

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :.....

N° de série :.....

MEMOIRE

**PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER
EN PHYSIQUE**

Spécialité : PHYSIQUE ENERGETIQUE

Option : PHOTOTHERMIQUE

THEME

**ETUDE ET SIMULATION D'UN ECOULEMENT
AUTOUR D'UNE POCHE DE GAZ.**

**Présenté par : BOULECHFAR Hichem
Soutenu le : 22 / 02 / 2008**

Devant le jury :

Président : A. Chaker Prof. Univ. Mentouri Constantine

Rapporteur : L. Bahi Prof. Univ. Mentouri Constantine

Examineurs : O. Kolai M.C. Univ. Mentouri Constantine

N. Attaf M.C.. Univ. Mentouri Constantine

Remerciements

Au terme de cette étude, j'adresse mes remerciements à mon encadreur Mr : Lakhdar Bahi professeur à l'université Mentouri, qui m'a aidé avec son savoir et sa patience pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à remercier Mme : Abla Chaker professeur à l'université de Mentouri pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de ma thèse.

Je tiens à remercier Mrs : Omar Kolai et Nadir Attaf, maîtres de conférence à l'université Mentouri de Constantine d'avoir accepté d'être membre de jury de ma thèse.

Je remercie vivement Melle Samia Benattalah qui m'a proposé ce sujet et qui m'a ouvert ces portes pour la réalisation de ce travail.

Je remercie également Mr : Abderhafid Bouncer pour son aide considérable et sa générosité et pour son temps précieux qui m'a consacré.

Je remercie Mr : Farid Berrahil pour son aide et pour ses conseils et son encouragement.

Je ne cesse de remercier ma mère et mon père pour leur effort et soutien qui m'ont apporté durant toutes ces années.

Je tiens à remercier particulièrement ma très chère épouse qui m'a aidé à finaliser ce travail dans des conditions très difficiles.

Nomenclature.

Fr : Nombre de Froude

g : Gravité

P : Pression

L : Langueur

LLS : Langueur du bouchon liquide

LTB : Langueur de la bulle de Taylor

D : Diamètre de la conduite

u : Vitesse

U : Vitesse moyenne

Re : Nombre de Reynolds

R : Rayon de la courbure

G : Gaz

i : Interfacial

L : Liquide

TB : Bulle de Taylor

x : Direction axiale

y : Direction radiale

Letters Greques

α : Coefficient de la transformation

β : Coefficient de la transformation

σ : Tension superficielle

ρ : Densité

μ : Viscosité

τ : Contrainte de cisaillement

Sommaire

Introduction générale.

Nomenclature.

Chapitre 1 : Etude bibliographique.

1-1 Contexte général des écoulements diphasiques.....	(3)
1-2 Domaines d'application.....	(3)
1-3 Les différents types de l'écoulement gaz-liquide.....	(5)
1-4 Bibliographie sur la bulle de Taylor	(8)

Chapitre 2 : Formulation mathématique.

2-1 Généralités.....	(12)
2-2 Rappel mathématique.....	(13)
2-2-1 Théorème de transport de Reynolds.....	(13)
2-2-2 Théorème d'Ostrogradski (Théorème de Gauss).....	(13)
2-3 Application à l'écoulement monophasique.....	(14)
2-3-1 Bilan de masse.....	(14)
2-3-2 Bilan de quantité de mouvement.....	(15)
2-3-3 Bilan d'énergie totale.....	(15)
2-3-4 Évolution de l'entropie.....	(16)
2-4 Application à l'écoulement diphasique.....	(16)
2-4-2 Bilan de masse.....	(16)
2-4-3 Bilan de quantité de mouvement.....	(18)
2-4-4 Bilan d'énergie totale.....	(18)
2-4-5 Evolution de l'entropie.....	(19)

2-5	Equations phasiques.....	(19)
2-6	Conditions d'interface (Equations diphasiques).....	(20)
2-7	Géométrie du problème.....	(21)
2-8	Condition aux limites.....	(22)
2-9	Restriction au cas étudié.....	(23)

Chapitre 3 : Transformation et maillage.

3-1	Généralités.....	(25)
3-2	Système d'équations elliptiques.....	(27)
3-3	La résolution numérique du système d'équations.....	(29)
3-3-1	La discrétisation du système d'équations elliptiques.....	(29)
3-3-2	La solution du système d'équations algébriques.....	(35)
3-4	La transformation des équations de l'écoulement.....	(37)
3-4-1	Les expressions mathématiques de transformation.....	(39)
3-4-2	La transformation des équations phasiques.....	(39)
3-4-3	La transformation des équations diphasiques.....	(42)

Chapitre 4 : Résolution numérique.

4-1	la méthode numérique de résolution.....	(44)
4-2	la discrétisation de l'équation générale de transport.....	(44)
4-2.1	Discrétisation de l'équation de continuité.....	(46)
4-2.2	Discrétisation de l'équation générale de quantité de mouvement.....	(46)
4-2.2.1	Discrétisation du terme convectif.....	(47)
4-2.2.2	Discrétisation du terme diffusif.....	(48)
4-2.2.3	Discrétisation du terme source.....	(49)
4-2.3	L'équation de discrétisation de la pression.....	(52)
4-2.4	Conditions aux limites.....	(61)

4-2-6 La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation.....(63)

Chapitre 5 : Résultats et discussion.

5-1 La distribution du champ de la vitesse.....(66)

5-2 Les différents profils de la vitesse axiale.....(70)

5-3 Les différents profils de la vitesse radiale.....(71)

5-4 L'effet de l'épaisseur du film liquide sur le profil de la vitesse axiale.....(72)

5-5 Les différents profils de la contrainte pariétale.....(73)

5-6 L'effet de l'épaisseur du film liquide sur le profil de la contrainte pariétale.....(76)

5-7 Explication du caractère décroissant de la contrainte dans la région laminaire.....(77)

Conclusion et perspectives.

Références bibliographiques.

Introduction générale

La majorité des projets de recherches qui représentent plus d'importance ce sont ceux qui s'orientent vers un domaine industriel. Dans ce domaine on affronte de problèmes réels de nature complexes et pluridisciplinaires. Sans l'industrie, la recherche scientifique ne peut guère survivre. Notre étude est orientée vers un sujet d'actualité et d'un grand intérêt industriel, c'est le cas des écoulements diphasiques.

Les écoulements diphasiques peuvent se présenter selon les phases en présence (liquide, solide, gaz ou plasma (gaz ionisé)). Par exemple :

- Mélange de deux liquides non miscibles (échangeurs à contact direct),
- Mélange solide liquide (transport de boue, etc.),
- Mélange gaz solide ou gaz liquide (ébullition).

Dans le cadre de ce travail, on s'intéresse aux écoulements gaz-liquide qui représentent la majorité des travaux scientifiques dans ce domaine et que les processus industriels ont suscités un développement important de recherches théoriques et expérimentales ainsi que numériques, notamment les trois principaux domaines suivants : Génie chimique, génie nucléaire et le génie pétrolier.

Notre travail concerne l'étude d'un écoulement laminaire de liquide (Eau) autour d'une poche de gaz isolée (grande cavité gazeuse) se déplaçant dans un tube vertical rempli de liquide. Ce type de configuration est rencontré dans les écoulements à poches (slug flow) qui se présentent généralement sous la forme d'un écoulement alterné de poches et de zones essentiellement liquides (bouchons). Ce régime d'écoulement est fréquemment employé dans l'industrie pétrolière pour l'exploitation des gisements de pétrole ou de gaz ainsi que dans les réacteurs chimiques et le système de refroidissement des réacteurs nucléaires. Même dans la vie quotidienne on peut rencontrer cet écoulement quand on avale une boisson avec une paille en aspirant trop fort. L'étude des écoulements à poches est très complexe. Pour surmonter cette complexité de structure d'écoulement, l'étude de l'écoulement entourant une seule poche (bulle de Taylor) est considérée comme un bon début dans la direction de la compréhension de l'hydrodynamique de ces types d'écoulements diphasiques. La bulle de Taylor "poche" est une cavité gazeuse qui se présente sous forme d'un obus ayant un nez presque sphérique et un culot quasiment plat (en fluide peu visqueux) sinon en fluide visqueux, le nez et le culot sont

arrondis. La bulle de Taylor occupe presque la totalité de la section du tube et autour d'elle s'écoule un film annulaire de liquide.

L'étude de l'écoulement autour de la bulle de Taylor reste toujours un sujet de recherche d'actualité malgré le nombre d'investigations croissantes. Cet accroissement est dû aux changements d'intérêts de plusieurs domaines conventionnels de la mécanique des fluides et de génie chimique. Cependant, la plupart des recherches nouvelles demandent de plus en plus d'informations quantitatives détaillées. Au cours de ces dernières décennies, nous assistons à divers travaux que soit théorique, expérimental et numérique. Ces travaux ont porté sur la compréhension de la vitesse ascensionnelle de la poche, sur l'hydrodynamique du film liquide et de l'écoulement dans le sillage de la poche (écoulement derrière le culot de la poche).

L'objectif du travail entrepris, concerne la résolution numérique de l'écoulement autour de la bulle de Taylor en écoulement à contre-courant dans un tube cylindrique vertical, à travers l'application de la méthode de génération de maillage. Cette méthode est pratique et efficace particulièrement adapté aux domaines présentant des géométries complexes. Notre but est d'une part de maîtriser les notions de base de la méthode de génération de maillage qui demande des transformations mathématiques sur de nouvelles lignes de coordonnées curvilignes en ξ et η pour générer la géométrie du domaine à mailler, ensuite établir les équations gouvernant le phénomène dans ce nouveau système de coordonnées et entreprendre la discrétisation dans ce domaine de calcul obtenu par cette transformation, et d'autre part établir un code de calcul et de le valider à partir des résultats de la littérature. Le mémoire s'articule autour de cinq chapitres organisés de la façon suivante :

- Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique.
- Le deuxième chapitre traite la formulation mathématique des écoulements diphasiques.
- Le troisième chapitre s'intéresse à la modélisation du problème ainsi qu'à la méthode de maillage et les transformations des équations dans le nouveau système de coordonnées.
- La méthode de résolutions numérique est traitée dans le quatrième chapitre.
- Le dernier chapitre est réservé à la présentation des résultats numériques et leurs discussions.

Chapitre 1 : Etude bibliographique.

1- Contexte général des écoulements diphasiques :

Les écoulements diphasiques ou multiphasiques sont présents dans de multiples situations. Celles-ci concernent aussi bien l'industrie que la biologie ou encore les échanges océan-atmosphère.

La complexité de ces écoulements est double, d'une part la dynamique des interfaces (déformation, rupture, coalescence) qui varie d'une manière brusque. D'autre part ces interfaces peuvent évoluer à des échelles très variées allant de quelques microns dans le cas de la microfluidique diphasiques jusqu'à des échelles de quelques mètres dans le cas de vagues déferlantes (**figure I.1**).

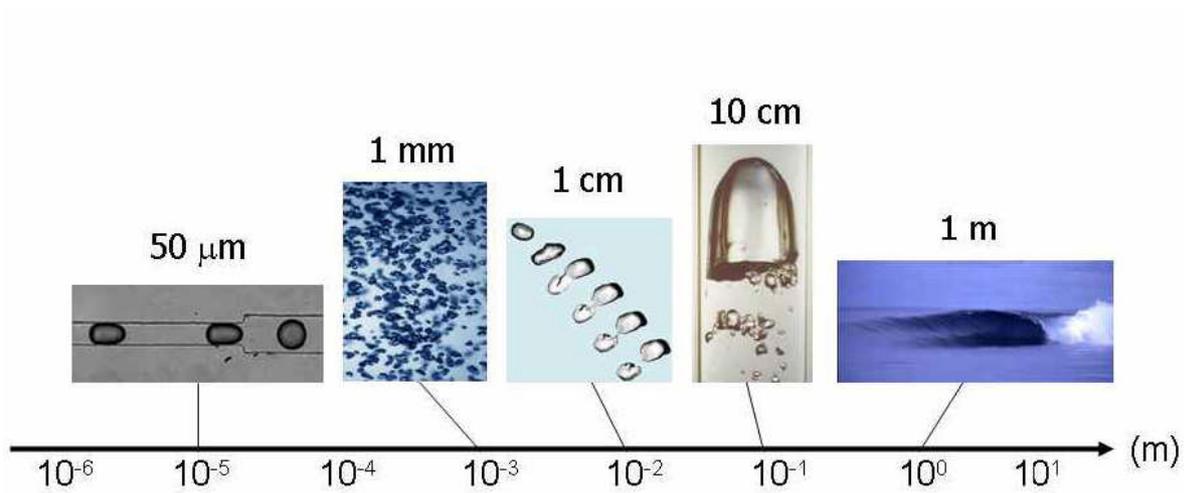


Figure I.1: Quelques écoulements à topologie complexe. [1]

La figure ci-dessus illustre les différentes échelles des écoulements diphasiques. De gauche à droite : train de gouttes dans un micro-canal ; écoulement à bulles dans un tube; rupture d'une bulle ; bulle de Taylor dans un tube vertical ; vague déferlante.

2-Domains d'application :

Trois principaux domaines où les processus industriels ont suscité un développement important sont concernés par les écoulements diphasiques gaz-liquide. Le génie chimique et

génie de procédés qui vise à augmenter les surfaces d'échanges pour favoriser les réactions chimiques.

En génie nucléaire les applications de cet écoulement sont d'une envergure importante, car pour prévoir le comportement des circuits de refroidissement des réacteurs nucléaires en fonctionnement nominal (en régime transitoire ou en évolution accidentelle), la connaissance approfondie de la thermohydraulique des écoulements diphasiques est nécessaire. Les écoulements diphasiques observés dans ces systèmes sont du type **Eau Vapeur (Figure I.2)**.

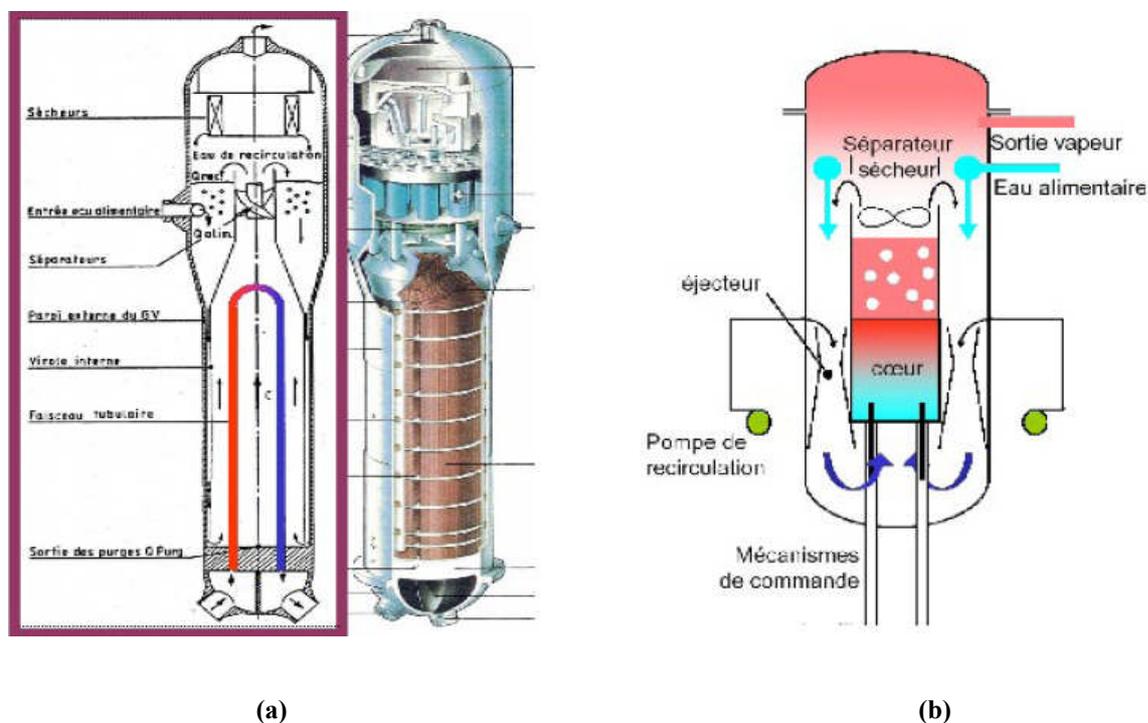


Figure I.2 : a) Générateur de vapeur (REP).

b) Schéma de fonctionnement d'un Réacteur nucléaire (BWR).

En génie pétrolier, les écoulements gaz-liquide sont fréquemment rencontrés surtout dans l'exploitation des gisements. La configuration de cet écoulement qui est du type écoulement à poches, est le sujet de notre travail. En exploitation naturelle, le pétrole est extrait sous l'effet de la pression exercée par le gaz sur le liquide, et en exploitation assistée on injecte du gaz sous pression dans la poche du gisement (**Figure I.3**).

