogène suivante :

$$\frac{\partial^2 T_{1h}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 T_{1h}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (34)$$

Cette équation est résolue en utilisant la méthode de séparation des variables (Annexe A) :

$$T_{1h}(\varepsilon, \eta) = f(\varepsilon)g(\eta) \quad (35)$$

Ce qui conduit aux deux équations différentielles ordinaires du second ordre suivantes :

$$\frac{d^2 g}{d\eta^2} + n^2 g = 0 \quad (36)$$

$$\frac{d^2 f}{d\varepsilon^2} - n^2 f = 0 \quad (37)$$

La solution des équations (36) et (37) amène à la solution complémentaire :

$$T_{1h}(\varepsilon, \eta) = \sum_{n=2,4,6,8}^{\infty} \cos(n\eta) [E_n \sinh(n\varepsilon) + F_n \cosh(n\varepsilon)] \quad (38)$$

L'équation. (31) devient alors :

$$T_1(\varepsilon, \eta) = \frac{P_i}{8KS} \cosh(2\varepsilon) + C_2 \varepsilon + C_3 + \frac{P_i}{8KS} \cos(2\eta) + \sum_{n=2,4,6,8}^{\infty} \cos(n\eta) [E_n \sinh(n\varepsilon) + F_n \cosh(n\varepsilon)] \quad (39)$$

Les constantes restantes C_2, C_3, E_n et F_n sont discutées et déterminées dans l'annexe A, elles sont présentées dans le Tableau 3 et leurs valeurs présentées dans le Tableau 4, pour le cas $Re=200$.

Tableau 3 Constantes mathématiques de la solution de $T_1(\varepsilon, \eta)$

C_1	$\frac{P_i}{8KS}$
C_2	$\frac{-P_i \sinh(2\varepsilon_0)}{4KS}$
C_3	$-\frac{C_1}{4} \left[\frac{\sinh(4\varepsilon_0) - \sinh(4\varepsilon_i)}{\sinh(2\varepsilon_0) - \sinh(2\varepsilon_i)} \right]$

	$-\frac{C_2}{2} \left[\frac{(2\varepsilon_0 \sinh(2\varepsilon_0) - 2\varepsilon_i \sinh(2\varepsilon_i)) - (\cosh(2\varepsilon_0) - \cosh(2\varepsilon_i))}{\sinh(2\varepsilon_0) - \sinh(2\varepsilon_i)} \right]$ $+ \frac{[E_2(\cosh(2\varepsilon_0) - \cosh(2\varepsilon_i)) + F_2(\sinh(2\varepsilon_0) - \sinh(2\varepsilon_i))]}{2 [\sinh(2\varepsilon_0) - \sinh(2\varepsilon_i)]}$
C_4	$\frac{\mathcal{P}_i}{8KS}$
E_n	$-\frac{1}{K} \int_0^{2\pi} \cos(n\eta) \sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}} d\eta$
F_n	$\frac{n\pi \left[\cosh(n\varepsilon_i) - \frac{\cosh(n\varepsilon_0)}{\sinh(n\varepsilon_0)} \sinh(n\varepsilon_i) \right]}{-E_n \left[\frac{\cosh(n\varepsilon_0)}{\sinh(n\varepsilon_0)} \right]}$

Tableau 4 Valeurs de constantes mathématiques du Tableau 3, Re=200

C_1	0.0086
C_2	0.1174
C_3	0.1417
C_4	0.0086
E_2	$0.5428 \cdot 10^{-01}$
F_2	$-0.5468 \cdot 10^{-01}$
E_4	$0.6211 \cdot 10^{-02}$
F_4	$-0.6211 \cdot 10^{-02}$
E_6	$0.2050 \cdot 10^{-02}$
F_6	$-0.2050 \cdot 10^{-02}$
E_8	$0.9585 \cdot 10^{-03}$
F_8	$-0.9585 \cdot 10^{-03}$
E_{10}	$0.5362 \cdot 10^{-03}$
F_{10}	$-0.5362 \cdot 10^{-03}$
E_{12}	$0.3349 \cdot 10^{-03}$
F_{12}	$-0.3349 \cdot 10^{-03}$
E_{14}	$0.2254 \cdot 10^{-03}$
F_{14}	$-0.2254 \cdot 10^{-03}$
E_{16}	$0.1602 \cdot 10^{-03}$
F_{16}	$-0.1602 \cdot 10^{-03}$
E_{18}	$0.1186 \cdot 10^{-03}$
F_{18}	$-0.1186 \cdot 10^{-03}$
E_{20}	$0.9080 \cdot 10^{-04}$
F_{20}	$-0.9080 \cdot 10^{-04}$

E_{22}	$0.6501 \cdot 10^{-04}$
F_{22}	$-0.6501 \cdot 10^{-04}$
E_{24}	$0.3428 \cdot 10^{-03}$
F_{24}	$-0.3428 \cdot 10^{-03}$
E_{26}	$-0.9422 \cdot 10^{-06}$
F_{26}	$0.9422 \cdot 10^{-06}$
E_{28}	$-0.2027 \cdot 10^{-06}$
F_{28}	$0.2027 \cdot 10^{-06}$
E_{30}	$-0.8040 \cdot 10^{-09}$
F_{30}	$0.8040 \cdot 10^{-09}$
E_{32}	$-0.1303 \cdot 10^{-09}$
F_{32}	$0.1303 \cdot 10^{-09}$
E_{34}	$0.4740 \cdot 10^{-11}$
F_{34}	$-0.4740 \cdot 10^{-11}$
E_{36}	$0.4492 \cdot 10^{-13}$
F_{36}	$-0.4492 \cdot 10^{-13}$
E_{38}	$0.4724 \cdot 10^{-14}$
F_{38}	$-0.4724 \cdot 10^{-14}$
E_{40}	$0.1924 \cdot 10^{-15}$
F_{40}	$-0.1924 \cdot 10^{-15}$

La solution de l'équation. (30) pour $T_2(\varepsilon, \eta, z)$ exige également la séparation des variables :

$$T_2(\varepsilon, \eta, z) = F(\varepsilon)G(\eta)H(z) \quad (40)$$

Ce qui conduit aux trois équations différentielles ordinaires du second ordre suivantes (avec l'introduction des paramètres constants $-\lambda^2$ et a selon l'usage classique dans ce type de séparation des variables) :

$$\frac{RePr}{K} \frac{V_z}{H} \frac{dH}{dz} - \frac{1}{H} \frac{d^2H}{dz^2} = -\lambda^2 \quad (41)$$

$$\frac{1}{G} \frac{d^2G}{d\eta^2} - \frac{\lambda^2}{2} \cos(2\eta) = -a \quad (42)$$

$$\frac{1}{F} \frac{d^2F}{d\varepsilon^2} + \frac{\lambda^2}{2} \cosh(2\varepsilon) = a \quad (43)$$

La solution générale de l'équation. (41) est :

$$H(z) = C_9 e^{\gamma_2 z} \left[1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)((L/a) - z)} \right] \quad (44)$$

Avec C_9 une constante qui sera combinée avec d'autres constantes. Les valeurs de γ_1 et γ_2 sont données dans le Tableau 5. $H(z)$ est une fonction exponentielle décroissante de la coordonnée axiale.

Tableau 5 Constantes mathématiques de la solution de $T_2(\varepsilon, \eta, z)$.

λ^2	$4q$
γ_1	$\frac{\frac{Re Pr V_z}{K} + \sqrt{\left[\frac{Re Pr V_z}{K}\right]^2 + 4\lambda^2}}{2}$
γ_2	$\frac{\frac{Re Pr V_z}{K} - \sqrt{\left[\frac{Re Pr V_z}{K}\right]^2 + 4\lambda^2}}{2} = \frac{-\lambda^2}{\gamma_1} = \frac{-2\lambda^2 K / (Re Pr V_z)}{1 + \sqrt{1 + 4\lambda^2 [K / Re Pr V_z]^2}}$
P^{2r}	$\frac{\sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2r} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} [2n J_{2n}(2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon_i)) - 2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon_i) J_{2n+1}(2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon_i))] \coth(\varepsilon_i)}{A_0^{2r}}$
Q^{2r}	$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+r} A_{2n}^{2r} [2n Y_{2n}(2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon_i)) - (2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon_i)) Y_{2n+1}(2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon_i))] \tanh(\varepsilon_i)}{\sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2r}}$
R^{2r}	$\frac{[\sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2r}] \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} [2n J_{2n}(2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon_0)) - 2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon_0) J_{2n+1}(2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon_0))] \coth(\varepsilon_0)}{A_0^{2r}}$
S^{2r}	$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+r} A_{2n}^{2r} [2n Y_{2n}(2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon_0)) - (2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon_0)) Y_{2n+1}(2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon_0))] \tanh(\varepsilon_0)}{\sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2r}}$
θ_m^{2r}	$\left[\frac{P_m^{2r}}{Q_m^{2r}} \right]$

Pour rendre les équations. (42) et (43) dans les formes des équations classiques de Mathieu, la constante λ^2 est remplacée par la constante $4q$. L'équation. (42) devient l'équation classique de Mathieu (angulaire) :

$$\frac{d^2 G}{d\eta^2} + [a - 2q \cos(2\eta)]G = 0 \quad (45)$$

Tandis que l'équation. (43) devient l'équation classique modifiée de Mathieu (radiale) :

$$\frac{d^2 F}{d\varepsilon^2} - [a - 2q \cosh(2\varepsilon)]F = 0 \quad (46)$$

Pour le but de cette étude, q est appelée la valeur propre (qui sera déterminée à partir des conditions aux limites radiales) et a , la valeur caractéristique. Pour une valeur donnée de q , il existe de nombreuses valeurs de la constante de séparation a qui satisfont les équations (45) et (46) ; ces valeurs sont étiquetées a_{2r} , pour $r = 0, 1, 2, 3, \dots$. Les solutions générales des équations de Mathieu et équations modifiées de Mathieu sont présentées dans [29] et [30]. Une solution de l'équation (45) qui a une période égale à π et symétrique aux axes elliptiques ($\eta = 0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$) est :

$$ce_{2r}(\eta, q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2n\eta) \quad (47)$$

Dans l'équation (47), pour une valeur propre donnée q , les coefficients A_{2n}^{2r} (et donc $ce_{2r}(\eta, q)$) correspondent à une valeur particulière de a_{2r} . Par conséquent, il est

possible de considérer la superposition des fonctions $ce_{2r}(\eta, q)$ en tant que solution de l'équation (45) :

$$G(\eta, q) = \sum_{r=0}^{\infty} U^{2r} ce_{2r}(\eta, q) \quad (48)$$

Les U^{2r} sont des constantes, l'exposant se référant à la valeur de $2r$ des fonctions considérées. Les constantes a_{2r} et A_{2n}^{2r} peuvent être déterminées par une série de manipulations mathématiques (voir l'Annexe B). Pour une valeur q donnée, les a_{2r} sont les valeurs caractéristiques et les A_{2n}^{2r} sont les vecteurs caractéristiques d'une matrice symétrique tri diagonale présentée dans l'équation (49). Pratiquement, ce système de matrice construit jusqu'à $n = n_{max} = 60$ est résolu en utilisant l'algorithme QL avec un décalage implicite [31].

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}q & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{2}q & 16 & q & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q & 25 & q & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & q & 4n^2 & q & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}A_0^{2r} \\ A_2^{2r} \\ \vdots \\ A_n^{2r} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = a_{2r} \begin{bmatrix} \sqrt{2}A_0^{2r} \\ A_2^{2r} \\ \vdots \\ A_n^{2r} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (49)$$

Une solution de l'équation. (46), avec $a = a_{2r}$, est :

$$\begin{aligned} Ce_{2r}(\varepsilon, q) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cosh(2n\varepsilon) = \frac{ce_{2r}(0, q)}{A_0^{2r}} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} J_{2n} \left(2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon) \right) \\ &= \left[\frac{\sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2r}}{A_0^{2r}} \right] \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} J_{2n} \left(2\sqrt{q} \sinh(\varepsilon) \right) \end{aligned} \quad (50)$$

Avec J_{2n} étant la fonction de Bessel du premier type et d'ordre $2n$. Une autre solution de l'équation. (46) est :

$$\begin{aligned} Mc_{2r}(\varepsilon, q) &= \frac{1}{ce_{2r}(0, q)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+r} A_{2n}^{2r} Y_{2n} (2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon)) \\ &= \left[\frac{1}{\sum_{s=0}^{\infty} A_{2s}^{2r}} \right] \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+r} A_{2n}^{2r} Y_{2n} (2\sqrt{q} \cosh(\varepsilon)) \end{aligned} \quad (51)$$

Avec Y_{2n} étant la fonction de Bessel du second type et d'ordre $2n$. Cela conduit à une solution générale de l'équation. (46) :

$$F(\varepsilon, q) = \sum_{r=0}^{\infty} [I^{2r} Ce_{2r}(\varepsilon, q) + N^{2r} Mc_{2r}(\varepsilon, q)] \quad (52)$$

Avec I^{2r} et N^{2r} des constantes, et l'exposant se référant à la valeur de $2r$ des fonctions considérées. En appliquant les conditions aux limites radiales pour $T_2(\varepsilon, \eta, z)$, et donc pour $F(\varepsilon, q)$, conduit à la relation suivante entre les constantes I^{2r} et N^{2r} :

$$\sum_{r=0}^{\infty} [I^{2r} P^{2r} + N^{2r} Q^{2r}] = 0 \quad (53)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} [I^{2r} R^{2r} + N^{2r} S^{2r}] = 0 \quad (54)$$

Les quantités P^{2r} , Q^{2r} , R^{2r} et S^{2r} , avec l'exposant se référant à la valeur de $2r$ des vecteurs caractéristiques, pour une valeur donnée de q , sont présentées dans le Tableau 5.

De l'équation. (53), la relation suivante est obtenue :

$$N^{2r} = -I^{2r} \left[\frac{P^{2r}}{Q^{2r}} \right] \quad (55)$$

Remplaçant l'équation. (55) dans l'équation. (54) mène à, pour toutes les valeurs de r ($r = 0, 1, 2, 3 \dots$) :

$$I^{2r} \left[R^{2r} - \frac{P^{2r}}{Q^{2r}} S^{2r} \right] = 0 \quad (56)$$

Puisque I^{2r} doit être différente de zéro pour toute solution non-triviale, donc de l'équation. (56) :

$$R^{2r} - \frac{P^{2r}}{Q^{2r}} S^{2r} = 0 \quad (57)$$

Pour chaque valeur de r , l'équation transcendante non linéaire (57) doit être résolue afin de déterminer les valeurs propres du problème considéré. Ces valeurs propres sont étiquetés q_m^{2r} pour $m = 1, 2, 3 \dots$

Enfin, la combinaison des équations. (44), (48), (52) et (55) dans l'équation. (40) conduit à la solution de $T_2(\varepsilon, \eta, z)$. Il est à noter que les séries dans les équations. (48) et (52) sont combinées dans une série puisque, pour chaque valeur de r , seulement une fonction angulaire $U^{2r} c e_{2r}(\eta, q_m^{2r})$ correspond à une fonction radiale $I^{2r} C e_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) + N^{2r} M c_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})$. Cette fonction radiale est normalisée avec le maximum de sa valeur absolue (une constante) sur la gamme radiale ($\varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_o$). Cette normalisation maintient la valeur absolue des fonctions radiales inférieures ou égales à un. Par conséquent, la solution de $T_2(\varepsilon, \eta, z)$ est :

$$\begin{aligned} T_2(\varepsilon, \eta, z) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_9 e^{\gamma_2 z} \left[1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)((L/a) - z)} \right] \\ &\quad \times [I^{2r} C e_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) + N^{2r} M c_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})] [U^{2r} c e_{2r}(\eta, q_m^{2r})] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m^{2r} e^{\gamma_2 z} \left[1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)((L/a) - z)} \right] \\ &\quad \times \frac{[C e_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} M c_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})]}{\max(\{|C e_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} M c_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})\}; \varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_o)} [c e_{2r}(\eta, q_m^{2r})] \end{aligned} \quad (58)$$

La dernière forme de cette équation est obtenue en utilisant la fonction radiale normalisée et en combinant les constantes dans une seule : χ_m^{2r} . La constante $\theta_m^{2r} = \frac{P_m^{2r}}{Q_m^{2r}}$ est

présentée dans le Tableau 5; l'indice m et l'exposant $2r$ référant aux constantes P_m^{2r} et Q_m^{2r} et les fonctions $Ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})$ et $Mc_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})$ étant calculées avec $q = q_m^{2r}$. Les constantes γ_1 et γ_2 données dans le Tableau 5 doivent également être exprimées en fonction de q_m^{2r} ; cela se fait par le remplacement de λ^2 par $4q_m^{2r}$. En combinant les solutions de $T_1(\varepsilon, \eta)$ et $T_2(\varepsilon, \eta, z)$, l'expression suivante de $T(\varepsilon, \eta, z)$ est :

$$\begin{aligned}
T(\varepsilon, \eta, z) = & \alpha z + C_1 \cosh(2\varepsilon) + C_2 \varepsilon + C_3 + C_4 \cos(2\eta) \\
& + \sum_{n=2,4,6,8}^{\infty} \cos(n\eta) [E_n \sinh(n\varepsilon) + F_n \cosh(n\varepsilon)] \\
& + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m^{2r} e^{\gamma_2 z} \left[1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(L/a) - z} \right] \\
& \times \frac{[Ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} Mc_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})]}{\max(\{|Ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} Mc_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})| : \varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\})} [ce_{2r}(\eta, q_m^{2r})] \quad (59)
\end{aligned}$$

Dans l'équation. (59), seulement χ_m^{2r} reste à déterminer de la condition axiale à l'entrée de l'espace annulaire (équation (11)) et en exploitant l'orthogonalité du produit des fonctions de Mathieu $F(\varepsilon, q_m^{2r}) G(\eta, q_m^{2r})$, par rapport à la fonction de densité $\left[\frac{\cosh(2\varepsilon)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2} \right]$, dans le domaine $\varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $0 \leq \eta \leq 2\pi$:

$$\chi_m^{2r} = \frac{- \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} \left[C_1 \cosh(2\varepsilon) + C_2 \varepsilon + C_3 + C_4 \cos(2\eta) + \sum_{n=2,4,6,8}^{\infty} \cos(n\eta) [E_n \sinh(n\varepsilon) + F_n \cosh(n\varepsilon)] \right] \times \frac{[Ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} Mc_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})][ce(\eta, q_m^{2r})]}{\max(\{|Ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} Mc_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})| : \varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\})} \left[\frac{\cosh(2\varepsilon)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2} \right] d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} \left[1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)(L/a)} \right] \frac{[Ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} Mc_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})][ce(\eta, q_m^{2r})]}{\max(\{|Ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} Mc_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})| : \varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\})} \left[\frac{\cosh(2\varepsilon)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2} \right] d\varepsilon d\eta} \quad (60)$$

Il a été trouvé suffisant de calculer les séries avec les fonctions de Mathieu dans l'équation (58) avec l'indice r varie de 0 à 7. Pour chaque r , c'était suffisant d'utiliser les racines de l'équation transcendantale non linéaire (57) dans le domaine $0 < q_m^{2r} \leq 100$. Ces racines sont obtenues par la méthode numérique Bracketing et Bisection bien exposée dans le neuvième chapitre de [31]. Les racines q_m^{2r} et les coefficients correspondants χ_m^{2r} sont énumérés dans le Tableau 6. Les fonctions de Bessel dans les fonctions radiales de Mathieu sont calculées avec les routines exposées dans le sixième chapitre de [31]. Puisque les fonctions cosinus dans les fonctions angulaires de Mathieu et les fonctions de Bessel dans les fonctions radiales de Mathieu obéissent à des formules de récurrence connues, la technique de récurrence effective de Clenshaw, présentée dans le cinquième chapitre de [31], a été utilisée pour calculer toutes les séries de notre étude.

Remarque : les fonctions radiales normalisées et angulaires de Mathieu sont tracées dans l'annexe C pour chaque r et pour toutes les valeurs de m considérées.

Tableau 6 Les racines q_m^{2r} et leur coefficients correspondants χ_m^{2r}

r	m	q_m^{2r}	χ_m^{2r}
0	1	0.2695 10 ⁺⁰¹	0.1910 10 ⁻⁰¹
	2	0.1013 10 ⁺⁰²	-0.4211 10 ⁻⁰²
	3	0.2235 10 ⁺⁰²	0.1714 10 ⁻⁰²
	4	0.3935 10 ⁺⁰²	0.9025 10 ⁻⁰³
	5	0.6113 10 ⁺⁰²	-0.5475 10 ⁻⁰³
	6	0.8768 10 ⁺⁰²	0.3640 10 ⁻⁰³
1	1	0.4133 10 ⁺⁰⁰	-0.1903 10 ⁻⁰³
	2	0.3774 10 ⁺⁰¹	-0.9751 10 ⁻⁰²
	3	0.1245 10 ⁺⁰²	0.2733 10 ⁻⁰²
	4	0.2577 10 ⁺⁰²	-0.1121 10 ⁻⁰²
	5	0.4387 10 ⁺⁰²	0.5984 10 ⁻⁰³
	6	0.6674 10 ⁺⁰²	-0.3670 10 ⁻⁰³
	7	0.9440 10 ⁺⁰²	0.2457 10 ⁻⁰³
2	1	0.1565 10 ⁺⁰¹	0.9730 10 ⁻⁰⁴
	2	0.5066 10 ⁺⁰¹	-0.1640 10 ⁻⁰²
	3	0.1453 10 ⁺⁰²	0.2319 10 ⁻⁰²
	4	0.2923 10 ⁺⁰²	-0.9591 10 ⁻⁰³
	5	0.4847 10 ⁺⁰²	0.4996 10 ⁻⁰³
	6	0.7247 10 ⁺⁰²	-0.3060 10 ⁻⁰³
3	1	0.3328 10 ⁺⁰¹	0.9204 10 ⁻⁰⁵
	2	0.7576 10 ⁺⁰¹	-0.9164 10 ⁻⁰⁴
	3	0.1636 10 ⁺⁰²	-0.8422 10 ⁻⁰³
	4	0.3237 10 ⁺⁰²	0.9422 10 ⁻⁰³
	5	0.5304 10 ⁺⁰²	-0.4624 10 ⁻⁰³
	6	0.7822 10 ⁺⁰²	0.2750 10 ⁻⁰³
4	1	0.5608 10 ⁺⁰¹	0.7341 10 ⁻⁰⁶
	2	0.1118 10 ⁺⁰²	-0.3897 10 ⁻⁰⁵
	3	0.1946 10 ⁺⁰²	-0.9714 10 ⁻⁰⁴
	4	0.3481 10 ⁺⁰²	0.5163 10 ⁻⁰³
	5	0.5726 10 ⁺⁰²	-0.4798 10 ⁻⁰³
	6	0.8388 10 ⁺⁰²	0.2636 10 ⁻⁰³
5	1	0.8389 10 ⁺⁰¹	0.4547 10 ⁻⁰⁷
	2	0.1566 10 ⁺⁰²	0.7370 10 ⁻⁰⁸
	3	0.2383 10 ⁺⁰²	-0.9177 10 ⁻⁰⁵
	4	0.3839 10 ⁺⁰²	-0.8612 10 ⁻⁰⁴
	5	0.6047 10 ⁺⁰²	0.3491 10 ⁻⁰³
	6	0.8919 10 ⁺⁰²	0.2782 10 ⁻⁰³
6	1	0.1168 10 ⁺⁰²	0.4843 10 ⁻⁰⁹
	2	0.2082 10 ⁺⁰²	0.3948 10 ⁻⁰⁷
	3	0.2941 10 ⁺⁰²	-0.7835 10 ⁻⁰⁶
	4	0.4337 10 ⁺⁰²	-0.1052 10 ⁻⁰⁴
	5	0.6442 10 ⁺⁰²	0.8002 10 ⁻⁰⁴

	6	$0.9333 \cdot 10^{+02}$	$-0.2467 \cdot 10^{-03}$
7	1	$0.1548 \cdot 10^{+02}$	$-0.2302 \cdot 10^{-08}$
	2	$0.2651 \cdot 10^{+02}$	$0.5727 \cdot 10^{-08}$
	3	$0.3582 \cdot 10^{+02}$	$-0.5621 \cdot 10^{-07}$
	4	$0.4945 \cdot 10^{+02}$	$-0.1216 \cdot 10^{-05}$
	5	$0.7001 \cdot 10^{+02}$	$0.1136 \cdot 10^{-04}$
	6	$0.9760 \cdot 10^{+02}$	$0.7725 \cdot 10^{-04}$

Une comparaison de l'évolution axiale des trois termes de l'équation (13) précisés dans l'équation (59), dans la partie supérieure du cylindre intérieur, est présentée dans la Figure.

2. On voit que αz est une augmentation linéaire, $T_1\left(0.8, \frac{\pi}{2}, z\right)$ est une constante positive tandis que $T_2\left(0.8, \frac{\pi}{2}, z\right)$ est une fonction négative croissante axialement qui s'estompe au-delà de $z = 40$. La superposition des trois termes donne la croissance axiale correcte de la température dans la partie supérieure du cylindre. Cette croissance commence exponentiellement dans la longueur du développement thermique mais devient linéaire dans la zone thermiquement développé.

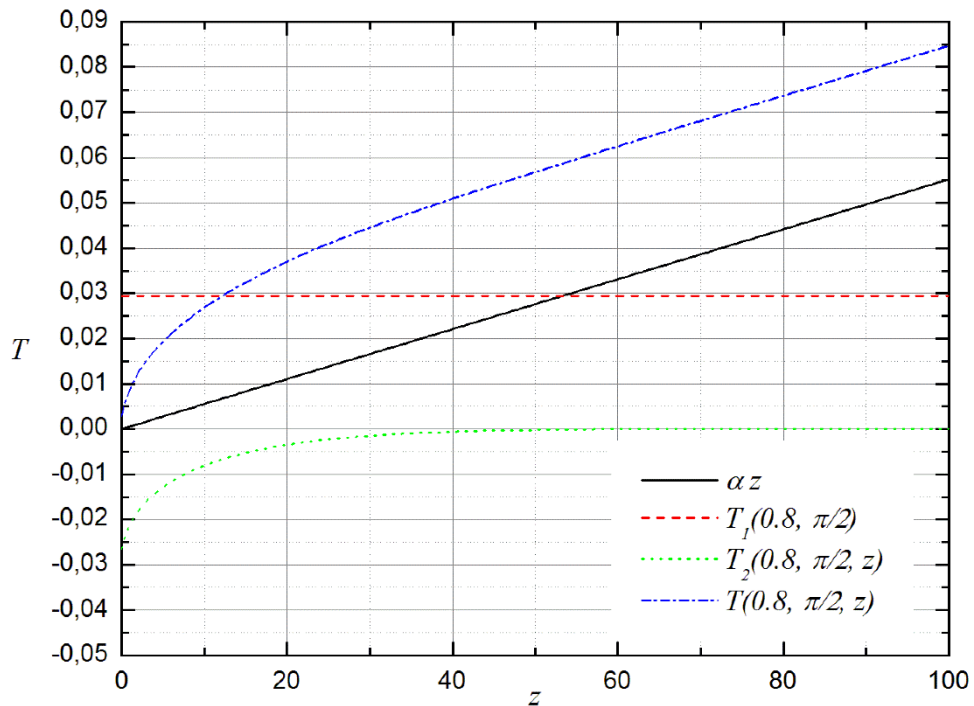


Fig. 2. Profil de la température analytique de la surface intérieure d'espace annulaire à $\eta = \pi/2$, pour le cas étudié, $Re = 200$.

Une fois l'expression analytique de la température dans l'espace annulaire obtenue, le transfert de chaleur peut être quantifié par le calcul des nombres de Nusselt local, axial et moyen. Le nombre de Nusselt local est défini comme suit :

$$Nu(\eta, z) = \frac{h(\eta, z) a}{k_f^*} = \frac{-\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_i}}{T(\varepsilon_i, \eta, z) - T_m(z)} = \frac{1}{T(\varepsilon_i, \eta, z) - T_m(z)} \quad (61)$$

Le nombre de Nusselt axial est alors calculé en faisant la moyenne du nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre intérieur :

$$Nu(z) = \frac{h(z) a}{k_f^*} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{[T(\varepsilon_i, \eta, z) - T_m(z)] \sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}} d\eta}{\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}} d\eta} = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{[T(\varepsilon_i, \eta, z) - T_m(z)] \sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}} d\eta}{\mathcal{P}_i} \quad (62)$$

et le nombre de Nusselt moyen de tout l'espace annulaire est obtenu par la moyenne du nombre de Nusselt axial sur la longueur du cylindre intérieur :

$$Nu = \frac{\int_0^{L/a} Nu(z) dz}{\int_0^{L/a} dz} \quad (63)$$

Résultats

4.1. Espace annulaire rempli de mousse vs un espace annulaire vide

Pour déterminer l'effet d'utilisation de la mousse métallique sur le transfert de chaleur, on compare les distributions de température et les nombres de Nusselt de l'espace annulaire rempli de la mousse métallique et de l'espace annulaire sans la mousse métallique qui est ci-après dénommé l'espace annulaire vide. L'écoulement laminaire hydrodynamique développé dans l'espace annulaire vide a des variations radiales et angulaires importantes qui peuvent être déterminées à partir de la solution exacte présentée par Zerari et al. [22]. Cependant, pour l'un des buts de cette étude, qui est la comparaison de l'effet d'isolation de la conductivité thermique, le champ d'écoulement de l'espace annulaire vide est supposé uniforme.

Les champs thermiques des deux cas, avec $Re=200$, sont comparés à la sortie de l'espace annulaire dans la Figure. 3. Ces champs sont qualitativement similaires et symétriques par rapport aux axes elliptiques. Dans la direction radiale, la température diminue entre le cylindre intérieur chauffé et la paroi extérieure adiabatique. On voit que le transfert de chaleur radial est meilleur quand la mousse métallique est utilisée. La variation angulaire de la température est un effet de courbure variable. Il est plus prononcé plus proche du cylindre intérieur mais devient plus faible en éloignant de lui. Pour l'espace annulaire rempli de la mousse métallique, au cylindre intérieur, la température est égale à 0.0847 sur l'axe mineur ; elle diminue de façon monotone dans la direction angulaire vers l'axe majeur où elle est égale à 0.0779. Au milieu de la section transversale, la variation angulaire de la température est faible et ne peut pas être discernée graphiquement. Plus près du cylindre extérieur, le gradient angulaire de la température est faible et opposé à celui de la surface du cylindre intérieur : la température augmente à partir de l'axe majeur vers l'axe mineur. Pour le cylindre extérieur, la température est égale à 0.0436 sur l'axe mineur et augmente à 0.0475 sur l'axe majeur. Pour l'espace annulaire vide, au cylindre intérieur, la température est égale à 0.2847 sur l'axe mineur ; elle diminue à 0.2557 sur l'axe majeur. Loin du cylindre intérieur, la variation angulaire de température est trop faible pour être discernée graphiquement. A la surface du cylindre extérieur, la température est égale à 0.0015 sur l'axe mineur et augmente à 0.0055 sur l'axe majeur. Il est clair que pour le même chauffage, le niveau de la température est plus faible dans l'espace annulaire rempli de la mousse métallique. La température maximale dans l'espace annulaire rempli de la mousse métallique est de 0.085, mais il atteint la valeur 0.285 dans l'espace annulaire vide. À une section droite donnée, la température moyenne est une constante qui est indépendante de la conductivité thermique (voir les Équations (21) et (27)). En outre, à la surface du cylindre intérieur de la section droite, le

flux thermique radial adimensionnel constant (égal à 1) est le produit de la conductivité thermique et le gradient radial de la température (voir l'Équation (9)). Puisque la conductivité thermique de la mousse métallique est plus élevée, son gradient radial de température est plus faible. Par conséquent, à une section droite donnée, la variation spatiale de la température est plus faible quand la conductivité thermique est plus élevée. Autrement dit, la résistance thermique faible fournie par une grande conductivité thermique réduit le niveau d'élévation de la température. Ceci explique le niveau faible de la température obtenu dans un espace annulaire rempli par une mousse métallique.

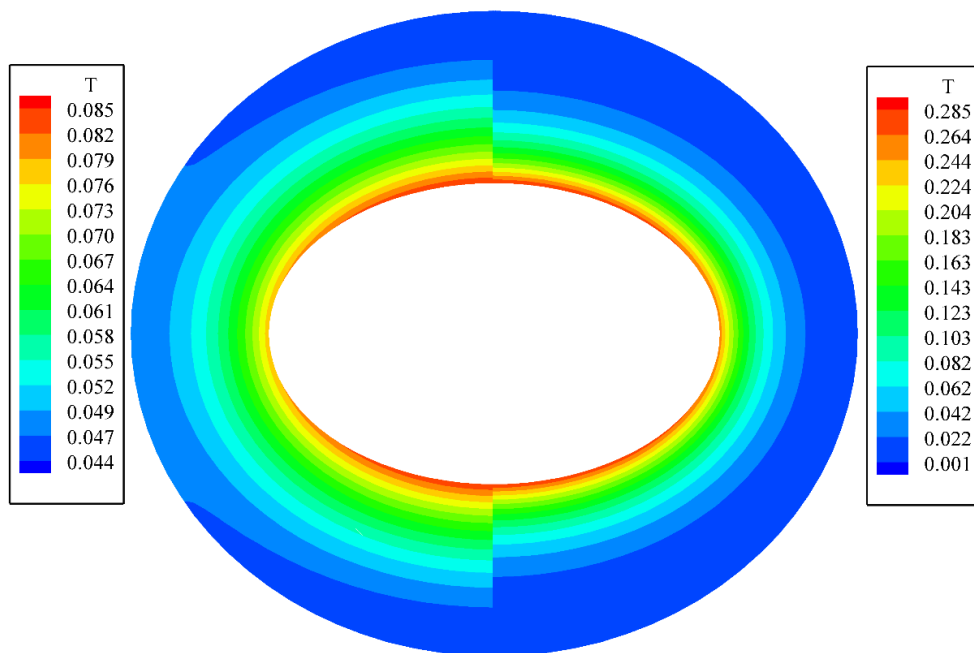


Fig. 3. Températures de la section de sortie d'espace annulaire rempli de la mousse métallique (à gauche) et l'espace annulaire vide (à droite), $Re=200$.

L'amélioration du transfert de chaleur par la mousse métallique est illustrée par la comparaison des nombres de Nusselt axiaux de l'espace annulaire rempli de mousse et de l'espace annulaire vide. De la Figure. 4, il est évident que le nombre de Nusselt axial de l'espace annulaire rempli de mousse est beaucoup plus grand que celui de l'espace annulaire vide. Les deux nombres de Nusselt diminuent rapidement dès l'entrée. Le nombre de Nusselt axial de l'espace annulaire rempli de mousse se stabilise au-delà de $z = 40$, atteignant la valeur 37.81. Ceci indique que la convection est en développement thermique dans le domaine ($z \leq 40$) et thermiquement développé pour ($z > 40$). Cependant, le nombre de Nusselt axial de l'espace annulaire vide diminue d'une manière monotone à partir de l'entrée

jusqu'à la sortie de l'espace annulaire, c'est une caractéristique de la convection en développement thermique. A la sortie de l'espace annulaire vide le nombre de Nusselt axial est égal à 4.58. Les performances thermiques de l'espace annulaire rempli de mousse et l'espace annulaire vide peuvent être comparées par les valeurs des nombres de Nusselt moyens. Ceux-ci sont égaux à 42.87 et 7.29 pour l'espace annulaire rempli de mousse et l'espace annulaire vide, respectivement. Par conséquent, le nombre de Nusselt moyen est agrandi 5.88 fois lorsque la mousse est utilisée.

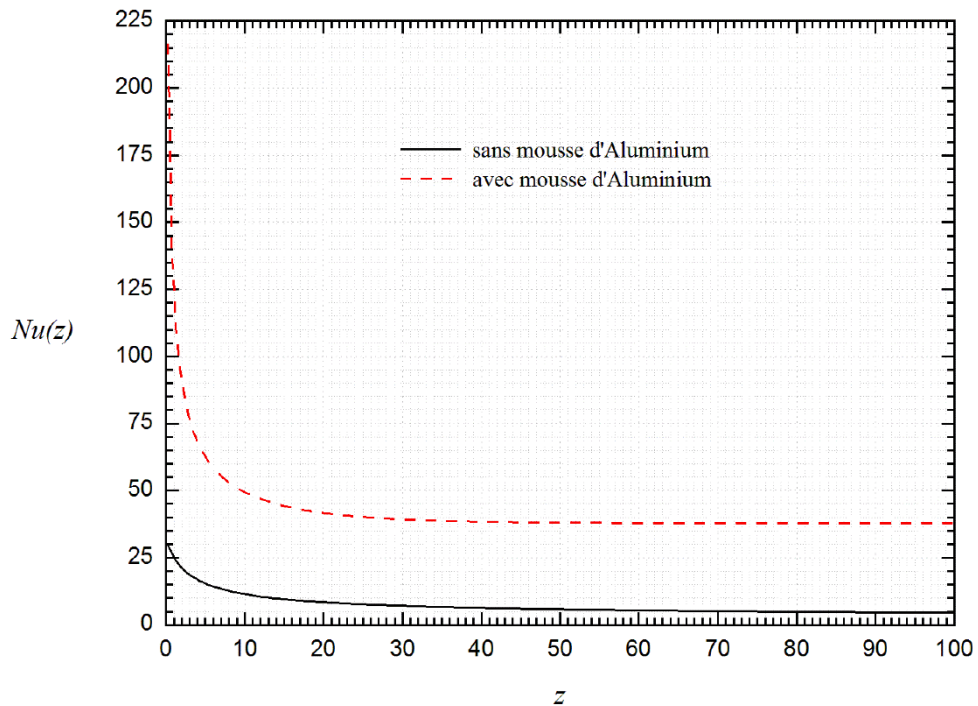


Fig. 4. Nombres de Nusselt axiaux d'espace annulaire avec et sans mousse métallique, Re=200.

L'amélioration du transfert de chaleur s'obtient au prix d'une augmentation énorme de la chute de pression. Une estimation de la chute de pression adimensionnelle est donnée pour le cas $Re = 200$. Pour l'espace annulaire vide, la perte de charge ne peut pas dépasser celle d'un écoulement laminaire dans les canaux [32] ; pour l'espace annulaire considéré, elle est d'ordre de :

$$\Delta P = \frac{L}{a} \frac{64}{Re} = 32 \quad (64)$$

Pour l'espace annulaire rempli de mousse, une bonne estimation de la perte de charge est dérivée du modèle de l'écoulement de Darcy [16] ; pour notre espace annulaire considéré, elle est égale à :

$$\Delta P = \frac{L}{a} \frac{1}{Re Da} = 1.545 * 10^5 \quad (65)$$

Celle-là est beaucoup plus élevée que celle de l'espace annulaire vide.

4.2. Simulation Numérique et Validation des Résultats

La solution de l'équation. (8) peut être obtenue numériquement par la méthode des volumes finis. Une façon d'obtenir la solution en régime permanent est par la marche dans le temps du problème transitoire, à partir d'une condition initiale spécifiée jusqu'à l'état stationnaire. Par conséquent, nous considérons l'équation transitoire non dimensionnelle d'énergie :

$$[\rho Cp]_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(V_z T)}{\partial z} = \frac{1}{Re Pr} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \frac{K}{\partial z^2} \right] \quad (66)$$

Avec la condition initiale :

$$\text{À } t = 0, T = 0 \quad (67)$$

et les conditions aux limites dans les équations. (9) - (12).

Le domaine géométrique physique est transformé en un autre numérique par une discrétisation qui le divise en volumes finis ayant une forme typique similaire à celui illustré sur la Figure. 5. Un point P est centré dans ce volume. Le volume a six faces qui sont ses interfaces avec six volumes finis adjacents. Ces faces sont étiquetées e (pour la face est), w (pour la face ouest), n (pour la face nord), s (pour la face sud), f (pour la face frontale) et b (pour la face arrière). Les points centrés dans les volumes finis adjacents sont étiquetés E (pour l'est), W (pour l'ouest), N (pour le nord), S (pour le sud), F (pour le front) et B (pour l'arrière).

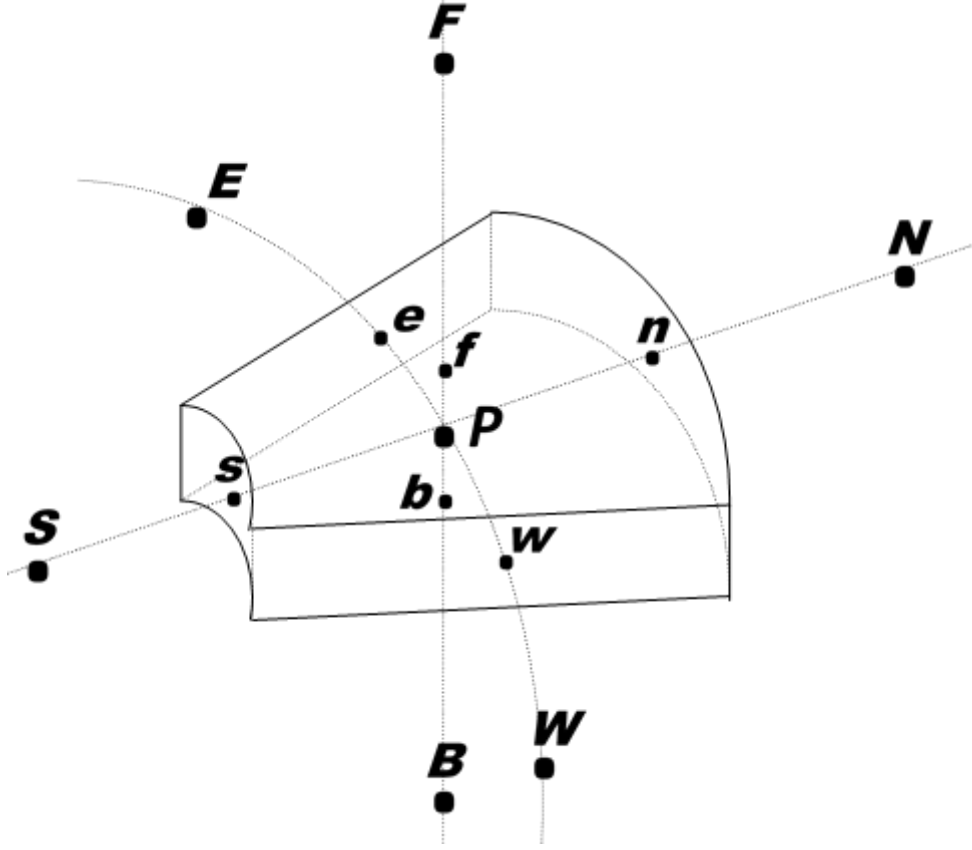


Fig. 5. Volume fini elliptique typique tridimensionnel

Le maillage numérique et sa projection sur la section droite de l'espace annulaire sont illustrés sur les Figures. 6 et 7, respectivement. Pour obtenir une équation de discrétisation de la température du point P , l'équation. (66) est multipliée par le volume différentiel elliptique $h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz$ puis triple intégrée entre les limites du volume fini :

$$\begin{aligned}
 & \int_b^f \int_w^e \int_s^n \left[[\rho Cp]_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} \right] h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz + \int_b^f \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial(V_z T)}{\partial z} \right] h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz \\
 & = \int_b^f \int_w^e \int_s^n \frac{K}{RePr h_1 h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz + \int_b^f \int_w^e \int_s^n \frac{K}{RePr h_1 h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz \\
 & + \int_b^f \int_w^e \int_s^n \frac{K}{RePr} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz \tag{68}
 \end{aligned}$$

Notant que $h_3 = 1$, on obtient pour le terme transitoire :

$$\int_b^f \int_w^e \int_s^n \left[[\rho Cp]_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \approx [\rho Cp]_{eff} \left[\frac{3T_P^{t+\Delta t} - 4T_P^t + T_P^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] h_{1P} h_{2P} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \Delta z_P \tag{69}$$

Dans la dernière équation, la discrétisation spatiale utilise l'approximation de localiser toutes les quantités en l'intégrant au point P ; la discrétisation temporelle suit le schéma aux différences d'Euler-Backward précis du second ordre. Pour le terme convectif, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_b^f \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(V_z T)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &\approx [h_1 h_2 V_z T]_b^f \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&\approx 2 [T]_b^f \Big|^{t+\Delta t} h_{1P} h_{2P} V_z \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&- [T]_b^f \Big|^{t-\Delta t} h_{1P} h_{2P} V_z \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&= 2 \left[\left(\frac{T_P^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_P^t + T_B^t}{2} \right) \right] h_{1P} h_{2P} V_z \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&- \left[\left(\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] h_{1P} h_{2P} V_z \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \quad (70)
\end{aligned}$$

Dans la dernière équation, la discrétisation temporelle se fait avec le schéma d'Adam-Bashforth avec une précision du second ordre tandis que la discrétisation spatiale est approchée par le schéma des différences centrées avec une précision du second ordre du second ordre. La discrétisation temporelle des trois termes diffusifs est totalement implicite tandis que la discrétisation spatiale est approchée par le schéma des différences centrées avec une précision du second ordre du second ordre :

$$\begin{aligned}
\int_b^f \int_w^e \int_s^n \frac{K}{Re Pr h_1 h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &\approx \frac{K}{Re Pr} \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_s^n \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_P \Delta Z_P \\
&= \frac{K}{Re Pr} \left[\frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_n^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \Big|_s^{t+\Delta t} \right] \Delta\eta_P \Delta Z_P \\
&= \frac{K}{Re Pr} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \\ - \left(\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \right) \end{array} \right] \Delta\eta_P \Delta Z_P \quad (71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_b^f \int_w^e \int_s^n \frac{K}{Re Pr h_1 h_2} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &\approx \frac{K}{Re Pr} \left[\frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^n \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_P \Delta Z_P \\
&= \frac{K}{Re Pr} \left[\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w^{t+\Delta t} \right] \Delta\varepsilon_P \Delta Z_P \\
&= \frac{K}{Re Pr} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{T_E^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \\ - \left(\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta\varepsilon_P \Delta Z_P \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_b^f \int_w^e \int_s^n \frac{K}{Re Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &\approx \frac{K}{Re Pr} \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^f \Big|^{t+\Delta t} h_{1P} h_{2P} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
&= \frac{K}{Re Pr} \left[\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_f^{t+\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b^{t+\Delta t} \right] h_{1P} h_{2P} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P
\end{aligned}$$

$$= \frac{K}{Re Pr} \left[\left(\frac{T_F^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{dz_f} \right) - \left(\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] h_{1P} h_{2P} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \quad (73)$$

En utilisant les équations. (69) - (73) dans l'équation. (68), on obtient l'équation de discrétisation sous la forme standard classique [27] :

$$A_P T_P^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + S \quad (74)$$

Avec les coefficients constants :

$$A_N = \frac{K}{Re Pr} \frac{\Delta \eta_P \Delta z_P}{d\varepsilon_n} \quad (75)$$

$$A_S = \frac{K}{Re Pr} \frac{\Delta \eta_P \Delta z_P}{d\varepsilon_s} \quad (76)$$

$$A_E = \frac{K}{Re Pr} \frac{\Delta \varepsilon_P \Delta z_P}{d\eta_e} \quad (77)$$

$$A_W = \frac{K}{Re Pr} \frac{\Delta \varepsilon_P \Delta z_P}{d\eta_w} \quad (78)$$

$$A_F = \frac{K}{Re Pr} h_{1P} h_{2P} \frac{\Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P}{dz_f} \quad (79)$$

$$A_B = \frac{K}{Re Pr} h_{1P} h_{2P} \frac{\Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P}{dz_b} \quad (80)$$

$$A_P = [\rho Cp]_{eff} \frac{3}{2\Delta t} h_{1P} h_{2P} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \Delta z_P + A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B \quad (81)$$

$$\begin{aligned} S &= [\rho Cp]_{eff} \left[\frac{4T_P^t - T_P^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \right] h_{1P} h_{2P} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \Delta z_P \\ &\quad - 2 \left[\left(\frac{T_F^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_P^t + T_B^t}{2} \right) \right] h_{1P} h_{2P} V_z \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \\ &\quad + \left[\left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] h_{1P} h_{2P} V_z \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \end{aligned} \quad (82)$$

Une équation de discrétisation en forme standard (Équation. (74)) est déterminée pour chaque point à l'intérieur du domaine numérique. Pour les points sur les limites du domaine, nous spécifions les équations de discrétisation qui sont sous la forme standard et satisfont les conditions aux limites.

Pour les points de l'entrée d'espace annulaire :

$$A_P = 1 \quad (83)$$

Tous les coefficients restants sont égaux à zéro.

Pour les points de la sortie d'espace annulaire :

$$A_B = 1 \quad (84)$$

$$A_P = 1 \quad (85)$$

$$S = C dz_b \quad (86)$$

Puisque la constante C dans l'équation. (86) est la valeur numérique du gradient $\frac{\partial T}{\partial z}$ au point B (voir la Figure. 5). Ceci reflète l'égalité des gradients axiaux numériques aux points P et B . Tous les coefficients restants sont égaux à zéro.

