REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre:
Série:

MEMOIRE

Présenté pour obtenir le Diplôme de Magister en Physique

Spécialité: **Physique théorique**

THEME

Etude de la théorie des cordes non critiques dans le formalisme de la paraquantification

PAR

Bouras Abdelhalim

DIRECTEUR DE LA THESE :

Belaloui N.

Anne universitaire :2007

Table des matières

Préface

La théorie des cordes bosoniques est formulée dans un espace-temps de dimension $D = 26$ alors que les théories des cordes fermioniques et des supercordes sont formulées dans un espace-temps de dimension $D = 10$. L'extension des deux premières dans le formalisme de la paraquantification conduit à la possibilité de leur existence à des dimensions D autres que 26 ou 10[2][3]

L'objet de ce travail consiste à explorer la question suivante : De la même façon que l'extension paraquantique d'une théorie de corde critique a donné des paracorde critique à des dimensions d'espace-temps exprimées en fonction de l'ordre de la paraquantification, dans quelle mesure l'extension paraquantique d'une théorie de corde non critique restera -t-elle non critique.

Dans le chapitre 01, on donnera une idée générale sur la théorie des cordes et le formalisme paraquantique.

Dans le chapitre 02, on donnera une introduction générale sur la théorie des cordes non critiques.

Dans le chapitre 03, on commencera l'étude par le cas le plus général qui consistera à considérer toutes les variables dynamiques (aussi bien , celle du centre de masse de la corde que celle du spin de la corde et les modes) comme opérateurs obéissant à des relations trilinéaires (extension paraquantique des relations bilinéaires), on écrira le formalisme (les relations trilinéaires entre les variables dynamiques), on calculera le commutateur de l'algèbre de Poincaré après avoir fait une symétrisation du générateur de Lorentz (les différents étapes de calcul sont développées dans les annexes A,B,C,D). Un calcul analogue est aussi développé à travers la représentation de Green(certain développements de calcul sont analogues aux annexes A,B,C,D), où on montrera ensuite que les termes d'anomalie sont équivalents pour les deux approches.

Dans le chapitre 04, on se penchera sur la question qui consiste à identifier l'origine des différents termes de l'anomalie en considérant d'abord que S est un moment cinétique satisfaisant la relation standard qu'on combinera avec les autres opérateurs à travers l'hypothèse de Ardalan et Mansouri sur l'opérateur moment cinétique, on construira le formalisme dans l'espace de Green (relations bilinéaires entre les variables dynamiques), on développera le calcul de l'algèbre de Poincaré (des annexes analogues à celles de A,B,C,D sont nécessaires pour le développement des différentes étapes de calcul). Un terme de l'anomalie est alors éliminé et donc son origine identifiée. On passera alors à l'étape suivante qui consiste à considérer le moment cinétique S comme le spin de la particule et de ce fait, S est une notion purement quantique et donc ne devrait pas dépendre des coordonnées et des moments du centre de masse de la corde, ce qui se traduit par le fait que S commute avec ces derniers. On écrira le formalisme (les relations trilinéaires entre les variables dynamiques), on calculera le commutateur de l'algèbre de Poincaré (la même remarque que précédemment pour les annexes). Un autre terme de l'anomalie est alors éliminé et donc son origine identifiée.

Dans le chapitre 05, on imposera l'hypothèse de Ardalan et Mansouri sur les coordonnées et les moments du centre de masse où seuls les modes de la corde obéiront aux relations trilinéaires, on construira le formalisme (les relations bilinéaires entre les variables dynamiques), on calculera le commutateur de l'algèbre de Poincaré, l'origine de ce qui reste de l'anomalie éliminée est ainsi identifiée.

On terminera enfin par une conclusion.

Chapitre 1

Introduction à la théorie des cordes :

I Introduction :

Dans la théorie quantique des champs, les particules sont représentées comme des points dans l'espace-temps. La théorie des cordes est une généralisation de la théorie quantique des champs où les particules sont étendues a des objets à 1-dimension (cordes). Les particules élémentaires correspondent aux différents modes de vibrations de la corde, le principal avantage de cette description est qu'on a une seule corde représentant toutes les particules, ceci est un point de départ attrayant pour espérer que la théorie des cordes soit une bonne candidate pour unifier les quatres interactions fondamentales.

Cette idée a émergé à la fin des années 60 après plusieurs années d'études intensives sur le modèle dual des interactions fortes [28], mais autour de 1973, les intéressés par la théorie des cordes sont devenus moins nombreux à cause de la découverte de Q.C.D.

La théorie du modèle dual a conduit à l'existence d'une particule sans masse de spin 2, J.sherk et J.shwartz [28] ont associé cette particule au graviton. Le graviton étant le responsable des interactions gravitationnelles, la théorie des cordes inclue la relativité générale, c'est donc une autre raison pour dire que la théorie des cordes est une bonne candidate pour unifier les quatres interactions. En effet, la théorie quantique des champs a pu unifier les trois interactions (électromagnétique, faible, forte), et non la gravitation qui est une théorie non renormalisable dans le cadre de la théorie quantique des champs.

En 1985, Green et Schwartz ont découvert la théorie des supercordes [23], qui introduit la supersymetrie dans la théorie des cordes pour décrire les bosons et les fermions en même temps dans un espace-temps de dimension D=10.

II Cordes bosoniques :

II.1 Particule relativiste :

Avant de traiter la corde relativiste, on commencera par étudier la particule relativiste libre de masse m qui évolue dans l'espace-temps de Minkowski de dimension D. Lors de son évolution, un objet 0-dimension décrit une ligne 1-dimension $x^{\mu}(\tau)$ dans l'espace-temps, appelée "ligne d'univers" de la particule, qui est paramétrisée par la coordonnée τ. L'action de la particule de masse m est donnée par la longueur totale de la trajectoire de celle ci dans l'espace-temps :

$$S = -m \int_{s_0}^{s_1} ds = -m \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau \left[-\frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \eta^{\mu\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

où $\quad \eta_{\mu\nu} = diag\,(- + +...+)$

et $\quad \mu = 1, ..., D$

l'action (1-1) est invariante par reparamétrisation.

le moment conjugué de $x^{\mu}(\tau)$ est :

$$\mathcal{P}_{\mu} = -\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}} \tag{1.2}$$

l'invariance par reparamétrisation a pour conséquence la présence de la contrainte :

$$\mathcal{P}^2 + m^2 = 0 \tag{1.3}$$

II.2 Action de Nambu Goto :

Dans le cas d'une corde, la généralisation de l'équation (1-1) à un objet de 1-dimension consiste à prendre son action comme la surface du "world sheet" décrite par la corde, elle a été postulée par Nambu Goto sous la forme :

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\sigma d\tau \left[\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X} \right)^2 \left(X' \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

ou $X^\mu (\sigma, \tau)$ est la coordonnée de la corde, τ est le paramètre d'évolution et σ dénote les différents points de la corde.

$$\dot{X} = \frac{dX^\mu}{d\tau} \quad \text{et} \quad X' = \frac{dX^\mu}{d\sigma} \tag{1.5}$$

la quantité $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ a la dimension de la masse et représente la tension de la corde.

Cette action est invariante par reparamétrisation.

Equations du mouvement :

Les équations du mouvement pour la corde bosonique peuvent être dérivées en appliquant le principe de moindre action, on obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} = 0 \tag{1.6}$$

et la conditon aux bords :

$$\frac{\partial L}{\partial X'^\mu} = 0 \qquad \qquad pour \quad \sigma = 0, \pi \tag{1.7}$$

le moment conjugué est défini par :

$$\mathcal{P}^\mu (\sigma, \tau) = - \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_\mu} \tag{1.8}$$

on définit le moment d'energie total P^μ et le moment angulaire total $M^{\mu\nu}$ par :

$$P^\mu = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^\mu (\sigma, \tau) \tag{1.9}$$

$$M^{\mu\nu} = \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^\mu X^\nu - \mathcal{P}^\nu X^\mu\right) \tag{1.10}$$

En utilisant (1-6), (1-7) et (1-8) on trouve les contraintes :

$$\begin{cases} \mathcal{P}^2 + \frac{X'^2}{\pi^2} = 0 \\ \mathcal{P}^\mu X'_\mu = 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

qui sont le resultat de l' invariance par reparamétrisation.

On peut choisir une jauge qui nous donne une forme plus simple pour les équations du mouvements.Ce choix correspond à un système de coordonnées orthogonales verifiant :

$$\dot{X}X' = 0 \qquad \text{et} \qquad X'^2 + \dot{X}^2 = 0 \tag{1.12}$$

la condition aux bords devient :

$$\acute{X}'^\mu = 0 \qquad pour \quad \sigma = 0, \pi \tag{1.13}$$

les équations du mouvement sont alors :

$$\ddot{X}_\mu (\sigma, \tau) - X''_\mu (\sigma, \tau) = 0 \tag{1.14}$$

la solution générale des équations du mouvements est :

$$X^\mu (\sigma, \tau) = x^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{a_n^\mu (0) \exp(-\imath n\tau) - a_n^{\mu *} (0) \exp(\imath n\tau)\right\} \cos n\sigma$$

$$(1.15)$$

si on définit :

$$a_n^\mu = a_n^\mu (0) \exp (-\imath n\tau) \tag{1.16}$$

avec :

$$a_n^{\mu *} = a_n^{\mu *} (0) \exp (\imath n\tau) \tag{I-17a}$$

$$\alpha_0^\mu = 2\alpha' p^\mu \tag{1.17b}$$

$$\alpha_n^\mu = \sqrt{2n\alpha'} a_n^\mu (0) \tag{1.17c}$$

$$\alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu *} \qquad\qquad n \geq 0 \tag{1.17d}$$

on peut ecrire (1-15) sous la forme :

$$X^\mu (\sigma, \tau) = x^\mu + \alpha_0^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp (-\imath n\tau) \cos n\sigma \tag{1.18}$$

le moment angulaire peut s'écrire :

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - \imath \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu \right) \tag{1.19}$$

les crochets de Poissons des variables dynamiques sont :

$$\{x^\mu, p^\nu\} = \imath g^{\mu\nu} \tag{1.20a}$$
$$\{\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu\} = 2\alpha' n \delta_{n+m,0} g^{\mu\nu} \tag{1.20b}$$

les générateurs de Virasoro sont exprimés par :

$$L_n = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}\alpha_m \equiv 0 \tag{1.21}$$

et on choisit notre jauge de la façon suivante :

$$L_0 = H = \alpha' p^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m}\alpha_m \tag{1.22}$$

De ce qui précède, on peut écrire la condition de "mass shell" comme :

$$M^2 = -p^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{n-m}\alpha_m \tag{1.23}$$

II.3 Quantification :

On a deux méthodes de quantification ; la première est dans la jauge covariante et la deuxième est dans la jauge transverse [23]

Jauge covariante : On considère les variables dynamiques x^μ, p_μ et α_n^μ , comme des opérateurs et leurs commutateurs sont donnés par le principe de correspondance comme suit :

$i\{\quad , \quad\} \rightarrow [\quad , \quad]$

alors on a :

$$[x^\mu, p^\nu] = \imath g^{\mu\nu} \tag{1.24a}$$

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] = 2\alpha' n \delta_{n+m,0} g^{\mu\nu} \tag{1.24b}$$

les générateurs de Virasoro sont maintenant des opérateurs définis comme :

$$L_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n-m}^\mu \alpha_{n,\mu} : \tag{1.25}$$

pour éliminer le problème d'ambiguité d'ordre causé par le produit normal on remplace L_0 par $L_0 - \alpha(0)$.

L'algèbre de Virasoro s'écrit alors :

$$[L_n, L_m] = (n-m) L_{n+m} + \frac{D}{12} n \left(n^2 - 1\right) \delta_{n,-m} \tag{1.26}$$

les états physiques obéissent aux contraintes de Virasoro de sorte que :

$$L_n |\psi\rangle_{ph} = 0 \qquad n \geq 1 \tag{1.27a}$$

$$[L_0 - \alpha(0)] |\psi\rangle_{ph} = 0 \tag{1.27b}$$

Le Hamiltonien et la condition de "mass-shell" équivalents à $L_0 = \alpha(0)$ ont la forme :

$$H = \alpha' p^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m}\alpha_m - \alpha(0) \tag{1.28}$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_{-m}\alpha_m - \frac{\alpha(0)}{\alpha'} \tag{1.29}$$

La covariance de cette quantification vient du fait que les opérateurs moment conjugué P_μ et moment angulaire

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - \imath \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu \right) \tag{1.30}$$

obéissent à l'algèbre de Poincaré :

$$[p^\mu, p^\nu] = 0 \tag{1.31a}$$

$$[p^\mu, M^{\nu\rho}] = \imath \left(g^{\mu\nu} p^\rho - g^{\mu\rho} p^\nu \right) \tag{1.31b}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \imath \left(g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} \right) \tag{1.31c}$$

Jauge transverse : la jauge transverse de la corde est donnée par les équations :

$$\begin{cases} \eta_\mu x^\mu = 2\alpha' \eta_\mu p^\mu \tau \\ \eta_\mu \mathcal{P}^\mu = \dfrac{\eta_\mu p^\mu}{\pi} \\ \eta^2 = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

$\eta_\mu x^\mu = 2\alpha' \eta_\mu p^\mu \tau = const$: sont des équations d'hyperplans fixés qui définissent les lignes de coordonnées τ

$\eta_\mu \mathcal{P}^\mu = \dfrac{\eta_\mu p^\mu}{\pi} = const$ signifie que la densité du moment dans la direction η_μ est constante, et elle définit les lignes de coordonnées σ

$\eta_\mu = (1, -1, 0, 0, 0, ...)$, η_μ est fixé et du genre lumière

Ces équations signifient qu'un filet de coordonnées est posé sur le world sheet on introduit un système de coordonnées adéquat, dit système de coordonnées du cône de lumière :

$$U^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(U^0 \pm U^{D-1} \right) \qquad \text{et } U^i \quad , \quad i = 1, \qquad D-2 \tag{1.33}$$

le produit scalaire est défini par :

$$U.V = U^iV^i - U^+V^- - U^-V^+ \tag{1.34}$$

La résolution des équations de contraintes dans cette jauge conduit à l'élimination des variables dynamiques superflux. Comme conséquence, seules les variables dynamiques $x_0^-, p^+, x^i, p^i, \alpha_n^i, \alpha_n^{i*}$ restent indépendantes. on peut alors postuler les crochets de Poisson

$$\begin{aligned}
\left\{x_0^-, p^+\right\} &= -1 && (1.35a)\\
\left\{x^i(\sigma,\tau), p^j(\tilde{\sigma},\tau)\right\} &= \delta^{ij}\delta(\sigma-\tilde{\sigma}) && (1.35b)\\
\left\{\alpha_n^i, \alpha_m^j\right\} &= -2i\alpha' n\delta^{ij}\delta_{n+m,0} && (1.35c)
\end{aligned}$$

dans cette jauge, les composantes M^{i-} du moment angulaire prennent la forme :

$$M^{i-} = x^-p^i - x^ip^- + \frac{\sqrt{\pi}}{p^+}A^i \tag{1.36}$$

avec

$$A^i = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{in} : a_{-n}^i L_n^{tr} : \; = \sum_{n\rangle 0}\frac{1}{in}(a_{-n}^i L_n^{tr} - L_{-n}^{tr} a_n^i) \tag{1.37}$$

et

$$L_n^{tr} = \frac{1}{4\alpha'}\sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_n^i : \tag{1.38}$$

Noton ici que c'est parceque les générateurs M^{i-} sont cubiques en termes des oscillateurs qu'une ambiguité d'ordre se manifeste après quantification, ce qui a pour conséquence l'apparition d'une anomalie dans le groupe de Lorentz .

En effet, M^{i-} contient des termes du type ($a_{-n}^i\alpha_{n-m}^i\alpha_n^i$) : un produit de trois opérateurs qui ne commutent pas, c'est a dire qu'il ya une ambiguité d'ordre.

On exprime alors α_n^- de la manière suivante :

$$\alpha_n^- = \frac{1}{p^+}\left[L_n^{tr} - \alpha\left(0\right)\delta_{n,0}\right] \tag{1.39}$$

la covariance de cette quantification serait satisfaite si ce n'est le commutateur $\left[M^{i-}, M^{j-}\right]$ qui donne :

$$\left[M^{i-}, M^{j-}\right] = \frac{2}{\left(p^+\right)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\alpha_{-m}^i\alpha_m^j - \alpha_{-m}^j\alpha_m^i\right)\left[\frac{1}{m}\left(\alpha\left(0\right) - \frac{D-2}{24}\right) - m^2\left(1 - \frac{D-2}{24}\right)\right] \tag{1.40}$$

ce commutateur est critique pour la valeur :

$$\begin{cases} D = 26 \\ \alpha\left(0\right) = 1 \end{cases} \tag{1.41}$$

cette valeur assure la liberté de notre théorie de l'état du ghost

II.4 Cordes fermées :

En plus des conditions aux bords, on ajoute la propriètè de la périodicité de la coordonnée

$$X^\mu\left(\sigma,\tau\right) = X^\mu\left(\sigma+\pi,\tau\right) \tag{1.42}$$

on peut alors écrire les solutions sous la forme :

$$X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu \tag{1.43}$$

avec

$$X^{\mu}_{R}(\sigma,\tau) = \frac{1}{2}x^{\mu} + \frac{1}{2}p^{\mu}(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\alpha^{\mu}_{n}\exp\left[-2\imath n(\tau-\sigma)\right] \tag{1.44a}$$

$$X^{\mu}_{L}(\sigma,\tau) = \frac{1}{2}x^{\mu} + \frac{1}{2}p^{\mu}(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\widetilde{\alpha}^{\mu}_{n}\exp\left[-2\imath n(\tau+\sigma)\right] \tag{1.44b}$$

les générateurs de Virasoro sont :

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_{n-m}\alpha_m \equiv 0 \tag{1.45}$$

$$\widetilde{L}_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\widetilde{\alpha}_{n-m}\widetilde{\alpha}_m \equiv 0 \tag{1.46}$$

alors le Hamiltonien H aura l'expression suivante :

$$H = L_0 + \widetilde{L}_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{-n}\alpha_n + \widetilde{\alpha}_{-n}\widetilde{\alpha}_n) \tag{1.47}$$

La condition de "mass-shell" s'écrit :

$$M^2 = 4\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_{-n}\alpha_n + \widetilde{\alpha}_{-n}\widetilde{\alpha}_n) \tag{1.48}$$

Quantification :

En plus des relations (1.24), on peut écrire les relations de commutations suivantes :

$$[\widetilde{\alpha}^{\mu}_{n}, \widetilde{\alpha}^{\nu}_{m}] = 2\alpha' n\delta_{n+m,0}g^{\mu\nu} \tag{1.49a}$$

$$[\alpha^{\mu}_{n}, \widetilde{\alpha}^{\nu}_{m}] = 0 \tag{1.49b}$$

la condition de "mass-shell" devient :

$$M^2 = 8\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n - 8\alpha(0) = 8\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{\alpha}_{-n}\widetilde{\alpha}_n - 8\alpha(0) \tag{1.50}$$

et les états physiques sont donnés par :

$$L_n |\psi\rangle_{ph} = 0 \qquad n \geq 1 \tag{1.51a}$$

$$\widetilde{L}_n |\psi\rangle_{ph} = 0 \qquad n \geq 1 \tag{1.51b}$$

$$[L_0 - \alpha(0)] |\psi\rangle_{ph} = 0 \tag{1.51c}$$

$$\left[\widetilde{L}_0 - \alpha(0)\right] |\psi\rangle_{ph} = 0 \tag{1.51d}$$

$$(L_0 - \widetilde{L}_0) |\psi\rangle_{ph} = 0 \tag{1.51e}$$

Cette théorie est libre de ghost pour $D = 26$ et $\alpha(0) = 2$. Elle est aussi libre des états de tachyons. Enfin, la particularité essentielle de la corde fermée est que le premier état excité représente une particule sans masse de spin 2, qu'on associe au graviton.

III Cordes fermioniques :

Nous introduisons dès maintenant la version supersymétrique de la théorie des cordes. En effet, cela permet d'abaisser la dimension de l'espace-temps et de définir des théories ne comportant pas de tachyons.

Il existe deux manières d'introduire la supersymétrie en théorie des cordes, où nous construisons une supersymétrie sur le world sheet, modèle de Ramond ou celui de Neuveu-Shwartz, ou bien nous construisons une dans l'espace-temps, c'est le formalisme de Green-Shwartz (GS) (supercorde) .

Formalisme (RNS) :

l'action supersymétrique s'écrit :

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2\rho\left[\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\overline{\psi}^\mu \gamma^a \partial_a \psi_\mu\right] \tag{1.52}$$

ψ est un spineur de Majorana sur le world sheet est les matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} = -2\eta^{ab} \tag{1.53}$$

fournissent une représentation de l'algèbre de Clifford à deux dimensions.

Dans cette base, le spineur ψ a pour composantes

$$\psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_0^\mu \\ \psi_1^\mu \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

l'action (1.52) est invariante sous les transformations supersymétriques suivantes, écrites sous forme infinitésimale

$$\delta X^\mu = \overline{\varepsilon}\psi^\mu \tag{1.55a}$$

$$\delta\psi^\mu = -i\gamma^a \partial_a X^\mu \varepsilon \tag{1.55b}$$

ε est un spineur de Majorana constant. Les équations de mouvement s'écrivent :

$$\partial_1 \psi_0^\mu = 0 \tag{1.56a}$$

$$\partial_0 \psi_1^\mu = 0 \tag{1.56b}$$

en imposant les conditions aux bords :

$$\psi_0^\mu \; \delta\psi_0^\mu - \psi_1^\mu \; \delta\psi_1^\mu = 0 \tag{1.57}$$

nous avons les possibilités suivantes :

$$\psi_1(\tau,\pi) \;=\; +\psi_0(\tau,\pi) \qquad \text{modèle de Ramond} \tag{1.58a}$$

$$\psi_1(\tau,\pi) \;=\; -\psi_0(\tau,\pi) \qquad \text{modèle de Neveu-Shwartz} \tag{1.58b}$$

Les solutions des équations (1.55.a), (1.55.b) sont données par :

pour Ramond :

$$\psi_0^\mu \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^\mu \; e^{-in(\tau-\sigma)} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \text{ , et } d_n^{\mu+} = d_{-n}^\mu \tag{1.59a}$$

$$\psi_1^\mu \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n^\mu \; e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{1.59b}$$

pour Neveu-Shwartz :

$$\psi_0^\mu \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_r^\mu \; e^{-in(\tau-\sigma)} \qquad \text{avec } r + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \text{ , et } b_r^{\mu+} = b_{-r}^\mu \tag{1.60a}$$

$$\psi_1^\mu \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_r^\mu \; e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{1.60b}$$

Quantification :

Jauge covariante : les relations de commutations :

$$[\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] \;=\; -2\alpha' n g^{\mu\nu} \delta_{n+m,0} \tag{1.61a}$$

$$[d_n^\mu, d_m^\nu]_+ \;=\; -g^{\mu\nu} \delta_{m+n,0} \tag{1.61b}$$

$$[b_r^\mu, b_s^\nu]_+ \;=\; -g^{\mu\nu} \delta_{r+s,0} \tag{1.61c}$$

sont obtenues en utilisant les relations de commutations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[X^{\mu}(\sigma,\tau),\partial_0 X^{\nu}(\sigma',\tau)\right] &= -\pi g^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') && (1.62a)\\
\left[\psi_a^{\mu}(\sigma,\tau),\partial_0 \psi_b^{\nu}(\sigma',\tau)\right]_+ &= -\pi g^{\mu\nu}\delta_{ab}\delta(\sigma-\sigma') && (1.62b)\\
\left[X^{\mu}(\sigma,\tau),\psi^{\nu}(\sigma',\tau)\right] &= 0 && (1.62c)\\
\left[\partial_0 X^{\mu}(\sigma,\tau),\partial_0 \psi^{\nu}(\sigma',\tau)\right]_+ &= 0 && (1.62d)
\end{aligned}$$

les générateurs de la superalgèbre de Virasoro sont :
pour Ramond :

$$\begin{aligned}
L_m &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} :\alpha_{-n}\alpha_{m+n}: +\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(n+\frac{1}{2}m\right) :d_{-n}d_{m+n}: && (1.63a)\\
F_m &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_{-n}d_{m+n} && (1.63b)
\end{aligned}$$

pour Neveu-Shwartz :

$$\begin{aligned}
L_n &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} :\alpha_{-m}^{\mu}\alpha_{m+n,\mu}: +\frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\left(r+\frac{1}{2}m\right) :b_{-r}b_{m+r}: && (1.64a)\\
G_r &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_{-n}b_{r+n} && (1.64b)
\end{aligned}$$

le Hamiltonien s'ecrit :

$$\begin{aligned}
H &= \alpha' p^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{-n}\alpha_n+\sum_{m=1}^{+\infty} m d_{-m}d_m \qquad \text{(R)} && (1.65a)\\
H &= \alpha' p^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{-n}\alpha_n+\sum_{r=\frac{1}{2}}^{+\infty} r b_{-r}b_r \qquad \text{(N-S)} && (1.65b)
\end{aligned}$$

les états physiques pour les deux modèles sont définis par :

pour Ramond :

$$\begin{aligned} L_n \left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad n > 0 && (1.66a)\\ (L_0 - a)\left|\psi\right\rangle &= 0 && (1.66b)\\ F_n \left|\psi\right\rangle &= 0 && (1.66c)\\ F_0 \left|\psi\right\rangle &= 0 && (1.66d) \end{aligned}$$

pour Neveu-Shwartz :

$$\begin{aligned} L_n \left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad n > 0 && (1.67a)\\ (L_0 - a)\left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad a > 0 && (1.67b)\\ G_r \left|\psi\right\rangle &= 0 \qquad r > 0 && (1.67c) \end{aligned}$$

la condition de “mass-shell” s'ecrit sous la forme :

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n + \sum_{m=1}^{+\infty} m d_{-m} d_m \qquad \text{(R)} \qquad (1.68)$$

$$\alpha' M^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{-n}\alpha_n + \sum_{r=\frac{1}{2}}^{+\infty} r b_{-r} b_r \qquad \text{(N-S)} \qquad (1.69)$$

de ce qui précède, on voit bien que le modèle de Ramond décrit les fermions et le modèle de Neveu-Shwartz décrit les bosons. Ceci est le handicap majeur de ces théories.

la superalgèbre de Virasoro est donnée par :

pour Ramond :

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)\, L_{m+n} + \frac{D}{8} m^3 \delta_{m+n,0} && (1.70a)\\
[L_m, F_n] &= \left(\frac{1}{2}m - n\right) F_{m+n} && (1.70b)\\
[F_m, F_n]_+ &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2} D m^2 \delta_{m+n,0} && (1.70c)
\end{aligned}
$$

pour Neveu-Shwartz :

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)\, L_{m+n} + \frac{D}{8}\left(m^3 - m\right) \delta_{m+n,0} && (1.71a)\\
[L_m, G_r] &= \left(\frac{1}{2}m - n\right) G_{m+r} && (1.71b)\\
[G_r, G_s]_+ &= 2L_{r+s} + \frac{1}{2} D \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0} && (1.71c)
\end{aligned}
$$

On notera enfin que dans cette jauge la covariance de la théorie est satisfaite .

Jauge transverse :

Les relations de commutations et d'anticommutations sont données par :

$$
\begin{aligned}
\left[\alpha_n^i, \alpha_m^j\right] &= \delta^{ij} n \delta_{n+m} && (1.72a.)\\
\left[x^-, p^+\right] &= \imath && (1.72b)\\
\left[d_n^i, d_m^j\right]_+ &= \delta^{ij} \delta_{n+m} \qquad (R) && (1.72c)\\
\left[b_r^i, b_s^j\right] &= \delta^{ij} \delta_{r+s} \qquad (NS) && (1.72d)
\end{aligned}
$$

Les générateurs de Lorentz satisfont l'algèbre de Poincaré pour les deux modèles, sauf pour le commutateur $[M^{i-}, M^{j-}]$ où on trouve :

pour Ramond :

$$\left[M^{i-}, M^{j-}\right] = -\frac{\imath}{(p^+)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha^i_{-n}\alpha^j_n - \alpha^j_{-n}\alpha^i_n\right)\left[n\left(\frac{D-2}{8}\right)+\frac{1}{n}\left(2a-\frac{D-2}{8}\right)\right] \quad (1.73)$$

qui est critique pour les valeurs [23]

$$D = 10 \quad , \quad a = \frac{1}{2} \qquad \text{(R)} \quad (1.74)$$

il en est de même pour le modèle de (N-S) :

avec
$D = 10 \quad , \quad a = 0 \qquad (N-S)$
où

$$M^{i-} = M^{i-}_{bos} - \frac{\imath}{2p^+}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha^i_n\left(d^i_{m-n}d^j_m - d^j_{m-n}d^i_m\right) \qquad \text{(R)} \quad (1.75)$$

$$M^{i-} = M^{i-}_{bos} - \frac{\imath}{2p^+}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\alpha^i_n\left(b^i_{n-r}b^j_r - b^j_{n-r}b^i_r\right) \qquad \text{(N-S))} \quad (1.76)$$

On conclue alors que l'introduction d'un champ fermionique n'a pas permis d'eliminer l'anomalie mais de diminuer son effet : $D = 26 \to D = 10$

IV Supercordes :

Comme la théorie des cordes fermioniques n'a pas unifié la description des bosons et des fermions dans un seul espace de Fock, alors il faut construire une nouvelle théorie, c'est la théorie des supercordes qui consiste à introduire la supersymétrie dans l'espace-temps, son action est celle de Green Shwartz qui s'écrit sous la forme :

$$S = S_1 + S_2 \tag{1.77}$$

où

$$S_{bos} \rightarrow S_1 = -\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau \sqrt{g} g^{\alpha\beta}\Pi_\alpha.\Pi_\beta \tag{1.78}$$

avec :

$$\Pi_\alpha = \partial_\alpha X^\mu - i\overline{\theta}^A \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^A \tag{1.79}$$

θ^{Aa} : sont les composantes du spineur θ^A, $a = 1, 2^{[D/2]}$.
$A = \overline{1, N}$ dans le cas général, et dans le cas des supercordes $A = 1, 2$.
S_1 est invariante sous les transformations susy globales [23]

$$\begin{cases} \delta\theta^A = \theta^A \epsilon^A \\ \delta X^\mu = i\epsilon^A \Gamma^\mu \theta^A \end{cases} \tag{1.80}$$

ou ϵ^A est un spineur infinitésimal

$$S_2 = \frac{1}{\pi}\int d\sigma d\tau \left\{ -i\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \left(\overline{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 - \overline{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right) + \epsilon^{\alpha\beta} \overline{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \overline{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2 \right\} \tag{1.81}$$

$\epsilon^{\alpha\beta}$ est le tenseur de levi-cévita et $(\alpha, \beta) = (\sigma, \tau)$
Le terme S_2 a été introduit pour construire une théorie invariante locale.
le fait que S_2 est invariant global nous conduit à la condition :

$$\Gamma^\mu \psi_{[1}\psi_2 \Gamma_\mu \psi_{3]} = 0 \tag{1.82}$$

cette dernière permet les possibilités suivantes :

$D = 3$ et $\theta = spineur\ de\ Majorana$

$D = 4$ et $\theta = spineur\ de\ Majorana\ ou\ Weyl$

$D = 6$ et $\theta = spineur\ de\ Weyl$

$D = 10$ et $\theta = spineur\ de\ Majorana\ et\ Weyl$

la théorie quantique n'est possible qu'a D=10 de l'espace-temps.

Quantification dans la jauge transverse :

Une quantification covariante n'est plus possible ; pour cela on quantifie seulement dans la jauge transverse. On prend comme jauge le choix suivant :

$$\Gamma^+\theta^1 = \Gamma^+\theta^2 \tag{1.83a}$$

$$\text{Avec} \quad : \quad (\Gamma^+)^2 = (\Gamma^-)^2 = 0 \tag{1.83b}$$

$$\text{et} \quad : \quad \Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 \pm \Gamma^1) \tag{1.83c}$$

pour avoir une description supersymétrique, il faut que le nombre N des composantes fermioniques θ soit égal au nombre des composantes $X^I = 8$.

comme on ne peut quantifier qu'à D=10, alors le nombre des composantes fermioniques est :

Dirac : N=32+32 Composantes complexes (CC)

Majorana : N=32+32 C réelles

Majorana-weyl : N=16+16 C réelles

Jauge transverse : N=8+8 C réelles

On-shell : N=8 C réelles

Alors la condition" on-shell" est celle qui équilibre le nombre des composantes fermioniques et bosoniques, elle impose les équations de Dirac sur les θ, c'est à dire on ajoute à l'action bosonique une action de Dirac libre pour les variables S.