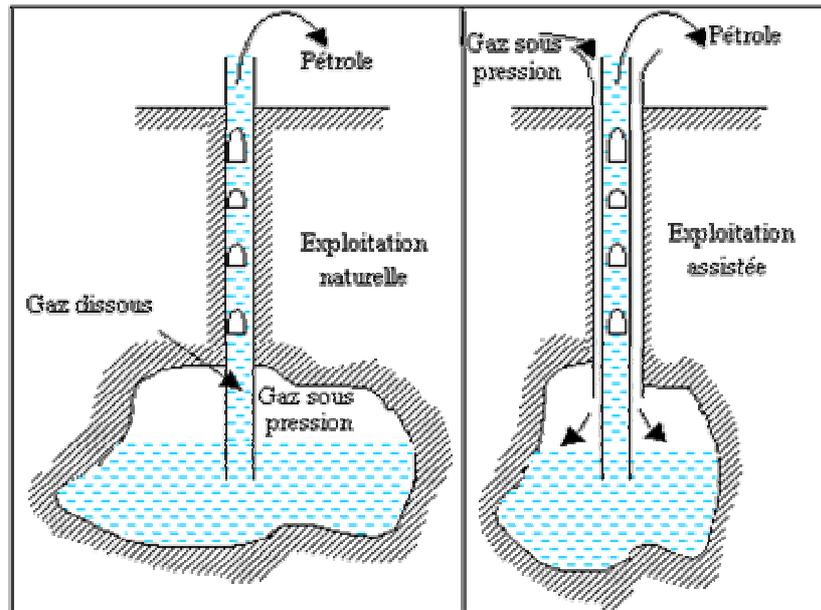


Figure I.3 : Exploitation des gisements de pétrole.

Dans d'autres nombreux secteurs industriels ces écoulements interviennent comme par exemple, les échangeurs à chaleur, machines frigorifiques ou les pompes de type gaz lift et même dans l'industrie automobile.

3-Les différents types de l'écoulement gaz-liquide :

Lors d'un écoulement diphasique gaz-liquide interne dans un tube vertical où la phase continue est le liquide, on distingue trois configurations principales (**Figure I.4**).



Figure I.4 : Régimes d'écoulement gaz-liquide.

L'écoulement à bulles, l'écoulement à poches et l'écoulement annulaire. Le passage de l'écoulement d'une configuration à une autre est considéré comme régime de transition qui se

caractérisé par des variations de vitesses de chaque phase. Les trois configurations principales ainsi que leurs transitions sont représentées ci-dessous.

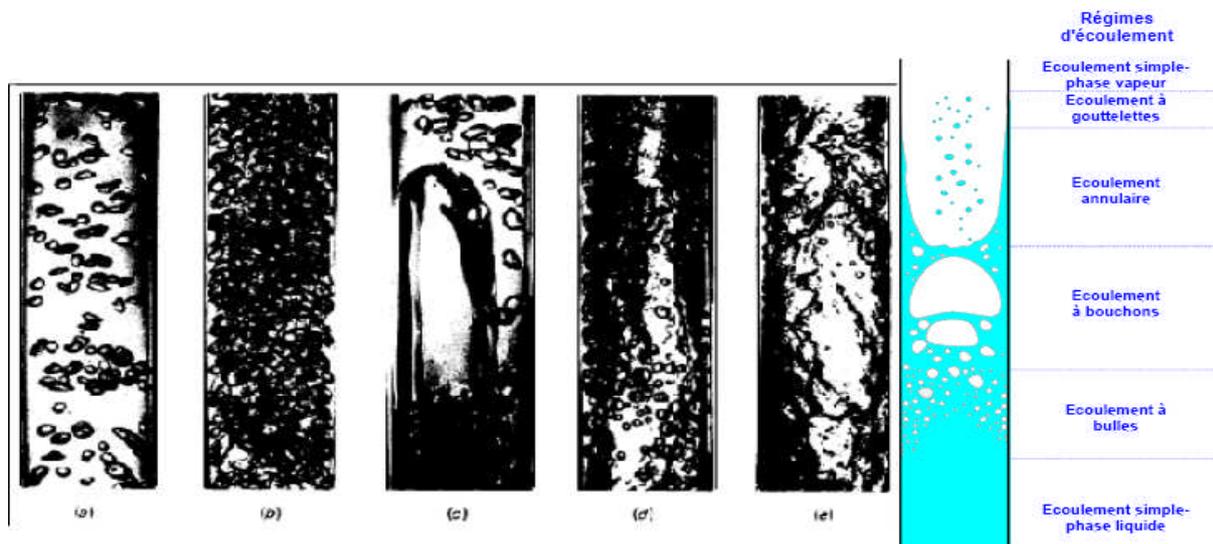


Figure I.5 : Topologie des différentes configurations de l'écoulement [2]

Ci-dessous sont décrits les différents type de configurations illustrés dans la figure (I.5) :

- a) L'écoulement à bulles (Bubbly flow) : En arrivant typiquement aux très hautes vitesses liquides et des vitesses basses du gaz, ce régime est caractérisé par la présence des bulles rapides naissantes avec un diamètre égal au diamètre capillaire.
- b) Régime de transition (Slug-bubbly) : C'est un régime de transition qui se situe entre l'écoulement à bulles et l'écoulement de Taylor. Cette transition du régime est obtenue suite à l'augmentation du débit liquide (avec le débit du gaz tenu constant).
- c) L'écoulements à poches ou écoulement de Taylor (Taylor flow) : est caractérisé par des poches du gaz avec des longueurs plus grand que le diamètre du canal qui se déplace le long du tube, séparées l'une de l'autre par des bouchons liquides. Selon les débits du gaz et du liquide et des propriétés, les poches ont souvent des sommets hémisphériques, ces poches sont appelées : Bulles de Taylor.

- d) L'écoulement Churn (Churn flow) : Cet écoulement est caractérisé par des très hautes vitesses du gaz et des très longues bulles du gaz avec des bouchons liquides relativement petits. En raison des vitesses élevées du gaz, le mouvement d'ondulation est souvent observé à la queue de bulle. Plus loin l'augmentation du débit du gaz aboutit au flux annulaire.
- e) L'écoulement annulaire (Annular flow) : A des très hautes vitesses du gaz et vitesses très basses liquides résulte l'écoulement annulaires. une phase continue du gaz est présente dans le coeur central du capillaire avec la phase liquide déplacée pour former un annulus entre les parois du tube et la phase gazeuse.

La variation topologique de cet écoulement à pousser les chercheurs à établir une représentation graphique bidimensionnelle des domaines d'existence des différents régimes. Les paramètres qui sont souvent employés sont ceux utilisés par l'expérimentateur pour contrôler l'écoulement ; à savoir les vitesses superficielles du liquide et du gaz, etc. Les frontières entre les différents régimes n'ont jamais été bien définies et les zones de transition sont relativement étendues, d'où le caractère subjectif de ces cartes d'écoulement [3].

La première carte fut celle de Baker (1954) proposée pour un écoulement horizontal. Mandhane et al, (1974) ont établi une carte pour un écoulement horizontal gaz liquide en conduite cylindrique.

En écoulement diphasique co-courant vertical ascendant, Mac Quillan et Whalley (1985) ont établi une carte définissant les différents régimes (Figure I.7). Dans cette dernière, les chercheurs ont convenablement définis les frontières des différentes zones de transition.

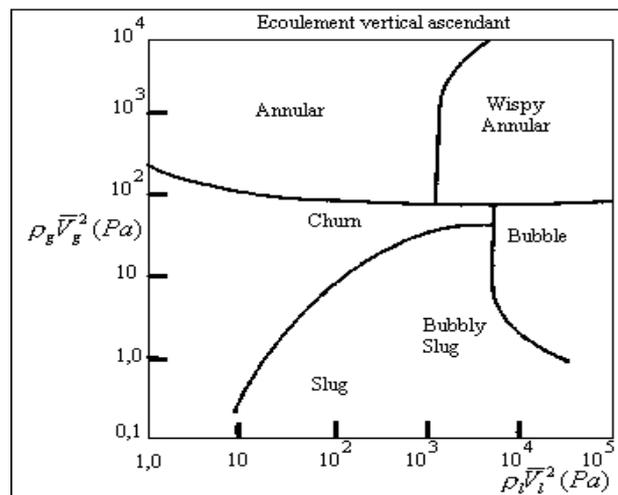


Figure I.7 : Carte des différents régimes d'écoulement vertical co-courant eau air.

Ces frontières sont généralement représentées à partir des relations analytiques adimensionnelles ou dimensionnelles, faisant intervenir les débits et les propriétés de chaque phase ainsi que les caractéristiques de l'installation expérimentale.

4- Bibliographie sur la bulle de Taylor :

Au plan scientifique, l'étude des systèmes gaz-liquide pose des questions importantes sur lesquelles se penchent les communautés de chercheurs en mécanique des fluides appliquée. Les travaux de Taylor sur les bulles et les gouttes ont commencé depuis les années 1932, puis les chercheurs ont continué à mettre en évidence la question, mais la configuration de l'écoulement à poches a été le sujet le plus traité car l'interface dans cette configuration est beaucoup plus irrégulière et représente une difficulté pour une description quantitative. Cependant, les modèles d'écoulement les plus importants sont ceux de l'écoulement à poches puisqu'ils représentent la majorité des écoulements diphasique dans des puits de forage pétroliers.

La bulle de Taylor "poche" est une cavité gazeuse qui se présente sous forme d'un obus ayant un nez presque sphérique et un culot quasiment plat (en fluide peu visqueux) sinon en fluide visqueux, le nez et le culot sont arrondis. La bulle de Taylor occupe presque la totalité de la section du tube et autour d'elle s'écoule un film annulaire de liquide.

A l'heure actuelle, les travaux effectués sur la "bulle de Taylor" sont nombreux. Les tous premiers ont concerné la prédiction de la vitesse ascensionnelle de la poche et son profil géométrique en conduite circulaire et en écoulement stagnant Dumitrescu (1943), Davies et Taylor (1950). Leurs calculs reposent sur l'hypothèse d'écoulement potentiel à l'amont de la bulle et la condition de pression nulle dans la poche. Ils montrent que la vitesse ascensionnelle d'une poche U_p peut être exprimée par la relation $U_p = C_1 \sqrt{g D}$ avec D : le diamètre de la conduite, g : l'accélération de la pesanteur, C_1 : une constante de 0.351 selon Dumitrescu et 0.328 selon Davies et Taylor. Les études théoriques de Dumitrescu et Davies ne prennent pas en compte les effets de la viscosité du liquide et de la tension superficielle. C'est pourquoi les études qui ont suivi ont tenté d'en tenir compte.

La détermination de la forme de la bulle de Taylor reste toujours une tâche difficile. A nos jours, il n'existe pas de relation liant sa forme à la pression qui l'entoure, sa longueur ou à l'épaisseur de liquide qui l'entoure. La seule relation qui existe est celle de Dumitrescu (1943) à laquelle la plupart des auteurs se réfèrent. Il montre que le nez de la bulle a une calotte sphérique de rayon $0.75 R$, R étant le rayon du tube. Il donne également le profil de la bulle de Taylor dans la région où le fluide s'accélère. Cette région se situe entre la partie sphérique et la région où le film s'établit.

$$X^+ = \rho \left(1 - 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r^+}{\rho} \right)^2} \right)$$

$$X^+ = \frac{\lambda^2}{2(1 - (r^+)^2)^2}$$

Avec $\lambda = 0.496$, $\rho = 0.75$, X^+ et r^+ sont les coordonnées axiales et radiales normalisés par rapport au rayon de la conduite.

A l'heure actuelle, les travaux effectués sur la « bulle de Taylor » sont nombreux. Les premiers travaux concernent la prédiction des vitesses ascensionnelles de la poche et son profil géométrique dans une conduite circulaire en écoulement stagnant, c'est le cas de **Dimitriscu [4]** et **Davies & Taylor [5]** dans les années 1943 et 1950 respectivement.

L'un des premiers travaux de modélisation qui ne s'intéressait pas seulement à la vitesse ascensionnelle de la poche, mais également à l'écoulement du film liquide c'est la simulation de **Mao & Duckler [6]** en 1989, leurs travail comprend une partie numérique qui traite la simulation de l'écoulement autour de la bulle de Taylor dans un tube vertical, en tenant compte de la turbulence en employant le modèle k-epsilon. Le but de cette étude est de calculer le champ d'écoulement et de prédire la forme de la bulle, la vitesse et la contrainte pariétale le long du film liquide. La deuxième partie est expérimentale par la méthode électrochimique d'une bulle d'air qui monte dans tube de diamètre 50mm contenant de l'eau pour le cas d'un liquide stagnant et le cas d'un liquide en écoulement. La comparaison entre les deux résultats à donner un bon accord, notamment dans le cas du liquide stagnant.

Une étude expérimentale réalisée par **Samia Benatallah [7]** en 1994, a portée sur le calcul des bilans à l'interface gas-liquide pour une configuration de Taylor. L'expérience consiste à mesurer le maximum de paramètres dynamiques le long de la bulle fixée par un écoulement à contre-courant dans un tube vertical d'un diamètre de 10mm. Ces paramètres sont : le débit massique à travers l'interface, le frottement pariétal, l'épaisseur du film liquide et le profil de vitesse dans le gaz.

Clarke & Issa [8], ont présenté en 1996, une méthode numérique pour la détermination de la structure du champ d'écoulement de Taylor dans un tube vertical. La méthode est basée sur l'ensemble des équations moyennées qui régissent l'écoulement au sein du liquide autour de

bulle et dans le bouchon liquide derrière le culot de la poche. Un schéma itératif est utilisé pour calculer la forme et la vitesse de la bulle simultanément ainsi que le champ d'écoulement.

Taha & Cui [9], ont fait une tentative en 2002 pour modéliser le processus d'ultrafiltration de l'écoulement à poches vertical employant la méthode (VOF) avec le but de comprendre et déterminer la quantité de flux pénétrant qui résulte du volume de gaz aspiré. Pour cette étude numérique, le logiciel Fluent est employé. La première partie du modèle emploie la méthode (VOF) pour calculer la forme et la vitesse de la poche, la distribution des vitesses et la distribution de la contrainte de cisaillement sur la paroi du tube de diamètre 12,7mm. La deuxième partie relie la distribution de la contrainte pariétale au coefficient de transfert de masse local qui est alors employé pour prévoir le flux pénétrant.

En 2003, les mêmes auteurs **Taha & Cui**, ont publié un travail sur l'hydrodynamique d'un écoulement à poches dans un tube capillaire vertical en utilisant Fluent. La vitesse et le profil de la bulle sont obtenus en fonction du nombre capillaire Ca . Dans un autre travail en 2005, ces auteurs ont présenté modélisation complète d'un écoulement de Taylor en employant la méthode de suivi d'interface et le modèle de turbulence Runge-kutta d'ordre 4, ce travail montre également l'apparition et le détachement des bulles dans le bouchon liquide ou autrement dit : le sillage liquide. Une étude paramétrique est soigneusement réalisée en fonction de la masse volumique, viscosité dynamique et les nombres adimensionnels de : Eötvös, Morton et Froude.

Zhao [10], en 2005 a établi un modèle pour simuler le champ d'écoulement autour de la bulle Taylor avec un modèle de turbulence choisi pour les faibles nombres de Reynolds est modifié pour prévoir la transition lisse du régime laminaire au turbulent. Dans cette étude, **Zhao** a développé un modèle mécaniste basé sur des résultats du modèle numérique et des études expérimentales. Son modèle amélioré a pour but d'obtenir une prédiction plus précise sur les écoulements à poches dans un tube vertical, ce modèle amélioré a été validé par les données expérimentales. Ce modèle mécaniste consiste à faire une approximation en prenant en considération les phénomènes physiques les plus impliqués et négligeant d'autres effets moins importants sans qu'ils influent sur l'exactitude de la solution et qui peut compliquer le problème. L'auteur à utiliser le logiciel Fluent dans sa simulation en introduisant des fonctions pour la capture de l'interface et la correction du la courbure du nez de la bulle.

La littérature concernant ce thème est très généreuse, les travaux cités ci-dessus sont les plus significatifs d'un point de vue scientifique et qui sont plus proche du domaine industriel notamment l'industrie des hydrocarbures dans toutes ces branches et dérivés, en allant du forage en passant par raffinage et la pétrochimie jusqu'au moteur à combustion interne.

Chapitre 2 : Formulation mathématique.

2-1 Généralités :

Dans l'étude des écoulements diphasiques, les équations fondamentales reposent sur les équations de bilans, qui peuvent être écrites soit de façon simplifiée (globale) soit de façon locale. Les équations fondamentales simplifiées sont établies sous forme de deux modèles approchés dits « modèle séparé et modèle homogène ».