Pour les points de la surface du cylindre intérieur :

$$A_N = 1 \quad (87)$$

$$A_P = 1 \quad (88)$$

$$S = h_{1P} d\varepsilon_n / K \quad (89)$$

Tous les coefficients restants sont égaux à zéro.

Pour les points de la surface du cylindre extérieur :

$$A_S = 1 \quad (90)$$

$$A_P = 1 \quad (91)$$

Tous les coefficients restants sont égaux à zéro.

Avec la détermination d'une équation de discrétisation pour chaque point du maillage numérique, on obtient un système d'équations algébriques linéaires. La matrice des coefficients est heptagonale et elle a la caractéristique désirée d'une dominance diagonale (voir l'équation. (81)) qui confère au système des équations une stabilité numérique. On remarque que les coefficients de discrétisation A_P , A_N , A_S , A_E , A_W , A_F et A_B sont positifs.

Puisque la température du domaine doit satisfaire la condition :

$$T(\varepsilon, \eta, z) \geq 0 \quad (92)$$

Une propriété désirée du terme de la source dans l'équation. (82) est de satisfaire à la condition :

$$S \geq 0 \quad (93)$$

Cela empêche la possibilité d'obtenir des valeurs négatives de la température dans le domaine numérique. Toutefois, la somme algébrique dans l'équation. (82) ne garantit pas une valeur positive pour S , et donc nous devons reformuler l'équation de discrétisation d'une manière qui garantit la satisfaction de la condition dans l'équation. (92). On réécrit S comme une différence entre deux nombres qui sont positifs ou égaux à zéro :

$$S = |S| - \max(-2S, 0) \quad (94)$$

Le dernier terme sur le côté droite de l'équation. (94) est multiplié et divisé par la positive assumée $T_P^{t+\Delta t}$:

$$S = |S| - \left[\frac{\max(-2S, 0)}{T_P^{t+\Delta t}} \right] T_P^{t+\Delta t} \quad (95)$$

Quand l'équation. (95) est utilisée dans l'équation. (74), nous obtenons une équation de discrétisation reformulée :

$$A_P^* T_P^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |S| \quad (96)$$

Avec le nouveau coefficient :

$$A_P^* = A_P + \left[\frac{\max(-2S, 0)}{T_P^{t+\Delta t}} \right] \quad (97)$$

Le système reformulé des équations de discrétisation est résolu itérativement par la méthode de balayage [34], qui utilise l'algorithme de la matrice tri diagonale (TDMA) le long de la direction radiale et axiale et l'algorithme de la matrice tri diagonale cyclique (CTDMA) dans la direction angulaire. L'algorithme CTDMA assure la périodicité dans la direction angulaire. Un code FORTRAN, basé sur la méthode numérique présentée, a été élaboré pour l'obtention des résultats numériques. À partir de l'état initial, la marche dans le temps avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$ est continue jusqu'à l'obtention d'une solution en régime permanent. Cet état est vérifié par l'invariance temporelle de la température et la satisfaction du bilan thermique global. Pour l'espace annulaire rempli de mousse, les résultats numériques et analytiques sont comparés.

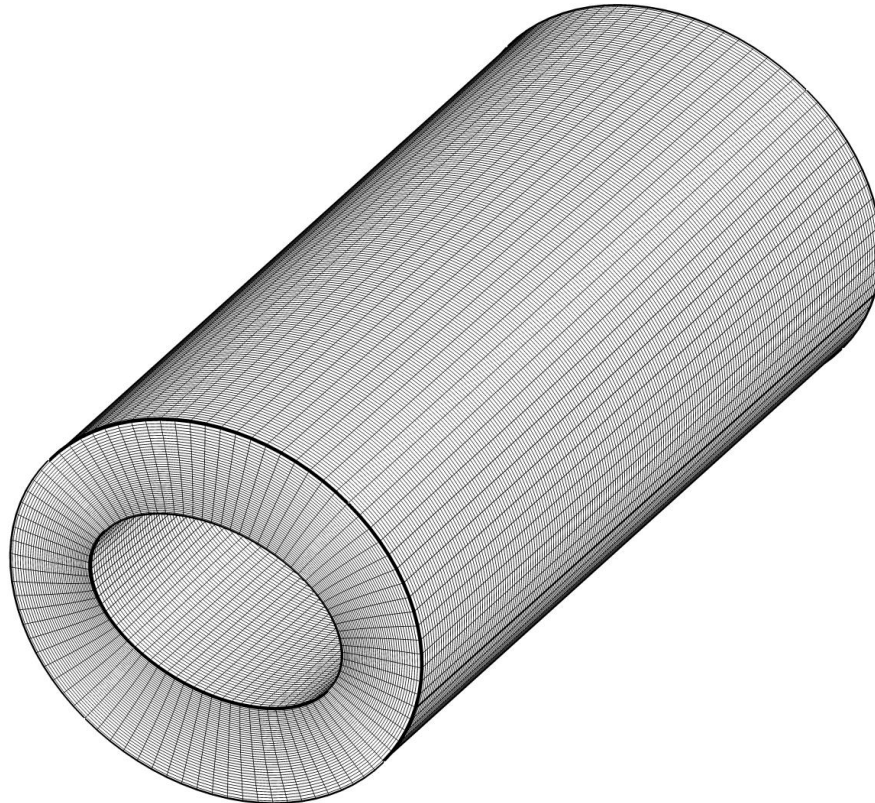


Fig. 6. Le maillage numérique (42×202×84), la longueur de l'espace annulaire est réduite 10 fois pour une meilleure représentation graphique.

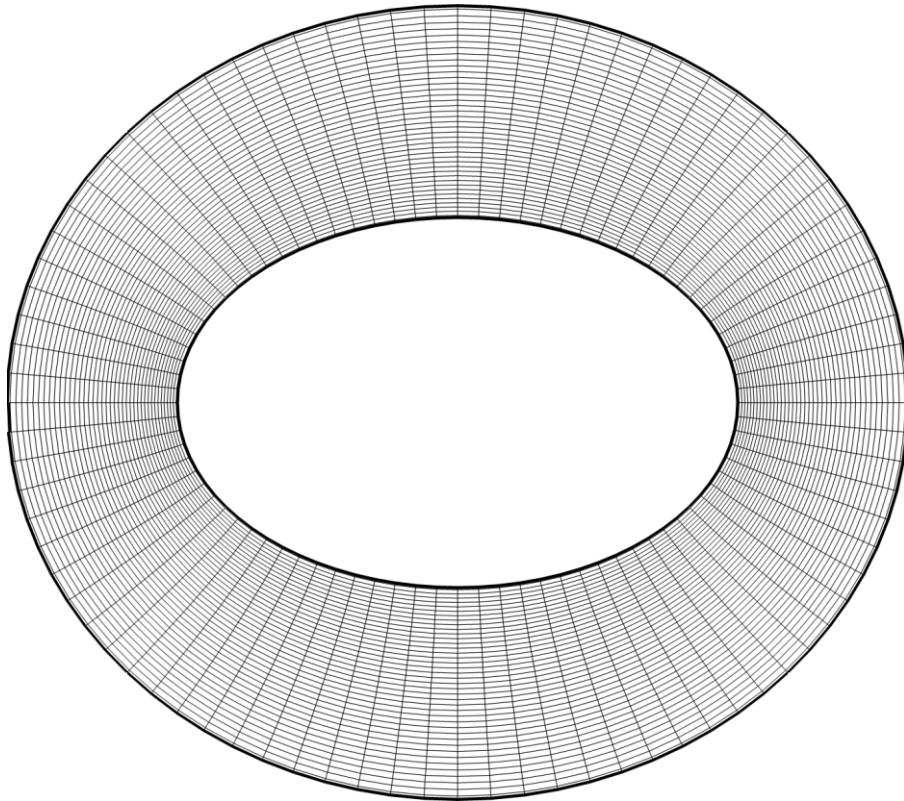


Fig. 7. La projection transversale du maillage numérique

Le chauffage axial continu est illustré dans la Figure 8 représentant la variation axiale analytique et numérique de la température à l'intersection du cylindre intérieur et les axes elliptiques (à $\eta = 0$ et $\eta = \frac{\pi}{2}$). Il y a un excellent accord entre les résultats analytiques et numériques. Il est clair que l'augmentation de la température axiale est non linéaire dans la zone du développement thermique ($0 \leq z \leq 40$) mais devient linéaire au-delà de cette zone.

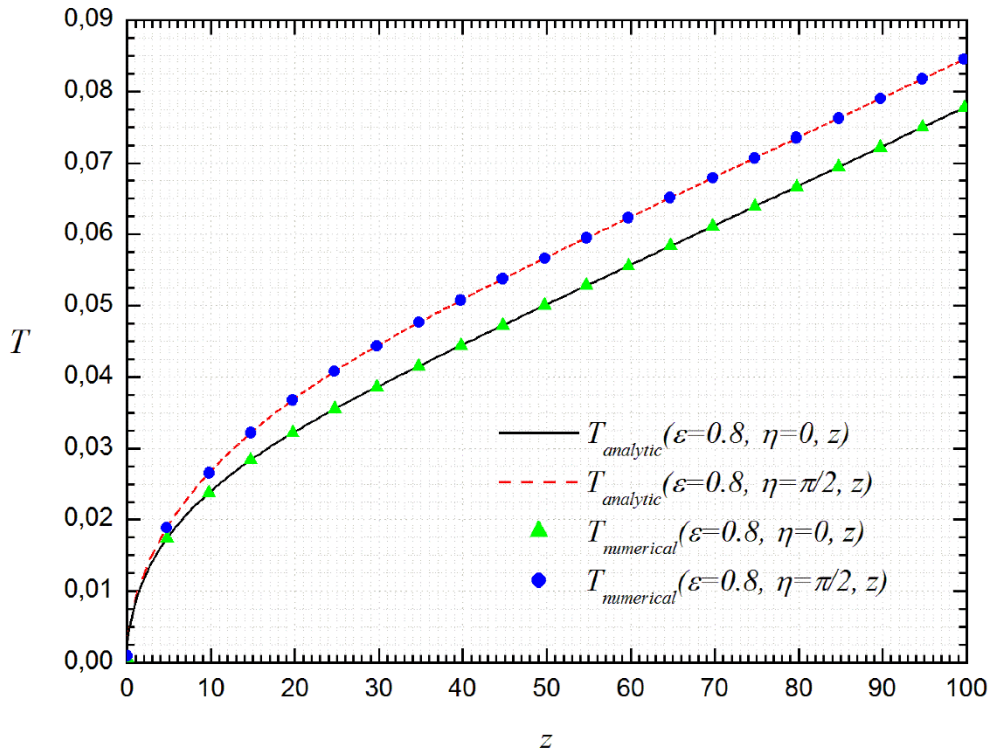


Fig. 8. Variations axiales de la température analytique et numérique à l'intersection du cylindre intérieur et les axes elliptiques, $Re=200$.

L'excellent accord entre les résultats numériques et analytiques est également bien illustré dans les Figures. 9-12 présentant la comparaison des champs thermiques à la section transversale correspondante à des stations axiales sélectionnées. Les champs analytiques et numériques sont aux côtés gauche et droit de ces figures, respectivement. Figure 9 présente le champ thermique à $z = 4.25$, près de l'entrée d'espace annulaire. On voit que le chauffage est limité à une petite région à proximité du cylindre intérieur chauffé. La température atteint un maximum égal à 0.0179. En aval, à $z = 9.25$, le champ thermique est présenté dans la Figure 10, où une diffusion radiale du chauffage est remarquée et une température maximale égale à 0.0259 est atteinte. Plus en aval, à $z = 14.25$, le champ thermique dans la Figure 11 montre une augmentation du niveau de la température qui atteint un maximum égal à 0.0317. Le chauffage axial avec une diffusion radiale thermique est monotone jusqu'à la sortie de l'espace annulaire. À cet endroit, le champ thermique dans la Figure 12 a été déjà présenté (Le côté gauche de la Figure 3) et discuté lors de la comparaison des champs thermiques des espaces annulaires rempli de mousse et vide. Les nombres de Nusselt axiaux analytiques et numériques sont trop proches et ne peuvent pas être discernés graphiquement, l'analytique a été présenté dans la Figure. 4. Il est rassurant de reproduire numériquement le champ thermique analytique non seulement dans la zone thermiquement développé mais aussi dans

celle du développement thermique. Cette excellente reproduction est considérée comme une validation à haut niveau du résultat numérique et la procédure.

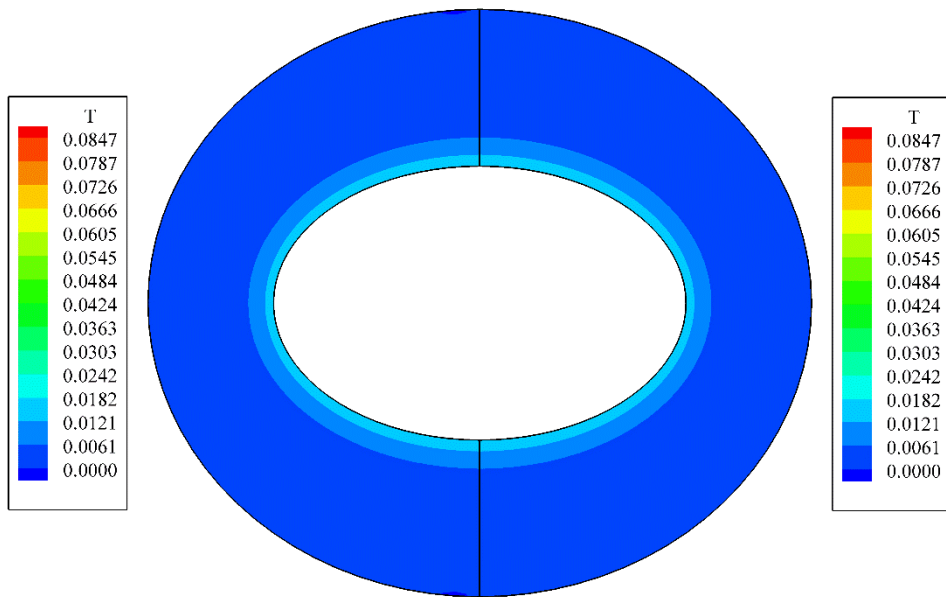


Fig. 9. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z = 4.25$, $Re=200$.

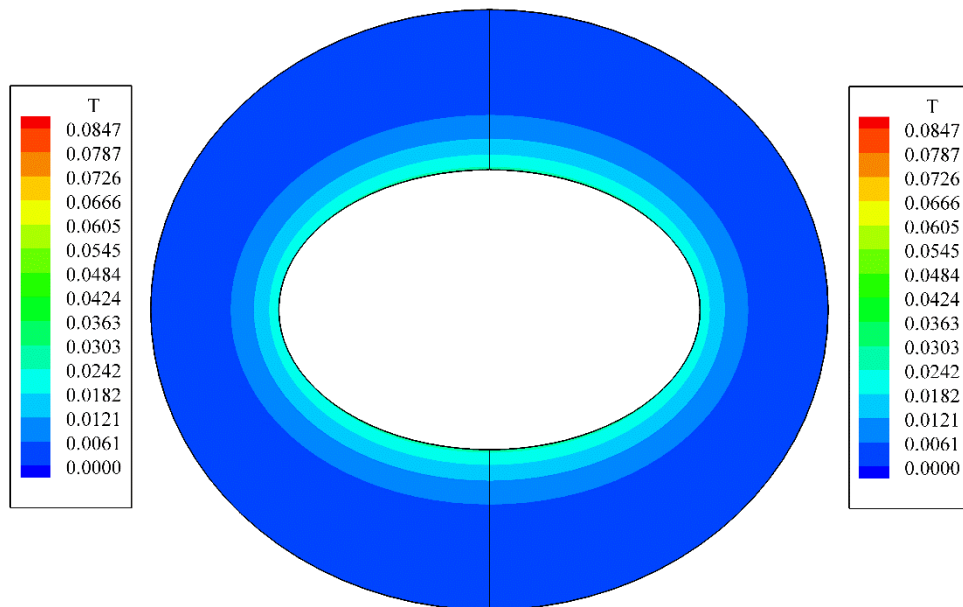


Fig. 10. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z = 9.25$, $Re=200$.

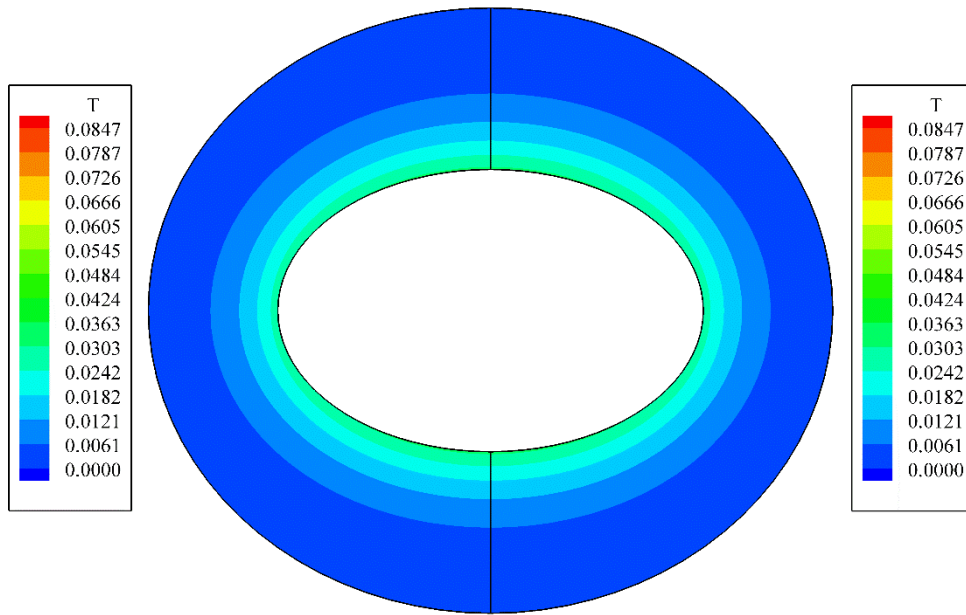


Fig. 11. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z = 14.25$, $Re=200$.

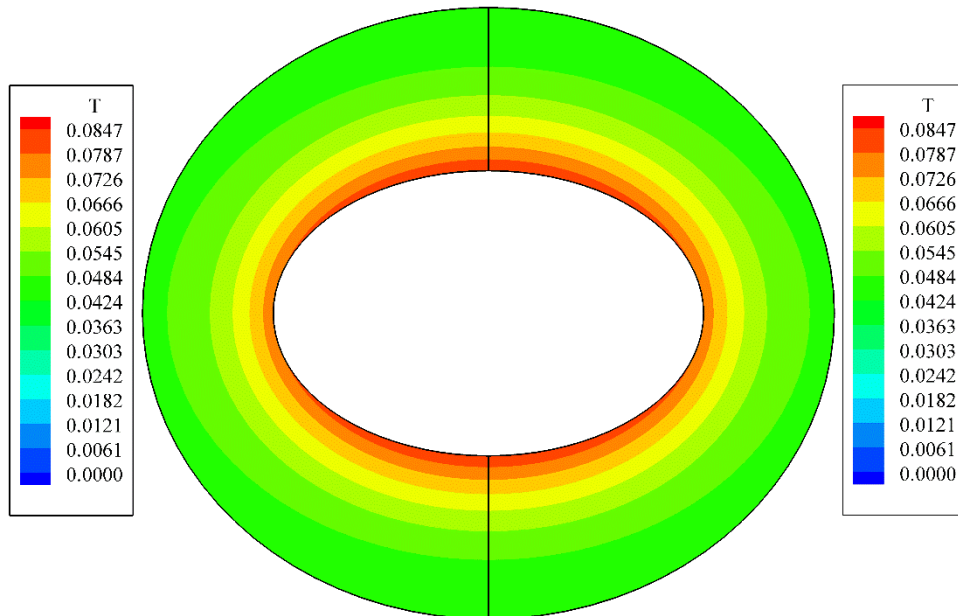


Fig. 12. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite) à $z = 100$, $Re=200$.

4.3. Reproduction du nombre de Nusselt de l'espace annulaire cylindrique

On sait que lorsque les rayons elliptiques sont grands, les ellipses deviennent des cercles. Dans ce cas, il est possible de comparer le nombre de Nusselt moyen de la convection thermique développée dans les coordonnées elliptiques avec celui obtenu dans les coordonnées cylindriques. Pour un écoulement axial et uniforme, une convection forcée thermiquement développée dans un espace annulaire cylindrique, un cylindre intérieur chauffé (avec un flux de chaleur constant) et un cylindre extérieur isolé, la température adimensionnelle est :

$$T(r, z) = \left(\frac{2R_i}{R_o^2 - R_i^2} \right) \left(\frac{z}{Re Pr} \right) + \frac{R_i r^2}{2K(R_o^2 - R_i^2)} - \frac{R_i R_o^2 \ln(r)}{K(R_o^2 - R_i^2)} - \frac{R_i R_o^2}{K(R_o^2 - R_i^2)} \left[\frac{R_o^2 + R_i^2}{4R_o^2} + \frac{1}{2} + \frac{R_i^2 \ln(R_i) - R_o^2 \ln(R_o)}{R_o^2 - R_i^2} \right] \quad (98)$$

Et le nombre de Nusselt moyen :

$$Nu = \frac{4K(R_o^2 - R_i^2)^2}{4R_i R_o^4 \ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) - R_i^5 - 3R_i R_o^4 + 4R_i^3 R_o^2} \quad (99)$$

Où les dimensions géométriques sont normalisées par le diamètre hydraulique (deux fois la différence entre les rayons dimensionnels extérieur et intérieur). La température dans l'équation (98) et le nombre de Nusselt dans l'équation (99) sont équivalents à ceux obtenus par Lauriat et Ghafir [33] pour le même problème. On considère la convection forcée, avec un écoulement uniforme, dans l'espace annulaire elliptique (mousse métallique/eau), avec une conductivité thermique adimensionnelle $K = 11.17$, les rayons elliptiques $\varepsilon_i = 4$ and $\varepsilon_o = 4.6934$ (avec ces rayons, les ellipses sont des cercles), $Re = 200$ et la normalisation du nombre de Nusselt pour le rendre basé sur le diamètre hydraulique. Le nombre de Nusselt thermiquement développé est égal à 70.816. Les rayons cylindriques non dimensionnels correspondants sont $R_i = 0.5$ et $R_o = 1$ et le nombre de Nusselt moyen de l'espace annulaire cylindrique (de l'équation (99)) est égal à 70.815. Pour les mêmes rayons adimensionnels et $K = 1$, le nombre de Nusselt thermiquement développé égal à 6.3372 qui est très proche de la valeur 6.3345 obtenue par Chikh et al. [24]. La même valeur est obtenue de la Figure 3 de la référence [26] et la Figure 3b de la référence [27] pour le même rapport d'aspect et la limite du milieu continue (nombre de Knudsen égal à zéro). Ces comparaisons des résultats représentent une validation analytique du résultat elliptique quand les ellipses convergent asymptotiquement vers des cercles.

4.4. Simulation numérique tridimensionnelle et l'approximation de l'écoulement axial uniforme

Un modèle mathématique non dimensionnel de la convection forcée en développement thermique, avec des propriétés physiques constantes du système (mousse métallique/fluide), avec l'utilisation du modèle d'écoulement de Darcy-Forchheimer-Brinkman, est représenté par les équations différentielles aux dérivées partielles suivantes, dans les coordonnées elliptiques :

L'équation de continuité :

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (100)$$

L'équation de mouvement suivant la direction radiale elliptique :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \\ & \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - \frac{2}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2 \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(h_2 \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{2}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] - \\ & \frac{V_\varepsilon}{Re Da} - \frac{C_f V_\varepsilon \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2}}{\sqrt{Da}} \end{aligned} \quad (101)$$

L'équation du mouvement suivant la direction angulaire elliptique :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \\ & \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) - \frac{2}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2 \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] - \\ & \frac{V_\eta}{Re Da} - \frac{C_f V_\eta \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2}}{\sqrt{Da}} \end{aligned} \quad (102)$$

L'équation du mouvement suivant la direction axiale elliptique :

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{V_z}{Re Da} - \frac{C_f V_z \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2}}{\sqrt{Da}}$$

$$+ \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2 h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] \quad (103)$$

L'équation d'énergie :

$$\begin{aligned} & (\rho C_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial (h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] \\ & = \frac{1}{Re Pr h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (104)$$

Les conditions initiales sont l'écoulement axial uniforme et la température d'entrée, donc :

$$\text{À } t = 0, \quad V_\varepsilon = V_\eta = 0, \quad V_z = 1, \quad T = 0 \quad (105)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{À } \varepsilon = 0.8, \quad V_\varepsilon = V_\eta = V_z = 0, \quad -\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1 \quad (106)$$

$$\text{À } \varepsilon = 1.4, \quad V_\varepsilon = V_\eta = V_z = 0, \quad -\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (107)$$

$$\text{À } z = 0, \quad V_\varepsilon = V_\eta = 0, \quad V_z = 1, \quad T = 0 \quad (108)$$

$$\text{À } z = 100, \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (109)$$

Il est à noter que, pour les paramètres de contrôle considérés, les termes dominants dans les équations de mouvement sont les termes de Darcy et de gradient de pression. Les termes de Forchheimer sont plus petits que les termes dominants. En outre, les termes convectifs sont beaucoup plus petits que les termes dominants. En outre, les termes diffusives de Brinkmann ne sont significatifs que dans les couches très minces à proximité des parois solides de l'espace annulaire. Les équations aux dérivées partielles de la continuité, de mouvement et d'énergie, avec les conditions initiales et aux limites spécifiées sont résolues par la méthode des volumes finis avec un maillage (42×84×202) et un pas du temps égal à $\Delta t = 10^{-4}$. Les détails numériques sont les mêmes que ceux de la méthode numérique utilisée dans la partie 2 de cette thèse et ils sont présentés dans l'annexe D.

Les résultats de la simulation numérique ont révélé que le champ d'écoulement est essentiellement axial avec les composantes radiale et angulaire de la vitesse négligeables dans tout l'espace annulaire. En outre, la vitesse axiale est presque uniforme sur toute section transversale de l'écoulement. La distribution, à la section transversale de la sortie d'espace annulaire, est illustrée dans la Figure 13.



Fig. 13. Vitesse axiale à la section de sortie de l'espace annulaire. $Re = 200$.

La vitesse axiale est égale à 1.0006 dans toute la section sauf aux points numériques les plus proches des parois où elle est très proche de 1. Aux points numériques les plus proches du cylindre intérieur ($0.966 \leq V_z \leq 0.985$). Tandis qu'aux points numériques les plus proches du cylindre extérieur ($0.992 \leq V_z \leq 0.994$). La distribution de la température de la simulation numérique tridimensionnelle est identique à celle obtenue avec la solution analytique. A la sortie de l'espace annulaire, elle est identique à celle de la Figure 3. Les très petites différences entre le champ thermique obtenu avec la simulation numérique tridimensionnelle et celui de la solution analytique ne peuvent pas être discernées graphiquement. Les résultats de la simulation numérique tridimensionnelle justifient l'approximation de l'écoulement axial uniforme. Par conséquent, le champ d'écoulement est bien approché par l'équation (7) et le champ thermique peut être obtenu numériquement, en utilisant la méthode des volumes finis déjà mentionnée dans la section 4.2. L'équation d'énergie en régime transitoire est alors :

$$[\rho C_p]_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(V_z T)}{\partial z} = \frac{1}{RePr} \left[\frac{K}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right) + \frac{K \partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (110)$$

avec les mêmes conditions aux limites imposées et les conditions initiales spécifiées. Pour $Re=200$, le champ thermique stationnaire obtenu avec la solution de l'équation (110) est

identique à la solution analytique. Par conséquent, pour ce cas, les trois champs thermiques stationnaires obtenus avec la simulation numérique tridimensionnelle, la simulation numérique avec un écoulement axial uniforme et la solution analytique sont identiques.

4.5. Effet du nombre de Reynolds sur le développement thermique

Deux autres cas du système (mousse métallique/eau) avec $Re=500$ et 1000 ont été résolus seulement avec la solution analytique et la solution numérique avec l'écoulement axial uniforme. Dans les deux cas, la solution numérique a reproduit qualitativement et quantitativement la solution analytique. Par souci de concision, seules les distributions des champs thermiques à la sortie d'espace annulaire sont présentées dans les Figures 14 et 15. Comme on s'y attendait, la variation spatiale de la température adimensionnelle est qualitativement comparable à celle du cas de $Re=200$ (Figure 3), présentée dans la section 4.1. Toutefois, le niveau de la température adimensionnelle augmente avec la diminution du nombre de Reynolds. Ceci est expliqué par le fait que le premier terme du côté droit de l'équation. (59) est inversement proportionnel au nombre de Reynolds (voir l'équation (27)).

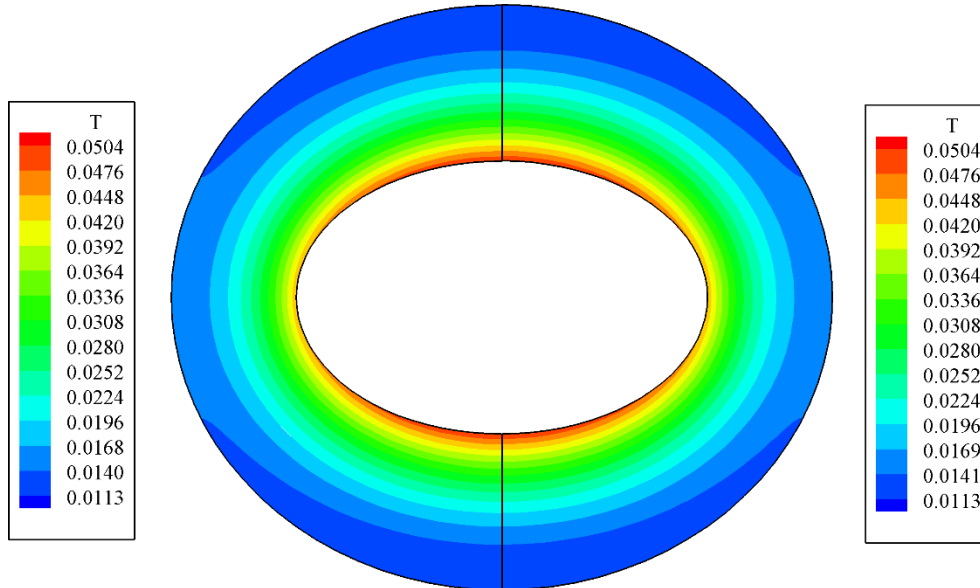


Fig. 14. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite)
à $z = 100$, $Re = 500$.

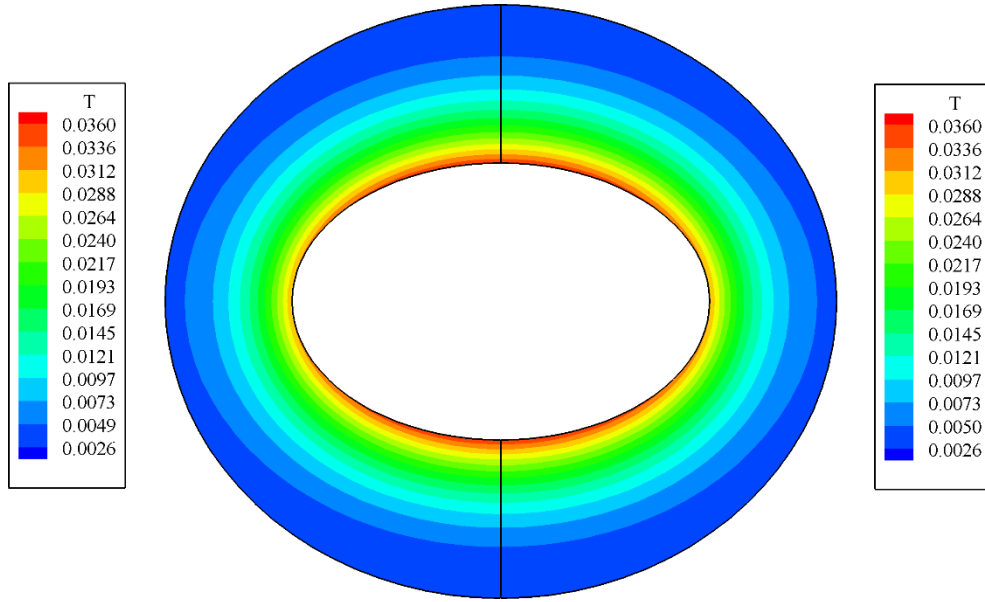


Fig. 15. Champs thermiques analytique (à gauche) et numérique (à droite)
à $z = 100$, $Re = 1000$.

Dans la Figure. 16, les nombres de Nusselt axiaux des trois cas considérés sont comparés. On voit que l'augmentation du nombre de Reynolds augmente la longueur d'entrée thermique et le niveau du nombre de Nusselt axial dans la zone de développement thermique. Le résultat de développement thermique peut être expliqué par l'effet combiné des paramètres contrôlant la décroissance exponentielle du niveau de la température $T_2(\varepsilon, \eta, z)$. La conduction axiale est beaucoup plus petite que la convection axiale. Par conséquent, si la diffusion axiale très faible, représentée par la dérivée seconde axiale ($\frac{d^2H}{dz^2}$), est négligé dans l'équation (41), la décroissance exponentielle $e^{\gamma_2 z} \left[1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)((L/a) - z)} \right]$ dans l'équation (59) est remplacée par $e^{\frac{-4 q_m^{2r} K z}{Re Pr V_z}}$. En notant que les valeurs propres q_m^{2r} ne dépendent que des rayons elliptiques qui sont fixes, il est évident que la décroissance exponentielle est contrôlée par le rapport $\frac{K}{Re Pr}$. Plus ce rapport est élevé plus la longueur d'entrée thermique est petite. Par conséquent, l'augmentation de la conductivité thermique adimensionnelle ou la réduction du produit des nombres de Reynolds et de Prandtl entraîne une réduction de la longueur d'entrée thermique adimensionnelle. Ceci est en accord avec ce qui est établi dans le transfert thermique classique : la longueur d'entrée thermique adimensionnelle de la convection forcée en développement thermique dans les conduites est proportionnelle au produit des nombres de Reynolds et de Prandtl [35]. Dans la zone thermiquement développée (où $T_2(\varepsilon, \eta, z) = 0$), le nombre de Nusselt est indépendant du

produit des nombres de Reynolds et de Prandtl, mais il est proportionnel à la conductivité thermique adimensionnelle de la mousse métallique. Ceci peut être facilement prouvé en examinant les équations. (59), (61) et (62) et en notant que toutes les constantes de $T_1(\varepsilon, \eta)$ sont inversement proportionnelles à la conductivité thermique adimensionnelle.

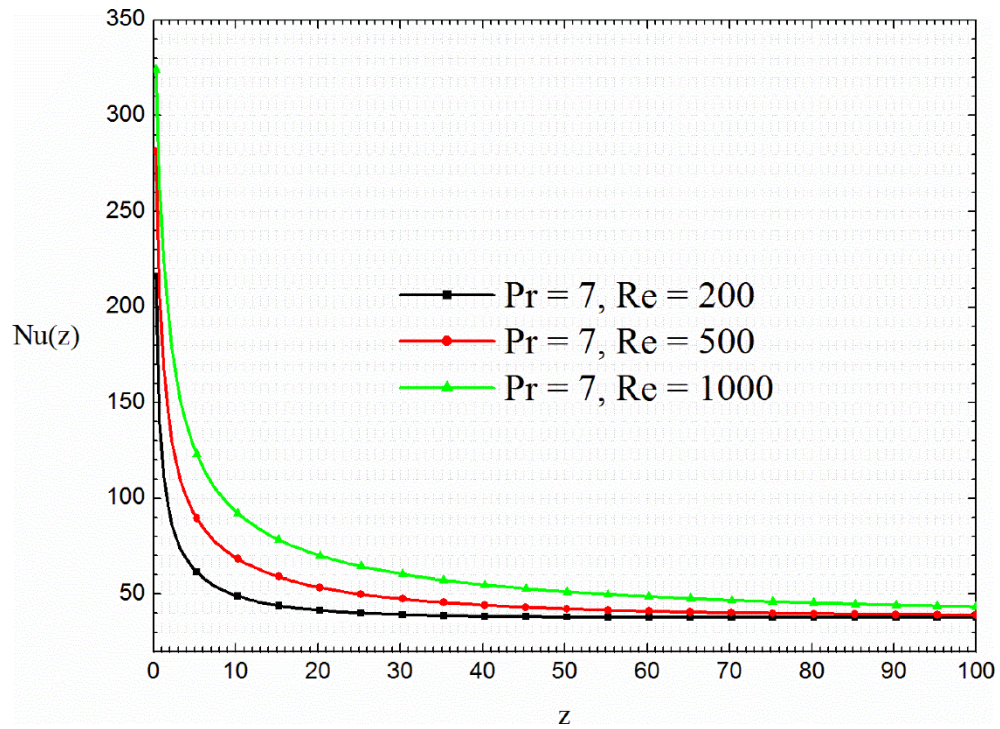


Fig. 16. Effet du nombre de Reynolds sur le développement thermique.

Conclusion

Cette étude présente les aspects physiques et mathématiques de la convection forcée tridimensionnelle, stationnaire, laminaire en développement thermique d'un écoulement d'eau dans un espace annulaire elliptique. L'espace annulaire est vide ou rempli de mousse d'aluminium de 20 PPI. Le champ d'écoulement est prouvé d'être axial et uniforme. L'écoulement à l'entrée est isotherme. Le cylindre intérieur est uniformément chauffé et le cylindre extérieur est adiabatique. La solution a été obtenue analytiquement et numériquement.

Pour $Re=200$, avec les paramètres géométriques, dynamiques et thermiques considérés, il a été trouvé que la convection dans l'espace annulaire rempli de mousse atteint le développement thermique au-delà de 40% de la longueur de l'espace annulaire ; Toutefois, la convection dans l'espace annulaire vide reste en développement thermique tout au long de l'espace annulaire. Le nombre de Nusselt moyen de l'espace annulaire rempli de mousse est 5.88 fois celui d'espace annulaire vide. L'augmentation du nombre de Reynolds à 500 et 1000, augmente la longueur d'entrée thermique. Dans la zone du développement thermique, le nombre de Nusselt axial est plus élevé quand le nombre de Reynolds est augmenté.

La simulation numérique de la convection en développement thermique dans l'espace annulaire rempli de mousse reproduit la solution analytique avec un excellent accord. Une telle reproduction est considérée comme une validation des solutions numériques et une preuve de l'adéquation de la résolution spatiale du maillage numérique utilisé.

Les résultats de la convection forcée présentés serviront un état de référence pour l'étude de la convection mixte en développement hydrodynamique et thermique (la Partie 2) dans le même espace annulaire rempli de la même mousse métallique avec le même maillage.

Références

- [1] W. Thomson, On the division of space with minimum partitional area, *Acta Mathematica* 11 (1888) 121-134.
- [2] D. Weaire, R. Phelan, A counter-example to Kelvin conjecture on minimal surfaces, *Philosophical Magazine Letters*, Vol 69. Issue 2 (1994) 107-110.
- [3] Metal foam from space to earth.
<http://www.creax.com/wp-content/uploads/creax/Bekaert-CREAX-MetalFoam.pdf>.
- [4] DUOCEL[®] Aluminum foam, http://www.ergaerospace.com/literature/erg_duocel.pdf.
- [5] A. Liebscher, C. Redenbach, Statistical analysis of the local strut thickness of open cell foams, *Image Analysis and Stereology*, Vol 32. No 1 (2013) 1-12.
- [6] V.V. Calmidi, Transport phenomena in high porosity fibrous metal foams. Ph.D. Thesis, University of Colorado, 1998.
- [7] K.K. Bodla, J.Y. Murthy, S.V. Garimella, Microtomography-based simulation of transport through open-cell metal foams, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 58 (2010) 527-544.
- [8] V.V. Calmidi, R.L. Mahajan, The effective thermal conductivity of high porosity fibrous metal foams, *ASME Trans. J. Heat Transfer* 121 (1999) 466-471.
- [9] V.V. Calmidi, R.L. Mahajan, Forced convection in high porosity metal foams, *Journal of Heat Transfer*, Vol. 122 (2000) 557-565.
- [10] C.Y. Zhao, T. Kim, T.J. Lu, H.P. Hodson, Thermal transport phenomena in porous metal foams and sintered beds, Final report, Micromechanics Centre & Whittle Lab, Department of Engineering, University of Cambridge, August 2001.
www.fuelcellmarkets.com/content/.../white_paper8.pdf

- [11] H.J. Xu, Z.G. Qu, W.Q. Tao, Thermal transport analysis in parallel-plate channel filled with open-celled metallic foams, *International Communications in Heat and Mass Transfer* 38 (2011) 868-873.
- [12] K.P. Carpenter, A.K. da Silva, A combined hydrothermal characterization of high-porosity metal foam test sections with discrete pore-size gradients, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 77 (2014) 770-776.
- [13] S. Mancin, C. Zilio, A. Diani, L. Rossetto, Air forced convection through metal foams: Experimental results and modeling, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 62 (2013) 112-123.
- [14] S. Guarino, G. Rubino, V. Tagliaferri, N. Ucciardello, Thermal behavior of open cell aluminum foams in forced air: Experimental analysis, *Measurement* 60 (2015) 97-103.
- [15] S.S. Feng, J.J. Kuang, T. Wen, T.J. Lu, K. Ichimiya, An experimental and numerical study of finned metal foam heat sinks under impinging air jet cooling, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 77 (2014) 1063-1074.
- [16] Z. Xiao, Y. Zhao, Heat transfer coefficient of porous copper with homogeneous and hybrid structures in active cooling, *Journal of Materials Research*, Vol 28. No 17 (2013) 2545-2553.
- [17] S. Mahjoob, K. Vafai, A synthesis of fluid and thermal transport models for metal foam heat exchangers, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51 (2008) 3701-3711.
- [18] C. Yang, K. Ando, A. Nakayama, A Local thermal non-equilibrium analysis of fully developed forced convective flow in a tube filled with a porous medium, *Transp Porous Med* 89 (2011) 237-249.
- [19] C. Yang, F. Kuwahara, W. Liu, A. Nakayama, Thermal non-equilibrium forced convective flow in an annulus filled with a porous medium. *The Open Transport Phenomena Journal* 3 (2011) 31-39.

- [20] M.S. Phanikumar, R.L. Mahajan, Non-Darcy natural convection in high porosity metal foam, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45 (2002) 3781-3793.
- [21] R.S. Matos, J.V.C. Vargas, J.V.C. Laursen, F.E.M. Saboya, Optimisation study and heat transfer comparison of staggered circular and elliptic tubes in forced convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 44 (2001) 3953-3961.
- [22] K. Zerari, M. Afrid, D. Groulx, Forced and mixed convection in the annulus between two horizontal confocal elliptical cylinders, *International Journal of Thermal Sciences* 74 (2013)126-144.
- [23] S. Chikh. A. Boumedien, K. Bouhadef, G. Lauriat, Analytical solution of non-Darcian forced convection in an annular duct partially filled with a porous medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 38 No. 9 (1995) 1543-1551.
- [24] S. Chikh. A. Boumedien, K. Bouhadef, G. Lauriat, Amélioration du transfert thermique par un dépôt poreux sur la paroi d'un échangeur tubulaire, *Revue Générale de Thermique* 36 (1997) 41-50.
- [25] Z.G. Qu, H.J. Xu 1, W.Q. Tao, Fully developed forced convective heat transfer in an annulus partially filled with metallic foams: An analytical solution, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 55 (2012) 7508–7519.
- [26] S.M.H. Hashemi, S.A. Fazeli, H. Shokouhmand, Fully developed non-Darcian forced convection slip-flow in a micro-annulus filled with a porous medium: Analytical solution, *Energy Conversion and Management* 52 (2011) 1054-1060.
- [27] K. Wang, F. Tavakkoli, K. Vafai, Analysis of gaseous slip flow in a porous micro-annulus under local thermal non-equilibrium condition - An exact solution, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 89 (2015) 1331-1341.
- [28] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, (3rd ed.), Springer-Verlag, New York, 2006.

- [29] G. Blanch, Mathieu Functions, in: M. Abramowitz, I.A. Stegun (Eds.), Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Applied Mathematical Series-55, Tenth Printing. National Bureau of Standards, 1972, pp. 722-750.
- [30] L. Chaos-Cador, E. Ley-Koo, Mathieu functions revisited: matrix evaluation and generating functions, *Revista Mexicana de Física* 48 (1) (2002) 67-75.
- [31] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, Cambridge University press, 1986.
- [32] R.W. Fox, A.T. McDonald, Introduction to Fluid Mechanics. Third ed., John Wiley & Sons, 1985.
- [33] G. Lauriat, R. Ghafir, Forced Convective Heat Transfer in Porous Media. Handbook of Porous Media, edited by K. Vafai and H.A. Hadim, Marcel Dekker Inc, New York (2000) 201-268.
- [34] S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [35] M.N. Özisik. Heat Transfer A Basic Approach. McGraw-Hill, New York, 1985.

Annexe A

Solution de $T_{1h}(\varepsilon, \eta)$ par la séparation des variables et la détermination des constantes de $T_1(\varepsilon, \eta)$.

Les solutions générales des équations (36) et (37) sont :

$$g(\eta) = C_5 \cos(n\eta) + C_6 \sin(n\eta) \quad (\text{A.1})$$

$$f(\varepsilon) = C_7 \sinh(n\varepsilon) + C_8 \cosh(n\varepsilon) \quad (\text{A.2})$$

Sachant que $g(\eta)$ doit satisfaire les conditions de symétrie sur les axes elliptiques, $\frac{dg}{d\eta} = 0$ à $\eta=0, \pi/2, \pi$ et $3\pi/2$, cette condition est satisfaite si $C_6 = 0$ et $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ ($n = 0$ n'est pas considéré car il correspond au produit $f(\varepsilon)g(\eta)$ égale à une constante et une constante est déjà présente (C_3) dans la solution particulière de l'équation (33)). La solution complémentaire $T_{1h}(\varepsilon, \eta)$ est alors réécrite comme l'équation (38). Pour chaque valeur de n , la constante E_n représente le produit $C_5 C_7$ et la constante F_n représente le produit $C_5 C_8$. $T_1(\varepsilon, \eta)$ de l'équation (39) est alors obtenue et elle doit satisfaire les conditions aux limites radiales des équations. (9) et (10), donc :

$$-\frac{K \left[\frac{2P_i \sinh(2\varepsilon_i)}{8KS} + C_2 + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \cos(n\eta) [nE_n \cosh(n\varepsilon_i) + nF_n \sinh(n\varepsilon_i)] \right]}{\sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}} = 1 \quad (\text{A.3})$$

$$-\frac{K \left[\frac{2P_i \sinh(2\varepsilon_o)}{8KS} + C_2 + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \cos(n\eta) [nE_n \cosh(n\varepsilon_o) + nF_n \sinh(n\varepsilon_o)] \right]}{\sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_o)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}} = 0 \quad (\text{A.4})$$

L'équation (A.4) est satisfaite si :

$$C_2 = -\frac{2P_i \sinh(2\varepsilon_o)}{8KS} \quad (\text{A.5})$$

$$F_n = -E_n \left[\frac{\cosh(n\varepsilon_o)}{\sinh(n\varepsilon_o)} \right] \quad (\text{A.6})$$

Remplaçant les équations. (A.5) et (A.6) dans (A.3), mène à :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2,4,6}^{\infty} n E_n \cos(n\eta) \left[\cosh(n\varepsilon_i) - \frac{\cosh(n\varepsilon_o)}{\sinh(n\varepsilon_o)} \sinh(n\varepsilon_i) \right] \\ &= \frac{P_i}{4KS} (\sinh(2\varepsilon_o) - \sinh(2\varepsilon_i)) - \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon_i)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Multipliant l'équation. (A.7) par $\cos(m\eta)d\eta$ et intégrant entre les limites $\eta = 0$ et 2π utilisant la propriété d'orthogonalité des fonctions cosinus conduit à la valeur de E_n . Avec la détermination des E_n , les F_n peuvent être déterminées à partir de l'équation. (A.6).

Enfin, l'utilisation de $T_{1m} = 0$ permet la détermination de la constante C_3 . Toutes les constantes sont fournies dans le Tableau 3 et évaluées dans le Tableau 4.