Avec la substitution $\sqrt{p^+}\theta \rightarrow S$ notre action devient :

$$S=-\frac{1}{2\pi}\int d\sigma d\tau\left(\partial_a X^i\partial^a X_i-i\overline{S}^{Aa}\rho^B\partial_B S^{Aa}\right) \tag{1.84}$$

Avec : $i,a=\overline{1,8}$, $A,B=1,2$

S^A est un spineur à deux composante.

$$\overline{S}^{Aa}=\left(S^+\right)^{Bb}\left(\Gamma^0\right)^{ba}\left(\rho^0\right)^{BA} \tag{1.85}$$

les équations du mouvements deviennent :

$$\left(\partial_\tau+\partial_\sigma\right)S^{1a} = 0 \tag{1.86a}$$

$$\left(\partial_\tau-\partial_\sigma\right)S^{2a} = 0 \tag{1.86b}$$

$$\left(\partial_\sigma^2-\partial_\tau^2\right)X^i = 0 \tag{1.86c}$$

avec les conditions aux bords suivantes :

$$S^{1a}\left(0,\tau\right) = S^{2a}\left(0,\tau\right) \tag{1.87a}$$

$$S^{1a}\left(\pi,\tau\right) = S^{2a}\left(\pi,\tau\right) \tag{1.87b}$$

on obtient différents types de théories de supercordes qui sont :

Supercordes Type I : sont des supercordes fermées ou ouvertes avec la même chiralité, les solutions sont données par :

$$S^{1a}\left(\sigma,\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}S_n^a\exp\left[-\imath n\left(\tau-\sigma\right)\right] \tag{1.88a}$$

$$S^{2a}\left(\sigma,\tau\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in Z}S_n^a\exp\left[-\imath n\left(\tau+\sigma\right)\right] \tag{1.88b}$$

où :

$$\left[S_n^a, S_m^b\right]_+ = \delta^{ab}\delta_{n+m} \tag{1.89}$$

Supercordes fermées Type II (fermées) : sont des supercordes fermées ,on distingue deux types à cause de la chiralité

(IIA) : ont des chiralité opposées

(*IIB)* : ont la même chiralité

en prenant en considération la périodicité, les solutions prennent la forme

$$S^{1a}(\sigma,\tau) = \sum_{n\in Z} S_n^a \exp\left[-2\imath n(\tau-\sigma)\right] \tag{1.90a}$$

$$S^{2a}(\sigma,\tau) = \sum_{n\in Z} \widetilde{S}_n^a \exp\left[-2\imath n(\tau+\sigma)\right] \tag{1.90b}$$

où :

$$\left[\widetilde{S}_n^a.\widetilde{S}_m^b\right]_+ = \delta^{ab}\delta_{n+m} \tag{1.91a}$$

$$\left[\widetilde{\alpha}_n^i.\widetilde{\alpha}_m^j\right] = \delta^{ab}\delta_{n+m} \tag{1.91b}$$

la condition de "mass-shell" est :

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i{}_{-n}\alpha_n^i + ns^a{}_{-n}s_n^a \tag{1.92}$$

V Formalisme paraquantique :

Introduction :

L'une des principales taches de la mécanique quantique est de faire une description unifiée et consistante de la dualité onde-corpuscule, cette dernière se manifeste dans deux relations combinant l'aspect corpusculaire et ondulatoire de la matière qui sont :

condition de fréquence de Bohr :

$$h\nu = E_1 - E_2 \tag{1.93}$$

Relation de DeBroglie

$$\lambda = \frac{h}{|p|} \tag{1.94}$$

l'onde est associée à λ

La particule est associée à E et P

Les relations citées, précédemment proviennent directement de l'équation du mouvement de Heisenberg :

$$\begin{aligned} -\imath\hbar\frac{\partial A}{\partial q_\mu} &= [A, P_\mu] \\ \mu &= \overline{0,3} \end{aligned} \tag{1.95}$$

ou A est un observable arbitraire et H est le Hamiltonien ou l'énergie.

En prenant seulement la partie spatiale de l'équation (1-95) on trouve :

$$-\imath\hbar\nabla A = [A, P] \tag{1.96}$$

où :

P est l'opérateur moment

Considérons maintenant un système qui a son analogue classique, son Hamiltonien est construit en termes des variables canoniques q_i et p_j $H(\ q_i,\ p_j)$, pour faire la transition à la théorie quantique ou la quantification du système, on réinterprète q_i et p_j comme des opérateurs satisfaisant les relations de commutations :

$$
\begin{aligned}
[q_i, q_j] &= [p_i, p_j] = 0 && (1.97a) \\
[q_i, p_j] &= \imath\hbar\delta_{ij} && (1.97b)
\end{aligned}
$$

la quantification canonique se résume en deux choses, la première est le principe de correspondance, et la deuxième est les relations de commutations. Ces relations de commutations sont suffisantes mais ça ne veut pas dire qu'elles sont uniques, mais seulement une solution particulière, c'est la paraquantification qui nous donne la solution générale.

On peut voir clairement cette généralisation ou paraquantification à travers le cas de l'oscillateur harmonique [26]

Cas de l'oscillateur harmonique :

le Hamiltonien du système s'écrit :

$$
H = \frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) \tag{1.98}
$$

d'où les équations du mouvements sont :

$$
\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -q \end{cases} \tag{1.99}
$$

en appliquant le principe de correspondance à H, et en mettant $A = q$ dans l'équation du mouvement de Heisenberg, on obtient :

$$
\begin{cases} [q, H] = \imath p \\ [p, H] = -\imath q \end{cases} \tag{1.100}
$$

si on se pose la question, quelle genre de relations de commutations existent entre p et q, la réponse est la relation $[q, p] = \imath$, mais elle n'est pas unique

Il est plus convénient d'utiliser les opérateurs non hermitiques a, a^+ définis comme suit :

$$\begin{aligned} a &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \imath p) & (1.101\text{a}) \\ a^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(q - \imath p) & (1.101\text{b}) \end{aligned}$$

on redéfini le Hamiltonien en fonction de a, a^+ de la façon suivante :

$$H = \frac{1}{2}\left(a^+a + aa^+\right) \equiv N \tag{1.102}$$

et les expressions (1-100) deviennent :

$$[a, N] = a, \quad \left[a^+, N\right] = -a^+ \tag{1.103}$$

soient $|n\rangle$ les vecteurs propres de N tels que :

$$\begin{cases} N\,|n\rangle = N_n\,|n\rangle \\ \langle n\,|n'\rangle = \delta_{n,n'} \end{cases} \tag{1.104}$$

le spectre de N est :

$$N_n = N_0 + n \qquad \text{avec} \quad N_0 \geq 0,\ n \in \mathbb{N} \tag{1.105}$$

en faisant la combinaison entre (1-104) et (1-105) on trouve les relations suivantes :

$$N_0 + n = \frac{1}{2}\left(|a_{n-1,n}|^2 + |a_{n,n+1}|^2\right) \tag{1.106}$$

avec :

$a_{n,n'} \equiv \langle n| \, a \, |n'\rangle$

la solution par récurrence de l'équation (1-106) est :

$$a_{n,n+1} = a^{+}_{n+1,n} = \begin{cases} (2N_0 + n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ pair} \\ (1+n)^{\frac{1}{2}} & n \text{ impair} \end{cases} \tag{1.107}$$

à partir de (1.107) on voit que le commutateur $[a, a^{+}]$ est en général un opérateur tel que :

$$\langle n| \left[a, a^{+}\right] |n'\rangle = \delta_{nn'} \begin{cases} 2N_0 & n \text{ pair} \\ 2(1 - N_0) & n \text{ impair} \end{cases} \tag{1.108}$$

pour le cas $N_0 = \frac{1}{2}$ on trouve $[a, a^{+}] = 1$, qui correspond aux relations de commutations canoniques.

-pour le cas $N_0 = 1$, on trouve $aaa^{+} - a^{+}aa = 2a$, qui correspond a une relation trilinéaire

-pour $N_0 = 2$......$etc.$

soit $Q = \dfrac{N_0}{2}$, qu'on appellera ordre de la paraquantification, $Q = 1$ correspond à la quantification canonique $[a, a^{+}] = 1$, de sorte que la paraquantification est une généralisation de la quantification.

Le cas de plusieurs oscillateurs :

On considère un systeme de plusieurs oscillateurs (bosoniques, fermioniques) avec le vide qui est défini comme suit :

$$\langle 0 \,|0\rangle = 1 \tag{1.109a}$$

$$a_k \,|0\rangle = 0 \quad \forall k \tag{1.109b}$$

les oscillateurs parabosoniques, ou parafermioniques vérifient les relations trilinéaires suivantes [26]

$$\left[a_k, \left[a_l^+, a_n\right]_\mp\right] = 2\delta_{kl}a_n \tag{1.110a}$$

$$\left[a_k, \left[a_l^+, a_n^+\right]_\mp\right] = 2\delta_{kl}a_n^+ \mp 2\delta_{kn}a_l^+ \tag{1.110b}$$

$$\left[a_k, \left[a_l, a_n\right]_\mp\right] = 0 \tag{1.110c}$$

avec la condition :

$$a_k a_l^+ \left|0\right\rangle = Q\delta_{kl}\left|0\right\rangle \tag{1.111}$$

Le signe en haut correspond aux parafermions, et celui en bas aux parabosons.

La condition (1.111) fixe l'ordre de la paraquantification.

Les relations (1.110a) (1.110b) (1.110c) ne se suffisent pas à elles seules "self-contained".

Le problème qui se pose est que plus Q augmente et plus les relations se compliquent, la solutions à ce problème est donné par Green, en utilisant une décomposition appelée décomposition de Green comme suit :

$$a_k = \sum_{\alpha=1}^{Q} a_k^{(\alpha)} \tag{1.112}$$

avec $a_k^{(\alpha)}\left|0\right\rangle = 0$

en remplaçant (1.112) dans (1.110) on trouve :

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)+}\right]_\pm = \delta_{kl} \tag{1.113a}$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\alpha)}\right]_\pm = 0 \tag{1.113b}$$

$$\left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)+}\right]_\mp = \left[a_k^{(\alpha)}, a_l^{(\beta)}\right]_\mp = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{1.113c}$$

on voit bien que cette décomposition nous facilite les calculs .

L'extension des cordes critiques aux formalisme de la paraquantification a d'abord été étudiée par Ardalan et Mansouri à travers leurs hypothèse sur le centre de masse de la corde [1] et ensuite par d'autre auteurs [2][3] en dehors de cette hypothèse. Le résultat essentiel obtenu est le fait que ces paracordes restent critiques :

En effet on peut résumer ces travaux comme suit :

Aprés paraquantification dans la jauge transverse on peut citer les résultats suivants :

1)pour le cas parabosonique[2] :

comme résultat :

$$\left[M^{i-}, M^{j-}\right] = -\frac{1}{2\left(p^{+}\right)^{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\alpha_{-n}^{i}, \alpha_{n}^{j}\right]_{+} - \left[\alpha_{-n}^{j}, \alpha_{n}^{i}\right]_{+} \right) \left[-2n + Q\frac{D-2}{12} \left(n - \frac{1}{n} \right) + 2\alpha\left(0\right) \frac{1}{n} \right] \tag{1.114}$$

En conclusion pour avoir $[M^{i-}, M^{j-}] = 0$, l'équation (1.114) donne :

$$\begin{cases} D = 2 + \dfrac{24}{Q} \\ \alpha\left(0\right) = 1 \end{cases} \tag{1.115}$$

La théorie des cordes parabosonique est donc critique pour les dimensions $D = 2 + \frac{24}{Q}$

2)Pour le cas parafermioniques[3][4] :

Comme résultat :

$$\begin{aligned} [M^{i-}, M^{j-}] = \tfrac{1}{2(p^{+})^{2}} \Big\{ & \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\alpha_{-n}^{i}, \alpha_{n}^{j}\right]_{+} - \left[\alpha_{-n}^{j}, \alpha_{n}^{i}\right]_{+} \right) \left[Q\tfrac{D-2}{8} \left(n - \tfrac{1}{n}\right) + \tfrac{2a}{n} - n \right] \\ & - \textstyle\sum_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} \left(\left[b_{-r}^{i}, b_{r}^{j}\right]_{-} - \left[b_{-r}^{j}, b_{r}^{i}\right]_{-} \right) \left[\left(Q\tfrac{D-2}{8} - 1\right) \left(r^{2} - \tfrac{1}{4}\right) + 2a - 1 \right] \Big\} \end{aligned} \tag{1.116}$$

On est donc conduit à conclure que, pour avoir $[M^{i-}, M^{j-}] = 0$, on doit avoir :

$$\begin{cases} D = 2 + \frac{8}{Q} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1.117}$$

On conclu alors que la théorie des cordes parafermionique est critique pour la dimension $D = 2 + \frac{8}{Q}$

3)Pour les parasupercordes[3][4] :

Une théorie consistante est construite pour différentes dimensions critiques de l'espace -temps. En effet, on sait que la théorie des supercordes est uniquement définie à D=10. Dans le cas des parasupercordes, les quatre dimensions d'espace-temps (D=3, 4, 6, 10) pour lesquelles sont formulées les supercordes classiques, survivent.

4) Pour les cordes Hétérotiques [5][6] :

En plus du cas ordinaire (26,10) pour les dimensions d'espace-temps pour lesquelles sont formulées les cordes hétérotiques, pour la théorie des paracordes hétérotiques, seul survit le cas (14,6) qui est construit à partir du seul groupe possible E8.

Chapitre 2

Cordes non critiques :

I Introduction :

Cordes non critiques

Introduction :

Le modèle de la corde relativiste a été proposé pour la première fois des 1970 par Nambu, Goto et Hara. [28]. Le premier objectif était la description de la construction interne de particules à travers les interactions fortes : les hadrons ; en particulier, l'explication du spectre masse-spin des hadrons. Bien après, la communauté scientifique découvre que bien des problèmes en physique des particules peuvent être résolus si la théorie des cordes était à 4 dimensions d'espace-temps. En effet, cette théorie présente de sérieuses difficultés : toute quantification détruit les symétries classiques ! !

Il est bien connu que la quantification des cordes crée des anomalies détruisant ainsi les symétries classiques. Exception faite pour une théorie formulée pour une valeur critique de l'espace-temps d=26 pour laquelle les anomalies sont absente. Pour construire une théorie à 4 dimensions imposée par les applications physiques, on a souvent recours à des degrés de liberté additionnels comme les champs fermioniques se propageant le long de la surface d'univers et dont la contribution est l'élimination des anomalies à des dimensions inférieures. Cette approche peut être combinée avec une autre idée qui consiste à considérer certaines des dimensions comme des coordonnées sur des espaces compactes de tailles très petites. Une autre théorie de cordes a vu le jour des le milieu des années 90, elle consiste en une autre méthode de quantification qui n'a recours ni aux dimensions ni aux degrés de liberté supplémentaires ! et qui est basée sur l'idée qui consiste à affirmer que les anomalies en question ne sont pas des propriétés de la corde elle-même mais seulement une conséquence du choix inconvenable des variables à quantifier. Pour contourner cette situation, la solution serait d'exprimer toutes les corrélations physiques importantes sous forme de fonctions simples de variables indépendantes à travers des transformations canoniques en mécanique classique de sorte que les corrélations soient reconduites en mécanique quantique. Il s'avère alors que pour que la covariance de Lorentz de la théorie soit maintenue en mécanique quantique, il suffit que le « spin de la corde » soit une variable indépendante ! C'est la théorie de la corde non critique [9][20]. Pour bien identifier l'origine du problème, il est utile de rappeler ces quelques concepts généraux de la quantification. En effet, à partir d'un ensemble de variables classiques prédéfinies (associées à un système physique), quantifier ce système consiste à faire correspondre à ces variables classiques des opérateurs vérifiant le principe de correspondance suivant : $i\hbar \{f, g\} \rightarrow \left[\hat{f}, \hat{g}\right]$. Il est bien connu que ce principe de correspondance ne peut être appliqué à toutes les variables dynamiques de la théorie ! Cette propriété est reliée à l'ambiguité d'ordre entre opérateurs non commutant ! En effet, considérons par exemple deux ensembles de variables classiques reliées par une transformation non linéaire : $a_i \leftrightarrow b_i$. Si le principe de correspondance est satisfait pour a_i : $i\hbar \{a_i, a_j\} \rightarrow [\hat{a}_i, \hat{a}_j]$ alors le commutateur $\left[\hat{b}_i(\hat{a}), \hat{b}_j(a)\right]$ peut contenir des ambiguités d'ordre, ce qui crée des termes d'anomalie dans $\left[\hat{b}_i, \hat{b}_j\right]$ absents dans le crochet de Poisson$\left\{\hat{b}_i, \hat{b}_j\right\}$. La présence des ces anomalies peut conduire à de sérieux problèmes, spécialement quant les b_i représentent les générateurs de symétries fondamentales du système (par exemple la symétrie de Lorentz). Maintenant, si le principe de correspondance est satisfait pour les b_i, c'est-à-dire si le commutateur $\left[\hat{b}_i, \hat{b}_j\right]$ est directement postulé à partir des crochets de Poisson $\left\{\hat{b}_i, \hat{b}_j\right\}$ (donc ne présente aucune anomalie), l'anomalie peut apparaître dans le commutateur $\left[\hat{a}_i(\hat{b}), \hat{a}_j(\hat{b})\right]$. Il est possible cependant, par un choix judicieux, que les variables $\hat{a}_i$ ne soient plus nécessaires car le rôle de la variable interne $\hat{a}_i$ est joué par une autre variable $\hat{\xi}_i$ de sorte que $\left[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j\right]$ ne contienne plus d'anomalies ! Notons cependant que même si les anomalies sont exclues de $\left[\hat{b}_i, \hat{b}_j\right]$ et $\left[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j\right]$, on est souvent confronté à un 3ème ensemble de variables $\hat{c}_i$ hautement non linéaires en termes des variables indépendantes de sorte que $[\hat{c}_i, \hat{c}_j]$, contienne l'anomalie (c'est le cas de l'algèbre des contraintes). On dit qu'il ya transfert de l'anomalie de $\left[\hat{b}_i, \hat{b}_j\right]$ vers $[\hat{c}_i, \hat{c}_j]$ il est cependant beaucoup moins grave que ces anomalies soient présentes dans l'algèbre des contraintes que dans celle de Poincaré.

En résumé :

Dans la pratique, l'objectif est de sélectionner une base convenable de variables indépendantes, où la quantification est réalisée en essayant de garder tous les générateurs de symétries fondamentales comme des fonctions simples de variables indépendantes et donc d'éviter l'apparition d'anomalies dans leurs commutateurs ! (exactement, comme pour les crochets de Poisson). L'application de ce raisonnement à la théorie des cordes nous amène à d'abord identifier l'origine du problème. En effet dans l'approche standard de la quantification de la théorie, la jauge du cône de lumière relie la paramétrisation de la surface d'univers de la corde à un certain vecteur constant du genre lumière et donc non dynamique comme par exemple $n_\mu = (1, -1, 0, 0, ...)$, appelé axe de la jauge. C'est parce qu'une transformation de Lorentz change la position de la surface d'univers de la corde par rapport à cet axe fixe qu'elle est suivie par une reparamétrisation de la surface d'univers. Au niveau quantique, le groupe de symétrie de reparamétrisation présente une anomalie, qui apparaît alors dans le groupe de Lorentz, ce qui viole la covariance de Lorentz de la théorie. Pour éviter ce problème, l'idée est simplement de connecter l'axe de jauge avec un certain vecteur dynamique de la corde. Dans ce cas, les transformations de Lorentz déplace en même temps l'axe de la jauge avec la surface d'univers de sorte que la paramétrisation de la surface d'univers n'est pas altérée. Dans cette approche, le groupe de Lorentz ne présente plus d'anomalie !

Pour mettre en pratique cette idée, l'introduction des ingrédients suivants est nécessaire......

II Aspect classique de la théorie des cordes non critiques :

En théorie des cordes, deux paramètres décrivent le world sheet $X^{\mu}(\sigma,\tau)$, le paramètre $\sigma \in [0,\pi]$ dénote les différents points de la cordes, alors que $\tau \in]-\infty,+\infty[$ est le paramètre d'évolution. Un point dans l'espace des phases est décrit par les coordonnées $X^{\mu}(\sigma,\tau)$ et les moments conjugués $\mathcal{P}_{\mu}(\sigma,\tau)$. l'action est donnée sous la forme :

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{0}^{\pi} d\sigma L \tag{2.1}$$

avec

$$L = \left[\left(\dot{X} X' \right)^2 - \left(\dot{X} \right)^2 (X')^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

où

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau} \qquad , X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma} \tag{2.3}$$

l'invariance par reparamétrisation de l'action se traduit par la présence de contraintes qui ont la forme suivante :

$$\Phi_1 = X'\dot{X} = 0 \tag{2.4a}$$

$$\Phi_2 = X'^2 + \dot{X}^2 = 0 \tag{2.4b}$$

les crochets de Poisson sont définis de la façon suivante :

$$\{X_{\mu}(\sigma,\tau), \mathcal{P}_{\upsilon}(\tilde{\sigma},\tau)\} = g_{\mu\upsilon}\ \delta(\sigma - \tilde{\sigma}) \tag{2.5}$$

les contraintes sont responsable des transformations suivantes :

Ainsi, Φ_1 assure le déplacement le long de la corde $\delta X \parallel X'$, et Φ_2 assure le déplacement en direction de $\mathcal{P}$ c'est-à-dire orthogonal à la corde $\delta X \parallel \mathcal{P} \perp X'$.

De sorte que, ensemble, les deux contraintes génèrent tous les déplacements possibles sur le W.S, en d'autres termes, toutes les reparametrisations possibles.

D'autre part, on sait que le hamiltonien H de tout système relativiste soumis à des contraintes de ce type est identiquement nul : $H = 0$, on écrit alors H sous la forme :

$$H = \int_0^{\pi} d\sigma (V_1 \phi_1 + V_2 \phi_2) \tag{2.6}$$

où V_1 et V_2 sont des multiplicateurs de Lagrange .

Un choix convenable de la jauge (jauge orthogonale), et qui correspond à $V_1 = 0$ et $V_2 = 1$, permet de linéariser les équations du mouvement sous la forme :

$$\dot{X} = \{X, H\} = \mathcal{P} \quad , \quad \dot{\mathcal{P}} = \{\mathcal{P}, H\} = X^{"} \quad \Rightarrow \ddot{X} - X^{"} = 0 \tag{2.7}$$

l'équation du mouvement représente une équation d'onde à 2-dimensions qui a pour solution

$$X = F(\tau + \sigma) + G(\tau - \sigma) \tag{2.8a}$$

$$\mathcal{P} = \dot{X} = F'(\tau + \sigma) + G'(\tau - \sigma) \tag{2.8b}$$

L'ingrédient essentiel de cette nouvelle théorie consiste en une fonction $Q_\mu(\sigma, \tau)$ qu'on appellera : courbe de support de la corde et qui sera reliée aux coordonnées $X_\mu(\sigma, \tau)$ et aux moments $\mathcal{P}_\mu(\sigma, \tau)$ de la corde de sorte qu'on puisse reconstruire entièrement la surface d'univers de la corde uniquement à partir de cette fonction

Etudions alors les propriétés suivantes des fonctions F, G :

les équations $(2.4a)$, $(2.4b)$, $(2.8a)$et $(2.8b)$ conduisent aux résultatz suivants :

1) les équations de contraintes

$$F'^2_\mu = G'^2_\mu = 0 \tag{2.9}$$

2)à partir des conditions aux bords $\grave{X}(0,\tau) = 0$ et $\grave{X}(\pi,\tau) = 0$, on peut respectivement écrire :

lorsque $\sigma = 0$, $(2.8a)$ donne $F(\tau) = G(\tau)$

lorsque $\sigma = \pi$, la relation $(2.8a)$ donne :

$$F = (\tau + 2\pi) = F(\tau) + p \tag{2.10}$$

D'autre part :

en utilisant$(2.8a)$, on peut écrire :

$X(\sigma,0) = F(\sigma) + F(-\sigma)$ et $P(\sigma,0) = \acute{F}(\sigma) + \acute{F}(-\sigma)$ pour $\sigma \in [0,\pi]$, de sorte qu'on puisse faire un prolongement par continuité pour σ , $\sigma \in]-\infty,+\infty[$ et définir :

$$F(\pm\sigma) = \frac{1}{2}(X(\sigma,0) \pm \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} p(\tilde{\sigma},0)) \tag{2.11}$$

D'un autre coté, rappelons que F est associé à la trajectoire d'une extrémité de la corde à travers la relation :

$X(0,\tau) = 2F(\tau) \ \Rightarrow F(\sigma+\tau) = \frac{1}{2}X(0,\sigma+\tau)$

Par substitution dans $(2.8a)$, on peut écrire :

$$X(\sigma,\tau) = \frac{[X(0,\tau+\sigma) + X(0,\tau-\sigma)]}{2} \tag{2.12}$$

cette représentation du W.S est très utile pour l'analyse qui va suivre car elle consistera à réécrire la mécanique complètement en termes de trajectoire de un des bords de la corde $(\sigma = 0)$

En effet si on remplace $X(\sigma)$ et$P(\sigma)$ par une seule fonction $Q(\sigma)=2F$, qu'on appellera "courbe de support" alors :

$$Q(\sigma) = X(\sigma)+\int_0^{\sigma} d\tilde{\sigma}\mathcal{P}(\tilde{\sigma}) \quad (2.13a)$$

$$X(\sigma) = \frac{(Q(\sigma)+Q(-\sigma))}{2} \quad (2.13b)$$

$$\mathcal{P}(\sigma) = \frac{(Q'(\sigma)+Q'(-\sigma))}{2} \quad (2.13c)$$

$$X(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{(Q(\sigma_1)+Q(-\sigma_2))}{2} \quad (2.13.d)$$

et $Q(\sigma)$ prendra les propriétés de F :

1-si on remplace $(2.13b), (2.13c)$ dans $(2.4a)$ on obtient :

$\acute{X}\dot{X} = \frac{\acute{Q}(\sigma)+\acute{Q}(-\sigma)}{2}.\frac{\acute{Q}(\sigma)-\acute{Q}(-\sigma)}{2} = 0 \Rightarrow \acute{Q}^2(\sigma) = \acute{Q}^2(-\sigma)$

de même si on remplace$(2.13b), (2.13c)$ dans $(2.4b)$ on obtient :

$\acute{X}^2+\dot{X}^2 = (\frac{\acute{Q}(\sigma)+\acute{Q}(-\sigma)}{2})^2+(\frac{\acute{Q}(\sigma)-\acute{Q}(-\sigma)}{2})^2 = 0 \Rightarrow \acute{Q}^2(\sigma) = 0$

de sorte que ces relations soient équivalentes au contraintes de virasoro

2- $Q(\sigma)$ est périodique : $Q(\sigma+2\pi)-Q(\sigma)=2p$

3-le world sheet est construit a partir de $Q(\sigma)$ de la façon suivante :

$$X(\sigma,\tau) = \frac{Q(\sigma_1)+Q(\sigma_2)}{2} \quad (2.14)$$

avec :$\sigma_{1,2} = \tau \pm \sigma$

Géométriquement, la relation (2.14) veut dire que le world sheet est construit à partir de la courbe de support de la manière suivante : on prend deux points de la courbe, on les relie avec un segment de droite. Le milieu de ce segment représente un point du W.S. Si on refait ceci pour toutes les paires de points possibles, on construit entierement le world sheet, la figure ci après nous illustre ceci.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

figure (05) : la construction géométrique du world sheet à partir de la courbe de support

Les crochets de poissons de $Q_\mu(\sigma)$ sont obtenu, en écrivant $Q_\mu(\sigma)$ en fonction de $X^\mu(\sigma)$ et $P_\mu(\sigma)$à travers la relation (2.13a), on obtient :

$$\begin{aligned}\{Q_\mu(\sigma_1), Q_\nu(\sigma_2)\} &= \left\{X_\mu(\sigma_1) + \textstyle\int_0^{\sigma_1} d\tilde{\sigma}_1 \mathcal{P}_\mu(\tilde{\sigma}_1), X_\nu(\sigma_2) + \int_0^{\sigma_2} d\tilde{\sigma}_2 \mathcal{P}_\nu(\tilde{\sigma}_2)\right\} \\ &= \left\{X_\mu(\sigma_1), \textstyle\int_0^{\sigma_2} d\tilde{\sigma}_2 \mathcal{P}_\nu(\tilde{\sigma}_2)\right\} + \left\{\textstyle\int_0^{\sigma_1} d\tilde{\sigma}_1 \mathcal{P}_\mu(\tilde{\sigma}_1), X_\nu(\sigma_2)\right\} \\ &= \textstyle\int_0^{\sigma_2} d\tilde{\sigma}_2 \left\{X_\mu(\sigma_1), \mathcal{P}_\nu(\tilde{\sigma}_2)\right\} + \int_0^{\sigma_1} d\tilde{\sigma}_1 \left\{\mathcal{P}_\mu(\tilde{\sigma}_1), X_\nu(\sigma_2)\right\}\end{aligned}$$

en utilisant (2.5) on aura :

$$\{Q_\mu(\sigma_1), Q_\nu(\sigma_2)\} = \textstyle\int_0^{\sigma_2} d\tilde{\sigma}_2 g_{\mu\nu} \delta(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_2) - \int_0^{\sigma_1} d\tilde{\sigma}_1 g_{\mu\nu} \delta(\tilde{\sigma}_1 - \sigma_2)$$

la relation(2.17) nous conduit enfin à :

$$\begin{aligned}\{Q_\mu(\sigma_1), Q_\nu(\sigma_2)\} &= -g_{\mu\nu}\vartheta(\sigma_1 - \sigma_2) - g_{\mu\nu}\vartheta(\sigma_1 - \sigma_2) - \vartheta(\sigma_1) + \vartheta(-\sigma_2) \\ &= -2g_{\mu\nu}\vartheta(\sigma_1 - \sigma_2)\end{aligned}$$

$$\{Q_\mu(\sigma), Q_\nu(\tilde{\sigma})\} = -2g_{\mu\nu}\vartheta(\sigma - \tilde{\sigma}) \tag{2.15}$$

avec :

$$\vartheta(\sigma) = \left[\frac{\sigma}{2\pi}\right] + \frac{1}{2} \tag{2.16}$$

et :

$$\acute{\vartheta}(\sigma) = \delta(\sigma) \tag{2.17}$$

la forme symplectique correspondant aux crochets de poisson(2.15) s'écrit [9][12] :

$$\Omega = \frac{1}{2} dp_\mu \wedge dQ_\mu(0) + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\sigma \delta Q'_\mu(\sigma) \wedge Q_\mu(\sigma) \tag{2.18}$$

En remplaçons $X^\mu(\sigma), \mathcal{P}_\mu(\sigma)$ par leurs expressions en fonctions des modes α_μ^n , α_μ^{n*} dans $Q(\sigma) = X(\sigma) + \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} \mathcal{P}(\tilde{\sigma})$ on trouve $Q_\mu(\sigma)$ en fonction de ces derniers :

$$X(\sigma, \tau) = x_\mu(\tau) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_\mu^n}{in} \ \cos n\sigma \tag{2.19}$$

$$\mathcal{P}_\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \neq 0} \alpha_\mu^n \cos n\sigma \tag{2.20}$$

$$Q_\mu(\sigma) = x_\mu + \frac{p_\mu}{\pi} \sigma + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_\mu^n}{in} \ \exp in\sigma \tag{2.21}$$

on se place alors dans le référentiel du centre de masse et on introduit des tétrades de vecteurs $N_\mu^\alpha(p)$, qui dépendent du moment total p_μ et qui ont les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} N_\mu^\alpha N_\mu^\beta = g^{\alpha\beta} = diag(1, -1, -1, -1) \\ N_\mu^0 = \dfrac{p_\mu}{\sqrt{p^2}} \end{cases} \tag{2.22}$$

la courbe de support est décomposée sur les tétrades de la façon suivante :

$$Q_\mu^\alpha(\sigma) = N_\mu^\alpha Q^\alpha(\sigma) \tag{2.23}$$

Jauge du cône de lumière invariante de Lorentz : les contraintes de Virasoro $L_n \backsim \acute{Q}^2(\sigma) = 0$ vérifiant l'algèbre de virasoro génèrent les reparametrisations de la courbe de support. Pour choisir une parametrisation spécifique de cette courbe, on est amené à fixer une jauge : la jauge du cône de lumière. On introduit alors la parametrisation suivante :

$$Q^\alpha(\sigma) = Q^\alpha(0) + \int_0^\alpha d\sigma' a^\alpha(\sigma') \tag{2.24}$$

où :

$$a^\alpha(\sigma) = \left[\frac{\pi}{2\sqrt{P^2}} (\frac{P^2}{\pi^2} + |a(\sigma)|^2) \ , \ \frac{a(\sigma) + a^*(\sigma)}{2} \vec{e}_1 + \frac{a(\sigma) - a^*(\sigma)}{2} i\vec{e}_2 + \frac{\pi}{2\sqrt{P^2}} (\frac{P^2}{\pi^2} + |a(\sigma)|^2) \vec{e}_3 \right] \tag{2.25}$$

et :

$$a(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n \neq 0} a_n \exp(-in\sigma) \tag{2.26}$$

et $\vec{e}_k$: est une base orthonormée dans le référentiel du centre de masse.

on aura les composantes transverses de la façon suivante : la composante $Q^+(\sigma)$ déduite de (2.20) et (2.21)

$$Q^+(\sigma) = Q^+(0) + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{p^2}{2}} \sigma \tag{2.27}$$

correspond à la jauge du cône de lumière, $Q^+(\sigma) \equiv n_\mu^- Q_\mu(\sigma)$ correspondant à l'axe de la jauge $n_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(N_\mu^0 - N_\mu^i e_3^i)$. Remarquons alors que la différence fondamentale par rapport à l'approche standard est que maintenant, l'axe de la jauge est dynamique (e_3 est dynamique). Par substitution de cette parametrisation dans (2.16) on obtient la forme symplectique suivante :

$$\Omega = dp_\mu \wedge dZ_\mu + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{ik} da_k^* \wedge da_k + \frac{1}{2} d\vec{e}_i \wedge d(\vec{s}\times\vec{e}_i) \tag{2.28}$$

où :

$$Z_\mu = \frac{1}{2\sqrt{P^2}} \int_0^{2\pi} d\sigma a^0(\sigma)(Q_\mu(\sigma) - (\frac{\sigma}{\pi} - 1)p_\mu) + \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Gamma_k^{ij} s^k \tag{2.29}$$

$\Gamma_\mu^{ij} = \partial N_\nu^i \frac{\partial N_\nu^j}{\partial P_\mu}$sont les symboles de christoffel
p_μ est le conjugué de Z_μ .

$$S = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{\sigma} d\sigma' \vec{a}(\sigma)\times\vec{a}(\sigma') \tag{2.30}$$

est le moment orbital de la corde dans le référentiel du centre de masse, obéissent aux conditions d'intégrabilité $\{(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij} - \partial_\rho\Gamma_\mu^{ij} + \Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj} - \Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj} = 0) + (\mu \to \nu, \rho) + (\rho \to \sigma, \mu) + (\mu \to \nu, \rho \to \sigma) = 0\}$.