Le modèle séparé considère que les deux phases ont des propriétés différentes et suppose que chaque phase s'écoule avec une vitesse uniforme moyennée dans la section. L'autre modèle traite le mélange gaz-liquide comme un pseudo fluide monophasique dont les propriétés sont les moyennes du mélange obéissant aux lois d'un écoulement monophasique.

Le système étudié dans ce travail est composé de deux fluides séparés par une interface. Les équations générales décrivant cet écoulement se divisent alors en deux groupes :

- les équations relatives à chacune des deux phases appelées « équations phasiques ».
- Les conditions de saut aux interfaces appelées « équations diphasique ».

L'établissement des équations générales pour les écoulements diphasique est basé sur le schéma ci-dessous.

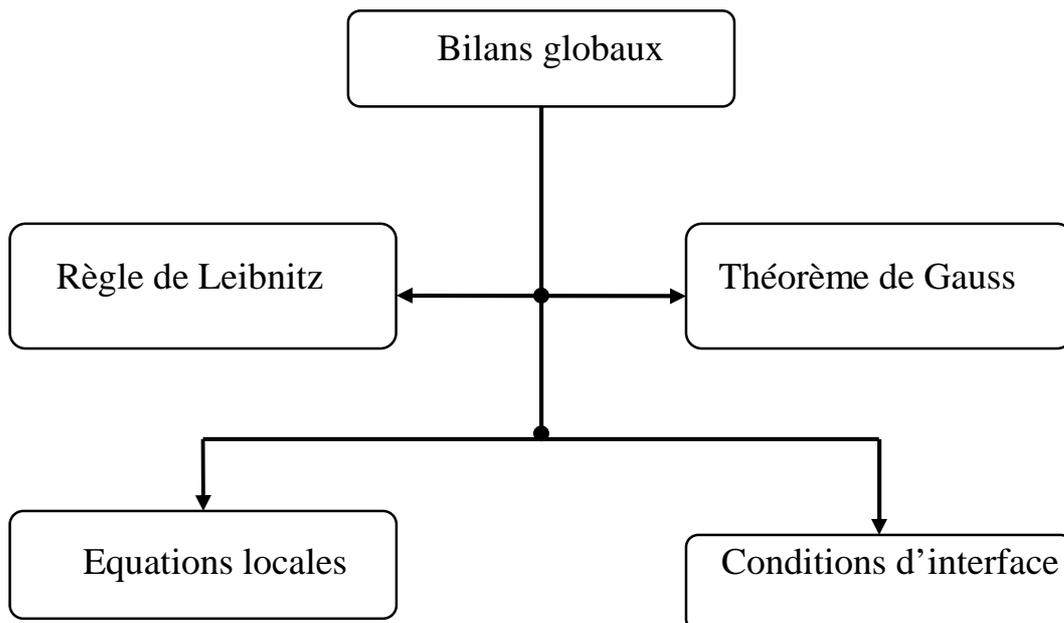


Schéma (2-1)

À partir de l'écriture globale des bilans (bilans de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et d'entropie), le théorème de transport de Reynolds (**Leibnitz**) ainsi que le théorème de Gauss (**Ostrogradski**) permettent l'obtention des équations locales contenues dans l'intégrale du volume. Quant aux équations locales contenues dans l'intégrale de surface, elles sont obtenues grâce aux conditions d'interface sur les grandeurs locales appartenant à chaque phase de part et d'autre de chaque interface.

2-2 Rappel mathématique :

2-2-1 Théorème de transport de Reynolds :

Soit $f(x_1, x_2, x_3, t)$ une fonction à plusieurs variables représentant une surface en déplacement dans l'espace et dans le temps, Cette fonction est sous la forme suivante : $f(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_i, t)$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$

La dérivée particulaire de cette fonction s'écrit : $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}$

Avec $\frac{\partial x_i}{\partial t} = V_i$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \text{grad}(f)$

On obtient $\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(f)$

Après un calcul mathématique le résultat s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{D}{Dt} \int_v f \cdot dv = \int_v \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f \cdot \vec{V}) \right) \cdot dv \dots\dots\dots(2.1)$$

2-2-2 Théorème d'Ostrogradski (Théorème de Gauss) :

Le principe est de transformer une intégrale de volume (v) en une intégrale de surface fermée (Σ).

On considère que la fonction f est une fonction à plusieurs variables :

$$\int_v \operatorname{div}(f \cdot \vec{V}) \cdot dv = \int_{\Sigma} f \cdot \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot ds \Rightarrow \vec{V} : \text{Vecteur} \dots \dots \dots (2.2)$$

$$\int_v \operatorname{div}(f \cdot \overline{\overline{T}}) \cdot dv = \int_{\Sigma} f \cdot \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \cdot ds \Rightarrow \overline{\overline{T}} : \text{Tenseur} \dots \dots \dots (2.3)$$

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}(f)}{|\operatorname{grad}(f)|}, \text{ est la normale à la surface } \Sigma \dots \dots \dots (2.4)$$

En Appliquant la règle de Leibnitz et le théorème de Gauss [11], les bilans globaux s'expriment alors sous forme d'intégrales de volume. Ces derniers fournissent les équations locales instantanées relatives à chaque phase « identiques à celles trouvées pour les écoulements monophasiques » et l'intégrale de surface fournit les conditions d'interfaces.

2-3 Application à l'écoulement monophasique :

Les équations locales instantanées ci-dessous tirées des bilans globaux, expriment les principes fondamentaux de conservation et d'évolution dans le cas d'un écoulement monophasique tels que :

- Bilan de masse ;
- Bilan de quantité de mouvement ;
- Bilan d'énergie ;
- Evolution d'entropie.

2-3-1 Bilan de masse :

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \cdot dv = \int_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{V}) \right) \cdot dv = 0$$

Le bilan de masse nous donne l'équation de continuité qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\overline{\operatorname{div}}}(\rho \cdot \vec{V}) = 0 \dots \dots \dots (2.5)$$

2-3-2 Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \cdot \vec{V} \cdot dv = \int_v \rho \cdot \vec{f} \cdot dv + \int_{\Sigma} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \cdot ds = 0$$

\vec{V} : Vitesse de déplacement d'un point matériel du volume de control (v).

\vec{f} : Densité massique des forces extérieures exercées en in point.

$\overline{\overline{T}}$: Tenseur des contraintes.

\vec{n} : Vecteur normal à une facette.

L'écriture locale du bilan de quantité de mouvement est donnée par l'équation ci-dessous :

$$\frac{\partial \rho \cdot \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) - \rho \cdot \vec{f} - \overrightarrow{div}(\overline{\overline{T}}) = 0 \dots\dots\dots(2.6)$$

2-3-3 Bilan d'énergie totale :

$$\frac{D}{Dt} \int_v \left(\frac{1}{2} \rho V^2 + U \right) \cdot dv = \int_v \rho \cdot \vec{f} \cdot \vec{V} \cdot dv + \int_{\Sigma} \left(\overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \right) \cdot \vec{V} \cdot ds - \int_{\Sigma} \vec{q} \cdot \vec{n} \cdot ds$$

U : Energie interne du système.

\vec{q} : Flux de chaleur.

L'écriture locale du bilan d'énergie totale s'écrit comme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2} V^2 + U \right) \right) + \overrightarrow{div} \left(\rho \left(\frac{1}{2} V^2 + U \right) \cdot \vec{V} \right) - \rho \cdot \vec{f} \cdot \vec{V} - \overrightarrow{div}(\overline{\overline{T}} \vec{V}) + \overrightarrow{div}(\vec{q}) = 0 \dots\dots\dots(2.7)$$

2-3-4 Évolution de l'entropie :

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \cdot S \cdot dv + \int_{\Sigma} \frac{\vec{q}}{T} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_v S_C \cdot dv \geq 0$$

T : Température.

S : Entropie du système.

S_C : Entropie créée par le système.

L'écriture locale de l'évolution de l'entropie s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot S) + \overrightarrow{div}(\rho \cdot S \cdot \vec{V}) + \overrightarrow{div}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - S_C \geq 0 \dots\dots\dots(2.8)$$

2-4 Application à l'écoulement diphasique :

En écoulements diphasiques, on utilise la même procédure que précédemment à laquelle on rajoute les conditions d'interfaces des phases pour établir les équations des bilans globaux et locaux [12].

L'application de la règle de Leibnitz et le théorème de Gauss nous conduit à l'établissement d'équations locales contenues dans l'intégrale de volume pour chaque phase. Quant aux équations locales contenues dans l'intégrale de surface, elles sont obtenues grâce aux conditions d'interface sur les grandeurs locales appartenant à chaque phase de part et d'autre de chaque interface. Considérons le volume matériel représenté par la figure ci-dessous.

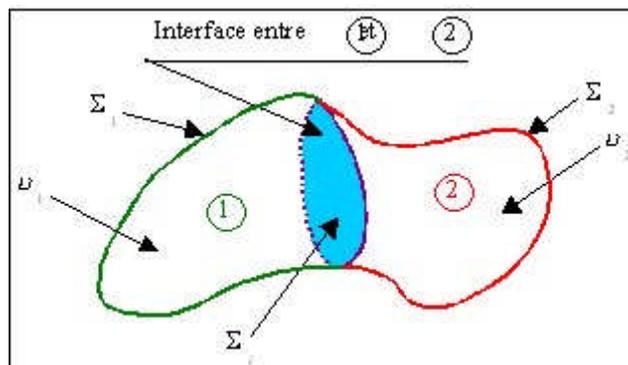


Figure (2-1)

Définissons tout d'abord les grandeurs suivantes :

$$k : \text{Indice de phase } k \in \{1,2\} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \rightarrow \text{liquide} \\ k = 2 \rightarrow \text{gas} \end{cases}$$

\vec{n}_k : Vecteur normal à l'interface dirigé vers l'extérieur de la phase k .

\vec{v}_i : Vitesse d'un point de l'interface.

σ : Tension superficielle.

2-2-1 Bilan de masse :

$$\sum_{k=1}^2 \left(\frac{D}{Dt} \int_{v_k} \rho_k \cdot dv \right) = \frac{D}{Dt} \int_{v_1} \rho_1 \cdot dv + \frac{D}{Dt} \int_{v_2} \rho_2 \cdot dv = 0$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{v_1} \rho_1 \cdot dv &= \int_{v_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \cdot dv + \int_{\Sigma_1 \cup \Sigma_i} \rho_1 \cdot (\vec{V} \cdot \vec{n}) \cdot ds = \int_{v_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \cdot dv + \int_{\Sigma_1} \rho_1 \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}) \cdot ds + \int_{\Sigma_i} \rho_1 \cdot (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_1) \cdot ds \\ &= \int_{v_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \cdot dv + \int_{\Sigma_1} \rho_1 \cdot (\vec{V}_1 \cdot \vec{n}) \cdot ds + \int_{\Sigma_i} \rho_1 \cdot (\vec{V}_i \cdot \vec{n}_1) \cdot ds + \int_{\Sigma_i} \rho_1 \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_1) \cdot \vec{n}_1 \cdot ds \\ \frac{D}{Dt} \int_{v_1} \rho_1 \cdot dv &= \int_{v_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho_1 \cdot \vec{V}_1) \right) \cdot dv + \int_{\Sigma_i} \rho_1 \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_1) \cdot \vec{n}_1 \cdot ds \end{aligned}$$

Pour les deux phases on a :

$$\int_{v_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho_1 \cdot \vec{V}_1) \right) \cdot dv + \int_{v_2} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho_2 \cdot \vec{V}_2) \right) \cdot dv + \int_{\Sigma_i} (\rho_1 \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_1) \cdot \vec{n}_1 + \rho_2 \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_2) \cdot \vec{n}_2) \cdot ds = 0$$

Pour les deux phases, il y a conservation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{v_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho_1 \cdot \vec{V}_1) \right) \cdot dv = 0 \\ \int_{v_2} \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho_2 \cdot \vec{V}_2) \right) \cdot dv = 0 \end{array} \right.$$

C'est-à-dire :

$$\rho_1 \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_2) \cdot \vec{n}_1 + \rho_2 \cdot (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = 0 \dots\dots\dots(2.9)$$

Où \dot{m}_k est le débit massique de la phase k .

2-4-2 Bilan de quantité de mouvement :

$$\sum_{k=1}^2 \left(\frac{D}{Dt} \int_{v_k} \rho_k \cdot \vec{V}_k \cdot dv \right) = \sum_{k=1}^2 \left(\int_{v_k} \rho_k \cdot \vec{f} \cdot dv + \int_{\Sigma_k} \overline{\overline{T}}_k \cdot \vec{n}_k \cdot ds \right)$$

En tenant compte également de la tension superficielle l'équation s'écrit pour les deux phases de la façon suivante :

$$\Rightarrow \dot{m}_1 \cdot \vec{V}_1 + \dot{m}_2 \cdot \vec{V}_2 - \overline{\overline{T}}_1 \cdot \vec{n}_1 - \overline{\overline{T}}_2 \cdot \vec{n}_2 + \frac{d\sigma}{ds} \cdot \vec{\tau} - \frac{\sigma}{R} \cdot \vec{n}_1 = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

σ : Tension superficielle.

s : Abscisse curviligne.

R : Rayon de courbure de l'interface en un point donné.

2-4-3 Bilan d'énergie totale :

$$\sum_{k=1}^2 \left(\frac{D}{Dt} \int_{v_k} \rho_k \cdot \left(\frac{1}{2} V_k^2 + U_k \right) \cdot dv \right) = \sum_{k=1}^2 \left(\int_{v_k} \rho_k \cdot \vec{f} \cdot \vec{V}_k \cdot dv + \int_{\Sigma_k} (\overline{\overline{T}}_k \cdot \vec{n}_k) \cdot \vec{V}_k \cdot ds - \int_{\Sigma_k} \vec{q}_k \cdot \vec{n}_k \cdot ds \right)$$

Considérons également l'effet de la tension superficielle l'équation s'écrit :

$$\Rightarrow \dot{m}_1 \cdot \left(\frac{1}{2} V_1^2 + U_1 \right) + \dot{m}_2 \cdot \left(\frac{1}{2} V_2^2 + U_2 \right) + \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 - \left(\overline{T}_1 \cdot \vec{n}_1 \right) \cdot \vec{V}_1 - \left(\overline{T}_2 \cdot \vec{n}_2 \right) \cdot \vec{V}_2 + \frac{d}{ds} (\sigma \cdot \vec{V}_i) = 0 \dots\dots\dots(2.11)$$

\vec{V}_i : Composante tangentielle des vitesses des phases à l'interface

2-4-4 Evolution de l'entropie :

$$\sum_{k=1}^2 \left(\frac{D}{Dt} \int_{v_k} \rho_k \cdot S_k \cdot dv + \int_{\Sigma_k} \frac{\vec{q}_k \cdot \vec{n}_k}{T_k} \cdot ds \right) = \sum_{k=1}^2 \left(\int_{v_k} \Delta_k \cdot dv \right) + \int_{\Sigma_i} \Delta_i \cdot ds \geq 0$$

Avec : $\begin{cases} \Delta_k \geq 0 \\ \Delta_i \geq 0 \end{cases}$

La condition d'interface s'écrit :

$$\Delta_i = \dot{m}_1 \cdot S_1 - \dot{m}_2 \cdot S_2 - \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1}{T_1} - \frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2}{T_2} \geq 0 \dots\dots\dots(2.12)$$

Δ_i : Entropie générée par les conditions de l'interface.

Donc les conditions d'interface sont exprimées par les équations (2.9), (2.10), (2.11) et (2.12).