Annexe B

Détermination des valeurs caractéristiques a_{2r} et les vecteurs caractéristiques A_{2n}^{2r}

Remplaçant l'équation. (47) dans l'équation. (45), avec $a = a_{2r}$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [a_{2r} - 4n^2] A_{2n}^{2r} \cos(2n\eta) - 2q \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2\eta) \cos(2n\eta) = 0 \quad (\text{B.1})$$

Avec l'identité :

$$\cos(2\eta) \cos(2n\eta) = \frac{1}{2} \cos(2(n+1)\eta) + \frac{1}{2} \cos(2(n-1)\eta) \quad (\text{B.2})$$

L'équation. (B.1) devient:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} [a_{2r} - 4n^2] A_{2n}^{2r} \cos(2n\eta) - q \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n+1)\eta) \\ - q \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n-1)\eta) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Remplaçant n par $(m-1)$ dans les séries $\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n+1)\eta)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n+1)\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m-2}^{2r} \cos(2m\eta) \quad (\text{B.4})$$

Avec le choix $A_{-2}^{2r} = 0$ et le changement de l'index m par n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n+1)\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n-2}^{2r} \cos(2n\eta) \quad (\text{B.5})$$

Dans la série $\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n-1)\eta)$, remplaçant l'index n par $(m+1)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n-1)\eta) = \sum_{m=-1}^{\infty} A_{2m+2}^{2r} \cos(2m\eta) \quad (\text{B.6})$$

Avec le changement de l'index m par n dans le côté droite d'équation. (B.6) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}^{2r} \cos(2(n-1)\eta) = A_0^{2r} \cos(2\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+2}^{2r} \cos(2n\eta) \quad (\text{B.7})$$

Utilisant les équations. (B.5) et (B.7) dans l'équation. (B.3) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(a_{2r} - 4n^2) A_{2n}^{2r} - q A_{2n+2}^{2r} - q A_{2n-2}^{2r}] \cos(2n\eta) - q A_0^{2r} \cos(2\eta) = 0 \quad (\text{B.8})$$

Pour chaque valeur de r , nous avons une équation de type (B.8). Le système des équations

(B.8) peut être écrit dans un format d'une matrice tridiagonale symétrique tel que présenté

dans l'équation. (49) avec les composantes des vecteurs caractéristiques satisfaisant à la

$$\text{relation suivante : } 2(A_0^{2r})^2 + (A_2^{2r})^2 + (A_n^{2r})^2 + \dots + (A_{\infty}^{2r})^2 = 1 \quad (\text{B.9})$$

Cette équation indique que les vecteurs caractéristiques sont orthonormés.

Annexe C

Fonctions radiales normalisées et fonctions angulaires de Mathieu.

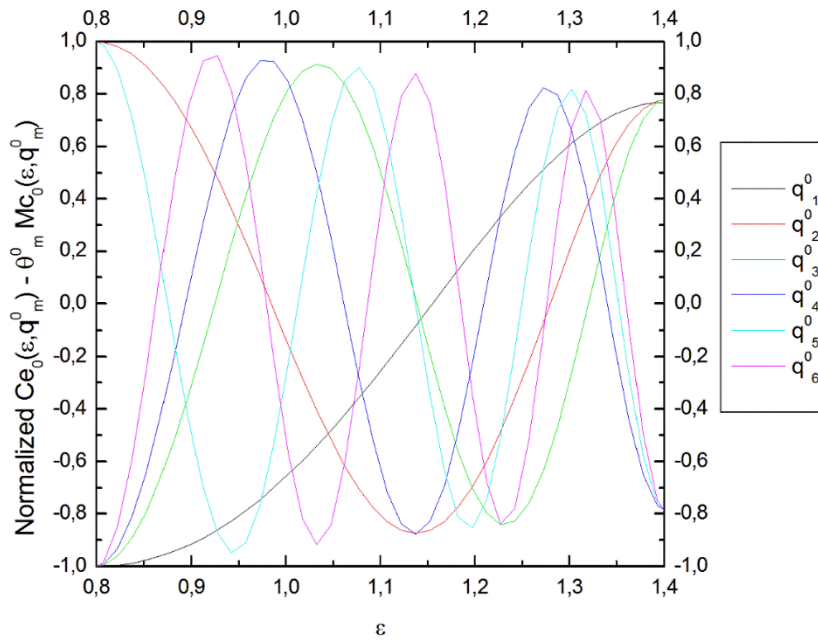


Fig. C.1. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 0$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

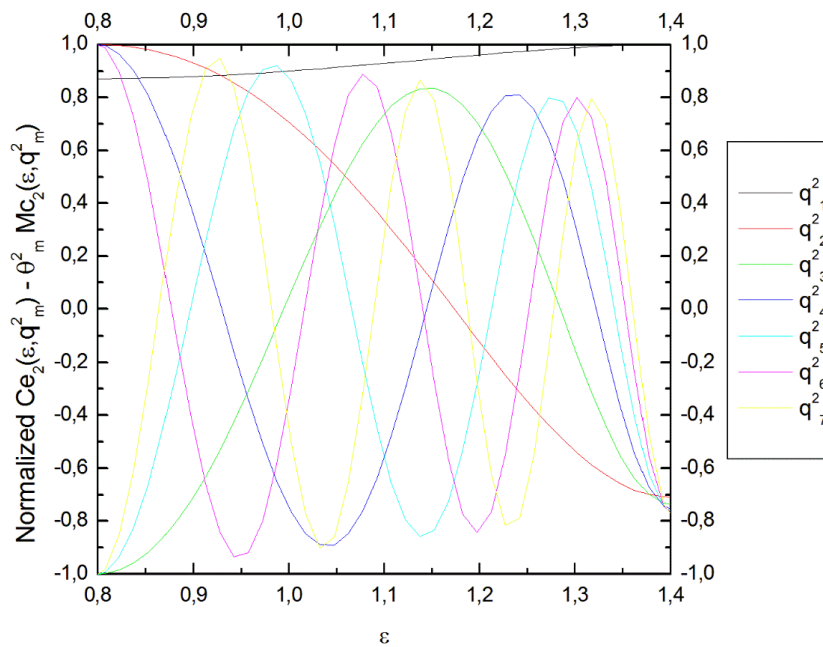


Fig. C.2. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 1$. $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 .

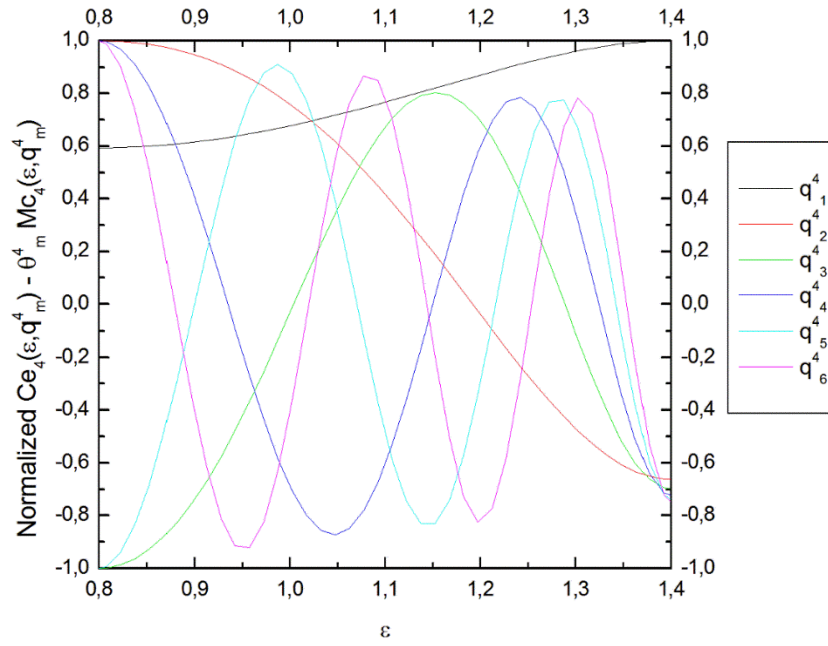


Fig. C.3. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 2$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

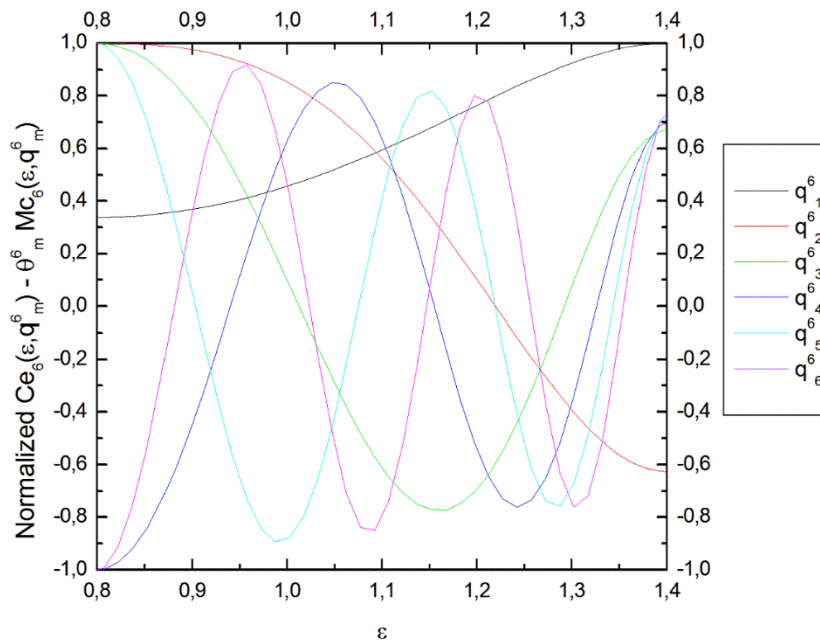


Fig. C.4. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 3$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

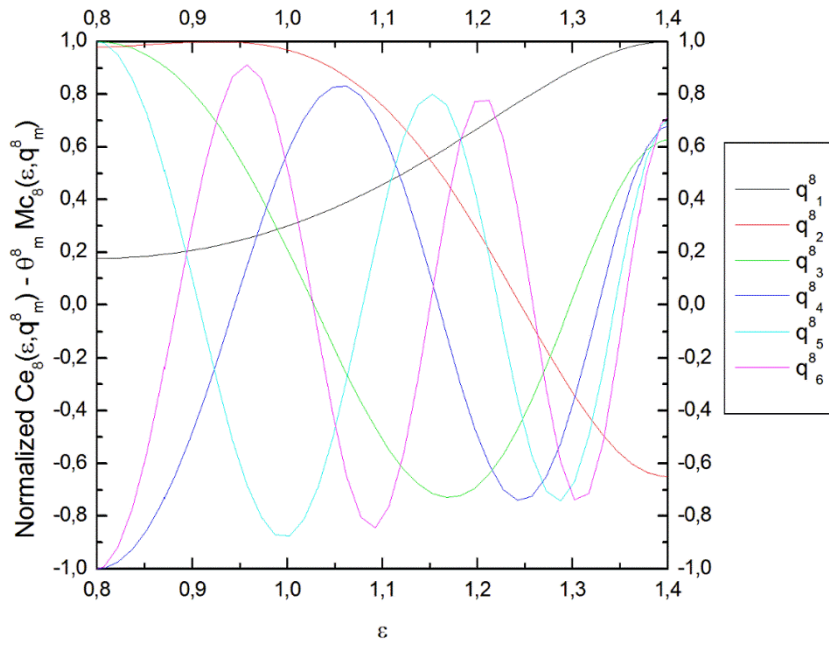


Fig. C.5. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 4$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

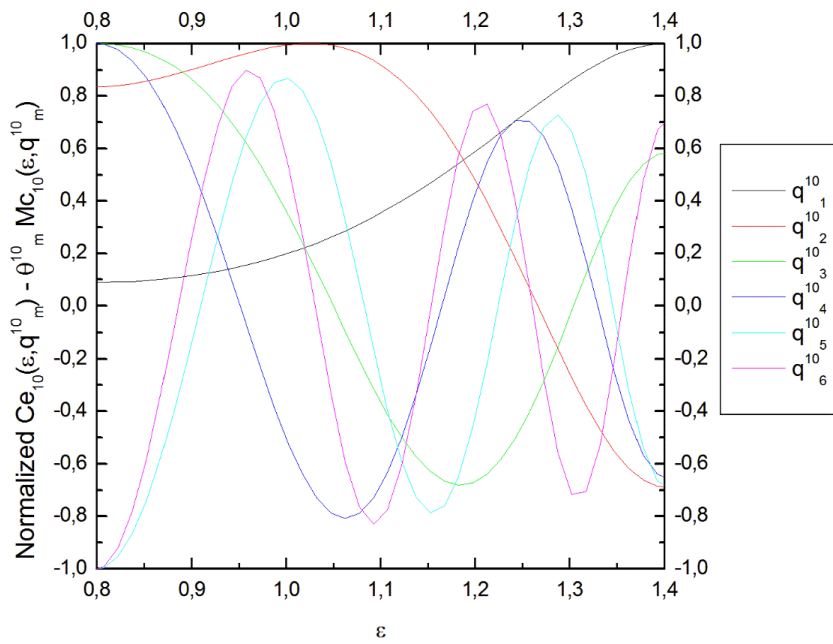


Fig. C.6. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 5$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

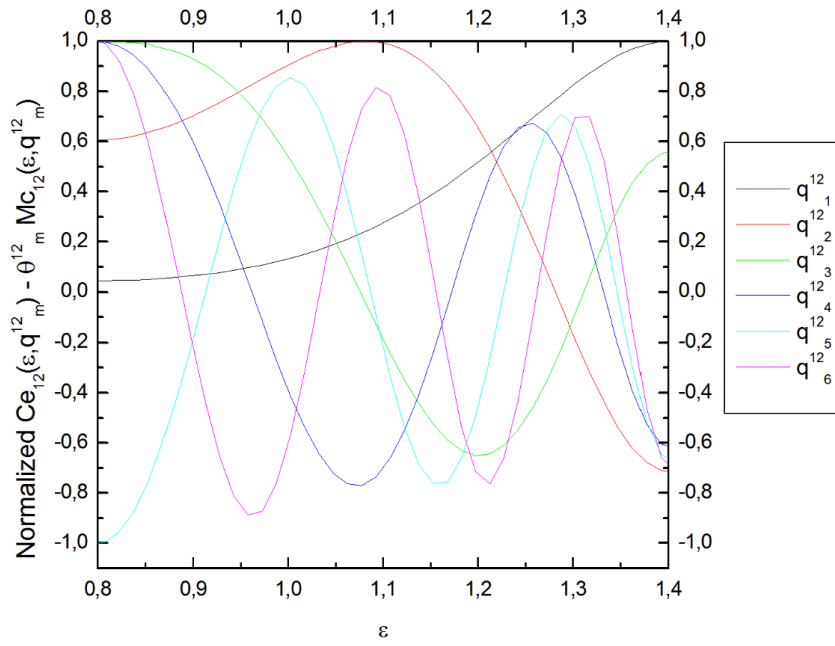


Fig. C.7. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 6$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

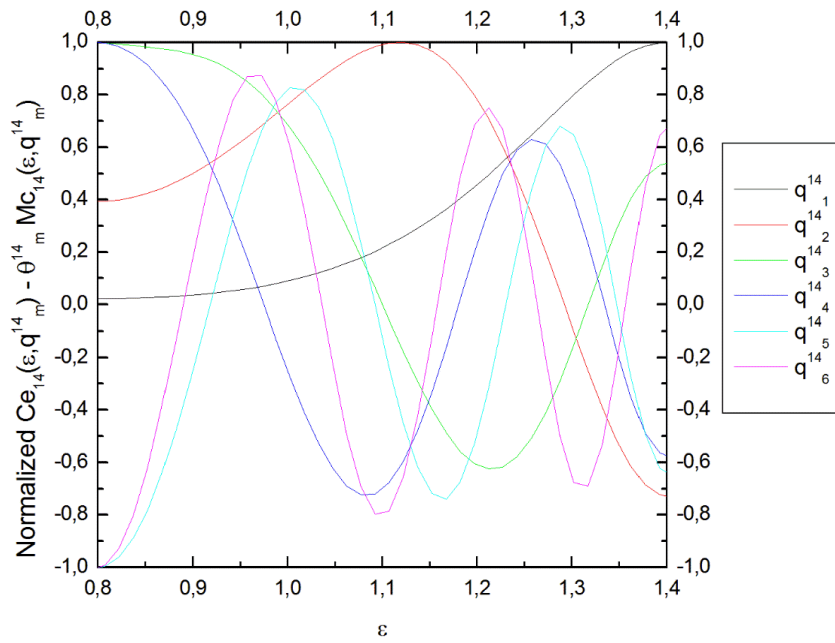


Fig. C.8. Fonction radiale normalisée de Mathieu.
 $r = 7$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

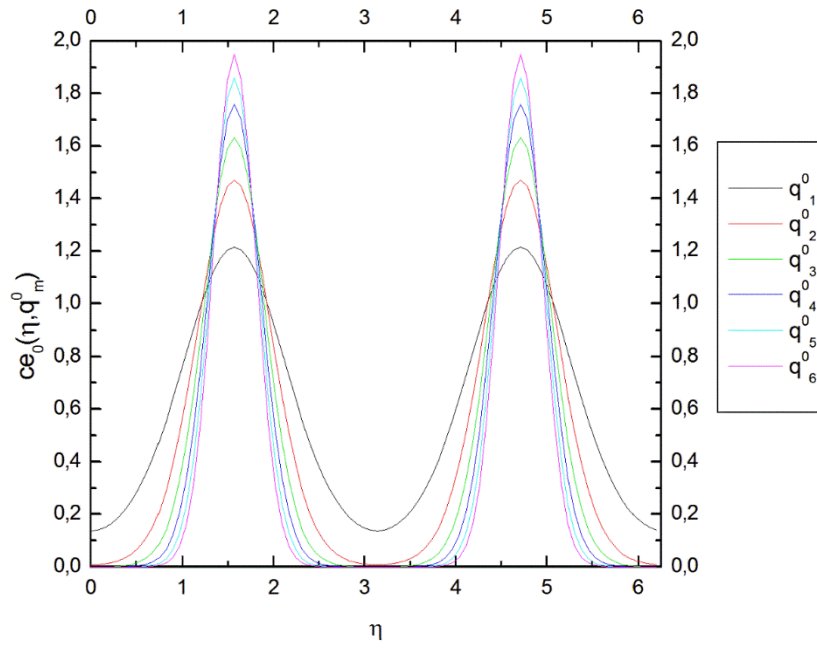


Fig. C.9. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 0$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

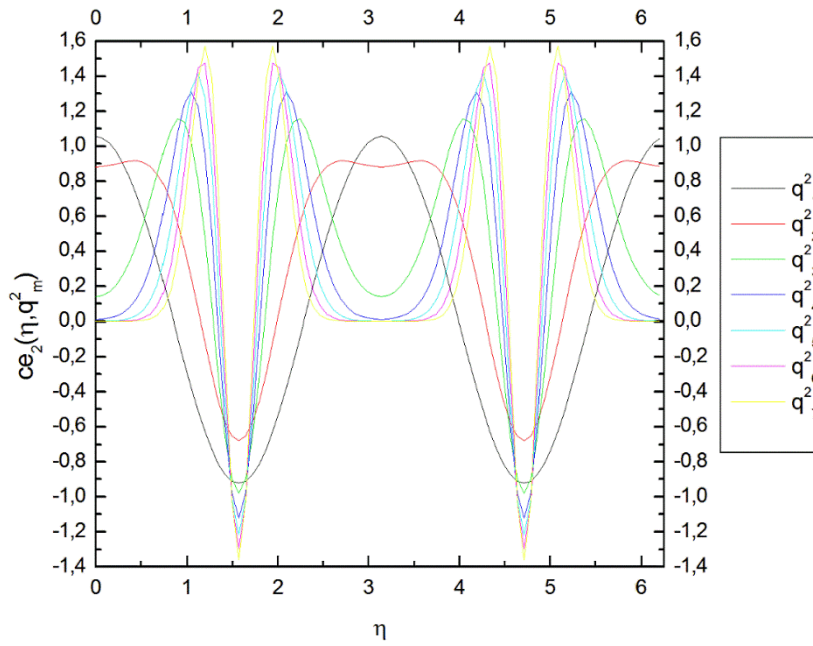


Fig. C.10. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 1$. $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 .

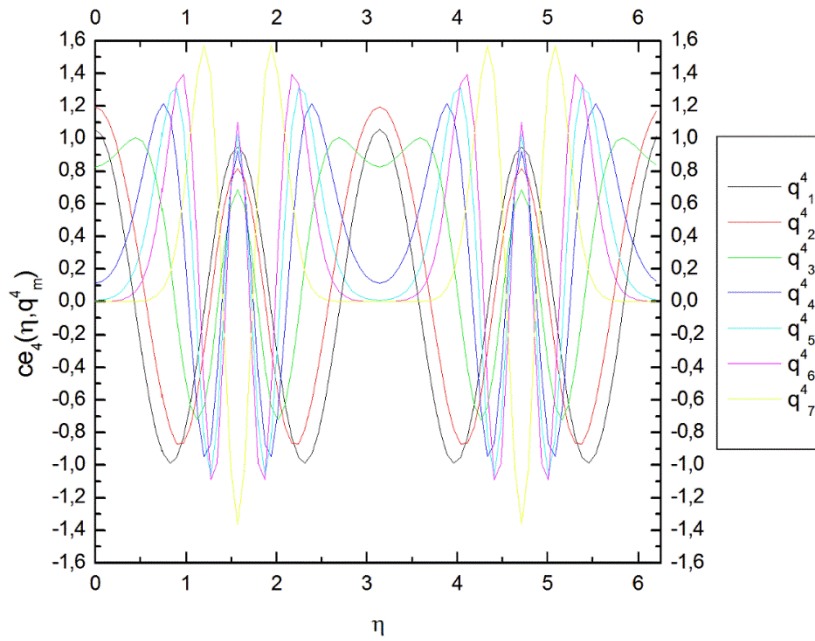


Fig. C.11. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 2$. $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7 .

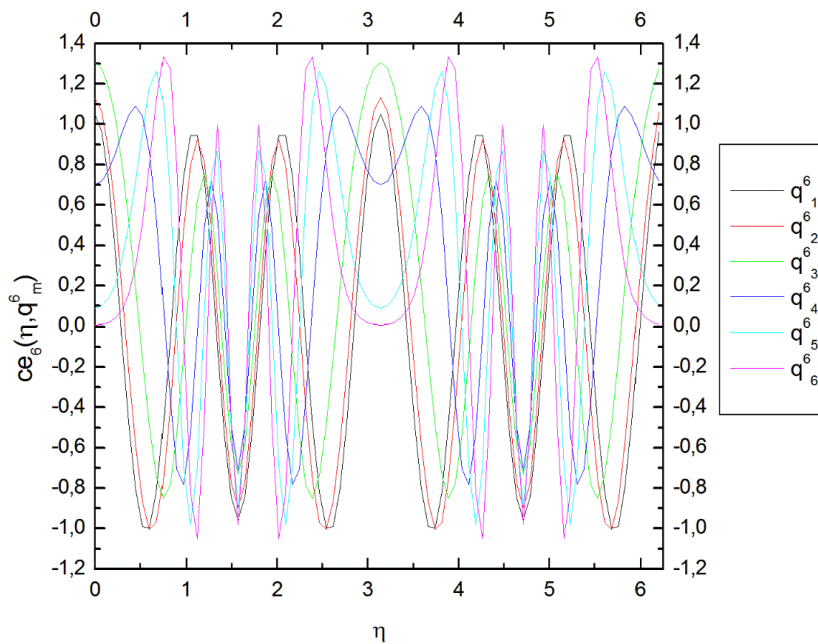


Fig. C.12. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 3$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

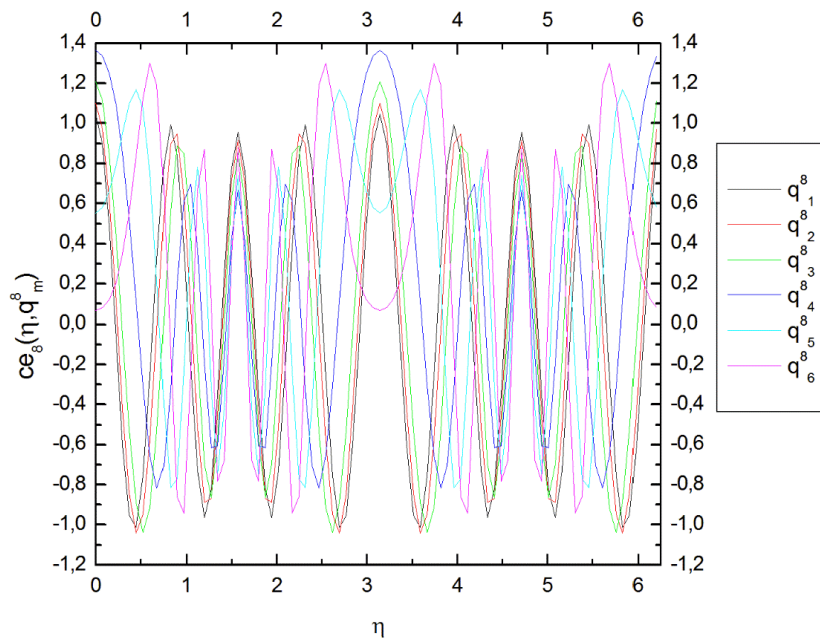


Fig. C.13. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 4$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

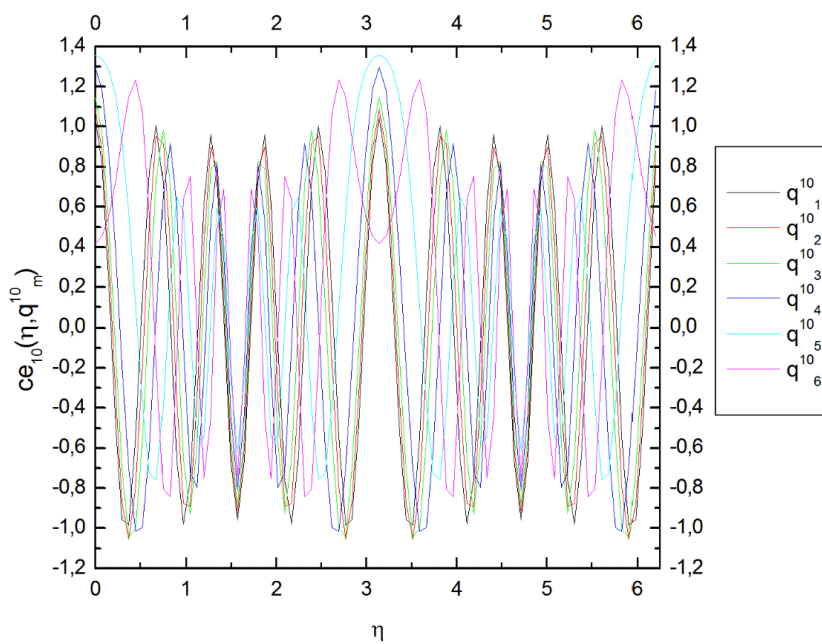


Fig. C.14. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 5$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

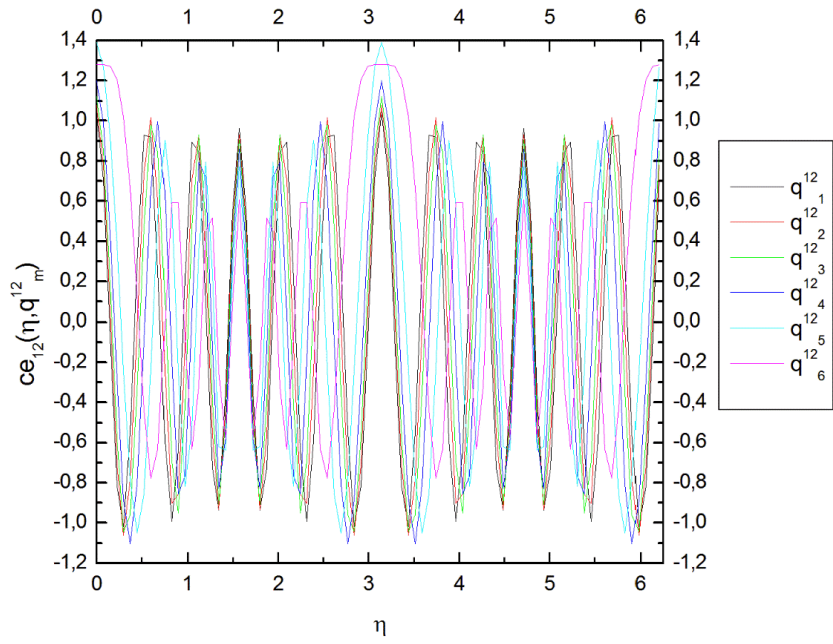


Fig. C.15. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 6$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

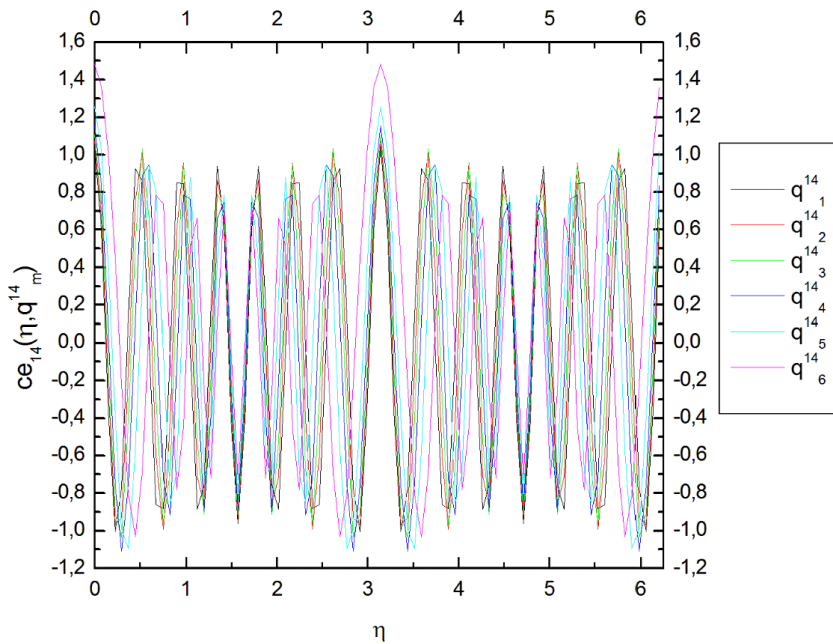


Fig. C.16. Fonction angulaire de Mathieu.
 $r = 7$. $m = 1, 2, 3, 4, 5$ et 6 .

Partie 2 :

Convection Mixte dans un Espace Annulaire Elliptique Incliné

Rempli par une Mousse Métallique.

Propriétés du Fluide dépendant de la Température

Nomenclature

a	Demi distance focale (m)
C_f	Coefficient de Forchheimer
C_p	Chaleur spécifique (J/kg.K)
d_f	Diamètre de fibre de la mousse métallique (m)
d_p	Diamètre de pore de la mousse métallique (m)
g	Accélération gravitationnelle = 9.81m/s ²
h	Coefficient du transfert de chaleur convectif (W/m ² .K)
h_1	Premier facteur d'échelle adimensionnel = $\sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}$
h_2	Deuxième facteur d'échelle adimensionnel = $\sqrt{\frac{\cosh(2\varepsilon)}{2} - \frac{\cos(2\eta)}{2}}$
h_3	Troisième facteur d'échelle adimensionnel = 1
k	Conductivité thermique du fluide (W/m.K)
L	Longueur d'espace annulaire (m)
P	Pression modifiée adimensionnelle
p	Pression statique adimensionnelle
\mathcal{P}_i	Périmètre adimensionnel du cylindre elliptique intérieur
q_w''	Flux de chaleur constant à la surface du cylindre intérieur (W/m ²)
S	Section droite adimensionnelle d'espace annulaire
t	Temps adimensionnel
T	Température adimensionnelle
V_ε	Vitesse radiale adimensionnelle
V_η	Vitesse azimutale adimensionnelle
V_z	Vitesse axiale adimensionnelle
z	Coordonnée axiale adimensionnelle

Symboles grecs

β	Coefficient d'expansion thermique = $1.8 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{K}$
Δt	Pas du temps (s)
ε	Coordonnée radiale elliptique

η	Coordonnée angulaire elliptique. Elle commence du côté droite de l'axe elliptique majeur et elle est positive dans la direction antihoraire
θ	Angle d'inclinaison
κ	Perméabilité de la mousse métallique (m^2)
μ	Viscosité dynamique adimensionnelle
ρ	Densité (Kg/m^3)
φ	Porosité de la mousse métallique = 0.92
Ψ	Fonction de courant adimensionnelle

Exposant

*	Quantité dimensionnelle
---	-------------------------

Indices

<i>eff</i>	Effective
<i>f</i>	Fluide
<i>i</i>	Surface du cylindre intérieur
<i>m</i>	Moyenne
<i>o</i>	Surface du cylindre extérieur
<i>s</i>	Solide
0	Entrée d'espace annulaire

Nombres adimensionnels

<i>Da</i>	Nombre de Darcy = $\frac{\kappa}{a^2}$
<i>Gr</i>	Nombre de Grashof = $\frac{g \beta q_w'' a^4}{\left(\frac{\mu_{f0}^*}{\rho_{f0}^*}\right)^2 k_{f0}^*}$
<i>K</i>	Conductivité thermique totale adimensionnelle du milieu poreux
<i>Nu</i> (η, z)	Nombre de Nusselt local
<i>Nu</i> (z)	Nombre de Nusselt axial
<i>Nu</i>	Nombre de Nusselt moyen
<i>Pr</i>	Nombre de Prandtl = $\frac{c_{p_f}^* \mu_{f0}^*}{k_{f0}^*}$
<i>Re</i>	Nombre de Reynolds = $\frac{\rho_{f0}^* V_{z0}^* a}{\mu_{f0}^*}$

Introduction

Les mousses métalliques à cellules ouvertes sont des milieux poreux avec une porosité élevée caractérisés par leur légèreté et propriétés thermiques désirables telles que l'amélioration du mixage, l'amélioration du transfert de chaleur convectif, la distribution uniforme de la chaleur et la conductivité thermique effective qui est beaucoup plus élevée à celle du fluide utilisé [1]. Elles ont été utilisées pour améliorer le transfert de chaleur dans les tuyaux et les canaux, mais avec un coût d'une forte augmentation de la perte de charge. Ces effets ont été discutés dans la bibliographie présentée dans l'introduction de la Partie 1 de la présente thèse. Les résultats présentés dans cette partie (Partie 1) doivent être considérés comme un état de référence pour ceux de la Partie 2 de la présente thèse.

La convection mixte améliorée dans les tuyaux et les canaux vides ou poreux est démontrée par de nombreuses études. Quelques exemples sont les études des références [2-6]. K. Velusamy et al. [2] ont étudié numériquement la flottabilité assistée d'un écoulement laminaire stationnaire entièrement développé dans un conduit vertical elliptique. Un flux de chaleur axial uniforme par unité de longueur du conduit est imposé avec une température circumférentielle uniforme de la paroi. Les résultats ont été obtenus pour un rapport d'aspect (λ) variant de 0.1 à 0.999 et un nombre de Rayleigh (Ra) allant de zéro jusqu'à la valeur d'inversion d'écoulement. Pour la convection mixte, une vitesse axiale élevée existe autour des foyers de la section transversale elliptique, ce qui conduit à une amélioration substantielle du transfert de chaleur dans cette région du conduit. Le rapport des facteurs du frottement de la convection mixte et forcée (f/f_0) augmente avec Ra. Pour $\lambda=0.999$, il augmente de 1.5 à 14 avec l'augmentation du Ra de 158.5 à 12589.25 et pour $\lambda=0.5$, il augmente de 2.5 à 18 avec l'augmentation du Ra de 794.33 à 19952.62. Le rapport des nombres de Nusselt de la convection mixte et forcée (Nu/Nu_0) augmente avec Ra. Pour $\lambda=0.999$, il augmente de 1.02 à 2 avec l'augmentation du Ra de 158.5 à 12589.25 et pour $\lambda=0.5$, il augmente de 1.05 à 2.2 avec l'augmentation du Ra de 316.23 à 19952.62. En outre, le rapport entre le nombre de Nusselt et le coefficient du frottement (Nu/f_0) est plus élevé lorsque λ est faible pour un conduit elliptique par rapport à un conduit circulaire, quelle que soit la valeur de Ra. Lorsque $Ra=3162.3$, le rapport est égal à 0.064, 0.07 et 0.1 pour $\lambda=0.999$, 0.5 et 0.1, respectivement.

N. Islam et al. [3] ont présenté une étude numérique et expérimentale de la convection mixte laminaire stationnaire dans un espace annulaire concentrique horizontal utilisant de

l'air et de l'eau comme fluides de fonctionnement. L'eau est utilisée dans l'étude expérimentale. La paroi intérieure est chauffée uniformément et l'extérieure est adiabatique. La méthode numérique des différences finies est utilisée. Le nombre de Rayleigh est ($10^4 \leq Ra \leq 10^8$), le rapport des rayons est ($1.5 \leq R \leq 10$), le nombre de Prandtl est ($0.7 \leq Pr \leq 5.42$) et le nombre de Reynolds est ($200 \leq Re \leq 1000$). L'effet d'augmentation de Ra est l'augmentation à la fois du transfert de chaleur et de la chute de pression. Cependant, l'augmentation du transfert de chaleur est sensiblement supérieure à l'augmentation correspondante de la perte de charge. Pour $Ra=10^5$ et 10^7 , les nombres de Nusselt (Nu) à une longueur axiale adimensionnelle (thermique) $Z_t=0.1$, sont d'environ 30% et 110% plus élevés à ceux correspondant à la convection forcée pur, respectivement. L'augmentation correspondante du facteur de frottement apparent moyen due à la convection libre est seulement d'environ 4% et 28%, respectivement. L'effet d'augmentation de Pr est de diminuer le coefficient du frottement moyen sur toute la longueur et de diminuer le Nu jusqu'à un certain Z_t . Au-delà de cette longueur, le Nu augmente quand Pr augmente. Le Nu prédit est bien comparé avec les résultats expérimentaux dans la section d'essai où les données expérimentales ont été obtenues.

K. Muralidhar [4] a étudié numériquement le transfert de chaleur de la convection mixte d'un écoulement dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques rempli d'un matériau poreux saturé en eau. Le cylindre intérieur est chauffé et l'extérieur est refroidi. Les montages horizontal et vertical sont considérés. Les résultats ont été obtenus pour des gammes du nombre de Peclet ($0 < Pe < 10$) et du nombre de Rayleigh ($0 < Ra < 500$). Pour un rapport de rayons égal à 2, $Pe=10$ et $Ra=100$, le transfert de chaleur par convection mixte sur la paroi chauffée, dans les deux orientations, est supérieur à celui de la convection forcée. Le rendement thermique du montage vertical est préférable dans le domaine axial $z \leq 4$. Cependant, dans le domaine axial ($4 < z \leq 8$), le montage horizontal a une meilleure performance thermique.

A. Kumar et al. [5] ont présenté une investigation analytique et numérique d'un écoulement de la convection mixte complètement développé dans un conduit vertical rempli d'un milieu poreux. La température de la paroi varie linéairement avec la coordonnée verticale. Le nombre du Darcy varie entre ($10^{-1} \leq Da \leq 10^{-8}$), le nombre de Rayleigh varie entre ($0 \leq Ra \leq 10^{10}$) et le nombre de Forchheimer modifié (le produit du nombre de Forchheimer, la racine du nombre de Reynolds et le gradient axial de la pression) varie entre ($0 \leq F' \leq 10^{16}$). La méthode numérique de collocation-spectrale Chebyshev a été utilisée. Le problème peut

être résolu analytiquement par la négligence d'effet de la forme de traînée. En écoulement assisté, en général, le taux du transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de Ra, ainsi que Da et diminue avec l'augmentation du F'. Selon les valeurs considérées du Da : 10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-6} et 10^{-8} , le changement du taux de transfert de chaleur est négligeable jusqu'à une certaine valeur de seuil du $Ra^* \approx 10/Da$. Lorsque le seuil est dépassé, le nombre de Nusselt (Nu) augmente de manière significative. L'effet de F' sur Nu est négligeable lorsque $F' \leq 0.01/Da^2$. Pour $Da=10^{-2}$ et $RaDa=10^2$, le Nu est égal à 8, 16, 5.46 et 4.04 pour F' égal à 10^4 , 10^6 et 10^8 , respectivement. Pour $Da=10^{-4}$, l'augmentation du F' de 10^6 à 10^8 réduit le Nu de 14%, et son augmentation de 10^8 à 10^{10} réduit le Nu de 63%. Toutefois, pour $Da=10^{-6}$, l'effet de F' sur Nu est négligeable quand il passe de 10^8 à 10^{10} . La variation du Nu avec F' est négligeable pour $Da=10^{-8}$. En cas d'écoulement opposé (flottabilité entravée), les caractéristiques du Nu en fonction de Da et F' sont inversées. Pour des valeurs plus élevées de Ra, lorsque le profil d'écoulement possède une distorsion, le Nu varie brusquement, ce qui est la conséquence d'une variation brusque du profil de température.

P.M. Kamath et al. [6] ont étudié expérimentalement la convection mixte d'un écoulement d'air assisté, dans un canal vertical d'une soufflerie. La section d'essai présente un chauffage en son milieu. Deux plaques d'aluminium sont montées sur l'appareil de chauffage. L'espace entre les plaques d'aluminium et les parois adiabatiques du canal est rempli par une mousse d'alliage d'aluminium (AlSi7Mg). Les mousses utilisées ont une densité de pores 10, 20, 30 et 45 PPI avec une porosité correspondante élevée égale à 0.95, 0.90, 0.92 et 0.90, respectivement. Les dimensions de tous les mousses sont $(250 \times 150 \times 10)$ mm³. Un écoulement uniforme avec une vitesse d'entrée variant de 0 à 1.7 m/s et une température atmosphérique (dans la gamme de 30 à 33°C) est soufflé dans la section d'essai. La puissance d'élément chauffant varie entre 10 et 100 W. Le débit massique varie de 0 à 0.14 Kg/s et la pression varie entre 0 et 180 kPa. Le nombre de Richardson varie entre $(0.005 \leq Ri \leq 1032)$ et le nombre de Reynolds varie entre $(24 \leq Re \leq 3730)$. Le taux d'amélioration du transfert de chaleur avec la présence du milieu poreux par rapport à un canal vide est toujours supérieur à 1, ce qui indique clairement que les mousses métalliques améliorent le transfert de chaleur. L'amélioration varie entre 1.5 et 2.9 fois avec les paramètres de cette étude. La mousse 10 PPI est révélé avoir de meilleures performances du transfert de chaleur comme prévu pour les mousses à haute porosité. Les forces de flottabilité deviennent plus fortes avec la puissance élevée entrante et conduit à une augmentation du transfert de chaleur. Par conséquent, pour une grande vitesse d'entrée le coefficient du

transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la puissance entrante du dispositif de chauffage. Le nombre de Nusselt est en corrélation avec la porosité, Re et Ri pour l'ensemble des paramètres utilisés dans cette étude. Le régime de la convection est mixte pour $Ri \geq 1$ et $Re \leq 400$. Le rapport des nombres de Nusselt de la convection mixte et forcée est corrélé par $(1+Ri^{0.46}/Re^{0.73})$. Cependant, il y a une pénalité en termes d'augmentation de la chute de pression. La chute de pression par unité de longueur augmente avec la vitesse d'entrée. La mousse métallique 10 PPI est révéler avoir la chute de pression la plus basse : pour une vitesse d'entrée égale à 1.6 m/s, la chute de pression par unité de longueur est 400 Pa/m, 625 Pa/m et 750 Pa/m pour les mousses 10, 30 et 20 PPI, respectivement.

Dans le transfert thermique convectif où l'effet de la flottabilité est très important, l'orientation géométrique du système par rapport à la direction de la force de gravité devient un paramètre qui affecte le transfert thermique et la chute de pression. L'effet d'inclinaison sur la convection naturelle d'air dans un cylindre elliptique chauffé est étudié expérimentalement par Moawed et Ibrahim [7]. Pour un nombre de Rayleigh dans la gamme $[6.85 \times 10^5, 3 \times 10^8]$, ils ont trouvés que pour un rapport des axes elliptiques égal à 2.5 et $Ra = 2 \times 10^6$, le nombre de Nusselt moyen augmente par 35% avec l'augmentation d'angle d'inclinaison de 15° à 75° .

I.Y. Hussain et al. [8] ont présenté une étude théorique et expérimentale sur le transfert de chaleur par convection mixte laminaire en développement dans un espace annulaire incliné avec un écoulement d'air assisté et opposé à la fois. Le cylindre intérieur est chauffé uniformément et le cylindre extérieur est adiabatique pour la partie théorique et soumis à la température ambiante pour la partie expérimentale. Le nombre de Rayleigh (Ra) varie de 4.55×10^5 à 5.649×10^6 et le nombre de Reynolds (Re) varie de 154 à 724. Le rapport des rayons est 0.555, la longueur du cylindre intérieur est 1.2 m, chauffée par un flux de chaleur (q) variant de 93 W/m^2 à 857 W/m^2 et les angles d'inclinaisons sont $\alpha = 0^\circ$ (horizontal), $\alpha = 20^\circ$, 60° (écoulement assisté incliné), $\alpha = -20^\circ$, -60° (écoulement opposé incliné) et $\alpha = 90^\circ$ (vertical). Les résultats expérimentaux montrent une réduction de la température de surface et une augmentation des nombres de Nusselt locaux avec l'augmentation du flux de chaleur et quand l'angle d'inclinaison se déplace des angles positifs (écoulement assisté incliné) vers la position horizontale et des angles négatifs (écoulement opposé incliné) vers la position horizontale. Pour la position horizontale, $Re = 218$ et la même distance axiale adimensionnelle logarithmique égale à 0.2, le nombre de Nusselt local égal à 9 avec $q = 93$

W/m² et égal à 16 avec q=609 W/m². Pour q=676 W/m² et Re=308 (Écoulement assisté), un rapport des nombres de Nusselt moyens des positions inclinée et horizontale (ζ) égal à 0.9465, 0.95, 0.9775 et 1 pour un angle d'inclinaison égal à $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/9$ et 0, respectivement. Pour q=517 W/m², Re=218 (Écoulement Opposé), ζ égal à 0.855 to 0.916 pour un angle d'inclinaison égal à $-\pi/3$ et $-\pi/9$, respectivement. Cela peut être attribué au grand effet de flottabilité dans l'espace annulaire horizontal par rapport aux autres inclinaisons. Les nombres de Nusselt locaux de l'écoulement assisté rapportés sont plus élevés que ceux de l'écoulement opposé (la valeur maximale se produit à la position horizontale) pour le même nombre de Reynolds et le flux de chaleur. Pour la même distance axiale adimensionnelle logarithmique, les nombres de Nusselt locaux sont plus élevés avec les valeurs positives de (Gr/Re) qu'avec la convection purement forcée (Gr/Re=0) et vice-versa avec les valeurs négatives de (Gr/Re). Tel qu'à la position axiale adimensionnelle logarithmique égale à 0.035, le nombre de Nusselt local égal à 8, 7.5, 7, 6.5 et 5 pour Gr/Re=1898, 633, 0, -633 et -1898, respectivement.

Cimpean et al. [9] ont étudié analytiquement la convection mixte coopérante supposée complètement développée entre deux plaques parallèles inclinées rempli d'un milieu poreux et soumises à un flux thermique constant. Cette étude est limitée à des faibles nombres de Peclet (d'ordre 1). Un paramètre important dans cette étude est le rapport du produit des nombres de Grashof et Darcy et le nombre de Reynolds. Quand ce paramètre est égal à 5, l'augmentation d'angle d'inclinaison de 0° à 90° conduit à une amélioration du transfert de chaleur.

T.A. Tahseen [10] a étudié expérimentalement la convection mixte dans un tube circulaire chauffé incliné emballé par des sphères de verre d'un diamètre de 5mm. Le diamètre intérieur de tube est 45 mm et sa longueur est 850 mm. Le nombre de Rayleigh utilisé est défini proportionnel au produit de la perméabilité et la racine du diamètre du tube. Le nombre de Peclet, défini proportionnel au diamètre des sphères, est varié entre (29.31 ≤ Pe ≤ 516.94). Pour un nombre de Rayleigh dans la gamme (108.54 ≤ Ra ≤ 907.73), l'expérience montre que l'augmentation d'inclinaison de 0° à 60° diminue le nombre de Nusselt (Nu). Par exemple, avec Ra=112.23 et Pe=500, le changement d'angle de 0° à 60° mène à une réduction du Nu de 53%. Pour Ra=822.24 et Pe=160, la réduction est 18.56% tandis pour Ra=466.68 et Pe=330, la réduction est 14.3%.

Lorsque la gamme de la variation de la température dans les liquides est considérable, la variation de la viscosité dynamique peut être importante et affecte le transport par

convection dans les conduits. Il est connu que la viscosité des liquides est une fonction décroissante de la température. Pour la convection dans les conduits et les canaux, la réduction de la viscosité améliore le transfert thermique et réduit la chute de pression. Cette amélioration peut être très importante si l'eau est le fluide de fonctionnement ; ce qui est confirmé par M. Amaouche et al. [11]. Ils ont étudié numériquement, par la méthode des différences finies, l'influence des variations des propriétés physiques avec la température sur un problème de la convection mixte stationnaire, transversale autour d'un cylindre horizontal isotherme. Les résultats présentés dans les cas de l'eau et de l'air, sont comparés à ceux précédemment obtenus par le modèle de Boussinesq. Le nombre de Reynolds est pris faible ($Re=20$) et le nombre de Richardson est 4. Dans l'air, et quand les écarts de températures sont modérés, le modèle de Boussinesq constitue une approximation suffisante pour l'évaluation des grandeurs caractéristiques d'un écoulement de la convection mixte. Dans l'eau, cette étude fait ressortir la nécessité de tenir compte des variations des propriétés physiques avec la température.