La relation (2,28) correspond aux crochets de poisson suivants :

$$\{Z_\mu, p_\nu\} = g_{\mu\nu} \tag{2.31a}$$
$$\{a_n, a_n^*\} = ik\delta_{kn} \tag{2.31b}$$
$$\left\{S^i, S^j\right\} = -\epsilon^{ijk}S^k \tag{2.31c}$$
$$\left\{S^i, e_n^j\right\} = -\epsilon^{ijk}e_n^k \tag{2.31d}$$

qui caractérisent ainsi un système mécanique défini par les variables dynamiques indépendantes p_μ, Z_μ, un ensemble infinie d'oscillateurs a_k, a_k^* et $(\vec{S}, \vec{e}_i)$

Conséquence : La parametrisation obtenue sur le W.S diffère de celle de la jauge du cône de lumière de l'approche standard par l'introduction de 6 nouvelles variables dynamiques superflux $(\vec{S}, \vec{e}_i)$, prix à payer pour construire une jauge du cône de lumière invariante de Lorentz. En effet, le fait que l'axe de la jauge est dynamique implique qu'une transformation de Lorentz n'est pas suivie par une reparametrisation. Cette parametrisation inclut cependant trois contraintes de $1^{ère}$ classe qui proviennent de l'identité $S = \frac{1}{2}\vec{A}$[20] où $\vec{A}$ est la surface orientée délimitée par le contour de la projection de la courbe de support dans le référentiel du centre de masse qui est une courbe fermée et dont les composantes peuvent s'écrire en terme des oscillateurs a_k..

on peut alors définir trois contraintes :

$$\chi_+ = S_+ - A_+ = 0 \tag{2.32a}$$

$$\chi_- = S_- - A_- = 0 \tag{2.32b}$$

$$\chi_3 = S_3 - A_3 = 0 \tag{2.32c}$$

où :

$$A_3 = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} a_n^* a_n \tag{2.33a}$$

$$A_+ = \sqrt{\frac{2\pi}{p^2}} \sum_{k,n,k+n\neq 0} \frac{1}{k} a_k a_n a_{k+n}^* \tag{2.33b}$$

$$A_- = \sqrt{\frac{2\pi}{p^2}} \sum_{k,n,k+n\neq 0} \frac{1}{k} a_k^* a_n^* a_{k+n} \tag{2.33c}$$

$$\chi_\pm = \chi_1 \pm i\chi_2 \tag{2.33d}$$

$$S_\pm = S_1 \pm iS_2 \tag{2.33e}$$

Une autre contrainte, conséquence de la périodecité de $Q_\mu(\sigma)$, peut être obtenue de la façon suivante :

$Q_\mu(\sigma + 2\pi) - Q_\mu(\sigma) = 2p_\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma a_\mu(\sigma)$

On remplace $a_\mu(\sigma)$ par son expression (2,26) on aura :

$2p_\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n\neq 0}^{\infty} a_{n\mu} \exp(-in\sigma)$

$$
\begin{aligned}
4p_\mu p^\mu &= \frac{2}{\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma \sum_{n\neq 0}^{\infty}\sum_{k\neq 0}^{\infty} a_{n\mu} a_k^{*\mu} \exp(-in\sigma)\exp(ik\sigma)\\
&= \frac{2}{\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} d\sigma \sum_{n\neq 0}^{\infty}\sum_{k\neq 0}^{\infty} a_{n\mu} a_k^{*\mu} \int_0^{2\pi} d\sigma \exp i(k-n)\sigma\\
&= \frac{2}{\pi}\textstyle\int_0^{2\pi} d\sigma \sum_{n\neq 0}^{\infty}\sum_{k\neq 0}^{\infty} a_{n\mu} a_k^{*\mu} 2\pi\delta_{kn}\\
&= \frac{2}{\pi} 2\pi \textstyle\sum_{n\neq 0}^{\infty} a_{n\mu} a_n^{*\mu} 2\pi\\
4p^2 &= 2\pi \textstyle\sum_{n\neq 0}^{\infty} a_n a_n^*\\
\frac{p^2}{2\pi} &= \textstyle\sum_{n\neq 0}^{\infty} a_n a_n^*
\end{aligned}
$$

De sorte que :

$$
2P_\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma a_\mu(\sigma) \Leftrightarrow \chi_0 = \frac{p^2}{2\pi} - L_0 \tag{2.34}
$$

avec $L_0 = \sum_{n\neq 0} a_n a_n^*$ correspondant à la condition de “mass-shell”

Ces contraintes de 1^{ere} classe vérifient l'algèbre suivante :

$$
\{\chi_0, \chi_i\} = 0 \tag{2.35a}
$$

$$
\{\chi_i, \chi_j\} = \in_{ijk} \chi_k \tag{2.35b}
$$

et génèrent les transformations de jauge suivantes :

•χ_0 responsable de déplacement d'argument $Q(\sigma) \longrightarrow Q(\sigma+\tau)$ (évolution de la corde)

•$\chi_{1,2}$ responsable de la rotation des $\vec{e}_i$ autour de $\vec{e}_{1,2}$. Dans ce cas , la direction de l'axe de jauge n_μ^- change, et donc sera suivie par une reparamétrisation du world sheet .

•χ_3 responsable de la rotation de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ autour $\vec{e}_3$, cette transformation préserve $Q_\mu(\sigma)$ et les points du world sheet.

On peut alors à partir de l'expression générale $M_{\mu\nu}$:

$$
M_{\mu\nu} = \int_0^{\pi} d\sigma (X_\mu \mathcal{P}_\nu - X_\nu\, \mathcal{P}_\mu) \tag{2.36}
$$

obtenir le générateur de Lorentz suivant :

$$M_{\mu\nu} = Z_{[\mu}p_{\nu]} - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{[\mu}p_{\nu]}S^k + \epsilon_{ijk}N^i_\mu N^j_\nu S^k \tag{2.37}$$

$M_{\mu\nu}$ est donc une fonction simple des variables (Z, p, S), qui sont indépendants, leurs commutateurs sont postulés directement a partir des crochets de Poisson, ce qui a comme conséquence directe dans le cas quantique : $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]$ est libre d'anomalie.

Notons cependant que l'anomalie n'a pas complètement disparue mais seulement transférée du groupe de Lorentz vers le groupe des transformations de jauge (contraintes). En effet, rappelons que dans l'approche standard, l'origine de l'anomalie provient du fait que M^{i-} est cubique en termes des variables d'oscillateurs, cette situation n'est plus présente dans ce cas pour les générateurs de Lorentz mais elle apparaît dans $\chi_1$etχ_2 qui sont cubiques en termes des variables d'oscillateurs. En quantifiant, leur algèbre acquiert exactement la même anomalie qui figurait dans le groupe de Lorentz. Il est cependant beaucoup moins paralysant d'avoir cette anomalie au niveau du groupe de jauge, en effet, rappelons que par rapport aux six variables superflux introduites dans la théorie $(\vec{S}, \vec{e})$ seulement trois contraintes $\chi_i = 0$ sont imposées, qui éliminent directement 3 degrés de liberté identifiant ainsi les trois autres qui restent, et qui traduisent le fait que toute observable physique est indépendante du choix des $\vec{e}_i$. Il reste alors à éliminer cette symétrie de jauge résiduelle, en sélectionnant les conditions de fixation de jauge. Remarquons alors que des conditions de fixation de jauge du type $\vec{e}_3 = (1, 0, 0)$ nous ramènent immédiatement à la jauge du cône de lumière standard présentant l'anomalie en question dans le groupe de Lorentz. Il faut alors respecter l'idée initiale qui consistait à prendre l'axe de la jauge dynamique, et comme l'axe de la jauge est relié à $\vec{e}_3$, il faut donc relier le vecteur $\vec{e}_3$ à un autre vecteur dynamique du système, en l'occurrence on choisira $\vec{e}_3 \parallel \vec{S}$. On choisira alors deux jauges $\varphi_1 = S_1 = 0$ et $\varphi_2 = S_2 = 0$

Ces contraintes sont des jauges uniquement pour χ_1, χ_2, les contraintes χ_0 et χ_3 commutent avec les jauges dans leurs surfaces $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = 0$, et la partie du spin dans l'expression de la forme symplectique (2,28), devient sous la forme :

$$-\frac{1}{2}de_i \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}_i) \rightarrow -de_1 \wedge d(\vec{S} \times \vec{e}_1) \tag{2.38}$$

La partie concernant l'oscillateur aura une structure complexe, qui deviendra simple pour une configuration spéciale. Dans notre cas, on considérera la configuration à symétrie axiale, c'est-à-dire la projection de la courbe de support sur le référentiel du centre du masse aura une symétrie axiale. Cette configuration est équivalente a l'annulation de tous les modes pairs [18][12]

$$a_{2n} = a^*_{2n} = 0 \tag{2.39}$$

on voit biens que dans ce cas, les contraintes $\chi^+ = \sqrt{\frac{2\pi}{p^2}} \sum_{k,n,k+n\ imp} \frac{1}{k} a_k a_n a^*_{k+n} = 0$ et $\chi^- = \sqrt{\frac{2\pi}{p^2}} \sum_{k,n,k+n\ imp} \frac{1}{k} a^*_k a^*_n a_{k+n} = 0$ sont identiquement vérifiées, parce que tous les termes $a_k a_n a^*_{k+n}$ sont nuls. Les nouveaux crochets de Poisson seront alors :

$$\{Z_\mu, p_\nu\} = g_{\mu\nu} \tag{2.40a}$$
$$\{a_n, a^*_n\} = ik\delta_{kn} \qquad k, n \ sont\ impairs \tag{2.40b}$$
$$\left\{S^i, S^j\right\} = -\epsilon^{ijk} S^k \tag{2.40c}$$

la différence qui se trouve entre ces crochets de Poisson et les anciens (2.19) est que les indices des modes sont impairs.

L'opérateur $a^\alpha(\sigma)$ devient :

$$a^\alpha(\sigma) = \left[\frac{\pi}{2\sqrt{p^2}}\left(\frac{p^2}{\pi^2} + |a(\sigma)|^2\right),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(a(\sigma)e^- + a^*(\sigma)e^+) + \frac{\pi}{2\sqrt{p^2}}\left(\frac{p^2}{\pi^2} - a(\sigma)a^*(\sigma)\right)\frac{S}{s}\right] \tag{2.41}$$

où :

$$a(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n\ imp} a_n \exp -in\sigma \tag{2.42}$$

et

$$e^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm i\frac{S}{s} \times e) \tag{2.43}$$

On peut aussi ecrire la courbe de support sous la forme :

$$Q_\mu(\sigma) = x_\mu + \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma_0}{2\pi} \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\grave{\sigma} a_\mu(\grave{\sigma}) \tag{2.44}$$

où :

$$x_\mu = Z_\mu - \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Gamma_\mu^{ij} S^k \tag{2.45}$$

les contraintes :

$$\chi_0 = \frac{p^2}{2\pi} - L_0 = 0 \tag{2.46a}$$
$$\chi_3 = S_3 - A_3 = 0 \tag{2.46b}$$

étant toujours de première classe. Le Hamiltonirn étant une combinaison linéaire des contraintes, on prendra :$H = \chi_0$

Les générateurs de Lorentz restent toujours des fonctions simples des variables dynamiques (Z,P,S) en gardant leurs forme (2.55) et donc, leurs commutateur sont postulés directement de (2.29), donc le groupe de Lorentz reste libre d'anomalies, et l'algèbre de Poincaré après quantification est toujours satisfaite.

III Aspect quantique de la théorie des cordes non critiques :

La quantification devient directe :

$$\begin{aligned}
[Z_\mu, p_\nu] &= i g_{\mu\nu} && (2.47a)\\
\left[a_k, a_n^+\right] &= k\delta_{kn} \qquad n, k \textit{ sont impairs} && (2.47b)\\
\left[S^i, S^j\right] &= -i\epsilon^{ijk} S^k && (2.47c)
\end{aligned}$$

l'espace de Fock des états est défini comme suit :
le vide$|\ 0\rangle$ est tel que :

$$\begin{aligned}
a_k \quad |\ 0\rangle = 0 \qquad k\rangle 0\ , k\ \textit{impaire} && (2.48a)\\
a_k^+ \quad |\ 0\rangle = 0 \qquad k\langle 0\ , k\ \textit{impaire} && (2.48b)
\end{aligned}$$

les états sont crées à partir du vide par les opérateurs $(a_k^+\ , k\rangle 0)$ et $(a_k, k\langle 0)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
|\ \ n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{k^n n!}}(a_k^+)^n \mid 0\rangle \qquad k\rangle 0\ ,\ k\ \textit{impair} && (2.49a)\\
|\ \ n_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{(-k^n) n!}}(a_k)^n \mid 0\rangle \qquad k\langle 0\ ,\ k\ \textit{impair} && (2.49b)
\end{aligned}$$

le nombre d'occupations s'écrit comme suit :

$$n_k = \frac{1}{\mid k \mid} : a_k^+ a_k : \ = \frac{1}{\mid k \mid}\begin{cases} a_k^+ a_k & k\rangle 0\ ,\ k\ \textit{impair} \\ a_k a_k^+ & k\langle 0\ ,\ k\ \textit{impair} \end{cases} \tag{2.50}$$

les contraintes devienent alors

$$\chi_3 = S - \sum_{n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n} : a_n a_n^+ : \; = S - \sum_{k\ impaire} signe\ k \cdot n_k \tag{2.51a}$$

$$\chi_0 = \frac{p^2}{2\pi} - \sum_{n\neq 0}^{\infty} : a_n a_n^+ : \; - C_0 = \frac{p^2}{2\pi} - \sum_{k\ impaire} \mid k \mid n_k - C_0 \tag{2.51b}$$

Le spectre de masse sera décrit par :

$$M^2 = \sum_{k\ imp} \mid k \mid \cdot n_k \tag{2.52a}$$

$$S = \sum_{k\ imp} signe\ k \cdot n_k \tag{2.52b}$$

et les etats physiques sont tels que :

$$\begin{cases} \chi_0 \mid \Psi\rangle_{ph} = 0 \\ \chi_3 \mid \Psi\rangle_{ph} = 0 \end{cases} \tag{2.53}$$

Dans cette configuration, la représentation quantique de la courbe de support et déduite de la façon suivante :

Dans (2.51a) l'ordre est exigé seulement pour le produit $a(\sigma)a^+(\sigma)$, utilisons alors le produit normal suivant. :

$$: a(\sigma)a^+(\sigma) := \frac{2}{\pi} \sum_{n\ \neq 0} L_n \exp(in\sigma) \tag{2.54}$$

avec :

$$L_n = \sum_{k\ imp, k-n\ imp} : a_k a_{k-n}^+ : \quad , \quad L_n^+ = L_{-n} \tag{2.55}$$

on peut écrire :

$$: a(\sigma)a^+(\sigma) := \frac{p^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n\,\neq 0} L_n \exp(in\sigma) \tag{2.56}$$

de sorte que l'opérateur de la configuration devient :

$$a^\alpha(\sigma) = \left[\frac{1}{2\sqrt{p^2}}(\frac{P^{p2}}{\pi} + \sum_{n\neq 0} L_n \exp(in\sigma)) \ , \ \frac{1}{\sqrt{2}}(a(\sigma)e^- + a^+(\sigma)e^+) - \frac{1}{\sqrt{p^2}} \sum_{n\,\neq 0} L_n \exp(in\sigma)\frac{S}{s} \right] \tag{2.57}$$

les générateurs de Lorentz gardent la même forme (2.36) en terme d'opérateurs :

$$M_{\mu\nu} = Z_{[\mu} p_{\nu]} - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{[\mu} p_{\nu]} S^k + \epsilon_{ijk} N^i_\mu N^j_\nu S^k \tag{2.58}$$

enfin, pour les raisons évoquées, la fermeture de l'algèbre de Poincaré devient évidente :

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\,(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \tag{2.59}$$

On obtient ainsi une théorie de corde non critique.

L'objet de ce travail consiste à explorer la question suivante : De la même façon que l'extension paraquantique d'une théorie de cordes critique a donné des paracordes critique à des dimensions d'espace-temps exprimées en fonction de l'ordre de la paraquantification, dans quelle mesure l'extension paraquantique d'une théorie de corde non critique restera - t-elle non critique. Vu que la théorie des cordes non critiques est basée sur la considération de S comme variable dynamique indépendant, on commencera cette étude par le cas le plus général qui consistera à considérer toutes les variables dynamiques (aussi bien, celle du centre de masse de la corde que celle du spin de la corde et les modes) comme opérateurs obéissant à des relations trilinéaires (extension paraquantique des relations bilineaires

). On montrera alors que la théorie non critique est remise en cause par le calcul de l'anomalie. Un calcul analogue est aussi développé à travers la représentation de Green. C'est l'objet du chapitre 03. On se penchera alors dans les deux chapitres suivants sur la question qui consiste à identifier l'origine des différents termes de l'anomalie en considérant d'abord que S est un moment cinétique satisfaisant la relation standard qu'on combinera avec les autres opérateurs à travers l'hypothèse de Ardalan et Mansouri sur l'opérateur moment cinétique. Un terme de l'anomalie est alors éliminé et donc son origine identifiée. On passera alors à l'étape suivante qui consiste à considérer le moment cinétique S comme le spin de la particule et de ce fait, S est une notion purement quantique et donc ne devrait pas dépondre des coordonnées et des moments du centre de masse de la corde, ce qui se traduit par le fait que S commute avec ces dernières. Un autre terme de l'anomalie est alors identifié est éliminé, c'est l'objet du chapitre 04. Il s'avère alors que pour éliminer totalement l'anomalie et construire une théorie de paracorde non critique, l'hypothèse de Ardalan et Mansouri s'impose sur les coordonnées et les moments du centre de masse et seuls les modes de la corde obéiront aux relations trilineaires. L'origine de ce qui reste de l'anomalie éliminée est ainsi identifiée. C'est l'objet du chapitre 05.

On terminera enfin par une conclusion. Pour ne pas perdre de vue les étapes essentielles du raisonnement adopté, dans cette thèse, les développements de certains calculs sont laissées aux différentes annexes.

Chapitre 3

Formalisme général paraquantique et algèbre de Poincaré

I Introduction :

On se propose dans ce chapitre d'étudier l'extension paraquantique la plus générale de la théorie pour calculer l'anomalie de l'algèbre de Poincaré et vérifier ainsi que cette théorie n'est plus non critique.

II Approche trilinéaire :

II.1 Formalisme :

Les opérateurs Z_μ, p_ν, S^i et α satisfont les relations trilinéairea suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[Z_\mu, [p_\nu, Z_\rho]_+\right] &= -2ig_{\mu\nu}Z_\rho && && (3.1a)\\
\left[Z_\mu, [p_\nu, p_\rho]_+\right] &= 2i(g_{\mu\nu}p_\rho + g_{\mu\rho}p_\nu) && && (3.1b)\\
\left[p_\mu, [Z_\mu, p_\rho]_+\right] &= 2ig_{\mu\nu}p_\rho && && (3.1c)\\
\left[p_\mu, [Z_\nu, Z_\rho]_+\right] &= 2i(g_{\mu\nu}Z_\rho + g_{\mu\rho}Z_\nu) && && (3.1d)\\
\left[Z_\mu, \left[p_\nu, S^k\right]_+\right] &= -2ig_{\mu\nu}S^k && && (3.1e)\\
\left[Z_\mu, [p_\nu, \alpha_k]_+\right] &= -2\imath g_{\mu\nu}\alpha_k && k\ impair && (3.1f)\\
\left[\alpha_k, [\alpha_l, A]_+\right] &= 2k\delta_{k+l}A && k,l\ impair && (3.1g)\\
\left[\alpha_k, [\alpha_l, \alpha_n]_+\right] &= 2k(\delta_{k+l}\alpha_n + \delta_{k+n}\alpha_l) && n,l,k\ impair && (3.1h)
\end{aligned}$$

avec $A \equiv Z, p, S$

cas des relations avec deux opérateurs S :

Remarquons que les relations précédentes représentent l'extension paraquantique des relations bilinéaires en mécanique quantique du type $\left[\hat{a}, \hat{b}\right]_\pm = c\,number$. Il faut cependant être très prudent dans le cas où figure deux opérateurs S car la relation ordinaire $[S^i, S^j] \neq c\ number$, un problème d'ambiguité d'ordre apparaît alors lorsque on calcule la relation trilinéaire$\left[S^i, [p_\mu, S^j]_+\right]$ en utilisant la même règle de calcul des précédentes relations trilinéaires. La décomposition de Green s'impose alors pour établir la relation trilinéaire en question.

Soient :

$$\begin{aligned}
S^i &= \sum_{\alpha=1}^{Q} S^{i(\alpha)} && (3.2a)\\
p_\mu &= \sum_{\beta=1}^{Q} p_\mu^{(\beta)} && (3.2b)
\end{aligned}$$

ces deux opérateurs satisfont les relations bilinéaires :

$$\begin{aligned}
\left[S^{i(\alpha)}, p_\mu^{(\alpha)}\right] &= 0 && \text{(3.3a)}\\
\left[S^{i(\alpha)}, p_\mu^{(\beta)}\right]_+ &= 0 \qquad \alpha \neq \beta && \text{(3.3b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[S^i, [p_\mu, S^j]_+\right] &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, \left[p_\mu^{(\beta)}, S^{j(\gamma)}\right]_+\right]\\
&= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}(\sum_{\beta=1}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, \left[p_\mu^{(\beta)}, S^{j(\beta)}\right]_+\right] + \sum_{\beta\neq\gamma}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, \left[p_\mu^{(\beta)}, S^{j(\gamma)}\right]_+\right])\\
&= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, p_\mu^{(\beta)}S^{j(\beta)} + S^{j(\beta)}p_\mu^{(\beta)}\right]\\
&= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, p_\mu^{(\alpha)}S^{j(\alpha)}\right] + \sum_{\alpha=1}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, S^{j(\alpha)}p_\mu^{(\alpha)}\right]\\
&\quad \textstyle+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, S^{j(\beta)}p_\mu^{(\beta)}\right] + \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}\left[S^{i(\alpha)}, p_\mu^{(\beta)}S^{j(\beta)}\right]\\
&= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}p_\mu^{(\alpha)}(i\epsilon_{ijk}S^{k(\alpha)}) + \sum_{\alpha=1}^{Q}(i\epsilon_{ijk}S^{k(\alpha)})p_\mu^{(\alpha)}\\
&= \textstyle i\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}(p_\mu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)} + S^{k(\alpha)}p_\mu^{(\alpha)})\\
&= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}i\epsilon_{ijk}\left[S^{k(\alpha)}, p_\mu^{(\alpha)}\right]_+ + \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}i\epsilon_{ijk}\left[S^{k(\alpha)}, p_\mu^{(\beta)}\right]_+\\
&= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}i\epsilon_{ijk}\left[S^{k(\alpha)}, p_\mu^{(\beta)}\right]_+\\
&= i\epsilon_{ijk}\left[S^k, p_\mu\right]_+
\end{aligned}$$

et de la même façon on calcule les autres relations et on trouve :

$$\begin{aligned}
\left[S^k, [S^n, C]_+\right] &= i\epsilon_{knm}\left[S^m, C\right]_+ && \text{(3.4a)}\\
\left[S^k, [S^n, S^m]_+\right] &= i\epsilon_{knr}\left[S^r, S^m\right]_+ + i\epsilon_{kml}\left[S^l, S^n\right]_+ && \text{(3.4d)}
\end{aligned}$$

avec $C \equiv Z, p, \alpha$

et les autres relations de commutations sont nulles

on peut aussi démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\left[N_\mu^i, [Z_\sigma, p_\rho]_+\right] &= i\left[\partial_\sigma N_\mu^i, p_\rho\right]_+ && \text{(3.5a)}\\
\left[\Gamma_\mu^{ij}, [Z_\sigma, p_\rho]_+\right] &= i\left[\partial_\sigma \Gamma_\mu^{ij}, p_\rho\right]_+ && \text{(3.5b)}
\end{aligned}$$

II.2 Algèbre de Poincaré :

On commencera par écrire les générateurs de Lorentz $M_{\mu\upsilon}$ dans le cas paraquantique après une symétrisation adéquate des différents produits de variables dynamiques, de la manière suivante :

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + G^k_{\mu\nu} \tag{3.6}$$

avec :

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[Z_\mu, p_\nu\right]_+ - \frac{1}{2}\left[Z_\nu, p_\mu\right]_+ \tag{3.7}$$

$$G^k_{\mu\nu} = E^k_{\mu\nu} + F^k_{\mu\nu} \tag{3.8}$$

et :

$$E^k_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\mu}\left[p_\nu, S^k\right]_+ + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\nu}\left[p_\mu, S^k\right]_+ \tag{3.9a}$$

$$F^k_{\mu\nu} = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k + \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}N^j_\nu\left[N^i_\mu, S^k\right]_+ + \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}N^i_\mu\left[N^j_\nu, S^k\right]_+ \tag{3.9b}$$

notons ici que l'ecriture de $F^k_{\mu\nu}$ a nécéssite une symétrisation adéquate de la manière suivante :

$N^i_\mu N^i_\nu S^k = \frac{1}{6}\{\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k + \left[N^i_\mu, S^k\right]_+ N^i_\nu + \left[N^i_\nu, S^k\right]_+ N^i_\mu\}$

calculons alors le commutateur de l'algèbre de Poincaré :

$$\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] = \left[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] + \left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] + \left[L_{\mu\nu}, G^n_{\rho\sigma}\right] + \left[G^k_{\mu\nu}, G^n_{\rho\sigma}\right] \tag{3.10}$$

calcul de $[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]$ **:**

$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \left[\frac{1}{2}[Z_\mu, p_\nu]_+ - \frac{1}{2}[Z_\nu, p_\mu]_+, \frac{1}{2}[Z_\rho, p_\sigma]_+ - \frac{1}{2}[Z_\sigma, p_\rho]_+\right]$
en utilisant les relations trilinéaires $(3, 1a), (3, 1c)$ on trouve :

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \imath\left(g_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}\right) \tag{3.11}$$

calcul de $\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right]$ **:**

$$\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = i\left[\partial_\rho G^k_{\mu\nu}, p_\sigma\right]_+ - i\left[\partial_\sigma G^k_{\mu\nu}, p_\rho\right]_+ \tag{3.12}$$

le calcul est développé dans l'annexe (A), on trouve :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = & -\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{\partial_\rho\Gamma^{ij}_\mu p_\sigma\left[p_\nu, S^k\right]_+ - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}g_{\nu\rho}\Gamma^{ij}_\mu\left[p_\sigma, S^k\right]_+ \\ & + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\rho\Gamma^{ij}_\nu p_\sigma\left[p_\mu, S^k\right]_+ \quad + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_\nu\left[p_\sigma, S^k\right]_+ \\ & + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\rho N^j_\nu\left[N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \quad + \tfrac{2i}{3}N^j_\nu\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \\ & + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ N^j_\nu S^k + \tfrac{2i}{3}N^i_\mu\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k \\ & + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k \quad + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+\left[N^i_\mu, S^k\right]_+ \\ & + \tfrac{i}{3}N^j_\nu S^k\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ \quad + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+\left[N^j_\nu, S^k\right] \\ & + \tfrac{i}{3}N^i_\mu S^k\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+\} \ -(\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)\end{aligned} \tag{3.13}$$

de la même façon on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left[L_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = -\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{&\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho p_\nu \left[p_\sigma, S^k\right]_+ - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\sigma\mu}\Gamma^{ij}_\rho \left[p_\nu, S^k\right]_+ \\
&+ \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu \Gamma^{ij}_\sigma p_\nu \left[p_\rho, S^k\right]_+ \quad + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_\sigma \left[p_\nu, S^k\right]_+ \\
&+ \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\mu N^j_\sigma \left[N^l_\rho, p_\nu\right]_+ S^k \quad + \tfrac{i}{3} N^j_\sigma \left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ S^k \\
&+ \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ N^j_\sigma S^k + \tfrac{i}{3} N^i_\rho \left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ S^k \\
&+ \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ N^i_\rho S^k + \tfrac{i}{3} N^j_\sigma \left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ S^k \\
&+ \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ \left[N^i_\rho, S^k\right]_+ \quad + \tfrac{i}{3} N^j_\sigma S^k \left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ \\
&+ \tfrac{i}{3} N^i_\rho \left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ S^k + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ \left[N^j_\sigma, S^k\right]_+ \\
&+ \tfrac{i}{3} N^i_\rho S^k \left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ \ \} - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

en utilisant (3.13) et (3.14) on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] + \left[L_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = \{&-ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu} + ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu} - ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu} + ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu}\} \\
&-\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{'\partial_\rho \Gamma^{ij}_\mu p_\sigma \left[p_\nu, S^k\right]_+ + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\rho \Gamma^{ij}_\nu p_\sigma \left[p_\mu, S^k\right]_+ \\
&+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\rho N^j_\nu \left[N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \quad + \tfrac{i}{3} N^j_\nu \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \\
&+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ N^j_\nu S^k + \tfrac{i}{3} N^i_\mu \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k \\
&+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k + \tfrac{i}{3} N^j_\nu \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \\
&+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ \left[N^i_\mu, S^k\right]_+ + \tfrac{i}{3} N^j_\nu S^k \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ \\
&+\tfrac{i}{3} N^i_\mu \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ \left[N^j_\nu, S^k\right]_+ \\
&+\tfrac{i}{3} N^i_\mu S^k \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ \ \} - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \\
&-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu \leftrightarrow \nu)
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

calcul de $\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right]$:

$$
\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = \left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] + \left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] \tag{3.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = &\tfrac{1}{16}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln}\{\Gamma^{ij}_\mu \Gamma^{ml}_\rho \left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, \left[p_\sigma, S^n\right]_+\right] - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) \\
&+(\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}
\end{aligned}
$$

le calcul est développé dans l'annexe (B) et on trouve :

$$\left[E^k_{\mu\nu},E^k_{\rho\sigma}\right]= \begin{array}{l}\frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Big\{(\Gamma^{il}_{\rho}\Gamma^{lj}_{\mu}-\Gamma^{il}_{\mu}\Gamma^{lj}_{\rho})p_\sigma\left[p_\nu,S^k\right]_+-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)\\ -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\}\end{array} \tag{3.17}$$

de même, le commutateur $\left[E^k_{\mu\nu},F^k_{\rho\sigma}\right]$ s'écrit :

$$\left[E^k_{\mu\nu},F^k_{\rho\sigma}\right]=-\frac{1}{12}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\ln}\{(\Big[\Gamma^{ij}_{\mu}\left[p_\nu,S^k\right]_+,\left[N^m_\rho,N^l_\sigma\right]_+S^n\Big]+\Big[\Gamma^{ij}_{\mu}\left[p_\nu,S^k\right]_+,N^i_\sigma\left[N^i_\rho,S^k\right]_+\Big]$$
$$+\Big[\Gamma^{ij}_{\mu}\left[p_\nu,S^k\right]_+,N^i_\rho\left[N^i_\sigma,S^k\right]_+\Big]+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)\}$$

le calcul est développé dans l'annexe (C) et on trouve :