Le système d'équations s'écrit de la façon suivante :

2-5 Equations phasiques :

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho \cdot \vec{V}) = 0$
- $\frac{\partial \rho \cdot \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{div}(\rho \vec{V} \cdot \vec{V}) - \rho \cdot \vec{f} - \overrightarrow{div}(\overline{T}) = 0$
- $\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(\frac{1}{2} V^2 + U \right) \right) + \overrightarrow{div} \left(\rho \left(\frac{1}{2} V^2 + U \right) \cdot \vec{V} \right) - \rho \cdot \vec{f} \cdot \vec{V} - \overrightarrow{div}(\overline{T} \cdot \vec{V}) + \overrightarrow{div}(\vec{q}) = 0$

- $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot S) + \overline{\text{div}}(\rho \cdot S \cdot \vec{V}) + \overline{\text{div}}\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - S_c \geq 0$

2-6 Conditions d'interface (Equations diphasiques) :

- $\rho_1 \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_1) \cdot \vec{n}_1 + \rho_2 \cdot (\vec{V}_i - \vec{V}_2) \cdot \vec{n}_2 = 0$

- $\dot{m}_1 \cdot \vec{V}_1 + \dot{m}_2 \cdot \vec{V}_2 - \overline{T}_1 \cdot \vec{n}_1 - \overline{T}_2 \cdot \vec{n}_2 + \frac{d\sigma}{ds} \cdot \vec{\tau} - \frac{\sigma}{R} \cdot \vec{n}_1 = 0$

- $\dot{m}_1 \cdot \left(\frac{1}{2}V_1^2 + U_1\right) + \dot{m}_2 \cdot \left(\frac{1}{2}V_2^2 + U_2\right) + \vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2 - \left(\overline{T}_1 \cdot \vec{n}_1\right) \cdot \vec{V}_1 - \left(\overline{T}_2 \cdot \vec{n}_2\right) \cdot \vec{V}_2 + \frac{d}{ds}(\sigma \cdot \vec{V}_i) = 0$

- $\Delta_i = \dot{m}_1 \cdot S_1 - \dot{m}_2 \cdot S_2 - \frac{\vec{q}_1 \cdot \vec{n}_1}{T_1} - \frac{\vec{q}_2 \cdot \vec{n}_2}{T_2} \geq 0$

Nous pouvons écrire les équations précédentes de la façon suivante avec la considération des restrictions de notre cas d'étude :

En tout point de la phase liquide :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v$$

A l'interface gaz-liquide :

Les conditions à l'interface peuvent être exprimées en fonction de l'interface $y = f(x, t)$ sachant qu'en l'absence de transfert de masse, la condition d'interface relative au bilan de masse qui est l'équation (2.9) s'écrit :

$$\dot{m}_k = 0 \Rightarrow \rho_1 \cdot (\vec{V}_1 - \vec{V}_i) \cdot \vec{n}_1 = 0 \dots\dots\dots(2.13)$$

Soit $y = f(x, t)$ est la fonction de l'interface et tenant compte de l'équation (2.4), on démontre que :

$$\vec{V}_i \cdot \vec{n}_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}} \quad \text{Avec} \quad \vec{n}_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}} \end{cases}$$

L'équation (2.13) s'écrit :

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{Cette équation est appelée équation cinématique.}$$

De la même façon on traite la condition d'interface du bilan de quantité de mouvement dans l'équation (2.10). Sachant qu'on a pas un transfert de masse, on suppose que la tension superficielle σ est constante, donc le gradient de surface de σ est nul.

Avec une projection du tenseur de contraintes sur les deux plans normal et tangent, on obtient les conditions ci-dessous l'équation (2.15), (2.16).

- La condition cinématique :

$$u = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} \dots\dots\dots(2.14)$$

- Le bilan des contraintes normales à l'interface :

$$p - p_G - 2\mu \frac{\frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} = -\sigma \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}} \dots\dots\dots(2.15)$$

- Le bilan des contraintes tangentielles à l'interface :

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \dots\dots\dots(2.16)$$

2-7 Géométrie du problème :

Ce problème non permanent défini au premier chapitre, devient un problème permanent si le repère de référence est choisi lié à la poche de gaz de vitesse de déplacement U_p . Dans ce cas, l'analyse de ce problème permanent est assurée par une simple transformation du système de coordonnées, la poche devient stationnaire et la paroi de la conduite se déplace avec une vitesse U_{paroi} donnée par : $U_{\text{paroi}} = - U_{TB}$

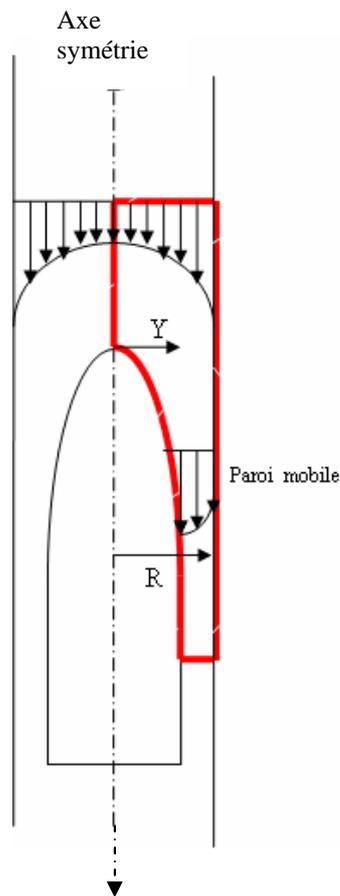


Figure (2-2) : Configuration d'une bulle de Taylor en écoulement ascendant dans un tube vertical.

La zone en rouge dans la figure ci-dessus représente le domaine physique de notre écoulement laminaire. Le phénomène physique étudié est gouverné par le système d'équations suivant :

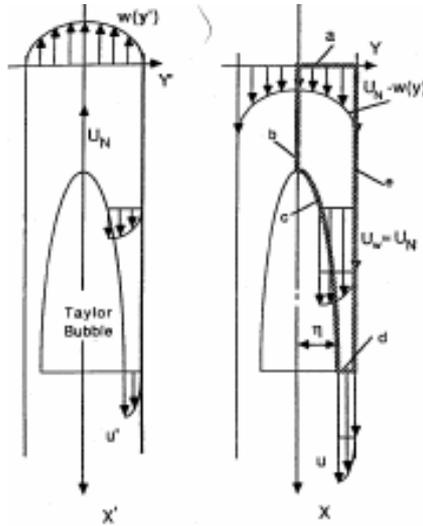


Figure (2-3) : Configuration d'une bulle de Taylor avec changement de repère [6].

2-8 Condition aux limites :

- A l'entrée on impose un profil de vitesse uniforme.
- A la sortie on suppose un régime établi.
- A la paroi rigide : - $U_{\text{paroi}} = -U_{\text{TB}}$: La vitesse de déplacement de la poche de gaz.
- $V = 0$.
- A l'interface on suppose que la contrainte de cisaillement τ_i est nulle et pas de transfert de masse.

2-9 Restriction au cas étudié :

Dans notre cas d'étude, nous considérons les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est isotherme.
- La phase gazeuse est immobile.

- L'écoulement liquide est bidimensionnel.
- Le liquide est newtonien et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est laminaire.
- Pas de transfert de masse entre les deux phases.

Chapitre 3 : Transformation et maillage.

3-1 Généralités :

La résolution numérique par la méthodes des différence finies ainsi que par les volumes finis de beaucoup de problèmes de mécanique des fluides dépend essentiellement des conditions aux limites et de l'aspect géométrique du domaine physique, dans le cas des géométries rectangulaires la difficulté ne se pose pas car les conditions aux limites peuvent être exactement représentées, mais la plus part des problèmes réels leurs géométrie constitue une difficulté majeure qui dépend de la complexité du domaine physique.

La méthode appelée '*Grid Generation*' lève cette difficulté par la transformation d'une géométrie quelconque en un domaine rectangulaire en employant le système de coordonnées curvilignes (ξ, η, ζ) .

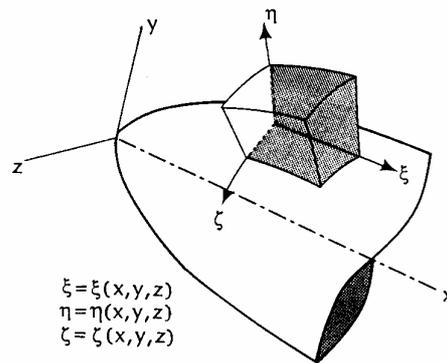


Figure (3-1) : Coordonnées curvilignes généralisées.

Le but principal de la transformation du domaine physique est de construire un réseau uniforme au sein du domaine transformé appelé domaine de calcul. Un réseau numériquement produit est un jeu organisé de points formés par les intersections des lignes. Ce maillage généré libère la simulation numérique de la restriction à certaines formes de frontière des domaines physique.

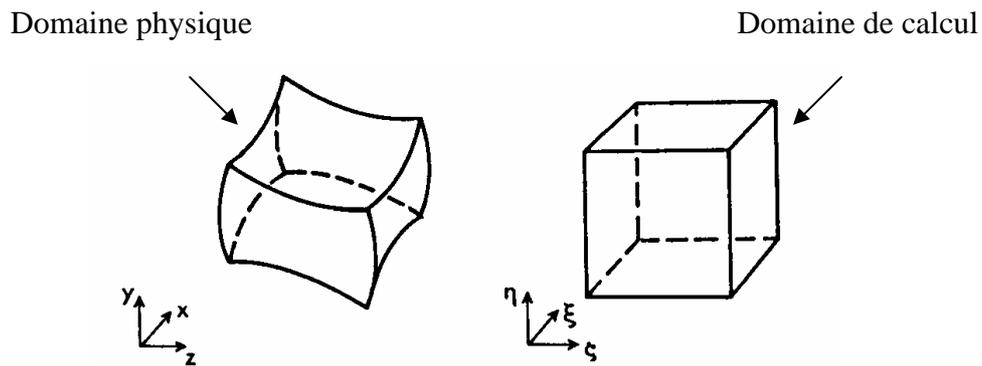


Figure (3-2) : Le domaine physique et le domaine de calcul.

Dans le domaine physique en coordonnées cartésiennes chaque point est défini par ces coordonnées (x, y) et dans le domaine de calcul les points sont identifié par (i, j) .

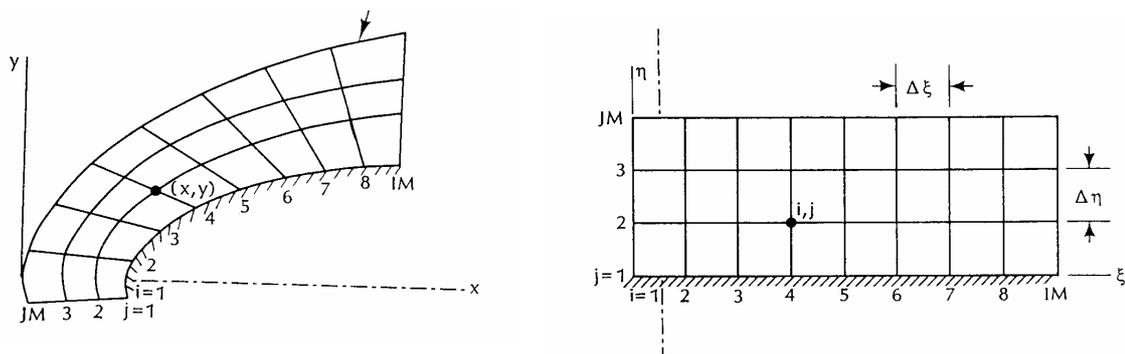


Figure (3-3) : Domaine physique en 2D avec un maillage non uniforme et le domaine de calcul avec un maillage uniforme.

Plusieurs types de configuration de maillage généré sont représentés dans la littérature. Par exemple le maillage en ‘C’ figure (3-4), utilisé dans le domaine aérodynamique dans les simulations autour des ailes d’avion, les calculs numériques sur les torpides...etc.

Pour les géométries complexes, la méthode ‘**Grid Generation**’ s’adapte facilement avec ces cas par une méthode appelée ‘**Multi Bloc**’, qui consiste à diviser le domaine physique en plusieurs sous domaines dans le but d’êtres traités séparément pour la génération du maillage, puis nous les reconstituons pour avoir un seul domaine pour le calcul physique.

Egalement dans cette méthode, le maillage peut être raffiné dans des régions précises, au niveau des surfaces les lignes du maillage peuvent être parfaitement orthogonales ou presque orthogonales [13].

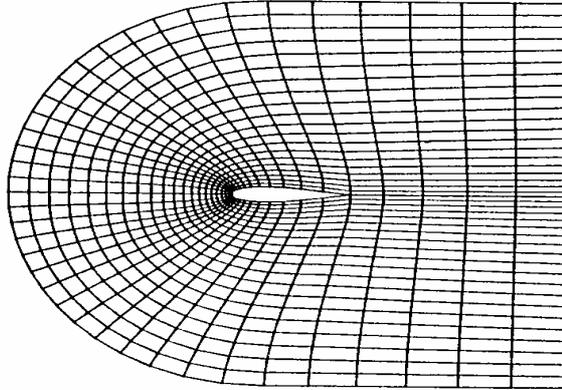


Figure (3-4) : Maillage en 'C' d'une aile d'avion.

Dans ce système de coordonnées, les frontières peuvent aussi être dans l'écoulement, ou bien en réponse à la solution qui se développe avec le temps. En général, le domaine de calcul rectangulaire, ou composé de sous régions rectangulaires et une large variété de configurations possibles. Les méthodes de la génération du maillage dans le système de coordonnées curvilignes sont plusieurs, les deux principales sont : la méthode algébrique, la méthode des équations partielles différentielles qui peuvent être elliptiques, paraboliques ou hyperboliques [14].

3-2 Système d'équations elliptiques :

La résolution des équations différentielles partielles elliptiques commue dans littérature par le symbole '**PDEs**' pour les domaines où toutes les frontières du domaine physique sont bien définies, la génération du maillage donne de très bons résultats. Un système d'équations elliptiques dans la forme de l'équation de Laplace ou l'équation de Poisson présentées ci-dessous peut être résolu par plusieurs méthodes numériques, entre autres, les différences finies qui sont les plus utilisées pour ces cas.

L'équation de Poisson en 2-D s'écrit de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta)$$

.....(3-1)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta)$$

Où ξ, η sont les coordonnées dans le domaine de calcul.

P et Q sont des fonctions choisies utilisées pour le contrôle de la concentration des points de maillage à l'intérieur du domaine.

Le système d'équations (3-1) peut se réduire sans considération des équations de contrôle de maillage à un système des équations de Laplace qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

.....(3-2)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

Le système d'équations à résoudre est l'inverse du système (3-2), qui est obtenu en échangeant les variables dépendantes et les variables indépendantes [15].

Le système d'équations à résoudre s'écrit sous la forme suivante :

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0$$

.....(3-3)

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$$

Où les coefficients α, β, γ sont en fonction des variables et s'écrivent comme suit :

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\beta = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2$$

Le système d'équation (3-3) est non linéaire, se qui nécessite une procédure de linéarisation. D'une manière simpliste, le calcul des coefficients se fait dans l'itération précédente dans la procédure itérative pour la résolution de ces équations.

3-3 La résolution numérique du système d'équations :

La résolution du système d'équations elliptique qui nous permet de transformer notre domaine physique en un domaine rectangulaire avec un maillage uniforme, peut se faire en utilisant une méthode itérative. Les méthodes itératives nécessitent une écriture algébrique, ce qui nous conduit à discrétiser notre système d'équations.

Dans la mécanique des fluides et particulièrement le domaine des écoulements diphasiques, la méthode des volumes finis est plus recommandée, car elle permet de stocker les informations dans un volume fini d'une manière conservatrice, notamment pour l'application de la méthode VOF, qui consiste à calculer le taux du vide dans un volume fini, à suivre une interface qui varie au dépend de l'écoulement...etc.

Puisque le système des équations qui régissent l'écoulement va être discrétiser par la méthode des volumes finis, la littérature recommande d'utiliser la même méthode pour la discrétisation des équations de génération de maillage.

3-3-1 La discrétisation du système d'équations elliptiques :

La discrétisation des équations (3.3) par les volumes finis nous permet de remplacer les termes aux dérivées partielles par des termes sous forme algébrique qui nous donnent les valeurs générées de x et y à l'intérieur du domaine dans le repère ξ, η en considérant les

valeurs de x et y au niveau des frontières du domaine physique qui sont définies comme conditions aux limites pour les équations de transformation (3.3).

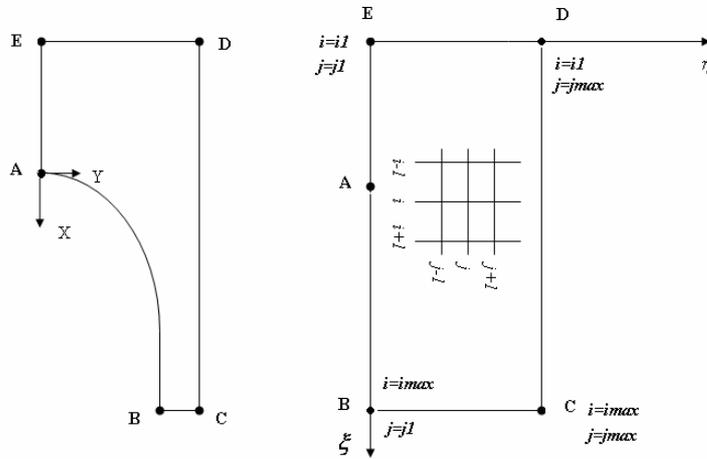


Figure (3-5) : le domaine physique transformé en domaine de calcul.