Un autre exemple sur l'effet des propriétés thermophysiques variables est l'étude de la convection forcée et mixte dans un espace annulaire elliptique par Zerari et al [12]. Pour $Gr=5 \times 10^3$, $Gr=10^4$ et $Gr=1.5 \times 10^4$, les nombres de Nusselt moyens de la convection mixte avec des propriétés variables sont 6.457, 6.935 et 7.607, respectivement. Cependant, les nombres de Nusselt moyens de la convection mixte avec des propriétés constantes sont 6.08, 6.522 et 6.786, respectivement. Pour la convection mixte, la réduction de la viscosité par le chauffage conduit à une réduction considérable de la chute de pression. Avec les propriétés variables, pour $Gr=5 \times 10^3$, $Gr=10^4$ et $Gr=1.5 \times 10^4$, la chute de pression dans l'espace annulaire considéré est 34.312, 31.711 et 29.626, respectivement. Avec les propriétés constantes, pour $Gr=5 \times 10^3$, $Gr=10^4$ et $Gr=1.5 \times 10^4$, la chute de pression dans l'espace annulaire considéré est 37.540, 37.557 et 37.596, respectivement.

Dans les tuyaux et les canaux remplis de milieux poreux, le plus souvent est que le contributeur principal de la chute de pression est la résistance de Darcy, qui est proportionnelle à la viscosité du fluide. Dans ce cas, il est prévu que la réduction de la viscosité d'un liquide par chauffage permettra de réduire la chute de pression et d'améliorer le transfert de chaleur. Pour les canaux chauffés par un flux de chaleur uniforme, il est rapporté par Nield et Bejan [13] que le nombre de Nusselt augmente lorsque la viscosité du fluide est réduite par chauffage. Le nombre de Nusselt doit être modifié par un facteur

de $(1 - \frac{2N}{15})$, avec le facteur négatif N étant le rapport de deux produits : le premier est le produit du flux de chaleur, la hauteur du canal et la dérivée de la viscosité par rapport à la température évaluée à la température de référence. Le second est le produit de la conductivité thermique et la viscosité à la température de référence.

A. Narasimhan et al. [14] ont étudiés théoriquement les effets de la variation de la viscosité avec la température sur la convection forcée d'un écoulement d'un fluide à travers un canal, entre deux plaques parallèles, soumis à un flux de chaleur constant et rempli d'un milieu poreux de faible perméabilité. L'écoulement entre dans le canal avec une température et une vitesse uniformes est modélisé par le modèle du Darcy-Forchheimer. Les résultats montrent que l'effet global de la variation de la viscosité avec la température augmente le transfert de chaleur de la surface moyenne par 10% en comparaison avec un nombre de Nusselt obtenu par le chauffage d'un fluide avec une viscosité uniforme.

M. Dehghan et al. [15] ont étudiés analytiquement par la technique de perturbation, les effets de la variation de la conductivité thermique sur la convection forcée dans un canal à plaques parallèles rempli par un milieu poreux saturé. Les parois du canal sont chauffées par un flux de chaleur constant. La conductivité thermique du milieu est supposée être une fonction linéaire de la température. Le modèle Darcy-Forchheimer-Brinkman est utilisé. Les résultats montrent qu'une augmentation linéaire de la conductivité thermique du milieu poreux avec la température entraîne une augmentation semi-linéaire du nombre de Nusselt. L'approche de la conductivité thermique variable présente plus clairement les avantages des usages du milieu poreux sur l'amélioration du transfert de chaleur.

Dans la présente étude, nous considérons la simulation numérique tridimensionnelle de la convection mixte laminaire dans un espace annulaire elliptique incliné, avec les propriétés physiques de l'eau variables. Cet espace annulaire est confiné entre deux cylindres elliptiques confocaux : un cylindre intérieur chauffé et un cylindre extérieur adiabatique. L'espace annulaire est rempli par une mousse d'aluminium de 20 PPI, isotrope et homogène. Le but de cette étude est de déterminer l'inclinaison recommandée qui mène à un transfert de chaleur amélioré et minimise ou élimine la perte de pression statique.

Modèle Physique

Comme illustré dans la Figure. 1, le système étudié est un espace annulaire confiné entre deux cylindres elliptiques confocaux. Le cylindre intérieur statique avec un rayon elliptique $\varepsilon_i = 0.8$ est chauffé avec un flux de chaleur 3750 W/m^2 et le cylindre statique extérieur avec un rayon elliptique $\varepsilon_o = 1.4$ est adiabatique. La demi distance focale de la section transversale elliptique est 0.08 m . La longueur du conduit est 100 fois la demi distance focale. Les cylindres sont inclinés d'un angle θ par rapport au plan horizontal. Les angles d'inclinaison considérés sont : $-\pi/2, -\pi/3, -\pi/6, 0, \pi/6, \pi/3$ et $\pi/2$ correspondantes aux $-90^\circ, -60^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ et 90° , respectivement. À l'entrée d'espace annulaire, l'écoulement est axial, uniforme avec une vitesse $V_{z_0}^* = 2.5 \times 10^{-3} \text{ m/s}$ et isotherme à une température égale à $T^* = 293.15^\circ \text{K}$. $V_{z_0}^*$ et T_0^* sont la vitesse et la température de référence pour cette étude.

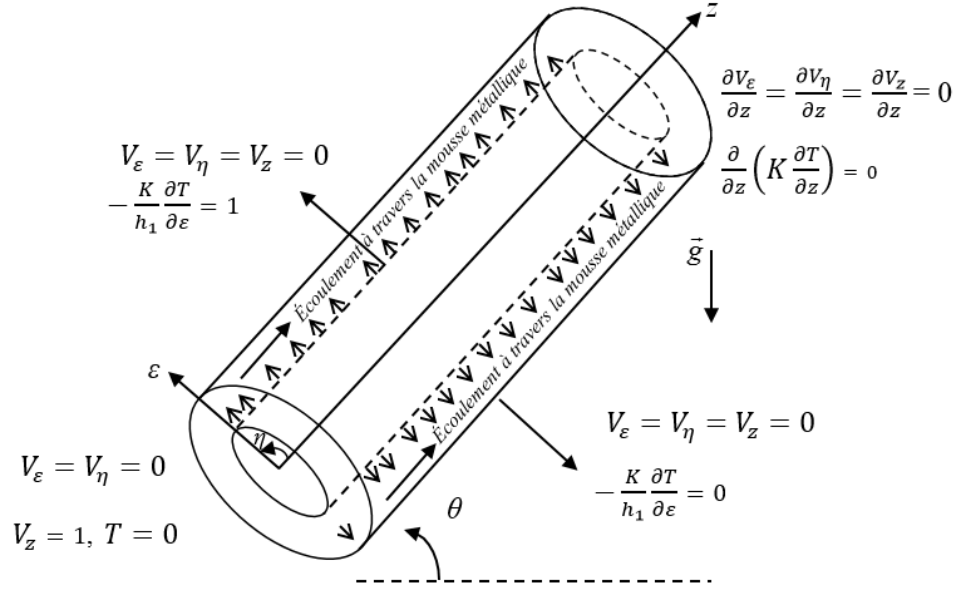


Fig. 1. La géométrie du système et les conditions aux limites.

Les diamètres de pore et de la fibre de la mousse métallique peuvent être calculés en utilisant les équations suivantes [16] :

$$d_p = \frac{0.0254 \text{ m}}{20} = 1.27 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (1)$$

$$d_f = d_p \frac{1.18 \sqrt{\frac{1-\varphi}{3\pi}}}{\left[1 - \exp\left(\frac{\varphi-1}{0.04}\right) \right]} = 1.597 \times 10^{-4} \text{ m} \quad (2)$$

qui peuvent être utilisés pour évaluer la perméabilité de la mousse métallique [16] :

$$\kappa = 0.00073 [1 - \varphi]^{-0.224} \left[\frac{d_f}{d_p} \right]^{-1.11} d_p^2 = 2.071 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \quad (3)$$

Le nombre Darcy associé à cette configuration d'écoulement poreux est :

$$Da = \frac{\kappa}{a^2} = 3.237 \times 10^{-6} \quad (4)$$

Le coefficient d'inertie du Forchheimer est [16] :

$$C_f = \frac{0.00212}{\left([1-\varphi]^{0.132} \left[\frac{d_f}{d_p} \right]^{1.63} \right)} = 8.69 \times 10^{-2} \quad (5)$$

Toutes les propriétés thermophysiques d'aluminium sont considérées constantes et sont fournis dans le Tableau 1. Dans le même tableau, les propriétés thermophysiques d'eau à l'état de référence sont répertoriées. Dans la gamme de variation de la température de cette étude, la chaleur spécifique d'eau à pression constante est constante.

Tableau 3 Propriétés thermophysiques

Cp_s^*	896 J/kg K
ρ_s^*	2707 Kg/m ³
k_s^*	218 W/m K
Cp_f^*	4180 J/kg K
$\rho_{f_0}^*$	1000 Kg/m ³
$k_{f_0}^*$	0.597 W/m K
$\mu_{f_0}^*$	0.001 Kg/m s

La variation de la densité d'eau avec la température est estimée par un développement en série du premier ordre, de l'expansion de la densité autour de sa valeur à l'état de référence :

$$\rho_f^*(T^*) = \rho_{f_0}^* - \rho_{f_0}^* \beta (T^* - T_0^*) \quad (6)$$

La viscosité du fluide $\mu_f^*(T^*)$ et la conductivité thermique du fluide $k_f^*(T^*)$ sont des fonctions de la température et elles ont été spécifiées dans la référence [12].

Par conséquent, le nombre associés de Reynolds, de Grashof et de Prandtl sont $Re = 200$, $Gr = 4.54 \times 10^8$ et $Pr = 7$, respectivement. Enfin, l'inertie thermique totale non-dimensionnelle et la conductivité thermique non-dimensionnelle de ce système poreux sont définies avec les équations [13, 17 et 18] :

$$[\rho Cp]_{eff} = \varphi + [1 - \varphi] \left[\frac{\rho_s^* Cp_s^*}{\rho_{f_0}^* Cp_{f_0}^*} \right] = 0.9664 \quad (7)$$

$$K = \left(\varphi \frac{k_f^*}{k_{f_0}^*} + 0.19 [1 - \varphi]^{0.763} \frac{k_s^*}{k_{f_0}^*} \right) + 0.06 \sqrt{Da} Re Pr |\vec{V}| \quad (8)$$

Où le premier terme de l'équation. (8) est la conductivité thermique effective du milieu poreux (mousse métallique/eau) et le deuxième terme est la conductivité thermique de la dispersion qui est proportionnelle au module de la vitesse locale. À l'entrée d'espace annulaire, K est égal à sa valeur de référence 11.1746.

Modèle
Mathématique

L'écoulement à travers l'espace annulaire est laminaire, visqueux et quasi-incompressible. L'approximation de Boussinesq est appliquée. Les paramètres géométriques, dynamiques et thermiques sont choisis pour rendre la flottabilité importante et la variation de la viscosité avec la température significative, ce qui conduit à des champs d'écoulement et thermiques différentes à ceux de la convection forcée avec des propriétés du fluide constantes. L'écoulement de la convection mixte et le transfert de chaleur à travers l'espace annulaire poreux sont modélisés par l'équation de continuité, le modèle d'écoulement de Darcy-Forchheimer-Brinkmann, comptant pour la flottabilité importante, et de l'équation d'énergie. Ces équations sont obtenues par une procédure de moyennisation sur un volume élémentaire représentatif d'un milieu poreux. Cette procédure est bien exposée et détaillée par F. Civan [19]. L'échelle de longueur est la demi-distance focale. L'échelle de vitesse est la vitesse axiale à l'entrée de l'espace annulaire. L'échelle de pression est le produit de la densité du fluide et le carré de la vitesse axiale, les deux sont évaluées aux conditions d'entrée. La référence de température est la température d'entrée. L'échelle de température est le produit du flux de chaleur et la demi-distance focale divisé par la conductivité thermique du fluide à l'entrée. Les références des propriétés physiques sont les valeurs d'entrée des propriétés physiques du fluide. Notez que dans ce document, les variables dimensionnelles sont indiquées par un *. Ces variables dimensionnelles et les propriétés thermophysiques sont normalisées par leurs échelles caractéristiques pour obtenir des quantités non dimensionnelles présentées dans le Tableau 2.

Tableau 2 Variables adimensionnelles et propriétés thermophysiques

$h_1 = \frac{h_1^*}{a}$	$h_2 = \frac{h_2^*}{a}$
$z = \frac{z^*}{a}$	$t = \frac{V_{z0}^* t^*}{a}$
$V_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon^*}{V_{z0}^*}$	$T = \frac{T^* - T_0^*}{\frac{q_w a}{k_{f0}^*}}$
$V_\eta = \frac{V_\eta^*}{V_{z0}^*}$	$\Delta P = \frac{\Delta P^*}{\rho_{f0}^* V_{z0}^{*2}}$
$V_z = \frac{V_z^*}{V_{z0}^*}$	

Conditions initiales

Pour tous les cas, la condition initiale de l'écoulement est l'écoulement axial uniforme et la condition initiale thermique est le champ thermique de la convection forcée d'un écoulement uniforme thermiquement développé obtenu dans la partie 1 de la présente thèse. Ce champ est noté $T_{init}(\varepsilon, \eta, z)$ dans cette étude.

$$\text{À } t = 0, \quad V_\varepsilon = V_\eta = 0, \quad V_z = 1, \quad T = T_{init}(\varepsilon, \eta, z) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_{init}(\varepsilon, \eta, z) = & \alpha z + C_1 \cosh(2\varepsilon) + C_2 \varepsilon + C_3 + C_4 \cos(2\eta) \\ & + \sum_{n=2,4,6,8}^{\infty} \cos(n\eta) [E_n \sinh(n\varepsilon) + F_n \cosh(n\varepsilon)] \\ & + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m^{2r} e^{\gamma_2 z} \left[1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 e^{(\gamma_2 - \gamma_1)((L/a) - z)} \right] \\ & \times \frac{[ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} M c_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})]}{\max(\{|ce_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r}) - \theta_m^{2r} M c_{2r}(\varepsilon, q_m^{2r})| : \varepsilon_i \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\})} [ce_{2r}(\eta, q_m^{2r})] \end{aligned} \quad (10)$$

Toutes les fonctions et les constantes dans l'équation. (10) ont été définies et déterminées dans la partie 1 de cette thèse.

Équation de continuité

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] = 0 \quad (11)$$

Équation du mouvement dans la direction radiale elliptique

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \\ & \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_2 \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] - \frac{\mu V_\varepsilon}{Re Da} - \frac{C_f V_\varepsilon \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2}}{\sqrt{Da}} + \\ & \frac{Gr}{Re^2} T \frac{(\cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \cos \theta)}{\sqrt{h_1 h_2}} \end{aligned} \quad (12)$$

Équation du mouvement dans la direction angulaire elliptique

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \\ & \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - \\
& 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \Big] - \frac{\mu V_\eta}{Re Da} - \frac{C_f V_\eta \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2}}{\sqrt{Da}} + \frac{Gr}{Re^2} T \frac{(\sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \cos \theta)}{\sqrt{h_1 h_2}} \quad (13)
\end{aligned}$$

Équation du mouvement dans la direction axiale elliptique

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] - \frac{\mu V_z}{Re Da} - \\
& \frac{C_f V_z \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2}}{\sqrt{Da}} + \frac{Gr}{Re^2} T \sin \theta \quad (14)
\end{aligned}$$

Équation d'énergie

$$\begin{aligned}
& (\rho C_p)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] \\
& = \frac{1}{Re Pr h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \quad (15)
\end{aligned}$$

Conditions aux limites

$$\text{\AA} \quad \varepsilon = 0.8, \quad V_\varepsilon = V_\eta = V_z = 0, \quad -\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1 \quad (16)$$

$$\text{\AA} \quad \varepsilon = 1.4, \quad V_\varepsilon = V_\eta = V_z = 0, \quad -\frac{K}{h_1} \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (17)$$

$$\text{\AA} \quad z = 0, \quad V_\varepsilon = V_\eta = 0, \quad V_z = 1, \quad T = 0 \quad (18)$$

$$\text{\AA} \quad z = 100, \quad \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial V_\eta}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (19)$$

Il est à noter que, pour les paramètres de contrôle considérés, les termes dominants dans les équations de mouvement sont les termes de Darcy, les termes des gradients de pression et les termes de flottabilité (qui dépendent de l'inclinaison de l'espace annulaire). Les termes de Forchheimer sont plus faibles que les termes dominants. En outre, les termes convectifs sont beaucoup plus faibles que les termes dominants. En outre, les termes diffusifs de Brinkmann ne sont significatifs que dans des couches très minces à proximité de parois solides d'espace annulaire. L'épaisseur adimensionnelle de ces couches est de l'ordre de $\sqrt{\frac{Da}{\varphi}} \sim 10^{-3}$, qui est beaucoup plus petite que l'épaisseur mineure adimensionnel de

l'espace annulaire égale à 0.8135. Cependant, dans l'équation d'énergie, tous les termes convectifs sont importants dans le montage horizontal, mais les termes convectifs radial et angulaire sont très faibles dans le montage vertical. La diffusion radiale est supérieure à celle angulaire et beaucoup plus forte que celle axiale.

Dans les équations du mouvement, la pression modifiée relative utilisée est reliée à la pression statique relative et la pression hydrostatique :

$$P(\varepsilon, \eta, z) = p(\varepsilon, \eta, z) + \frac{a g z \sin \theta}{V_{z0}^{*2}} + \frac{a g \cos \theta \sinh \varepsilon \sin \eta}{V_{z0}^{*2}} \quad (20)$$

Lorsque la pression varie sur la section transversale, une pression moyenne sur la section transversale peut être définie comme suit :

$$P_m(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} P(\varepsilon, \eta, z) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} p(\varepsilon, \eta, z) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_0} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta} + \frac{a g z \sin \theta}{V_{z0}^{*2}} = p_m(z) + \frac{a g z \sin \theta}{V_{z0}^{*2}} \quad (21)$$

La moyenne du dernier terme dans l'équation. (20) est égale à zéro.

Considérant un bilan thermique local à un point de la surface du cylindre intérieur, on définit un nombre de Nusselt local :

$$Nu(\eta, z) = \frac{h(\eta, z) a}{k_{f0}^*} = \frac{1}{[T(0.8, \eta, z) - T_m(z)]} \quad (22)$$

La température moyenne sur une section transversale est définie comme suit :

$$T_m(z) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} V_z(\varepsilon, \eta, z) T(\varepsilon, \eta, z) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta}{\int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} V_z(\varepsilon, \eta, z) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta} \quad (23)$$

Le nombre de Nusselt axial est défini comme étant la moyenne du nombre de Nusselt local sur le périmètre du cylindre intérieur :

$$Nu(z) = \frac{\int_0^{2\pi} Nu(\eta, z) h_1(0.8, \eta) d\eta}{\int_0^{2\pi} h_1(0.8, \eta) d\eta} \quad (24)$$

Le nombre de Nusselt moyen de l'espace annulaire est obtenu par la moyenne du nombre de Nusselt axial sur la longueur axiale totale.

$$\overline{Nu} = \frac{\int_0^{100} Nu(z) dz}{\int_0^{100} dz} \quad (25)$$

Méthode Numérique

Les équations différentielles partielles couplées de la continuité, du mouvement et d'énergie, avec les conditions initiales et aux limites spécifiées, sont résolues par la méthode des volumes finis. Le domaine physique est divisé en volumes finis cylindro-elliptiques. Chaque volume fini a un point centré et six faces qui sont ses interfaces avec les volumes adjacents. En plus des points centrés à l'intérieur du volume fini, il y a des points aux limites où les conditions aux limites sont spécifiées. Le maillage numérique utilisé a 42 points dans la direction radiale, 84 points dans la direction angulaire et 202 points dans la direction axiale. Le maillage est uniforme le long de chaque direction. Le maillage numérique et sa projection sur la section transversale ont été graphiquement illustrés dans la Partie 1 de cette thèse. À chaque point centré dans un volume fini, une équation de discrétisation est obtenue en multipliant l'équation différentielle par le volume différentiel $h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz$ et en triple intégrant entre les limites du volume fini. Par conséquent, une équation différentielle est remplacée par un système d'équations algébriques linéarisées. Les propriétés physiques et les variables dépendantes scalaires (la pression et la température) sont calculées dans des volumes finis typiques ; alors que les composantes de vitesse sont calculées dans des volumes finis décalés [20]. La discrétisation spatio-temporelle a une précision du second ordre. Les schémas de discrétisation pour les différents termes dans les équations du modèle sont similaires à ceux cités dans [12]. Pour les termes de Darcy, la discrétisation temporelle est semi implicite : la discrétisation de la viscosité est explicite suivant le schéma d'Adam-Bashforth alors que la discrétisation de la vitesse est implicite. La discrétisation spatiale des termes de Darcy est exacte. La discrétisation temporelle des termes de Forchheimer est explicite suivant le schéma d'Adam-Bashforth alors que la discrétisation spatiale suit le schéma des différences centrées. La solution séquentielle des variables dépendantes suit l'algorithme classique SIMPLER [20]. Pour chaque variable dépendante, le système linéarisé des équations algébriques est résolu par la méthode de balayage comportant l'utilisation d'algorithme TDMA le long de la direction radiale et axiale et le TDMA cyclique le long de la direction angulaire. Commencant par les conditions initiales, la marche dans le temps avec un pas du temps égal à $\Delta t = 3 \times 10^{-3}$ est poursuivie jusqu'à ce qu'une solution en régime permanent soit atteinte. Cet état est caractérisé par une invariance temporelle des variables calculées et une satisfaction des bilans globaux massiques et énergétiques. Tous les détails de la discrétisation numérique sont présentés dans l'annexe D.

Afin de valider les résultats numériques, le code numérique a été testé pour la reproduction des résultats analytiques de la convection forcée en développement thermique,

avec un écoulement axial uniforme et des propriétés physiques constantes, dans le même espace annulaire rempli de la mousse métallique considérée dans cette étude. La simulation numérique a reproduit la solution analytique avec un accord parfait. Une telle reproduction est considérée comme une validation de la solution numérique et une preuve de l'adéquation de la résolution spatiale du maillage numérique utilisé. La version étendue du code, qui traite le développement hydrodynamique et thermique de la convection mixte avec des propriétés physiques variables du fluide, dans le même espace annulaire rempli de la mousse métallique, a été utilisé pour obtenir les résultats numériques de cette étude.

Résultats et Discussions

5.1. Écoulement secondaire

Le champ d'écoulement peut être décomposé en un écoulement principal (l'écoulement axial) et un écoulement secondaire (sur la section transversale d'espace annulaire). Ce dernier écoulement est induit par la flottabilité de la section transversale pour les angles d'inclinaison $\theta = \frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$. Pour le montage vertical ($\theta = \frac{-\pi}{2}$) et ($\theta = \frac{\pi}{2}$), l'écoulement secondaire est généré par la conservation de la masse (Équation. (9)) en présence d'une variation axiale de la vitesse axiale. La force de la flottabilité qui induit l'écoulement secondaire est proportionnelle au produit de la température, le cosinus de l'angle d'inclinaison et le rapport entre le nombre de Grashof et le carré du nombre de Reynolds tel que présenté dans les équations de quantité de mouvement. L'intensité de l'écoulement secondaire des configurations du montage vertical est beaucoup plus faible que celle de l'écoulement secondaire induit par la flottabilité. Ceci est démontré et illustré par la comparaison des niveaux maximaux des composantes radiale et azimutale de la vitesse d'écoulement secondaire, pour les angles d'inclinaison considérés, listés dans le Tableau 3. On a également conclu que l'intensité de l'écoulement secondaire est plus élevée pour le montage horizontal et diminue avec la diminution ou l'augmentation de l'inclinaison en compatibilité avec le cosinus de l'angle d'inclinaison comme indiqué ci-dessus.

Tableau 3 Maxima des vitesses radiales et azimutales des inclinaisons considérées

θ	Maximum V_ε	Maximum V_η
$\frac{-\pi}{2}$	0.0021	0.0004
$\frac{-\pi}{6}$	0.0641	0.1273
$\frac{-\pi}{3}$	0.1026	0.1802
0	0.1114	0.2017
$\frac{\pi}{6}$	0.0928	0.1866
$\frac{\pi}{3}$	0.0442	0.1260
$\frac{\pi}{2}$	0.0093	0.0010

Les Figures. 2 - 6 illustrent les lignes de courant des écoulements secondaires, à la sortie de l'espace annulaire, pour les angles d'inclinaison $\frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$. Les écoulements secondaires très faibles des montages verticaux ne sont pas représentés. Ils ont un effet négligeable sur l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur. Les lignes de courant sont ceux de la fonction de courant de la section transversale définie par l'équation suivante :

$$V_{\eta}(\varepsilon, \eta) = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \Psi(\varepsilon, \eta)}{\partial \varepsilon} \quad (26)$$

Cette équation est intégrée sur la section transversale avec une valeur zéro arbitraire au cylindre intérieur. L'écoulement secondaire est représenté par deux cellules contrarotatives sur la section transversale. De la partie inférieure du cylindre intérieur, l'écoulement secondaire remonte le long du cylindre intérieur chauffé en accélération vers le haut le long de la direction angulaire. Lorsqu'il s'approche de l'axe mineur, en haut du cylindre intérieur, l'écoulement monte radialement vers le cylindre extérieur. Là, il est détourné et commence à descendre le long du cylindre extérieur. Quand il se rapproche de l'axe elliptique mineur, il commence un mouvement de retour radial vers le cylindre intérieur. L'écoulement secondaire est plus fort dans la partie supérieure de la section transversale où le niveau de la température est relativement plus élevé et la stratification thermique est instable. Il est beaucoup plus faible dans la partie inférieure de la section transversale où le niveau de la température est relativement plus faible et la stratification thermique est stable. Près de l'entrée de l'espace annulaire, les centres des cellules contrarotatives de l'écoulement secondaire sont localisés sur l'axe elliptique majeur. En aval, les centres se déplacent vers la partie supérieure de la section transversale, comme on le voit dans les Figures. 2-6. Les écoulements secondaires de la flottabilité sont en développement hydrodynamique sur toute la longueur de l'espace annulaire. Les grandes variations qualitatives et quantitatives de ces écoulements sont localisées près de l'entrée d'espace annulaire.

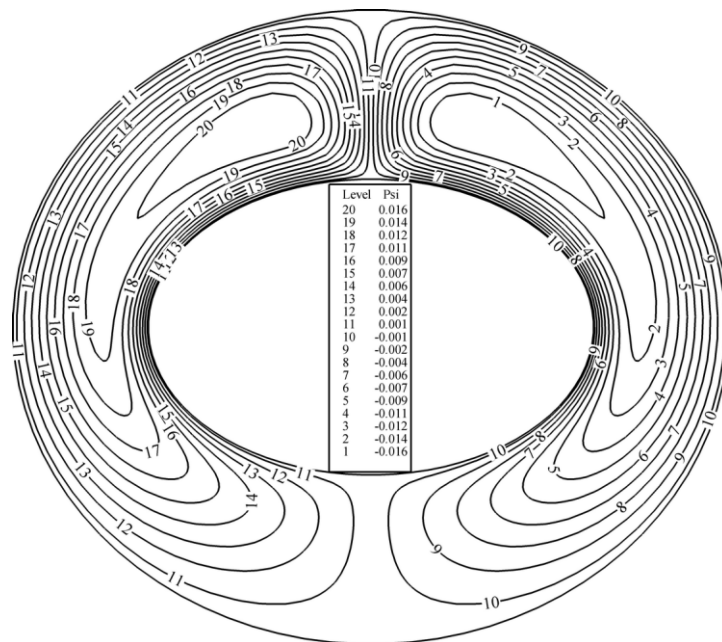


Fig. 2. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{3}$

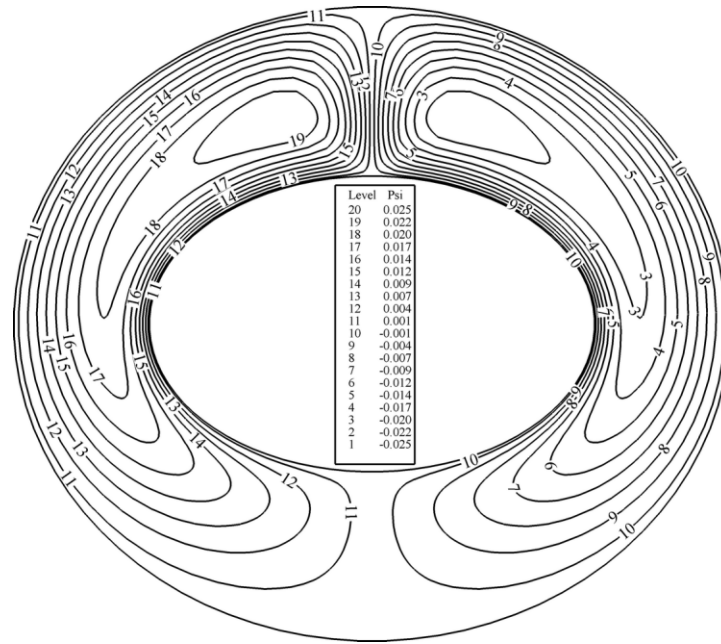


Fig. 3. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{6}$

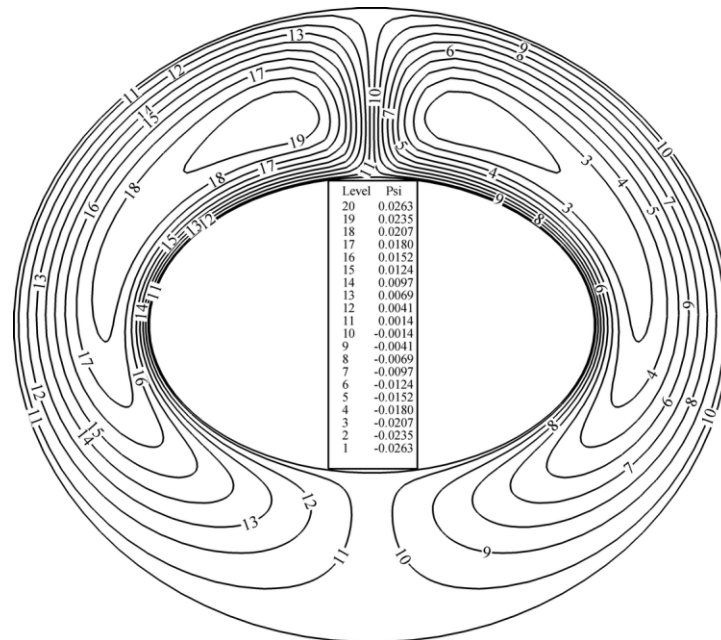


Fig. 4. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = 0$

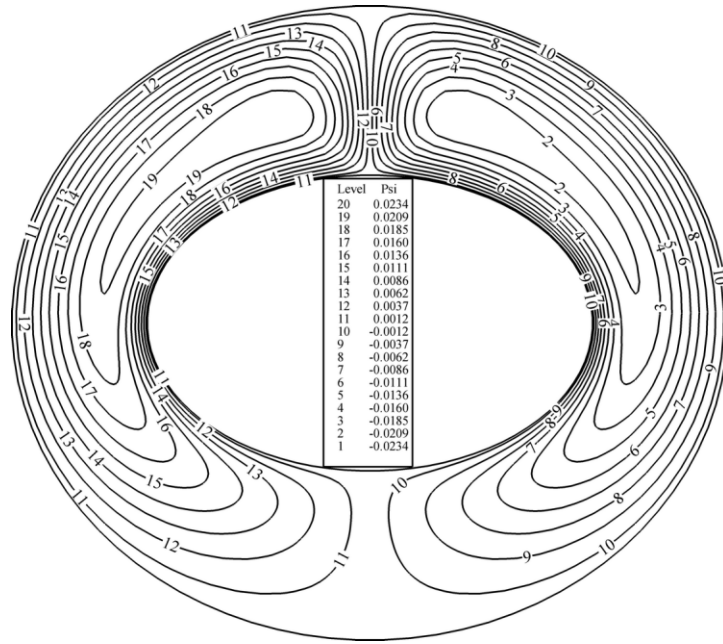


Fig. 5. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{6}$

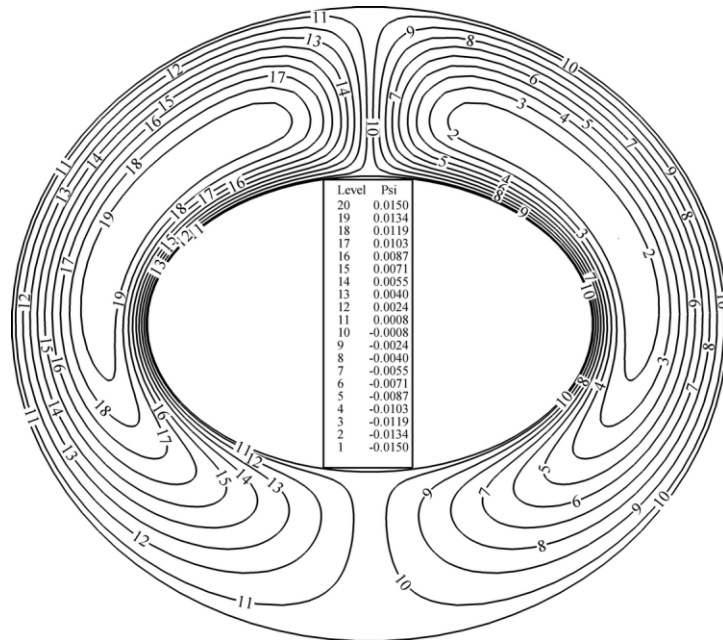


Fig. 6. Écoulement secondaire à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{3}$

5.2. Écoulement axial

Il est important de noter que le débit d'écoulement est constant (axialement invariant) afin de satisfaire la conservation de la masse à toute position axiale z . Ceci peut être facilement démontré lorsque l'équation de continuité (Équation (11).) est multipliée par le volume elliptique différentiel $h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz$ et triple intégré entre les limites radiales $\varepsilon_i = 0.8$ et $\varepsilon_o = 1.4$, les limites angulaires $\eta = 0$ et $\eta = 2\pi$ et les limites axiales $z = 0$ et z :

$$\int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} \left[\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right] h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz + \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} \left[\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} \right] h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz + \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} \left[\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz = 0 \quad (27)$$

La première intégrale est égale à zéro ; ceci est obtenu en intégrant d'abord suivant la direction radiale en utilisant les conditions aux limites radiales de la vitesse radiale. La deuxième intégrale est égale à zéro ; ceci est obtenu par une première intégration suivant la direction angulaire en considération de la périodicité. La dernière intégrale est d'abord intégrée suivant z ; à l'aide de la condition limite à l'entrée d'espace annulaire conduit à :

$$\int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} [V_z h_1 h_2 d\varepsilon d\eta] \Big|_z = \int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} [V_z h_1 h_2 d\varepsilon d\eta] \Big|_0 = S \quad (28)$$

Par conséquent, le débit axial de l'écoulement à une position axiale quelconque z est égal à celui de l'entrée de l'espace annulaire, indépendamment de la distribution de la vitesse axiale sur la section transversale correspondante. L'écoulement secondaire de flottabilité n'a pas d'influence directe sur l'écoulement axial à travers les termes convectifs de l'équation de mouvement axial (Équation. (12)), parce que ces termes sont très faibles. Son influence est indirecte à travers la distribution thermique qui spécifie le niveau de la viscosité. Loin de l'entrée de l'espace annulaire, à une section donnée, le mouvement de l'écoulement secondaire de flottabilité fait que la partie supérieure de la section droite soit relativement plus chaude que sa partie inférieure. Cette distribution thermique rend le niveau de la viscosité dans la partie supérieure de la section droite relativement plus faible que celui de la partie inférieure de la section. Dans la direction radiale la viscosité diminue du cylindre extérieur vers le cylindre intérieur. La réduction de la viscosité diminue la résistance de Darcy à l'écoulement. Cette diminution tend à augmenter localement le niveau de la vitesse axiale. Sur une section transversale donnée, le niveau de la vitesse axiale augmente relativement dans la région à faible viscosité et diminue relativement dans la région à viscosité élevée. Un autre facteur important qui contrôle la distribution spatiale de la vitesse

axiale est la flottabilité axiale qui est présente si le montage de l'espace annulaire n'est pas horizontal ($\theta \neq 0$). Cette flottabilité qui est proportionnelle au produit de la température et le sinus d'angle d'inclinaison (Voir l'équation. (12)) tend à renforcer localement l'écoulement axial forcé pour des angles d'inclinaison positifs (flottabilité coopérante) et à le retarder localement pour les angles d'inclinaison négatifs (flottabilité opposante).

Les côtés gauches des graphes des Figures 7-13 illustrent la distribution de la vitesse axiale à la section de sortie d'espace annulaire pour les sept inclinaisons considérés. On remarque que dans tous les cas, la sous-couche visqueuse de Brinkman, près des deux cylindres, est très mince comme prévu. **Pour le montage horizontal ($\theta = 0$)**, en dehors de la sous-couche de Brinkman, la répartition spatiale de la vitesse axiale est influencée principalement par l'équilibre du gradient axial de la pression et la viscosité variable du terme de la résistance de Darcy. Puisque la chaleur est transmise radialement à partir du cylindre intérieur et le mouvement de l'écoulement secondaire rend la partie supérieure de la section transversale plus chaude que la partie inférieure, le niveau de la vitesse axiale augmente près du cylindre intérieur mais de manière asymétrique : la vitesse axiale est relativement plus élevée dans la partie supérieure de la section droite. La différence entre les distributions de la vitesse axiale en haut et en bas de la section droite est faible près de l'entrée de l'espace annulaire, mais augment en aval du conduit annulaire. Cet écoulement axial est en développement hydrodynamique sur toute la longueur de l'espace annulaire. A la sortie d'espace annulaire (Figure 7), dans la direction radiale, à l'extérieur des sous-couches de Brinkman, la vitesse diminue loin du cylindre intérieur. La variation angulaire est plus importante dans la partie supérieure de la section transversale. La vitesse axiale diminue lorsque l'angle elliptique η est augmentée de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$. La vitesse axiale maximale égale à 1.321 est localisée à $\varepsilon = 0.8225$ et $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Lorsque l'angle d'inclinaison est augmenté à $\theta = \frac{\pi}{6}$, en dehors des sous-couches de Brinkman, la distribution de la vitesse axiale est contrôlée par l'équilibre du gradient axial de la pression, le terme du Darcy et la composante axiale de la poussée d'Archimède assistée. Dans la partie supérieure plus chaude de la section transversale, l'effet combiné de la viscosité relativement faible et la flottabilité axiale relativement plus élevée tend à augmenter le niveau de la vitesse. Dans la partie inférieure de la section transversale relativement plus froide, la viscosité relativement plus élevée et la flottabilité axiale relativement plus faible tend à abaisser le niveau de la vitesse axiale. Près de l'entrée d'espace

annulaire, les distributions de vitesse dans les parties supérieure et inférieure de la section transversale sont similaires. En aval, la différence entre ces distributions augmente. A la sortie d'espace annulaire de la section transversale (Figure 8), en dehors des sous-couches de Brinkman, on voit que les variations angulaires et radiales importantes sont localisées dans la partie supérieure de la section transversale, en particulier près de l'axe vertical elliptique. Loin de cet axe, les variations sont faibles dans la direction radiale et beaucoup plus faibles dans la direction angulaire, en particulier dans la partie inférieure de la section transversale. Le niveau de la vitesse axiale atteint un maximum supérieur à celui obtenu avec le montage horizontal. La vitesse axiale maximale égale à 1.605 est situé à $\varepsilon = 0.8075$ et $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Lorsque l'angle d'inclinaison augmente à $\theta = \frac{\pi}{3}$, en dehors des sous couches de Brinkmann, la distribution de la vitesse axiale est également gérée par l'équilibre du gradient axial de la pression, le terme de Darcy et la composante axiale (relativement plus forte) de la poussée thermique axiale. Les distributions axiale et transversale sont qualitativement similaires à celles du cas de $\theta = \frac{\pi}{6}$. La Figure 9 illustre la distribution de la vitesse axiale à la section de sortie de l'espace annulaire. On voit que la région des larges variations radiale et angulaire de la vitesse est toujours localisée en haut de la section droite, autour de l'axe elliptique mineur, mais son étendu spatial est faibles par rapport à celui de l'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$. Cependant, le niveau de la vitesse maximale dans cette région est plus élevé que celui du cas avec l'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$. La vitesse axiale maximale vaut 1.808 et est localisé à $\varepsilon = 0.8075$ et $\eta = \frac{\pi}{2}$.

Pour le de montage vertical positif ($\theta = \frac{\pi}{2}$), la flottabilité est totalement axiale et assiste l'écoulement forcé. En aval de l'entrée de l'espace annulaire, à une section droite donnée, près du cylindre intérieur où la viscosité est relativement faible et la flottabilité axiale relativement plus élevée se localise les locaux maxima de la vitesse axiale. Ce niveau élevé doit être compensé par un niveau inférieur loin du cylindre intérieur, pour conserver le débit de l'écoulement. Par conséquent, en se déplaçant axialement, de l'entrée d'espace annulaire, le niveau de la vitesse augmente près du cylindre intérieur et diminue en éloignant de lui. L'examen détaillé de la distribution spatiale de la vitesse axiale montre que les variations axiales mentionnées sont grandes pour $z \leq 40$ mais deviennent beaucoup plus faibles au-

delà de cette longueur. Ces petites variations axiales sont présentes jusqu'à la sortie de l'espace annulaire et par conséquent, l'écoulement axial est considéré en développement hydrodynamique tout au long de l'espace annulaire. Le montage vertical positif de l'espace annulaire symétrise la distribution de la vitesse axiale, sur la section droite, par rapport aux axes elliptiques. Cette distribution est qualitativement très différente de celle des distributions obtenues avec les angles 0 , $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ qui sont symétriques uniquement par rapport à l'axe elliptique vertical. A la section transversale de sortie sur la Figure 10, on constate que la variation radiale est beaucoup plus grande que celle angulaire. Ce dernier est un effet thermique : près du cylindre intérieur, la température diminue en allant, suivant la direction angulaire, de l'axe mineur à l'axe majeur. La variation angulaire de la vitesse axiale est plus visible près du cylindre intérieur mais devient très faible loin de lui. A la sortie d'espace annulaire, la vitesse axiale maximale atteint 1.518 et est situé à $\varepsilon = 0.8075$ et $\eta = \frac{\pi}{2}$ et $\eta = \frac{3\pi}{2}$.

Pour l'angle d'inclinaison négative $\theta = -\frac{\pi}{6}$, la flottabilité axiale entrave l'écoulement axial forcé et tend à réduire le niveau de la vitesse axiale. Son effet est en compétition avec l'effet opposé de la viscosité réduite qui tend à augmenter le niveau de la vitesse axiale. La revue et l'analyse de la distribution spatiale de la vitesse axiale a révélé que son évolution axiale passe par plusieurs régimes. Le premier est présent à partir de l'entrée de l'espace annulaire jusqu'à $z = 9.25$. Dans cette région, la réduction de la viscosité autour du cylindre intérieur augmente, continuellement dans la direction axiale, et la zone de la variation radiale de la vitesse axiale est relativement élevée. Dans ce domaine, la flottabilité axiale opposée n'est pas assez forte pour réduire le niveau de la vitesse axiale. Le second régime est dans le domaine de $z = 9.25$ à $z = 45$. Il est caractérisé par une augmentation axiale continue du niveau de la vitesse axiale dans la partie supérieure de la section transversale et sa diminution dans la partie inférieure parce que le haut de la section transversale est relativement plus chaud. Dans ce régime, la dominance de l'effet de la réduction de la viscosité sur l'effet de la flottabilité axiale opposante est maintenue. Cette dominance est inversée au-delà de $z = 45$, où le troisième régime se manifeste par la réduction axiale continue du niveau de la vitesse axiale dans les zones relativement plus chaudes de la section transversale. Cette réduction est compensée par une augmentation du niveau de la vitesse axiale dans les zones relativement froides de la section transversale. Une telle redistribution tend à quasi uniformiser le niveau de la vitesse axiale sur la section transversale à des valeurs proches de

l'unité. La quasi uniformité est illustrée dans la Figure 11, qui représente la distribution de la vitesse axiale à la section transversale de la sortie de l'espace annulaire.

Lorsque l'inclinaison négative est réduite à $\theta = -\frac{\pi}{3}$, la flottabilité axiale est renforcée et son effet est un concurrent de l'effet opposé de la viscosité réduite. La visualisation de la distribution spatiale de la vitesse axiale a révélé qu'elle présente une évolution axiale continue de l'entrée jusqu'à la sortie de l'espace annulaire. De l'entrée de l'espace annulaire jusqu'à environ $z = 9$, en dehors des sous-couches de Brinkman, la distribution de la vitesse axiale est représentée par la stratification radiale des espaces annulaires elliptiques confocaux avec le niveau décroissant radialement quoique légèrement. Le niveau de la vitesse autour et près du cylindre intérieur est légèrement supérieur à 1 et cette augmentation est un effet de réduction de la viscosité. De $z = 9$ à $z = 26$, l'effet de réduction de la viscosité est plus renforcé dans la partie supérieure, relativement plus chaud, de la section transversale. Axialement, l'épaisseur de la couche annulaire à grande vitesse autour du cylindre intérieur est agrandie dans le haut et réduit dans le bas de la section transversale. De $z = 26$ à la sortie de l'espace annulaire, l'effet de la poussée axiale devient dominant autour du cylindre intérieur dans la partie supérieure de la section transversale. Par conséquent, dans ces zones, le niveau de la vitesse est réduit axialement, continuellement. La distribution de la vitesse à la section transversale de la sortie de l'espace annulaire est représentée dans la Figure 12. On voit que la réduction du niveau de la vitesse axiale par la flottabilité devient importante dans la partie supérieure plus chaude de la section transversale, en particulier près de l'axe elliptique mineur. À cet endroit, des variations angulaires et radiales importantes sont visibles. Loin de cette région, les variations sont beaucoup plus faibles et le niveau de la vitesse axiale est légèrement supérieur à l'unité.

Pour le montage vertical négatif ($\theta = -\frac{\pi}{2}$), la flottabilité opposée est totalement axiale. Plus près du cylindre intérieur, la réduction de la viscosité a pu augmenter légèrement le niveau de la vitesse axiale seulement sur une longueur inférieure à $z = 10$. Au-delà de cette longueur, le niveau de la vitesse axiale diminue de façon monotone le long de la direction axiale. Le niveau de la vitesse est diminué par la flottabilité opposée dominante. Plus près du cylindre extérieur, le niveau de la vitesse axiale diminue légèrement sur une longueur inférieure à $z = 20$. Au-delà de cette longueur, le niveau de la vitesse axiale augmente de façon monotone le long de la direction axiale. Le montage négatif vertical de l'espace annulaire symétrise la distribution sur la section transversale de la vitesse axiale par rapport aux axes elliptiques. La distribution de la vitesse sur la section de sortie de l'espace annulaire

est illustrée sur la Figure. 13. En dehors des sous-couches de Brinkmann, on constate que la diminution de vitesse radiale est plus prononcée à proximité du cylindre intérieur. En outre, la variation angulaire est significative seulement près du cylindre intérieur. Le niveau de la vitesse de la section transversale ne dépasse pas 1.045.