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu},F^k_{\rho\sigma}\right]=&-\frac{1}{12}\Gamma^{lj}_{\mu}\{\left[N^l_\rho,N^i_\sigma\right]_+([p_\nu,[S^i,S^j]]_++[S^i,[p_\nu,S^j]]_+)\\&+2\ i\epsilon_{ijk}\left[p_\nu,N^i_\sigma\right]_+\left[N^l_\rho,S^r\right]_++[p_\nu,[S^i,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_+\\&+[S^i,[p_\nu,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\nu,N^l_\rho\right]_+\left[N^i_\sigma,S^k\right]_+\\&+\ \left[p_\nu,\left[S^i,N^l_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma,S^j]_+\ +\left[S^i,\left[p_\nu,N^l_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma,S^j]_+\\&+\frac{1}{12}\Gamma^{jl}_{\nu}\{\left[N^l_\rho,N^i_\sigma\right]_+([p_\mu,[S^i,S^j]]_++[S^i,[p_\mu,S^j]]_+)\\&+2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\mu,N^i_\sigma\right]_+\left[N^l_\rho,S^k\right]_++[p_\mu,[S^i,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_+\\&+[S^i,[p_\mu,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\mu,N^i\right]_+\left[N^i_\sigma,S^k\right]_+\\&+\ \left[p_\mu,\left[S^i,N^i_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma,S^j]_+\ +\left[S^i,\left[p_\mu,N^i_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma,S^j]_+\\&-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)\end{aligned} \tag{3.18}$$

de la même façon on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left[F^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = & -\tfrac{1}{12}\Gamma^{lj}_{\rho}\{\left[N^l_\mu, N^i_\nu\right]_+ ([p_\sigma,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\sigma,S^j]]_+) \\
& + 2\ i\epsilon_{ijk}\,[p_\sigma, N^i_\nu]_+ \left[N^l_\mu, S^r\right]_+ + [p_\sigma,[S^i,N^i_\nu]]_+ \left[N^l_\mu, S^j\right]_+ \\
& + [S^i,[p_\sigma,N^i_\nu]]_+ \left[N^l_\mu, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{knr}\left[p_\sigma, N^l_\mu\right]_+ \left[N^i_\nu, S^k\right]_+ \\
& + \ \left[p_\sigma,\left[S^i,N^l_\mu\right]\right]_+ [N^i_\nu, S^j]_+ \ + \left[S^i,\left[p_\sigma,N^l_\mu\right]\right]_+ [N^i_\nu, S^j]_+ \\
& + \tfrac{1}{12}\Gamma^{jl}_{\sigma}\{\left[N^l_\mu, N^i_\nu\right]_+ ([p_\rho,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\rho,S^j]]_+) \\
& + 2i\ \epsilon_{knr}\,[p_\rho, N^i_\nu]_+ \left[N^l_\mu, S^k\right]_+ + [p_\rho,[S^i,N^i_\nu]]_+ \left[N^l_\mu, S^j\right]_+ \\
& + [S^i,[p_\rho,N^i_\nu]]_+ \left[N^l_\mu, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{knr}\,[p_\rho, N^i]_+ \left[N^i_\nu, S^k\right]_+ \\
& + \ \left[p_\rho,\left[S^i,N^i_\mu\right]\right]_+ [N^i_\nu, S^j]_+ \ + \left[S^i,\left[p_\rho,N^i_\mu\right]\right]_+ [N^i_\nu, S^j]_+ \\
& - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

en utilisant (3.18) et (3.19) on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] + \left[E^k_{\rho\sigma}, F^k_{\mu\nu}\right] = & -\tfrac{1}{12}\Gamma^{lj}_{\mu}\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+ ([p_\nu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\nu,S^j]]_+) \\
& +2\ i\epsilon_{ijk}\,[p_\nu, N^i_\sigma]_+ \left[N^l_\rho, S^r\right]_+ + [p_\nu,[S^i,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ \\
& + [S^i,[p_\nu,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\nu, N^l_\rho\right]_+ \left[N^i_\sigma, S^k\right]_+ \\
& + \ \left[p_\nu,\left[S^i,N^l_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ + \left[S^i,\left[p_\nu,N^l_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ \\
& +\tfrac{1}{12}\Gamma^{jl}_{\nu}\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+ ([p_\mu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\mu,S^j]]_+) \\
& +2i\ \epsilon_{ijk}\,[p_\mu, N^i_\sigma]_+ \left[N^l_\rho, S^k\right]_+ + [p_\mu,[S^i,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ \\
& + [S^i,[p_\mu,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{ijk}\,[p_\mu, N^i]_+\, N^i_\sigma, S \\
& + \ \left[p_\mu,\left[S^i,N^i_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ + \left[S^i,\left[p_\mu,N^i_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ \\
& -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

calcul de $\left[F^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right]$:

$$
\begin{aligned}
\left[F^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right] = & \tfrac{1}{36}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}}\{\left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] + \left[N^i_\mu \left[N^j_\nu, S^n\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
& + \left[N^i_\mu \left[N^j_\nu, S^n\right]_+, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] + \left[N^i_\mu \left[N^j_\nu, S^n\right]_+, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[N^j_\nu \left[N^i_\mu, S^n\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[N^j_\nu \left[N^i_\mu, S^n\right]_+, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right]
\end{aligned}
$$

$$+\left[N_\nu^j\left[N_\mu^i,S^n\right]_+,N_\sigma^l\left[N_\rho^m,S^n\right]_+\right]\}$$

le calcul est développé dans l'annexe (D) et on trouve :

$$\begin{aligned}
\left[F_{\mu\nu}^k,F_{\rho\sigma}^n\right] = \imath & \left(g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma}^k - g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}^k + g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}^k - g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}^k\right) \\
& -\tfrac{i}{18}\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^lN_\rho^j\right]\right]_+\epsilon_{ijk}S^k \\
& +\tfrac{1}{12}i\epsilon_{ijk}\left[N_\nu^i,N_\sigma^l,N_\mu^lN_\rho^j\right]_+\left[S^k,N_\nu^i\right]_+ \\
& +\tfrac{1}{6}\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^lN_\rho^j\right]\right]_+\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^Q S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}} \\
& +\tfrac{1}{12}\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+(\left[N_\mu^l,[N_\nu^i,S^i]\right]_+S^j+\left[N_\nu^i,\left[N_\mu^l,S^i\right]\right]_+S^j)\} \\
& -\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\rho^j,N_\sigma^lS^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\sigma^l,N_\rho^jS^i\right]\right] \\
& +\tfrac{1}{12}\left[N_\nu^i,S^j\right]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\mu^l,S^i\right]_++\tfrac{1}{12}N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\nu^i,S^i\right],S^j\right]_+ \\
& +\tfrac{1}{6}N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^Q(N_\nu^iS^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}+S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}N_\nu^i) \\
& -\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\rho^k,N_\sigma^lS^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\mu^l\left[N_\nu^i,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^kS^i\right]\right] \\
& +\tfrac{1}{4}i\epsilon_{ijk}\left[N_\sigma^l,N_\mu^lN_\rho^j\right]\left[S^k,N_\rho^j\right]_+ \\
& +\tfrac{1}{12}\left[N_\mu^l,S^j\right]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\nu^i,S^i\right]_++\tfrac{1}{12}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\mu^l,S^i\right],S^j\right] \\
& +\tfrac{1}{6}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^Q(N_\mu^lS^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}+S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}N_\mu^l) \\
& -\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^k\right]_+,\left[N_\rho^k,N_\sigma^lS^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^jS^i\right]\right] \\
& +(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

si on remplace (3.17) , (3.20) , (3.21) dans (3.16) on trouve :

$$\begin{aligned}
\left[G_{\mu\nu}^k,G_{\rho\sigma}^k\right] = \imath & g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma}^k - g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}^k + g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}^k - g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}^k \\
& +\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}(\Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj}-\Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj})p_\sigma\left[p_\nu,S^k\right]_+ \\
& -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu) \\
& -\tfrac{1}{12}\Gamma_\mu^{lj}\{\left[N_\rho^l,N_\sigma^i\right]_+([p_\nu,[S^i,S^j]]_++[S^i,[p_\nu,S^j]]_+) \\
& +2\ i\epsilon_{ijk}\left[p_\nu,N_\sigma^i\right]_+\left[N_\rho^l,S^r\right]_++[p_\nu,[S^i,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]_+ \\
& +[S^i,[p_\nu,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\nu,N_\rho^l\right]_+\left[N_\sigma^i,S^k\right]_+ \\
& +\left[p_\nu,\left[S^i,N_\rho^l\right]\right]_+\left[N_\sigma^i,S^j\right]_++\left[S^i,\left[p_\nu,N_\rho^l\right]\right]_+\left[N_\sigma^i,S^j\right]_+ \\
& +\tfrac{1}{12}\Gamma_\nu^{jl}\{\left[N_\rho^l,N_\sigma^i\right]_+([p_\mu,[S^i,S^j]]_++[S^i,[p_\mu,S^j]]_+) \\
& +2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\mu,N_\sigma^i\right]_+\left[N_\rho^l,S^k\right]_++[p_\mu,[S^i,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]_+ \\
& +[S^i,[p_\mu,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\mu,N^i\right]_+\left[N_\sigma^i,S^k\right]_+ \\
& +\left[p_\mu,\left[S^i,N_\rho^i\right]\right]_+\left[N_\sigma^i,S^j\right]_++\left[S^i,\left[p_\mu,N_\rho^i\right]\right]_+\left[N_\sigma^i,S^j\right]_+ \\
& -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{i}{18}\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\right]_+\epsilon_{ijk}S^k\\
&+\tfrac{1}{12}i\epsilon_{ijk}\left[N_\nu^i,N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]_+\left[S^k,N_\nu^i\right]_+\\
&+\tfrac{1}{6}\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\right]_+\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^Q S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+(\left[N_\mu^l,[N_\nu^i,S^i]\right]_+S^j+\left[N_\nu^i,\left[N_\mu^l,S^i\right]\right]_+S^j)\}\\
&-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\rho^j,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\sigma^l,N_\rho^j S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N_\nu^i,S^j\right]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\mu^l,S^i\right]_++\tfrac{1}{12}\ N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\nu^i,S^i\right],S^j\right]_+\\
&+\tfrac{1}{6}N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^Q(N_\nu^i S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}+S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}N_\nu^i)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\mu^l\left[N_\nu^i,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^k S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{4}i\epsilon_{ijk}\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\left[S^k,N_\rho^j\right]_+\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N_\mu^l,S^j\right]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\nu^i,S^i\right]_++\ \tfrac{1}{12}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\mu^l,S^i\right],S^j\right]\\
&+\tfrac{1}{6}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^Q(N_\mu^l S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}+S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}N_\mu^l)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^k\right]_+,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^j S^i\right]\right]\\
&+(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m))
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

les commutateurs $\left[G_{\mu\nu}^k,L_{\rho\sigma}\right]+\left[L_{\mu\nu},G_{\rho\sigma}^k\right]$ contiennent les termes suivants :

$$
\begin{aligned}
&\{+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}p_\nu\left[p_\sigma,S^k\right]_+-\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}p_\sigma\left[p_\nu,S^k\right]_+\\
&-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)+(\nu\leftrightarrow\rho,\mu\leftrightarrow\sigma)\}
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

le commutateur $\left[G_{\mu\nu}^k,G_{\rho\sigma}^k\right]$ contient les termes suivants :

$$
\begin{aligned}
&\{\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}(\Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj}-\Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj})p_\sigma\left[p_\nu,S^k\right]_+-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu\leftrightarrow\nu)\}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

nous savons que la condition d'intégrabilité a la forme :

$$
\begin{aligned}
&\{(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}-\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}+\Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj}-\Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj})\\
&-(\mu\to\nu,\rho)-(\rho\to\sigma,\mu)+(\mu\to\nu,\rho\to\sigma)\}=0
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

dans notre cas on sait que :

$p_\sigma\left[p_\nu,S^k\right]_+\neq p_\nu\left[p_\sigma,S^k\right]_+$

la solution à ce problème est d'utiliser l'égalité :

$$p_\nu \left[p_\sigma, S^k\right]_+ = p_\sigma \left[p_\nu, S^k\right]_+ + \left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] - \left[p_\sigma, p_\nu S^k\right] \tag{3.26}$$

alors (3-23) devient :

$$\begin{aligned}
&\{(+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}(\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho - \partial_\rho \Gamma^{ij}_\mu) p_\sigma \left[p_\nu, S^k\right]_+ + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho \left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] \\
&- \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho \left[p_\sigma, p_\nu S^k\right]) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) \\
&- (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu \leftrightarrow \nu) + (\nu \leftrightarrow \rho, \mu \leftrightarrow \sigma)\}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

en faisant la sommation de (3,24) et (3,27) on obtient :

$$\begin{aligned}
&\{(+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}(\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho - \partial_\rho \Gamma^{ij}_\mu + \Gamma^{il}_\rho \Gamma^{lj}_\mu - \Gamma^{il}_\mu \Gamma^{lj}_\rho) p_\sigma \left[p_\nu, S^k\right]_+ \\
&+ \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho \left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho \left[p_\sigma, p_\nu S^k\right]) \\
&- (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu \leftrightarrow \nu) + (\nu \leftrightarrow \rho, \mu \leftrightarrow \sigma)\}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

la condition d'intégrabilité est alors mise en évidence pour éliminer les termes en facteurs de celle ci. On remplace (3-11), (3-13), (3-14), (3-22) dans (3-10) pour trouver enfin :

$$\left[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}\right] = \imath \left(g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}\right) + A_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{3.29}$$

l'anomalie $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu\rho\sigma} = {} & \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho \left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu \Gamma^{ij}_\rho \left[p_\sigma, p_\nu S^k\right] \\
& + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{\Gamma^{il}_\rho N^j_\nu \left[N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \quad + \tfrac{i}{3} N^j_\nu \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \\
& + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ N^j_\nu S^k + \tfrac{2i}{3} N^i_\mu \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k \\
& + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k + \tfrac{2i}{3} N^j_\nu \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \\
& + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ \left[N^i_\mu, S^k\right]_+ \quad + \tfrac{i}{3} N^j_\nu S^k \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ \\
& + \tfrac{i}{3} N^i_\mu \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ \left[N^j_\nu, S^k\right]_+
\end{aligned}$$

$$+\tfrac{i}{3}N_\mu^i S^k\left[\Gamma_\rho^{jl}N_\nu^l,p_\sigma\right]_+\}-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)$$
$$-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)$$
$$-\tfrac{1}{12}\Gamma_\mu^{lj}\{\left[N_\rho^l,N_\sigma^i\right]_+([p_\nu,[S^i,S^j]]_++[S^i,[p_\nu,S^j]]_+)$$
$$+2\ i\epsilon_{ijk}\,[p_\nu,N_\sigma^i]_+\left[N_\rho^l,S^r\right]_++[p_\nu,[S^i,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]_+$$
$$+[S^i,[p_\nu,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\nu,N_\rho^l\right]_+\left[N_\sigma^i,S^k\right]_+$$
$$+\ \left[p_\nu,\left[S^i,N_\rho^l\right]\right]_+[N_\sigma^i,S^j]_++\left[S^i,\left[p_\nu,N_\rho^l\right]\right]_+[N_\sigma^i,S^j]_+$$
$$+\tfrac{1}{12}\Gamma_\nu^{jl}\{\left[N_\rho^l,N_\sigma^i\right]_+([p_\mu,[S^i,S^j]]_++[S^i,[p_\mu,S^j]]_+)$$
$$+2i\ \epsilon_{ijk}\,[p_\mu,N_\sigma^i]_+\left[N_\rho^l,S^k\right]_++[p_\mu,[S^i,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]$$
$$+[S^i,[p_\mu,N_\sigma^i]]_+\left[N_\rho^l,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\,[p_\mu,N^i]_+\left[N_\sigma^i,S^k\right]_+$$
$$+\ \left[p_\mu,\left[S^i,N_\rho^i\right]\right]_+[N_\sigma^i,S^j]_++\left[S^i,\left[p_\mu,N_\rho^i\right]\right]_+[N_\sigma^i,S^j]_+$$
$$-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)$$
$$-\tfrac{i}{18}\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\right]_+\epsilon_{ijk}S^k$$
$$+\tfrac{1}{12}i\epsilon_{ijk}\left[N_\nu^i,N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]_+\left[S^k,N_\nu^i\right]_+$$
$$+\tfrac{1}{6}\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\right]_+\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{Q}S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$$
$$+\tfrac{1}{12}\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+(\left[N_\mu^l,[N_\nu^i,S^i]\right]_+S^j+\left[N_\nu^i,\left[N_\mu^l,S^i\right]\right]_+S^j)\}$$
$$-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\rho^j,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\sigma^l,N_\rho^j S^i\right]\right]$$
$$+\tfrac{1}{12}\,[N_\nu^i,S^j]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\mu^l,S^i\right]_++\tfrac{1}{12}\ N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+[[N_\nu^i,S^i]\,,S^j]_+$$
$$+\tfrac{1}{6}N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}(N_\nu^i S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}+S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_\nu^i)$$
$$-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^j,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\mu^l\,[N_\nu^i,S^j]_+\,,\left[N_\sigma^l,N_\rho^k S^i\right]\right]$$
$$+\tfrac{1}{4}i\epsilon_{ijk}\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\left[S^k,N_\rho^j\right]_+$$
$$+\tfrac{1}{12}\left[N_\mu^l,S^j\right]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+[N_\nu^i,S^i]_++\ \tfrac{1}{12}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\mu^l,S^i\right],S^j\right]$$
$$+\tfrac{1}{6}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}(N_\mu^l S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}+S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_\mu^l)$$
$$-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^j\right]_+,\left[N_\rho^j,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^j S^i\right]\right]$$
$$+(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)\tag{3.30}$$

Notons cependant que cette anomalie disparait dans le cas particulier de la mécanique quantique

en effet lorsque $Q=1$

$\left[p_\nu,p_\sigma S^k\right]=\left[p_\sigma,p_\nu S^k\right]=\left[N_\mu^i,N_\nu^l p_\sigma\right]=\left[N_\nu^l,N_\mu^i p_\sigma\right]=\left[N_\nu^j,p_\sigma S^k\right]=\left[N_\nu^l,p_\sigma S^k\right]=\left[N_\mu^i,p_\sigma S^k\right]=\left[N_\mu^l,p_\sigma S^k\right]$

$= \left[N_\rho^m, N_\nu^m N_\sigma^j\right] = \left[N_\rho^m, N_\nu^m N_\sigma^j\right] = (N_\sigma^j N_\rho^m S^k - N_\rho^m S^k N_\sigma^j) = (N_\rho^m N_\sigma^j S^k - N_\sigma^j S^k N_\rho^m) = \left[N_\rho^m N_\mu^i, N_\sigma^j\right] =$

$= \left[N_\rho^m N_\nu^m, N_\sigma^j\right] = \left[N_\sigma^j N_\nu^m, N_\rho^m\right] = \left[N_\rho^m, N_\nu^m N_\sigma^j\right] = \left[N_\rho^m, N_\nu^m N_\sigma^j\right] = \left[N_\rho^m, N_\sigma^j N_\nu^m\right] = \left[N_\sigma^j N_\mu^i, N_\rho^m\right] = 0$

ce qui nous conduit à $A_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

III Reformulation dans la représentation de Green :

On peut rependre ces même étapes de calcul, mais cette fois ci dans la représentation de Green et montrer qu'effectivement les deux approches sont équivalentes.

III.1 Formalisme :

utilisons la décomposition de Green :

$$p_\mu = \sum_{\alpha=1}^{Q} p_\mu^{(\alpha)} \tag{3.31a}$$

$$Z_\mu = \sum_{\alpha=1}^{Q} Z_\mu^{(\alpha)} \tag{3.31b}$$

$$S^i = \sum_{\alpha=1}^{Q} S^{i(\alpha)} \tag{3.31c}$$

$$\alpha_n = \sum_{\beta=1}^{Q} \alpha_n^{(\beta)} \tag{3.31d}$$

les relations trilinéaires seront équivalentes aux relations bilinéaires :

$$\begin{cases} \left\{\left[Z_\mu^{(\alpha)}, p_\nu^{(\alpha)}\right]\right\} = -ig_{\mu\nu} \\ \left[Z_\mu^{(\alpha)}, p_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{3.32a}$$

$$\begin{cases} \left[S^{i(\alpha)}, S^{j(\alpha)}\right] = i\epsilon_{ijk}S^{k(\alpha)} \\ \left[S^{i(\alpha)}, S^{j(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{3.32b}$$

$$\begin{cases} \left[S^{i(\alpha)}, P_\nu^{(\alpha)}\right] = 0 \\ \left[S^{i(\alpha)}, p_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{3.32c}$$

$$\begin{cases} \left[Z_\mu^{(\alpha)}, Z_\nu^{(\alpha)}\right] = 0 \\ \left[Z_\mu^{(\alpha)}, Z_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{3.32d}$$

$$\begin{cases} \left[p_\mu^{(\alpha)}, p_\nu^{(\alpha)}\right] = 0 \\ \left[p_\mu^{(\alpha)}, p_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{3.32e}$$

$$\begin{cases} \left[\alpha_n^{(\beta)}, A^{(\beta)}\right] = 0 \\ \left[\alpha_n^{(\beta)}, A^{(\gamma)}\right]_+ = 0 \quad \gamma \neq \beta \end{cases} \tag{3.32f}$$

avec $A \equiv Z, p, S$

III.2 Algèbre de Poincaré :

$M_{\mu\nu}$ dans ce cas s'écrit de la façon suivante :

$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + G^k_{\mu\nu}$

où :

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}(\left[Z_\mu^{(\alpha)}, p_\nu^{(\alpha)}\right]_+ - \left[Z_\nu^{(\alpha)}, p_\mu^{(\alpha)}\right]_+) \tag{3.33}$$

et

$G^k_{\mu\nu} = E^k_{\mu\nu} + F^k_{\mu\nu}$

avec :

$$E^k_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{Q}(-\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\mu}p^{(\alpha)}_{\nu}S^{k(\alpha)} - \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\nu}p^{(\alpha)}_{\mu}S^{k(\alpha)}) \tag{3.34a}$$

$$F^k_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\left\{\tfrac{1}{6}\epsilon_{ijk}\{\left[N^{i(\alpha)}_{\mu}, N^{i(\alpha)}_{\nu}\right]_+ S^{k(\beta)} + N^{i(\beta)}_{\mu}\left[N^{i(\alpha)}_{\nu}, S^{k(\alpha)}\right]_+ \right. \\ \left. + N^{i(\beta)}_{\nu}\left[N^{i(\alpha)}_{\mu}, S^{k(\alpha)}\right]_+\right\} \tag{3.34b}$$

calcul de $[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]$:

$$\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\left[\left[Z^{(\alpha)}_{\mu}, p^{(\alpha)}_{\nu}\right]_+, \left[Z^{(\beta)}_{\mu}, p^{(\beta)}_{\nu}\right]_+\right] = \sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\left[Z^{(\alpha)}_{\mu}p^{(\alpha)}_{\nu} + p^{(\alpha)}_{\nu}Z^{(\alpha)}_{\mu}, \left[Z^{(\beta)}_{\mu}, p^{(\beta)}_{\nu}\right]_+\right]$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{Q} 2ig_{\nu\rho}\left[Z^{(\alpha)}_{\mu}, p^{(\alpha)}_{\sigma}\right]_+ - 2ig_{\mu\sigma}\left[Z^{(\alpha)}_{\rho}, p^{(\alpha)}_{\nu}\right]_+$$

en remplaçant ceci dans $[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]$ on obtient :

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \tfrac{i}{2}g_{\nu\rho}\sum_{\alpha=1}^{Q}\left\{(\left[Z^{(\alpha)}_{\mu}, p^{(\alpha)}_{\sigma}\right]_+ - \left[Z^{(\alpha)}_{\sigma}, p^{(\alpha)}_{\mu}\right]_+) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma) \right. \\ \left. + ((\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma) - (\mu, \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\right\} \tag{3.35}$$

calcul de $\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right]$

$\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = i\left[\partial_\rho G^k_{\mu\nu}, p_\sigma\right]_+ - i\left[\partial_\sigma G^k_{\mu\nu}, p_\rho\right]_+$

en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (A) on peut ecrire

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = i\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{&-\tfrac{1}{2}\sum_{\gamma=1}\partial_\mu\Gamma^{ij}_{\rho}p^{(\alpha)}_{\nu}p^{(\beta)}_{\sigma}S^{k(\gamma)} \\ &+\tfrac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{Q}\partial_\mu\Gamma^{ij}_{\sigma}p^{(\alpha)}_{\nu}p^{(\beta)}_{\rho}S^{k(\gamma)} + \sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{il}_{\mu}N^{j(\alpha)}_{\sigma}N^{l(\beta)}_{\rho}p^{(\gamma)}_{\nu}S^{k(\lambda)} \\ &-\tfrac{1}{2}g_{\mu\sigma}\Gamma^{ij}_{\rho}\sum_{\alpha=1}^{Q}p^{(\alpha)}_{\nu}S^{k(\beta)} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_{\sigma}\sum_{\alpha=1}^{Q}p^{(\alpha)}_{\nu}S^{k(\beta)} \\ &+\tfrac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{il}_{\mu}N^{j(\alpha)}_{\sigma}(N^{l(\beta)}_{\rho}p^{(\beta)}_{\nu}S^{k(\lambda)} + p^{(\beta)}_{\nu}N^{l(\gamma)}_{\rho}S^{k(\lambda)}) \\ &+\tfrac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{il}_{\mu}(N^{l(\beta)}_{\rho}p^{(\beta)}_{\nu}N^{j(\alpha)}_{\sigma}S^{k(\lambda)} + p^{(\beta)}_{\nu}N^{l(\gamma)}_{\rho}N^{j(\alpha)}_{\sigma}S^{k(\lambda)}) \\ &+\tfrac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{jl}_{\mu}N^{i\alpha)}_{\mu\rho}(N^{l\beta)}_{\sigma}p^{(\beta)}_{\nu}S^{k(\lambda)} + p^{(\beta)}_{\nu}N^{l(\gamma)}_{\sigma}S^{k(\lambda)}) \\ &+\tfrac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{jl}_{\mu}(N^{l(\beta)}_{\sigma}p^{(\beta)}_{\rho}N^{j(\alpha)}_{\nu}S^{k(\lambda)} + p^{(\beta)}_{\nu}N^{l(\gamma)}_{\sigma}N^{j(\alpha)}_{\rho}S^{k(\lambda)})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{jl}(N_{\sigma}^{l(\alpha)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{i(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\sigma}^{l(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{i(\gamma)}S^{k(\beta)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{il}N_{\sigma}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\gamma)}+N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\gamma)}+N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}N_{\mu}^{i(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)}+N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\}\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

de la même façon on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left[G_{\mu\nu}^{k},L_{\rho\sigma}\right]=\;&i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{-\tfrac{1}{2}\sum_{\gamma=1}\partial_{\mu}\Gamma_{\rho}^{ij}p_{\nu}^{(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}\\
&+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\partial_{\mu}\Gamma_{\sigma}^{ij}p_{\nu}^{(\alpha)}p_{\rho}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}+\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{il}N_{\sigma}^{j(\alpha)}N_{\rho}^{l(\beta)}p_{\nu}^{(\gamma)}S^{k(\lambda)}\\
&-\tfrac{1}{2}g_{\mu\sigma}\Gamma_{\rho}^{ij}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\beta)}+\tfrac{1}{2}g_{\mu\rho}\Gamma_{\sigma}^{ij}\sum_{\alpha=1}^{Q}p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\beta)}\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{il}N_{\sigma}^{j(\alpha)}(N_{\rho}^{l(\beta)}p_{\nu}^{(\beta)}S^{k(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{il}(N_{\rho}^{l(\beta)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{jl}N_{\mu\rho}^{i\alpha)}(N_{\sigma}^{l\beta)}p_{\nu}^{(\beta)}S^{k(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{jl}(N_{\sigma}^{l(\beta)}p_{\rho}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{jl}(N_{\sigma}^{l(\alpha)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{i(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\sigma}^{l(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{i(\gamma)}S^{k(\beta)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{il}N_{\sigma}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\gamma)}+N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{il}(N_{\rho}^{l(\alpha)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\rho}^{l(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{il}N_{\sigma}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\gamma)}+N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\sigma}^{l(\alpha)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\mu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\nu}^{l(\alpha)}p_{\mu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{jl}N_{\rho}^{i(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\lambda)}+N_{\sigma}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\lambda)})\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

en utilisant (3.36), (3.37) on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left[L_{\mu\nu},G_{\rho\sigma}^{k}\right]+\left[G_{\mu\nu}^{k},L_{\rho\sigma}\right]=\;&i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{-\tfrac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{Q}\partial_{\rho}\Gamma_{\mu}^{ij}p_{\sigma}^{(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}\\
&+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\partial_{\rho}\Gamma_{\nu}^{ij}p_{\sigma}^{(\alpha)}p_{\mu}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}\\
&+\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}p_{\sigma}^{(\gamma)}S^{k(\lambda)}\\
&-\tfrac{1}{2}g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu}^{ij}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}p_{\sigma}^{(\alpha)}S^{k(\beta)}+\tfrac{1}{2}g_{\mu\rho}\Gamma_{\nu}^{ij}\sum_{\alpha=1}^{Q}p_{\sigma}^{(\alpha)}S^{k(\beta)}\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}(N_{\mu}^{l(\beta)}p_{\sigma}^{(\beta)}S^{k(\lambda)}+p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\mu}^{l(\beta)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\mu}^{l(\gamma)}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}N_{\mu}^{i(\alpha)}(N_{\nu}^{l(\beta)}p_{\sigma}^{(\beta)}S^{k(\lambda)}+p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}N_{\nu}^{l(\beta)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{l(\gamma)}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}(N_{\nu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\mu}^{i(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\nu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\mu}^{i(\gamma)}S^{k(\beta)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\gamma)}+N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\gamma)}+N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}N_{\mu}^{i(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)}+N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)\}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

calcul de $\left[G_{\mu\nu}^{k},G_{\rho\sigma}^{k}\right]$:

$$
\left[G_{\mu\nu}^{k},G_{\rho\sigma}^{k}\right]=\left[E_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]+\left[E_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]+\left[F_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]+\left[F_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]
\tag{3.39}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]=\tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}}\{&\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{\Gamma_{\mu}^{ij}\Gamma_{\rho}^{ml}\left[p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)},p_{\sigma}^{(\beta)}S^{n(\beta)}\right]\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\}
\end{aligned}
$$

en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (B) on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]=\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{&\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\sigma=1}^{Q}(\Gamma_{\rho}^{il}\Gamma_{\mu}^{lj}-\Gamma_{\mu}^{il}\Gamma_{\rho}^{lj})p_{\sigma}^{(\alpha)}p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\left[E_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]=\tfrac{1}{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}}\{&\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}(-\Gamma_{\mu}^{ij}\left[p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)},N_{\rho}^{m(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}S^{n(\gamma)}\right]\\
&+\left[p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)},N_{\rho}^{m(\beta)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{n(\gamma)}\right]+\left[p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)},N_{\sigma}^{l(\beta)}N_{\rho}^{m(\gamma)}S^{n(\gamma)}\right]-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)\}\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)\}
\end{aligned}
$$

de même, en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (C) on peut écrire

$$
\left[E_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]=-\tfrac{1}{12}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{lj}\{N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)})
$$

$$+N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{i(\alpha)}i\epsilon_{ijk}\sum_{\gamma=1}^{Q}p_\nu^{(\beta)}S^{i(\gamma)}p_\nu^{(\beta)}$$
$$+2N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}\sum_{\lambda\neq\gamma}p_\nu^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)}p_\nu^{(\beta)}$$
$$+\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}2N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{i(\alpha)}(S^{i(\beta)}p_\nu^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}+p_\nu^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}S^{i(\beta)})$$
$$+8i\epsilon_{ijk}p_\nu^{(\alpha)}N_\sigma^{j(\alpha)}N_\rho^{l(\beta)}S^{i(\beta)}+8i\epsilon_{ijk}p_\nu^{(\alpha)}N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{j(\beta)}S^{i(\beta)}$$
$$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_\nu^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}p_\nu^{(\alpha)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$$
$$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_\nu^{(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_\nu^{(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$$
$$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_\nu^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_\rho^{l(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_\rho^{l(\gamma)}p_\nu^{(\alpha)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$$
$$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_\nu^{(\beta)}N_\rho^{l(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_\nu^{(\beta)}N_\rho^{l(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}$$
$$+(i\leftrightarrow j,\nu\leftrightarrow\mu)\}-\{\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma\} \tag{3.41}$$

ou encore

$$\begin{aligned}\left[F_{\mu\nu}^k,F_{\rho\sigma}^k\right]=&\tfrac{1}{9}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\{\left[N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\beta)},N_\rho^{m(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{n(\lambda)}\right]\\
&+\left[N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\beta)},N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{m(\lambda)}S^{n(\lambda)}\right]+\left[N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\beta)},N_\rho^{m(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{n(\lambda)}\right]\\
&+\left[N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{j(\beta)}S^{k(\beta)},N_\rho^{m(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{n(\lambda)}\right]+\left[N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{j(\beta)}S^{k(\beta)},N_\rho^{m(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{n(\lambda)}\right]\\
&+\left[N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{j(\beta)}S^{k(\beta)},N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{m(\lambda)}S^{n(\lambda)}\right]+\left[N_\nu^{j(\alpha)}N_\mu^{i(\beta)}S^{k(\beta)},N_\rho^{m(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{n(\lambda)}\right]\\
&+\left[N_\nu^{j(\alpha)}N_\mu^{i(\beta)}S^{k(\beta)},N_\rho^{m(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{n(\lambda)}\right]+\left[N_\nu^{j(\alpha)}N_\mu^{i(\beta)}S^{k(\beta)},N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{m(\lambda)}S^{n(\lambda)}\right]\end{aligned}$$

en utilisant un autre calcul analogue à celui de l'annexe (D) on peut écrire

$$\begin{aligned}\left[F_{\mu\nu}^k,F_{\rho\sigma}^k\right]=&\imath(g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma}^k-g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}^k+g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}^k-g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}^k)\\
&+\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\{+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\rho^{j(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}N_\nu^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\rho^{j(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\rho^{j(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\gamma)}N_\mu^{l(\beta)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\rho^{j(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\mu^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_\nu^{i(\beta)}S^{j(\lambda_2)}\\
&-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&+12i\epsilon_{ijk}(N_\mu^{l(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}+N_\sigma^{l(\alpha)}N_\mu^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\alpha)})S^{i(\gamma)}N_\nu^{i(\gamma)}\\
&+18\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}N_\mu^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)}\\
&+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\mu^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}N_\sigma^{l(\beta)}N_\nu^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\end{aligned}$$

$+12N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}\sum_{\lambda_2\neq\lambda_1}^{Q}(N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}+S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}N_{\mu}^{l(\gamma)})$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$

en remplaçant (3.40), (3.41), (3.42) dans (3.39) on obtient :