La méthode des volumes finis consiste à intégrer les équations de transformation sur le volume de contrôle illustré ci-dessous :

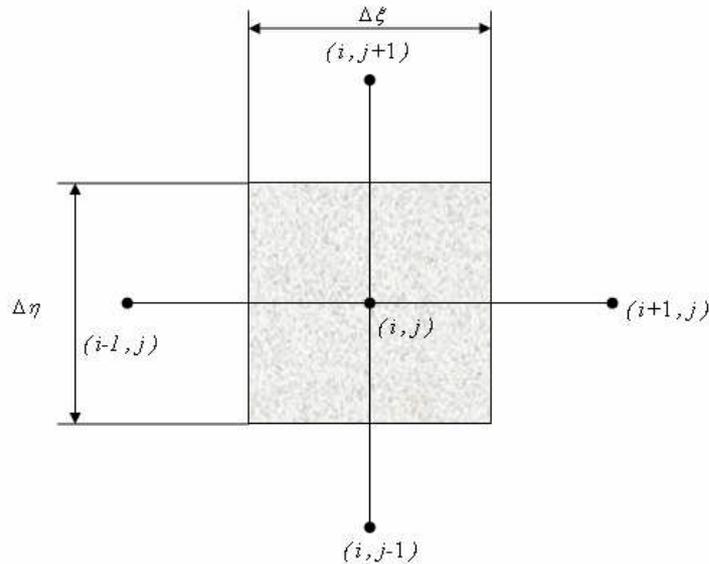


Figure (3-6) : Volume de contrôle dans le domaine de calcul.

Le maillage imposé dans le domaine de calcul est uniforme, c'est-à-dire : $\Delta \xi = \Delta \eta = 1$, cette uniformité des dimensions des volumes finis suivant chaque direction facilite l'obtention de certaines approximations numériques.

Le système d'équations (3.3) est composé de deux équations analogiques, ce qui nous permet de faire la discrétisation d'une seule équation pour une variable généralisée ϕ , l'équation s'écrit de la forme suivante :

$$\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = 0 \dots\dots\dots(3.4)$$

Avec α, β, γ des coefficients qui dépendent des variables x, y mais dans le but de linéariser l'équation ils sont considérés constants pour la discrétisation de l'équation (3.4). Ces coefficients vont être discrétisés et calculés dans l'itération précédente.

L'intégration de l'équation (3.4) sur le volume de contrôle en 2D nous donne le résultat suivant :

$$\int_w^e \int_s^n (\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2}) d\xi d\eta = 0$$

$$\underbrace{\int_w^e \int_s^n \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} d\xi d\eta}_1 - 2 \underbrace{\int_w^e \int_s^n \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta}_2 + \underbrace{\int_w^e \int_s^n \gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} d\xi d\eta}_3 = 0 \dots\dots\dots(3.5)$$

La discrétisation du premier terme de l'équation (3.5) :

$$\underbrace{\int_w^e \int_s^n \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} d\xi d\eta}_1 = \int_s^n \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w^e d\eta = \alpha \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e \Delta \eta - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w \Delta \eta \right)$$

Les dérivées premières de la variable ϕ sont approchées à l'aide des différences centrées :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{d\xi_e}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{d\xi_w}$$

Notre maillage est défini uniforme, $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ ce qui implique que $d\xi = d\eta = 1$. Cette égalité nous permet de simplifier le calcul ainsi que l'écriture des équations discrétisées en introduisant la forme indicielle, le premier terme s'écrit alors de la façon suivante :

$$\int\int_{w,s}^e \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = \alpha [\phi(i+1, j) - 2\phi(i, j) + \phi(i-1, j)] \dots\dots\dots(3.6)$$

La discrétisation du troisième terme est obtenue de la même façon que le premier terme, ce qui nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\int\int_{w,s}^e \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} d\xi d\eta = \gamma [\phi(i, j+1) - 2\phi(i, j) + \phi(i, j-1)] \dots\dots\dots(3.7)$$

Le deuxième terme est un terme mixte, sa discrétisation est particulière car les dérivées premières de la variables sont traitées au niveau des frontières du volume, ce qui nous conduit à écrire ce troisième terme en fonction des nœuds principaux des volumes de contrôle.

$$\underbrace{\int\int_{w,s}^e \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta}_2 = \int\int_{w,s}^e \beta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \int_s^e \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w d\eta = \beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w \right)$$

L'application de l'approximation des différences centrées pour les termes $\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e, \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w$ qui représentent la variation de ϕ par rapport à η sur les frontières Est et Ouest du volume de contrôle nous donne le résultat suivant :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e = \phi\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) - \phi\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right), \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w = \phi\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) - \phi\left(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right)$$

Par une interpolation dans le réseau des points voisins au volume de contrôle on obtient le résultat suivant Pour $\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e$:

$$\phi\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right) = \frac{\phi\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \phi\left(i + \frac{1}{2}, j + 1\right)}{2},$$

$$\phi\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right) = \frac{\phi\left(i + \frac{1}{2}, j\right) + \phi\left(i + \frac{1}{2}, j - 1\right)}{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}_e = \frac{1}{2} \left[\phi\left(i + \frac{1}{2}, j + 1\right) - \phi\left(i + \frac{1}{2}, j - 1\right) \right]$$

De la même façon on obtient la valeur de $\phi\left(i + \frac{1}{2}, j + 1\right)$ et $\phi\left(i + \frac{1}{2}, j - 1\right)$, alors $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}_e$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}_e = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi(i, j + 1) + \phi(i + 1, j + 1)}{2} - \frac{\phi(i, j - 1) + \phi(i + 1, j - 1)}{2} \right]$$

Même procédure pour le terme $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}_w$ qui s'écrit après le calcul sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}_w = \frac{1}{2} \left[\frac{\phi(i, j + 1) + \phi(i - 1, j + 1)}{2} - \frac{\phi(i, j - 1) + \phi(i - 1, j - 1)}{2} \right]$$

Donc le terme mixte de l'équation (3.5) est obtenu l'addition de ces termes multiplier par le coefficient β , le résultat est donné par l'égalité ci-dessus :

$$\beta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}_e - \frac{\partial \phi}{\partial \eta}_w \right) = \frac{1}{4} \beta [\phi(i + 1, j + 1) - \phi(i + 1, j - 1) - \phi(i - 1, j + 1) + \phi(i - 1, j - 1)] \dots \dots \dots (3.8)$$

L'équation (3.5) discrétisée est obtenue en additionnant les équations (3.6), (3.7) et (3.8). Le résultat est réarrangé sous la forme standard d'équation algébrique de discrétisation de la méthode des volumes finis qui s'écrit comme suit :

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + S_\phi \dots \dots \dots (3.9)$$

Le résultat de l'équation discrétisée obtenu est donné par l'équation suivante :

$$2(\alpha + \lambda)\phi(i, j) = \alpha\phi(i + 1, j) + \alpha\phi(i - 1, j) + \gamma\phi(i, j + 1) + \gamma\phi(i, j - 1) + \frac{1}{2}\beta[\phi(i + 1, j - 1) - \phi(i + 1, j + 1) - \phi(i - 1, j - 1) + \phi(i - 1, j + 1)] \dots\dots\dots (3.10)$$

Par analogie entre les deux équations (3.9) et (3.10) on obtient les égalités suivantes :

$$A_p = 2(\alpha + \gamma)$$

$$A_E = A_W = \alpha$$

$$A_N = A_S = \gamma$$

$$S_\phi = \frac{1}{2}\beta[\phi(i + 1, j - 1) - \phi(i + 1, j + 1) - \phi(i - 1, j - 1) + \phi(i - 1, j + 1)]$$

Notre système de transformation est composé de deux équations (3.3), une pour la variable x et l'autre pour y . Donc nous obtiendrons deux équations algébrique de discrétisation pour chaque variables, alors la variable généralisée ϕ sera remplacée par x et par y dans l'équation algébrique (3.10) pour obtenir le système d'équations suivant (3.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\alpha + \lambda)x(i, j) = \alpha x(i + 1, j) + \alpha x(i - 1, j) + \gamma x(i, j + 1) + \gamma x(i, j - 1) + \frac{1}{2}\beta[x(i + 1, j - 1) - x(i + 1, j + 1) - x(i - 1, j - 1) + x(i - 1, j + 1)] \\ \\ 2(\alpha + \lambda)y(i, j) = \alpha y(i + 1, j) + \alpha y(i - 1, j) + \gamma y(i, j + 1) + \gamma y(i, j - 1) + \frac{1}{2}\beta[y(i + 1, j - 1) - y(i + 1, j + 1) - y(i - 1, j - 1) + y(i - 1, j + 1)] \dots\dots\dots (3.11) \end{array} \right.$$

Sachant que les coefficients α, β, γ de l'équation (3.4) dépendent des variables et comprends des dérivées premières, leurs discrétisation est indispensable pour le calcul itératif. Ces coefficients sont liés au volume du contrôle caractérisé par le point P.

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2$$

$$\beta = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2$$

En appliquant l'approximation des différences centrées au termes des ces équations, le résultat est écrit comme suit :

$$\begin{cases} \alpha(i, j) = \frac{1}{4} \left[\left((x(i, j+1) - x(i, j-1))^2 + (y(i, j+1) - y(i, j-1))^2 \right) \right] \\ \beta(i, j) = \frac{1}{4} \left[(x(i+1, j) - x(i-1, j))(x(i, j+1) - x(i, j-1)) + (y(i+1, j) - y(i-1, j))(y(i, j+1) - y(i, j-1)) \right] \\ \gamma(i, j) = \frac{1}{4} \left[\left((x(i+1, j) - x(i-1, j))^2 + (y(i+1, j) - y(i-1, j))^2 \right) \right] \end{cases}$$

3-3-2 La solution du système d'équations algébriques :

La détermination des valeurs des coefficients ainsi que le terme source de l'équation algébrique de discrétisation (3.9) et après l'incorporation des conditions aux limites le système contient alors $(i-2)(j-2)$ équations. L'algorithme pour une matrice tridiagonale appelée TDMA permet de résoudre le système d'équations algébriques non linéaires [16]. La résolution de ce système nous fourni les valeurs de $x(i, j)$ ainsi que de $y(i, j)$ qui représentent des coordonnées des centres des volumes finis caractérisés par les points P dans le système ξ, η .

Le résultat dépend essentiellement des conditions aux limites qui sont les coordonnées x, y des frontière de notre domaine physique.

La ligne courbée discontinue entre le point A et E sur la figure (3-7) représente l'interface entre les deux fluides, dans le nouveau système cette interface devient une interface droite représentée dans la même figure par la ligne entre la point E et A', cette interface est définie par $y(1, j) = f(x(1, j))$ de $j=1$ jusqu'à $j=j_E$. De la même façon, tous la points $x(i, j)$ et $y(i, j)$ sur frontières du domaine physique sont définis est représentes les conditions aux limites nécessaire pour la résolution du système d'équations algébriques (3.11).

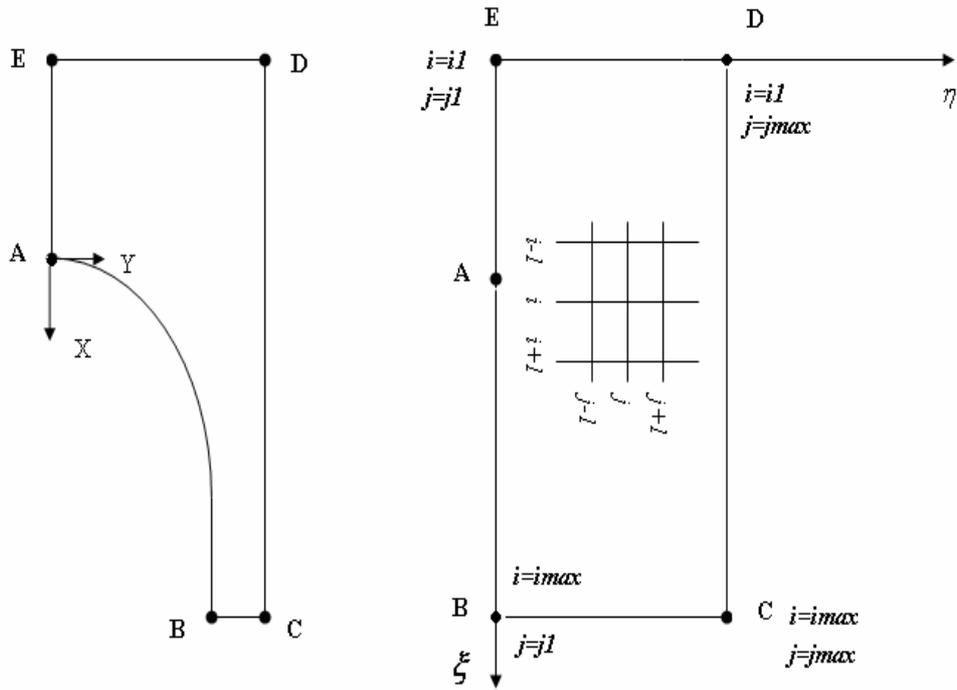


Figure (3-7) : La représentation des conditions aux limites dans le domaine de calcul.

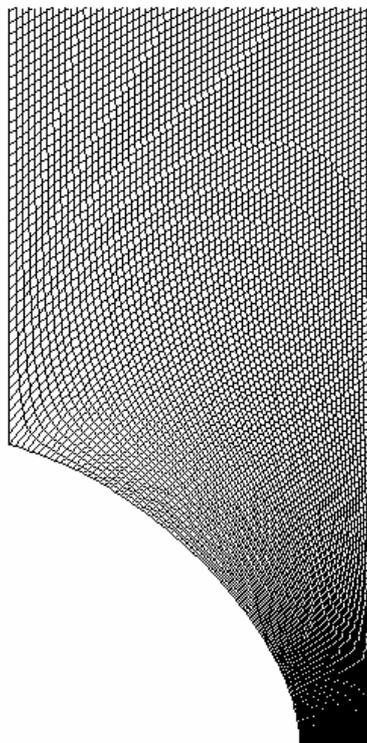


Figure (3-8) : Le maillage généré du domaine physique.

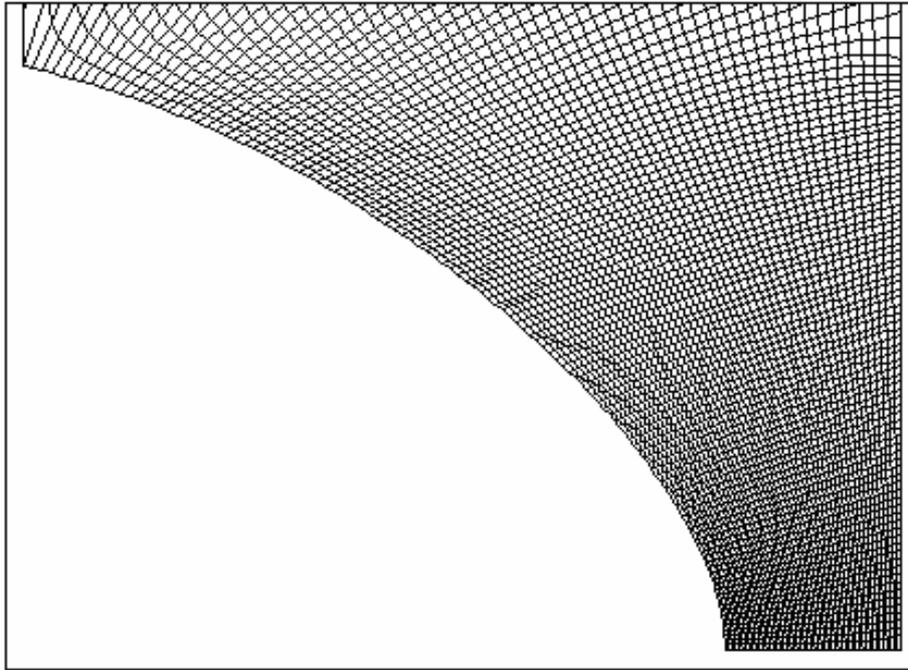


Figure (3-9) : Détails du maillage au niveau du nez de la poche

3-4 La transformation des équations de l'écoulement :

Les Equations adimensionnelles de la phase liquide en écoulement bidimensionnels, incompressible, laminaire et permanents obtenues sont l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement suivant x et y :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \\ \frac{\partial(U.U)}{\partial X} + \frac{\partial(U.V)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right] \dots\dots\dots(3.12) \\ \frac{\partial(U.V)}{\partial X} + \frac{\partial(V.V)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right] \end{array} \right.$$

A l'interface gaz-liquide nous avons besoin de deux conditions pour la fermeture du problème, ces conditions sont développées dans le deuxième chapitre et citées respectivement ci-dessous, sont le bilan des contraintes tangentielles Eq. (3-13) et la condition cinématique Eq. (3-14).

$$2 \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] = 0 \dots\dots\dots(3.13)$$

$$V = \frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} \dots\dots\dots(3.14)$$

Les paramètres adimensionnels sont :

$$X = x / R ;$$

$$Y = y / R ;$$

$$U = u / U_{\infty} ;$$

$$V = v / U_{\infty} ;$$

$$P = (p + \rho_l g Y) / \rho_l U_{\infty}^2$$

R : Rayon de la conduite

U_{∞} : Vitesse moyenne d'entrée.