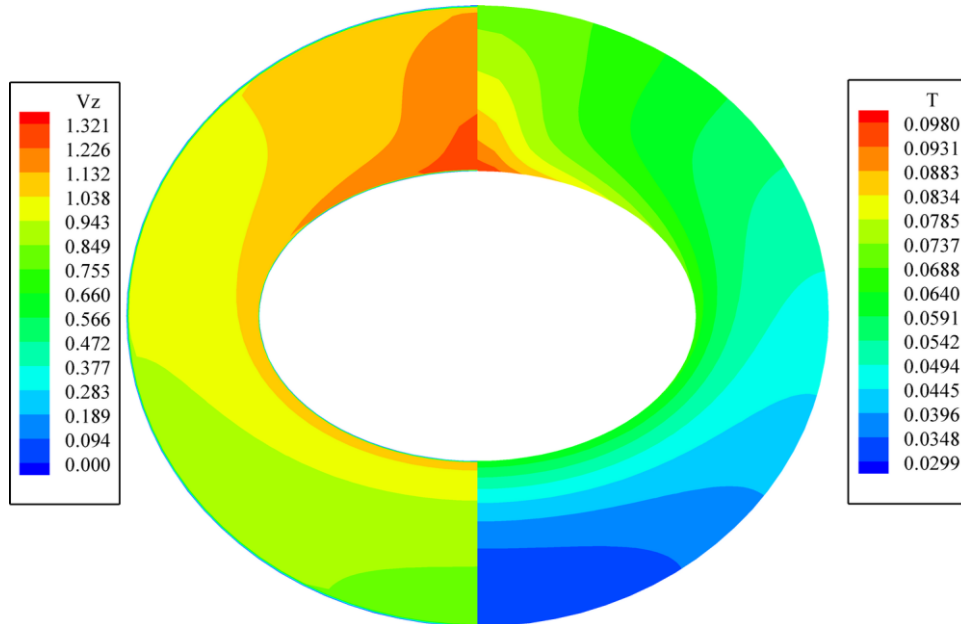


Fig. 7. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = 0$

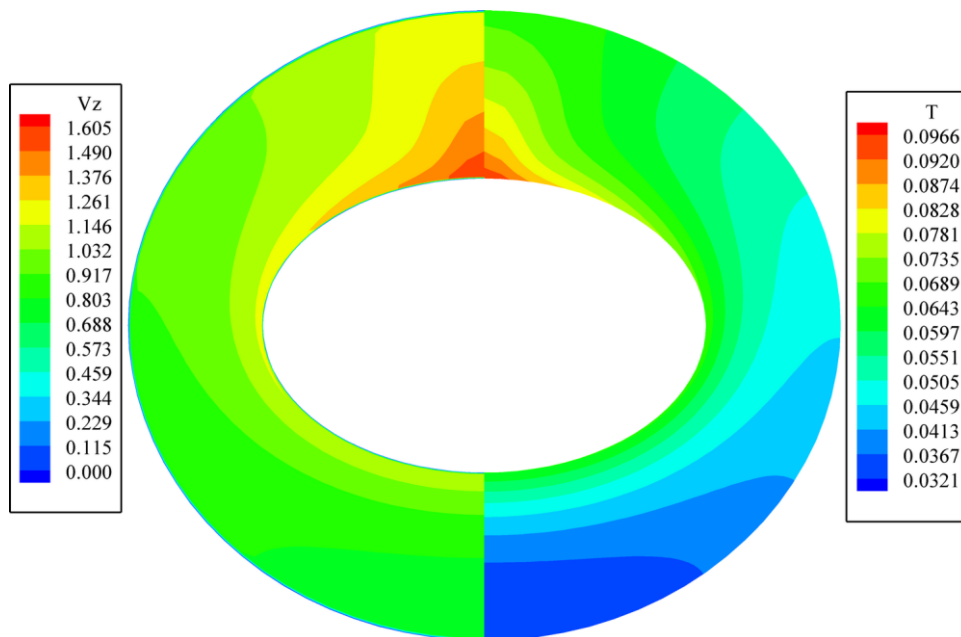


Fig. 8. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{6}$

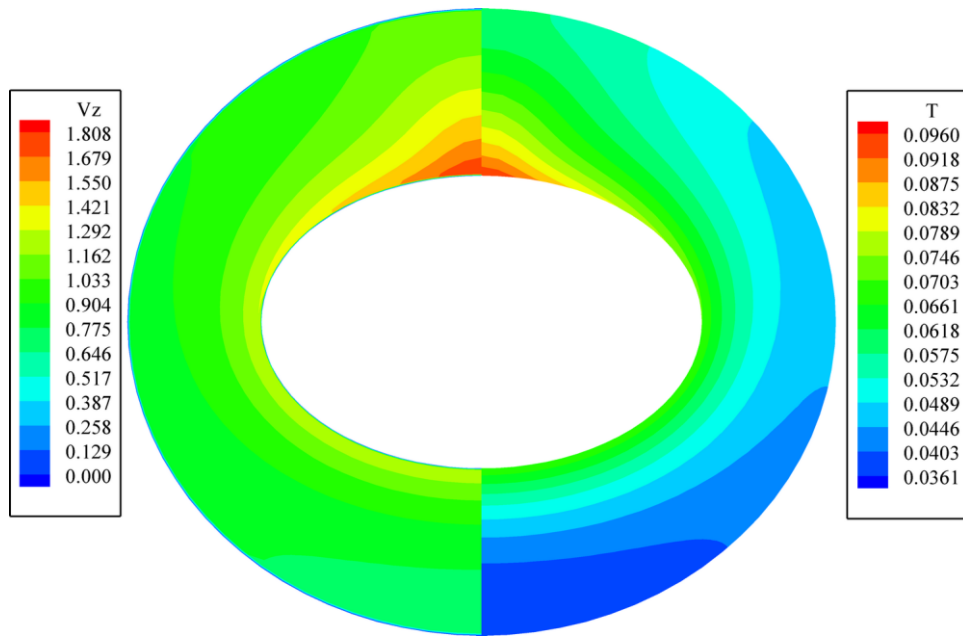


Fig.9. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{3}$

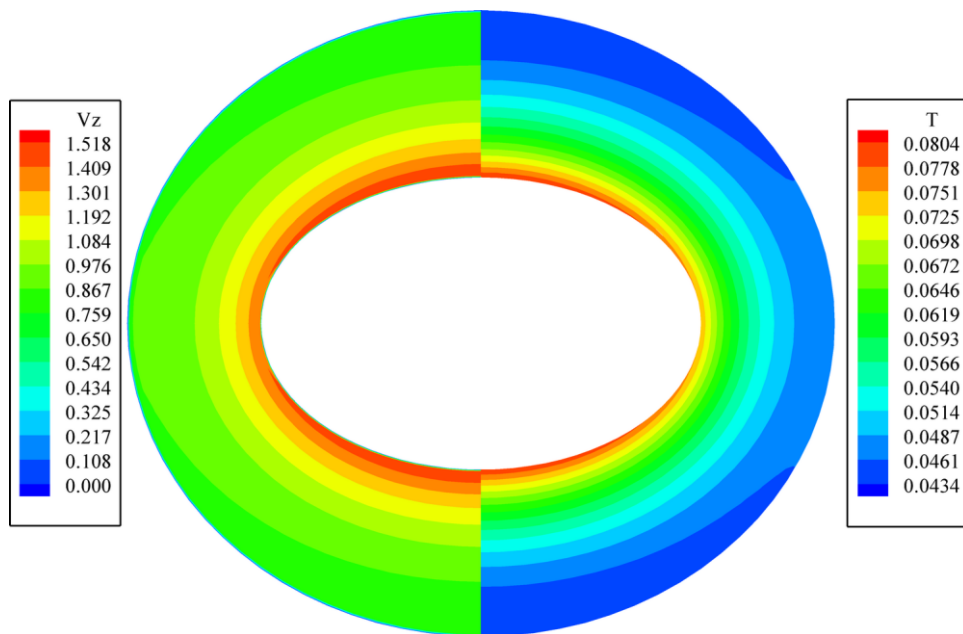


Fig. 10. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{2}$

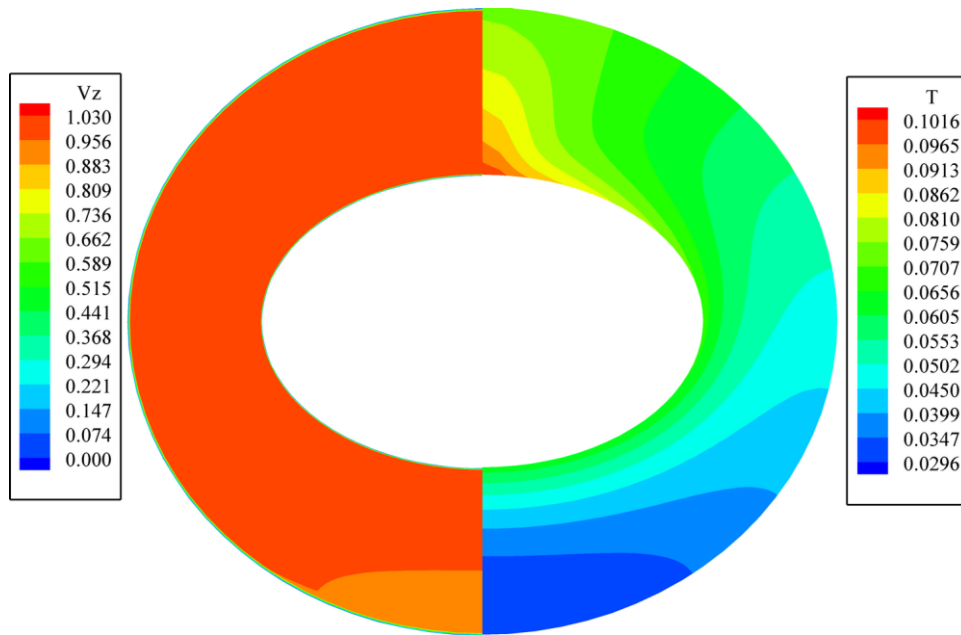


Fig. 11. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{6}$

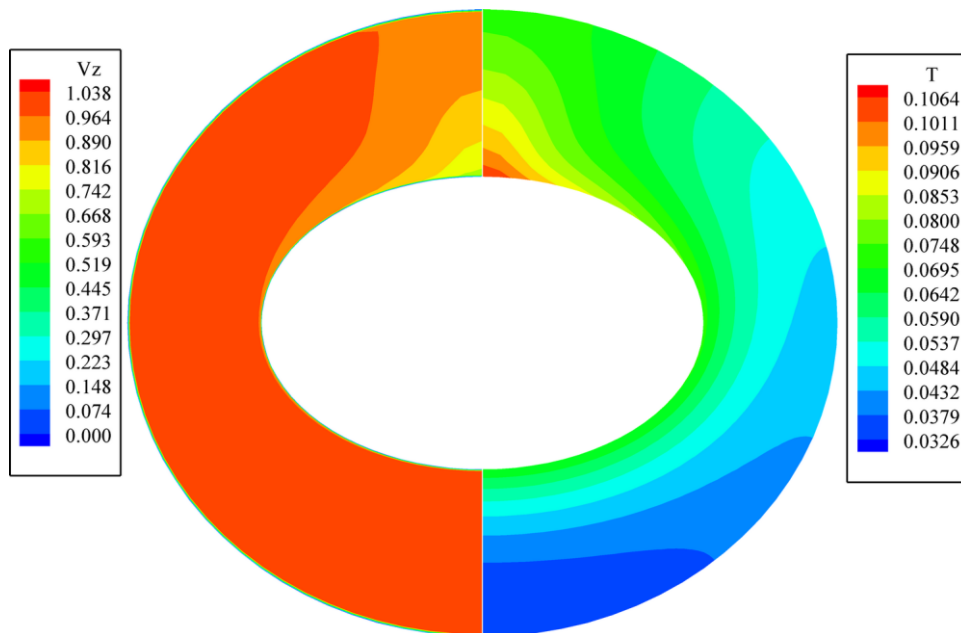


Fig. 12. Vitesse axiale et température à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{3}$

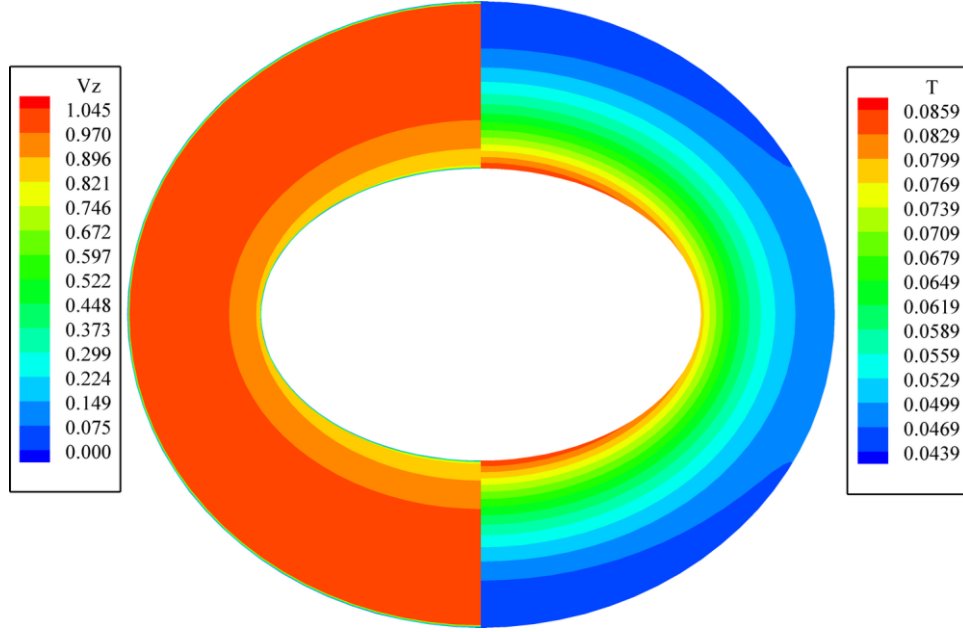


Fig. 13. Vitesse axiale et température à la section de sortie d'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{2}$

5.3. Chute de pression statique axiale

Multipliant l'équation (14) par $h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz$, intégrant le produit sur un espace annulaire de longueur z , divisant les résultats par la surface de la section transversale et utilisant l'équation (21), on obtient la chute de pression statique moyenne sur la section le long de la longueur d'espace annulaire considéré :

$$\begin{aligned}
\Delta p = p_m(0) - p_m(z) = & \frac{a g z \sin\theta}{V_{z0}^*{}^2} + \frac{1}{\varphi^2 S} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z^2(\varepsilon, \eta, z) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta - \frac{1}{\varphi^2} + \\
& \frac{1}{\varphi Re S} \int_0^z \int_0^{2\pi} \left(\mu \frac{\partial V_z(\varepsilon, \eta, z)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_i} - \mu \frac{\partial V_z(\varepsilon, \eta, z)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_o} \right) d\eta dz + \\
& \frac{1}{\varphi Re S} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \left(2 \mu \frac{\partial V_z(\varepsilon, \eta, z)}{\partial z} \Big|_0 \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta + \frac{1}{Re Da S} \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \mu V_z h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz + \\
& \frac{C_f}{\sqrt{Da S}} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^z V_z(\varepsilon, \eta, z) \sqrt{V_\varepsilon^2(\varepsilon, \eta, z) + V_\eta^2(\varepsilon, \eta, z) + V_z^2(\varepsilon, \eta, z)} h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz - \\
& \frac{Gr}{S Re^2} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^z T(\varepsilon, \eta, z) \sin\theta h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz
\end{aligned} \tag{29}$$

La chute de pression totale est la somme de plusieurs composantes.

Une différence de la pression hydrostatique :

$$\Delta p_{hyd} = \frac{a g z \sin\theta}{V_{z0}^*{}^2} \tag{30}$$

Une différence de la pression dynamique :

$$\Delta p_{dyn} = \frac{1}{\varphi^2 S} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} V_z^2(\varepsilon, \eta, z) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta - \frac{1}{\varphi^2} \quad (31)$$

La contrainte de cisaillement de la surface du cylindre intérieur :

$$\Delta p_{fri} = \frac{1}{\varphi Re S} \int_0^z \int_0^{2\pi} \left(\mu \frac{\partial V_z(\varepsilon, \eta, z)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_i} \right) d\eta dz \quad (32)$$

La contrainte de cisaillement de la surface du cylindre extérieur :

$$\Delta p_{fro} = \frac{-1}{\varphi Re S} \int_0^z \int_0^{2\pi} \left(\mu \frac{\partial V_z(\varepsilon, \eta, z)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_o} \right) d\eta dz \quad (33)$$

La contrainte normale à l'entrée d'espace annulaire :

$$\Delta p_n = \frac{1}{\varphi Re S} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \left(2 \mu \frac{\partial V_z(\varepsilon, \eta, z)}{\partial z} \Big|_0 \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (34)$$

La résistance de Darcy :

$$\begin{aligned} \Delta p_{Da} &= \frac{1}{Re Da S} \int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \mu V_z h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} V_z h_1 h_2 d\varepsilon d\eta}{Re Da S} \frac{\int_0^z \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \mu V_z h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz}{\int_0^{2\pi} \int_{0.8}^{1.4} V_z h_1 h_2 d\varepsilon d\eta} \\ &= \frac{z}{Re Da} \left[\frac{1}{z} \int_0^z \mu_m(z) dz \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Où $\mu_m(z)$ est une viscosité moyenne de mélange à une section, définie d'une manière similaire à celle de la température moyenne de mixage dans l'équation. (23). L'expression $\left[\frac{1}{z} \int_0^z \mu_m(z) dz \right]$ dans l'équation. (35) est la viscosité moyenne d'espace annulaire de longueur z . Par conséquent, puisque la viscosité est axialement diminuée par chauffage, la résistance de Darcy est inférieure à celle obtenue avec une viscosité constante.

La résistance d'inertie de Forchheimer :

$$\Delta p_{In} = \frac{C_f}{\sqrt{Da} S} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^z V_z(\varepsilon, \eta, z) \sqrt{V_\varepsilon^2(\varepsilon, \eta, z) + V_\eta^2(\varepsilon, \eta, z) + V_z^2(\varepsilon, \eta, z)} h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz \quad (36)$$

La contribution de la flottabilité axiale :

$$\Delta p_{Bu0} = \frac{-Gr}{S Re^2} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} \int_0^z T(\varepsilon, \eta, z) \sin \theta h_1 h_2 h_3 d\varepsilon d\eta dz \quad (37)$$

Pour tous l'espace annulaire ($z = 100$), la chute de pression et les composants correspondants (Équations. (29-37)), pour les angles d'inclinaison considérés sont répertoriés dans le Tableau 4. Avec les paramètres de contrôle considérés, on constate que pour tous les angles d'inclinaison, Δp_n et Δp_{dyn} sont négligeables et la contribution du frottement aux surfaces des cylindres est très faible. Pour le montage horizontal, la

contribution principale à la chute de pression est la résistance de Darcy, égale à 1.170×10^5 . Si la viscosité est prise constante et égale à sa valeur de référence, la résistance sera égale à 1.545×10^5 . La viscosité variable entraîne 24% de réduction de la résistance de Darcy. Pour tous les angles d'inclinaison positifs, la différence de la pression hydrostatique positive est le contributeur principal à la chute de pression. Cette chute augmente avec l'angle d'inclinaison. Pour tous les angles d'inclinaison négatifs, la différence de la pression hydrostatique négative est le facteur principal de l'augmentation de pression et elle conduit à un gain de la pression statique qui augmente avec la diminution d'angle d'inclinaison.

Tableau 4 Composantes de la chute de pression vs les angles d'inclinaison considérés

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Δp_{hyd}	-1.256×10^7	-1.087×10^7	-6.278×10^6	0.000	6.278×10^6	1.087×10^7	1.256×10^7
Δp_{dyn}	0.003	0.003	0.001	0.013	0.033	0.045	0.039
Δp_{fri}	28.45	30.27	33.25	36.35	39.38	41.98	43.15
Δp_{fro}	40.49	39.87	38.74	37.67	36.62	35.62	35.17
Δp_n	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Δp_{Da}	1.168×10^5	1.170×10^5	1.171×10^5	1.170×10^5	1.170×10^5	1.169×10^5	1.168×10^5
Δp_{In}	4.834×10^3	4.836×10^3	4.844×10^3	4.878×10^3	4.927×10^3	4.959×10^3	4.960×10^3
Δp_{Buo}	3.149×10^4	2.720×10^4	1.544×10^4	0.000	-1.490×10^4	-2.571×10^4	-2.980×10^4
Δp	-1.247×10^7	-1.078×10^7	-6.172×10^6	1.220×10^5	6.385×10^6	1.097×10^7	1.265×10^7

5.4. Champ thermique

Il est démontré dans la première partie de cette thèse que la variation axiale de la température moyenne, de la section droite, le long de l'espace annulaire est :

$$T_m(z) = \frac{P_i}{Re Pr S} z \quad (38)$$

Par conséquent, la température moyenne de mixage est une fonction linéaire croissante de la coordonnée axiale dans tous les cas considérés. Elle est une constante à une section donnée. La distribution spatiale de la température et les niveaux de température atteints sont déterminés par le transfert de chaleur convectif et diffusif. La convection axiale significative dépend du niveau de la vitesse axiale à proximité du cylindre intérieur chauffé. L'écoulement secondaire de flottabilité, lorsqu'elle est présente, améliore le mélange convectif thermique

sur l'espace de la section droite. La direction de son mouvement provoque une asymétrie de la température de la section transversale par rapport à l'axe elliptique majeur. La Diffusion de la chaleur sur la section transversale est beaucoup plus grande que le long de la direction axiale.

Les côtés droits des graphes dans les Figures. 7-13 montrent la distribution de la température à la section de sortie de l'espace annulaire pour les sept inclinaisons considérés. La revue de la distribution spatiale de la température du montage horizontal a révélé que le niveau de la température augmente de façon monotone le long de la direction axiale. La température de la section devient asymétrique au-delà de $z = 9$. L'asymétrie est améliorée axialement. La distribution de la température à la section de sortie de l'espace annulaire est présentée dans la Figure. 7. Il est évident que la grande variation de température est dans la partie supérieure plus chaude de la section transversale. La courbure prononcée des isothermes à la partie supérieure de la section transversale est entraînée par l'écoulement ascendant de flottabilité relativement forte, à cet endroit. Dans la direction radiale, la température diminue en allant du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur. Suivant la direction angulaire, la température augmente du bas vers le haut de la section transversale. La température maximale est égale à 0.098 et est localisée à $\varepsilon = 0.8$ et $\eta = \frac{\pi}{2}$ (à l'intersection du cylindre intérieur et l'axe elliptique mineur, au sommet de la section transversale). Le champ thermique décrit est qualitativement et quantitativement différent de celui d'un écoulement uniforme de la convection forcée, avec des propriétés thermophysiques constantes, présentée dans la Partie 1 de la présente thèse.

Les champs thermiques des angles d'inclinaison $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ ont des évolutions axiales qui sont qualitativement similaires à celles du montage horizontal. Toutefois, l'espace de la zone des grandes températures et la courbure des isothermes dans la partie supérieure de la section transversale sont réduits avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison. Ces réductions sont dues à l'affaiblissement de la force d'écoulement secondaire de flottabilité (conduit moins de chaleur à la partie supérieure) et le renforcement d'écoulement axial par la flottabilité axiale (augmentant le transfert convectif axial) lorsque l'inclinaison est augmentée. Ce refroidissement relatif de la partie supérieure est compensé par l'échauffement relatif de la partie inférieure de la section transversale, afin de préserver constance de la température moyenne du mélange. Les températures de la section de sortie de l'espace annulaire, obtenues avec les angles d'inclinaison $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$, sont

présentées dans la Figure 8 et la Figure 9, respectivement. L'asymétrie du champ thermique, par rapport à l'axe majeur elliptique, est réduite avec l'augmentation de l'inclinaison. Le niveau de la température maximale est légèrement réduit avec l'augmentation d'inclinaison : les températures maximales sont égales à 0.0966 et 0.0960 pour les angles d'inclinaison $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$, respectivement.

Pour le montage vertical positif de l'espace annulaire ($\theta = \frac{\pi}{2}$), la convection thermique axiale est améliorée par la flottabilité axiale coopérante ce qui symétrise la distribution de température par rapport aux axes elliptiques. La distribution spatiale de la température est caractérisée par une augmentation monotone axiale, une diminution radiale du cylindre intérieur vers l'extérieur et une faible variation angulaire loin des surfaces des cylindres. La température de la section de sortie de l'espace annulaire est représentée dans la Figure 10. Elle est qualitativement similaire à celle de la convection forcée, de la partie 1 de cette thèse ; cependant, le niveau de la température est réduit : la température maximale atteinte est 0.0804 au lieu de 0.0847. Cette réduction du niveau de température est due au transfert de chaleur amélioré lorsque la convection mixte est considérée. Le nombre de Nusselt de la convection mixte avec l'angle d'inclinaison $\theta = \frac{\pi}{2}$ est plus élevé que celui de la convection forcée de la Partie 1, comme on le verra plus tard (voir la Figure 14). A une section transversale donnée, où la température du mixage est une constante, il peut être conclu de l'équation (22) que le niveau de la température du cylindre intérieur est plus faible dans le cas de la convection mixte.

Les champs thermiques des angles d'inclinaison négatifs $\theta = -\frac{\pi}{6}$ et $\theta = -\frac{\pi}{3}$ sont asymétriques par rapport à l'axe elliptique majeur. Ils ont des évolutions axiales qui sont qualitativement similaires à ceux obtenues pour les angles d'inclinaison positifs $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$. La similarité qualitative est expliquée par l'invariance de la flottabilité de la section transversale (proportionnelle à $\cos \theta$). Cependant, la flottabilité axiale opposée, pour l'angle d'inclinaison négatif, rend la partie supérieure de la section relativement plus chaud (et la partie inférieure relativement plus froid) que celle de l'angle d'inclinaison positif correspondant. L'espace de la zone de grande température et la courbure des isothermes en haut de la section transversale sont plus grandes pour un angle d'inclinaison négatif. La comparaison des évolutions spatiales des champs thermiques des angles $\theta = -\frac{\pi}{6}$ et $\theta =$

$-\frac{\pi}{3}$ montre que l'espace de la zone à grande température au sommet de la section transversale est plus faible pour l'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Cela est dû à un brassage transversal, de l'écoulement secondaire, plus faible dans la partie supérieure de la section. Cependant, le niveau de température atteint dans la partie supérieure de la section transversale est supérieur pour l'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$ à cause de la réduction sévère de la vitesse axiale au sommet du cylindre intérieur. Les températures les plus élevées sont égales à 0.1016 et 0.1064 pour les angles d'inclinaison $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{3}$, respectivement. Les aspects qualitatifs et quantitatifs mentionnés sont illustrés par les températures à la section de sortie de l'espace annulaire présentées dans les Figures 11 et 12.

Pour le montage vertical négatif d'espace annulaire ($\theta = -\frac{\pi}{2}$), la convection thermique est axiale et réduite par la flottabilité axiale opposée. Pour ce montage, la flottabilité est totalement axiale. La distribution spatiale de la température est qualitativement similaire à celle du montage vertical positif, mais le niveau de la température est plus élevé. La température de la section de sortie de l'espace annulaire est représentée sur la Figure 13 ; elle est symétrique par rapport aux axes elliptiques et son niveau maximum atteint est 0.0859. Ce niveau est légèrement supérieur à celui de la convection forcée (0.0847), de la Partie 1 de cette thèse. Cette augmentation du niveau de température est due à la diminution du transfert de chaleur, par la flottabilité axiale opposée, lorsque la convection mixte est considérée. Le nombre de Nusselt de la convection mixte avec l'angle d'inclinaison $\theta = -\frac{\pi}{2}$ est légèrement inférieur à celui de la convection forcée de la Partie 1, comme on le verra plus tard (voir la Figure 14). A une section transversale donnée, où la température de mélange est une constante, il peut être conclu à partir de l'équation (22) que le niveau de la température du cylindre intérieur est légèrement plus élevé dans le cas de la convection mixte.

5.5. Transfert thermique quantifié

La performance thermique des différentes orientations de l'espace annulaire peut être quantifiée par la comparaison des nombres de Nusselt axiaux des angles d'inclinaison considérés avec celui de la convection forcée de la Partie 1 de la présente thèse. Ce qui est fait dans la Figure 14. On voit que le meilleur transfert de chaleur est réalisé avec le montage horizontal. Le deuxième meilleur transfert de chaleur est obtenu avec les angles d'inclinaison

$\theta = -\frac{\pi}{6}$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$ qui ont des nombres de Nusselt axiaux comparables. Un troisième transfert thermique est celui de l'inclinaison $\theta = \frac{\pi}{3}$, qui est meilleur que celui de l'inclinaison $\theta = -\frac{\pi}{3}$. Le nombre de Nusselt axial du montage vertical positif est légèrement plus élevé tandis que celui du montage vertical négatif est légèrement inférieur à celui de la convection forcée. Il est apparent que la convection mixte est en développement thermique pour les angles d'inclinaison $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, 0 , $\frac{\pi}{6}$, et $\frac{\pi}{3}$. Cependant, l'examen des valeurs numériques des nombres de Nusselt axiaux des montages verticaux $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ montre qu'ils ont une variation axiale continue, quoique lentement, entre le milieu et la sortie de l'espace annulaire. Par conséquent, la convection mixte de ces montages est considérée en développement thermique lent.

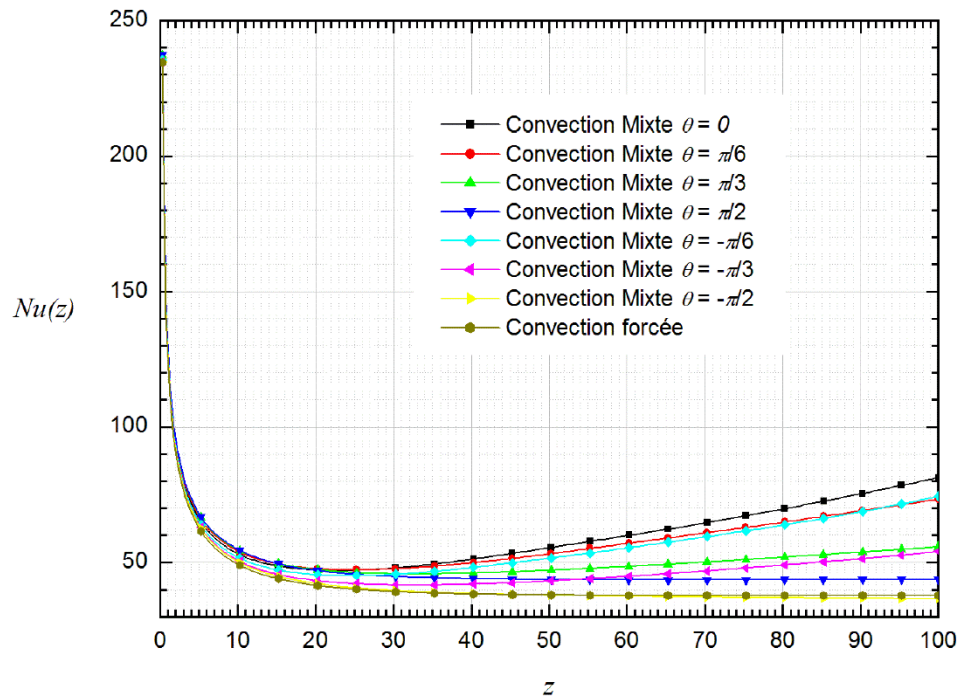


Fig. 14. Comparaison des nombres de Nusselt axiaux de la convection mixte et forcée

La comparaison de la performance thermique axiale, des inclinaisons considérées, de la convection mixte avec celle de la convection forcée (avec un écoulement uniforme) a surligné de nombreux résultats. Le premier est que le montage horizontal a la meilleure performance thermique. Cela signifie que lorsque la flottabilité est totalement dans la section transversale, elle confère au fluide un brassage transversal qui améliore le transfert de

chaleur mieux que le brassage axial amélioré par une flottabilité totalement axiale et coopérante. Le second est que pour une faible inclinaison, les performances thermiques des inclinaisons positives et négatives sont très proches. Cela est dû à l'effet des flottabilités transversales comparables qui améliorent le transfert de chaleur et une flottabilité axiale coopérante ou opposante relativement plus faible qui a un faible effet sur le transfert de chaleur. Toutefois, pour les grandes inclinaisons, l'inclinaison positive a une meilleure performance thermique par rapport à l'inclinaison négative correspondante. Cela est dû à l'effet de faibles flottabilités transversales et d'une flottabilité axiale, coopérante ou opposante, relativement plus grande. Le troisième est que le montage vertical négatif a une performance thermique légèrement plus faible que celle de la convection forcée. Ceci est causé par une grande flottabilité axiale opposante.

5.6. Variations thermiques de la conductivité thermique et de la viscosité

Pour l'intervalle de variation de la température dans cette étude, la variation de la conductivité thermique totale à travers l'espace annulaire est relativement faible. Cette variation est due à deux facteurs. Le premier est la faible contribution de la conductivité thermique de l'eau (qui augmente avec de la température) à la conductivité thermique effective. D'après l'équation (8), le rapport des contributions du fluide et solide est d'environ 9% à l'entrée de l'espace annulaire. Le second facteur est la faiblesse de la conductivité de dispersion thermique (qui est proportionnelle à la vitesse). Elle est égale à zéro au niveau des surfaces des cylindres et elle est relativement faible ailleurs pour les paramètres de contrôle de la présente étude (voir le deuxième terme de l'équation (8)). Des Figures 15-21, la variation relative de la conductivité totale à travers l'espace annulaire est dans l'intervalle 2 - 3.4%, pour les orientations considérées de cette étude. Cependant, la diminution de la viscosité de l'eau par chauffage est très importante et continue le long de l'espace annulaire. Sa distribution sur la section transversale est opposée à celle de la température. De la valeur de référence 1 à l'entrée d'espace annulaire, la viscosité est réduite à un niveau minimal, à la sortie d'espace annulaire, qui est égale à 0.45, 0.39, 0.42, 0.41, 0.41, 0.42 et 0.47 pour les angles d'inclinaison $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$, respectivement.

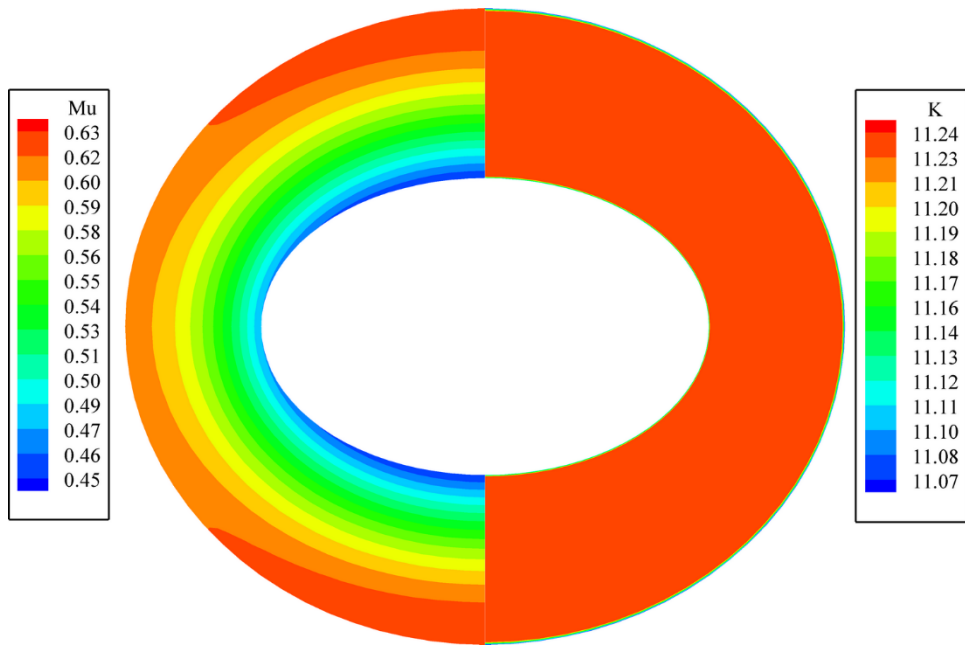


Fig. 15. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{2}$

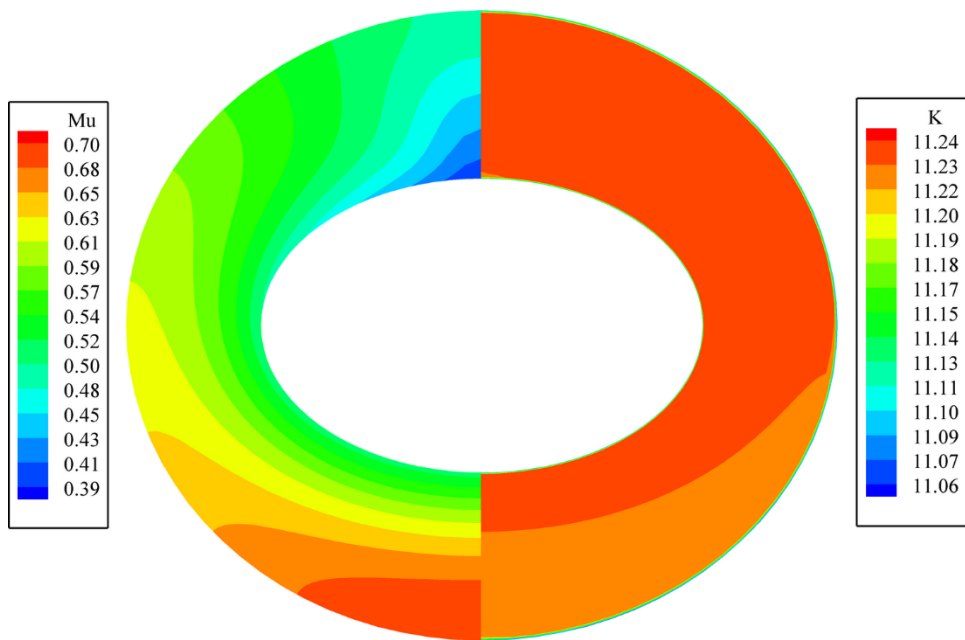


Fig. 16. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{3}$

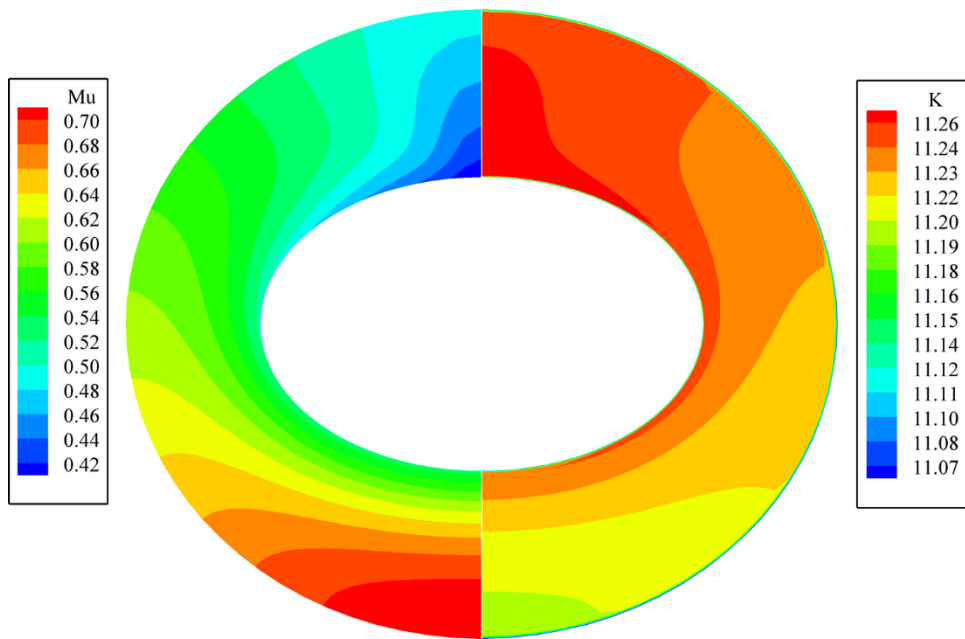


Fig. 17. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = -\frac{\pi}{6}$

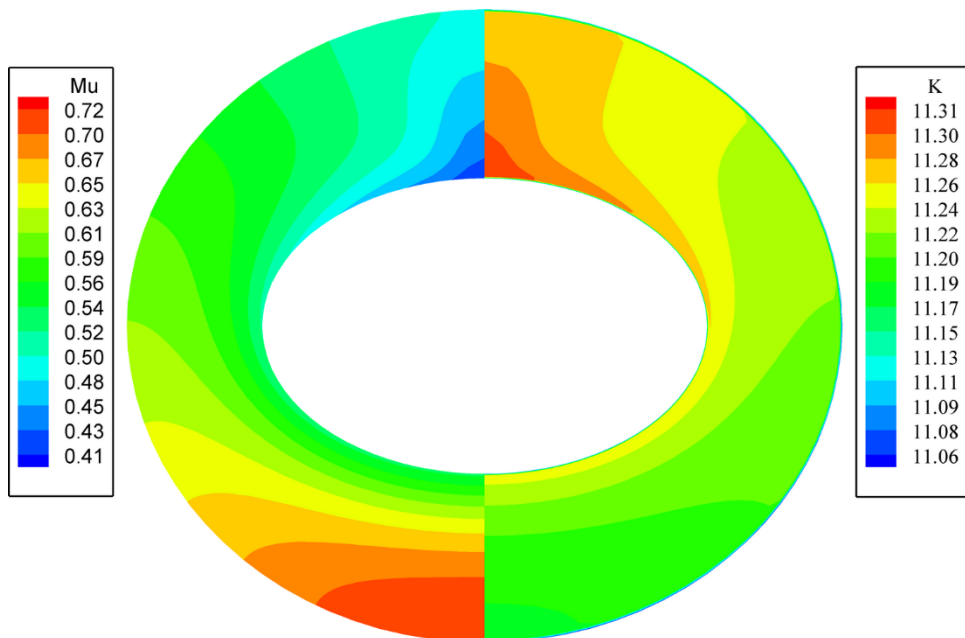


Fig. 18. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = 0$

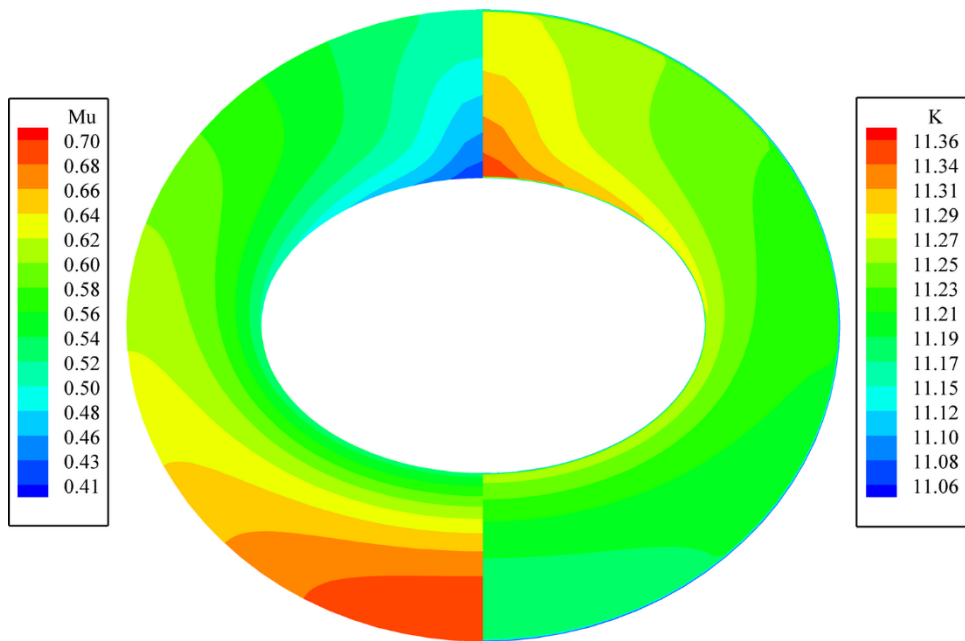


Fig. 19. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{6}$

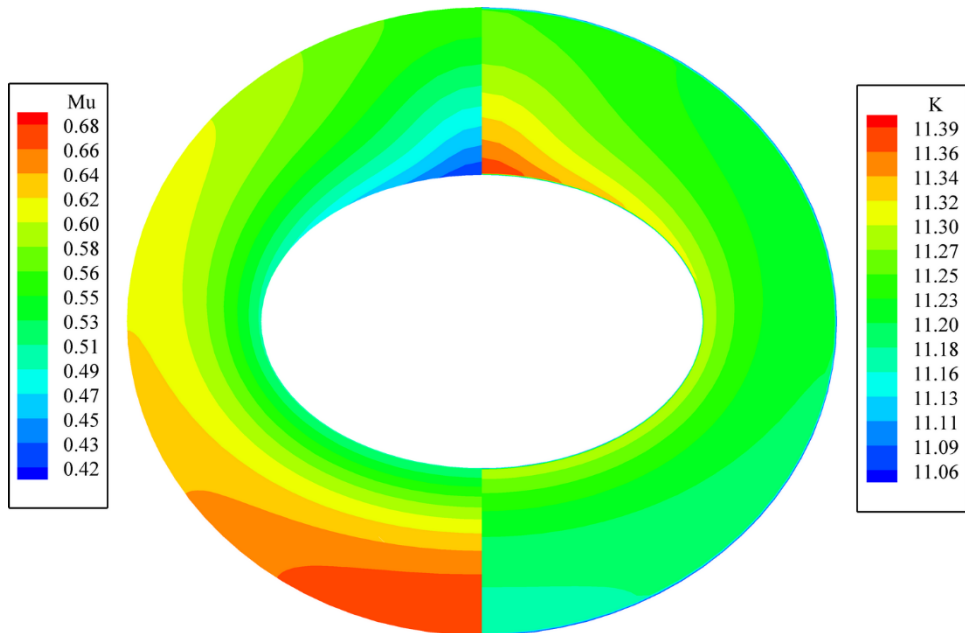


Fig. 20. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{3}$

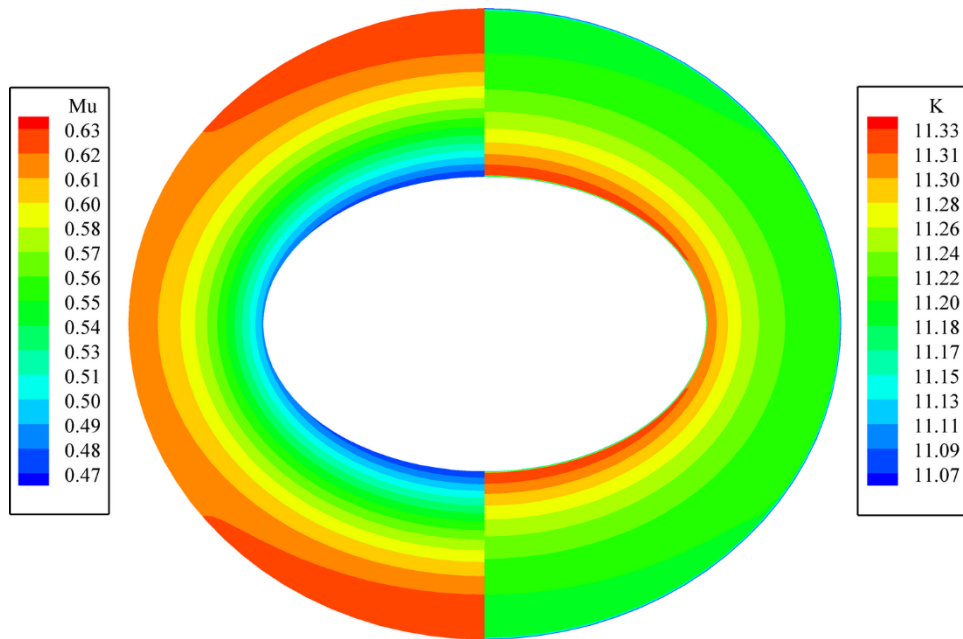


Fig. 21. Conductivité thermique et viscosité à la section de sortie de l'espace annulaire. $\theta = \frac{\pi}{2}$

Conclusion
et
Recommandations

Cette étude présente les résultats de la simulation numérique de la convection mixte laminaire tridimensionnelle, dans un espace annulaire elliptique incliné chauffé par un flux de chaleur pariétal constant. Cet espace est rempli d'une mousse d'Aluminium 20 PPI isotrope et homogène ; et il est utilisé pour chauffer un écoulement d'eau. Sept angles d'inclinaison ont été considérés: $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Pour les inclinaisons différentes de celles des montages verticaux, il est constaté que l'écoulement secondaire de la flottabilité de la section transversale confère au champ thermique une asymétrie par rapport à l'axe elliptique majeur. Cette asymétrie est caractérisée par une partie supérieure de la section transversale relativement plus chaude et une partie inférieure relativement plus froide. L'asymétrie est plus grande pour le montage horizontal, pour lequel l'écoulement secondaire de la flottabilité transversale est le plus fort. L'asymétrie devient plus faible quand l'inclinaison est déplacée vers les montages verticaux, pour lesquels l'écoulement secondaire de la flottabilité transversale est inexistant. Une conséquence directe de l'asymétrie mentionnée est une variation considérable de la viscosité qui se manifeste par une réduction de son niveau dans les zones relativement plus chaudes. Un effet pertinent de cette réduction est la diminution de la résistance de Darcy qui conduit à une augmentation de la vitesse axiale dans les zones plus chaudes. Une telle augmentation tend à améliorer la convection axiale qui modère le niveau de la température dans les zones relativement plus chaudes. Le niveau de la température détermine l'intensité de la flottabilité axiale, dépendante de l'inclinaison, qui aide ou entrave l'écoulement axial et affecte le niveau de l'écoulement secondaire de la flottabilité transversale. Les descriptions précédentes illustrent le couplage du champ thermique et de l'écoulement et soulignent la complexité de synergie de l'effet combiné de la flottabilité, l'inclinaison et la viscosité variable.

La comparaison des nombres de Nusselt axiaux des angles d'inclinaison considérés révèle que le montage horizontal a la meilleure performance thermique. La performance thermique est réduite par l'augmentation ou la diminution de l'angle d'inclinaison par rapport au montage horizontal. La performance thermique du montage vertical positif est meilleure que celle du montage vertical négatif.

L'analyse et la comparaison des variations de la pression statique axiale à travers l'espace annulaire, pour les orientations considérées, soulignent plusieurs conclusions. Pour

le montage horizontal, la contribution principale à la chute de pression est la résistance de Darcy. À cause de la réduction de la viscosité, elle est inférieure à celle de la convection forcée avec une viscosité constante. Pour les inclinaisons positives, la contribution hydrostatique, laquelle est proportionnelle au niveau d'inclinaison, est dominante et augmente la chute de pression significativement. Pour les inclinaisons négatives, la contribution hydrostatique, laquelle est proportionnelle au niveau d'inclinaison, est dominante et fournit une augmentation de la pression statique qui permet au fluide de s'écouler sous l'effet de la force de gravité.