$\left[G_{\mu\nu}^{k},G_{\rho\sigma}^{k}\right]=\imath\left(g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma}^{k}-g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}^{k}+g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}^{k}-g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}^{k}\right)$
$+\frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\sigma=1}^{Q}(\Gamma_{\rho}^{il}\Gamma_{\mu}^{lj}-\Gamma_{\mu}^{il}\Gamma_{\rho}^{lj})p_{\sigma}^{(\alpha)}p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}$
$-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)$
$-\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{lj}\{N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)})$
$+N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}p_{\nu}^{(\beta)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)}p_{\nu}^{(\beta)})$
$+\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}2N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}(S^{i(\beta)}p_{\nu}^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}S^{i(\beta)})$
$+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\alpha)}N_{\rho}^{l(\beta)}S^{i(\beta)}+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\beta)}S^{i(\beta)}$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}$
$+(i\leftrightarrow j)\}-\{\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma\}$
$+\imath(g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma}^{k}-g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}^{k}+g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}^{k}-g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}^{k})$
$+\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\{+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$

$$
\begin{aligned}
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&+12i\epsilon_{ijk}(N_\mu^{l(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}+N_\sigma^{l(\alpha)}N_\mu^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\alpha)})S^{i(\gamma)}N_\nu^{i(\gamma)}\\
&+12\textstyle\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\rho^{j(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\textstyle\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\rho^{j(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\gamma)}N_\mu^{l(\beta)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\textstyle\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\rho^{j(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\mu^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_\nu^{i(\beta)}S^{j(\lambda_2)}\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&+12i\epsilon_{ijk}(N_\mu^{l(\alpha)}N_\sigma^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}+N_\sigma^{l(\alpha)}N_\mu^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\alpha)})S^{i(\gamma)}N_\nu^{i(\gamma)}\\
&+18\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\nu^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}N_\mu^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)}\\
&+12\textstyle\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_\mu^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}N_\sigma^{l(\beta)}N_\nu^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12N_\nu^{i(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}N_\sigma^{l(\beta)}\textstyle\sum_{\lambda_2\neq\lambda_1}^{Q}(N_\mu^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}+S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}N_\mu^{l(\gamma)})\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})\\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_\sigma^{l(\lambda)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_\sigma^{l(\lambda)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})\\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_\sigma^{l(\lambda)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\beta)}S^{j(\beta)}
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

d'un autre coté, le commutateur $\left[G^k_{\mu\nu},L_{\rho\sigma}\right]+\left[L_{\mu\nu},G^k_{\rho\sigma}\right]$ contient les termes suivants :

$$
\begin{aligned}
&\{+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha}^{Q}\sum_{\beta}^{Q}(\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho p_\nu^{(\beta)}p_\sigma^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}-\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_\rho\Gamma^{ij}_\mu p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)})\\
&-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\}
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

mais :

$p_\nu^{(\beta)}p_\sigma^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}=p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}-p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}+p_\nu^{(\beta)}p_\sigma^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}$

alors (3.44) devient :

$$\begin{array}{l}\{\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha}^{Q}\sum_{\beta}^{Q}(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}-\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij})p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}\\ +\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha}^{Q}\sum_{\beta}^{Q}\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}(p_\nu^{(\beta)}p_\sigma^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}-p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)})\\ -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\}\end{array} \tag{3.45}$$

de même le commutateur $\left[G^k_{\mu\nu},G^k_{\rho\sigma}\right]$ contient les termes suivants :

$$\begin{array}{l}\{\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}(\Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj}-\Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj})p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}\\ -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\}\end{array} \tag{3.46}$$

en faisant enfin la sommation de (3.45) et (3.46), on obtient :

$$\begin{array}{l}\{+\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}-\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}+\Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj}-\Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj})p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}\\ +\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}(P_\nu^{(\beta)}P_\sigma^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}-p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)})\\ -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\}\end{array} \tag{3.47}$$

la condition d'intégrabilité est alors mise en évidence pour éliminer les termes en facteur

On remplace alors (3.35), (3.36), (3.37), (3.43) dans (3.10) pour obtenir :

$$[M_{\mu\nu},M_{\rho\sigma}]=\imath\,(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}-g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}-g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho})+B_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{3.48}$$

avec :

$$\begin{array}{l}B_{\mu\nu\rho\sigma}=i\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{-\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}p_\sigma^{(\alpha)}p_\nu^{(\beta)}S^{k(\gamma)}\\ \qquad +\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{Q}\partial_\rho\Gamma_\nu^{ij}p_\sigma^{(\alpha)}p_\mu^{(\beta)}S^{k(\gamma)}+\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}N_\nu^{j(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\gamma)}S^{k(\lambda)}\\ \qquad +\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}N_\nu^{j(\alpha)}(N_\mu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\beta)}S^{k(\lambda)}+p_\sigma^{(\beta)}N_\mu^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)})\\ \qquad +\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}(N_\mu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}+p_\sigma^{(\beta)}N_\mu^{l(\gamma)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)})\\ \qquad +\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{jl}N_\mu^{i(\alpha)}(N_\nu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\beta)}S^{k(\lambda)}+p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)})\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}(N_{\nu}^{l(\beta)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}+p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{l(\gamma)}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}(N_{\nu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\mu}^{i(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\nu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\mu}^{i(\gamma)}S^{k(\beta)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\gamma)}+N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\gamma)}+N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}N_{\mu}^{i(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)}+N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)\}\\
&+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\partial_{\mu}\Gamma_{\rho}^{ij}(p_{\nu}^{(\beta)}p_{\sigma}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}-p_{\sigma}^{(\beta)}p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)})\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\\
&-\tfrac{1}{12}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{lj}\{N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)})\\
&+N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}p_{\nu}^{(\beta)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)}p_{\nu}^{(\beta)})\\
&+\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}2N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}(S^{i(\beta)}p_{\nu}^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}S^{i(\beta)})\\
&+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\alpha)}N_{\rho}^{l(\beta)}S^{i(\beta)}+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\beta)}S^{i(\beta)}\\
&+2\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})\\
&+2\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})\\
&+2\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})\\
&+2\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}\\
&+(i\leftrightarrow j,\mu\leftrightarrow\nu)\}-\{\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma\}\\
&+\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\{+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\textstyle\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\textstyle\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12\textstyle\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\lambda_2)}\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&+12i\epsilon_{ijk}(N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}+N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\alpha)})S^{i(\gamma)}N_{\nu}^{i(\gamma)}\\
&+18\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\mu}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q} N_\mu^{l(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}N_\sigma^{l(\beta)}N_\nu^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}\\
&+12N_\nu^{i(\alpha)}N_\rho^{j(\beta)}N_\sigma^{l(\beta)}\sum_{\lambda_2\neq\lambda_1}^{Q}(N_\mu^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}+S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}N_\mu^{l(\gamma)})\\
&-2\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})\\
&+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}\\
&-2\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_\sigma^{l(\lambda)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})\\
&+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_\sigma^{l(\lambda)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}\\
&-2\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})\\
&-2\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})\\
&+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\sigma^{l(\gamma)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_\nu^{i(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}S^{j(\beta)}\\
&+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_\rho^{j(\gamma)}N_\sigma^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_\sigma^{l(\lambda)}N_\rho^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{i(\beta)}S^{j(\beta)}
\end{aligned}
\qquad (3.49)
$$

Noton ici aussi que dans le cas ordinaire l'anomalie s'annulle .

en effet, lorsque $Q = 1(\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 1)$:

$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

IV Equivalence des deux approches :

Dans cette partie, on peut montrer qu'effectivement les termes d'anomalie sont identiques pour les deux approches $A_{\mu\nu\rho\sigma} = B_{\mu\nu\rho\sigma}$ et donc les deux approches sont equivalentes.

On a obtenu d'une part :

$$
\begin{aligned}
A_{\mu\nu\rho\sigma} = &\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}\left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}\left[p_\sigma, p_\nu S^k\right]\\
&+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{\Gamma_\rho^{il}N_\nu^j\left[N_\mu^l, p_\sigma\right]_+ S^k \;+\tfrac{i}{3}N_\nu^j\left[\Gamma_\rho^{il}N_\mu^l, p_\sigma\right]_+ S^k\\
&+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma_\rho^{il}N_\mu^l, p_\sigma\right]_+ N_\nu^j S^k + \tfrac{2i}{3}N_\mu^i\left[\Gamma_\rho^{jl}N_\nu^l, p_\sigma\right]_+ S^k\\
&+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma_\rho^{jl}N_\nu^l, p_\sigma\right]_+ N_\mu^i S^k + \tfrac{2i}{3}N_\nu^j\left[\Gamma_\rho^{il}N_\mu^l, p_\sigma\right]_+ S^k\\
&+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma_\rho^{jl}N_\nu^l, p_\sigma\right]_+\left[N_\mu^i, S^k\right]_+ \quad +\tfrac{i}{3}N_\nu^j S^k\left[\Gamma_\rho^{il}N_\mu^l, p_\sigma\right]_+\\
&+\tfrac{i}{3}N_\mu^i\left[\Gamma_\rho^{jl}N_\nu^l, p_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma_\rho^{il}N_\mu^l, p_\sigma\right]_+\left[N_\nu^j, S^k\right]_+\\
&+\tfrac{i}{3}N_\mu^i S^k\left[\Gamma_\rho^{jl}N_\nu^l, p_\sigma\right]_+\} - (\rho\leftrightarrow\sigma, \mu, \nu)\\
&-(\mu\leftrightarrow\nu, \rho, \sigma) + (\rho\leftrightarrow\sigma, \mu\leftrightarrow\nu)\\
&-\tfrac{1}{12}\Gamma_\mu^{lj}\{\left[N_\rho^l, N_\sigma^i\right]_+([p_\nu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\nu,S^j]]_+)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\ i\epsilon_{ijk}\left[p_\nu,N^i_\sigma\right]_+\left[N^l_\rho,S^r\right]_++\left[p_\nu,\left[S^i,N^i_\sigma\right]\right]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_+\\
&+\left[S^i,\left[p_\nu,N^i_\sigma\right]\right]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\nu,N^l_\rho\right]_+\left[N^i_\sigma,S^k\right]_+\\
&+\ \left[p_\nu,\left[S^i,N^l_\rho\right]\right]_+\left[N^i_\sigma,S^j\right]_++\left[S^i,\left[p_\nu,N^l_\rho\right]\right]_+\left[N^i_\sigma,S^j\right]_+\\
&+\tfrac{1}{12}\Gamma^{jl}_\nu\{\left[N^l_\rho,N^i_\sigma\right]_+(\left[p_\mu,\left[S^i,S^j\right]\right]_++\left[S^i,\left[p_\mu,S^j\right]\right]_+)\\
&+2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\mu,N^i_\sigma\right]_+\left[N^l_\rho,S^k\right]_++\left[p_\mu,\left[S^i,N^i_\sigma\right]\right]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]\\
&+\left[S^i,\left[p_\mu,N^i_\sigma\right]\right]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_++2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\mu,N^i\right]_+\left[N^i_\sigma,S^k\right]_+\\
&+\ \left[p_\mu,\left[S^i,N^i_\rho\right]\right]_+\left[N^i_\sigma,S^j\right]_++\left[S^i,\left[p_\mu,N^i_\rho\right]\right]_+\left[N^i_\sigma,S^j\right]_+\\
&-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\\
&-\tfrac{i}{18}\left[N^i_\nu,\left[N^l_\sigma,N^l_\mu N^j_\rho\right]\right]_+\epsilon_{ijk}S^k\\
&+\tfrac{1}{12}i\epsilon_{ijk}\left[N^i_\nu,\left[N^l_\sigma,N^l_\mu N^j_\rho\right]\right]_+\left[S^k,N^i_\nu\right]_+\\
&+\tfrac{1}{6}\left[N^i_\nu,\left[N^l_\sigma,N^l_\mu N^j_\rho\right]\right]_+\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^Q S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+(\left[N^l_\mu,\left[N^i_\nu,S^i\right]\right]_+S^j+\left[N^i_\nu,\left[N^l_\mu,S^i\right]\right]_+S^j)\}\\
&-\tfrac{1}{36}\left[\left[N^l_\mu,N^i_\nu\right]_+S^j,\left[N^j_\rho,N^l_\sigma S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[\left[N^l_\mu,N^i_\nu\right]_+S^j,\left[N^l_\sigma,N^j_\rho S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N^i_\nu,S^j\right]\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[N^l_\mu,S^i\right]_++\tfrac{1}{12}\ N^l_\mu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[\left[N^i_\nu,S^i\right],S^j\right]_+\\
&+\tfrac{1}{6}N^l_\mu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^Q(N^i_\nu S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}+S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N^i_\nu)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[N^l_\mu\left[S^j,N^i_\nu\right]_+,\left[N^j_\rho,N^l_\sigma S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N^l_\mu\left[N^i_\nu,S^j\right]_+,\left[N^l_\sigma,N^j_\rho S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{4}i\epsilon_{ijk}\left[N^l_\sigma,N^l_\mu N^j_\rho\right]\left[S^k,N^j_\rho\right]_+\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N^l_\mu,S^j\right]\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[N^i_\nu,S^i\right]_++\ \tfrac{1}{12}N^i_\nu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[\left[N^l_\mu,S^i\right],S^j\right]\\
&+\tfrac{1}{6}N^i_\nu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^Q(N^l_\mu S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}+S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N^l_\mu)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[N^i_\nu\left[N^l_\mu,S^j\right]_+,\left[N^j_\rho,N^l_\sigma S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N^i_\nu\left[N^l_\mu,S^j\right]_+,\left[N^l_\sigma,N^j_\rho S^i\right]\right]\\
&+(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)
\end{aligned}
$$

et d'autre part :

$$
\begin{aligned}
B_{\mu\nu\rho\sigma}=\ &i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^Q\sum_{\beta=1}^Q\{-\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}\partial_\rho\Gamma^{ij}_\mu p^{(\alpha)}_\sigma p^{(\beta)}_\nu S^{k(\gamma)}\\
&+\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\gamma=1}^Q\partial_\rho\Gamma^{ij}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma p^{(\beta)}_\mu S^{k(\gamma)}+\sum_{\gamma=1}^Q\sum_{\lambda=1}^Q\Gamma^{il}_\rho N^{j(\alpha)}_\nu N^{l(\beta)}_\mu p^{(\gamma)}_\sigma S^{k(\lambda)}\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^Q\sum_{\lambda=1}^Q\Gamma^{il}_\rho N^{j(\alpha)}_\nu(N^{l(\beta)}_\mu p^{(\beta)}_\sigma S^{k(\lambda)}+p^{(\beta)}_\sigma N^{l(\gamma)}_\mu S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^Q\sum_{\lambda=1}^Q\Gamma^{il}_\rho(N^{l(\beta)}_\mu p^{(\beta)}_\sigma N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(\lambda)}+p^{(\beta)}_\sigma N^{l(\gamma)}_\mu N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^Q\sum_{\lambda=1}^Q\Gamma^{jl}_\rho N^{i(\alpha)}_\mu(N^{l(\beta)}_\nu p^{(\beta)}_\sigma S^{k(\lambda)}+p^{(\beta)}_\sigma N^{l(\gamma)}_\nu S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^Q\sum_{\lambda=1}\Gamma^{jl}_\rho(N^{l(\beta)}_\nu p^{(\beta)}_\sigma N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(\lambda)}+p^{(\beta)}_\sigma N^{l(\gamma)}_\nu N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}\Gamma^{jl}_\rho(N^{l(\alpha)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma N^{i(\beta)}_\mu S^{k(\beta)}+N^{l(\alpha)}_\nu p^{(\beta)}_\sigma N^{i(\gamma)}_\mu S^{k(\beta)})
\end{aligned}
$$

$+\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\gamma)}+N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})$
$+\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})$
$+\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}N_{\nu}^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\gamma)}+N_{\mu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})$
$+\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{il}(N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\alpha)}N_{\nu}^{j(\beta)}S^{k(\beta)}+N_{\mu}^{l(\alpha)}p_{\sigma}^{(\beta)}N_{\nu}^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)})$
$+\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_{\rho}^{jl}N_{\mu}^{i(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)}+N_{\nu}^{l(\gamma)}p_{\sigma}^{(\lambda)})$
$-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)\}$
$+\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\partial_{\mu}\Gamma_{\rho}^{ij}(p_{\nu}^{(\beta)}p_{\sigma}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}-p_{\sigma}^{(\beta)}p_{\nu}^{(\alpha)}S^{k(\alpha)})$
$-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)$
$-\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\Gamma_{\mu}^{lj}\{N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{k(\gamma)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)})$
$+N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}p_{\nu}^{(\beta)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)}p_{\nu}^{(\beta)})$
$+\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}2N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}(S^{i(\beta)}p_{\nu}^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}S^{i(\beta)})$
$+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\alpha)}N_{\rho}^{l(\beta)}S^{i(\beta)}+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\beta)}S^{i(\beta)}$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}$
$+(i\leftrightarrow j)\}-\{\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma\}$
$+\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\{+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$
$+12i\epsilon_{ijk}(N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}+N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\alpha)})S^{i(\gamma)}N_{\nu}^{i(\gamma)}$
$+18\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\mu}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}\sum_{\lambda_2\neq\lambda_1}^{Q}(N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}+S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}N_{\mu}^{l(\gamma)})$

$$
\begin{aligned}
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\nu^{i(\alpha)} N_\mu^{l(\beta)} S^{j(\beta)} (N_\sigma^{l(\gamma)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\lambda)} + N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\lambda)} S^{i(\lambda)}) \\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} (N_\sigma^{l(\gamma)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\lambda)} + N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\lambda)} S^{i(\lambda)}) N_\nu^{i(\alpha)} N_\mu^{l(\beta)} S^{j(\beta)} \\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\nu^{i(\alpha)} N_\mu^{l(\beta)} S^{j(\beta)} (N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\gamma)} S^{i(\gamma)} + N_\sigma^{l(\lambda)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\gamma)}) \\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} (N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\gamma)} S^{i(\gamma)} + N_\sigma^{l(\lambda)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\gamma)}) N_\nu^{i(\alpha)} N_\mu^{l(\beta)} S^{j(\beta)} \\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\mu^{l(\alpha)} N_\nu^{i(\beta)} S^{j(\beta)} (N_\sigma^{l(\gamma)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\lambda)} + N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\lambda)} S^{i(\gamma)}) \\
&-2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} N_\nu^{i(\alpha)} N_\mu^{l(\beta)} S^{j(\beta)} (N_\sigma^{l(\gamma)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\lambda)} + N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\lambda)} S^{i(\lambda)}) \\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} (N_\sigma^{l(\gamma)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\lambda)} + N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\lambda)} S^{i(\lambda)}) N_\nu^{i(\alpha)} N_\mu^{l(\beta)} S^{j(\beta)} \\
&+2\textstyle\sum_{\lambda=1}^{Q} (N_\rho^{j(\gamma)} N_\sigma^{l(\gamma)} S^{i(\gamma)} + N_\sigma^{l(\lambda)} N_\rho^{j(\gamma)} S^{i(\gamma)}) N_\mu^{l(\alpha)} N_\nu^{i(\beta)} S^{j(\beta)}
\end{aligned}
$$

pour etablir l'egalité $A_{\mu\nu\rho\sigma} = B_{\mu\nu\rho\sigma}$, on developpera les differents termes de $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ dans la représentation de Green.

décomposons le terme :

$$
\begin{aligned}
\left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] &= \textstyle\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q \sum_\gamma^Q \left[p_\nu^{(\alpha)}, p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\gamma)}\right] \\
&= \textstyle\sum_{\alpha=\beta}^Q \sum_\beta^Q \left[p_\nu^{(\alpha)}, p_\sigma^{(\alpha)} S^{k(\gamma)}\right] + \sum_{\gamma=\beta}^Q \sum_\alpha^Q \left[p_\nu^{(\alpha)}, p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\beta)}\right] \\
&\quad + \textstyle\sum_{\alpha=\gamma}^Q \sum_\beta^Q \left[p_\nu^{(\alpha)}, p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\alpha)}\right] + \sum_{\alpha\neq\beta\neq\gamma}^Q \left[p_\nu^{(\alpha)}, p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\gamma)}\right]
\end{aligned}
$$

en utilisant les relations bilinéaires (3.35c), (3.35e) on trouve :

$$
\begin{aligned}
&= 2p_\sigma^{(\alpha)} p_\nu^{(\alpha)} S^{k(\gamma)} + 2p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\beta)} + 2p_\sigma^{(\beta)} p_\nu^{(\alpha)} S^{k(\beta)} + 2p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\alpha)} \\
&= 2p_\sigma^{(\alpha)} p_\nu^{(\alpha)} S^{k(\gamma)} + 2p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\beta)} - 2p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\beta)} + 2p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\alpha)} \\
&= 2p_\sigma^{(\alpha)} p_\nu^{(\alpha)} S^{k(\gamma)} + 2p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\alpha)}
\end{aligned}
$$

finalement

$$
\left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] = 2\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q \sum_\gamma^Q (p_\sigma^{(\alpha)} p_\nu^{(\alpha)} S^{k(\gamma)} + 2p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\alpha)}) \tag{3.50}
$$

de la même façon on peut écrire :

$$
\left[p_\sigma, p_\nu S^k\right] = 2\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q \sum_\gamma^Q (p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\alpha)} S^{k(\gamma)} + 2p_\sigma^{(\alpha)} p_\nu^{(\beta)} S^{k(\alpha)}) \tag{3.51}
$$

$$
\left[p_\sigma, p_\nu S^k\right] - \left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] = 2\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q (p_\nu^{(\alpha)} p_\sigma^{(\beta)} S^{k(\beta)} - 2p_\sigma^{(\alpha)} p_\nu^{(\beta)} S^{k(\alpha)}) \tag{3.52}
$$

un développement analogue au précédent nous conduit à :

$$\left[N_\rho^m, N_\nu^m N_\sigma^l\right] = 2\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q \sum_\gamma^Q (N_\nu^{m(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\beta)} + 2N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)}) \tag{3.53}$$

on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
N_\mu^i \left[N_\rho^m, N_\nu^m N_\sigma^l\right] + \left[N_\rho^m, N_\nu^m N_\sigma^l\right] N_\mu^i = {} & 2\textstyle\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q \sum_\gamma^Q \{N_\mu^{i(\gamma)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\beta)} \\
& +N_\nu^{m(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\beta)} N_\mu^{i(\gamma)} \\
& +N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} N_\mu^{i(\gamma)} \\
& +N_\mu^{i(\gamma)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)}\} \\
= {} & 2\textstyle\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q \sum_\gamma^Q \{N_\mu^{i(\gamma)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\beta)} \\
& -N_\mu^{i(\gamma)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\beta)} \\
& +N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} N_\mu^{i(\gamma)} \\
& +N_\mu^{i(\gamma)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)}\} \\
= {} & 2\textstyle\sum_\alpha^Q \sum_\beta^Q \sum_\gamma^Q \{N_\mu^{i(\gamma)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} \\
& +N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} N_\mu^{i(\gamma)}\} \\
= {} & 2\textstyle\sum_{\alpha=\beta}^Q \sum_\gamma^Q \{N_\mu^{i(\gamma)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\alpha)} \\
& +N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\alpha)} N_\mu^{i(\gamma)}\} \\
& +2\textstyle\sum_{\gamma=\beta}^Q \sum_\alpha^Q \{N_\mu^{i(\beta)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} \\
& +N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} N_\mu^{i(\beta)}\} \\
& +2\textstyle\sum_{\alpha=\gamma}^Q \sum_\beta^Q \{N_\mu^{i(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} \\
& +N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} N_\mu^{i(\alpha)}\} \\
= {} & 2\textstyle\sum_{\alpha=\beta}^Q \sum_\gamma^Q \{N_\mu^{i(\gamma)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\alpha)} \\
& -N_\mu^{i(\gamma)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\alpha)}\} \\
& -N_\mu^{i(\gamma)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\alpha)} N_\sigma^{l(\alpha)}\} \\
& +2\textstyle\sum_{\gamma=\beta}^Q \sum_\alpha^Q \{N_\mu^{i(\beta)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} \\
& +N_\mu^{i(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} 4\} \\
& +2\textstyle\sum_{\alpha=\gamma}^Q \sum_\beta^Q \{N_\mu^{i(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)} \\
& -N_\mu^{i(\alpha)} N_\rho^{m(\alpha)} N_\nu^{m(\beta)} N_\sigma^{l(\alpha)}\}
\end{aligned}$$

$$= 4 \sum_{\gamma=\beta}^{Q} \sum_{\alpha}^{Q} N_{\mu}^{i(\beta)} N_{\rho}^{m(\alpha)} N_{\nu}^{m(\beta)} N_{\sigma}^{l(\alpha)}$$

finalement :

$$N_{\mu}^{i} \left[N_{\rho}^{m}, N_{\nu}^{m} N_{\sigma}^{l}\right] + \left[N_{\rho}^{m}, N_{\nu}^{m} N_{\sigma}^{l}\right] N_{\mu}^{i} = 4 \sum_{\gamma=\beta}^{Q} \sum_{\alpha}^{Q} N_{\mu}^{i(\beta)} N_{\rho}^{m(\alpha)} N_{\nu}^{m(\beta)} N_{\sigma}^{l(\alpha)} \tag{3.54}$$

de la même façon on peut montrer que :

$$\left[N_{\mu}^{i}, N_{\nu}^{l} p_{\sigma}\right] = 2 \sum_{\alpha=1}^{Q} \sum_{\beta=1}^{Q} (N_{\nu}^{l(\alpha)} N_{\mu}^{i(\alpha)} p_{\sigma}^{(\beta)} + N_{\mu}^{i(\alpha)} N_{\nu}^{l(\beta)} p_{\sigma}^{(\alpha)}) \tag{3.55}$$

$$\left[N_{\rho}^{k}, N_{\sigma}^{l} S^{n}\right] = 2 \sum_{\alpha=1}^{Q} \sum_{\beta=1}^{Q} (N_{\sigma}^{l(\alpha)} N_{\rho}^{k(\alpha)} S^{n(\beta)} + N_{\rho}^{k(\alpha)} N_{\sigma}^{l(\beta)} S^{n(\alpha)}) \tag{3.56}$$

$$\left[N_{\sigma}^{l}, N_{\rho}^{k} S^{n}\right] = 2 \sum_{\alpha=1}^{Q} \sum_{\beta=1}^{Q} (N_{\rho}^{k(\alpha)} N_{\sigma}^{l(\alpha)} S^{n(\beta)} + N_{\sigma}^{l(\alpha)} N_{\rho}^{k(\beta)} S^{n(\alpha)}) \tag{3.57}$$

$$\left[N_{\sigma}^{l}, N_{\mu}^{l} S^{n}\right] = 2 \sum_{\alpha=1}^{Q} \sum_{\beta=1}^{Q} (N_{\mu}^{l(\alpha)} N_{\sigma}^{l(\alpha)} S^{n(\beta)} + N_{\sigma}^{l(\alpha)} N_{\mu}^{l(\beta)} S^{n(\alpha)}) \tag{3.58}$$

$$\left[N_{\nu}^{j}, p_{\sigma} S^{k}\right] = 2 \sum_{\alpha=1}^{Q} \sum_{\beta=1}^{Q} (p_{\sigma}^{(\alpha)} N_{\nu}^{j(\alpha)} S^{k(\beta)} + N_{\nu}^{j(\alpha)} p_{\sigma}^{(\beta)} S^{k(\alpha)}) \tag{3.59}$$

$$\left[N_{\mu}^{j}, p_{\sigma} S^{k}\right] = 2 \sum_{\alpha=1}^{Q} \sum_{\beta=1}^{Q} (p_{\sigma}^{(\alpha)} N_{\mu}^{j(\alpha)} S^{k(\beta)} + N_{\mu}^{j(\alpha)} p_{\sigma}^{(\beta)} S^{k(\alpha)}) \tag{3.60}$$

et on a :

$$\left[S^i, S^j\right] = i\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q} S^{k(\alpha)} + 2\sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)} \tag{3.61}$$

par substitution de toutes ces expressions dans $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ on obtient le résultat demandé, à savoir :

$$\begin{aligned}
A_{\mu\nu\rho\sigma} = B_{\mu\nu\rho\sigma} = i\epsilon_{ijk} & \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{-\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}p_\sigma^{(\alpha)}p_\nu^{(\beta)}S^{k(\gamma)} \\
& \textstyle +\frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{Q}\partial_\rho\Gamma_\nu^{ij}p_\sigma^{(\alpha)}p_\mu^{(\beta)}S^{k(\gamma)} + \sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}N_\nu^{j(\alpha)}N_\mu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\gamma)}S^{k(\lambda)} \\
& \textstyle +\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}N_\nu^{j(\alpha)}(N_\mu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\beta)}S^{k(\lambda)} + p_\sigma^{(\beta)}N_\mu^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)}) \\
& \textstyle +\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}(N_\mu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)} + p_\sigma^{(\beta)}N_\mu^{l(\gamma)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}) \\
& \textstyle +\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{jl}N_\mu^{i(\alpha)}(N_\nu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\beta)}S^{k(\lambda)} + p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{l(\gamma)}S^{k(\lambda)}) \\
& \textstyle +\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{jl}(N_\nu^{l(\beta)}p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)} + p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{l(\gamma)}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\lambda)}) \\
& \textstyle +\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_\rho^{jl}(N_\nu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(\alpha)}N_\mu^{i(\beta)}S^{k(\beta)} + N_\nu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(\beta)}N_\mu^{i(\gamma)}S^{k(\beta)}) \\
& \textstyle +\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_\mu^{l(\gamma)}p_\sigma^{(\gamma)} + N_\mu^{l(\gamma)}p_\sigma^{(\lambda)}) \\
& \textstyle +\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}(N_\mu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(\alpha)}N_\nu^{j(\beta)}S^{k(\beta)} + N_\mu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)}) \\
& \textstyle +\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}N_\nu^{j(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_\mu^{l(\gamma)}p_\sigma^{(\gamma)} + N_\mu^{l(\gamma)}p_\sigma^{(\lambda)}) \\
& \textstyle +\frac{4}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma_\rho^{il}(N_\mu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(\alpha)}N_\nu^{j(\beta)}S^{k(\beta)} + N_\mu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(\beta)}N_\nu^{j(\gamma)}S^{k(\gamma)}) \\
& \textstyle +\frac{2}{3}\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma_\rho^{jl}N_\mu^{i(\alpha)}S^{k(\beta)}(N_\nu^{l(\gamma)}p_\sigma^{(\lambda)} + N_\nu^{l(\gamma)}p_\sigma^{(\lambda)}) \\
& -(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu) - (\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma) + (\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)\} \\
& \textstyle +\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}(p_\nu^{(\beta)}p_\sigma^{(\alpha)}S^{k(\alpha)} - p_\sigma^{(\beta)}p_\nu^{(\alpha)}S^{k(\alpha)}) \\
& -(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu) - (\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma) + (\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma \\
& \textstyle -\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\Gamma_\mu^{lj}\{iN_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}\sum_{\gamma=1}^{Q}p_\nu^{(\beta)}S^{k(\gamma)} \\
& \textstyle -\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\Gamma_\mu^{lj}N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_\nu^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)} \\
& \textstyle +N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_\nu^{(\beta)}S^{i(\gamma)}p_\nu^{(\beta)} + 2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_\nu^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)}p_\nu^{(\beta)}) \\
& \textstyle +\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}2N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{i(\alpha)}(S^{i(\beta)}p_\nu^{(\gamma)}S^{j(\lambda)} + p_\nu^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}S^{i(\beta)}) \\
& +8i\epsilon_{ijk}p_\nu^{(\alpha)}N_\sigma^{j(\alpha)}N_\rho^{l(\beta)}S^{i(\beta)} + 8i\epsilon_{ijk}p_\nu^{(\alpha)}N_\rho^{l(\alpha)}N_\sigma^{j(\beta)}S^{i(\beta)} \\
& \textstyle +2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_\nu^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)} + S^{i(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}p_\nu^{(\alpha)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}) \\
& \textstyle +2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_\nu^{(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)} + p_\nu^{(\beta)}N_\sigma^{j(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_\rho^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}) \\
& \textstyle +2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_\nu^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_\rho^{l(\gamma)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)} + S^{i(\beta)}N_\rho^{l(\gamma)}p_\nu^{(\alpha)}N_\sigma^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})
\end{aligned}$$

$$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}$$
$$+(i\leftrightarrow j)\}-\{\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma\}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\{+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$$
$$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$$
$$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$$
$$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$$
$$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$$
$$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$$
$$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$$
$$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$$
$$+12i\epsilon_{ijk}(N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}+N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\alpha)})S^{i(\gamma)}N_{\nu}^{i(\gamma)}$$
$$+18\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\mu}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)}$$
$$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$$
$$+12N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}\sum_{\lambda_2\neq\lambda_1}^{Q}(N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}+S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}N_{\mu}^{l(\gamma)})$$
$$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})$$
$$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$$
$$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})$$
$$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$$
$$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$$
$$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})$$
$$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$$
$$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\beta)}$$

l'anomalie étant donc inévitable dans ce cas, on peut alors chercher les hypothèses nécessaires pour les quelles l'anomalie disparaisse en essayant d'identifier l'origine des differents termes de l'anomalie. Ecrivons alors $A_{\mu\nu\rho\sigma}$ sous la forme suivante :

$$A_{\mu\nu\rho\sigma}=A_{\mu\nu\rho\sigma}^{1}+A_{\mu\nu\rho\sigma}^{2}+A_{\mu\nu\rho\sigma}^{3}+A_{\mu\nu\rho\sigma}^{4} \tag{3.62}$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A^1_{\mu\nu\rho\sigma} &= \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho\left[p_\nu, p_\sigma S^k\right] - \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho\left[p_\sigma, p_\nu S^k\right]\\
&\quad -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\nu\leftrightarrow\rho,\nu\leftrightarrow\sigma)\\
&= \{\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}(p^{(\alpha)}_\nu p^{(\beta)}_\sigma S^{k(\alpha)} - p^{(\beta)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma S^{k(\alpha)})\\
&\quad -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\nu\leftrightarrow\rho,\nu\leftrightarrow\sigma)
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