ρ_l : Masse volumique du liquide

μ_l : Viscosité dynamique du liquide.

$$Re = \frac{\rho_l R U_{\infty}}{\mu_l} \text{ Nombre de Reynolds.}$$

3-4-1 Les expressions mathématiques de transformation :

Les équations de l'écoulement peuvent être écrites dans le domaine de calcul avec les coordonnées généralisées ξ, η . Les dérivées partielles du premier ordre dans les coordonnées cartésiennes s'écrivent dans les coordonnées ξ, η Sachant que $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \end{array} \right. \dots\dots\dots(3.15)$$

Les dérivées du second ordre dans le domaine de calcul sont obtenues en dérivant les équations (3.15) une deuxième fois par rapport à $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ ainsi que la dérivée mixte $\frac{\partial}{\partial x \partial y}$.

3-4-2 La transformation des équations phasiques :

L'équation de continuité écrite dans les coordonnées cartésiennes est donnée par (3.12) :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

En appliquant les relations (3.15) au deux termes de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial X} \right) + \frac{\partial V}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y} \right) + \frac{\partial V}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y} \right) = 0 \dots\dots\dots(3.16)$$

En introduisant la matrice et le Jacobien de transformation dans l'équation (3.16), on détermine les paramètres métriques de transformation de coordonnées:

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = J \frac{\partial Y}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = -J \frac{\partial X}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial X} = -J \frac{\partial Y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial Y} = J \frac{\partial X}{\partial \xi}$$

Avec J est le Jacobien qui défini par :
$$J = \frac{1}{\frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta}}$$

L'équation (3.16) s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} \left(J \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial U}{\partial \eta} \left(-J \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial V}{\partial \xi} \left(-J \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial V}{\partial \eta} \left(J \frac{\partial X}{\partial \xi} \right) = 0$$

Cette équation s'écrit également après simplification et réarrangement, sachant que le Jacobien ainsi que les paramètres métriques sont quantités qui dépendent de x et y :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) U}_{1} + \underbrace{\left(- \frac{\partial X}{\partial \eta} \right) V}_{2} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\underbrace{\left(- \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) U}_{1} + \underbrace{\left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right) V}_{2} \right] = 0$$

Les termes 1 et 2 dans l'équation ci-dessus sont connus par les vitesses contravariantes U^C et V^C respectivement, l'équation de continuité est donc écrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U^C}{\partial \xi} + \frac{\partial V^C}{\partial \eta} = 0 \dots \dots \dots (3.17)$$

Après un calcul mathématique rigoureux et de la même façon, les équations de quantité de mouvement s'écrivent dans les coordonnées ξ, η :

$$\frac{\partial(U^c U)}{\partial \xi} + \frac{\partial(V^c U)}{\partial \eta} = -\left(f_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{21} \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{11}}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{22}}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right] \dots \dots \dots (3.18)$$

$$\frac{\partial(U^c V)}{\partial \xi} + \frac{\partial(V^c V)}{\partial \eta} = -\left(f_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{22} \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{11}}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{22}}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right] \dots \dots \dots (3.19)$$

Les vitesses contravariants sont définies comme suit : $U^c = f_{11}U + f_{12}V$, $V^c = f_{21}U + f_{22}V$

Les paramètres métriques de transformation sont :

$$f_{11} = \frac{\partial Y}{\partial \eta}, f_{12} = -\frac{\partial X}{\partial \eta}, f_{21} = -\frac{\partial Y}{\partial \xi}, f_{22} = \frac{\partial X}{\partial \xi}$$

$$q_{11} = f_{11}^2 + f_{12}^2, \quad q_{22} = f_{21}^2 + f_{22}^2, \quad q_{12} = f_{11} f_{21} + f_{12} f_{22}, \quad q_{21} = f_{11} f_{21} + f_{12} f_{22}$$

Le Jacobien de transformation s'écrit alors : $J = 1/(f_{11} \cdot f_{22} - f_{12} \cdot f_{21})$

Les équations du modèle mathématique peuvent être présentées par la forme standard l'équation générale de transport suivante :

$$\frac{\partial(U^c \phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(V^c \phi)}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma_{\phi \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma_{\phi \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + S_{\phi} \dots \dots \dots (3.20)$$

Avec :

Equation	ϕ	$\Gamma_{\phi\xi}$	$\Gamma_{\phi\eta}$	S_ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant ζ	U	$J \frac{q_{11}}{Re}$	$J \frac{q_{22}}{Re}$	$-\left(f_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{21} \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{Re} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{Re} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right]$
Quantité de mouvement suivant η	V	$J \frac{q_{11}}{Re}$	$J \frac{q_{22}}{Re}$	$-\left(f_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{22} \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{Re} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{Re} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right]$

Table (3.1) : Les différents termes de l'équation de transport.

3-4-3 La transformation des équations diphasiques :

Les équations diphasiques qui sont les équations des bilans au niveau de l'interface qui sont les conditions limites entre les deux fluides, Eq. (3-13) et Eq. (3-14) sont exprimées dans les coordonnées cartésiennes, de la même façon en procède à la transformation de ces équations en fonction de coordonnées indépendantes ξ, η .

La contrainte tangentielle τ_i s'écrit dans les coordonnées curvilignes comme suit :

$$A \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial U}{\partial \eta} + C \frac{\partial V}{\partial \xi} + D \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \dots\dots\dots(3.21)$$

Avec A, B, C et D sont des coefficients qui résultent de la transformation sont donnés par :

$$A = 2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^2 + \frac{\partial \xi}{\partial Y} - \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \xi}{\partial Y}$$

$$B = 2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial \eta}{\partial Y} - \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial Y}$$

$$C = 2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial \xi}{\partial Y} + \frac{\partial \xi}{\partial X} - \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^3$$

$$D = 2 \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial \eta}{\partial Y} + \frac{\partial \eta}{\partial X} - \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial X}$$

L'équation diphasique qui résulte du bilan masse s'écrit de la façon suivante :

$$V = U \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X} \dots\dots\dots(3-22)$$

Chapitre 4 : Résolution numérique.

4-1 la méthode numérique de résolution :

Le choix de la méthode des volumes finis pour la résolution du problème en question est basé sur la nature du phénomène étudié qui est un problème de la mécanique des fluides où cette méthode a montrée son efficacité.

La méthode en question dépend essentiellement de la géométrie du problème physique, pour une géométrie non complexe cette méthode est la plus recommandée pour les cas de la mécanique des fluides, dans notre cas le problème de la complexité de la géométrie est résolu à l'aide de la méthode de génération de maillage.

Un autre point majeur dans le choix de la méthode est la nature multiphasique de notre écoulement, qui exige un traitement spécifique notamment au niveau de l'interface entre les deux fluides.

La méthode des volumes finis consiste à discrétiser le domaine physique en un certain nombre de volumes entourant les nœuds du maillage constituant le domaine de calcul où seront discrétisées les équations qui régissent l'écoulement. Chaque volume de contrôle à une dimension de $\Delta\xi.\Delta\eta = 1$, les grandeurs scalaires telle que la pression et la température sont stockées dans les nœuds, par contre les grandeurs vectorielles telle que le tenseur des vitesses sont stockées au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents voir figure (4.1).

4-2 la discrétisation de l'équation générale de transport :

L'équation générale de transport écrite sous la forme standard dans le domaine de calcul avec les coordonnées elliptiques ξ,η obtenue dans le chapitre précédant est donnée par forme suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial(U^c \phi)}{\partial\xi} + \frac{\partial(V^c \phi)}{\partial\eta}}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial\xi} \left[\Gamma_{\phi\xi} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right] + \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\Gamma_{\phi\eta} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]}_2 + \underbrace{S_\phi}_{3} \dots\dots\dots(4.1)$$

L'équation de transport est écrite de sous cette forme pour représenter à la fois l'équation de continuité et les équations de quantité de mouvement voir la table (3.1) dans le troisième chapitre.

Cette équation est composée de trois termes, le premier représente le terme convectif, le deuxième représente le terme diffusif et le troisième est le terme source, ϕ représente la variable généralisée et $\Gamma_{\phi\xi}, \Gamma_{\phi\eta}$ sont les coefficients de diffusion de l'équation de transport. Les vitesses U^C, V^C sont appelées vitesses contravariantes résultantes de la transformation des coordonnées [17].

Les termes de cette équation vont être discrétisés dans deux volumes de contrôles, un volume typique pour la discrétisation des variables scalaire et l'autre pour la discrétisation des variables vectorielles, pour ce dernier il est nécessaire d'utiliser un maillage décalé.

Le décalage du maillage améliore la représentation locale de certaines intégrales de discrétisation. Le volume entourant la composante horizontale de la vitesse est décalé à droite par rapport au maillage typique; et pour la composante verticale de la vitesse, le maillage est décalé vers le haut par rapport au maillage typique ces configurations sont illustrées dans la figure ci-dessous.

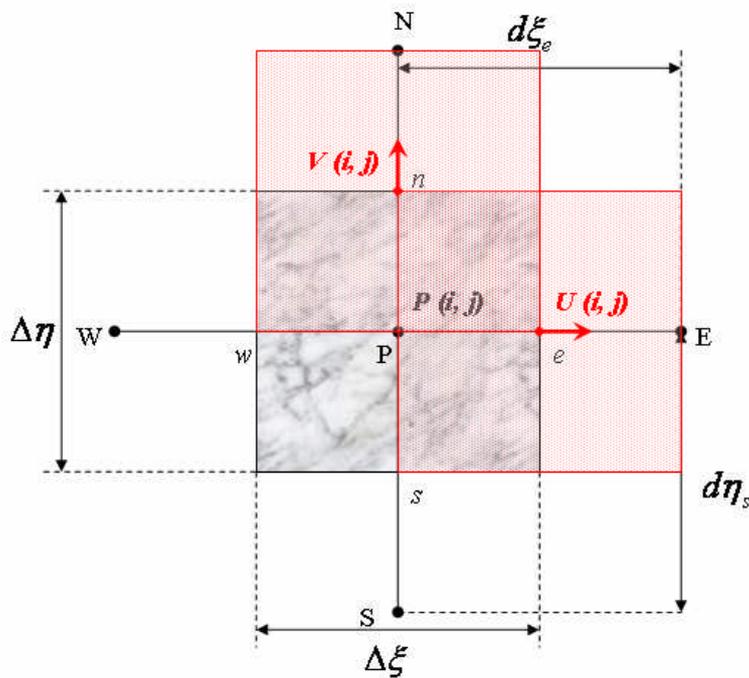


Figure (4.1) : Volume de contrôle typique pour la pression P (*motif marbre*) ;
Volumes de contrôles décalés pour U et V (*couleur rouge clair*).

4-2-1 Discrétisation de l'équation de continuité :

L'équation de continuité est donnée par la formule (4.1) en substituant les valeurs des variables dans la table (3.1), on intègre cette équation sur le volume de contrôle illustré ci-dessus, sachant que notre maillage est uniforme $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$:

$$\int\int_{w\ s}^e\int^n\left(\frac{\partial U^C}{\partial\xi} + \frac{\partial V^C}{\partial\eta}\right)d\xi d\eta = 0$$

$$\int\int_{w\ s}^e\int^n\frac{\partial U^C}{\partial\xi}d\xi d\eta + \int\int_{w\ s}^e\int^n\frac{\partial V^C}{\partial\eta}d\xi d\eta = 0$$

$$\int_s^n[U_e^C - U_w^C]d\eta_p + \int_w^e[V_n^C - V_s^C]d\xi_p = 0$$

$$[U_e^C - U_w^C]\Delta\eta_p + [V_n^C - V_s^C]\Delta\xi_p = 0$$

Sachant que notre maillage est uniforme $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$, l'équation de continuité se réduit à l'égalité suivante :

$$U_e^C - U_w^C + V_n^C - V_s^C = 0 \dots\dots\dots(4.2)$$

4-2-3 Discrétisation de l'équation générale de quantité de mouvement :

L'équation de transport donnée par (4.1) représente les deux équations de quantité de mouvement suivant ξ et suivant η , l'intégration de cette équation sur le volume de contrôle s'écrit comme suit :

$$\int\int_{w\ s}^e\int^n\left[\frac{\partial(U^C\phi)}{\partial\xi} + \frac{\partial(V^C\phi)}{\partial\eta}\right]d\xi d\eta = \int\int_{w\ s}^e\int^n\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\Gamma_{\phi\xi}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\Gamma_{\phi\eta}\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right]\right)d\xi d\eta + \int\int_{w\ s}^e\int^n S_\phi d\xi d\eta \dots\dots\dots (4.3)$$

4-2-3.1 Discrétisation du terme convectif :

$$\int\int_{ws}^e \left[\frac{\partial(U^C \phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(V^C \phi)}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta = \int\int_{ws}^e \frac{\partial(U^C \phi)}{\partial \xi} d\xi d\eta + \int\int_{ws}^e \frac{\partial(V^C \phi)}{\partial \eta} d\xi d\eta$$

$$\int_s^n [U_e^C \phi_e - U_w^C \phi_w] d\eta + \int_w^e [V_n^C \phi_n - V_s^C \phi_s] d\xi = U_e^C \phi_e - U_w^C \phi_w + V_n^C \phi_n - V_s^C \phi_s$$

Sachant que les composantes des vitesses sont considérées constantes sur faces du volume de contrôle principal et que notre maillage est uniforme, le terme convectif s'écrit alors :

$$\int\int_{ws}^e \left[\frac{\partial(U^C \phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(V^C \phi)}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta = U_e^C \phi_e - U_w^C \phi_w + V_n^C \phi_n - V_s^C \phi_s$$

La variable ϕ au niveau des faces du volume de contrôle est approchée en employant un schéma numérique, dans notre cas nous avons choisi le schéma hybride qui emploie d'une façon conditionnelle d'un de schémas : centré ou décentré, le but de ce choix est d'avoir un compromis relativement meilleur entre précision et stabilité, la variable généralisée va prendre alors la forme suivante :

$$\phi_e = f_e \phi_P + (1 - f_e) \phi_E$$

$$\phi_n = f_n \phi_P + (1 - f_n) \phi_N$$

$$\phi_s = f_s \phi_S + (1 - f_s) \phi_P$$

$$\phi_w = f_w \phi_W + (1 - f_w) \phi_P$$

f : Un coefficient qui dépend du nombre de Peclet qui est défini par le rapport de la convection sur la diffusion.

Les composantes des vitesses contravariantes au niveau des faces du volume de contrôle sont évaluées en appliquant le développement en série de Taylor avec une erreur de troncature d'ordre 2 qui nous donne :

$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2}$$

$$\phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2}$$

$$\phi_n = \frac{\phi_P + \phi_N}{2}$$

$$\phi_s = \frac{\phi_P + \phi_S}{2}$$

4-2-3.2 Discrétisation du terme diffusif :

De la même façon on intègre le terme diffusif sur le volume de contrôle, on obtient :

$$\int \int_{w_s}^e \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma_{\phi\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma_{\phi\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \right) d\xi d\eta = \int \int_{w_s}^e \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma_{\phi\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + \int \int_{w_s}^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma_{\phi\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta$$

Sachant que les coefficients $\Gamma_{\phi\xi}, \Gamma_{\phi\eta}$ sont des constantes dans notre cas d'étude, le terme diffusif s'écrit :

$$\int \int_s^n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma_{\phi\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + \int \int_{w_s}^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma_{\phi\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \Gamma_{\phi\xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e - \Gamma_{\phi\xi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w + \Gamma_{\phi\eta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n - \Gamma_{\phi\eta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s$$

Les dérivées premières de la variable ϕ sont approchées à l'aide des différences centrées :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi_e}; \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi_w}; \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta_n}; \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_s = \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta \eta_s}$$

En tenant compte de l'uniformité du maillage, le terme diffusif s'écrit alors comme suit :

$$\int \int_{w_s}^e \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma_{\phi\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma_{\phi\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \right) d\xi d\eta = \Gamma_{\phi\xi} (\phi_E - \phi_P) - \Gamma_{\phi\xi} (\phi_P - \phi_W) + \Gamma_{\phi\eta} (\phi_N - \phi_P) - \Gamma_{\phi\eta} (\phi_P - \phi_S)$$

4-2-3.3 Discrétisation du terme source :

Le terme source est donné par la table (3.1) séparément pour les deux composantes de la vitesse. Ce dernier est composé de deux termes le premier est composé de deux dérivées de la pression par rapport à ξ et η , le second terme est composé de dérivées mixtes des composantes de la vitesse.

$$\text{Pour la composante } U, \text{ le terme source est : } \underbrace{f_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{21} \frac{\partial P}{\partial \eta}}_1 + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right]}_2$$

$$\text{Pour la composante } V: f_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{22} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial V}{\partial \xi} \right]$$

Le deuxième terme peut être généralisé en introduisant la variable ϕ , par contre le premier doit être discrétisé pour la composante U et V séparément.