Pour les paramètres géométriques, dynamiques et thermiques considérées de cette étude, en se basant sur les conclusions susmentionnées, un faible angle d'inclinaison négatif est recommandé. Une telle inclinaison fournira une élévation de pression qui permettra de surmonter la résistance totale à l'écoulement et un transfert de chaleur amélioré très proche de celui du montage horizontal.

Le fait que notre géométrie et le milieu poreux sont spécifiques n'empêche pas la généralisation de nos conclusions. Ils sont applicables à tout système de convection mixte forte (avec des propriétés physiques variables du liquide), dans les conduits, espaces annulaires et canaux, suffisamment longs et inclinés, remplis de tout milieu poreux qui a une conductivité thermique effective supérieure à celle du liquide utilisé.

Références

- [1] Metal foam from space to earth,
<http://www.creax.com/wpcontent/uploads/creax/Bekaert-CREAX-MetalFoam.pdf>.
- [2] K. Velusamy, V.K. Garg, Laminar mixed convection in vertical elliptic ducts, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 39 (1996) 745-752.
- [3] N. Islam, U.N. Gaitonde, G.K. Sharma, Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 44 (2001) 2107-2120.
- [4] K. Muralidhar, Mixed convection flow in a saturated porous annulus, *Int. J. Heat Mass Transfer*. 32 (1989) 881-888.
- [5] A. Kumar, P. Bera, J. Kumar, Non-Darcy mixed convection in a vertical pipe filled with porous medium, *International Journal of Thermal Sciences*. 50 (2011) 725-735.
- [6] P.M. Kamath, C. Balaji, S.P. Venkateshan, Experimental investigation of flow assisted mixed convection in high porosity foams in vertical channels, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 54 (2011) 5231-5241.
- [7] M. Moawed, E. Ibrahim, Free convection heat transfer inside vertical and inclined elliptic tubes with different axes ratios and different inclination and orientation angles, *Energy Conversion and Management*. 49 (2008) 587-595.
- [8] I.Y. Hussain, M.A.R.N. Al-Safi, Developing laminar mixed convection heat transfer through concentric annuli, *Journal of Engineering*. 16 (2010) 5644-5662.
- [9] D. Cimpean, I. Pop, D.B Ingham, J.H, Merkin, Fully developed mixed convection flow between parallel plates filled with a porous medium, *Transport in Porous Media*. 77 (2009) 87-102.
- [10] T.A. Tahseen, An experimental study for mixed convection through a circular tube filled with porous media and fixed horizontally and inclined, *Modern Applied Science*. 5 (2011) 128-142.

- [11] M. Amaouche, J. L. Peube, Convection mixte autour d'un cylindre horizontal. Influence des variations des propriétés physiques avec la température, *Int. J. Heat and Mass Transfer*. 29 (1986) 1293-1300.
- [12] K. Zerari, M. Afrid, D. Groulx, Forced and mixed convection in the annulus between two horizontal confocal elliptical cylinders, *International Journal of Thermal Sciences*. 74 (2013) 126-144.
- [13] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in porous media*, Third ed., Springer Verlag, New York, 2006.
- [14] A. Narasimhan, J. L. Lage, Variable viscosity forced convection in porous medium channels, in: K. Vafai (Eds.), *Handbook of porous media*, Second ed., 2005, pp. 195-233.
- [15] M. Dehghan, M. S. Valipour, S. Saedodin, Temperature-dependent conductivity in forced convection of heat exchangers filled with porous media: A perturbation solution, *Energy Conversion and Management*. 91 (2015) 259-266.
- [16] V.V. Calmidi, *Transport Phenomena in High Porosity Fibrous Metal Foams*. Ph.D. Thesis, University of Colorado, 1998.
- [17] V.V. Calmidi, R.L. Mahajan, The effective thermal conductivity of high porosity fibrous metal foams, *ASME Trans. J. Heat Transfer*. 121 (1999) 466-471.
- [18] V.V. Calmidi, R.L. Mahajan, Forced convection in high porosity metal foams, *Journal of Heat Transfer*. 122 (2000) 557-565.
- [19] F. Civan, Comparaison of control volume analysis and porous media averaging for formulation of porous media transport, in: J.A. Ferreira, S. Barbeiro, G. Pena, M.F. Wheeler (Eds.), *Modeling and Simulation in Fluid Dynamics in Porous Media*, [Springer Proceedings in Mathematics & Statistics](#). 28, 2013, pp. 27-53.
- [20] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, 1980.

Annexe D

Dans cette annexe, on présente les détails de la discrétisation numérique du domaine physique et des équations modélisantes et leurs conditions aux limites.

1. Discrétisation du domaine physique.

Le domaine physique est discrétisé par sa division en un certain nombre de petits volumes cylindriques elliptiques aux centres desquels sont positionnées les points du maillage principal, ci-après dénommé maillage typique. Chaque volume fini a six faces qui sont ses interfaces avec ses volumes adjacents (voir la Figure 5 de la première partie de cette thèse). Le centre du volume fini typique est un point noté P. Les centres des volumes finis adjacents sont des points notés E, W, N, S, F et B. Les positions des faces du volume fini typique sont notées e, w, n, s, f et b. Dans cette thèse, nous avons utilisé un maillage uniforme suivant chaque direction des coordonnées pour faciliter l'application du schéma des différences centrées et l'obtention de la précision spatiale d'ordre deux. Il a 42 points suivant la direction radiale, 84 points suivant la direction angulaire et 202 points suivant la direction axiale. Ce maillage et sa projection sur une section droite sont illustrés dans les Figures 6 et 7 de la première partie de cette thèse. Les faces des volumes finis typiques, sur les trois surfaces des coordonnées elliptiques, sont présentées dans les Figures D.1, D.2 et D.3. Dans ces figures, les positions des points, les dimensions radiales, angulaires et axiales des volumes finis, les distances entre les points ainsi que les positions des faces sont qualitativement illustrées.

Nos moyens de calcul ne permettent pas l'utilisation d'un maillage plus raffiné. Cependant, les résultats de la première partie de cette thèse ont démontré que la résolution spatiale numérique du maillage utilisé est adéquate.

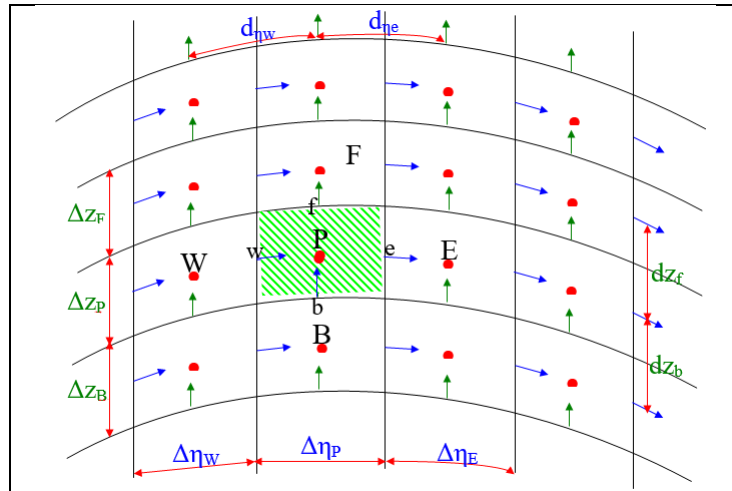


Fig. D.1. Projection du maillage sur la surface (η , z)

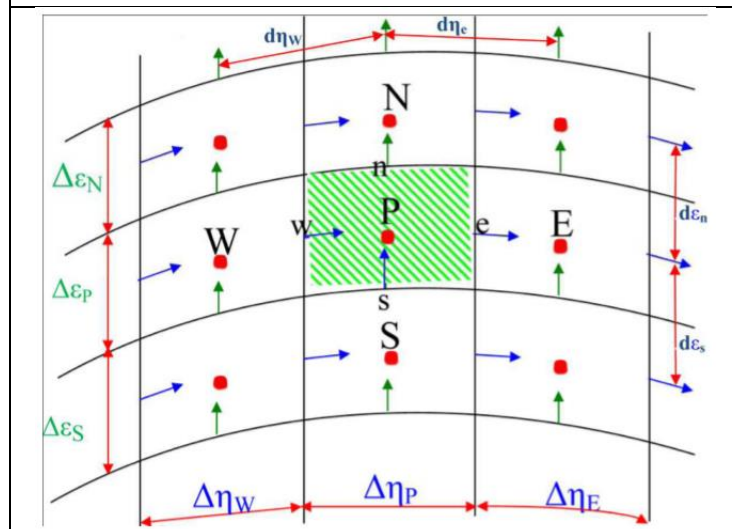


Fig. D.2. Projection du maillage sur la surface (η , ϵ)

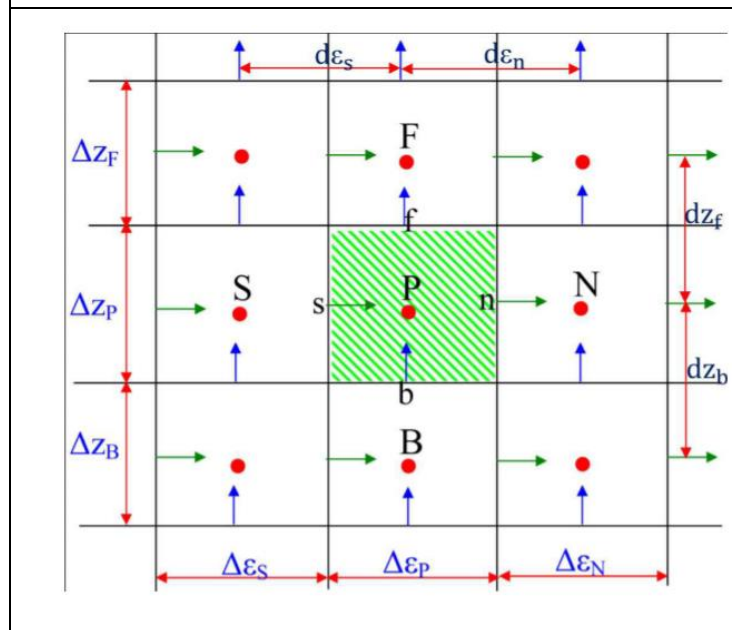


Fig. D.3. Projection du maillage sur la surface (ϵ , z)

2. Discrétisation temporelle

2.1 Termes non stationnaires

La discrétisation des termes non stationnaires dans les équations de mouvement et dans l'équation d'énergie suit un schéma temporel du second ordre. Si on considère Φ comme une variable dépendante, alors la discrétisation temporelle, de la dérivée partielle par rapport au temps, est :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|^{t+\Delta t} = \frac{3\Phi^{t+\Delta t} - 4\Phi^t + \Phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (\text{D.1})$$

2.2 Discrétisation temporelle des termes convectifs et non linéaires

La discrétisation temporelle des termes convectifs et non linéaires, dans l'ensemble des équations modélisantes, suit le schéma explicite d'**Adams–Bashforth**, qui a une précision d'ordre deux :

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \Phi \Big|^{t+\Delta t} \cong 2(\vec{V} \cdot \nabla) \Phi \Big|^t - (\vec{V} \cdot \nabla) \Phi \Big|^{t-\Delta t} \quad (\text{D.2})$$

La variable Φ représente l'une des composantes de la vitesse (V_x, V_y, V_z) ou la température.

2.3 Discrétisation temporelle des termes diffusifs et des termes de pression

La discrétisation temporelle de certains termes diffusifs est semi implicite (comme il sera détaillé plus tard). Dans ces termes, la discrétisation temporelle du coefficient de diffusion est explicite alors que celle de la variable dépendante est implicite. La discrétisation temporelle d'autres termes diffusifs est explicite (comme il sera détaillé plus tard). Dans ces termes, la discrétisation temporelle suit le schéma d'**Adams–Bashforth**. La discrétisation temporelle des termes des gradients de pression est totalement implicite.

2.4 Discrétisation temporelle des termes de Darcy

La discrétisation temporelle des termes de Darcy est semi-implicite.

2.5 Discrétisation temporelle des termes de Forchheimer

La discrétisation temporelle des termes de Forchheimer (termes d'inertie) est explicite suivant le schéma d'**Adam-Bashforth**.

2.6 Discrétisation temporelle des termes de flottabilité

La discrétisation temporelle des termes de flottabilité est explicite suivant le schéma d'Adam-Bashforth.

3. Discrétisation spatiale.

La discrétisation spatiale des variables dépendantes et de leurs dérivées suit le schéma des différences centrées qui a une précision d'ordre 2.

4. Discrétisation de l'équation de continuité

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation de continuité par le volume différentiel, et l'intégration triple entre les limites d'un volume fini typique. La discrétisation temporelle est totalement implicite : Tous les termes sont évalués au temps $(t+\Delta t)$.

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = 0 \quad (D.3)$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_2 V_\varepsilon|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon|_s^{t+\Delta t}] \Delta \eta_p \Delta z_p \quad (D.4)$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 V_\eta|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta|_w^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p \quad (D.5)$$

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = [h_1 h_2 V_z|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z|_b^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \quad (D.6)$$

Les résultats des équations (D.4), (D.5) et (D.6) sont remplacés dans l'équation (D.3) et on obtient l'équation de discrétisation de l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} & [h_2 V_\varepsilon|_n^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon|_s^{t+\Delta t}] \Delta \eta_p \Delta z_p + [h_1 V_\eta|_e^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta|_w^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta z_p + \\ & [h_1 h_2 V_z|_f^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z|_b^{t+\Delta t}] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p = 0 \end{aligned} \quad (D.7)$$

5. Discrétisation de l'équation d'énergie :

La discrétisation est accomplie par la multiplication de l'équation d'énergie par le volume différentiel et l'intégration triple entre les limites d'un volume fini typique :

$$\begin{aligned} & \int_s^n \int_w^e \int_b^f \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} \right] \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \\ & \int_s^n \int_w^e \int_b^f \left[\frac{1}{RePr h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \end{aligned} \quad (D.8)$$

La discrétisation des termes de l'équation d'énergie est présentée ci-dessous :

$$\int_s^n \int_w^e \int_b^f \frac{\partial T}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3T_p^{t+\Delta t} - 4T_p^t + T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \Delta z_p \quad (D.9)$$

$$\begin{aligned}
\int_S^n \int_W^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon T)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_2 V_\varepsilon T]_S^n |^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
&= [h_2 V_\varepsilon T]_n^{t+\Delta t} - [h_2 V_\varepsilon T]_S^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
&= 2 \left[h_{2n} V_\varepsilon |_n^t \left(\frac{T_N^t + T_P^t}{2} \right) - h_{2S} V_\varepsilon |_S^t \left(\frac{T_P^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
&\quad - \left[h_{2n} V_\varepsilon |_n^{t-\Delta t} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{2S} V_\varepsilon |_S^{t-\Delta t} \left(\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p \quad (D.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S^n \int_W^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta T)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 V_\eta T]_W^e |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \\
&= [h_1 V_\eta T]_e^{t+\Delta t} - [h_1 V_\eta T]_W^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \\
&= 2 \left[h_{1e} V_\eta |_e^t \left(\frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) - h_{1W} V_\eta |_W^t \left(\frac{T_P^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \\
&\quad - \left[h_{1e} V_\eta |_e^{t-\Delta t} \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{1W} V_\eta |_W^{t-\Delta t} \left(\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta Z_p \quad (D.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S^n \int_W^e \int_b^f \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z T)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [h_1 h_2 V_z T]_b^f |^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\
&= [h_1 h_2 V_z T]_f^{t+\Delta t} - [h_1 h_2 V_z T]_b^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\
&= 2 \left[h_{1f} h_{2f} V_z |_f^t \left(\frac{T_F^t + T_P^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^t \left(\frac{T_P^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\
&\quad - \left[h_{1f} h_{2f} V_z |_f^{t-\Delta t} \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{1b} h_{2b} V_z |_b^{t-\Delta t} \left(\frac{T_P^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \quad (D.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_S^n \int_W^e \int_b^f \frac{1}{RePr h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{RePr} \left[K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_S^n |^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_n^{t+\Delta t} - \left[K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right]_S^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta Z_p \\
&= \frac{1}{RePr} \left[K_n^{t+\Delta t} \left(\frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right. \\
&\quad \left. - K_S^{t+\Delta t} \left(\frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_S} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta Z_p \quad (D.13)
\end{aligned}$$

$$K_n^{t+\Delta t} = 2K_n^t - K_n^{t-\Delta t} \quad (D.14)$$

$$K_S^{t+\Delta t} = 2K_S^t - K_S^{t-\Delta t} \quad (D.15)$$

$$\begin{aligned} \int_S^n \int_W^e \int_b^f \frac{1}{RePr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{RePr} \left[K \frac{\partial T}{\partial \eta} \right]_w^e \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= \frac{1}{RePr} \left[K \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_e^{t+\Delta t} - K \frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_w^{t+\Delta t} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ &= \frac{1}{RePr} \left[K_e^{t+\Delta t} \left(\frac{T_E^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \right) \right. \\ &\quad \left. - K_w^{t+\Delta t} \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_W^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \quad (D.16) \end{aligned}$$

$$K_e^{t+\Delta t} = 2K_e^t - K_e^{t-\Delta t} \quad (D.17)$$

$$K_w^{t+\Delta t} = 2K_w^t - K_w^{t-\Delta t} \quad (D.18)$$

$$\begin{aligned} \int_S^n \int_W^e \int_b^f \frac{1}{RePr} \frac{\partial}{\partial z} \left(K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{RePr} \left[K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \right]_b^f \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= \frac{1}{RePr} \left[K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_f^{t+\Delta t} \right. \\ &\quad \left. - K h_1 h_2 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_b^{t+\Delta t} \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \\ &= \frac{1}{RePr} \left[K_f^{t+\Delta t} \left(\frac{T_F^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{dz_f} \right) \right. \\ &\quad \left. - K_b^{t+\Delta t} \left(\frac{T_p^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \quad (D.19) \end{aligned}$$

$$K_f^{t+\Delta t} = 2K_f^t - K_f^{t-\Delta t} \quad (D.20)$$

$$K_b^{t+\Delta t} = 2K_b^t - K_b^{t-\Delta t} \quad (D.21)$$

Les valeurs des conductivités ($K_n, K_S, K_e, K_w, K_f, K_b$), aux six faces d'un volume fini typique, sont inconnues ; mais elles dépendent des conductivités des points centrés dans les volumes finis : $K_P, K_N, K_S, K_E, K_W, K_F, K_B$. La détermination des conductivités des faces est basée sur la continuité du flux de chaleur entre volumes adjacents, à travers les faces qui les séparent. Une telle continuité permet la détermination des conductivités des faces, et on peut démontrer avec une approximation que :

$$K_e = \frac{2 d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_P + \Delta\eta_E}{K_P} + \frac{\Delta\eta_E}{K_E}} \quad (D.22)$$

$$K_W = \frac{2 d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_P}{K_P} + \frac{\Delta\eta_W}{K_W}} \quad (D.23)$$

$$K_n = \frac{2 d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{K_P} + \frac{\Delta\varepsilon_N}{K_N}} \quad (D.24)$$

$$K_S = \frac{2 d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P}{K_P} + \frac{\Delta\varepsilon_S}{K_S}} \quad (D.25)$$

$$K_f = \frac{2 dz_f}{\frac{\Delta z_P}{K_P} + \frac{\Delta z_F}{K_F}} \quad (D.26)$$

$$K_b = \frac{2 dz_b}{\frac{\Delta z_P}{K_P} + \frac{\Delta z_B}{K_B}} \quad (D.27)$$

Les équations (D.9)-(D.27) sont utilisées dans l'équation (D.8) et le résultat est réarrangé sous la forme standard suivante :

$$A_p T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + S \quad (D.28)$$

Les coefficients de cette équation de discrétisation sont :

$$A_N = \frac{1}{RePr} \frac{K_n^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \Delta\eta_p \Delta z_p \quad (D.29)$$

$$A_S = \frac{1}{RePr} \frac{K_s^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \Delta\eta_p \Delta z_p \quad (D.30)$$

$$A_E = \frac{1}{RePr} \frac{K_e^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \quad (D.31)$$

$$A_W = \frac{1}{RePr} \frac{K_w^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \quad (D.32)$$

$$A_F = \frac{1}{RePr} h_{1f} h_{2f} \frac{K_f^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \quad (D.33)$$

$$A_B = \frac{1}{RePr} h_{1b} h_{2b} \frac{K_b^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \quad (D.34)$$

$$A_p = \frac{3}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p + A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B \quad (D.35)$$

$$\begin{aligned} S = & \frac{4T_p^t - T_p^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p} h_{2p} \Delta\varepsilon_p \Delta\eta_p \Delta z_p \\ & - 2 \left[h_{2n} V_\varepsilon|_n^t \left(\frac{T_N^t + T_p^t}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon|_s^t \left(\frac{T_p^t + T_S^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ & + \left[h_{2n} V_\varepsilon|_n^{t-\Delta t} \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s} V_\varepsilon|_s^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_S^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ & - 2 \left[h_{1e} V_\eta|_e^t \left(\frac{T_E^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1w} V_\eta|_w^t \left(\frac{T_p^t + T_W^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \\ & + \left[h_{1e} V_\eta|_e^{t-\Delta t} \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w} V_\eta|_w^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_W^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left[h_{1f} h_{2f} V_z \Big|_f^t \left(\frac{T_F^t + T_p^t}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z \Big|_b^t \left(\frac{T_p^t + T_B^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
& + \left[h_{1f} h_{2f} V_z \Big|_f^{t-\Delta t} \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_p^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b} h_{2b} V_z \Big|_b^{t-\Delta t} \left(\frac{T_p^{t-\Delta t} + T_B^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned} \tag{D.36}$$

On remarque que les coefficients $A_p, A_N, A_S, A_E, A_W, A_F, A_B$ sont toujours positifs et que A_p est supérieur à la somme des autres coefficients. Cette supériorité est avantageuse puisqu'il est connu qu'elle donne une dominance diagonale à la matrice des coefficients qui assure une bonne stabilité numérique des solutions des systèmes d'équations linéaires. Cependant, la source S , composée de la somme algébrique de plusieurs termes, peut être positive, négative ou nulle. Cela peut poser un problème si cette dernière (la source) est négative car elle peut induire une température $T_p^{t+\Delta t}$ négative. Alors que $T_p^{t+\Delta t}$ doit être positive ou nulle (seulement à l'entrée). Et donc il faut trouver une reformulation de l'équation de discrétisation pour que les valeurs de $T_p^{t+\Delta t}$ ne soient que positives ou nulles. Une telle formulation est présentée dans ce qui suit.

Notons que la source S , qui peut être positive, négative ou nulle, peut être écrite comme la différence de deux termes positifs ou nuls :

$$S = |S| - \max(-2S, 0) \tag{D.37}$$

$\max(-2S, 0)$ est le maximum des valeurs $-2S$ et 0 .

Notons que $|S|$ est toujours positive, et sera donc maintenue comme une source, alors que $-\max(-2S, 0)$ est réécrit sous la forme :

$$-\max(-2S, 0) = - \left[\frac{\max(-2S, 0)}{T_p^{t+\Delta t}} \right] T_p^{t+\Delta t} \tag{D.38}$$

Ce terme est négatif ; il est ramené à gauche de l'équation de discrétisation (D.28) qui devient :

$$A_p^* T_p^{t+\Delta t} = A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |S| \tag{D.39}$$

Avec :

$$A_p^* = A_p + \frac{\max(-2S, 0)}{T_p^{t+\Delta t}} \tag{D.40}$$

Notons qu'à droite de la nouvelle équation de discrétisation, la source est toujours positive ou nulle. À gauche de cette équation, le coefficient A_p^* contient une inconnue qui est la variable calculée $T_p^{t+\Delta t}$. Cette dernière peut être remplacée par l'approximation d'**Adam-**

Bashforth :

$$T_p^{t+\Delta t} = 2T_p^t - T_p^{t-\Delta t} \tag{D.41}$$

Mais la différence $2T_p^t - T_p^{t-\Delta t}$ peut être négative pendant le calcul, et donc peut causer un problème. Pour éviter ce problème, on envisage une solution itérative de l'équation de discrétisation non linéaire (D.39). Pour la solution itérative de cette équation, durant la première itération, on considérera la forme linéarisée :

$$\begin{aligned} & \left(A_p + \frac{\max(-2S, 0)}{T_p^t} \right) T_p^{t+\Delta t} \\ &= A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |S| \end{aligned} \quad (D.42)$$

C'est comme si T_p^t représente une initialisation pour $T_p^{t+\Delta t}$. Durant les itérations ultérieures, on considère la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} & \left(A_p + \frac{\max(-2S, 0)}{(T_p^{t+\Delta t})^*} \right) T_p^{t+\Delta t} \\ &= A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} + |S| \end{aligned} \quad (D.43)$$

Où $(T_p^{t+\Delta t})^*$ est la valeur de $T_p^{t+\Delta t}$ obtenue de l'itération précédente. On espère qu'avec plusieurs itérations, on obtient la valeur de $T_p^{t+\Delta t}$ qui satisfait l'équation non linéaire (D.39). Cependant la procédure décrite n'est pas sans problème : si, durant le calcul, T_p^t (ou $(T_p^{t+\Delta t})^*$) est égale à 0 ou très proche de 0, on peut avoir une division par 0 ou par un très petit nombre dans le coefficient de $T_p^{t+\Delta t}$! Mais on peut éviter ce problème par une initialisation non nulle (dans les conditions initiales) du champ de T dans tout le domaine de calcul. Aussi, si dans certaines zones, $T_p^{t+\Delta t}$ est très proche de 0, ses voisines le sont aussi et sa source est certainement très proche de 0 et ne pose pas de problème.

6. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement radiale :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant le sens positif de ε . Les Figures D.4 et D.5 représentent les projections du maillage sur les surfaces (ε, η) et (ε, z) . À droite de ces figures, les correspondances entre les positions et coordonnées des maillages typique et décalé sont spécifiées. La projection sur la surface (η, z) est similaire à celle du maillage typique. On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume fini décalé :

$$\begin{aligned}
& \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} - \right. \right. \\
& \left. \left. V_\eta^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \left[-\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} + \frac{1}{\varphi Re} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \right. \right. \\
& \left. \left. \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_2 \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) - 2\mu \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) \right] - \frac{\mu V_\varepsilon}{Re Da} - \\
& \left. \frac{C_f V_\varepsilon \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2}}{\sqrt{Da}} + \frac{Gr}{Re^2} T \frac{(\cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \cos\theta)}{\sqrt{h_1 h_2}} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \tag{D.44}
\end{aligned}$$

Ci-après, on détaille la discrétisation des termes de cette équation. On note que les coefficients d'échelle ($h_1 h_2$) sont évalués exactement à leurs positions et leurs dérivées sont calculées au centre du volume fini.

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{3V_{\varepsilon p u}^{t+\Delta t} - 4V_{\varepsilon p u}^t + V_{\varepsilon p u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p u} h_{2p u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \tag{D.45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi^2} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{s_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\varphi^2} [h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon]_{n_u}^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon V_\varepsilon \Big|_{s_u}^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{2}{\varphi^2} \left[h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N u}^t + V_{\varepsilon P u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N u}^t + V_{\varepsilon P u}^t}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P u}^t + V_{\varepsilon S u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P u}^t + V_{\varepsilon S u}^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&\quad - \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \tag{D.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi^2} \int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\varepsilon)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\varphi^2} [h_1 V_\eta V_\varepsilon]_{e_u}^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta V_\varepsilon \Big|_{w_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= \frac{2}{\varphi^2} \left[h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta e n u}^t + V_{\eta e s u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon E u}^t + V_{\varepsilon P u}^t}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta w n u}^t + V_{\eta w s u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P u}^t + V_{\varepsilon W u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\varepsilon)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
&= \frac{1}{\varphi^2} [h_1 h_2 V_z V_\varepsilon]_{f_u}^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z V_\varepsilon \Big|_{b_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
&= \frac{2}{\varphi^2} \left[\begin{aligned} &h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_z f_{n_u} + V_z f_{s_u}}{2} \right) \left(\frac{V_\varepsilon F_u + V_\varepsilon P_u}{2} \right) \\ &- h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_z b_{n_u} + V_z b_{s_u}}{2} \right) \left(\frac{V_\varepsilon P_u + V_\varepsilon B_u}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p \\
&\quad - \frac{1}{\varphi^2} \left[\begin{aligned} &h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_z f_{n_u} + V_z f_{s_u}}{2} \right) \left(\frac{V_\varepsilon F_u + V_\varepsilon P_u}{2} \right) \\ &- h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_z b_{n_u} + V_z b_{s_u}}{2} \right) \left(\frac{V_\varepsilon P_u + V_\varepsilon B_u}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p
\end{aligned} \tag{D.48}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\varphi^2} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} \left[\frac{V_\eta^{t+\Delta t} e_{n_u} + V_\eta^{t+\Delta t} e_{s_u} + V_\eta^{t+\Delta t} w_{n_u} + V_\eta^{t+\Delta t} w_{s_u}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= 2 \frac{1}{\varphi^2} V_{\varepsilon P_u}^t \left[\frac{V_\eta^t e_{n_u} + V_\eta^t e_{s_u} + V_\eta^t w_{n_u} + V_\eta^t w_{s_u}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&\quad - \frac{1}{\varphi^2} V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} \left[\frac{V_\eta^{t-\Delta t} e_{n_u} + V_\eta^{t-\Delta t} e_{s_u} + V_\eta^{t-\Delta t} w_{n_u} + V_\eta^{t-\Delta t} w_{s_u}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.49}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi^2} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\eta V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -\frac{1}{\varphi^2} V_\eta V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= -\frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{V_\eta^{t+\Delta t} e_{n_u} + V_\eta^{t+\Delta t} e_{s_u} + V_\eta^{t+\Delta t} w_{n_u} + V_\eta^{t+\Delta t} w_{s_u}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= -\frac{2}{\varphi^2} \left[\frac{V_\eta^t e_{n_u} + V_\eta^t e_{s_u} + V_\eta^t w_{n_u} + V_\eta^t w_{s_u}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&\quad + \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{V_\eta^{t-\Delta t} e_{n_u} + V_\eta^{t-\Delta t} e_{s_u} + V_\eta^{t-\Delta t} w_{n_u} + V_\eta^{t-\Delta t} w_{s_u}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.50}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} -\frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [-P]_{S_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta z_p \\
&= [P_{S_u}^{t+\Delta t} - P_{n_u}^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$= [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta \eta_p \Delta z_p \quad (\text{D.51})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{\varphi} \left[\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right]_{S_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{\varphi} \left[\begin{array}{c} \mu_{n_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{\Delta \varepsilon_N} \\ -\mu_{S_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t}}{\Delta \varepsilon_P} \end{array} \right] \Delta \eta_p \Delta z_p \end{aligned} \quad (\text{D.52})$$

$$\mu_{n_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_u}^t - \mu_{n_u}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.53})$$

$$\mu_{S_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{S_u}^t - \mu_{S_u}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.54})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \eta} \right]_{W_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\begin{array}{c} \mu_{e_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \\ -\mu_{W_u}^{t+\Delta t} \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \end{aligned} \quad (\text{D.55})$$

$$\mu_{e_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_u}^t - \mu_{e_u}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.56})$$

$$\mu_{W_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{W_u}^t - \mu_{W_u}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.57})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\begin{array}{c} \mu_{f_u}^{t+\Delta t} h_{1f_u} h_{2f_u} \frac{V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}}{dz_f} \\ -\mu_{b_u}^{t+\Delta t} h_{1b_u} h_{2b_u} \frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t}}{dz_b} \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \end{aligned} \quad (\text{D.59})$$

$$\mu_{f_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_u}^t - \mu_{f_u}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.59})$$

$$\mu_{b_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_u}^t - \mu_{b_u}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.60})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \frac{-2\mu_{P_u}^{t+\Delta t}}{h_{1P_u} h_{2P_u}} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \end{aligned} \quad (\text{D.61})$$

$$\mu_{P_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_u}^t - \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \quad (\text{D.62})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[2\mu \frac{V_\eta}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{S_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= \frac{2}{\varphi} \frac{2}{\text{Re}} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{\mu_{n_u}^t}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta w n_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{n_u} \\ - \left[\frac{\mu_{s_u}^t}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta e s_u}^t + V_{\eta w s_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{s_u} \end{array} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \frac{1}{\varphi} \frac{2}{\text{Re}} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{n_u} \\ - \left[\frac{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{s_u} \end{array} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \end{aligned} \quad (\text{D.63})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{-1}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{-1}{\text{Re}} \left[\mu \frac{V_\varepsilon}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{W_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &= \frac{2}{\varphi} \frac{-1}{\text{Re}} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{\mu_{e_u}^t}{h_{1e_u}} \frac{(V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{e_u} \\ - \left[\frac{\mu_{w_u}^t}{h_{1w_u}} \frac{(V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{w_u} \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\ &\quad - \frac{1}{\varphi} \frac{-1}{\text{Re}} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{\mu_{e_u}^{t-\Delta t}}{h_{1e_u}} \frac{(V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{e_u} \\ - \left[\frac{\mu_{w_u}^{t-\Delta t}}{h_{1w_u}} \frac{(V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right]_{w_u} \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \end{aligned} \quad (\text{D.64})$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{\mu}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \mu_{P_u}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{V_\eta}{h_2} \right]_{S_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{2\mu_{P_u}^t}{\text{Re}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{h_{2n_u}} \frac{(V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta w n_u}^t)}{2} \\ - \frac{1}{h_{2s_u}} \frac{(V_{\eta e s_u}^t + V_{\eta w s_u}^t)}{2} \end{array} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \\ &\quad - \frac{1}{\varphi} \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{\text{Re}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{h_{2n_u}} \frac{(V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t})}{2} \\ - \frac{1}{h_{2s_u}} \frac{(V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t})}{2} \end{array} \right] \Delta\eta_p \Delta z_p \end{aligned}$$

(D.65)

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{\mu}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{P_u}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{2\mu_{P_u}^t}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&- \frac{1}{\varphi} \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.66}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu h_2 \frac{V_z}{\partial \varepsilon} \right]_{b_u}^{f_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\mu_{f_u}^t h_{2f_u} \left(\frac{V_z f n_u - V_z f s_u}{d\varepsilon_n} \right) - \mu_{b_u}^t h_{2b_u} \left(\frac{V_z b n_u - V_z b s_u}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&- \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu_{f_u}^{t-\Delta t} h_{2f_u} \left(\frac{V_z f n_u - V_z f s_u}{d\varepsilon_n} \right) - \mu_{b_u}^{t-\Delta t} h_{2b_u} \left(\frac{V_z b n_u - V_z b s_u}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p
\end{aligned} \tag{D.67}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{-2\mu}{Re} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^{t+\Delta t} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[V_\eta \right]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= \frac{2}{\varphi} \left[\frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^t \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\frac{V_{\eta e n_u}^t + V_{\eta e s_u}^t}{2} \right] - \frac{V_{\eta w n_u}^t + V_{\eta w s_u}^t}{2} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&- \frac{1}{\varphi} \left[\frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\frac{V_{\eta e n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta e s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right] - \frac{V_{\eta w n_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta w s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.68}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu h_1 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \right]_{w_u}^{e_u} \Big|^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{e_u}^t h_{1e_u} \left(\frac{v_{\eta en_u}^t - v_{\eta es_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \\ -\mu_{w_u}^t h_{1w_u} \left(\frac{v_{\eta wn_u}^t - v_{\eta ws_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p \\
&= -\frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{e_u}^{t-\Delta t} h_{1e_u} \left(\frac{v_{\eta en_u}^{t-\Delta t} - v_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \\ -\mu_{w_u}^{t-\Delta t} h_{1w_u} \left(\frac{v_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} - v_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \end{array} \right] d\varepsilon_n \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.69}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} -\frac{\mu V_\varepsilon}{ReDa} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -\frac{1}{ReDa} [\mu V_\varepsilon]_{P_u}^{t+\Delta t} h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= -\frac{1}{ReDa} [\mu_{P_u}^{t+\Delta t} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t}] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.70}$$

$$\mu_{P_u}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_u}^t - \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \tag{D.71}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_u}^{n_u} \int_{w_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} V_\varepsilon \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\
&= -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[V_\varepsilon \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \right]_{s_u}^{n_u} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[V_\varepsilon \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \right]_{n_u}^{t+\Delta t} - V_\varepsilon \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \Big|_{s_u}^{t+\Delta t} h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&= \\
&= -\frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta N_u}^t + V_{\eta P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z N_u}^t + V_{z P_u}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p \\
&+ \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta S_u}^t + V_{\eta P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z S_u}^t + V_{z P_u}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta N_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z N_u}^{t-\Delta t} + V_{z P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
& - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta S_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z S_u}^{t-\Delta t} + V_{z P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.72}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{S_u}^{n_u} \int_{W_u}^{e_u} \int_{b_u}^{f_u} \frac{Gr}{Re^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} (\cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \cos\theta) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\
& = \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} (\cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) \cos\theta) T_{P_u}^{t+\Delta t} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
& = \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} (\cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) \cos\theta) \left[2 \left(\frac{T_N^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.73}$$

On remplace les équations (D.45)-(D.73) dans l'équation (D.44) et on obtient l'équation de discrétisation :

$$\begin{aligned}
A_{P_u} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} & = A_{N_u} V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t} + A_{E_u} V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} + S_u \\
& + [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.74}$$

Ou

$$A_{P_u} V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = A_{N_u} V_{\varepsilon N_u}^{t+\Delta t} + A_{S_u} V_{\varepsilon S_u}^{t+\Delta t} + A_{E_u} V_{\varepsilon E_u}^{t+\Delta t} + A_{W_u} V_{\varepsilon W_u}^{t+\Delta t} + A_{F_u} V_{\varepsilon F_u}^{t+\Delta t} + A_{B_u} V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} + S \tag{D.75}$$

Avec :

$$A_{N_u} = \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \frac{\mu_{n_u}^{t+\Delta t}}{\Delta\varepsilon_N} \Delta\eta_p \Delta z_p \tag{D.76}$$

$$A_{S_u} = \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \frac{\mu_{s_u}^{t+\Delta t}}{\Delta\varepsilon_P} \Delta\eta_p \Delta z_p \tag{D.77}$$

$$A_{E_u} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{e_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_e} d\varepsilon_n \Delta z_p \tag{D.78}$$

$$A_{W_u} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{w_u}^{t+\Delta t}}{d\eta_w} d\varepsilon_n \Delta z_p \tag{D.79}$$

$$A_{F_u} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{f_u}^{t+\Delta t}}{dz_f} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \tag{D.80}$$

$$A_{B_u} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{b_u}^{t+\Delta t}}{dz_b} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \tag{D.81}$$

$$\begin{aligned}
A_{P_u} & = \frac{1}{\varphi} \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{P_u}^{t+\Delta t}}{h_{1P_u} h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p \\
& + \frac{\mu_{P_u}^{t+\Delta t}}{Re Da} h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p + A_{N_u} + A_{S_u} + A_{E_u} + A_{W_u} + A_{F_u} + A_{B_u}
\end{aligned} \tag{D.82}$$

$$S = S_u + [P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}] h_{2P_u} \Delta \eta_p \Delta Z_p \quad (\text{D.83})$$

$$\begin{aligned}
S_u &= \frac{1}{\varphi} \frac{4V_{\varepsilon P_u}^t - V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad - \frac{2}{\varphi^2} \left[h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon S_u}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad + \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2n_u} \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s_u} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad - \frac{2}{\varphi^2} \left[h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
&\quad + \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1e_u} \left(\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w_u} \left(\frac{V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
&\quad - \frac{2}{\varphi^2} \left[h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf n_u}^t + V_{zfs_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon F_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_{zbn_u}^t + V_{zbs_u}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon B_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&\quad + \frac{1}{\varphi^2} \left[\begin{aligned} &h_{1f_u} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zf n_u}^{t-\Delta t} + V_{zfs_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- h_{1b_u} h_{2b_u} \left(\frac{V_{zbn_u}^{t-\Delta t} + V_{zbs_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
&\quad - \frac{2}{\varphi^2} V_{\varepsilon P_u}^t \left[\frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t + V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad + \frac{1}{\varphi^2} V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} \left[\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{4} \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad + \frac{2}{\varphi^2} \left[\frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t + V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad - \frac{2}{\varphi^2} \left[\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{4} \right]^2 \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad + \frac{2}{\varphi} \left[\frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\mu_{n_u}^t}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta en_u}^t + V_{\eta wn_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{\mu_{s_u}^t}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta es_u}^t + V_{\eta ws_u}^t)}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad - \frac{1}{\varphi} \left[\frac{2}{\text{Re}} \left[\frac{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}}{h_{1n_u}} \frac{(V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{n_u} - \frac{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}{h_{1s_u}} \frac{(V_{\eta es_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t})}{2} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{s_u} \right] \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
&\quad + \frac{2}{\varphi} \left[\frac{-1}{\text{Re}} \left[\frac{\mu_{e_u}^t}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{\mu_{w_u}^t}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
&\quad - \frac{1}{\varphi} \left[\frac{-1}{\text{Re}} \left[\frac{\mu_{e_u}^{t-\Delta t}}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{e_u} - \frac{\mu_{w_u}^{t-\Delta t}}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{w_u} \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2\mu_{P_u}^t}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{2n_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon n_u}^t + V_{\varepsilon w n_u}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon s_u}^t + V_{\varepsilon w s_u}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{2n_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon n_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon w n_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon s_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon w s_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2\mu_{P_u}^t}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^t + V_{\varepsilon W_u}^t}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{\mu_{P_u}^{t-\Delta t}}{Re} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_u} \left[\frac{1}{h_{1e_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_u}} \left(\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\mu_{f_u}^t h_{2f_u} \left(\frac{V_{zfn_u}^t - V_{zfs_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) - \mu_{b_u}^t h_{2b_u} \left(\frac{V_{zbn_u}^t - V_{zbs_u}^t}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu_{f_u}^{t-\Delta t} h_{2f_u} \left(\frac{V_{zfn_u}^{t-\Delta t} - V_{zfs_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) - \mu_{b_u}^{t-\Delta t} h_{2b_u} \left(\frac{V_{zbn_u}^{t-\Delta t} - V_{zbs_u}^{t-\Delta t}}{d\varepsilon_n} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta \eta_p \\
& + \frac{2}{\varphi} \left[\frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^t \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\left(\frac{V_{\eta en_u}^t + V_{\eta es_u}^t}{2} \right) - \left(\frac{V_{\eta wn_u}^t + V_{\eta ws_u}^t}{2} \right) \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \left[\frac{-2}{Re} \mu_{P_u}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2P_u}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_u} \left[\left(\frac{V_{\eta en_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{V_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\mu_{e_u}^t h_{1e_u} \left(\frac{v_{\eta en_u}^t - v_{\eta es_u}^t}{h_{2en_u} - h_{2es_u}} \right) - \mu_{w_u}^t h_{1w_u} \left(\frac{v_{\eta wn_u}^t - v_{\eta ws_u}^t}{h_{2wn_u} - h_{2ws_u}} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu_{e_u}^{t-\Delta t} h_{1e_u} \left(\frac{v_{\eta en_u}^{t-\Delta t} - v_{\eta es_u}^{t-\Delta t}}{h_{2en_u} - h_{2es_u}} \right) - \mu_{w_u}^{t-\Delta t} h_{1w_u} \left(\frac{v_{\eta wn_u}^{t-\Delta t} - v_{\eta ws_u}^{t-\Delta t}}{h_{2wn_u} - h_{2ws_u}} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta Z_p \\
& - \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta N_u}^t + V_{\eta P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z N_u}^t + V_{z P_u}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^t + V_{\varepsilon P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta S_u}^t + V_{\eta P_u}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z S_u}^t + V_{z P_u}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p \\
& + \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta N_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z N_u}^{t-\Delta t} + V_{z P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta \eta_p \Delta Z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta S_u}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z S_u}^{t-\Delta t} + V_{z P_u}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_u} h_{2P_u} d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p + \\
& \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1P_u} h_{2P_u}} (\cosh(\varepsilon_{P_u}) \sin(\eta_{P_u}) \cos\theta) \left[2 \left(\frac{T_N^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_N^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\varepsilon_n \Delta\eta_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.84}$$

Nous avons mentionné que la discrétisation temporelle de la viscosité est explicite, selon le schéma **d'Adam-Bashforth**. Concernant la discrétisation spatiale de la viscosité au centre et aux interfaces du volume décalé, elle est faite avec certaines approximations qui assurent la continuité et l'évaluation correcte des contraintes visqueuses aux endroits indiqués. Au centre et aux faces du volume fini décalé (suivant ε), les viscosités sont :

$$\mu_{P_u}^t = \frac{2d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu_{n_u}^t} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu_{s_u}^t}} \tag{D.85}$$

$$\mu_{P_u}^{t-\Delta t} = \frac{2d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N}{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta\varepsilon_P}{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}} \tag{D.86}$$

$$\mu_{e_u}^t = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu_{E_{S_u}}^t} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{n_u}^t}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu_{E_{n_u}}^t} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{n_u}^t}} \tag{D.87}$$

$$\mu_{e_u}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu_{E_{S_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E}{\mu_{E_{n_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}}} \tag{D.88}$$

$$\mu_{w_u}^t = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu_{W_{S_u}}^t} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{s_u}^t}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu_{W_{n_u}}^t} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{n_u}^t}} \tag{D.89}$$

$$\mu_{w_u}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu_{W_{S_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta\eta_W}{\mu_{W_{n_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta\eta_P}{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}}} \tag{D.90}$$

$$\mu_{f_u}^t = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu_{F_{S_u}}^t} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{s_u}^t}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu_{F_{n_u}}^t} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{n_u}^t}} \tag{D.91}$$

$$\mu_{f_u}^{t-\Delta t} = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu_{F_{S_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F}{\mu_{F_{n_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}}} \tag{D.92}$$

$$\mu_{b_u}^t = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu_{B_{S_u}}^t} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{s_u}^t}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu_{B_{n_u}}^t} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{n_u}^t}} \tag{D.93}$$

$$\mu_{b_u}^{t-\Delta t} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu_{B_{S_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{s_u}^{t-\Delta t}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_B}{\mu_{B_{n_u}}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta z_P}{\mu_{n_u}^{t-\Delta t}}} \tag{D.94}$$

7. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement angulaire :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant le sens positif de η . Les Figures D.6 et D.7 représentent les projections du maillage sur les surfaces (ε, η) et (η, z) . À droite de ces figure, les correspondances entre les positions et coordonnées des maillages typique et décalé sont spécifiées. La projection sur la surface (ε, z) est similaire à celle du maillage typique. On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume fini décalé :

$$\begin{aligned}
& \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - \right. \right. \\
& \left. \left. V_\varepsilon^2 \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \left[-\frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{1}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) + \right. \\
& \left. \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_\eta}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} + \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} - 2\mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) \right] - \frac{\mu V_\eta}{Re Da} - \\
& \left. \frac{C_f}{\sqrt{Da}} V_\eta \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} + \frac{Gr}{Re^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} (\sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \cos(\theta)) \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \quad (D.95)
\end{aligned}$$

Ci-après, on détaille la discrétisation des termes de cette équation.

$$\frac{1}{\varphi} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{\partial V_\eta}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{\varphi} \frac{3V_{\eta p_v}^{t+\Delta t} - 4V_{\eta p_v}^t + V_{\eta p_v}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1p_v} h_{2p_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \quad (D.96)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi^2} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_\eta)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} \left[h_2 V_\varepsilon V_\eta \right]_{s_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\varphi^2} \left[h_2 V_\varepsilon V_\eta \Big|_{n_v}^{t+\Delta t} - h_2 V_\varepsilon V_\eta \Big|_{s_v}^{t+\Delta t} \right] d\eta_e \Delta z_p \\
&= 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2n_v} \left(\frac{V_{\varepsilon n_v}^t + V_{\varepsilon n_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta n_v}^t + V_{\eta p_v}^t}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - h_{2s_v} \left(\frac{V_{\varepsilon s_v}^t + V_{\varepsilon s_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta p_v}^t + V_{\eta s_v}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \\
&= \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2n_v} \left(\frac{V_{\varepsilon n_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta n_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta p_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - h_{2s_v} \left(\frac{V_{\varepsilon s_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta p_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta s_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p \quad (D.97)
\end{aligned}$$

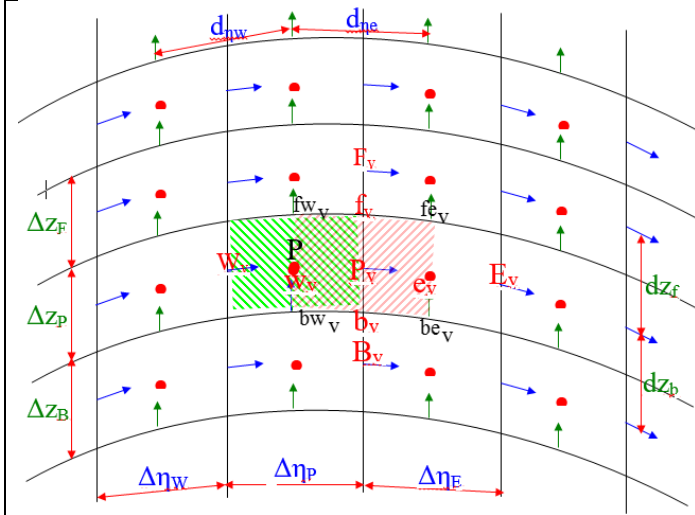


Fig. D.6. Projection du maillage décalé sur la surface (η, z)

$$\begin{aligned}
 e_v &\equiv E \\
 w_v &\equiv P \\
 P_v &\equiv w \\
 W_v &\equiv w \\
 f w_v &\equiv f \\
 b w_v &\equiv b
 \end{aligned}$$

Correspondance entre les positions et les coordonnées des maillages typique et décalé suivant η .