$$
\begin{aligned}
A^2_{\mu\nu\rho\sigma} &= \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ N^j_\nu S^k + \tfrac{2i}{3}N^i_\mu\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k\\
&\quad +\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k + \tfrac{2i}{3}N^j_\nu\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k\\
&\quad +\tfrac{i}{12}p_\nu\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\mu\left[N^l_\rho, N^j_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{i}{12}p_\nu\epsilon_{ijk}\Gamma^{jl}_\mu\left[N^l_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^k\\
&\quad +(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\rho,\nu\leftrightarrow\sigma)+(\mu\leftrightarrow\sigma,\nu\leftrightarrow\rho)\}\\
&= \epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{2i(\Gamma^{il}_\rho N^{l(\alpha)}_\mu N^{j(\alpha)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma S^{k(\beta)} + \Gamma^{jl}_\rho N^{i(\alpha)}_\mu N^{l(\alpha)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma S^{k(\beta)})\\
&\quad +\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}p^{(\alpha)}_\nu\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\mu N^{i(\beta)}_\rho, N^{j(\beta)}_\sigma S^k + \sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}p^{(\alpha)}_\nu\epsilon_{ijk}\Gamma^{jl}_\mu N^{i(\beta)}_\rho, N^{l(\beta)}_\sigma S^k\\
&\quad +(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\rho,\nu\leftrightarrow\sigma)+(\mu\leftrightarrow\sigma,\nu\leftrightarrow\rho)\}
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

$$
\begin{aligned}
A^3_{\mu\nu\rho\sigma} &= \tfrac{i}{18}\epsilon_{ijk}\{(-N^i_\mu,\left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right]S^k - \left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right]N^i_\mu S^k)\\
&\quad -(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)-(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)-(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)\}\\
&= -\tfrac{i}{9}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}(N^{i(\alpha)}_\mu N^{m(\beta)}_\rho N^{m(\alpha)}_\nu N^{l(\beta)}_\sigma S^{k(\gamma)})\\
&\quad -(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)-(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)-(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)\}
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

$$
\begin{aligned}
A^4_{\mu\nu\rho\sigma} &= +\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{\Gamma^{il}_\rho N^j_\nu\left[N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k \;\; +\tfrac{i}{3}N^j_\nu\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k\\
&\quad +\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+\left[N^i_\mu, S^k\right]_+ \quad +\tfrac{i}{3}N^j_\nu S^k\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+\\
&\quad +\tfrac{i}{3}N^i_\mu\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+\left[N^j_\nu, S^k\right]_+\\
&\quad +\tfrac{i}{3}N^i_\mu S^k\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+\;\} - (\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)\\
&\quad -(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)\\
&\quad -\tfrac{1}{12}\Gamma^{lj}_\mu\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+[S^i,[p_\nu,S^j]]_+\\
&\quad +2\;i\epsilon_{ijk}\left[p_\nu, N^i_\sigma\right]_+\left[N^l_\rho, S^r\right]_+ + [p_\nu,[S^i,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho, S^j\right]_+\\
&\quad +[S^i,[p_\nu,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho, S^j\right]_+ + 2i\;\epsilon_{ijk}\left[p_\nu, N^l_\rho\right]_+\left[N^i_\sigma, S^k\right]_+\\
&\quad +\;\left[p_\nu,\left[S^i, N^l_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma, S^j]_+ + \left[S^i,\left[p_\nu, N^l_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma, S^j]_+\\
&\quad +\tfrac{1}{12}\Gamma^{jl}_\nu\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+([p_\mu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\mu,S^j]]_+)\\
&\quad +2i\;\epsilon_{ijk}\left[p_\mu, N^i_\sigma\right]_+\left[N^l_\rho, S^k\right]_+ + [p_\mu,[S^i,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho, S^j\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[S^i,[p_\mu,N^i_\sigma]\right]_+\left[N^l_\rho,S^j\right]_+ + 2i\,\epsilon_{ijk}\,[p_\mu,N^i]_+\left[N^i_\sigma,S^k\right]_+\\
&+\left[p_\mu,\left[S^i,N^i_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma,S^j]_+ + \left[S^i,\left[p_\mu,N^i_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma,S^j]_+\\
&-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\\
&+\tfrac{1}{12}i\epsilon_{ijk}\left[N^i_\nu,\left[N^l_\sigma,N^l_\mu N^j_\rho\right]\right]_+\left[S^k,N^i_\nu\right]_+\\
&+\tfrac{1}{6}\left[N^i_\nu,\left[N^l_\sigma,N^l_\mu N^j_\rho\right]\right]_+\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{Q}S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left(\left[N^l_\mu,[N^i_\nu,S^i]\right]_+S^j+\left[N^i_\nu,\left[N^l_\mu,S^i\right]\right]_+S^j)\right\}\\
&-\tfrac{1}{36}\left[\left[N^l_\mu,N^i_\nu\right]_+S^j,\left[N^j_\rho,N^l_\sigma S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[\left[N^l_\mu,N^i_\nu\right]_+S^j,\left[N^l_\sigma,N^j_\rho S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N^i_\nu,S^j\right]\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[N^l_\mu,S^i\right]_+ + \tfrac{1}{12}\,N^l_\mu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[\left[N^i_\nu,S^i\right],S^j\right]_+\\
&+\tfrac{1}{6}N^l_\mu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}(N^i_\nu S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}+S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N^i_\nu)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[N^l_\mu\left[S^j,N^i_\nu\right]_+,\left[N^j_\rho,N^l_\sigma S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N^l_\mu\left[N^i_\nu,S^j\right]_+,\left[N^l_\sigma,N^j_\rho S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{4}i\epsilon_{ijk}\left[N^l_\sigma,N^l_\mu N^j_\rho\right]\left[S^k,N^j_\rho\right]_+\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N^l_\mu,S^j\right]\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[N^i_\nu,S^i\right]_+ + \tfrac{1}{12}N^i_\nu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\left[\left[N^l_\mu,S^i\right],S^j\right]\\
&+\tfrac{1}{6}N^i_\nu\left[N^j_\rho,N^l_\sigma\right]_+\textstyle\sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}(N^l_\mu S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}+S^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N^l_\mu)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[N^i_\nu\left[N^l_\mu,S^j\right]_+,\left[N^j_\rho,N^l_\sigma S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N^i_\nu\left[N^l_\mu,S^j\right]_+,\left[N^l_\sigma,N^j_\rho S^i\right]\right]\\
&+(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)\\
=\;& i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\{+\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{il}_\rho N^{j(\alpha)}_\nu N^{l(\beta)}_\mu p^{(\gamma)}_\sigma S^{k(\lambda)}\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{il}_\rho N^{j(\alpha)}_\nu(N^{l(\beta)}_\mu p^{(\beta)}_\sigma S^{k(\lambda)}+p^{(\beta)}_\sigma N^{l(\gamma)}_\mu S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{il}_\rho(N^{l(\beta)}_\mu p^{(\beta)}_\sigma N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(\lambda)}+p^{(\beta)}_\sigma N^{l(\gamma)}_\mu N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(\lambda)})\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma^{il}_\rho(N^{l(\alpha)}_\mu p^{(\alpha)}_\sigma N^{j(\beta)}_\nu S^{k(\beta)}+N^{l(\alpha)}_\mu p^{(\beta)}_\sigma N^{j(\gamma)}_\nu S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{il}_\rho N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(\beta)}(N^{l(\gamma)}_\mu p^{(\gamma)}_\sigma+N^{l(\gamma)}_\mu p^{(\lambda)}_\sigma)\\
&+\tfrac{4}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\Gamma^{il}_\rho(N^{l(\alpha)}_\mu p^{(\alpha)}_\sigma N^{j(\beta)}_\nu S^{k(\beta)}+N^{l(\alpha)}_\mu p^{(\beta)}_\sigma N^{j(\gamma)}_\nu S^{k(\gamma)})\\
&+\tfrac{2}{3}\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}\Gamma^{jl}_\rho N^{i(\alpha)}_\mu S^{k(\beta)}(N^{l(\gamma)}_\nu p^{(\lambda)}_\sigma+N^{l(\gamma)}_\nu p^{(\lambda)}_\sigma)\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)\}\\
&+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho(p^{(\beta)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma S^{k(\alpha)}-p^{(\beta)}_\sigma p^{(\alpha)}_\nu S^{k(\alpha)})\\
&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\\
&+N^{l(\alpha)}_\rho N^{i(\alpha)}_\sigma\epsilon_{ijk}(i\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}p^{(\beta)}_\nu S^{i(\gamma)}p^{(\beta)}_\nu+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p^{(\beta)}_\nu S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)}p^{(\beta)}_\nu)\\
&+\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}2N^{l(\alpha)}_\rho N^{i(\alpha)}_\sigma(S^{i(\beta)}p^{(\gamma)}_\nu S^{j(\lambda)}+p^{(\gamma)}_\nu S^{j(\lambda)}S^{i(\beta)})\\
&+8i\epsilon_{ijk}p^{(\alpha)}_\nu N^{j(\alpha)}_\sigma N^{l(\beta)}_\rho S^{i(\beta)}+8i\epsilon_{ijk}p^{(\alpha)}_\nu N^{l(\alpha)}_\rho N^{j(\beta)}_\sigma S^{i(\beta)}\\
&+2\textstyle\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p^{(\alpha)}_\nu S^{i(\beta)}N^{j(\gamma)}_\sigma N^{l(\lambda)}_\rho S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N^{j(\gamma)}_\sigma p^{(\alpha)}_\nu N^{l(\lambda)}_\rho S^{j(\lambda)})
\end{aligned}
$$

$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}$
$+N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}\epsilon_{ijk}(i\sum_{\gamma=1}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}p_{\nu}^{(\beta)}+2\sum_{\lambda\neq\gamma}^{Q}p_{\nu}^{(\beta)}S^{i(\gamma)}S^{j(\lambda)}p_{\nu}^{(\beta)})$
$+\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}2N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{i(\alpha)}(S^{i(\beta)}p_{\nu}^{(\gamma)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\gamma)}S$
$+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\alpha)}N_{\rho}^{l(\beta)}S^{i(\beta)}+8i\epsilon_{ijk}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{j(\beta)}S^{i(\beta)}$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\sigma}^{j(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\rho}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(p_{\nu}^{(\alpha)}S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+S^{i(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}p_{\nu}^{(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)})$
$+2\sum_{\gamma=1}^{Q}\sum_{\lambda=1}^{Q}(S^{i(\alpha)}p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}+p_{\nu}^{(\beta)}N_{\rho}^{l(\gamma)}S^{i(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{j(\lambda)}$
$+(i\leftrightarrow j,\mu\leftrightarrow\nu)\}-\{\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma\}$
$+\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}\{+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\gamma)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\rho}^{j(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\lambda_2)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}$
$+12i\epsilon_{ijk}(N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}+N_{\sigma}^{l(\alpha)}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\alpha)})S^{i(\gamma)}N_{\nu}^{i(\gamma)}$
$+18\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}S^{j(\beta)}N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\mu}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)}$
$+12\sum_{\lambda_1=1}^{Q}\sum_{\lambda_2=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}N_{\nu}^{i(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}$
$+12N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\rho}^{j(\beta)}N_{\sigma}^{l(\beta)}\sum_{\lambda_2\neq\lambda_1}^{Q}(N_{\mu}^{l(\gamma)}S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}+S^{i(\lambda_1)}S^{j(\lambda_2)}N_{\mu}^{l(\gamma)})$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})$
$+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\gamma)})$
$-2\sum_{\lambda=1}^{Q}N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})$

$$
\begin{aligned}
&+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\sigma}^{l(\gamma)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\lambda)}+N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\lambda)}S^{i(\lambda)})N_{\nu}^{i(\alpha)}N_{\mu}^{l(\beta)}S^{j(\beta)}\\
&\quad+2\sum_{\lambda=1}^{Q}(N_{\rho}^{j(\gamma)}N_{\sigma}^{l(\gamma)}S^{i(\gamma)}+N_{\sigma}^{l(\lambda)}N_{\rho}^{j(\gamma)}S^{i(\gamma)})N_{\mu}^{l(\alpha)}N_{\nu}^{i(\beta)}S^{j(\beta)}
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

dans les deux chapitres suivants, des hypotheses sur les variables dynamiques seront introduite. L'ecriture (3.15) nous permettra ainsi l'identification de l'origine de chaque terme $A^{i}_{\mu\nu\rho\sigma}$ en identifiant l'hypothèse (ou la condition) qui permettra de l'éliminer.

Chapitre 4

Extension paraquantique dans le cadre d'un moment cinétique S ordinaire

I Introduction :

La première hypothèse introduite consiste à considérer l'opérateur S^k comme un moment cinétique vérifiant donc la relation ordinaire. Deux approches seront donc examinées, la première consiste à affecter à S^k une direction donnée dans le para espace de Green qu'on appellera hypothèse de Ardalan et Mansouri sur S^k. La deuxième consistera à considérer S^k comme le spin de la particule et donc c'est une notion purement quantique indépendante des coordonnées et des moments du centre de masse de la corde.

II Approche de Ardalan et Mansouri et anomalie :

II.1 Formalisme :

pour satisfaire la relation de commutation $[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk}S^k$, l'opérateur S^i devrait satisfaire des relations bilinéaires. On se propose de garder le spin S^i respectant la quantification ordinaire, et de paraquantifier les autres opérateurs (p^μ, Z_μ, α). Ceci peut être réalisé en posant :

$$S^i = \sum_{\alpha=1}^{Q} S^{i(\alpha)}\delta_{\alpha 1} \tag{4.1}$$

et les autres opérateurs sont donnés par :

$$p_\mu = \sum_{\alpha=1}^{Q} p_\mu^{(\alpha)} \tag{4.2a}$$

$$Z_\mu = \sum_{\alpha=1}^{Q} Z_\mu^{(\alpha)} \tag{4.2b}$$

$$\alpha_k = \sum_{\alpha=1}^{Q} \alpha_k^{(\beta)} \tag{4.2c}$$

ces derniers respectent les relations bilinéaires suivantes :

$$\begin{cases} \left\{\left[Z_\mu^{(\beta)}, p_\nu^{(\beta)}\right]\right\} = -ig_{\mu\nu} \\ \left[Z_\mu^{(\gamma)}, p_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \gamma \neq \beta \end{cases} \tag{4.3a}$$

$$\begin{cases} \left[S^{i(1)}, Z_\mu^{(1)}\right] = 0 \\ \left[S^{i(1)}, Z_\mu^{(\alpha)}\right]_+ = 0 \quad 1 \neq \beta \end{cases} \tag{4.3b}$$

$$\begin{cases} \left[S^{i(1)}, p_\nu^{(1)}\right] = 0 \\ \left[S^{i(1)}, p_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad 1 \neq \beta \end{cases} \tag{4.3c}$$

$$\begin{cases} \left[Z_\mu^{(\beta)}, Z_\nu^{(\beta)}\right] = 0 \\ \left[Z_\mu^{(\gamma)}, Z_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \gamma \neq \beta \end{cases} \tag{4.3d}$$

$$\begin{cases} \left[P_\mu^{(\beta)}, p_\nu^{(\beta)}\right] = 0 \\ \left[p_\mu^{(\gamma)}, p_\nu^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad \gamma \neq \beta \end{cases} \tag{4.3e}$$

$$\begin{cases} \left[S^{i(1)}, \alpha_n^{(1)}\right] = 0 \\ \left[S^{i(1)}, \alpha_n^{(\beta)}\right]_+ = 0 \quad 1 \neq \beta \end{cases} \tag{4.3f}$$

$$\begin{cases} \left[A^{(\beta)}, \alpha_n^{(\beta)}\right] = 0 \\ \left[A^{(\beta)}, \alpha_n^{(\gamma)}\right]_+ = 0 \quad \gamma \neq \beta \end{cases} \tag{4.3g}$$

avec $A \equiv Z, p$

et S^i satisfait la relation bilinéaire :

$$\left[S^{i(1)}, S^{j(1)}\right] = i\epsilon^{ijk} S^{k(1)} \tag{4.4}$$

II.2 Algèbre de Poincaré :

$M_{\mu\nu}$ dans ce cas s'écrit de la façon suivante :

$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + G^k_{\mu\nu}$

avec :

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Q}(\left[Z_{\mu}^{(\alpha)}, p_{\nu}^{(\alpha)}\right]_{+} - \left[Z_{\nu}^{(\alpha)}, p_{\mu}^{(\alpha)}\right]_{+}) \tag{4.5}$$

et

$G_{\mu\nu}^{k} = E_{\mu\nu}^{k} + F_{\mu\nu}^{k}$

où

$E_{\mu\nu}^{k} = -\frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma_{\mu}^{ij}\left[p_{\nu}^{(1)}, S^{(1)k}\right]_{+} + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma_{\nu}^{ij}\left[p_{\mu}^{(1)}, S^{(1)k}\right]_{+}$

ou encore

$$E_{\mu\nu}^{k} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma_{\mu}^{ij}p_{\nu}^{(1)}S^{(1)k} + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma_{\nu}^{ij}p_{\mu}^{(1)}S^{(1)k} \tag{4.6}$$

et

$$F_{\mu\nu}^{k} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\sum_{\alpha=1}^{Q}\left[N_{\mu}^{i(\alpha)}, N_{\nu}^{i(\alpha)}\right]_{+} S^{k(1)} \tag{4.7}$$

calcul de $[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]$ **:**

$$\left[\left[Z_{\mu}^{(\alpha)}, p_{\nu}^{(\alpha)}\right]_{+}, \left[Z_{\mu}^{(\beta)}, p_{\nu}^{(\beta)}\right]_{+}\right] = 2ig_{\nu\rho}\left[Z_{\mu}^{(\alpha)}, p_{\sigma}^{(\alpha)}\right]_{+} - 2ig_{\mu\sigma}\left[Z_{\rho}^{(\alpha)}, p_{\nu}^{(\alpha)}\right]_{+} \tag{4.8}$$

par substitution dans $[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]$ on trouve :

$$\begin{aligned}[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \Big\{ &(\tfrac{i}{2}g_{\nu\rho}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\left[Z_{\mu}^{(\alpha)}, p_{\sigma}^{(\alpha)}\right]_{+} - \left[Z_{\sigma}^{(\alpha)}, p_{\mu}^{(\alpha)}\right]_{+}) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma) \\ &+((\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma) - (\mu, \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}\end{aligned} \tag{4.9}$$

calcul de $\left[G_{\mu\nu}^{k}, L_{\rho\sigma}\right]$ **:** en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (A) on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = +i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\{(\tfrac{1}{2}\partial_\rho\Gamma^{ij}_{\mu}p^{(\sigma)}_{\sigma}p^{(1)}_{\nu}S^{k(1)} \\
- \partial_\rho\Gamma^{ij}_{\nu}p^{(\alpha)}_{\sigma}p^{(1)}_{\mu}S^{k(1)}) \ + 2\Gamma^{il}_{\rho}N^{l(\alpha)}_{\mu}N^{j(\alpha)}_{\nu}p^{(\alpha)}_{\sigma}S^{k(1)} \\
- \tfrac{1}{2}g_{\nu\rho}\Gamma^{ij}_{\mu}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}p^{(1)}_{\sigma}S^{k(1)} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_{\nu}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}p^{(\alpha)}_{\sigma}S^{k(\beta)} \\
+ 2\Gamma^{jl}_{\rho}N^{i(\alpha)}_{\mu}N^{l(\alpha)}_{\nu}p^{(\alpha)}_{\sigma}S^{k(1)} + (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

de la même façon on a :

$$
\begin{aligned}
\left[L_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = +i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\{\tfrac{1}{2}(\partial_\mu\Gamma^{ij}_{\rho}p^{(\alpha)}_{\nu}p^{(1)}_{\sigma}S^{k(1)} \\
- \partial_\nu\Gamma^{ij}_{\rho}p^{(\alpha)}_{\mu}p^{(1)}_{\sigma}S^{k(1)}) + 2\Gamma^{il}_{\mu}N^{l(\alpha)}_{\rho}N^{j(\alpha)}_{\sigma}p^{(\alpha)}_{\nu}S^{k(1)} \\
- \tfrac{1}{2}g_{\nu\rho}\Gamma^{ij}_{\mu}\textstyle\sum_{\alpha=1}p^{(1)}_{\sigma}S^{k(1)} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_{\nu}\textstyle\sum_{\alpha=1}p^{(1)}_{\sigma}S^{k(1)} \\
+ 2\Gamma^{jl}_{\nu}N^{i(\alpha)}_{\rho}N^{l(\alpha)}_{\sigma}p^{(\alpha)}_{\mu}S^{k(1)} + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

en utilisant (4.11), (4.12) on trouve

$$
\begin{aligned}
\left[L_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] + \left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = \imath\left(g_{\nu\rho}F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}F^k_{\mu\rho}\right) \\
+ i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\{\tfrac{1}{2}(\partial_\rho\Gamma^{ij}_{\mu}p^{(\sigma)}_{\sigma}p^{(1)}_{\nu}S^{k(1)} \\
- \partial_\rho\Gamma^{ij}_{\nu}p^{(\sigma)}_{\sigma}p^{(1)}_{\mu}S^{k(1)}) + 2\Gamma^{il}_{\rho}N^{l(\alpha)}_{\mu}N^{j(\alpha)}_{\nu}p^{(\alpha)}_{\sigma}S^{k(1)} \\
+ 2\Gamma^{jl}_{\rho}N^{i(\alpha)}_{\mu}N^{l(\alpha)}_{\nu}p^{(\alpha)}_{\sigma}S^{k(1)} + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma) \\
- (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)\}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

calcul de $\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right]$:

$$
\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = \left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] + \left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] \tag{4.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = -\tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln}\{\Gamma^{ij}_{\mu}\Gamma^{ml}_{\rho}\left[p^{(1)}_{\nu}S^{k(1)}, p^{(1)}_{\sigma}S^{n(1)}\right] - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \\
-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}
\end{aligned}
$$

en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (B) on peut écrire

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_\rho\Gamma^{lj}_\mu - \Gamma^{il}_\mu\Gamma^{lj}_\rho)p^{(1)}_\sigma p^{(1)}_\nu S^{k(1)} - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \\ -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = \tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\ln}\{(\Gamma^{ij}_\mu \left[p^{(1)}_\nu S^{k(1)}, \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q} \left[N^{m(\alpha)}_\rho, N^{l(\alpha)}_\sigma\right]_+ S^{n(1)}\right] + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)\}$$

en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (C) on peut écrire

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\rho\sigma}, F^k_{\mu\nu}\right] = -\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\{(\Gamma^{il}_\rho p^{(1)}_\sigma N^{l(\alpha)}_\mu N^{j(\alpha)}_\nu S^{n(1)} \\ + \Gamma^{jl}_\rho p^{(1)}_\sigma N^{i(\alpha)}_\mu N^{l(\alpha)}_\nu S^{n(1)}) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)\}\end{aligned} \tag{4.15}$$

en utilisant encore une fois un calcul analogue à celui de l'annexe (D) on peut écrire

$$\begin{aligned}\left[F^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = \imath\left(g_{\nu\rho}F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}F^k_{\mu\rho}\right) \\ + i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}(N^{i(\alpha)}_\mu N^{m(\beta)}_\rho N^{m(\alpha)}_\nu N^{l(\beta)}_\sigma S^{k(1)})\end{aligned} \tag{4.16}$$

on remplace enfin (4.15), (4.16), (4.17) dans (4.14) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = \imath\left(g_{\nu\rho}F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}F^k_{\mu\rho}\right) \\ +i\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}(N^{i(\alpha)}_\mu N^{m(\beta)}_\rho N^{m(\alpha)}_\nu N^{l(\beta)}_\sigma S^{k(1)}) \\ +(\mu \leftrightarrow \nu, \sigma \leftrightarrow \rho, m \leftrightarrow l) + (\mu \leftrightarrow \nu, \sigma, \rho, m) \\ +(\mu, \nu, \rho \leftrightarrow \sigma, m \leftrightarrow l) \\ +\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_\rho\Gamma^{lj}_\mu - \Gamma^{il}_\mu\Gamma^{lj}_\rho)p^{(1)}_\sigma p^{(1)}_\nu S^{k(1)} \\ -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \\ -\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\{(\Gamma^{il}_\rho p^{(1)}_\sigma N^{l(\alpha)}_\mu N^{j(\alpha)}_\nu S^{n(1)} \\ +\Gamma^{jl}_\rho p^{(1)}_\sigma N^{i(\alpha)}_\mu N^{l(\alpha)}_\nu S^{n(1)}) \\ +(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\end{aligned} \tag{4.17}$$

le commutateur $\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] + \left[L_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right]$ contient les termes suivants :

$$\begin{aligned}\{\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}(\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho p^{(\alpha)}_\nu p^{(1)}_\sigma S^{k(1)} - \partial_\rho\Gamma^{ij}_\mu p^{(\alpha)}_\sigma p^{(1)}_\nu S^{k(1)}) \\ -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) + (\sigma \leftrightarrow \rho, \mu, \nu)\}\end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.18) devient :

$$\begin{aligned}&\{\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha}^{Q}(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}-\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij})p_\nu^{(1)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)}\\ &+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=2}^{Q}(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}p_\nu^{(\alpha)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)}-\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}p_\sigma^{(\alpha)}p_\nu^{(1)}S^{k(1)})\\ &-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\}\end{aligned}\tag{4.19}$$

de même pour le commutateur $\left[G_{\mu\nu}^k,G_{\rho\sigma}^k\right]$ qui contient les termes suivants :

$$\begin{aligned}&\{\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}(\Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj}-\Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj})p_\nu^{(1)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)}\\ &-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\}\end{aligned}\tag{4.20}$$

en additionant (4.20) et (4.21)on obtient :

$$\begin{aligned}&\{+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}-\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}+\Gamma_\rho^{il}\Gamma_\mu^{lj}-\Gamma_\mu^{il}\Gamma_\rho^{lj})p_\nu^{(1)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)}\\ &+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\textstyle\sum_{\alpha=2}^{Q}(\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}p_\nu^{(\alpha)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)}-\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}p_\sigma^{(\alpha)}p_\nu^{(1)}S^{k(1)})\\ &-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)+(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\}\end{aligned}\tag{4.21}$$

la condition d'intégrabilité est alors mise en évidence pour éliminer les termes en facteur en remplaçant enfin (4.10), (4.11), (4.12), (4.18) dans (3.10) on obtient :

$$[M_{\mu\nu},M_{\rho\sigma}]=\imath\left(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}-g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}+g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}-g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right)+C_{\mu\nu\rho\sigma}\tag{4.22}$$

avec un terme d'anomalie :

$$\begin{aligned}C_{\mu\nu\rho\sigma}=\;&i\epsilon_{ijk}\{\textstyle\sum_{\alpha=2}^{Q}(\partial_\rho\Gamma_\mu^{ij}p_\sigma^{(\alpha)}p_\nu^{(1)}S^{k(1)}-\partial_\mu\Gamma_\rho^{ij}p_\nu^{(\alpha)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)})\\ &+\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}(\Gamma_\rho^{il}N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{j(\alpha)}p_\sigma^{(\alpha)}S^{k(1)}+\Gamma_\rho^{jl}N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(\alpha)}S^{k(1)})\\ &-(\Gamma_\rho^{il}N_\mu^{l(\alpha)}N_\nu^{j(\alpha)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)}+\Gamma_\rho^{jl}N_\mu^{i(\alpha)}N_\nu^{l(\alpha)}p_\sigma^{(1)}S^{k(1)})\\ &-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\}\\ &+i\epsilon_{ijk}\{\textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\sum_{\beta=1}^{Q}\sum_{\gamma=1}^{Q}(N_\mu^{i(\alpha)}N_\rho^{m(\beta)}N_\nu^{m(\alpha)}N_\sigma^{l(\beta)}S^{k(\gamma)})\\ &-(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)-(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)-(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)\}\end{aligned}$$

(4.23)

pour identifier les differents termes de cette anomalie on peut écrire $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ de la manière suivante :

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = A^3_{\mu\nu\rho\sigma} + C^1_{\mu\nu\rho\sigma} + C^2_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{4.24}$$

$A^3_{\mu\nu\rho\sigma}$ est défini dans (3.65)

$$\begin{aligned} C^1_{\mu\nu\rho\sigma} = \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\{(p^{(1)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma S^{k(1)} - p^{(\alpha)}_\nu p^{(1)}_\sigma S^{k(1)}) \\ -(\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\} \end{aligned} \tag{4.25}$$

$C^1_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv A^1_{\mu\nu\rho\sigma}$ $(pour\ S^k = \sum^Q S^{k(\alpha)}\delta_{\alpha 1})$

$$\begin{aligned} C^2_{\mu\nu\rho\sigma} = 2i\epsilon_{ijk} \textstyle\sum_{\alpha=1}^{Q}\{(\Gamma^{il}_\rho N^{l(\alpha)}_\mu N^{j(\alpha)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma S^{k(1)} + \Gamma^{jl}_\rho N^{i(\alpha)}_\mu N^{l(\alpha)}_\nu p^{(\alpha)}_\sigma S^{k(1)} \\ -(p^{(1)}_\sigma N^{l(\alpha)}_\mu N^{j(\alpha)}_\nu S^{k(1)} - p^{(1)}_\sigma N^{i(\alpha)}_\mu N^{l(\alpha)}_\nu S^{k(1)}) \\ -(\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\} \end{aligned} \tag{4.26}$$

$C^2_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv A^2_{\mu\nu\rho\sigma}$ $(pour\ S^k = \sum^Q S^{k(\alpha)}\delta_{\alpha 1})$

nous avons ainsi éliminé le terme d'anomalie $A^4_{\mu\nu\rho\sigma}$ et une partie des termes d'anomalie $A^1_{\mu\nu\rho\sigma}$ et $A^2_{\mu\nu\rho\sigma}$, ce qui nous permet d'identifier l'origine de ces derniers.

on peut néanmoins verifier qu'effectivement le terme d'anomalie disparait

lorsque $Q = 1$

$C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

III S^k : spin de la particule et anomalie :

III.1 Formalisme :

D'après les postulats de la mécanique quantique, le spin est une notion purement quantique, car il ne dépend pas de la position et l'impulsion comme dans le cas du moment angulaire, ça implique que :

$$[S,P]=[S,Z]=[S,\alpha]=0 \tag{4.27}$$

S^i satisfait la relation bilinéaire :

$$\left[S^i,S^j\right]=i\epsilon^{ijk}S^k \tag{4.28}$$

et les autres opérateurs (Z,p,α) satisfont les relation trilinéaires :

$$\left[Z_\mu,[p_\nu,Z_\rho]_+\right] = -2\imath g_{\mu\nu}Z_\rho \tag{4.29a}$$
$$\left[Z_\mu,[p_\nu,p_\rho]_+\right] = 2i(g_{\mu\nu}p_\rho+g_{\mu\rho}p_\nu) \tag{4.29b}$$
$$\left[p_\mu,[Z_\mu,p_\rho]_+\right] = 2ig_{\mu\nu}p_\rho \tag{4.29c}$$
$$\left[p_\mu,[Z_\nu,Z_\rho]_+\right] = 2i(g_{\mu\nu}Z_\rho+g_{\mu\rho}Z_\nu) \tag{4.29d}$$
$$\left[Z_\mu,[p_\nu,\alpha_k]_+\right] = -2\imath g_{\mu\nu}\alpha_k \qquad k\ impair \tag{4.29e}$$
$$\left[\alpha_k,[\alpha_l,A]_+\right] = 2k\delta_{k+l}A \qquad k,l\ impair \tag{4.29f}$$
$$\left[\alpha_k,[\alpha_l,\alpha_n]_+\right] = 2k(\delta_{k+l}\alpha_n+\delta_{k+n}\alpha_l) \qquad n,l,k\ impair \tag{4.29g}$$

avec $A\equiv Z,p,S$

III.2 Algèbre de Poincaré :

$M_{\mu\nu}$ prend alors la forme :

$M_{\mu\nu}=L_{\mu\nu}+G^k_{\mu\nu}$

où :

$L_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[Z_\mu,P_\nu\right]_+-\frac{1}{2}\left[Z_\nu,P_\mu\right]_+$

et

$G^k_{\mu\nu}=E^k_{\mu\nu}+F^k_{\mu\nu}$

avec :

$$E^k_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\mu}p_\nu S^k + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\nu}p_\mu S^k \tag{4.30a}$$

$$F^k_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k \tag{4.30b}$$

notons ici que l'ecriture de $F^k_{\mu\nu}$ a nécessite une symétrisation adéquate de la manière suivante :

$$\begin{aligned} N^i_\mu N^i_\nu S^k &= \tfrac{1}{6}\{\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k + \left[N^i_\mu, S^k\right]_+ N^i_\nu + \left[N^i_\nu, S^k\right]_+ N^i_\mu\} \\ &= \tfrac{1}{6}\{\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k + 2N^i_\mu N^i_\nu S^k + 2N^i_\nu N^i_\mu S^k\} \\ &= \tfrac{1}{6}\{\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k + 2\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k\} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[N^i_\mu, N^i_\nu\right]_+ S^k \end{aligned}$$

Calculons alors le commutateur de l'algèbre de Poincaré. Remarquons que $[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}]$ est déjà calculé dans le premier cas.