Pour la composante U ce terme s'écrit :

$$\iint_{w_s}^e \iint_{s}^n - \left(f_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{21} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \iint_{w_s}^e - f_{11} \frac{\partial P}{\partial \xi} d\xi d\eta + \iint_{w_s}^e - f_{21} \frac{\partial P}{\partial \eta} d\xi d\eta = f_{11} (P_P - P_E) + f_{21} (P_P - P_N)$$

Pour la composante V :

$$\iint_{w_s}^e \iint_{s}^n - \left(f_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi} + f_{22} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \iint_{w_s}^e - f_{12} \frac{\partial P}{\partial \xi} d\xi d\eta + \iint_{w_s}^e - f_{22} \frac{\partial P}{\partial \eta} d\xi d\eta = f_{12} (P_P - P_E) + f_{22} (P_P - P_N)$$

La discrétisation de la partie généralisée du terme source s'écrit de la façon suivante :

$$\iint_{w_s}^e \iint_{s}^n \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \right) d\xi d\eta = \iint_{w_s}^e \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta + \iint_{w_s}^e \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta$$

$$= \int_s^n J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w^e d\eta + \int_w^e J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_s^n d\xi = J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_e - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \Big|_w \right) + J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_n - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \Big|_s \right)$$

Dans le troisième chapitre nous avons traité les mêmes dérivées dans la discrétisation du deuxième terme de l'équation (3.5), par analogie on retrouve l'égalité suivante :

$$\int_w^e \int_s^n \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{q_{12}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{q_{21}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] \right) d\xi d\eta = \frac{1}{4 \text{Re}} J (q_{12} + q_{21}) [\phi_{EN} - \phi_{ES} - \phi_{WN} + \phi_{WS}]$$

Notant que :

$$\phi_{EN} = \phi(i+1, j+1) ; \phi_{ES} = \phi(i+1, j-1) ; \phi_{WN} = \phi(i-1, j+1) ; \phi_{WS} = \phi(i-1, j-1)$$

Les résultats des intégrales sont réarrangés sous la forme standard d'une équation de discrétisation algébrique, on obtient deux équations algébriques de discrétisation de la quantité de mouvement suivant ξ et suivant η .

- L'équation algébrique de discrétisation de la quantité de mouvement suivant ξ :

La forme standard de l'équation algébrique de discrétisation pour la méthode des volumes finis est donnée par l'équation suivante :

$$A_P U_P = A_E U_E + A_W U_W + A_N U_N + A_S U_S + S_U$$

Notant que les points principaux du maillage P, E, W, N et S ainsi que les points sur les faces du maillage typique dans cette partie du calcul correspondent au maillage décalé vers la droite pour la vitesse U .

En introduisant le schéma hybride, les coefficients de l'équation algébrique s'écrivent sous la forme suivante : $A = D + C.f$

Avec :

D : Représente le coefficient de diffusion défini par $\Gamma_{\phi\xi}$, $\Gamma_{\phi\eta}$ dans l'équation de transport (3.18) qui prend les valeur résumées dans la table (3.1).

C : Représente le coefficient de convection U_e^C ; U_w^C ; V_n^C ; V_s^C dans le terme convectif de l'équation de transport (4.3), les coefficients donc s'écrivent comme suit :

$$A_E = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + U_e^C f_e$$

$$A_W = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + U_w^C f_w$$

$$A_N = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + U_n^C f_n$$

$$A_S = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + U_s^C f_s$$

Avec :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

Le terme source de l'équation pour la composante U s'écrit :

$$S_U = f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N) + \frac{1}{4\text{Re}} J(q_{12} + q_{21})[U_{EN} - U_{ES} - U_{WN} + U_{WS}]$$

- L'équation algébrique de discrétisation de la quantité de mouvement suivant η :

De la même façon on met l'équation de quantité de mouvement pour la composante V sous la forme standard de l'équation algébrique de discrétisation et notant que les points du maillage dans cette partie de calcul correspond au maillage décalé vers le haut pour la vitesse V :

$$A_P V_P = A_E V_E + A_W V_W + A_N V_N + A_S V_S + S_V$$

En introduisant le schéma hybride, les coefficients de l'équation algébrique s'écrivent donc :

$$A_E = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + V_e^C f_e$$

$$A_W = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + V_w^C f_w$$

$$A_N = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + V_n^C f_n$$

$$A_S = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + V_s^C f_s$$

Avec :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

Le terme source de l'équation pour la composante V s'écrit :

$$S_V = f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N) + \frac{1}{4 \text{Re}} J(q_{12} + q_{21}) [V_{EN} - V_{ES} - V_{WN} + V_{WS}]$$

4-2-4 L'équation de discrétisation de la pression :

Pour résoudre les systèmes d'équations de discrétisation des composantes des vitesses, il est nécessaire de connaître les valeurs de la pression aux points du maillage typique, faisant partie des termes sources des équations de discrétisation de la vitesse U et V .

Il nous faut donc, une équation de discrétisation de la pression à chaque point intérieur du maillage typique. Cette équation peut être obtenue en combinant les équations de discrétisation des vitesses et l'équation de continuité.

L'équation de continuité discrétisée est donnée par l'équation (4.2) :

$$U_e^C - U_w^C + V_n^C - V_s^C = 0$$

L'équation de discrétisation de U_p obtenue suite à la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant la coordonnée ξ :

$$A_P U_P = A_E U_E + A_W U_W + A_N U_N + A_S U_S + S_U$$

Avec:

$$A_E = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + U_e^C f_e$$

$$A_W = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + U_w^C f_w$$

$$A_N = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + U_n^C f_n$$

$$A_S = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + U_s^C f_s$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_U = f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N) + \frac{1}{4\text{Re}} J(q_{12} + q_{21}) [U_{EN} - U_{ES} - U_{WN} + U_{WS}]$$

L'équation de discrétisation peut être réécrite sous la forme:

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S'_U + f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)$$

Avec :

$$S_U = S'_U + f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)$$

Aussi, on remarque que la position P_u du maillage décalé coïncide avec la position e du maillage typique. Et donc, l'équation de discrétisation de $U_{P_u} = U_e$ devient:

$$A_P U_e = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S'_U + f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)$$

Cette équation est réécrite comme suit:

$$U_e = \frac{A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S'_U + f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)}{A_P}$$

$$U_e = \hat{U}_e + \frac{f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)}{A_P}$$

Avec:

$\hat{U}_e = \frac{A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S'_U}{A_P}$, cette variable est appelée la pseudo vitesse suivant la direction ξ .

Par analogie, on peut écrire cette égalité pour U_w :

$$U_w = \hat{U}_w + \frac{f_{11}(P_W - P_P) + f_{21}(P_P - P_N)}{A_P}$$

Nous avons aussi obtenu l'équation de discrétisation de V_P :

$$A_P V_P = A_E V_E + A_W V_W + A_N V_N + A_S V_S + S'_V$$

Avec :

$$A_E = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + V_e^C f_e$$

$$A_W = J \frac{q_{11}}{\text{Re}} + V_w^C f_w$$

$$A_N = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + V_n^C f_n$$

$$A_S = J \frac{q_{22}}{\text{Re}} + V_s^C f_s$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S'_U = f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N) + \frac{1}{4 \text{Re}} J(q_{12} + q_{21}) [V_{EN} - V_{ES} - V_{WN} + V_{WS}]$$

L'équation de discrétisation est réécrite sous la forme:

$$A_P V_{P_v} = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S'_V + f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N)$$

Avec:

$$S'_V = S'_V + f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N)$$

Aussi on remarque que la position P_v du maillage décalé vers le haut coïncide avec la position n du maillage typique, on peut écrire donc :

$$A_P V_n = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S'_V + f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N)$$

L'équation ci-dessus, peut être écrite sous la forme:

$$V_n = \frac{A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S'_V + f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N)}{A_P}$$

$$V_n = \hat{V}_n + \frac{f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N)}{A_P}$$

Avec:

$$\hat{V}_n = \frac{A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S'_V}{A_P}, \text{ cette variable est appelée la pseudo vitesse}$$

suivant la direction η .

Par analogie, on peut obtenir à la position s , l'équation suivante :

$$V_s = \hat{V}_s + \frac{f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_S - P_P)}{A_P}$$

Maintenant, on remplace les quatre équations ci-dessus dans l'équation de discrétisation de continuité (4-2):

$$U_e = \hat{U}_e + \frac{f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)}{A_{P_U}}$$

$$U_w = \hat{U}_w + \frac{f_{11}(P_W - P_P) + f_{21}(P_P - P_N)}{A_{P_U}}$$

$$V_n = \hat{V}_n + \frac{f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N)}{A_{P_V}}$$

$$V_s = \hat{V}_s + \frac{f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_S - P_P)}{A_{P_V}}$$

L'équation de continuité (4-2) donnée par:

$$U_e^C - U_w^C + V_n^C - V_s^C = 0$$

Sachant que les vitesses contravariantes s'écrivent comme suit :

$$U^C = f_{11}U + f_{12}V, \quad V^C = f_{21}U + f_{22}V$$

L'équation de continuité peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$f_{11}(U_e - U_w) + f_{22}(V_n - V_s) + f_{21}(U_n - U_s) + f_{12}(V_e - V_w) = 0$$

La substitution nous donne l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & f_{11} \left(\left[\hat{U}_e + \frac{f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)}{A_{P_U}} \right] - \left[\hat{U}_w + \frac{f_{11}(P_W - P_P) + f_{21}(P_P - P_N)}{A_{P_U}} \right] \right) + \\ & f_{22} \left(\left[\hat{V}_n + \frac{f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_P - P_N)}{A_{P_V}} \right] - \left[\hat{V}_s + \frac{f_{12}(P_P - P_E) + f_{22}(P_S - P_P)}{A_{P_V}} \right] \right) + \\ & f_{21}(U_n - U_s) + f_{12}(V_e - V_w) = 0 \end{aligned}$$

Cette équation est réécrite sous la forme d'une équation de discrétisation de la pression:

$$A_P P_P = A_E P_E + A_W P_W + A_N P_N + A_S P_S + S_P$$

Avec:

$$A_E = \frac{f_{11}^2}{A_{P_U}}$$

$$A_W = \frac{f_{11}^2}{A_{P_U}}$$

$$A_N = \frac{f_{22}^2}{A_{P_v}}$$

$$A_S = \frac{f_{22}^2}{A_{P_v}}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_P = f_{11}(\hat{U}_w - \hat{U}_e) + f_{22}(\hat{V}_s - \hat{V}_n) + \frac{1}{4}f_{21}(U_{es} - U_{en} - U_{wn} + U_{ws}) + \frac{1}{4}f_{12}(V_{es} - V_{en} - V_{wn} + V_{ws})$$

A chaque point intérieur du maillage typique on a une équation algébrique de discrétisation de pression. La solution de l'ensemble des équations de discrétisation nous donne la pression aux points du maillage typique. Cependant, la solution du système d'équations de discrétisation de la pression nécessite la connaissance des pseudo vitesses présentes dans les sources des équations citées.

La source de chaque équation de discrétisation de pression est une fonction des pseudo vitesses qui sont fonctions des vitesses voisinant le point considéré et aussi en fonction des vitesses adjacentes qui résultent de la transformation. Et donc, on constate que pour résoudre les équations de discrétisation des vitesses il nous faut la pression (qui n'est pas connue) et pour résoudre l'équation de discrétisation de la pression il nous faut les vitesses (qui ne sont pas connues).

Ce couplage des équations de discrétisation des vitesses et de pression nécessite une solution simultanée et itérative de ces équations. La solution commence par des estimations qui doivent être corrigées.

On définit les variables correctes comme des sommes des variables estimées plus des corrections:

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V'$$

$$P = P^* + P'$$

Les variables étoilées sont les estimations et les variables primées sont les corrections.

Si on utilise ces définitions dans les équations de discrétisation des vitesses:

$$A_P U_{P_u} = A_E U_{E_u} + A_W U_{W_u} + A_N U_{N_u} + A_S U_{S_u} + S'_U + f_{11}(P_P - P_E) + f_{21}(P_P - P_N)$$

$$A_P V_{P_v} = A_E V_{E_v} + A_W V_{W_v} + A_N V_{N_v} + A_S V_{S_v} + S'_V + f_{12}(P_P - P_N) + f_{22}(P_P - P_N)$$

On obtient les équations de discrétisation des estimations:

$$A_P U^*_{P_u} = A_E U^*_{E_u} + A_W U^*_{W_u} + A_N U^*_{N_u} + A_S U^*_{S_u} + S'_U + f_{11}(P^*_P - P^*_E) + f_{21}(P^*_P - P^*_N)$$

$$A_P V^*_{P_v} = A_E V^*_{E_v} + A_W V^*_{W_v} + A_N V^*_{N_v} + A_S V^*_{S_v} + S'_V + f_{12}(P^*_P - P^*_N) + f_{22}(P^*_P - P^*_N)$$

Ces équations montrent qu'avec une estimation de la pression on ne peut obtenir qu'une estimation des vitesses.

Les équations de discrétisation des corrections sont:

$$A_P U'_{P_u} = A_E U'_{E_u} + A_W U'_{W_u} + A_N U'_{N_u} + A_S U'_{S_u} + f_{11}(P'_P - P'_E) + f_{21}(P'_P - P'_N)$$

$$A_P V'_{P_v} = A_E V'_{E_v} + A_W V'_{W_v} + A_N V'_{N_v} + A_S V'_{S_v} + f_{12}(P'_P - P'_N) + f_{22}(P'_P - P'_N)$$

On constate que les corrections des vitesses à un point sont fonctions des corrections de la pression et des corrections des vitesses aux points voisins. Donc si on a la correction de la pression, on peut résoudre les deux systèmes d'équations de discrétisation des corrections des vitesses pour obtenir ces dernières. Cependant on peut s'affranchir de la solution des deux systèmes cités si on redéfinit les corrections des vitesses seulement en fonction de la correction de la pression:

$$A_P U'_{P_u} = f_{11}(P'_P - P'_E) + f_{21}(P'_P - P'_N)$$

$$A_P V'_{P_v} = f_{12}(P'_P - P'_N) + f_{22}(P'_P - P'_N)$$

Avec ces définitions, si on a la correction de la pression, on calcule directement les corrections des vitesses. Maintenant il est temps de discuter la détermination de la correction de la pression. On peut démontrer facilement que:

$$U_e = U_e^* + U_e' = U_e^* + f_{11}(P_P' - P_E') + f_{21}(P_P' - P_N')$$

$$U_w = U_w^* + U_w' = U_w^* + f_{11}(P_W' - P_P') + f_{21}(P_P' - P_N')$$

$$V_n = V_n^* + V_n' = V_n^* + f_{12}(P_P' - P_E') + f_{22}(P_P' - P_N')$$

$$V_s = V_s^* + V_s' = V_s^* + f_{12}(P_P' - P_E') + f_{22}(P_P' - P_N')$$

On utilise ces quatre définitions dans l'équation de discrétisation de continuité on obtient:

$$A_P P_P' = A_E P_E' + A_W P_W' + A_N P_N' + A_S P_S' + S_P'$$

Avec:

$$A_E = \frac{f_{11}^2}{A_{PU}}$$

$$A_W = \frac{f_{11}^2}{A_{PU}}$$

$$A_N = \frac{f_{22}^2}{A_{PV}}$$

$$A_S = \frac{f_{22}^2}{A_{PV}}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S_{p'} = f_{11}(U_w^* - U_e^*) + f_{12}(V_s^* - V_n^*) + \frac{1}{4}f_{21}(U_{es} - U_{en} - U_{wn} + U_{ws}) + \frac{1}{4}f_{12}(V_{es} - V_{en} - V_{wn} + V_{ws})$$

Et donc l'équation de discrétisation de la correction de la pression est similaire à celle de la pression; la différence est que la source de l'équation de discrétisation de la correction de la pression contient les estimations des vitesses alors que la source de l'équation de discrétisation de la pression contient les pseudo vitesses.

4-2-5 Sous relaxation & critère de convergence [16]:

La sous-relaxation :

Puisqu'on a des équations non linéaires, il est désirable d'utiliser la sous relaxation. La forme explicite pour une variable générale stockée en un point peut s'écrire comme suit :

$$\phi = (1 - \alpha)\phi_p^{(K)} + \alpha\phi_p^{(K+1)}$$

(K) : Etant le nombre d'itération.