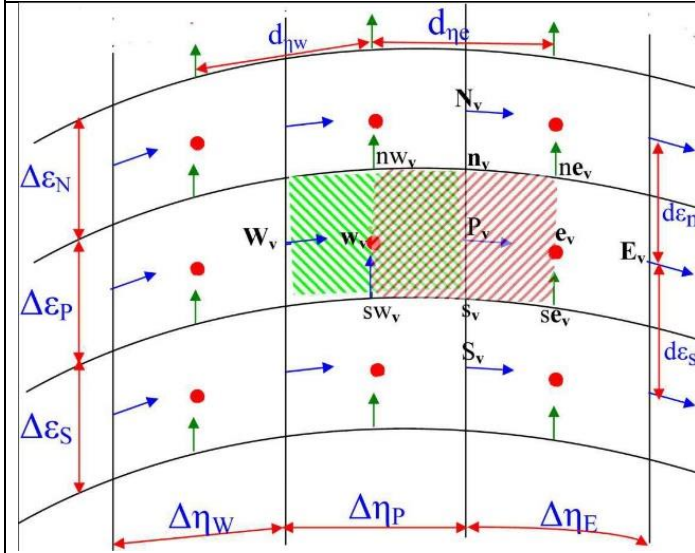


Fig. D.7. Projection du maillage décalé sur la surface (η, ϵ)

$$\begin{aligned}
 p_v &\equiv e \\
 e_v &\equiv E \\
 w_v &\equiv P \\
 W_v &\equiv w \\
 s w_v &\equiv s \\
 n w_v &\equiv n
 \end{aligned}$$

Correspondance entre les positions et les coordonnées des maillages typique et décalé suivant η .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\varphi^2} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial (h_1 V_\eta V_\eta)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\epsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} [h_1 V_\eta V_\eta]_{w_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \epsilon_P \Delta z_p \\
 &= \frac{1}{\varphi^2} \left[h_1 V_\eta V_\eta \Big|_{e_v}^{t+\Delta t} - h_1 V_\eta V_\eta \Big|_{w_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta \epsilon_P \Delta z_p \\
 &= 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[\begin{array}{l} h_{1e_v} \left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \\ - h_{1w_v} \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta W_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta W_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \epsilon_P \Delta z_p
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\varphi^2} \left[\begin{array}{l} h_{1e_v} \left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ -h_{1w_v} \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \quad (D.98)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_\eta)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} \left[h_1 h_2 V_z V_\eta \right]_{b_v}^{f_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\ &= \frac{1}{\varphi^2} \left[h_1 h_2 V_z V_\eta \Big|_{f_v}^{t+\Delta t} - h_1 h_2 V_z V_\eta \Big|_{b_v}^{t+\Delta t} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\ &= 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[\begin{array}{l} h_{1f_v} h_{2f_v} \left(\frac{V_{zf_{e_v}}^t + V_{zf_{w_v}}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \\ -h_{1b_v} h_{2b_v} \left(\frac{V_{zb_{e_v}}^t + V_{zb_{w_v}}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta B_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\ &\quad - \frac{1}{\varphi^2} \left[\begin{array}{l} h_{1f_v} h_{2f_v} \left(\frac{V_{zf_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{zf_{w_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ -h_{1b_v} h_{2b_v} \left(\frac{V_{zb_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{zb_{w_v}}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \end{aligned} \quad (D.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\ &= 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n_{e_v}}^t + V_{\varepsilon n_{w_v}}^t + V_{\varepsilon s_{e_v}}^t + V_{\varepsilon s_{w_v}}^t}{4} \right) V_{\eta P_v}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\ &\quad - \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n_{w_v}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{w_v}}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \end{aligned} \quad (D.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{-1}{h_1 h_2} V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= -\frac{1}{\varphi^2} V_\varepsilon V_\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\ &= -2 \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n_{e_v}}^t + V_{\varepsilon n_{w_v}}^t + V_{\varepsilon s_{e_v}}^t + V_{\varepsilon s_{w_v}}^t}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\ &\quad + \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n_{w_v}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{e_v}}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s_{w_v}}^{t-\Delta t}}{4} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \end{aligned} \quad (D.101)$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{-1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= - [P]_{w_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
&= - [P_{e_v}^{t+\Delta t} - P_{w_v}^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
&= [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \tag{D.102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \varepsilon} \right]_{s_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu_{n_v}^{t+\Delta t} \frac{V_\eta^{t+\Delta t} - V_\eta^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} - \mu_{s_v}^{t+\Delta t} \frac{V_\eta^{t+\Delta t} - V_\eta^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \right] d\eta_e \Delta Z_P \tag{D.103}
\end{aligned}$$

$$\mu_{n_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_v}^t - \mu_{n_v}^{t-\Delta t} \tag{D.104}$$

$$\mu_{s_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{s_v}^t - \mu_{s_v}^{t-\Delta t} \tag{D.105}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[2\mu \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} \right]_{w_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\mu_{e_v}^{t+\Delta t} \frac{V_\eta^{t+\Delta t} - V_\eta^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_E} - \mu_{w_v}^{t+\Delta t} \frac{V_\eta^{t+\Delta t} - V_\eta^{t+\Delta t}}{\Delta \eta_P} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \tag{D.106}
\end{aligned}$$

$$\mu_{e_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_v}^t - \mu_{e_v}^{t-\Delta t} \tag{D.107}$$

$$\mu_{w_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{w_v}^t - \mu_{w_v}^{t-\Delta t} \tag{D.108}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right]_{b_v}^{f_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu_{f_v}^{t+\Delta t} h_{1f_v} h_{2f_v} \frac{V_\eta^{t+\Delta t} - V_\eta^{t+\Delta t}}{dz_f} - \mu_{b_v}^{t+\Delta t} h_{1b_v} h_{2b_v} \frac{V_\eta^{t+\Delta t} - V_\eta^{t+\Delta t}}{dz_b} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \tag{D.109}
\end{aligned}$$

$$\mu_{f_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_v}^t - \mu_{f_v}^{t-\Delta t} \tag{D.110}$$

$$\mu_{b_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_v}^t - \mu_{b_v}^{t-\Delta t} \tag{D.111}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{S_V}^{n_V} \int_{W_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{-2\mu}{h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re } h_1 h_2} V_\eta \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re } h_{1P_V} h_{2P_V}} V_{\eta P_V}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_V} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_P
\end{aligned} \tag{D.112}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{S_V}^{n_V} \int_{W_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu h_1 \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right]_{b_V}^{f_V} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{\text{Re}} \left[\begin{array}{c} \mu_{f_V}^t h_{1f_V} \frac{V_{zfe_V}^t - V_{zfw_V}^t}{d\eta_e} \\ -\mu_{b_V}^t h_{1b_V} \frac{V_{zbe_V}^t - V_{zbw_V}^t}{d\eta_w} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
&\quad - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\begin{array}{c} \mu_{f_V}^{t-\Delta t} h_{1f_V} \frac{V_{zfe_V}^{t-\Delta t} - V_{zfw_V}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} \\ -\mu_{b_V}^{t-\Delta t} h_{1b_V} \frac{V_{zbe_V}^{t-\Delta t} - V_{zbw_V}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e
\end{aligned} \tag{D.113}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{S_V}^{n_V} \int_{W_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{1}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu h_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_\varepsilon}{h_1} \right) \right]_{S_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{\text{Re}} \left[\begin{array}{c} \mu_{n_V}^t h_{2n_V} \frac{\frac{V_{\varepsilon ne_V}^t}{h_{1ne_V}} - \frac{V_{\varepsilon n w_V}^t}{h_{1n w_V}}}{d\eta_e} \\ -\mu_{S_V}^t h_{2S_V} \frac{\frac{V_{\varepsilon se_V}^t}{h_{1se_V}} - \frac{V_{\varepsilon s w_V}^t}{h_{1s w_V}}}{d\eta_s} \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P \\
&\quad - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\begin{array}{c} \mu_{n_V}^{t-\Delta t} h_{2n_V} \frac{\frac{V_{\varepsilon ne_V}^{t-\Delta t}}{h_{1ne_V}} - \frac{V_{\varepsilon n w_V}^{t-\Delta t}}{h_{1n w_V}}}{d\eta_e} \\ -\mu_{S_V}^{t-\Delta t} h_{2S_V} \frac{\frac{V_{\varepsilon se_V}^{t-\Delta t}}{h_{1se_V}} - \frac{V_{\varepsilon s w_V}^{t-\Delta t}}{h_{1s w_V}}}{d\eta_s} \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P
\end{aligned} \tag{D.114}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{S_V}^{n_V} \int_{W_V}^{e_V} \int_{b_V}^{f_V} \frac{-1}{\text{Re } h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-1}{\text{Re}} \frac{1}{\varphi} \left[\mu \frac{V_\eta}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{S_V}^{n_V} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P \\
&= \frac{-2}{\text{Re}} \frac{1}{\varphi} \left[\begin{array}{c} \frac{\mu_{n_V}^t}{h_{2n_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_V} \left(\frac{V_{\eta N_V}^t + V_{\eta P_V}^t}{2} \right) \\ -\frac{\mu_{S_V}^t}{h_{2S_V}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{S_V} \left(\frac{V_{\eta P_V}^t + V_{\eta S_V}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} \frac{\mu_{n_v}^{t-\Delta t}}{h_{2n_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_v} \left(\frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \frac{\mu_{s_v}^{t-\Delta t}}{h_{2s_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_v} \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P$$

(D.115)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{V_{\eta}}{h_2} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\frac{V_{\eta}}{h_2} \right]_{s_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{2n_v}} \left(\frac{V_{\eta N_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{2s_v}} \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta S_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P \\ &\quad - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{2n_v}} \left(\frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{2s_v}} \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P \end{aligned}$$

(D.116)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re h_1 h_2} \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V_{\varepsilon}}{h_1} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t+\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\frac{V_{\varepsilon}}{h_1} \right]_{w_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{1e_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon s e_v}^t}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1w_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon n w_e_v}^t + V_{\varepsilon s w_e_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ &\quad - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{h_{1e_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \frac{1}{h_{1w_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon n w_e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_e_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \end{aligned}$$

(D.117)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_v}^{n_v} \int_{w_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{-2}{Re h_1 h_2} \mu \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{-2}{Re} \frac{1}{\varphi} \mu_{P_v}^{t+\Delta t} \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[V_{\varepsilon} \right]_{s_v}^{n_v} \Big|^{t+\Delta t} d\eta_e \Delta Z_P \\ &= 2 \frac{-2}{Re} \frac{1}{\varphi} \mu_{P_v}^t \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon n w_v}^t}{2} \right) \\ - \left(\frac{V_{\varepsilon s e_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P \\ &\quad - \frac{-2}{Re} \frac{1}{\varphi} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ - \left(\frac{V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{array} \right] d\eta_e \Delta Z_P \end{aligned}$$

(D.118)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varphi} \int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[2\mu \frac{V_\varepsilon}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \right]_{W_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
&= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\begin{aligned} &2\mu_{e_v}^t \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon s e_v}^t}{2} \right) \\ &- 2\mu_{w_v}^t \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left(\frac{V_{\varepsilon n w_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
&- \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\begin{aligned} &2\mu_{e_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\ &- 2\mu_{w_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left(\frac{V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p
\end{aligned}
\tag{D.119}$$

$$\int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} -\frac{\mu V_\eta}{Re Da} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = -\frac{1}{Re Da} [\mu_{P_v}^{t+\Delta t} V_{\eta P_v}^{t+\Delta t}] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \tag{D.120}$$

$$\mu_{P_v}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_v}^t - \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \tag{D.121}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} V_\eta \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\
&= -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[V_\eta \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \right]_{W_v}^{e_v} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
&= -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[V_\eta \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \right]_{e_v}^{t+\Delta t} - V_\eta \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \Big|_{w_v}^{t+\Delta t} h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
&= \\
&- \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon E_v}^t + V_{\varepsilon P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z E_v}^t + V_{z P_v}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
&+ \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta W_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon W_v}^t + V_{\varepsilon P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta W_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z W_v}^t + V_{z P_v}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
&+ \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon E_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z E_v}^{t-\Delta t} + V_{z P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
&- \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta W_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon W_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta W_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z W_v}^{t-\Delta t} + V_{z P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p
\end{aligned}
\tag{D.122}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{S_v}^{n_v} \int_{W_v}^{e_v} \int_{b_v}^{f_v} \frac{Gr}{Re^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} (\sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \cos\theta) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \\
& \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1p_v} h_{2p_v}} (\sinh(\varepsilon_{p_v}) \cos(\eta_{p_v}) \cos\theta) T_{p_v}^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p = \\
& \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1p_v} h_{2p_v}} (\sinh(\varepsilon_{p_v}) \cos(\eta_{p_v}) \cos\theta) \left[2 \left(\frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.123}$$

On remplace les équations (D.96)-(D.123) dans l'équation (D.95) et on obtient l'équation de discrétisation :

$$\begin{aligned}
A_{P_v} V_{\eta_{P_v}}^{t+\Delta t} &= A_{N_v} V_{\eta_{N_v}}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{\eta_{S_v}}^{t+\Delta t} + A_{E_v} V_{\eta_{E_v}}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{\eta_{W_v}}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{\eta_{F_v}}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{\eta_{B_v}}^{t+\Delta t} + S_v \\
&+ [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.124}$$

Ou

$$A_{P_v} V_{\eta_{P_v}}^{t+\Delta t} = A_{N_v} V_{\eta_{N_v}}^{t+\Delta t} + A_{S_v} V_{\eta_{S_v}}^{t+\Delta t} + A_{E_v} V_{\eta_{E_v}}^{t+\Delta t} + A_{W_v} V_{\eta_{W_v}}^{t+\Delta t} + A_{F_v} V_{\eta_{F_v}}^{t+\Delta t} + A_{B_v} V_{\eta_{B_v}}^{t+\Delta t} + S \tag{D.125}$$

Avec :

$$A_{N_v} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{n_v}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} d\eta_e \Delta z_p \tag{D.126}$$

$$A_{S_v} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{s_v}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} d\eta_e \Delta z_p \tag{D.127}$$

$$A_{E_v} = \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \frac{\mu_{e_v}^{t+\Delta t}}{\Delta\eta_E} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \tag{D.128}$$

$$A_{W_v} = \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \frac{\mu_{w_v}^{t+\Delta t}}{\Delta\eta_P} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \tag{D.129}$$

$$A_{F_v} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} h_{1f_v} h_{2f_v} \frac{\mu_{f_v}^{t+\Delta t}}{dz_f} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \tag{D.130}$$

$$A_{B_v} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} h_{1b_v} h_{2b_v} \frac{\mu_{b_v}^{t+\Delta t}}{dz_b} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \tag{D.131}$$

$$\begin{aligned}
A_{P_v} &= \frac{1}{\varphi} \frac{3}{2\Delta t} h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{P_v}^{t+\Delta t}}{h_{1P_v} h_{2P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
&+ A_{N_v} + A_{S_v} + A_{E_v} + A_{W_v} + A_{F_v} + A_{B_v} + \frac{\mu_{P_v}^{t+\Delta t}}{Re Da} h_{1p_v} h_{2p_v} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned} \tag{D.132}$$

$$S = S_v + [P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}] h_{1P_v} \Delta\varepsilon_p \Delta z_p \tag{D.133}$$

$$\begin{aligned}
S_v &= \frac{1}{\varphi} \frac{4V_{\eta_{P_v}}^t - V_{\eta_{P_v}}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta\varepsilon_p d\eta_e \Delta z_p \\
&- 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2n_v} \left(\frac{V_{\varepsilon_{ne_v}}^t + V_{\varepsilon_{nw_v}}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta_{N_v}}^t + V_{\eta_{P_v}}^t}{2} \right) - h_{2s_v} \left(\frac{V_{\varepsilon_{se_v}}^t + V_{\varepsilon_{sw_v}}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta_{P_v}}^t + V_{\eta_{S_v}}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2n_v} \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2s_v} \left(\frac{V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& - 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1e_v} \left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) - h_{1w_v} \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta W_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta W_v}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1e_v} \left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w_v} \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta W_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P \Delta Z_p \\
& - 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1f_v} h_{2f_v} \left(\frac{V_{z f e_v}^t + V_{z f w_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) - h_{1b_v} h_{2b_v} \left(\frac{V_{z b e_v}^t + V_{z b w_v}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta B_v}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
& + \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1f_v} h_{2f_v} \left(\frac{V_{z f e_v}^{t-\Delta t} + V_{z f w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta F_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1b_v} h_{2b_v} \left(\frac{V_{z b e_v}^{t-\Delta t} + V_{z b w_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta B_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
& - 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon n w_v}^t + V_{\varepsilon s e_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{4} \right) V_{\eta P_v}^t \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{4} \right) V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} \right] \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
& + 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon n w_v}^t + V_{\varepsilon s e_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{4} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^t + V_{\varepsilon n w_v}^t + V_{\varepsilon s e_v}^t + V_{\varepsilon s w_v}^t}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi^2} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{4} \right) \left(\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{4} \right) \right] \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \Delta \varepsilon_P d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\mu_{f_v}^t h_{1f_v} \frac{V_{z f e_v}^t - V_{z f w_v}^t}{d\eta_e} - \mu_{b_v}^t h_{1b_v} \frac{V_{z b e_v}^t - V_{z b w_v}^t}{d\eta_w} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu_{f_v}^{t-\Delta t} h_{1f_v} \frac{V_{z f e_v}^{t-\Delta t} - V_{z f w_v}^{t-\Delta t}}{d\eta_e} - \mu_{b_v}^{t-\Delta t} h_{1b_v} \frac{V_{z b e_v}^{t-\Delta t} - V_{z b w_v}^{t-\Delta t}}{d\eta_w} \right] \Delta \varepsilon_P d\eta_e \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\mu_{n_v}^t h_{2n_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon n e_v}^t}{h_{1n e_v}} - \frac{V_{\varepsilon n w_v}^t}{h_{1n w_v}}}{d\eta_e} - \mu_{s_v}^t h_{2s_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon s e_v}^t}{h_{1s e_v}} - \frac{V_{\varepsilon s w_v}^t}{h_{1s w_v}}}{d\eta_s} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu_{n_v}^{t-\Delta t} h_{2n_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon n e_v}^{t-\Delta t}}{h_{1n e_v}} - \frac{V_{\varepsilon n w_v}^{t-\Delta t}}{h_{1n w_v}}}{d\eta_e} - \mu_{s_v}^{t-\Delta t} h_{2s_v} \frac{\frac{V_{\varepsilon s e_v}^{t-\Delta t}}{h_{1s e_v}} - \frac{V_{\varepsilon s w_v}^{t-\Delta t}}{h_{1s w_v}}}{d\eta_s} \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{-2}{Re} \left[\frac{\mu_{n_v}^t}{h_{2n_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_v} \left(\frac{V_{\eta N_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) - \frac{\mu_{s_v}^t}{h_{2s_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_v} \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta S_v}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\frac{\mu_{n_v}^{t-\Delta t}}{h_{2n_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{n_v} \left(\frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{\mu_{s_v}^{t-\Delta t}}{h_{2s_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{s_v} \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\frac{1}{h_{2n_v}} \left(\frac{V_{\eta N_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_v}} \left(\frac{V_{\eta P_v}^t + V_{\eta S_v}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\frac{1}{h_{2n_v}} \left(\frac{V_{\eta N_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{2s_v}} \left(\frac{V_{\eta P_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\frac{1}{h_{1e_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon se_v}^t}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon nw_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{P_v} \left[\frac{1}{h_{1e_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \frac{1}{h_{1w_v}} \left(\frac{V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& - 2 \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \mu_{P_v}^t \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon nw_v}^t}{2} \right) - \left(\frac{V_{\varepsilon se_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{-2}{Re} \mu_{P_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{1P_v}} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \Big|_{P_v} \left[\left(\frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) - \left(\frac{V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[2 \mu_{e_v}^t \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_v}^t + V_{\varepsilon se_v}^t}{2} \right) - 2 \mu_{w_v}^t \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left(\frac{V_{\varepsilon nw_v}^t + V_{\varepsilon sw_v}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& - \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} 2 \mu_{e_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2e_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{e_v} \left(\frac{V_{\varepsilon ne_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon se_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& + 2 \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \mu_{w_v}^{t-\Delta t} \frac{1}{h_{2w_v}} \frac{\partial h_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{w_v} \left(\frac{V_{\varepsilon nw_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon sw_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \Delta \varepsilon_p \Delta Z_p \\
& - \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon E_v}^t + V_{\varepsilon P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta E_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z E_v}^t + V_{z P_v}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta W_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon W_v}^t + V_{\varepsilon P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta W_v}^t + V_{\eta P_v}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z W_v}^t + V_{z P_v}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon E_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta E_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z E_v}^{t-\Delta t} + V_{z P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
& - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{\eta W_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon W_v}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta W_v}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{z W_v}^{t-\Delta t} + V_{z P_v}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1P_v} h_{2P_v} \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p \\
& + \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1p_v} h_{2p_v}} (\sinh(\varepsilon_{p_v}) \cos(\eta_{p_v}) \cos\theta) \left[2 \left(\frac{T_E^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_E^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p d\eta_e \Delta Z_p
\end{aligned} \tag{D.134}$$

Au centre et aux faces du volume fini décalé (suivant η), les viscosités sont :

$$\mu_{P_v}^t = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E + \Delta\eta_P}{\mu_{e_v}^t + \mu_{w_v}^t}} \tag{D.135}$$

$$\mu_{P_v}^{t-\Delta t} = \frac{2d\eta_e}{\frac{\Delta\eta_E + \Delta\eta_P}{\mu_{e_v}^{t-\Delta t} + \mu_{w_v}^{t-\Delta t}}} \quad (D.136)$$

$$\mu_{n_v}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N + \Delta\varepsilon_P}{\mu_{N_{w_v}}^t + \mu_{w_v}^t}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N + \Delta\varepsilon_P}{\mu_{N_{e_v}}^t + \mu_{e_v}^t}} \quad (D.137)$$

$$\mu_{n_v}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N + \Delta\varepsilon_P}{\mu_{N_{w_v}}^{t-\Delta t} + \mu_{w_v}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta\varepsilon_N + \Delta\varepsilon_P}{\mu_{N_{e_v}}^{t-\Delta t} + \mu_{e_v}^{t-\Delta t}}} \quad (D.138)$$

$$\mu_{S_v}^t = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P + \Delta\varepsilon_S}{\mu_{w_v}^t + \mu_{S_{w_v}}^t}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P + \Delta\varepsilon_S}{\mu_{e_v}^t + \mu_{S_{e_v}}^t}} \quad (D.139)$$

$$\mu_{S_v}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P + \Delta\varepsilon_S}{\mu_{w_v}^{t-\Delta t} + \mu_{S_{w_v}}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta\varepsilon_P + \Delta\varepsilon_S}{\mu_{e_v}^{t-\Delta t} + \mu_{S_{e_v}}^{t-\Delta t}}} \quad (D.140)$$

$$\mu_{f_v}^t = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F + \Delta z_P}{\mu_{F_{w_v}}^t + \mu_{w_v}^t}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F + \Delta z_P}{\mu_{F_{e_v}}^t + \mu_{e_v}^t}} \quad (D.141)$$

$$\mu_{f_v}^{t-\Delta t} = \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F + \Delta z_P}{\mu_{F_{w_v}}^{t-\Delta t} + \mu_{w_v}^{t-\Delta t}}} + \frac{dz_f}{\frac{\Delta z_F + \Delta z_P}{\mu_{F_{e_v}}^{t-\Delta t} + \mu_{e_v}^{t-\Delta t}}} \quad (D.142)$$

$$\mu_{b_v}^t = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P + \Delta z_B}{\mu_{w_v}^t + \mu_{B_{w_v}}^t}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P + \Delta z_B}{\mu_{e_v}^t + \mu_{B_{e_v}}^t}} \quad (D.143)$$

$$\mu_{b_v}^{t-\Delta t} = \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P + \Delta z_B}{\mu_{w_v}^{t-\Delta t} + \mu_{B_{w_v}}^{t-\Delta t}}} + \frac{dz_b}{\frac{\Delta z_P + \Delta z_B}{\mu_{e_v}^{t-\Delta t} + \mu_{B_{e_v}}^{t-\Delta t}}} \quad (D.144)$$

8. Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant z :

L'équation de quantité de mouvement est discrétisée dans un maillage décalé suivant le sens positif de z. Les Figures D.8 et D.9 représentent les projections du maillage sur les surfaces (η, z) et (ε, z). À droite de ces figure, les correspondances entre les positions et coordonnées des maillages typique et décalé sont spécifiées. La projection sur la surface (ε, η) est similaire à celle du maillage typique. On multiplie cette équation par le volume différentiel et on fait une intégration triple entre les limites du volume fini décalé :

$$\begin{aligned} & \int_{S_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_z}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} \right] \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \\ & \int_{S_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \left[-\frac{\partial P_h}{\partial z} + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) \right] - \frac{V_z}{\text{Re} Da} - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} V_z \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} T \sin \theta \right] h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \end{aligned} \quad (D.145)$$

Ci-après, on détaille la discrétisation des termes de cette équation.

$$\frac{1}{\varphi} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{\partial V_z}{\partial t} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = \frac{1}{\varphi} \frac{3V_{zP_w}^{t+\Delta t} - 4V_{zP_w}^t + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P dz_f \quad (D.146)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_2 V_\varepsilon V_z)}{\partial \varepsilon} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} [h_2 V_\varepsilon V_z]_{s_w}^{n_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\eta_P dz_f \\ &= 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2f_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f n_w}^t + V_{\varepsilon b n_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zN_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - h_{2b_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f s_w}^t + V_{\varepsilon b s_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zS_w}^t}{2} \right) \right] \Delta\eta_P dz_f \\ &\quad - \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2f_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zN_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - h_{2b_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zS_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\eta_P dz_f \end{aligned} \quad (D.147)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 V_\eta V_z)}{\partial \eta} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} [h_1 V_\eta V_z]_{w_w}^{e_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_P dz_f \\ &= 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^t + V_{\eta b e_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zE_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^t + V_{\eta b w_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zW_w}^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_P dz_f \\ &\quad - \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b e_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zE_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zW_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_P dz_f \end{aligned} \quad (D.148)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^2} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(h_1 h_2 V_z V_z)}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi^2} [h_1 h_2 V_z V_z]_{b_w}^{f_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\ &= 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1f_w} h_{2f_w} \left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - h_{1b_w} h_{2b_w} \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\ &\quad - \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1f_w} h_{2f_w} \left(\frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - h_{1b_w} h_{2b_w} \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \end{aligned} \quad (D.149)$$

<p>Fig. D.8. Projection du maillage décalé sur la surface (ε, z).</p>	$f_w \equiv F$ $P_w \equiv f$ $b_w \equiv P$ $B_w \equiv b$ $bs_w \equiv s$ $bn_w \equiv n$ <p>Correspondance entre les positions et les coordonnées des maillages typique et décalé suivant z</p>
<p>Fig. D.9. Projection du maillage décalé sur la surface (η, z).</p>	$f_w \equiv F$ $P_w \equiv f$ $b_w \equiv P$ $B_w \equiv b$ $bw_w \equiv w$ $be_w \equiv e$ <p>Correspondance entre les positions et les coordonnées des maillages typique et décalé suivant z</p>

$$\begin{aligned}
 \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} -\frac{\partial P}{\partial z} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= [-P]_{b_w}^{f_w} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
 &= -[P_{f_w}^{t+\Delta t} - P_{b_w}^{t+\Delta t}] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P \\
 &= [P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta\varepsilon_P \Delta\eta_P
 \end{aligned} \tag{D.150}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu \frac{\partial V_z}{\partial \varepsilon} \right]_{s_w}^{n_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_P dz_f \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{l} \mu_{n_w}^{t+\Delta t} \left(\frac{V_z^{t+\Delta t} N_w - V_z^{t+\Delta t} P_w}{d\varepsilon_n} \right) \\ - \mu_{s_w}^{t+\Delta t} \left(\frac{V_z^{t+\Delta t} P_w - V_z^{t+\Delta t} S_w}{d\varepsilon_s} \right) \end{array} \right] \Delta \eta_P dz_f \end{aligned} \quad (D.151)$$

$$\mu_{n_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{n_w}^t - \mu_{n_w}^{t-\Delta t} \quad (D.152)$$

$$\mu_{s_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{s_w}^t - \mu_{s_w}^{t-\Delta t} \quad (D.153)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu \frac{\partial V_z}{\partial \eta} \right]_{w_w}^{e_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P dz_f \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{l} \mu_{e_w}^{t+\Delta t} \left(\frac{V_z^{t+\Delta t} E_w - V_z^{t+\Delta t} P_w}{d\eta_e} \right) \\ - \mu_{w_w}^{t+\Delta t} \left(\frac{V_z^{t+\Delta t} P_w - V_z^{t+\Delta t} W_w}{d\eta_w} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P dz_f \end{aligned} \quad (D.154)$$

$$\mu_{e_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{e_w}^t - \mu_{e_w}^{t-\Delta t} \quad (D.155)$$

$$\mu_{w_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{w_w}^t - \mu_{w_w}^{t-\Delta t} \quad (D.156)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[2\mu h_1 h_2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \right]_{b_w}^{f_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\begin{array}{l} \mu_{f_w}^{t+\Delta t} h_{1f_w} h_{2f_w} \left(\frac{V_z^{t+\Delta t} F_w - V_z^{t+\Delta t} P_w}{\Delta z_E} \right) \\ - \mu_{b_w}^{t+\Delta t} h_{1b_w} h_{2b_w} \left(\frac{V_z^{t+\Delta t} P_w - V_z^{t+\Delta t} B_w}{\Delta z_P} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \end{aligned} \quad (D.157)$$

$$\mu_{f_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{f_w}^t - \mu_{f_w}^{t-\Delta t} \quad (D.158)$$

$$\mu_{b_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{b_w}^t - \mu_{b_w}^{t-\Delta t} \quad (D.159)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu h_2 \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} \right]_{s_w}^{n_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \eta_P dz_f \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\begin{array}{l} \mu_{n_w}^t h_{2n_w} \left(\frac{V_\varepsilon^t f_{n_w} - V_\varepsilon^t b_{n_w}}{dz_f} \right) \\ - \mu_{s_w}^t h_{2s_w} \left(\frac{V_\varepsilon^t f_{s_w} - V_\varepsilon^t b_{s_w}}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \eta_P dz_f \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{n_w}^{t-\Delta t} h_{2n_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \\ -\mu_{s_w}^{t-\Delta t} h_{2s_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \eta_p dz_f \quad (D.160)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right) h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\mu h_1 \frac{\partial V_\eta}{\partial z} \right]_{w_w}^{e_w} \Big|^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p dz_f \\ &= \frac{1}{\varphi} \frac{2}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{e_w}^t h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^t - V_{\eta b e_w}^t}{dz_f} \right) \\ -\mu_{w_w}^t h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^t - V_{\eta b w_w}^t}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \\ &-\frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \left[\begin{array}{c} \mu_{e_w}^{t-\Delta t} h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b e_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \\ -\mu_{w_w}^{t-\Delta t} h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \end{array} \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \end{aligned} \quad (D.161)$$

$$\int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} -\frac{\mu V_z}{Re Da} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz = -\frac{1}{Re Da} \left[\mu_{P_w}^{t+\Delta t} V_{zP_w}^{t+\Delta t} \right] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \quad (D.162)$$

$$\mu_{P_w}^{t+\Delta t} = 2\mu_{P_w}^t - \mu_{P_w}^{t-\Delta t} \quad (D.163)$$

$$\begin{aligned} \int_{s_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} V_z \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \\ = -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[V_z \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \right]_{b_w}^{f_w} \Big|^{t+\Delta t} h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\ = -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[V_z \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \right]_{f_w}^{t+\Delta t} - V_z \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2 + V_z^2} \Big|_{b_w}^{t+\Delta t} \Big] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\ = \\ -\frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon F_w}^t + V_{\varepsilon P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta F_w}^t + V_{\eta P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\ + \frac{2C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{zB_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon B_w}^t + V_{\varepsilon P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta B_w}^t + V_{\eta P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zB_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{zFw}^{t-\Delta t} + V_{zPw}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon Fw}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon Pw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta Fw}^{t-\Delta t} + V_{\eta Pw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zFw}^{t-\Delta t} + V_{zPw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\
& - \frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{zBw}^{t-\Delta t} + V_{zPw}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon Bw}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon Pw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta Bw}^{t-\Delta t} + V_{\eta Pw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zBw}^{t-\Delta t} + V_{zPw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f
\end{aligned} \tag{D.164}$$

$$\begin{aligned}
\int_{S_w}^{n_w} \int_{w_w}^{e_w} \int_{b_w}^{f_w} \frac{Gr}{Re^2} T \frac{1}{\sqrt{h_1 h_2}} \sin \theta h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz &= \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1p_w} h_{2p_w}} (\sin \theta) T_{p_w}^{t+\Delta t} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\
&= \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1p_w} h_{2p_w}} (\sin \theta) \left[2 \left(\frac{T_F^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f
\end{aligned} \tag{D.165}$$

On remplace les équations (D.146)-(D.165) dans l'équation (D.145) et on obtient l'équation de discrétisation :

$$\begin{aligned}
A_{P_w} V_{zP_w}^{t+\Delta t} &= A_{N_w} V_{zN_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} V_{zS_w}^{t+\Delta t} + A_{E_w} V_{zE_w}^{t+\Delta t} + A_{W_w} V_{zW_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} V_{zF_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} V_{zB_w}^{t+\Delta t} + S_w \\
&+ [P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}] h_{1f_w} h_{2f_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p
\end{aligned} \tag{D.166}$$

Ou

$$A_{P_w} V_{zP_w}^{t+\Delta t} = A_{N_w} V_{zN_w}^{t+\Delta t} + A_{S_w} V_{zS_w}^{t+\Delta t} + A_{E_w} V_{zE_w}^{t+\Delta t} + A_{W_w} V_{zW_w}^{t+\Delta t} + A_{F_w} V_{zF_w}^{t+\Delta t} + A_{B_w} V_{zB_w}^{t+\Delta t} + S \tag{D.167}$$

Avec :

$$A_{N_w} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{n_w}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} \Delta \eta_p dz_f \tag{D.168}$$

$$A_{S_w} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{s_w}^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} \Delta \eta_p dz_f \tag{D.169}$$

$$A_{E_w} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{e_w}^{t+\Delta t}}{d\eta_e} \Delta \varepsilon_p dz_f \tag{D.170}$$

$$A_{W_w} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} \frac{\mu_{w_w}^{t+\Delta t}}{d\eta_w} \Delta \varepsilon_p dz_f \tag{D.171}$$

$$A_{F_w} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} h_{1f_w} h_{2f_w} \frac{\mu_{f_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_f} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \tag{D.172}$$

$$A_{B_w} = \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re} h_{1b_w} h_{2b_w} \frac{\mu_{b_w}^{t+\Delta t}}{\Delta z_p} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \tag{D.173}$$

$$\begin{aligned}
A_{P_w} &= \frac{1}{\varphi} \frac{3}{2\Delta t} h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f + A_{N_w} + A_{S_w} + A_{E_w} + A_{W_w} + A_{F_w} + A_{B_w} \\
&+ \frac{1}{Re Da} [\mu_{P_w}^{t+\Delta t} V_{zP_w}^{t+\Delta t}] h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f
\end{aligned} \tag{D.174}$$

$$S = S_w + [P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}] h_{1f_w} h_{2f_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \quad (\text{D.175})$$

$$\begin{aligned}
S_w &= \frac{1}{\varphi} \frac{4V_{zP_w}^t - V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\
&- 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2f_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f n_w}^t + V_{\varepsilon b n_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zN_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) - h_{2b_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f s_w}^t + V_{\varepsilon b s_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zS_w}^t}{2} \right) \right] \Delta \eta_p dz_f \\
&+ \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{2f_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zN_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{2b_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zS_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \eta_p dz_f \\
&- 2 \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^t + V_{\eta b e_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zE_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) - h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^t + V_{\eta b w_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zW_w}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \\
&+ \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b e_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zE_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) - h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zW_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \\
&- \frac{2}{\varphi^2} \left[h_{1f_w} h_{2f_w} \left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) - h_{1b_w} h_{2b_w} \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^t + V_{zB_w}^t}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&+ \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1f_w} h_{2f_w} \left(\frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&- \frac{1}{\varphi^2} \left[h_{1b_w} h_{2b_w} \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \left(\frac{V_{zP_w}^{t-\Delta t} + V_{zB_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p \\
&+ \frac{1}{\varphi} \frac{2}{\text{Re}} \left[\mu_{n_w}^t h_{2n_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f n_w}^t - V_{\varepsilon b n_w}^t}{dz_f} \right) - \mu_{s_w}^t h_{2s_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f s_w}^t - V_{\varepsilon b s_w}^t}{dz_f} \right) \right] \Delta \eta_p dz_f \\
&- \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu_{n_w}^{t-\Delta t} h_{2n_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f n_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b n_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) - \mu_{s_w}^t h_{2s_w} \left(\frac{V_{\varepsilon f s_w}^{t-\Delta t} - V_{\varepsilon b s_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \right] \Delta \eta_p dz_f \\
&+ \frac{1}{\varphi} \frac{2}{\text{Re}} \left[\mu_{e_w}^t h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^t - V_{\eta b e_w}^t}{dz_f} \right) - \mu_{w_w}^t h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^t - V_{\eta b w_w}^t}{dz_f} \right) \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \\
&- \frac{1}{\varphi} \frac{1}{\text{Re}} \left[\mu_{e_w}^{t-\Delta t} h_{1e_w} \left(\frac{V_{\eta f e_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b e_w}^c}{dz_f} \right) - \mu_{w_w}^t h_{1w_w} \left(\frac{V_{\eta f w_w}^{t-\Delta t} - V_{\eta b w_w}^{t-\Delta t}}{dz_f} \right) \right] \Delta \varepsilon_p dz_f \\
&- \frac{2C_f}{\sqrt{D\bar{a}}} \left[\left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon F_w}^t + V_{\varepsilon P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta F_w}^t + V_{\eta P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zF_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\
&+ \frac{2C_f}{\sqrt{D\bar{a}}} \left[\left(\frac{V_{zB_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon B_w}^t + V_{\varepsilon P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta B_w}^t + V_{\eta P_w}^t}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zB_w}^t + V_{zP_w}^t}{2} \right)^2} \right] h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\
&+ \frac{C_f}{\sqrt{D\bar{a}}} \left[\left(\frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon F_w}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta F_w}^{t-\Delta t} + V_{\eta P_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zF_w}^{t-\Delta t} + V_{zP_w}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1p_w} h_{2p_w} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{C_f}{\sqrt{Da}} \left[\left(\frac{V_{zBw}^{t-\Delta t} + V_{zPw}^{t-\Delta t}}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{V_{\varepsilon Bw}^{t-\Delta t} + V_{\varepsilon Pw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{\eta Bw}^{t-\Delta t} + V_{\eta Pw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2 + \left(\frac{V_{zBw}^{t-\Delta t} + V_{zPw}^{t-\Delta t}}{2} \right)^2} \right] h_{1pw} h_{2pw} \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f \\
& + \frac{Gr}{Re^2} \sqrt{h_{1pw} h_{2pw}} (\sin \theta) \left[2 \left(\frac{T_F^t + T_P^t}{2} \right) - \left(\frac{T_F^{t-\Delta t} + T_P^{t-\Delta t}}{2} \right) \right] \Delta \varepsilon_p \Delta \eta_p dz_f
\end{aligned} \tag{D.176}$$

Au centre et aux faces du volume fini décalé (suivant z), les viscosités sont :

$$\mu_{n_w}^t = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta \varepsilon_N}{\mu_{Nbw}^t} + \frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{b_w}^t}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta \varepsilon_N}{\mu_{Nfw}^t} + \frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{f_w}^t}} \tag{D.177}$$

$$\mu_{n_w}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta \varepsilon_N}{\mu_{Nbw}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{b_w}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\varepsilon_n}{\frac{\Delta \varepsilon_N}{\mu_{Nfw}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{f_w}^{t-\Delta t}}} \tag{D.178}$$

$$\mu_{s_w}^t = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{b_w}^t} + \frac{\Delta \varepsilon_S}{\mu_{Sbw}^t}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{f_w}^t} + \frac{\Delta \varepsilon_S}{\mu_{Sfw}^t}} \tag{D.179}$$

$$\mu_{s_w}^{t-\Delta t} = \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{b_w}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \varepsilon_S}{\mu_{Sbw}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\varepsilon_s}{\frac{\Delta \varepsilon_P}{\mu_{f_w}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \varepsilon_S}{\mu_{Sfw}^{t-\Delta t}}} \tag{D.180}$$

$$\mu_{e_w}^t = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta \eta_E}{\mu_{Ebw}^t} + \frac{\Delta \eta_P}{\mu_{b_w}^t}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta \eta_E}{\mu_{Efw}^t} + \frac{\Delta \eta_P}{\mu_{f_w}^t}} \tag{D.181}$$

$$\mu_{e_w}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta \eta_E}{\mu_{Ebw}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \eta_P}{\mu_{b_w}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\eta_e}{\frac{\Delta \eta_E}{\mu_{Efw}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \eta_P}{\mu_{f_w}^{t-\Delta t}}} \tag{D.182}$$

$$\mu_{w_w}^t = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta \eta_P}{\mu_{b_w}^t} + \frac{\Delta \eta_W}{\mu_{Bbw}^t}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta \eta_P}{\mu_{f_w}^t} + \frac{\Delta \eta_W}{\mu_{Bfw}^t}} \tag{D.183}$$

$$\mu_{w_w}^{t-\Delta t} = \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta \eta_P}{\mu_{b_w}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \eta_W}{\mu_{Bbw}^{t-\Delta t}}} + \frac{d\eta_w}{\frac{\Delta \eta_P}{\mu_{f_w}^{t-\Delta t}} + \frac{\Delta \eta_W}{\mu_{Bfw}^{t-\Delta t}}} \tag{D.184}$$

9. Discrétisation des conditions aux limites :

Les conditions aux limites sont discrétisées et ses équations de discrétisation sont écrites sous la forme standard.

9.1. Conditions aux limites thermiques :

Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur :

La condition thermique à cette limite (à $\varepsilon=0.8$) est :

$$-\frac{1}{h_1} K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 1 \tag{D.185}$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_1} K_N^{t+\Delta t} \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_P^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_n} = 1 \quad (\text{D.186})$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_N^{t+\Delta t} + \frac{h_1 d\varepsilon_n}{K_N^{t+\Delta t}} \quad (\text{D.187})$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1 \quad (\text{D.188})$$

$$A_N = 1 \quad (\text{D.189})$$

$$A_S = 0 \quad (\text{D.190})$$

$$A_E = 0 \quad (\text{D.191})$$

$$A_W = 0 \quad (\text{D.192})$$

$$A_F = 0 \quad (\text{D.193})$$

$$A_B = 0 \quad (\text{D.194})$$

$$S = \frac{h_{1\varepsilon=0.8} d\varepsilon_1}{K_N^{t+\Delta t}} \quad (\text{D.195})$$

Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur :

La condition thermique à cette limite (à $\varepsilon=1.4$) est :

$$-\frac{1}{h_1} K \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} = 0 \quad (\text{D.196})$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$-\frac{1}{h_1} K_S^{t+\Delta t} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_S^{t+\Delta t}}{d\varepsilon_s} = 0 \quad (\text{D.197})$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_S^{t+\Delta t} \quad (\text{D.198})$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1 \quad (\text{D.199})$$

$$A_N = 0 \quad (\text{D.200})$$

$$A_S = 1 \quad (\text{D.201})$$

$$A_E = 0 \quad (\text{D.202})$$

$$A_W = 0 \quad (\text{D.203})$$

$$A_F = 0 \quad (\text{D.204})$$

$$A_B = 0 \quad (\text{D.205})$$

$$S = 0 \quad (\text{D.206})$$

À l'entrée du conduit :

La condition thermique à cette limite (à $z = 0$) est :

$$T = 0 \quad (D.207)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$T_P^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.208)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1 \quad (D.209)$$

$$A_N = 0 \quad (D.210)$$

$$A_S = 0 \quad (D.211)$$

$$A_E = 0 \quad (D.212)$$

$$A_W = 0 \quad (D.213)$$

$$A_F = 0 \quad (D.214)$$

$$A_B = 0 \quad (D.215)$$

$$S = 0 \quad (D.216)$$

À la sortie du conduit :

La condition thermique à cette limite (à $z=100$) est :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \quad (D.217)$$

Cette condition impose un flux diffusif constant à la sortie du conduit.

Pour illustrer la discrétisation, un schéma du maillage axial, à la sortie du conduit, est représenté sur la Figure D.10. Le point P est à la limite axiale, le point B est l'avant dernier point qui est précédé du point B'.