calcul de $\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right]$

$$\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = i\left[\partial_\rho G^k_{\mu\nu}, p_\sigma\right]_+ - \tfrac{i}{2}\left[\partial_\rho G^k_{\mu\nu}, p_\rho\right]_+$$

en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (A) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = &-\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}g_{\nu\rho}\Gamma^{ij}_\mu p_\sigma S^k + \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_\nu p_\sigma S^k \\ &+ \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{\partial_\rho\Gamma^{ij}_\nu p_\sigma p_\mu S^k - \partial_\rho\Gamma^{ij}_\nu p_\sigma p_\mu S^k \\ &+ \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{N^i_\mu\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k + \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ N^j_\nu S^k \\ &+ N^j_\nu\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k + \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k\} \\ &-(\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \end{aligned} \tag{4.31}$$

de la même façon on trouve :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\rho\sigma}, L_{\mu\nu}\right] = & -\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}g_{\sigma\mu}\Gamma^{ij}_{\rho}p_\nu S^k + \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_{\sigma}p_\nu S^k \\ & + \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{\partial_\mu\Gamma^{ij}_{\sigma}p_\nu p_\rho S^k - \partial_\mu\Gamma^{ij}_{\sigma}p_\nu p_\rho S^k \\ & + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{N^i_\rho\left[\Gamma^{jl}_{\mu}N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ S^k + \left[\Gamma^{il}_{\mu}N^l_\rho, p_\nu\right]_+ N^j_\sigma S^k \\ & + N^j_\sigma\left[\Gamma^{il}_{\mu}N^l_\rho, p_\nu\right]_+ S^k + \left[\Gamma^{jl}_{\mu}N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ N^i_\rho S^k\} \\ & -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)\end{aligned} \tag{4.32}$$

en utilisant (4.32), (4.33) on trouve :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] + \left[L_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = & \{-ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu} + ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu} - ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu} + ig_{\nu\rho}E^k_{\mu\nu} \\ & + \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{\partial_\rho\Gamma^{ij}_{\nu}p_\sigma p_\mu S^k - \partial_\rho\Gamma^{ij}_{\nu}p_\sigma p_\mu S^k \\ & + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{N^i_\mu\left[\Gamma^{jl}_{\rho}N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k + \left[\Gamma^{il}_{\rho}N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ N^j_\nu S^k \\ & + N^j_\nu\left[\Gamma^{il}_{\rho}N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k + \left[\Gamma^{jl}_{\rho}N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k\} \\ & - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) - (\mu \leftrightarrow \rho, \nu \leftrightarrow \sigma) + (\mu \leftrightarrow \sigma, \nu \leftrightarrow \rho)\}\end{aligned} \tag{4.33}$$

calcul de $\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right]$

$$\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = \left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] + \left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = & \tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\ln}\left\{\Gamma^{ij}_{\mu}\Gamma^{ml}_{\rho}\left[p_\nu S^k, p_\sigma S^n\right] - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)\right. \\ & \left.-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\right\}\end{aligned}$$

en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (B) on peut écrire :

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = & \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\left\{(\Gamma^{il}_{\rho}\Gamma^{lj}_{\mu} - \Gamma^{il}_{\mu}\Gamma^{lj}_{\rho})p_\nu p_\sigma S^k - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)\right. \\ & \left.-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\right\}\end{aligned} \tag{4.35}$$

d'un autre côté, le commutateur $\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right]$ s'écrit :

$\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = -\frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\ln}\left\{(\Gamma^{ij}_\mu\left[p_\nu S^k, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n + (\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)\right]\right\}$
de même en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (C) on peut écrire

$$\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_\mu p_\nu\left[N^i_\rho, N^j_\sigma\right]_+\left[S^k, S^n\right] + (\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu) \tag{4.36}$$

finalement :

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] + \left[E^k_{\rho\sigma}, F^k_{\mu\nu}\right] = (\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_\mu p_\nu\left[N^i_\rho, N^j_\sigma\right]_+\left[S^k, S^n\right]\\ +(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma) - (\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu) + (\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\end{aligned} \tag{4.38}$$

calcul de $\left[F^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right]$:

$\left[F^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right] = \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\ln}\left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right]$
en utilisant un calcul analogue à celui de l'annexe (D) on peut écrire

$$\begin{aligned}\left[F^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = \imath\left(g_{\nu\rho}F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}F^k_{\mu\rho}\right)\\ - i\epsilon_{ijk}(N^i_\mu\left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right] + \left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right]N^i_\mu)S^k\\ +(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l) + (\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)\\ +(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)\end{aligned} \tag{4.39}$$

on remplace (4.36), (4.37), (4.38), (4.40) dans (4.35) on obtient :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] = \imath&\left(g_{\nu\rho}F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}F^k_{\mu\rho}\right)\\ &-\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}(N^i_\mu\left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right] + \left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right]N^i_\mu)S^k\\ &+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l) + (\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)\\ &+(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)\\ &+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}(\Gamma^{il}_\rho\Gamma^{lj}_\mu - \Gamma^{il}_\mu\Gamma^{lj}_\rho)p_\nu p_\sigma S^k\\ &-(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma) + (\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma) - (\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)\\ &+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\mu\left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}N^i_\rho\left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ S^k\\ &+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ N^j_\sigma S^k + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}N^j_\sigma\left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ S^k\\ &+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k\end{aligned}$$

$$+(\mu \leftrightarrow \nu,\rho,\sigma)-(\rho \leftrightarrow \sigma,\mu,\nu)+(\mu \leftrightarrow \nu,\rho \leftrightarrow \sigma) \tag{4.40}$$

le commutateur $\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] + \left[L_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right]$ contient les termes suivants :

$$\begin{aligned} &\{+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho p_\nu p_\sigma S^k - \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_\rho\Gamma^{ij}_\mu p_\nu p_\sigma S^k \\ &- (\mu \leftrightarrow \nu,\rho,\sigma) - (\rho \leftrightarrow \sigma,\mu,\nu) + (\sigma \leftrightarrow \rho,\mu,\nu)\} \end{aligned} \tag{4.41}$$

de même pour le commutateur $\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right]$ qui contient les termes suivants :

$$\begin{aligned} &\{\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}(\Gamma^{il}_\rho\Gamma^{lj}_\mu - \Gamma^{il}_\mu\Gamma^{lj}_\rho)p_\nu p_\sigma S^k - (\mu \leftrightarrow \nu,\rho,\sigma) \\ &-(\rho \leftrightarrow \sigma,\mu,\nu) + (\sigma \leftrightarrow \rho,\mu,\nu)\} \end{aligned} \tag{4.42}$$

en regroupant ces derniers on obtient le terme suivant :

$$\begin{aligned} &\{+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_\mu\Gamma^{ij}_\rho - \partial_\rho\Gamma^{ij}_\mu + \Gamma^{il}_\rho\Gamma^{lj}_\mu - \Gamma^{il}_\mu\Gamma^{lj}_\rho)p_\nu p_\sigma S^k \\ &- (\mu \leftrightarrow \nu,\rho,\sigma) - (\rho \leftrightarrow \sigma,\mu,\nu) + (\sigma \leftrightarrow \rho,\mu,\nu)\} \end{aligned} \tag{4.43}$$

on peut alors mettre en évidence la condition d'intégrabilité pour éliminer les termes en facteur. En remplaçant finalement (4.10), (4.32), (4.33), (4.41) dans (3.10) on arrive au resultat :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \imath\left(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right) + D_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{4.44}$$

où $D_{\mu\nu\rho\sigma}$ est l'anomalie en question dans ce cas et qui est donnée par :

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu\rho\sigma} = {} & \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{N^i_\rho\left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ + \left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ N^j_\sigma \\ & +N^j_\sigma\left[\Gamma^{il}_\mu N^l_\rho, p_\nu\right]_+ + \left[\Gamma^{jl}_\mu N^l_\sigma, p_\nu\right]_+ N^i_\rho\} \\ & +\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\mu p_\nu\left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{i}{12}p_\nu\epsilon_{ijk}\Gamma^{jl}_\mu\left[N^l_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^k \\ & -(\rho \leftrightarrow \sigma,\mu,\nu) - (\mu \leftrightarrow \rho,\nu \leftrightarrow \sigma) + (\mu \leftrightarrow \sigma,\nu \leftrightarrow \rho)\} \\ & +\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{-N^i_\mu\left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right]S^k - \left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right]N^i_\mu S^k \\ & +(\mu \leftrightarrow \nu,\sigma \leftrightarrow \rho,m \leftrightarrow l)+(\mu \leftrightarrow \nu,\sigma,\rho,m)+(\mu,\nu,\rho \leftrightarrow \sigma,m \leftrightarrow l)\} \end{aligned} \tag{4.45}$$

on peut facilement l'identifier à travers la relation

$$D_{\mu\nu\rho\sigma} = A^2_{\mu\nu\rho\sigma} + A^3_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{4.46}$$

$A^2_{\mu\nu\rho\sigma}, A^3_{\mu\nu\rho\sigma}$sont définies dans (3.64) et (3.65)

Nous avons ainsi eliminé en plus du terme $A^4_{\mu\nu\rho\sigma}$ identifié auparavent, le terme $A^1_{\mu\nu\rho\sigma}$ complêt. Ceci nous permet d'identifier l'origine du terme d'anomalié $A^1_{\mu\nu\rho\sigma}$

on peut aussi noter que cette anomalie disparait dans le cas ordinaire $(Q = 1)$ puisque :

$\left[N^i_\mu, N^l_\nu p_\sigma\right] = \left[N^l_\nu, N^i_\mu p_\sigma\right] = \left[N^m_\rho, N^m_\nu N^j_\sigma\right] = 0$

alors $D_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$

Chapitre 5

Hypothèse de Ardalan et Mansouri sur le centre de masse et covariance de Poincaré :

I Formalisme :

d'après les resultats obtenus, l'anomalie qui reste sera eliminée si on impose aux variables associées au centre de masse de la corde de respecter des relations bilinéaires ordinaires et donc satisfaire la relation de commutation de l'algèbre de Poincaré $[p_\mu, p_\nu] = 0$. On adopte alors l'hypothèse de Ardalan et Mansouri sur le centre de masse de la corde, posons alors :

$$p_\mu = \sum_{\alpha=1}^{Q} p_\mu^{(\alpha)} \delta_{\alpha 1} = p_\mu^{(1)} \tag{5.1}$$

et

$$X_\mu = \sum_{\alpha=1}^{Q} X_\mu^{(\alpha)} \delta_{\alpha 1} = X_\mu^{(1)} \tag{5.2}$$

en utilisant la relation (5.1) et (5.2) on trouve :

$$Z_\mu = \sum_{\alpha=1}^{Q} Z_\mu^{(\alpha)} \delta_{\alpha 1} = Z_\mu^{(1)} \tag{5.4a}$$

$$S^i = \sum_{\alpha=1}^{Q} S^{i(\alpha)} \delta_{\alpha 1} = S^{i(1)} \tag{5.4b}$$

on peut aussi écrire :

$$N_\mu^i = N_\mu^i(P^{(1)}) = N_\mu^{i(1)} \tag{5.5}$$

et

$$\alpha_n = \sum_{\beta=1}^{Q} \alpha_n^{(\beta)} \tag{5.6}$$

ces opérateurs satisfont les relations bilinéaires :

$$\left[Z_\mu^{(1)}, p_\nu^{(1)}\right] = -ig_{\mu\nu} \tag{5.7a}$$

$$\left[S^{i(1)}, p_\nu^{(1)}\right] = 0 \tag{5.7b}$$

$$\left[Z_\mu^{(1)}, Z_\nu^{(1)}\right] = 0 \tag{5.7c}$$

$$\left[S^{i(1)}, S^{j(1)}\right] = i\epsilon_{ijk} S^{k(1)} \tag{5.7d}$$

$$\left[p_\mu^{(1)}, p_\nu^{(1)}\right] = 0 \tag{5.7e}$$

$$\left[a_n^{\mu(1)}, A^{(1)}\right] = 0 \tag{5.7f}$$

$$\left[a_n^{\mu(\beta)}, A^{(1)}\right]_+ = 0 \text{ si } \beta \neq 1 \tag{5.7g}$$

avec $A \equiv Z, p, S$

et les modes satisfont les relations trilinéaires suivantes :

$$\left[\alpha_k, [\alpha_l, \alpha_n]_+\right] = 2(k\delta_{k+l}\alpha_n + k\delta_{k+n}\alpha_l) \qquad n, l, k \textit{ impair} \tag{5.8}$$

II Algèbre de Poincaré :

$M_{\mu\nu}$ s'ecrit alors :

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + G^k_{\mu\nu} \tag{5.9}$$

avec :

$$L_{\mu\nu} = Z^{(1)}_{\mu} p^{(1)}_{\nu} - Z^{(1)}_{\nu} p^{(1)}_{\mu} \tag{5.10}$$

et

$G^k_{\mu\nu} = E^k_{\mu\nu} + F^k_{\mu\nu}$

où

$$\begin{aligned} E^k_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\mu} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)} + -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^{ij}_{\nu} p^{(1)}_{\mu} S^{k(1)} && \text{(5.11a)} \\ F^k_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} N^{i(1)}_{\mu} N^{i(1)}_{\nu} S^{k(1)} && \text{(5.11b)} \end{aligned}$$

Calcul de $[\mathbf{L}_{\boldsymbol{\mu\nu}}, \mathbf{L}_{\rho\sigma}]$:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \left[Z^{(1)}_{\mu} p^{(1)}_{\nu} - Z^{(1)}_{\nu} p^{(1)}_{\mu}, Z^{(1)}_{\rho} p^{(1)}_{\sigma} - Z^{(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\rho}\right]$$

en utilisant la relation bilinéaire (5.7a), on trouve :

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = \imath\left(g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} L_{\mu\rho}\right) \tag{5.12}$$

Calcul de $\left[\mathbf{G}^k_{\boldsymbol{\mu\nu}}, \mathbf{L}_{\rho\sigma}\right]$:

$$\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = \left[E^k_{\mu\nu} + F^k_{\mu\nu}, Z^{(1)}_{\rho} p^{(1)}_{\sigma} - Z^{(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\rho}\right]$$

en utilisant les relations bilinéaires (5.7a), (5.7b), (5.7c), (5.7e) on peut écrire :

$\left[E^k_{\mu\nu} + F^k_{\mu\nu}, Z^{(1)}_{\rho} P^{(1)}_{\sigma} - Z^{(1)}_{\sigma} P^{(1)}_{\rho}\right] = (-\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_{\rho}\Gamma^{ij}_{\mu} p^{(1)}_{\nu} p^{(1)}_{\sigma} S^{k(1)} + \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_{\rho}\Gamma^{ij}_{\nu} p^{(1)}_{\mu} p^{(1)}_{\sigma} S^{k(1)}$

$$-\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}g_{\nu\rho}\Gamma_{\mu}^{ij}p_{\sigma}^{(1)}S^{k(1)}+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}g_{\mu\rho}\Gamma_{\nu}^{ij}p_{\sigma}^{(1)}S^{k(1)})$$
$$-i\epsilon_{ijk}\Gamma_{\mu}^{il}N_{\rho}^{l(1)}N_{\sigma}^{j(1)}p_{\nu}^{(1)}S^{k(1)}$$
$$-i\epsilon_{ijk}\Gamma_{\mu}^{jl}N_{\rho}^{i(1)}N_{\sigma}^{l(1)}p_{\nu}^{(1)}S^{k(1)}$$
$$-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)$$

et donc

$$\begin{aligned}\left[G_{\mu\nu}^{k},L_{\rho\sigma}\right]+\left[L_{\mu\nu},G_{\rho\sigma}^{k}\right]=&-ig_{\nu\rho}E_{\mu\nu}^{k}+ig_{\nu\rho}E_{\mu\nu}^{k}-ig_{\nu\rho}E_{\mu\nu}^{k}+ig_{\nu\rho}E_{\mu\nu}^{k}\\&-\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_{\rho}\Gamma_{\mu}^{ij}p_{\nu}^{(1)}p_{\sigma}^{(1)}S^{k(1)}\\&+\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\partial_{\rho}\Gamma_{\nu}^{ij}p_{\mu}^{(1)}P_{\sigma}^{(1)}S^{k(1)}\\&-i\epsilon_{ijk}\Gamma_{\mu}^{il}N_{\rho}^{l(1)}N_{\sigma}^{j(1)}p_{\nu}^{(1)}S^{k(1)}\\&-i\epsilon_{ijk}\Gamma_{\mu}^{jl}N_{\rho}^{i(1)}N_{\sigma}^{l(1)}p_{\nu}^{(1)}S^{k(1)}\\&-(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)-(\rho\leftrightarrow\mu,\nu\leftrightarrow\sigma)\\&+(\rho\leftrightarrow\nu,\mu\leftrightarrow\sigma)\end{aligned}\qquad(5.13)$$

Calcul de $\left[\mathbf{G}_{\boldsymbol{\mu\nu}}^{k},\mathbf{G}_{\rho\sigma}^{n}\right]$:

$$\left[G_{\mu\nu}^{k},G_{\rho\sigma}^{k}\right]=\left[E_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]+\left[E_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]+\left[F_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]+\left[F_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]\qquad(5.14)$$

$$\begin{aligned}\left[E_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]=&\tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln}\{(\Gamma_{\mu}^{ij}p_{\nu}^{(1)}\Gamma_{\rho}^{ml}p_{\sigma}^{(1)}\left[S^{k(1)},S^{n(1)}\right]+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu,\nu)\\&+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)+(\rho\leftrightarrow\sigma,\mu\leftrightarrow\nu)\}\end{aligned}$$

on utilise un calcul analogue à celui de l'annexe (B), on écrit :

$$\begin{aligned}\left[E_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]=&\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{(\Gamma_{\rho}^{il}\Gamma_{\mu}^{lj}-\Gamma_{\mu}^{il}\Gamma_{\rho}^{lj})p_{\nu}^{(1)}p_{\sigma}^{(1)}S^{k(1)}-(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\\&-(\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[E_{\mu\nu}^{k},E_{\rho\sigma}^{k}\right]=&\tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{(\Gamma_{\rho}^{il}\Gamma_{\mu}^{lj}-\Gamma_{\mu}^{il}\Gamma_{\rho}^{lj})p_{\nu}^{(1)}p_{\sigma}^{(1)}S^{k(1)}-(\sigma\leftrightarrow\rho,\mu,\nu)\\&-(\nu\leftrightarrow\mu,\rho,\sigma)+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho\leftrightarrow\sigma)\}\end{aligned}\qquad(5.15)$$

$$\left[E_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]=\tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln}\{(-\Gamma_{\mu}^{ij}p_{\nu}^{(1)}N_{\rho}^{m(1)}N_{\sigma}^{l(1)}\left[S^{k(1)},S^{n(1)}\right])+(\mu\leftrightarrow\nu,\rho,\sigma)\}$$

de même, on utilise un calcul analogue à celui de l'annexe (C), on écrit :

$$\left[E_{\mu\nu}^{k},F_{\rho\sigma}^{k}\right]=i\epsilon_{ijk}\{(\Gamma_{\mu}^{il}N_{\rho}^{l(1)}N_{\sigma}^{j(1)}p_{\nu}^{(1)}S^{k(1)}+\Gamma_{\mu}^{jl}N_{\rho}^{i(1)}N_{\sigma}^{l(1)}p_{\nu}^{(1)}S^{k(1)})$$

$$-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)\}$$

$$\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = i\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_{\mu} N^{l(1)}_{\rho} N^{j(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)} + \Gamma^{jl}_{\mu} N^{i(1)}_{\rho} N^{l(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)})$$
$$-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \mu, \sigma \leftrightarrow \nu) + (\rho \leftrightarrow \nu, \mu \leftrightarrow \sigma)\}$$

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] + \left[F^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] &= i\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_{\mu} N^{l(1)}_{\rho} N^{j(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)} + \Gamma^{jl}_{\mu} N^{i(1)}_{\rho} N^{l(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)}) \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \mu, \sigma \leftrightarrow \nu) + (\rho \leftrightarrow \nu, \mu \leftrightarrow \sigma)\}\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\left[F^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = i\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln} N^{i(1)}_{\mu} N^{j(1)}_{\nu} N^{m(1)}_{\rho} N^{l(1)}_{\sigma} \left[S^{k(1)}, S^{n(1)}\right]$$

on utilise un calcul analogue à celui de l'annexe (D) , on trouve :

$$\left[F^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = \imath \left(g_{\nu\rho} F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} F^k_{\mu\rho}\right) \tag{5.17}$$

oen remplaçant (5.16), (5.17) et (5.18) dans (5.15)on trouve :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] &= \imath \left(g_{\nu\rho} F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} F^k_{\mu\rho}\right) \\ &\quad + \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_{\rho}\Gamma^{lj}_{\mu} - \Gamma^{il}_{\mu}\Gamma^{lj}_{\rho}) p^{(1)}_{\nu} p^{(1)}_{\sigma} S^{k(1)} - (\sigma \leftrightarrow \rho, \mu, \nu) \\ &\quad -(\nu \leftrightarrow \mu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\} \\ &\quad + i\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_{\mu} N^{l(1)}_{\rho} N^{j(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)} + \Gamma^{jl}_{\mu} N^{i(1)}_{\rho} N^{l(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)}) \\ &\quad -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \mu, \sigma \leftrightarrow \nu) + (\rho \leftrightarrow \nu, \mu \leftrightarrow \sigma)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, G^k_{\rho\sigma}\right] &= \imath \left(g_{\nu\rho} F^k_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} F^k_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} F^k_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} F^k_{\mu\rho}\right) \\ &\quad + \tfrac{i}{2}\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_{\rho}\Gamma^{lj}_{\mu} - \Gamma^{il}_{\mu}\Gamma^{lj}_{\rho}) p^{(1)}_{\nu} p^{(1)}_{\sigma} S^{k(1)} - (\sigma \leftrightarrow \rho, \mu, \nu) \\ &\quad -(\nu \leftrightarrow \mu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\} \\ &\quad + i\epsilon_{ijk}\{(\Gamma^{il}_{\mu} N^{l(1)}_{\rho} N^{j(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)} + \Gamma^{jl}_{\mu} N^{i(1)}_{\rho} N^{l(1)}_{\sigma} p^{(1)}_{\nu} S^{k(1)}) \\ &\quad -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) - (\rho \leftrightarrow \mu, \sigma \leftrightarrow \nu) + (\rho \leftrightarrow \nu, \mu \leftrightarrow \sigma)\}\end{aligned} \tag{5.18}$$

en remplaçant (5.13), (5.14) et (5.19) dans (3.10), et en utilisant la condition d'intégrabilité, on trouve :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \imath\left(g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}\right) \tag{5.19}$$

Conclusion

L'objet de ce travail consiste à étudier la possibilité d'existence d'une théorie de cordes non critiques dans le formalisme de la paraquantification. Il s'agit en particuliers d'explorer la question suivant :

De la même façon que l'extension paraquantique d'une théorie de cordes critiques a donné des paracordes critiques à des dimensions d'espace-temps exprimées en fonction de l'ordre de la paraquantification, dans quelle mesure l'extension paraquantique d'une théorie de corde non critique restera-t-elle non critiques.

Le cas le plus général qui consistera à considérer toutes les variables dynamiques (aussi bien, celle du centre de masse de la corde que celle du spin de la corde et les modes) comme opérateurs obéissant à des relations trilinéaires (extension paraquantique des relations bilinéaires) a été étudié. Nous avons alors établi par un calcul explicite que la théorie non critique est remise en cause par le calcul de l'anomalie. Un calcul analogue est aussi développé à travers la représentation de Green.

La remise en cause de la paracorde non critique ainsi définie nous a conduit à explorer la question qui consiste à identifier l'origine de cette anomalie exprimée sous la forme d'une somme de 4 termes. Différentes hypothèses (conditions) de plus en plus fortes ont été introduites.

En considérant d'abord que S est un moment cinétique satisfaisant la relation standard qu'on combinera avec les autres opérateurs à travers l'hypothèse de Ardalan et Mansouri sur l'opérateur moment cinétique. Un terme de l'anomalie est alors éliminé et donc son origine identifiée. L'étape suivante consiste à considérer le moment cinétique S comme le spin de la particule et de ce fait, S est une notion purement quantique et donc ne devrait pas dépendre des coordonnées et des moments du centre de masse de la corde, ce qui se traduit par le fait que S commute avec ces derniers. Un autre terme de l'anomalie est alors identifié est éliminé.

Il s'avère alors que pour éliminer totalement l'anomalie en question et construire une théorie de paracordes non critiques, l'hypothèse de Ardalan et Mansouri s'impose sur les coordonnées et les moments du centre de masse où seuls les modes de la corde obéiront aux relations trilinéaires. L'origine de ce qui reste de l'anomalie éliminée est ainsi identifiée.

Annexe A

Calcul de $\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right]$:

$$
\begin{aligned}
\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] &= \left[G^k_{\mu\nu}, \tfrac{1}{2}\left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+ - \tfrac{1}{2}\left[Z_\sigma, p_\rho\right]_+\right] \\
\left[G^k_{\mu\nu}, \tfrac{1}{2}\left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] &= \tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\{\tfrac{1}{2}\left[-\Gamma^{ij}_\mu\left[p_\nu, S^k\right]_+, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] + \tfrac{1}{2}\left[-\Gamma^{ij}_\nu\left[p_\mu, S^k\right]_+, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] + \tfrac{1}{3}\left[N^i_\mu\left[N^j_\nu, S^k\right]_+, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\left[N^j_\nu\left[N^i_\mu, S^k\right]_+, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] \\
&= \tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\{-\tfrac{1}{2}\left[\Gamma^{ij}_\mu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right]\left[p_\nu, S^k\right]_+ - \tfrac{1}{2}\Gamma^{ij}_\mu\left[p_\nu S^k + S^k p_\nu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left[\Gamma^{ij}_\nu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right]\left[p_\mu, S^k\right]_+ + \tfrac{1}{2}\Gamma^{ij}_\nu\left[p_\mu S^k + S^k p_\mu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\left[N^i_\mu N^j_\nu + N^j_\nu N^i_\mu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] S^k + \tfrac{1}{3}N^j_\nu\left[N^i_\mu S^k + S^k N^i_\mu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\left[N^j_\nu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right]\left[S^k, N^i_\mu\right]_+ + \tfrac{1}{3}N^i_\mu\left[N^j_\nu S^k + S^k N^j_\nu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] \\
&\quad + \tfrac{1}{3}\left[N^i_\mu, \left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right]\left[S^k, N^j_\nu\right]_+\}
\end{aligned}
$$

en utilisant les relations trilinéaires (3.1c), (3.4d) et (3.4e)

$$
\begin{aligned}
\left[G^k_{\mu\nu}, \tfrac{1}{2}\left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] &= +\tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\{\partial_\rho\Gamma^{ij}_\nu p_\sigma\left[p_\mu, S^k\right]_+ + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_\nu\left[p_\sigma, S^k\right]_+ - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\sigma\Gamma^{ij}_\nu p_\rho\left[p_\mu, S^k\right]_+ \\
&\quad - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}g_{\mu\sigma}\Gamma^{ij}_\nu\left[p_\rho, S^k\right]_+ - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\sigma N^j_\nu\left[N^l_\mu, p_\rho\right]_+ S^k \\
&\quad - \tfrac{2i}{3}N^j_\nu\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ S^k - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ N^j_\nu S^k \\
&\quad - \tfrac{2i}{3}N^i_\mu\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ S^k \\
&\quad - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ N^i_\mu S^k - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+\left[N^i_\mu, S^k\right]_+ \\
&\quad - \tfrac{i}{3}N^j_\nu S^k\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+\left[N^j_\nu, S^k\right]_+ \\
&\quad - \tfrac{i}{3}N^i_\mu S^k\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+\}
\end{aligned}
$$

en utilisant la relation :

$\partial_\rho N^i_\mu = \Gamma^{il}_\rho N^l_\mu$

on trouve :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, \tfrac{1}{2}\left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] = &+\tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\{\partial_\rho \Gamma^{ij}_\nu p_\sigma \left[p_\mu, S^k\right]_+ +\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_\nu \left[p_\sigma, S^k\right]_+ -\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\sigma \Gamma^{ij}_\nu p_\rho \left[p_\mu, S^k\right]_+\\ &-\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\mu\sigma}\Gamma^{ij}_\nu \left[p_\rho, S^k\right]_+ - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\sigma N^j_\nu \left[N^l_\mu, p_\rho\right]_+ S^k\\ &-\tfrac{2i}{3}N^j_\nu \left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ S^k - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ N^j_\nu S^k\\ &-\tfrac{2i}{3}N^i_\mu \left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ S^k\\ &-\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ N^i_\mu S^k - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ \left[N^i_\mu, S^k\right]_+\\ &-\tfrac{i}{3}N^j_\nu S^k \left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ \left[N^j_\nu, S^k\right]_+\\ &-\tfrac{i}{3}N^i_\mu S^k \left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+\}\end{aligned}$$

de la même façon on trouve :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, \tfrac{1}{2}\left[Z_\rho, p_\sigma\right]_+\right] = &+\tfrac{1}{4}\epsilon_{ijk}\{\partial_\rho \Gamma^{ij}_\nu p_\sigma \left[p_\mu, S^k\right]_+ +\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_\nu \left[p_\sigma, S^k\right]_+ -\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\sigma \Gamma^{ij}_\nu p_\rho \left[p_\mu, S^k\right]_+\\ &-\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\mu\sigma}\Gamma^{ij}_\nu \left[p_\rho, S^k\right]_+ - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\sigma N^j_\nu \left[N^l_\mu, p_\rho\right]_+ S^k\\ &-\tfrac{2i}{3}N^j_\nu \left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ S^k - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ N^j_\nu S^k\\ &-\tfrac{2i}{3}N^i_\mu \left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ S^k\\ &-\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ N^i_\mu S^k - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+ \left[N^i_\mu, S^k\right]_+\\ &-\tfrac{i}{3}N^j_\nu S^k \left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ - \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\sigma N^l_\mu, p_\rho\right]_+ \left[N^j_\nu, S^k\right]_+\\ &-\tfrac{i}{3}N^i_\mu S^k \left[\Gamma^{jl}_\sigma N^l_\nu, p_\rho\right]_+\}\end{aligned}$$

finalement :

$$\begin{aligned}\left[G^k_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}\right] = &-\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\{\partial_\rho \Gamma^{ij}_\mu p_\sigma \left[p_\nu, S^k\right]_+ - \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\nu\rho}\Gamma^{ij}_\mu \left[p_\sigma, S^k\right]_+\\ &+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\partial_\rho \Gamma^{ij}_\nu p_\sigma \left[p_\mu, S^k\right]_+ + \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk} g_{\mu\rho}\Gamma^{ij}_\nu \left[p_\sigma, S^k\right]_+\\ &+\tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Gamma^{il}_\rho N^j_\nu \left[N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k + \tfrac{2i}{3}N^j_\nu \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ S^k\\ &+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ N^j_\nu S^k + \tfrac{2i}{3}N^i_\mu \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ S^k\\ &+\tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ N^i_\mu S^k + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ \left[N^i_\mu, S^k\right]_+\\ &+\tfrac{i}{3}N^j_\nu S^k \left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ + \tfrac{i}{3}\left[\Gamma^{il}_\rho N^l_\mu, p_\sigma\right]_+ \left[N^j_\nu, S^k\right]\\ &+\tfrac{i}{3}N^i_\mu S^k \left[\Gamma^{jl}_\rho N^l_\nu, p_\sigma\right]_+ \} - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)\}\end{aligned}$$

Annexe B

Calcul de $\left[E^k_{\mu\nu}, E^n_{\rho\sigma}\right]$:

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] &= \tfrac{1}{16}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}}\{(\Gamma^{ij}_{\mu}\Gamma^{ml}_{\rho}\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, \left[p_\sigma, S^n\right]_+\right]) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) \\ &\quad +(\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\} \\ &= \tfrac{1}{16}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}}\{\Gamma^{ij}_{\mu}\Gamma^{ml}_{\rho}(\left[p_\nu S^k, \left[p_\sigma, S^n\right]_+\right] + \left[S^k p_\nu, \left[p_\sigma, S^n\right]_+\right]) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \\ &\quad -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}\end{aligned}$$

en utilisant la relation (3.4a):

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] &= \tfrac{1}{16}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}}\Gamma^{ij}_{\mu}\Gamma^{ml}_{\rho}\{(i\epsilon_{knr}p_\nu\left[p_\sigma, S^r\right]_+ + i\epsilon_{knr}p_\nu\left[p_\sigma, S^r\right]_+) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \\ &\quad -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\} \\ &= (\tfrac{i}{8}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}}\epsilon_{knr}p_\nu\left[p_\sigma, S^r\right]_+\Gamma^{ij}_{\mu}\Gamma^{ml}_{\rho}) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu) \\ &\quad -(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}\end{aligned}$$

en utilisant les relations :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\mathrm{ln}} = \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + \delta_{jm}\delta_{kl}\delta_{in} + \delta_{km}\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{im}\delta_{kl}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{il}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jl}\delta_{in} \tag{B.1}$$

$$\delta_{kn}\epsilon_{knr} = 0 \tag{B.2}$$

$$\Gamma^{mn}_{\mu} = -\Gamma^{nm}_{\mu} \tag{B.3}$$

$$\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = (\tfrac{i}{4}\epsilon_{knr}p_\nu \left[p_\sigma, S^r\right]_+ \Gamma^{nj}_\mu \Gamma^{jk}_\rho + \tfrac{i}{4}\epsilon_{knr}p_\nu \left[p_\sigma, S^r\right]_+ \Gamma^{ni}_\mu \Gamma^{ik}_\rho) - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)$$
$$-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}$$

en faisant le changement $(k \leftrightarrow n)$ dans le deuxieme terme on trouve, avec $(i, j \rightarrow l)$:

$$\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = \tfrac{i}{4}\epsilon_{knr}p_\sigma \left[p_\nu, S^r\right]_+ \Gamma^{nl}_\mu \Gamma^{lk}_\rho + \tfrac{i}{4}\epsilon_{nkr}p_\sigma \left[p_\nu, S^r\right]_+ \Gamma^{kl}_\mu \Gamma^{ln}_\rho - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)$$
$$-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}$$

en utilisant la relation $(\epsilon_{nkr} = -\epsilon_{knr})$ on obtient :

$$\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = \tfrac{i}{4}\epsilon_{knr}(\Gamma^{nl}_\mu \Gamma^{lk}_\rho - \Gamma^{kl}_\mu \Gamma^{ln}_\rho)p_\sigma \left[p_\nu, S^r\right]_+ - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)$$
$$-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}$$

en faisant le changement$(k \rightarrow i, n \rightarrow j, r \rightarrow k)$ on aboutit au résultat

$$\left[E^k_{\mu\nu}, E^k_{\rho\sigma}\right] = \tfrac{i}{4}\epsilon_{ijk}(\Gamma^{jl}_\mu \Gamma^{li}_\rho - \Gamma^{il}_\mu \Gamma^{lj}_\rho)p_\sigma \left[p_\nu, S^r\right]_+ - (\rho \leftrightarrow \sigma, \mu, \nu)$$
$$-(\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma) + (\mu \leftrightarrow \nu, \rho \leftrightarrow \sigma)\}$$