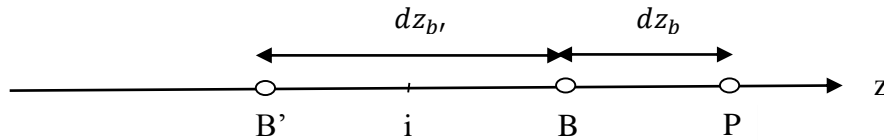


Fig. D.10. Maillage axial à la sortie du conduit

La constance du flux diffusif est approchée par la discrétisation :

$$K_{z_B}^{t+\Delta t} \frac{T_P^{t+\Delta t} - T_B^{t+\Delta t}}{dz_b} = K_{z_i}^{t+\Delta t} \frac{T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}}{dz_{b'}} \quad (D.218)$$

Réécrite sous la forme :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + \frac{K_{z_i}^{t+\Delta t}}{K_{z_B}^{t+\Delta t}} \frac{dz_b}{dz_{b'}} (T_B^{t+\Delta t} - T_{B'}^{t+\Delta t}) \quad (D.219)$$

Avec la forme explicite du dernier terme à droite :

$$T_P^{t+\Delta t} = T_B^{t+\Delta t} + \frac{[2 K_{z_i}^t - K_{z_i}^{t-\Delta t}]}{[2 K_{z_B}^t - K_{z_B}^{t-\Delta t}]} \frac{dz_b}{dz_{b'}} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}]) \quad (D.220)$$

La dernière équation est mise sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_P = 1 \quad (D.221)$$

$$A_N = 0 \quad (D.222)$$

$$A_S = 0 \quad (D.223)$$

$$A_E = 0 \quad (D.224)$$

$$A_W = 0 \quad (D.225)$$

$$A_F = 0 \quad (D.226)$$

$$A_B = 1 \quad (D.227)$$

$$S = \frac{[2K_{z_i}^t - K_{z_i}^{t-\Delta t}] dz_b}{[2K_{z_B}^t - K_{z_B}^{t-\Delta t}] dz_{b'}} (2[T_B^t - T_{B'}^t] - [T_B^{t-\Delta t} - T_{B'}^{t-\Delta t}]) \quad (D.228)$$

9.2. Conditions aux limites d'équation de quantité de mouvement radiale :

Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon=0.8$) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (D.229)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.230)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1 \quad (D.231)$$

$$A_{N_u} = 0 \quad (D.232)$$

$$A_{S_u} = 0 \quad (D.233)$$

$$A_{E_u} = 0 \quad (D.234)$$

$$A_{W_u} = 0 \quad (D.235)$$

$$A_{F_u} = 0 \quad (D.236)$$

$$A_{B_u} = 0 \quad (D.237)$$

$$S = 0 \quad (D.238)$$

Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $\varepsilon=1.4$) est :

$$V_\varepsilon = 0 \quad (D.239)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.240)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1 \quad (D.241)$$

$$A_{N_u} = 0 \quad (D.242)$$

$$A_{S_u} = 0 \quad (D.243)$$

$$A_{E_u} = 0 \quad (D.244)$$

$$A_{W_u} = 0 \quad (D.245)$$

$$A_{F_u} = 0 \quad (D.246)$$

$$A_{B_u} = 0 \quad (D.247)$$

$$S = 0 \quad (D.248)$$

À l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_{\varepsilon} = 0 \quad (D.249)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.250)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1 \quad (D.251)$$

$$A_{N_u} = 0 \quad (D.252)$$

$$A_{S_u} = 0 \quad (D.253)$$

$$A_{E_u} = 0 \quad (D.254)$$

$$A_{W_u} = 0 \quad (D.255)$$

$$A_{F_u} = 0 \quad (D.256)$$

$$A_{B_u} = 0 \quad (D.257)$$

$$S = 0 \quad (D.258)$$

À la sortie du conduit :

La condition de la vitesse radiale à cette limite (à $z=100$) est :

$$\frac{\partial V_{\varepsilon}}{\partial z} = 0 \quad (D.259)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t}}{dz_b} = 0 \quad (D.260)$$

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} - V_{\varepsilon B_u}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.261)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_u} = 1 \quad (D.262)$$

$$A_{N_u} = 0 \quad (D.263)$$

$$A_{S_u} = 0 \quad (D.264)$$

$$A_{E_u} = 0 \quad (D.265)$$

$$A_{W_u} = 0 \quad (D.266)$$

$$A_{F_u} = 0 \quad (D.267)$$

$$S = 0 \quad (D.268)$$

$$A_{B_u} = 1 \quad (D.269)$$

9.3. Conditions aux limites d'équation de quantité de mouvement angulaire :

Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse angulaire à cette limite (à $\varepsilon=0.8$) est :

$$V_\eta = 0 \quad (D.270)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.271)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1 \quad (D.272)$$

$$A_{N_v} = 0 \quad (D.273)$$

$$A_{S_v} = 0 \quad (D.274)$$

$$A_{E_v} = 0 \quad (D.275)$$

$$A_{W_v} = 0 \quad (D.276)$$

$$A_{F_v} = 0 \quad (D.277)$$

$$A_{B_v} = 0 \quad (D.278)$$

$$S = 0 \quad (D.279)$$

Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse angulaire à cette limite (à $\varepsilon=1.4$) est :

$$V_\eta = 0 \quad (D.280)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.281)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1 \quad (D.282)$$

$$A_{N_v} = 0 \quad (D.283)$$

$$A_{S_v} = 0 \quad (D.284)$$

$$A_{E_v} = 0 \quad (D.285)$$

$$A_{W_v} = 0 \quad (D.286)$$

$$A_{F_v} = 0 \quad (D.287)$$

$$A_{B_v} = 0 \quad (D.288)$$

$$S = 0 \quad (D.289)$$

À l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse angulaire à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_\eta = 0 \quad (D.290)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.291)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1 \quad (D.292)$$

$$A_{N_v} = 0 \quad (D.293)$$

$$A_{S_v} = 0 \quad (D.294)$$

$$A_{E_v} = 0 \quad (D.295)$$

$$A_{W_v} = 0 \quad (D.296)$$

$$A_{F_v} = 0 \quad (D.297)$$

$$A_{B_v} = 0 \quad (D.298)$$

$$S = 0 \quad (D.299)$$

À la sortie du conduit :

La condition de la vitesse angulaire à cette limite (à $z=100$) est :

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial z} = 0 \quad (D.300)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t}}{dz_b} = 0 \quad (D.301)$$

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} - V_{\eta B_v}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.302)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_v} = 1 \quad (D.303)$$

$$A_{N_v} = 0 \quad (D.304)$$

$$A_{S_v} = 0 \quad (D.305)$$

$$A_{E_v} = 0 \quad (D.306)$$

$$A_{W_v} = 0 \quad (D.307)$$

$$A_{F_v} = 0 \quad (D.308)$$

$$S = 0 \quad (D.309)$$

$$A_{B_v} = 1 \quad (D.310)$$

9.4. Conditions aux limites de l'équation de quantité de mouvement axiale :

Sur la paroi du cylindre elliptique intérieur :

La condition de la vitesse axiale à cette limite (à $\varepsilon=0.8$) est :

$$V_z = 0 \quad (D.311)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.312)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1 \quad (D.313)$$

$$A_{N_w} = 0 \quad (D.314)$$

$$A_{S_w} = 0 \quad (D.315)$$

$$A_{E_w} = 0 \quad (D.316)$$

$$A_{W_w} = 0 \quad (D.317)$$

$$A_{F_w} = 0 \quad (D.318)$$

$$A_{B_w} = 0 \quad (D.319)$$

$$S = 0 \quad (D.320)$$

Sur la paroi du cylindre elliptique extérieur :

La condition de la vitesse axiale à cette limite (à $\varepsilon=1.4$) est :

$$V_z = 0 \quad (D.321)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.322)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1 \quad (D.323)$$

$$A_{N_w} = 0 \quad (D.324)$$

$$A_{S_w} = 0 \quad (D.325)$$

$$A_{E_w} = 0 \quad (D.326)$$

$$A_{W_w} = 0 \quad (D.327)$$

$$A_{F_w} = 0 \quad (D.328)$$

$$A_{B_w} = 0 \quad (D.329)$$

$$S = 0 \quad (D.330)$$

À l'entrée du conduit :

La condition de la vitesse axiale à cette limite (à $z = 0$) est :

$$V_z = 1 \quad (D.331)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} = 1 \quad (D.332)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1 \quad (D.333)$$

$$A_{N_w} = 0 \quad (D.334)$$

$$A_{S_w} = 0 \quad (D.335)$$

$$A_{E_w} = 0 \quad (D.336)$$

$$A_{W_w} = 0 \quad (D.337)$$

$$A_{F_w} = 0 \quad (D.338)$$

$$A_{B_w} = 0 \quad (D.339)$$

$$S = 1 \quad (D.340)$$

À la sortie du conduit :

La condition de la vitesse axiale à cette limite (à $z=100$) est :

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (D.341)$$

Elle est discrétisée comme suit :

$$\frac{V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t}}{dz_b} = 0 \quad (D.342)$$

$$V_{zP_w}^{t+\Delta t} - V_{zB_w}^{t+\Delta t} = 0 \quad (D.343)$$

Elle est sous la forme standard avec les coefficients :

$$A_{P_w} = 1 \quad (D.344)$$

$$A_{N_w} = 0 \quad (D.345)$$

$$A_{S_w} = 0 \quad (D.346)$$

$$A_{E_w} = 0 \quad (D.347)$$

$$A_{W_w} = 0 \quad (D.348)$$

$$A_{F_w} = 0 \quad (D.349)$$

$$S = 0 \quad (D.350)$$

$$A_{B_w} = 1 \quad (D.351)$$

10. Équation de discrétisation de la pression :

Pour résoudre les équations de discrétisation des trois composantes de la vitesse, il faut préciser la pression qui est présente dans les sources de ces équations. La détermination de la pression dans les points centrés des volumes finis, nécessite une équation de discrétisation de la pression. Cette équation est obtenue par une manipulation combinant les équations de discrétisation de continuité et des quantités de mouvement.

Utilisant les équations de discrétisation des vitesses, on définit les pseudos vitesses :

$$\hat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_u}} \left[A_{N_u} (2V_{\varepsilon N_u}^t - V_{\varepsilon N_u}^{t-\Delta t}) + A_{S_u} (2V_{\varepsilon S_u}^t - V_{\varepsilon S_u}^{t-\Delta t}) + A_{E_u} (2V_{\varepsilon E_u}^t - V_{\varepsilon E_u}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_u} (2V_{\varepsilon W_u}^t - V_{\varepsilon W_u}^{t-\Delta t}) + A_{F_u} (2V_{\varepsilon F_u}^t - V_{\varepsilon F_u}^{t-\Delta t}) + A_{B_u} (2V_{\varepsilon B_u}^t - V_{\varepsilon B_u}^{t-\Delta t}) + S_u \right] \quad (D.352)$$

$$\hat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_v}} \left[A_{N_v} (2V_{\eta N_v}^t - V_{\eta N_v}^{t-\Delta t}) + A_{S_v} (2V_{\eta S_v}^t - V_{\eta S_v}^{t-\Delta t}) + A_{E_v} (2V_{\eta E_v}^t - V_{\eta E_v}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_v} (2V_{\eta W_v}^t - V_{\eta W_v}^{t-\Delta t}) + A_{F_v} (2V_{\eta F_v}^t - V_{\eta F_v}^{t-\Delta t}) + A_{B_v} (2V_{\eta B_v}^t - V_{\eta B_v}^{t-\Delta t}) + S_v \right] \quad (D.353)$$

$$\hat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} = \frac{1}{A_{P_w}} \left[A_{N_w} (2V_{z N_w}^t - V_{z N_w}^{t-\Delta t}) + A_{S_w} (2V_{z S_w}^t - V_{z S_w}^{t-\Delta t}) + A_{E_w} (2V_{z E_w}^t - V_{z E_w}^{t-\Delta t}) \right. \\ \left. + A_{W_w} (2V_{z W_w}^t - V_{z W_w}^{t-\Delta t}) + A_{F_w} (2V_{z F_w}^t - V_{z F_w}^{t-\Delta t}) + A_{B_w} (2V_{z B_w}^t - V_{z B_w}^{t-\Delta t}) + S_w \right] \quad (D.354)$$

On remarque que les pseudos vitesses sont des vitesses calculées sans les différences de pression dans les sources. Ces pseudos vitesses sont calculés au temps $(t+\Delta t)$ dans les volumes finis, avec les vitesses à des temps précédents $(t-\Delta t)$ et le schéma **d'Adam-Bashforth** parce que les vitesses au temps $(t+\Delta t)$ sont inconnues.

Les relations entre les vitesses et les pseudos vitesses sont :

$$V_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) h_{2P_u} \Delta \eta_P \Delta z_P}{A_{P_u}} = \hat{V}_{\varepsilon P_u}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) d_{P_u} \quad (D.355)$$

$$V_{\eta P_v}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) h_{1P_v} \Delta \varepsilon_P \Delta z_P}{A_{P_v}} = \hat{V}_{\eta P_v}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) d_{P_v} \quad (D.356)$$

$$V_{z P_w}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} + \frac{(P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) h_{1P_w} h_{2P_w} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P}{A_{P_w}} = \hat{V}_{z P_w}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_{P_w} \quad (D.357)$$

Compte tenu de la correspondance des positions du maillage typique et des maillages décalés, ces équations sont réécrites :

$$V_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_N^{t+\Delta t}) d_n \quad (D.358)$$

$$V_{\eta e}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\eta e}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_E^{t+\Delta t}) d_e \quad (D.359)$$

$$V_{z f}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{z f}^{t+\Delta t} + (P_P^{t+\Delta t} - P_F^{t+\Delta t}) d_f \quad (D.360)$$

Aussi, il est déduit que :

$$V_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} + (P_S^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_s \quad (D.361)$$

$$V_{\eta w}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{\eta w}^{t+\Delta t} + (P_W^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_w \quad (D.362)$$

$$V_{zb}^{t+\Delta t} = \hat{V}_{zb}^{t+\Delta t} + (P_B^{t+\Delta t} - P_P^{t+\Delta t}) d_b \quad (D.363)$$

L'utilisation de six équations précédentes (D.358)-(D.363), dans l'équation de la discrétisation de la continuité (D.7), nous donne une équation de discrétisation de la pression sous la forme standard :

$$A_P P_P^{t+\Delta t} = A_N P_N^{t+\Delta t} + A_S P_S^{t+\Delta t} + A_E P_E^{t+\Delta t} + A_W P_W^{t+\Delta t} + A_F P_F^{t+\Delta t} + A_B P_B^{t+\Delta t} + S \quad (D.364)$$

Avec :

$$A_N = h_{2n} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_n \quad (D.365)$$

$$A_S = h_{2s} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_s \quad (D.366)$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e \quad (D.367)$$

$$A_W = h_{1w} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_w \quad (D.368)$$

$$A_F = h_{1f} h_{2f} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_f \quad (D.369)$$

$$A_B = h_{1b} h_{2b} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_b \quad (D.370)$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B \quad (D.371)$$

$$S = (h_{2s} \hat{V}_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} - h_{2n} \hat{V}_{\varepsilon n}^{t+\Delta t}) \Delta \eta_P \Delta Z_P + (h_{1w} \hat{V}_{\eta w}^{t+\Delta t} - h_{1e} \hat{V}_{\eta e}^{t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ + (h_{1b} h_{2b} \hat{V}_{zb}^{t+\Delta t} - h_{1f} h_{2f} \hat{V}_{zf}^{t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \quad (D.372)$$

Donc si on a les pseudos vitesses, on peut calculer la source S et donc la pression. Sachant que les pseudos vitesses sont calculées avec des approximations de la vitesse, appelées estimations de la vitesse, la pression calculée ne peut être considérée qu'une estimation de la pression qui nécessite une correction. Si cette estimation de la pression est utilisée dans les équations de discrétisation des quantités de mouvement, on obtient un champ de vitesse qui est une nouvelle estimation qui nécessite une correction. Il est clair que pour l'obtention d'un champ de pression correct, il faut un champ de vitesse correcte et vice-versa. Évidemment, les corrections de vitesse et de pression sont liées. A un point donné, la correction de la vitesse est liée aux corrections des vitesses des points adjacents et des corrections de pression. Mais il y'a une méthode qui lie la correction de la vitesse à un point aux seules corrections de la pression. Cette méthode est au cœur de l'algorithme **SIMPLER** utilisé dans nos calculs et qui sera présenté plus tard. Avec cette méthode, on détermine une équation de correction de la pression ; et une fois la correction de la pression obtenue, elle est directement utilisée pour corriger le champ de vitesse. Les relations entre les estimations et les corrections de vitesse et de pression sont définies par :

$$V^{t+\Delta t} = V^{*t+\Delta t} + V'^{t+\Delta t} \quad (D.373)$$

$$P^{t+\Delta t} = P^{*t+\Delta t} + P'^{t+\Delta t} \quad (\text{D.374})$$

Tel que :

$V^{t+\Delta t}$: est la vitesse correcte.

$V^{*t+\Delta t}$: est l'estimation de la vitesse à corriger.

$V'^{t+\Delta t}$: est la correction de la vitesse.

$P^{t+\Delta t}$: est la pression correcte.

$P^{*t+\Delta t}$: est l'estimation de la pression à corriger.

$P'^{t+\Delta t}$: est la correction de la pression.

On introduit les corrections de vitesse (fonctions seulement des corrections de pression)

comme suit :

$$V_{\varepsilon n}^{t+\Delta t} = V_{\varepsilon n}^{*t+\Delta t} + (P_P'^{t+\Delta t} - P_N'^{t+\Delta t}) d_n \quad (\text{D.375})$$

$$V_{\varepsilon s}^{t+\Delta t} = V_{\varepsilon s}^{*t+\Delta t} + (P_S'^{t+\Delta t} - P_P'^{t+\Delta t}) d_s \quad (\text{D.376})$$

$$V_{\eta e}^{t+\Delta t} = V_{\eta e}^{*t+\Delta t} + (P_P'^{t+\Delta t} - P_E'^{t+\Delta t}) d_e \quad (\text{D.377})$$

$$V_{\eta w}^{t+\Delta t} = V_{\eta w}^{*t+\Delta t} + (P_W'^{t+\Delta t} - P_P'^{t+\Delta t}) d_w \quad (\text{D.378})$$

$$V_{z f}^{t+\Delta t} = V_{z f}^{*t+\Delta t} + (P_P'^{t+\Delta t} - P_F'^{t+\Delta t}) d_f \quad (\text{D.379})$$

$$V_{z b}^{t+\Delta t} = V_{z b}^{*t+\Delta t} + (P_B'^{t+\Delta t} - P_P'^{t+\Delta t}) d_b \quad (\text{D.380})$$

Si ces six dernières équations (D.375)-(D.380) sont utilisées dans l'équation de discrétisation de continuité (D.7), on obtient une équation de discrétisation de la correction de pression :

$$A_P P_P'^{t+\Delta t} = A_N P_N'^{t+\Delta t} + A_S P_S'^{t+\Delta t} + A_E P_E'^{t+\Delta t} + A_W P_W'^{t+\Delta t} + A_F P_F'^{t+\Delta t} + A_B P_B'^{t+\Delta t} + S' \quad (\text{D.381})$$

Avec :

$$A_N = h_{2n} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_n \quad (\text{D.382})$$

$$A_S = h_{2s} \Delta \eta_P \Delta Z_P d_s \quad (\text{D.383})$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e \quad (\text{D.384})$$

$$A_W = h_{1w} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_w \quad (\text{D.385})$$

$$A_E = h_{1e} \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P d_e \quad (\text{D.386})$$

$$A_F = h_{1f} h_{2f} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_f \quad (\text{D.387})$$

$$A_B = h_{1b} h_{2b} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P d_b \quad (\text{D.388})$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_F + A_B \quad (\text{D.389})$$

$$S' = (h_{2s} V_{\varepsilon s}^{*t+\Delta t} - h_{2n} V_{\varepsilon n}^{*t+\Delta t}) \Delta \eta_P \Delta Z_P + (h_{1w} V_{\eta w}^{*t+\Delta t} - h_{1e} V_{\eta e}^{*t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta Z_P \\ + (h_{1b} h_{2b} V_{z b}^{*t+\Delta t} - h_{1f} h_{2f} V_{z f}^{*t+\Delta t}) \Delta \varepsilon_P \Delta \eta_P \quad (\text{D.390})$$

La solution séquentielle des systèmes d'équations linéaires des variables dépendantes (composantes des vitesses, pression et température) et les mises à jour des propriétés physiques (viscosité et conductivité thermique) suivent l'algorithme **SIMPLER** dont les étapes sont citées ci-après :

1. Initialisation (ou mise à jour) des vitesses, de la température et propriétés physiques :
 $V_{\varepsilon}^t, V_{\varepsilon}^{t-\Delta t}, V_{\eta}^t, V_{\eta}^{t-\Delta t}, V_z^t, V_z^{t-\Delta t}, T^t, T^{t-\Delta t}, K^t, K^{t-\Delta t}, \mu^t \text{ et } \mu^{t-\Delta t}$.
2. Calcul des coefficients des équations de discrétisation des vitesses.
3. Calcul des pseudos vitesses.
4. Les pseudos vitesses sont utilisées dans la source de l'équation de discrétisation de pression. Cette dernière est résolue (à tous les points) pour obtenir un champ de pression considéré comme une estimation.
5. Le champ de la pression estimée est utilisé dans les sources des équations de discrétisation des vitesses. Ces dernières sont résolues donnant un champ de vitesse considéré comme une estimation de la vitesse à corriger.
6. Les estimations des vitesses sont utilisées dans la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression. Cette dernière est résolue pour obtenir un champ de la correction de la pression.
7. La correction de la pression est utilisée pour corriger le champ de vitesse.
8. Le champ de vitesse corrigé est utilisé dans l'équation de discrétisation d'énergie. Cette dernière est résolue pour obtenir le champ de température.
9. Le champ thermique est utilisé pour le calcul des propriétés physiques variables : viscosité et conductivité thermique.
10. On vérifie l'atteinte du régime permanent (stationnaire) caractérisé par l'invariance temporelle de toutes les variables calculées et la satisfaction des bilans massique et thermique globaux. Si le régime permanent est atteint, on arrête les calculs. Sinon, on augmente le temps d'un pas (de temps) et on retourne à l'étape 1.

11. Solution des systèmes d'équations linéaires :

L'équation de discrétisation d'une variable représente un système d'équations linéaires. La matrice des coefficients de ce système est heptagonale. Compte tenu du nombre des équations linéaires qui est égal au nombre des points du maillage, il est évident que les méthodes classiques directes de la solution des systèmes d'équations linéaires ne peuvent être utilisées. La capacité de stockage des coefficients de la matrice dépasse largement celle des ordinateurs disponibles et bien sûr, l'accumulation des erreurs d'arrondi des calculs

inonde les calculs. La seule alternative est l'utilisation de l'une des méthodes itératives classiques. Nous avons fait le choix de la méthode de balayage dite : **Sweeping Method**. Cette méthode consiste à transformer la solution du système d'équations heptagonal en trois systèmes tri diagonaux (équivalents), représentant les variations suivant les trois directions des coordonnées. Ainsi, une itération du calcul est composée d'un balayage suivant la direction ϵ , un balayage suivant la direction η et un balayage suivant z .

Les balayages suivant les directions radiale et axiale impliquent l'utilisation de l'algorithme classique **TDMA** qui est directe et stable. Le balayage suivant la direction angulaire utilise l'algorithme cyclique **CTDMA** qui tient compte de la périodicité suivant cette direction. Dans ce qui suit, on présente un exemple d'application de la méthode du balayage à l'équation d'énergie. Soit le système des équations linéaires représenté par l'équation de la discrétisation d'énergie :

$$A_P T_P = A_N T_N + A_S T_S + A_E T_E + A_W T_W + A_F T_F + A_B T_B + S \quad (D.391)$$

Ce système est réécrit sous forme indicielle :

$$\begin{aligned} A_P(i, j, k) T(i, j, k) = & A_N(i, j, k) T(i + 1, j, k) + A_S(i, j, k) T(i - 1, j, k) \\ & + A_E(i, j, k) T(i, j, kkk) + A_W(i, j, k) T(i, j, kk) \\ & + A_F(i, j, k) T(i, j + 1, k) + A_B(i, j, k) T(i, j - 1, k) + S(i, j, k) \end{aligned} \quad (D.392)$$

i : est l'indice variable entre 1 et IL suivant la direction radiale ϵ .

j : est l'indice variable entre 1 et JL suivant la direction axiale z .

k : est l'indice variable entre 1 et KL suivant la direction angulaire η .

$$kkk = \begin{cases} k + 1, & \text{si } k \neq KL \\ 1, & \text{si } k = KL \end{cases} \quad (D.393)$$

$$kk = \begin{cases} k - 1, & \text{si } k \neq 1 \\ KL, & \text{si } k = 1 \end{cases} \quad (D.394)$$

Le système (D.392) est transformé en trois systèmes :

$$A_P(i, j, k) T'(i, j, k) = A_N(i, j, k) T'(i + 1, j, k) + A_S(i, j, k) T'(i - 1, j, k) + S'(i, j, k) \quad (D.395)$$

$$A_P(i, j, k) T''(i, j, k) = A_E(i, j, k) T''(i, j, kkk) + A_W(i, j, k) T''(i, j, kk) + S''(i, j, k) \quad (D.396)$$

$$A_P(i, j, k) T'''(i, j, k) = A_F(i, j, k) T'''(i, j + 1, k) + A_B(i, j, k) T'''(i, j - 1, k) + S'''(i, j, k) \quad (D.397)$$

Avec :

$$\begin{aligned} S'(i, j, k) = & A_E(i, j, k) T(i, j, kkk) + A_W(i, j, k) T(i, j, kk) + A_F(i, j, k) T(i, j + 1, k) \\ & + A_B(i, j, k) T(i, j - 1, k) + S(i, j, k) \end{aligned} \quad (D.398)$$

$$S''(i, j, k) = A_N(i, j, k)T'(i + 1, j, k) + A_S(i, j, k)T'(i - 1, j, k) + A_F(i, j, k)T'(i, j + 1, k) \\ + A_B(i, j, k)T'(i, j - 1, k) + S(i, j, k) \quad (D.399)$$

$$S'''(i, j, k) = A_N(i, j, k)T''(i + 1, j, k) + A_S(i, j, k)T''(i - 1, j, k) + A_E(i, j, k)T''(i, j, k) \\ + A_W(i, j, k)T''(i, j, k) + S(i, j, k) \quad (D.400)$$

On remarque que les systèmes (D.395) et (D.397) sont tri diagonaux et que le système (D.396) est tri diagonal cyclique. La solution itérative du système (D.392) est accomplie par les solutions successives des systèmes (D.395), (D.396) et (D.397). La solution du système (D.395) donne les températures $T'(i, j, k)$, celle du système (D.396) donne les températures $T''(i, j, k)$ et celle du système (D.397) donne les températures $T'''(i, j, k)$. Les systèmes tri diagonaux (D.395) et (D.397) sont résolus avec l'algorithme **TDMA** classique. On présente son application au système (D.395). Ce dernier est réécrit sous la forme réduite :

$$a(i)T'(i, j, k) = b(i)T'(i + 1, j, k) + c(i)T'(i - 1, j, k) + d(i) \quad (D.401)$$

Avec les correspondances :

$$a(i) = A_P(i, j, k) \quad (D.402)$$

$$b(i) = A_N(i, j, k) \quad (D.403)$$

$$c(i) = A_S(i, j, k) \quad (D.404)$$

$$d(i) = S'(i, j, k) \quad (D.405)$$

On rappelle que tous les $a(i)$, $b(i)$, $c(i)$ et $d(i)$, ($i = 1, 2, \dots, IL$), sont connus.

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$T'(i, j, k) = P(i)T'(i + 1, j, k) + Q(i) \quad (D.406)$$

Et donc :

$$T'(i - 1, j, k) = P(i - 1)T'(i, j, k) + Q(i - 1) \quad (D.407)$$

Utilisant cette équation dans l'équation (D.401), on obtient après réarrangement :

$$T'(i, j, k) = \frac{b(i)}{[a(i) - c(i)P(i - 1)]} T'(i + 1, j, k) + \frac{c(i)Q(i - 1) + d(i)}{[a(i) - c(i)P(i - 1)]} \quad (D.408)$$

L'identité des équations (D.406) et (D.408) induit deux nouvelles relations de récurrence :

$$P(i) = \frac{b(i)}{[a(i) - c(i)P(i - 1)]} \quad (D.409)$$

$$Q(i) = \frac{c(i)Q(i - 1) + d(i)}{[a(i) - c(i)P(i - 1)]} \quad (D.410)$$

Avec les initialisations (sachant que $c(1) = 0$):

$$P(1) = \frac{b(1)}{a(1)} \quad (D.411)$$

$$Q(1) = \frac{d(1)}{a(1)} \quad (D.412)$$

Avec les initialisations et les relations (D.409) et (D.410), tous les $P(i)$ et les $Q(i)$ sont déterminés. Sachant que $b(IL) = 0$,

$$T'(IL, j, k) = Q(IL) \quad (D.413)$$

Enfin, les températures $T'(i, j, k)$, $i = IL - 1, IL - 2, \dots, 1$, sont directement déterminées de la relation (D.406).

Le système tri diagonal cyclique (D. 396) est résolu avec l'algorithme **CTDMA**. On présente son application au système (D.396). Ce dernier est réécrit sous la forme réduite :

$$a(k)T''(i, j, k) = b(k)T''(i, j, kkk) + c(k)T''(i, j, kk) + d(k) \quad (D.414)$$

Avec les correspondances :

$$a(k) = A_p(i, j, k) \quad (D.415)$$

$$b(k) = A_E(i, j, k) \quad (D.416)$$

$$c(k) = A_W(i, j, k) \quad (D.417)$$

$$d(k) = S''(i, j, k) \quad (D.418)$$

On rappelle que tous les $a(k)$, $b(k)$, $c(k)$ et $d(k)$, ($k = 1, 2, \dots, KL$), sont connus.

On divise l'équation (D.414) par $a(k)$:

$$T''(i, j, k) = \frac{b(k)}{a(k)}T''(i, j, kkk) + \frac{c(k)}{a(k)}T''(i, j, kk) + \frac{d(k)}{a(k)} \quad (D.419)$$

On remarque, d'après cette équation, que les températures du premier et dernier point (suivant la direction angulaire) sont dépendantes comme le démontre l'utilisation de $k = 1$ dans l'équation suivante :

$$T''(i, j, 1) = \frac{b(1)}{a(1)}T''(i, j, 2) + \frac{c(1)}{a(1)}T''(i, j, KL) + \frac{d(1)}{a(1)} \quad (D.420)$$

On introduit la relation de récurrence suivante :

$$T''(i, j, k) = E(k)T''(i, j, kkk) + F(k)T''(i, j, KL) + G(k) \quad (D.421)$$

Si $k = 1$, on obtient :

$$T''(i, j, 1) = E(1)T''(i, j, 2) + F(1)T''(i, j, KL) + G(1) \quad (D.422)$$

Par identification avec l'équation (D.420), on a les initialisations :

$$E(1) = \frac{b(1)}{a(1)} \quad (D.423)$$

$$F(1) = \frac{c(1)}{a(1)} \quad (D.424)$$

$$G(1) = \frac{d(1)}{a(1)} \quad (D.425)$$

D'après la récurrence de l'équation (D.421) on a :

$$T''(i, j, kk) = E(kk)T''(i, j, k) + F(kk)T''(i, j, KL) + G(kk) \quad (D.426)$$

On utilise la valeur de $T''(i, j, kk)$ de l'équation (D.426) dans l'équation (D.414) et on obtient :

$$a(k)T''(i, j, k) = b(k)T''(i, j, kkk) + c(k)[E(kk)T''(i, j, k) + F(kk)T''(i, j, KL) + G(kk)] + d(k) \quad (D.427)$$

Cette équation (D.427) est réarrangée sous la forme :

$$T''(i, j, k) = \frac{b(k)}{[a(k)-c(k)E(kk)]} T''(i, j, kkk) + \frac{c(k)F(kk)}{[a(k)-c(k)E(kk)]} T''(i, j, KL) + \frac{c(k)G(kk)+d(kk)}{[a(k)-c(k)E(kk)]} \quad (D.428)$$

De l'identité des équations (D.421) et (D.428) on déduit trois nouvelles relations de récurrence :

$$E(k) = \frac{b(k)}{[a(k)-c(k)E(kk)]} \quad (D.429)$$

$$F(k) = \frac{c(k)F(kk)}{[a(k)-c(k)E(kk)]} \quad (D.430)$$

$$G(k) = \frac{c(k)G(kk)+d(kk)}{[a(k)-c(k)E(kk)]} \quad (D.431)$$

avec les initialisations des équations (D.423), (D.424) et (D.425) et les relations de récurrence (D.429), (D.430) et (D.431), on détermine tous les $E(k)$, $F(k)$ et $G(k)$ avec $k = 2, 3, 4, \dots, KL - 1$.

Le développement algorithmique suit la détermination de la température $T''(i, j, KL)$, ce qui rendra la récurrence (D.421) utilisable directement pour la détermination des autres températures.

Détermination de $T''(i, j, KL)$:

Avec la valeur $k = KL$ dans l'équation (D.414), on a :

$$a(KL)T''(i, j, KL) = b(KL)T''(i, j, 1) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + d(KL) \quad (D.432)$$

On introduit les coefficients $P(k)$, $Q(k)$ et $R(k)$ qui satisfont l'équation :

$$P(k)T''(i, j, KL) = Q(k)T''(i, j, k) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(k) \quad (D.433)$$

Pour $k = 1$, on obtient :

$$P(1)T''(i, j, KL) = Q(1)T''(i, j, 1) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(1) \quad (D.434)$$

De la comparaison des équations (D.432) et (D.434), vient l'initialisation :

$$P(1) = a(KL) \quad (D.435)$$

$$Q(1) = b(KL) \quad (D.436)$$

$$R(1) = d(KL) \quad (D.437)$$

Avec $k = 1$ dans l'équation (D.421), on a :

$$T''(i, j, 1) = E(1)T''(i, j, 2) + F(1)T''(i, j, KL) + G(1) \quad (D.438)$$

On remplace l'expression de $T''(i, j, 1)$ d'équation (D.438) dans l'équation (D.434), et il vient :

$$[P(1) - Q(1)F(1)]T''(i, j, KL) = Q(1)E(1)T''(i, j, 2) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + Q(1)G(1) + R(1) \quad (D.439)$$

Avec $k = 2$ dans l'équation (D.433), on a :

$$P(2)T''(i, j, KL) = Q(2)T''(i, j, 2) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(2) \quad (D.440)$$

De la comparaison des équations (D.439) et (D.440), on déduit :

$$P(2) = [P(1) - Q(1)F(1)] \quad (D.441)$$

$$Q(2) = Q(1)E(1) \quad (D.442)$$

$$R(2) = Q(1)G(1) + R(1) \quad (D.443)$$

Avec $k = 2$ dans l'équation (D.421), on a :

$$T''(i, j, 2) = E(2)T''(i, j, 3) + F(2)T''(i, j, KL) + G(2) \quad (D.444)$$

Avec $k = 2$ dans l'équation (D.433), on a :

$$P(2)T''(i, j, KL) = Q(2)T''(i, j, 2) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(2) \quad (D.445)$$

On remplace l'expression de $T''(i, j, 2)$ de l'équation (D.444) dans l'équation (D.445) et il vient :

$$[P(2) - Q(2)F(2)]T''(i, j, KL) = Q(2)E(2)T''(i, j, 3) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(2) + Q(2)G(2) \quad (D.446)$$

Avec $k = 3$ dans l'équation (D.433), on a :

$$P(3)T''(i, j, KL) = Q(3)T''(i, j, 3) + c(KL)T''(i, j, KL - 1) + R(3) \quad (D.447)$$

De la comparaison des équations (D.446) et (D.447), on déduit :

$$P(3) = [P(2) - Q(2)F(2)] \quad (D.448)$$

$$Q(3) = Q(2)E(2) \quad (D.449)$$

$$R(3) = R(2) + Q(2)G(2) \quad (D.450)$$

On peut continuer, avec l'incrémement de l'indice k , les procédures qui ont conduit à l'obtention des équations (D.441), (D.442), (D.443), (D.448), (D.449) et (D.450) et la conclusion tirée des résultats est l'ensemble des relations de récurrence :

$$P(k) = [P(k - 1) - Q(k - 1)F(k - 1)] \quad (D.451)$$

$$Q(k) = Q(k - 1)E(k - 1) \quad (D.452)$$

$$R(k) = R(k - 1) + Q(k - 1)G(k - 1) \quad (D.453)$$

Pour $k = 2, 3, 4, \dots, KL$. Ces relations de récurrence sont initialisées par les relations des équations (D.435), (D.436) et (D.437). Une fois que tous les coefficients $E(k), F(k), G(k), P(k), Q(k)$ et $R(k)$ ($k = 1, 2, \dots, KL$) sont calculés, on peut déterminer

la température $T''(i, j, KL)$ et ensuite utiliser l'équation (D.421) pour déterminer les $T''(i, j, k)$, $k = KL - 1, KL - 2, \dots, 1$.

Avec $k = KL - 1$ dans l'équation (D.433), on a :

$$P(KL - 1)T''(i, j, KL) = [Q(KL - 1) + c(KL)]T''(i, j, KL - 1) + R(KL - 1) \quad (D.454)$$

Avec $k = KL - 1$ dans l'équation (D.421), on a :

$$T''(i, j, KL - 1) = [E(KL - 1) + F(KL - 1)]T''(i, j, KL) + G(KL - 1) \quad (D.455)$$

On utilise l'équation (D.455) dans (D.454) et on obtient :

$$T''(i, j, KL) = \frac{[Q(KL-1)+c(KL)]G(KL-1)+R(KL-1)}{[P(KL-1)-[Q(KL-1)+c(KL)][E(KL-1)+F(KL-1)]]} \quad (D.456)$$

12. Convergence :

A partir des conditions initiales, la marche dans le temps est continue jusqu'à l'atteinte du régime permanent. En ce régime, les champs dynamique et thermique sont invariants dans le temps. Dans tous les cas on a obtenu une très bonne satisfaction des bilans massiques et thermiques globaux (l'égalité des débits entrants et sortants).

La valeur du débit entrant est :

$$Débite = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.8}^{\varepsilon=1.4} V_{ze} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta = 9.13596 \quad (D.457)$$

et celle du débit sortant est :

$$Débits = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.8}^{\varepsilon=1.4} V_{zs} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (D.458)$$

qui varie suivant le cas considéré (voir le Tableau D.1).

La satisfaction du bilan thermique global est vérifiée par l'égalité des termes q_1 et q_2 .

$$q_1 = \int_0^{100} \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re Pr} K \left. \frac{\partial T}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0.8} d\eta dz = 0.50439 \quad (D.459)$$

q_1 exprime la puissance thermique donnée (par conduction) au fluide à travers la paroi du cylindre elliptique intérieur. Il est constant dans tous les cas considérés.

$$q_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon=0.8}^{\varepsilon=1.4} V_{zs} T_s h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (D.460)$$

qui exprime la puissance thermique échangée par convection à la sortie du conduit. Sa valeur varie suivant les cas, comme il est précisé dans le Tableau D.1.

$$q_3 = \int_0^{100} \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re Pr} K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (D.461)$$

qui exprime la puissance thermique échangée par conduction à l'entrée du conduit.

$$q_4 = \int_0^{100} \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re Pr} K \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=100} h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (D.462)$$

qui exprime la puissance thermique échangée par conduction à la sortie du conduit.

q_3 et q_4 sont égaux et négligeables dans tous les cas considérés (de l'ordre de 0.00004).

Dans le Tableau D.1, on rapporte que les valeurs absolues des différences relatives entre les débits entrants et sortants et entre q_1 et q_2 ne dépassent pas 0.05% et 0.012%, respectivement. Donc, on conclue que la satisfaction des bilans massiques et thermiques globaux est obtenue avec une bonne précision.

Tableau D.1 Valeur de Débits, valeur absolue de la différence relative entre Débite et Débits, valeur de q_2 et valeur absolue de la différence relative entre q_1 et q_2 .

θ	Débits	$\left \frac{Débite - Débits}{Débite} \right $	q_2	$\left \frac{q_1 - q_2}{q_1} \right $
0	9.13729	0.0145 %	0.50440	0.002 %
$\pi/6$	9.13816	0.024 %	0.50438	0.002 %
$\pi/3$	9.13952	0.039 %	0.50435	0.008 %
$\pi/2$	9.14026	0.047 %	0.50433	0.012 %
$-\pi/6$	9.13778	0.02 %	0.50434	0.009 %
$-\pi/3$	9.13615	0.002 %	0.50444	0.009 %
$-\pi/2$	9.13611	0.0016 %	0.50443	0.008 %

Annexe E

Rappel mathématique sur les coordonnées elliptiques

La Figure E.1 représente les coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire. Suivant la direction normale à ce plan (la direction axiale), les coordonnées elliptiques et cartésiennes sont confondues. Les formules de transformation des coordonnées elliptiques aux coordonnées cartésiennes sont les suivantes :

$$X = a \cosh \varepsilon \cos \eta \quad (\text{E.1})$$

$$Y = a \sinh \varepsilon \sin \eta \quad (\text{E.2})$$

$$Z = z \quad (\text{E.3})$$

Avec $\cosh \varepsilon$ et $\sinh \varepsilon$ les fonctions trigonométriques définies par :

$$\cosh \varepsilon = \frac{e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon}}{2} \quad (\text{E.4})$$

$$\sinh \varepsilon = \frac{e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon}}{2} \quad (\text{E.5})$$

et liées par les relations suivantes :

$$\cosh^2 \varepsilon - \sinh^2 \varepsilon = 1 \quad (\text{E.6})$$

$$\cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \quad (\text{E.7})$$

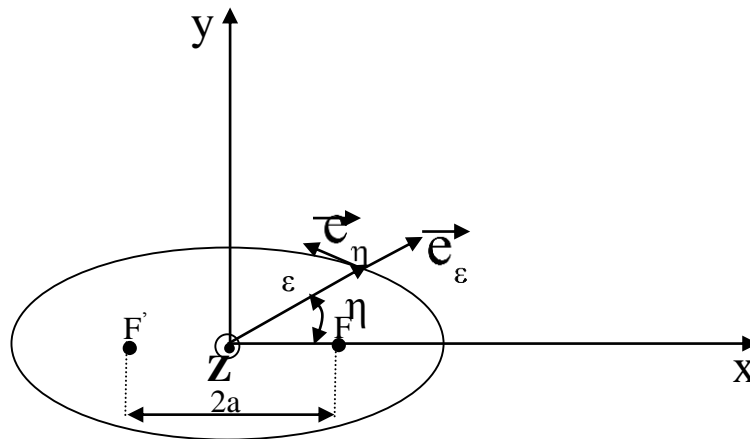


Fig. E.1. Systèmes de coordonnées elliptiques et cartésiennes sur un plan polaire

F et F' sont les foyers de l'ellipse et a est sa demi distance focale. L'angle η augmente suivant la direction antihoraire. On définit aussi le déterminant du Jacobien par :

$$|j| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \sinh \varepsilon \cos \eta & -a \cosh \varepsilon \sin \eta & 0 \\ a \cosh \varepsilon \sin \eta & a \sinh \varepsilon \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 (\sinh^2 \varepsilon + \sin^2 \eta) \quad (\text{E.8})$$

Les coefficients métriques h_1, h_2, h_3 sont définis par :

$$h_1 = \left(\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varepsilon}\right)^2 = a\sqrt{\sinh^2 \varepsilon + \sin^2 \eta} \quad (\text{E.9})$$

$$h_2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)^2 = a\sqrt{\sinh^2 \varepsilon + \sin^2 \eta} \quad (\text{E.10})$$

$$h_3 = \left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\right)^2 = 1 \quad (\text{E.11})$$

$$h_1 h_2 = a^2 (\sinh^2 \varepsilon + \sin^2 \eta) \quad (\text{E.12})$$

$$\sqrt{h_1 h_2} = a\sqrt{\sinh^2 \varepsilon + \sin^2 \eta} = h_1 = h_2 \quad (\text{E.13})$$

Le déterminant du Jacobien s'écrit en fonction des coefficients métriques comme suit :

$$|j| = h_1 h_2 h_3 = h_1 h_2 = a^2 (\sinh^2 \varepsilon + \sin^2 \eta) \quad (\text{E.14})$$

Le volume différentiel en coordonnées elliptiques est proportionnel au déterminant du Jacobien :

$$dV = |j| d\varepsilon d\eta dz = h_1 h_2 d\varepsilon d\eta dz \quad (\text{E.15})$$

La surface différentielle sur le plan polaire, est :

$$dS = h_1 h_2 d\varepsilon d\eta \quad (\text{E.16})$$

الحمل الحراري القسري والمختلط في تجويف حلقي بيضاوي أفقي ومائل مليء برغوة معدنية

حمل حراري طباقى ثلاثي الأبعاد للماء في تجويف حلقي مملوء برغوة معدن الألمنيوم بين اسطوانتين بيضاويتين الشكل متحدتي البؤر. تعتبر رغوة الألمنيوم 20 PPI وسط نفوذ متجانس وموحد الخواص. يعتبر حقل الجريان محوري وموحد ومتساوي الحرارة عند مدخل التجويف. الاسطوانة الداخلية مسخنة بطريقة موحدة والاسطوانة الخارجية كظومة. في هذه الدراسة تقدم قسمين: الأول هو حل تحليلي وعددي للحمل القسري لجريان في تطور حراري مع خصائص فيزيائية ثابتة. تتم مقارنة النتائج مع نتائج التجويف الفارغ لتقييم الأداء الحراري لرغوة الألمنيوم المستخدمة. تعرض الجوانب الرياضية والفيزيائية التفصيلية للحمل وتناقش ويتجلى تعزيز نقل الحرارة من خلال استخدام الرغوة المعدنية. من أجل عوامل التحكم للمشكلة المطروحة وجدنا أن الحقل الحراري العددي يستنسخ التحليلي. هذا الاستنساخ هو مصادقة على النتيجة العددية وبرهان على ملاءمة الحل المكاني للشبكة الرقمية المستخدمة. الجزء الثاني هو محاكاة رقمية للحمل الحراري المختلط في التجويف الحلقي المائل. الجريان البطني ونقل الحرارة من خلال التجويف الحلقي النفوذ تتمذج بمعادلة الاستمرارية، نموذج الجريان دارسي - فورخيمار - برينكمان، باعتبار الطفوالمهم ومعادلة الطاقة. في مجال تغير درجة الحرارة في هذه الدراسة، وباعتبار أن الخصائص الفيزيولوجية للماء متغيرة مع درجة الحرارة في حين أن خصائص الألمونيوم ثابتة، يتم حل معادلات النموذج عدديا بطريقة الحجم المنتهية مع تفريد زمني مكاني دقيق من الدرجة الثانية. حسب النتائج التي تم الحصول عليها باعتبار المعايير الهندسية والديناميكية والحرارية، ينصح بميل صغير سلبي للتجويف الحلقي للحصول على تعزيز نقل حرارة قريب من تعزيز التجويف الحلقي الأفقي مع التغلب على مجموع هبوط الضغط. الجوانب النوعية لنتائج هذه الدراسة لا تقتصر على النظام المستخدم. إنها تنطبق على أي نظام للحمل الحراري المختلط القوي (باعتبار الخصائص الفيزيولوجية للمائع متغيرة)، في قناة طويلة بما فيه الكفاية، مائلة ومليئة بوسط مسامي ذو توصيل حراري فعال أكبر منه في السائل المستخدم.

الكلمات المفتاحية:

حمل قسري، حمل مختلط، رغوة معدنية، خصائص متغيرة، تجويف حلقي، بيضاوي المقطع، أفقي، مائل، نموذج تحليلي، دراسة عددية، نقل الحرارة.

Forced and Mixed Convection in an Horizontal and Inclined Elliptical Annular Space Filled with Metal Foam

The three-dimensional laminar convection of water in aluminum metal foam annulus between two confocal elliptic cylinders is presented. The 20 PPI aluminum foam is considered a homogeneous and isotropic porous medium. The flow field is considered axial, uniform and isothermal at the annulus entrance. The inner cylinder is uniformly heated and the outer cylinder is adiabatic. In this study, we present two parts: the first one is an analytic and a numerical solution of the thermally developing forced convection flow, with constant physical properties; the results will be compared with those of the empty annulus to assess the thermal performance of the used aluminum foam. The detailed mathematical and physical aspects of the convection are presented and discussed. The heat transfer enhancement by the use of the metal foam is demonstrated. For the considered controlling parameters of the problem, it is found that the numerical thermal field reproduces the analytic one. This reproduction is a validation of the numerical result and a demonstration of the adequacy of the spatial resolution of the used numerical grid. The validation of the numerical results of the considered forced convection is a prelude to the numerical simulation of the mixed convection in an inclined annulus with fluid variable physical properties that is presented in the second Part of this work. The results of the forced convection are considered a reference state for those of the mixed convection. In the second part of this work, the slow flow and the heat transfer through the porous annulus are modeled by the continuity equation, the Darcy-Forchheimer-Brinkman flow model, accounting for the important buoyancy, and the energy equation. In the temperature variation domain of this study, the thermophysical properties of the water are functions of temperature while those of the aluminum are constants. The model equations are numerically solved by a finite volume numerical method with a second order accurate spatiotemporal discretization. From the results obtained with the considered geometric, dynamic and thermal parameters, a small negative annulus inclination is recommended to obtain an enhanced heat transfer close to that of the horizontal annulus mounting while overcoming the total pressure drop. The qualitative aspects of the results of this study are not limited to the specific used system; they apply to any strong mixed convection system (with fluid variable physical properties), in a

long enough and inclined conduit, filled with any porous medium that has an effective thermal conductivity higher than that of the used liquid.

Keywords:

Forced convection, mixed convection, metal foam, variable properties, elliptical annulus, horizontal, inclined, analytical model, numerical study, heat transfer.

RÉSUMÉ

La convection laminaire tridimensionnelle d'eau dans un espace annulaire rempli d'une mousse métallique entre deux cylindres elliptiques confocaux est présentée. La mousse d'Aluminium 20 PPI est considérée comme un milieu poreux homogène et isotrope. Le champ d'écoulement est considéré axial, uniforme et isotherme à l'entrée de l'espace annulaire. Le cylindre intérieur est uniformément chauffé et le cylindre extérieur est adiabatique. Dans cette étude, nous présentons deux parties : la première est une solution analytique et numérique de la convection forcée d'un écoulement en développement thermique, avec des propriétés physiques constantes ; les résultats obtenus seront comparés à ceux de l'espace annulaire vide pour évaluer la performance thermique de la mousse d'aluminium utilisée. Les aspects mathématiques et physiques détaillées de la convection sont présentés et discutés. L'amélioration du transfert de chaleur par l'utilisation de la mousse métallique est démontrée. Pour les paramètres de contrôle du problème considéré, on constate que le champ thermique numérique reproduit l'analytique. Cette reproduction est une validation du résultat numérique et une démonstration de l'adéquation de la résolution spatiale du maillage numérique utilisé. La validation des résultats numériques de la convection forcée considérée est un prélude à la simulation numérique de la convection mixte dans un espace annulaire incliné avec des propriétés physiques variables du fluide qui sera présenté dans la deuxième partie de cette thèse. Les résultats de la convection forcée sont considérés comme un état de référence pour ceux de la convection mixte. Dans la seconde partie, l'écoulement lent et le transfert de chaleur à travers l'espace annulaire poreux sont modélisés par l'équation de continuité, le modèle d'écoulement de Darcy-Forchheimer-Brinkmann, tenant compte de la flottabilité importante et l'équation d'énergie. Dans le domaine de variation de la température dans cette étude, les propriétés thermophysiques de l'eau sont des fonctions de la température, tandis que ceux de l'aluminium sont des constantes. Les équations du modèle sont résolues numériquement par la méthode numérique des volumes finis avec une discrétisation spatiotemporelle précise du second ordre. A partir des résultats obtenus avec les paramètres géométriques, dynamiques et thermiques considérés, une petite inclinaison négative de l'espace annulaire est recommandée pour obtenir un transfert de chaleur amélioré proche de celui de l'espace annulaire horizontal tout en surmontant la chute de pression totale. Les aspects qualitatifs des résultats de cette étude ne sont pas limités au système utilisé spécifique ; ils ont appliqué à tout système de convection mixte forte (avec des propriétés physiques du fluide variables), dans un conduit incliné et assez long, rempli de tout milieu poreux qui a une conductivité thermique effective supérieure à celle du liquide utilisé.

Mots clés :

Convection forcée, convection mixte, mousse métallique, espace annulaire, section elliptique, horizontal, incliné, propriétés variables, modèle analytique, étude numérique, transfert thermique.