Annexe C

Calcul de $\left[E^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right]$:

$$\begin{aligned}
\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = & -\tfrac{1}{24}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln}\Gamma^{ij}_{\mu}\{\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] \\
& + \tfrac{1}{24}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\ln}\Gamma^{ij}_{\nu}\{\left[\left[p_\mu, S^k\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[\left[p_\mu, S^k\right]_+, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[\left[p_\mu, S^k\right]_+, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right]\}
\end{aligned}$$

calcul de $\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right]$

$$\begin{aligned}
\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] &= \left[p_\nu S^k + S^k p_\nu, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
&= p_\nu \left[S^k, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[p_\nu, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] S^k \\
&\quad + S^k \left[p_\nu, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[S^k, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] p_\nu \\
&= p_\nu \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[S^k, S^n\right] + \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[p_\nu, S^n\right] S^k \\
&\quad + S^k \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[p_\nu, S^n\right] + \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[S^k, S^n\right] p_\nu \\
&= \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ (\left[p_\nu, \left[S^k, S^n\right]\right]_+ + \left[S^k, \left[p_\nu, S^n\right]\right]_+)_+)
\end{aligned}$$

calcul de $\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right]$

$$\begin{aligned}
\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] &= \left[p_\nu S^k + S^k p_\nu, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] \\
&= p_\nu \left[S^k, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] + \left[p_\nu, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] S^k \\
&\quad + S^k \left[p_\nu, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] + \left[S^k, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] p_\nu
\end{aligned}$$

en utilisant la relation (3.4a) on a :

$$\begin{aligned}\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, N^l_\sigma\left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] &= p_\nu N^l_\sigma i\epsilon_{knr}\left[N^m_\rho, S^r\right]_+ i\epsilon_{knr} + p_\nu\left[S^k, N^l_\sigma\right]\left[N^m_\rho, S^n\right]_+ \\ &\quad + \left[p_\nu, N^l_\sigma\right]\left[N^m_\rho, S^n\right]_+ S^k + S^k\left[p_\nu, N^l_\sigma\right]\left[N^m_\rho, S^n\right]_+ \\ &\quad + \left[S^k, N^l_\sigma\right]\left[N^m_\rho, S^n\right]_+ p_\nu + N^l_\sigma i\epsilon_{knr}\left[N^m_\rho, S^r\right]_+ p_\nu i\epsilon_{knr} \\ &= 2i\epsilon_{knr}\left[p_\nu, N^l_\sigma\right]_+\left[N^m_\rho, S^r\right]_+ + \left[p_\nu, \left[S^k, N^l_\sigma\right]\right]_+\left[N^m_\rho, S^n\right]_+ \\ &\quad + \left[S^k, \left[p_\nu, N^l_\sigma\right]\right]_+\left[N^m_\rho, S^n\right]\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\left[\left[p_\nu, S^k\right]_+, N^l_\sigma\left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] &= \{2i\epsilon_{knr}\left[p_\nu, N^l_\sigma\right]_+\left[N^m_\rho, S^r\right]_+ + \left[p_\nu, \left[S^k, N^l_\sigma\right]\right]_+\left[N^m_\rho, S^n\right]_+ \\ &\quad + \left[S^k, \left[p_\nu, N^l_\sigma\right]\right]_+\left[N^m_\rho, S^n\right]_+\}\end{aligned} \tag{C.2}$$

en utilisant (C.1), (C.2) et les relations (B.1), (B.2), (B.3) on trouve :

$$\begin{aligned}\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] &= -\tfrac{1}{12}\Gamma^{lj}_\mu\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+([p_\nu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\nu,S^j]]_+) \\ &\quad + 2\ i\epsilon_{ijk}[p_\nu, N^i_\sigma]_+\left[N^l_\rho, S^r\right]_+ + [p_\nu,[S^i,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho, S^j\right]_+ \\ &\quad + [S^i,[p_\nu,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\nu, N^l_\rho\right]_+\left[N^i_\sigma, S^k\right]_+ \\ &\quad + \ \left[p_\nu,\left[S^i, N^l_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma, S^j]_+ \ + \left[S^i,\left[p_\nu, N^l_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma, S^j]_+ \\ &\quad + \tfrac{1}{12}\Gamma^{jl}_\nu\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+([p_\mu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\mu,S^j]]_+) \\ &\quad + 2i\ \epsilon_{ijk}[p_\mu, N^i_\sigma]_+\left[N^l_\rho, S^k\right]_+ + [p_\mu,[S^i,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho, S^j\right]_+ \\ &\quad + [S^i,[p_\mu,N^i_\sigma]]_+\left[N^l_\rho, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{ijk}[p_\mu, N^i]_+\left[N^i_\sigma, S^k\right]_+ \\ &\quad + \ \left[p_\mu,\left[S^i, N^i_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma, S^j]_+ \ + \left[S^i,\left[p_\mu, N^i_\rho\right]\right]_+[N^i_\sigma, S^j]_+ \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)\end{aligned}$$

en faisant le changement$(m \to l, k \to i, n \to j, r \to k)$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
\left[E^k_{\mu\nu}, F^k_{\rho\sigma}\right] = & -\tfrac{1}{12}\Gamma^{lj}_{\mu}\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+ ([p_\nu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\nu,S^j]]_+) \\
& + 2\ i\epsilon_{ijk}\,[p_\nu, N^i_\sigma]_+ \left[N^l_\rho, S^r\right]_+ + [p_\nu,[S^i,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ \\
& + [S^i,[p_\nu,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{ijk}\left[p_\nu, N^l_\rho\right]_+ \left[N^i_\sigma, S^k\right]_+ \\
& + \ \left[p_\nu,\left[S^i, N^l_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ \ + \left[S^i,\left[p_\nu, N^l_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ \\
& + \tfrac{1}{12}\Gamma^{jl}_{\nu}\{\left[N^l_\rho, N^i_\sigma\right]_+ ([p_\mu,[S^i,S^j]]_+ + [S^i,[p_\mu,S^j]]_+) \\
& + 2i\ \epsilon_{ijk}\,[p_\mu, N^i_\sigma]_+ \left[N^l_\rho, S^k\right]_+ + [p_\mu,[S^i,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ \\
& + [S^i,[p_\mu,N^i_\sigma]]_+ \left[N^l_\rho, S^j\right]_+ + 2i\ \epsilon_{ijk}\,[p_\mu, N^i]_+ \left[N^i_\sigma, S^k\right]_+ \\
& + \ \left[p_\mu,\left[S^i, N^i_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ \ + \left[S^i,\left[p_\mu, N^i_\rho\right]\right]_+ [N^i_\sigma, S^j]_+ \\
& - (\mu \leftrightarrow \nu, \rho, \sigma)
\end{aligned}
$$

Annexe D

Calcul de $\left[F^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right]$:

$$
\begin{aligned}
\left[F^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right] = \tfrac{1}{36}\epsilon_{ijk}\epsilon_{m\,\ln}\{ & \left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[\left[N^i_\mu, N^j_\nu\right]_+ S^k, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] + \left[N^i_\mu \left[N^j_\nu, S^n\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
& + \left[N^i_\mu \left[N^j_\nu, S^n\right]_+, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] + \left[N^i_\mu \left[N^j_\nu, S^n\right]_+, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[N^j_\nu \left[N^i_\mu, S^n\right]_+, \left[N^m_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[N^j_\nu \left[N^i_\mu, S^n\right]_+, N^m_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[N^j_\nu \left[N^i_\mu, S^n\right]_+, N^l_\sigma \left[N^m_\rho, S^n\right]_+\right]\}
\end{aligned}
$$

en utilisant les relations (B.1) et (B.2) on trouve :

$$
\begin{aligned}
\left[F^k_{\mu\nu}, F^n_{\rho\sigma}\right] = \{\tfrac{1}{36}\{ & \left[\left[N^l_\mu, N^n_\nu\right]_+ S^k, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + \left[\left[N^l_\mu, N^n_\nu\right]_+ S^k, N^l_\sigma \left[N^k_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[\left[N^l_\mu, N^n_\nu\right]_+ S^k, N^k_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] + \left[N^l_\mu \left[N^n_\nu, S^n\right]_+, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
& + \left[N^l_\mu \left[N^n_\nu, S^n\right]_+, N^k_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] + \left[N^l_\mu \left[N^n_\nu, S^n\right]_+, N^l_\sigma \left[N^k_\rho, S^n\right]_+\right] \\
& + \left[N^n_\nu \left[N^l_\mu, S^n\right]_+, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] + N^n_\nu \left[N^l_\mu, S^n\right]_+, N \\
& + \left[N^n_\nu \left[N^l_\mu, S^n\right]_+, N^l_\sigma \left[N^k_\rho, S^n\right]_+\right] + (\mu, \nu, \rho \leftrightarrow \sigma, m \leftrightarrow l) \\
& + (\mu \leftrightarrow \nu, \sigma \leftrightarrow \rho, m \leftrightarrow l) + (\mu \leftrightarrow \nu, \sigma, \rho, m)\}
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

calcul de $\left[\left[N^l_\mu, N^n_\nu\right]_+ S^k, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right]$:

$$\left[\left[N_\mu^l, N_\nu^n\right]_+ S^k, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] = \left[N_\mu^l, N_\nu^n\right]_+ \left[S^k, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] + \left[\left[N_\mu^l, N_\nu^n\right]_+, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] S^k$$

$$= \left[N_\mu^l, N_\nu^n\right]_+ \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[S^k, S^n\right]$$

$$+ \left[N_\mu^l N_\nu^n + N_\nu^n N_\mu^l, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] S^k$$

$$= N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ N_\nu^n \left[S^k, S^n\right]$$

$$+ N_\nu^n N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[S^k, S^n\right]$$

$$+ N_\mu^l \left[N_\nu^n, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] S^k$$

$$+ \left[N_\mu^l, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] N_\nu^n S^k$$

$$+ N_\nu^n \left[N_\mu^l, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] S^k$$

$$+ \left[N_\nu^n, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] N_\mu^l S^k$$

en utilisant les relations :$N_\mu^l \left[N_\rho^m, N_\sigma^l\right]_+ = \left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k - \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]$

et $[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk} S^k + 2 \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} S^{i(\alpha)} S^{j^{(\beta)}}$

$$\left[\left[N_\mu^i, N_\nu^j\right]_+ S^k, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] = i(\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k - \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]) N_\nu^n \epsilon_{knr} S^r$$

$$+2 N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ N_\nu^n \sum_{\alpha,\beta=1}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n^{(\beta)}}$$

$$+ i N_\nu^n (\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k - \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]) \epsilon_{knr} S^r$$

$$+2 N_\nu^n N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n^{(\beta)}}$$

$$+ N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\nu^n, S^n\right] S^k$$

$$+ \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\mu^l, S^n\right] N_\nu^n S^k$$

$$+ N_\nu^n \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\mu^l, S^n\right] S^k$$

$$+ \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\nu^n, S^n\right] N_\mu^l S^k$$

en utilisant la relation $\frac{1}{2}\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ = -g_{\mu\sigma}$ on aura :

$$\left[\left[N_\mu^i, N_\nu^j\right]_+ S^k, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] = -2i\epsilon_{knr} g_{\mu\sigma} N_\rho^k N_\nu^n S^r - i\left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^m\right] N_\nu^n \epsilon_{knr} S^r$$

$$-2i\epsilon_{knr} g_{\mu\sigma} N_\nu^n N_\rho^k S^r - i N_\nu^n \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right] \epsilon_{knr} S^r$$

$$+2\left[N_\mu^l, N_\nu^n\right]_+ \left[N_\rho^m, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n^{(\beta)}}$$

$$+ \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\mu^l, \left[N_\nu^n, S^n\right]\right]_+ S^k$$

$$+ \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\nu^n, \left[N_\mu^l, S^n\right]\right]_+ S^k$$

$$= -2i\epsilon_{knr} g_{\mu\sigma} \left[N_\rho^k, N_\nu^n\right]_+ S^r$$

$$- i\left[N_\nu^n, \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]\right]_+ \epsilon_{knr} S^r$$

$$+2\left[N_\nu^n, \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]\right]_+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n^{(\beta)}}$$

$$+\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\mu^l,[N_\nu^n,S^n]\right]_+S^k$$
$$+\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\nu^n,\left[N_\mu^l,S^n\right]\right]_+S^k$$

en faisant le changement $(k\to j, n\to i, r\to k, \epsilon_{knr}=-\epsilon_{nkr})$ on trouve :

$$\begin{aligned}\left[\left[N_\mu^i,N_\nu^j\right]_+S^k,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+S^n\right] = \{&2i\epsilon_{knr}g_{\mu\sigma}\left[N_\rho^j,N_\nu^i\right]_+S^k - i\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^lN_\rho^j\right]\right]_+\epsilon_{ijk}S^k\\ &+2N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+N_\nu^i\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{Q}S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}\\ &+2\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^lN_\rho^j\right]\right]_+\textstyle\sum_{\alpha,\beta=1}^{Q}S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}\\ &+\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+(\left[N_\mu^l,[N_\nu^i,S^i]\right]_+S^j+\left[N_\nu^i,\left[N_\mu^l,S^i\right]\right]_+S^j)\}\end{aligned} \tag{D.2}$$

Calcul de $\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,N_\sigma^l\left[N_\rho^k,S^n\right]_+\right]$:

en utilisant la relation :$N_\sigma^l\left[N_\rho^k,S^n\right]_+=\left[N_\sigma^l,N_\rho^k\right]_+S^n-\left[N_\rho^k,N_\sigma^lS^n\right]$:

$$\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,N_\sigma^l\left[N_\rho^k,S^n\right]_+\right]=\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,\left[N_\sigma^l,N_\rho^k\right]_+S^n-\left[N_\rho^k,N_\sigma^lS^n\right]\right]$$

$$\begin{aligned}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,N_\sigma^l\left[N_\rho^k,S^n\right]_+\right]&=\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,\left[N_\sigma^l,N_\rho^k\right]_+S^n\right]\\&-\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,\left[N_\rho^k,N_\sigma^lS^n\right]\right]\end{aligned}\tag{D.3}$$

de la même façon :

$$\begin{aligned}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,N_\rho^k\left[N_\sigma^l,S^n\right]_+\right]&=\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,\left[N_\sigma^l,N_\rho^k\right]_+S^n\right]\\&-\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^n\right]_+S^k,\left[N_\sigma^l,N_\rho^kS^n\right]\right]\end{aligned}\tag{D.4}$$

calcul de $\left[N_\mu^l\left[N_\nu^n,S^k\right]_+,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+S^n\right]$:

$$\begin{aligned}\left[N_\mu^l\left[N_\nu^n,S^k\right]_+,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+S^n\right]&=\left[N_\mu^l,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+S^k\right][N_\nu^n,S^n]_++N_\mu^l\left[\left[N_\nu^n,S^k\right]_+,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+S^n\right]\\&=\left[N_\mu^l,S^k\right]\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+[N_\nu^n,S^n]_+\\&\quad+N_\mu^l\left[N_\nu^nS^k+S^kN_\nu^n,\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+S^n\right]\\&=\left[N_\mu^l,S^k\right]\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+[N_\nu^n,S^n]_+\\&\quad+N_\mu^l\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+[N_\nu^n,S^n]S^k\\&\quad+N_\mu^lS^k\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+[N_\nu^n,S^n]\\&\quad+N_\mu^l\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+\left[S^k,S^n\right]N_\nu^n\\&\quad+N_\mu^l\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+N_\nu^n\left[S^k,S^n\right])\end{aligned}$$

en utilisant les relations : $N_\mu^l\left[N_\rho^k,N_\sigma^l\right]_+=\left[N_\mu^l,N_\sigma^l\right]_+N_\rho^k-\left[N_\sigma^l,N_\mu^lN_\rho^k\right]$

et $[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk} S^k + 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{Q} S^{i(\alpha)} S^{j(\beta)}$

$$\begin{aligned}
\left[N_\mu^l \left[N_\nu^n, S^k\right]_+, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] &= \left[N_\mu^l, S^k\right]\left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\nu^n, S^n\right]_+ + N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[\left[N_\nu^n, S^n\right], S^k\right]_+ \\
&\quad +(\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k - \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]) N_\nu^n i\epsilon_{knr} S^r \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ N_\nu^n \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n(\beta)} \\
&\quad +(\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k - \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]) i\epsilon_{knr} S^r N_\nu^n \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n(\beta)} N_\nu^n \\
&= \left[N_\mu^l, S^k\right]\left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\nu^n, S^n\right]_+ \\
&\quad + N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[\left[N_\nu^n, S^n\right], S^k\right]_+ \\
&\quad + i\epsilon_{knr} \left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k \left[S^r, N_\nu^n\right]_+ \\
&\quad - i\epsilon_{knr} \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right] \left[S^r, N_\nu^n\right]_+ \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} N_\nu^n S^{k(\alpha)} S^{n(\beta)} \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n(\beta)} N_\nu^n
\end{aligned}$$

en utilisant la relation $\frac{1}{2}\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ = -g_{\mu\sigma}$ on aura :

$$\begin{aligned}
\left[N_\mu^l \left[N_\nu^n, S^k\right]_+, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] &= -2i\epsilon_{knr} g_{\mu\sigma} N_\rho^k \left[S^r, N_\nu^n\right]_+ - i\epsilon_{knr}\left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]\left[S^r, N_\nu^n\right]_+ \\
&\quad + \left[N_\mu^l, S^k\right]\left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\nu^n, S^n\right]_+ \\
&\quad + N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \left[\left[N_\nu^n, S^n\right], S^k\right]_+ \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} N_\nu^n S^{k(\alpha)} S^{n(\beta)} \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} S^{k(\alpha)} S^{n(\beta)} N_\nu^n
\end{aligned}$$

en faisant le changement $(k \to j, n \to i, r \to k, \epsilon_{knr} = -\epsilon_{nkr})$ on trouve :

$$\begin{aligned}
\left[N_\mu^l \left[N_\nu^n, S^k\right]_+, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] &= \{2i\epsilon_{ijk} g_{\mu\sigma} N_\rho^j \left[S^k, N_\nu^i\right]_+ - i\epsilon_{ijk}\left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^j\right]\left[S^k, N_\nu^i\right]_+ \\
&\quad + \left[N_\mu^l, S^j\right]\left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+ \left[N_\nu^i, S^i\right]_+ \\
&\quad + N_\mu^l \left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+ \left[\left[N_\nu^i, S^i\right], S^j\right]_+ \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} N_\nu^i S^{i(\alpha)} S^{j(\beta)} \\
&\quad +2N_\mu^l \left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^{Q} S^{i(\alpha)} S^{j(\beta)} N_\nu^i\}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

en utilisant la relation :$N_\sigma^l \left[N_\rho^k, S^n\right]_+ = \left[N_\sigma^l, N_\rho^k\right]_+ S^n - \left[N_\rho^k, N_\sigma^l S^n\right]$:

$$\left[N_\mu^l \left[N_\nu^n, S^k\right]_+, N_\sigma^l \left[N_\rho^k, S^n\right]_+\right] = \left[N_\mu^l \left[N_\nu^n, S^k\right]_+, \left[N_\sigma^l, N_\rho^k\right]_+ S^n - \left[N_\rho^k, N_\sigma^l S^n\right]\right]$$

alors :

$$\left[N_\mu^l \left[N_\nu^n, S^k\right]_+, N_\sigma^l \left[N_\rho^k, S^n\right]_+\right] = \left[N_\mu^l \left[N_\nu^n, S^k\right]_+, \left[N_\sigma^l, N_\rho^k\right]_+ S^n\right]$$

$$-\left[\left[N^l_\mu, N^n_\nu\right]_+ S^k, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma S^n\right]\right] \quad \text{(D.6)}$$

de la même façon :

$$\left[N^l_\mu \left[N^n_\nu, S^k\right]_+, N^k_\rho \left[N^l_\sigma, S^n\right]_+\right] = \left[N^l_\mu \left[N^n_\nu, S^k\right]_+, \left[N^l_\sigma, N^k_\rho\right]_+ S^n\right]$$
$$-\left[N^l_\mu \left[N^n_\nu, S^k\right]_+, \left[N^l_\sigma, N^k_\rho S^n\right]\right] \quad \text{(D.7)}$$

calcul de $\left[N^n_\nu \left[N^l_\mu, S^n\right]_+, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right]$:

$$\begin{aligned}
\left[N^n_\nu \left[N^l_\mu, S^k\right]_+, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] &= \left[N^n_\nu, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right]\left[N^l_\mu, S^k\right]_+ \\
&\quad +N^n_\nu \left[\left[N^l_\mu, S^k\right]_+, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
&= \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[N^n_\nu, S^n\right]\left[N^l_\mu, S^k\right]_+ \\
&\quad +N^n_\nu \left[N^l_\mu S^k + S^k N^l_\mu, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
&= \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[N^n_\nu, S^n\right]\left[N^l_\mu, S^k\right]_+ \\
&\quad +N^n_\nu N^l_\mu \left[S^k, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
&\quad +N^n_\nu \left[N^l_\mu, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] S^k \\
&\quad +N^n_\nu \left[S^k, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] N^l_\mu \\
&\quad +N^n_\nu S^k \left[N^l_\mu, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] \\
&= \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[N^n_\nu, S^n\right]\left[N^l_\mu, S^k\right]_+ \\
&\quad +N^n_\nu N^l_\mu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[S^k, S^n\right] \\
&\quad +N^n_\nu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[N^l_\mu, S^n\right] S^k \\
&\quad +N^n_\nu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[S^k, S^n\right] N^l_\mu \\
&\quad +N^n_\nu S^k \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[N^l_\mu, S^n\right]
\end{aligned}$$

en utilisant la relation :$[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk} S^k + 2\sum_{\alpha\neq\beta}^Q S^{i(\alpha)} S^{j^{(\beta)}}$

$$\begin{aligned}
\left[N^n_\nu \left[N^l_\mu, S^k\right]_+, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] &= \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[N^n_\nu, S^n\right]\left[N^l_\mu, S^k\right]_+ + N^n_\nu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[\left[N^l_\mu, S^n\right], S^k\right]_+ \\
&\quad +N^n_\nu N^l_\mu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ i\epsilon_{knr} S^r \\
&\quad +2N^n_\nu N^l_\mu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^Q S^{k(\alpha)} S^{n^{(\beta)}} \\
&\quad +N^n_\nu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ i\epsilon_{knr} S^r N^l_\mu \\
&\quad +2N^n_\nu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^Q S^{k(\alpha)} S^{n^{(\beta)}} N^l_\mu
\end{aligned}$$

en utilisant la relation :$N^l_\mu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ = \left[N^l_\mu, N^l_\sigma\right]_+ N^k_\rho - \left[N^l_\sigma, N^l_\mu N^k_\rho\right]$

$$\left[N^n_\nu \left[N^l_\mu, S^k\right]_+, \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ S^n\right] = \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[N^n_\nu, S^n\right]\left[N^l_\mu, S^k\right]_+ + N^n_\nu \left[N^k_\rho, N^l_\sigma\right]_+ \left[\left[N^l_\mu, S^n\right], S^k\right]_+$$

$$+N_\nu^n(\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k - \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right])i\epsilon_{knr}S^r$$
$$+2N_\nu^n N_\mu^l \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^Q S^{k(\alpha)}S^{n^{(\beta)}}$$
$$+N_\nu^n S^r(\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ N_\rho^k - \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right])i\epsilon_{knr}S^r N_\mu^l$$
$$+2N_\nu^n \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^Q S^{k(\alpha)}S^{n^{(\beta)}}N_\mu^l$$

en utilisant la relation $\frac{1}{2}\left[N_\mu^l, N_\sigma^l\right]_+ = -g_{\mu\sigma}$ on aura :

$$\left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] = -2i\epsilon_{knr}g_{\mu\sigma}N_\rho^k\left[S^r, N_\nu^n\right]_+ - i\epsilon_{knr}\left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^k\right]\left[S^r, N_\rho^k\right]_+$$
$$+\left[N_\mu^l, S^k\right]\left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+\left[N_\nu^n, S^n\right]_+$$
$$+N_\nu^n\left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\mu^l, S^n\right], S^k\right]_+$$
$$+2N_\nu^n\left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^Q (N_\mu^l S^{k(\alpha)}S^{n^{(\beta)}} + S^{k(\alpha)}S^{n^{(\beta)}}N_\mu^l)$$

en faisant le changement $(k \to j, n \to i, r \to k, \epsilon_{knr} = -\epsilon_{nkr})$ on trouve :

$$\left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l\right]_+ S^n\right] = \{\ 2i\epsilon_{ijk}g_{\mu\sigma}N_\rho^j\left[S^k, N_\nu^i\right]_+ - i\epsilon_{ijk}\left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^j\right]\left[S^k, N_\rho^j\right]_+$$
$$+\left[N_\mu^l, S^j\right]\left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+\left[N_\nu^i, S^i\right]_+$$
$$+N_\nu^i\left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\mu^l, S^i\right], S^j\right]_+$$
$$+2N_\nu^i\left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^Q N_\mu^l S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}$$
$$+2N_\nu^i\left[N_\rho^j, N_\sigma^l\right]_+ \sum_{\alpha\neq\beta}^Q S^{i(\alpha)}S^{n^{j(\beta)}}N_\mu^l\ \} \qquad \text{(D.8)}$$

en utilisant la relation : $N_\sigma^l\left[N_\rho^k, S^n\right]_+ = \left[N_\sigma^l, N_\rho^k\right]_+ S^n - \left[N_\rho^k, N_\sigma^l S^n\right]$:

$$\left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, N_\sigma^l\left[N_\rho^k, S^n\right]_+\right] = \left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, \left[N_\sigma^l, N_\rho^k\right]_+ S^n - \left[N_\rho^k, N_\sigma^l S^n\right]\right]$$

alors :

$$\left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, N_\sigma^l\left[N_\rho^k, S^n\right]_+\right] = \left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, \left[N_\sigma^l, N_\rho^k\right]_+ S^n\right]$$
$$-\left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, \left[N_\rho^k, N_\sigma^l S^n\right]\right] \qquad \text{(D.9)}$$

de la même façon :

$$\left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, N_\rho^k\left[N_\sigma^l, S^n\right]_+\right] = \left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, \left[N_\sigma^l, N_\rho^k\right]_+ S^n\right]$$
$$-\left[N_\nu^n \left[N_\mu^l, S^k\right]_+, \left[N_\sigma^l, N_\rho^k S^n\right]\right] \qquad \text{(D.10)}$$

en remplaçant (D.2), (D.3), (D.4), (D.5), (D.6), (D.7), (D.8), (D.9) et (D.10) dans (D.1) on aura :

$$\left[F_{\mu\nu}^k, F_{\rho\sigma}^n\right] = \imath\left(g_{\nu\rho}F_{\mu\sigma}^k - g_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}^k + g_{\mu\sigma}F_{\nu\rho}^k - g_{\nu\sigma}F_{\mu\rho}^k\right)$$
$$+\frac{i}{18}\left[N_\nu^i, \left[N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^j\right]\right]_+ \epsilon_{ijk}S^k$$
$$+\frac{1}{12}i\epsilon_{ijk}\left[N_\nu^i, N_\sigma^l, N_\mu^l N_\rho^j\right]_+\left[S^k, N_\nu^i\right]_+$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{1}{6}\left[N_\nu^i,\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\right]_+\sum_{\alpha,\beta=1}^{Q} S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left(\left[N_\mu^l,\left[N_\nu^i,S^i\right]\right]_+S^j+\left[N_\nu^i,\left[N_\mu^l,S^i\right]\right]_+S^j\right)\}\\
&-\tfrac{1}{36}\left[\left[N_\mu^l,N_\nu^i\right]_+S^k,\left[N_\rho^j,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\mu^l\left[N_\nu^i,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^j S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N_\nu^i,S^j\right]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\mu^l,S^i\right]_+ +\tfrac{1}{12}\,N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\nu^i,S^i\right],S^j\right]_+\\
&+\tfrac{1}{6}N_\mu^l\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}(N_\nu^i S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}+S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}N_\nu^i)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[S^j,N_\mu^l\right]_+,\left[N_\rho^j,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^j S^i\right]\right]\\
&+\tfrac{1}{4}i\epsilon_{ijk}\left[N_\sigma^l,N_\mu^l N_\rho^j\right]\left[S^k,N_\rho^j\right]_+\\
&+\tfrac{1}{12}\left[N_\mu^l,S^j\right]\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[N_\nu^i,S^i\right]_+ +\ \tfrac{1}{12}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\left[\left[N_\mu^l,S^i\right],S^j\right]\\
&+\tfrac{1}{6}N_\nu^i\left[N_\rho^j,N_\sigma^l\right]_+\sum_{\alpha\neq\beta}^{Q}(N_\mu^l S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}+S^{i(\alpha)}S^{j^{(\beta)}}N_\mu^l)\\
&-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^j\right]_+,\left[N_\rho^j,N_\sigma^l S^i\right]\right]-\tfrac{1}{36}\left[N_\nu^i\left[N_\mu^l,S^j\right]_+,\left[N_\sigma^l,N_\rho^j S^i\right]\right]\\
&+(\mu,\nu,\rho\leftrightarrow\sigma,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma\leftrightarrow\rho,m\leftrightarrow l)+(\mu\leftrightarrow\nu,\sigma,\rho,m)
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] F. Ardalan and F. Mansouri : Phys. Rev. D9 (1974) 3341.

[2] N. Belaloui and H. Bennacer : Czech. J. Phys. 53 (2003) 769.

[3] N. Belaloui and H. Bennacer : Czech. J. Phys. 54 (2004) 621..

[4] N. Belaloui, L. Khodja and H. Bennacer : JINR, Dubna, 2004 ISBN 5-9530-0069-3.

[5] N. Belaloui and L.Khodja, AJMP, vol.3, No :1(2006) 171-180.

[6] N. Belaloui and L.Khodja, AIP Conference Proceedings 881 (2007) 267-278

[7] I.N. Nikitin, Sov. J. Nucl. Phys. 56, 1283 (1993).

[8] .V. I. Borodulin, O. L. Zorin, G. P. Pron'ko, A. V. Razumov and L. D. Solov'ev, Theor. Math. Phys. 65, 1050(1986)-

[9] I.Nikitin, "String theory in Lorentz-invariant light cone gauge-I", preprint hep-th/9906003,

[10] S.Klimenko, I.Nikitin, "Exotic solutions in string theory", preprint hep-th/9906050

[11] Pronko G.P., Razumov A.V. // Theor.Math.Phys. 56,2 (1983) p.192.

[12] I.N. Nikitin, Theor. Math. Phys. 109, 1400 (1996)

[13] I. Nikitin, L. Nikitina, String theory in Lorentzinvariant light cone gauge - II, hep-th/0301204

[14] I.Nikitin, "String theory in Lorentz-invariant light cone gauge-II", preprint hep-th/0301204

[15] I.Nikitin, "String theory in Lorentz-invariant time like gauge", preprint hep-th/9907196

[16] V.I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics,Moscow : Nauka 1979

[17] I.Nikitin, "String theory in Lorentz-invariant time like gauge", preprint hep-th/9907196

[18] I.Nikitin, "quantization of non- critical bosonic open string theory", preprint hep-th/0401002

[19] S.V.Klimenko, I.N.Nikitin, V.V.Talanov,"Singularities on the World Sheets of Open Relativistic Strings",preprint hep-th/9505081

[20] S.V.Klimenko, I.N.Nikitin,"non- critical string theory : classical and quantum aspect, Nova Science Pub, New York 2006, ISBN 1-59454-267-8

[21] M.Yu.Pozdeev, G.P.Pron'ko and A.V.Razumov. // Theor.Math.Phys. 58,3 (1984) p.377

[22] M.Kaku, *Introduction to Superstings*, Spinger-Verlag 1990.

[23] M.B.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, *Supersting Theory*, Vol.I, Cambridge University Press 1987.

[24] J.Polchinski, *Sting Theory*, Vol.I, II ; Cambridge University Press 1998.

[25] E.P.Wigner, Phys.Rev. 77, (1950) 711.

[26] Y.Ohnuki, S.Kamefuchi, *Quantum Field Theory and parastatistics*, Springer-Verlag, 1982.

[27] J.H Schwarz, *Dual Resonance Theory*, Physics Reports 8C (1973) 269.

[28] J.Sherk, *An Introduction to The Theory of Dual Models and Strings*, Rev.Mod.Phys. 47 (1975) 123.

[29] L.Brink, J.H.Schwarz and J.Sherk, Nucl.Phys. B121 (1977) 77.

[30] J.H.Schwarz, *Supersting Theory*, Physics Reports, Vol.89. (1982) 224

[31] F. Ardalan and F. Mansouri : Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2456.

[32] N.Belaloui, Thèse de Doctorat d'état, Novembre 1998, Constantine

[33] Elias Kiritsis, CERN-TH/97-218 (1997), arXiv : hep-th/9709062 v2.