(α) : Le facteur de sous relaxation, généralement pris comme constante entre 0 et 1.

La sous-relaxation peut être introduite implicitement dans l'équation algébrique, on obtient :

$$A_p\phi_p / \alpha = A_E\phi_E + A_W\phi_W + A_N\phi_N + A_S\phi_S + S_\phi + \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)A_p\phi_p^{(K)}$$

Le critère de convergence :

La convergence est vérifiée après chaque itération en comparant le maximum des valeurs absolues des sources résiduelles su tous les volumes de contrôles pour chaque variable ϕ .

$$R_\phi = \frac{\sum A_i\phi_i + S_U}{A_p} - \phi_p$$

4-2-6 conditions aux limites :

L'écoulement étudié est caractérisé par un profil de vitesse imposé à l'entrée, la paroi rigide se déplace avec vitesse constante dans le sens de l'écoulement du liquide. L'interface entre le liquide et la bulle de Taylor se caractérise par l'absence du transfert de masse et par une contrainte de cisaillement nulle, l'écoulement est considéré laminaire le calcul se limite au niveau du film liquide avec une condition d'un régime établi.

A l'entrée de l'écoulement :

$$U_{\text{entrée}} = U_{TB} - U_P$$

$$V = 0$$

Avec :

U_{TB} : La vitesse de la bulle de Taylor.

U_P : La vitesse de la paroi.

Au niveau de la paroi :

$$U = U_P$$

$$V = 0$$

Sur l'axe de symétrie :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$V = 0$$

Dans les coordonnées généralisées cette condition s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

Sur l'axe de symétrie, la coordonnée généralisée ξ coïncide avec la coordonnée cartésienne x se qui nous permet d'écrire

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

Au niveau de l'interface :

Au niveau de l'interface nous avons la contrainte $\tau_i = 0$ et nous avons le transfert de masse qui est nul, ces deux conditions s'écrivent d'une manière générale dans le repère cartésien respectivement comme suit [6] :

$$\tau_i = \mu \left[2n_x n_y \left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x} \right) + (n_x^2 - n_y^2) \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right]_i = 0$$

$$n_x U_i + n_y V_i = 0$$

Avec U_i, V_i sont les vitesses au niveau de l'interface et n_x et n_y sont les composantes dans les coordonnées cartésiennes du vecteur normal de l'interface qui sont définies au deuxième chapitre. Le développement de ces deux équations est effectué au deuxième chapitre par un traitement de bilans, ces équations sont représentées par le bilan des contraintes tangentielles Eq. (3-21) et la condition cinématique Eq. (3-22).

$$A \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial U}{\partial \eta} + C \frac{\partial V}{\partial \xi} + D \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \dots\dots\dots(3.21)$$

$$U = EV \dots\dots\dots(3-22)$$

Avec A, B, C, D et E sont des coefficients en fonction des paramètres métriques définis au troisième chapitre.

A l'intérieur du film liquide :

En suppose un régime établi qui se traduit par :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

En écrivant les deux conditions ci-dessus dans le système des coordonnées généralisées ξ, η

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

Avec la considération de la coïncidence des coordonnées cartésiennes et les coordonnées généralisées dans ce cas $\xi = x$, La condition du régime établi dans le nouveau système s'écrit :

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0$$

4-2-6 La solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation:

Pour résoudre l'ensemble des systèmes d'équations de discrétisation des vitesses, de la pression, on suit l'algorithme SIMPLER [**Patankar**] (**Semi-Implicit-Pressure-Linked-Equation-Revised**):

- 1) On commence par une initialisation du champ des vitesses.
- 2) Avec le champ de vitesse initial, on calcule les pseudo vitesses: \hat{U} et \hat{V} .
- 3) Avec les pseudo vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la pression et obtenir une estimation de cette dernière: P^*
- 4) L'estimation de la pression est utilisée dans les équations de discrétisation des vitesses. Alors, les systèmes d'équations de discrétisation des vitesses sont résolus (par la méthode itérative de balayage) et on obtient les estimations des vitesses: U^* et V^* .

- 5) Avec les estimations des vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la correction de la pression et obtenir une estimation de cette dernière: P'
- 6) Avec la correction de la pression, on calcule les corrections des vitesses et on corrige le champ de vitesse.
- 7) On vérifie la convergence du calcul.

L'algorithme de Thomas est utilisé pour la résolution des systèmes d'équations linéaires qui sont résultats de la discrétisation.

Chapitre 5 : Résultats et discussion.

Dans cette partie on présente les résultats numériques obtenus de la distribution de la vitesse autour du nez de la bulle de Taylor et dans la partie laminaire du film liquide, ainsi que les différents profils de la vitesse axiale et les profils de la contrainte de cisaillement appelée la contrainte pariétale. La figure ci-dessous illustre les différentes zones de l'écoulement dans la partie liquide qui est notre domaine de calcul.

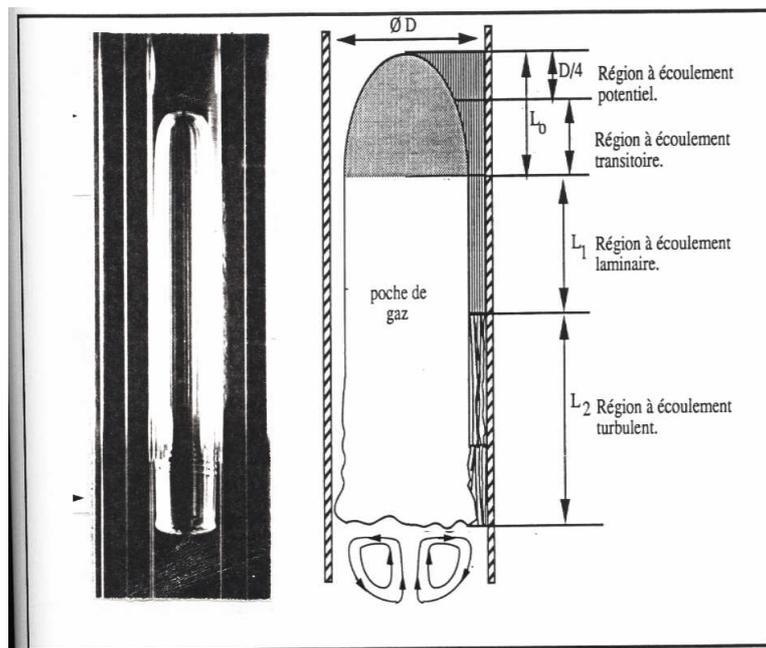


Figure (5-1) : Les différents régimes d'écoulements le long de la bulle de Taylor.

Selon les études précédentes [1], les longueurs de ces différentes zones de l'écoulement sont : $L_0 = 5$ cm, $L_1 = 10$ cm, $L_2 = 22$ cm. Dans la présente étude, le domaine physique se limite à la région de l'écoulement laminaire, la tension superficielle est négligée, le diamètre nominal est de 5 cm et la vitesse moyenne à l'entrée de l'écoulement est de 0.25 m/s et l'épaisseur du film liquide est de 5mm, les paramètres physiques du liquide sont : $\mu = 0.001$ Ns / m², $\rho = 1000$ kg / m³ ces paramètres sont ceux utilisés dans l'étude de Clarke & Issa [8] ainsi que Mao & Duckler [6].

Les études expérimentales ont démontrées que pour une large gamme de la viscosité et la tension superficielle la valeur de la vitesse peut être exprimée en fonction du nombre de Froude qui est défini ci-dessous :

$$Fr = \frac{U_N}{\sqrt{gD}} = Cte$$

Les études expérimentales ont démontrées que pour des faibles valeurs de la tension superficielle ainsi que la viscosité dans le cas d'un écoulement ascendant dans un liquide stagnant, les valeurs de cette constante varies comme suivant : $Fr = 0.35 \pm 0.05$. La discussion des résultats obtenus portera sur :

- L'aspect qualitatif ainsi que quantitatif de la distribution du champ de la vitesse et la contrainte de cisaillement dite la contrainte pariétale dans le film liquide qui représente un grand intérêt dans ces cas d'écoulement à bulle de Taylor.
- L'effet de l'épaisseur ainsi que la forme du nez de la bulle sur les vitesses dans le film liquide et la contrainte pariétale.
- La comparaison de ces résultats avec les résultats expérimentaux et numériques obtenus par Mao & Duckler [6], et également les résultats expérimentaux obtenus par Benattallah [7] ainsi que les résultats de Zhao [10].

5-1 La distribution du champ de la vitesse :

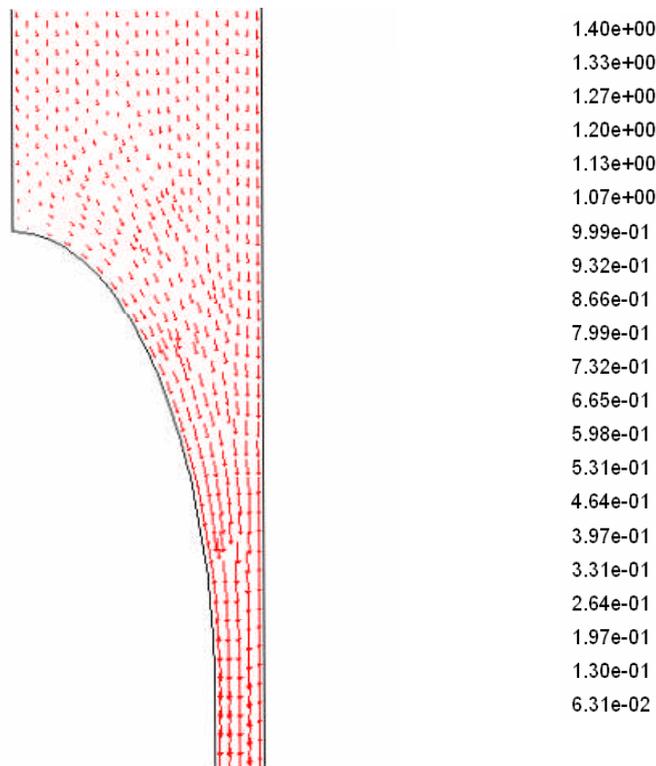


Figure (5-2) : Champ de vitesse autour de la bulle de Taylor.

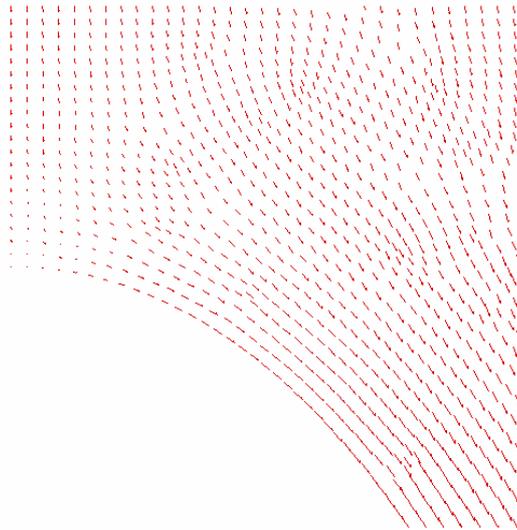


Figure (5-3) : Zoom sur la partie du nez de la bulle.

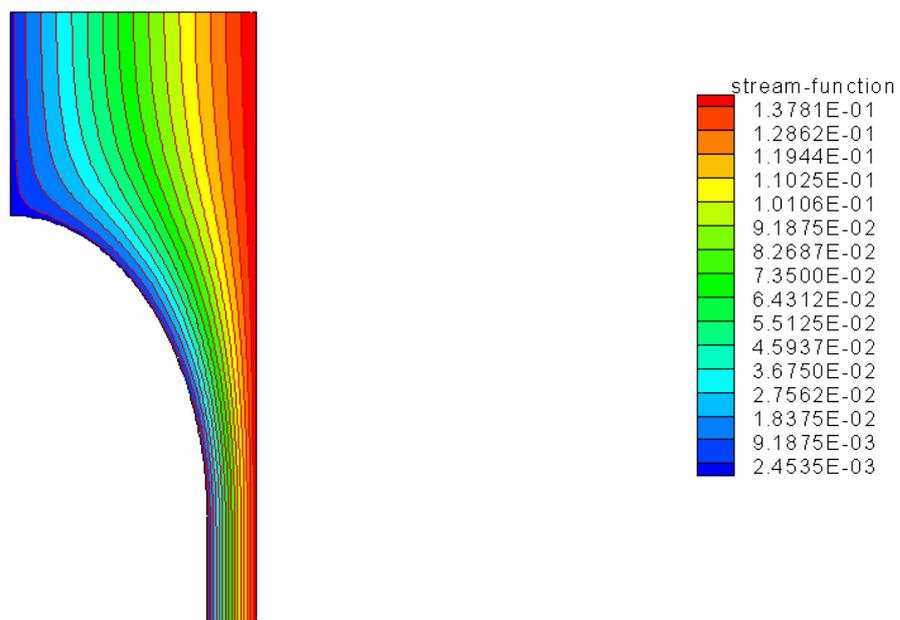


Figure (5-4) : Lignes de courant

Dans la figure (5-2) qui représente une partie de la bulle de Taylor d'une longueur de 15cm pour le cas d'un liquide stagnant le champ de vitesse est représenté par des vecteurs relatifs à la valeur de la vitesse. On observe que les vitesses diminuent et s'annulent au voisinage du nez de la bulle de Taylor puis commence à augmenter au niveau de l'interface qui est caractérisée par une contrainte interfaciale nulle, ce qui donne une valeur maximale de la vitesse le long de cette frontière. Le profile du nez de la bulle est tracée en fonction des résultats de la corrélation de Dumitrescu [4], ce profile est le même dans le travail de Moa & Duckler [6] ainsi que Zhao [10] et Benattallah [7].

Dans la région de l'écoulement potentiel sur la figure (5-3) on remarque la naissance de la composante radiale de la vitesse du liquide du à la propriété de glissement de l'interface, cette vitesse atteint sa valeur maximale qui de l'ordre de **0.22 m/s** on remarque que cette valeur est très proche de la valeur de la vitesse axiale à l'entrée de l'écoulement. La contribution de cette composante de la vitesse est significative dans cette région, elle affecte la vitesse axiale dans le sens de l'écoulement et par conséquent affecte la contrainte pariétale dans cette région.

La région de transition est caractérisée par une diminution de la vitesse radiale et par conséquent une augmentation de la vitesse axiale qui atteint la valeur moyenne de **0.75 m/s**. Cette région est caractérisée par une diminution de l'épaisseur autour de la bulle qui décroît rapidement dans la région de nez et graduellement approche de l'épaisseur d'équilibre du film liquide ce qui contribue à l'accélération de l'écoulement.

Dans la région de l'écoulement laminaire le régime tend à l'établissement, cette zone est caractérisée par une épaisseur constante du film liquide, la vitesse maximale au sein du liquide atteint la valeur de **1.40 m/s**, par comparaison avec la simulation de Zhao [10] pour les mêmes paramètres et avec une vitesse initiale de **0.25 m/s** la vitesse maximale dans le film liquide atteint l'ordre de **1.0 m/s**

La figure (5-4) montre les lignes de courants autour de la bulle de Taylor, les deux figures ci-dessous illustrent la distribution des composantes de la vitesse axiale U et radiale V . on constate que la vitesse U atteint son maximum au niveau de l'interface liquide-gas qui se caractérise par une contrainte de cisaillement nulle. La vitesse V atteint son maximum au voisinage de l'interface mais uniquement proche du nez de la bulle de Taylor figure (5-6) sa valeur est de l'ordre de 0.23 m/s.

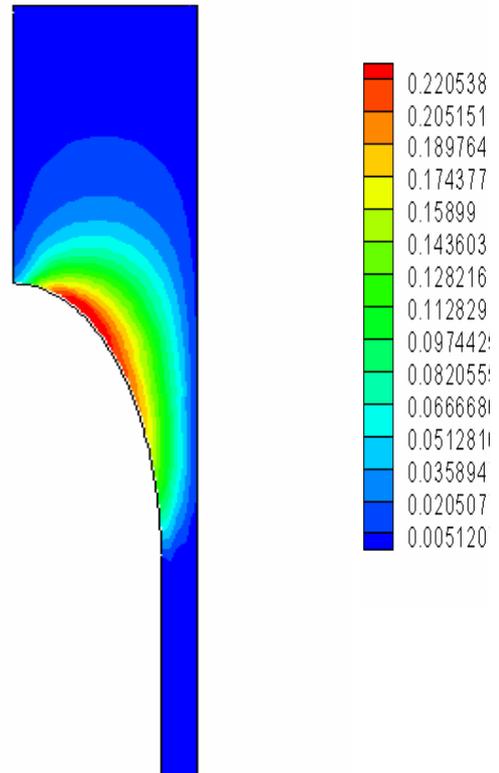
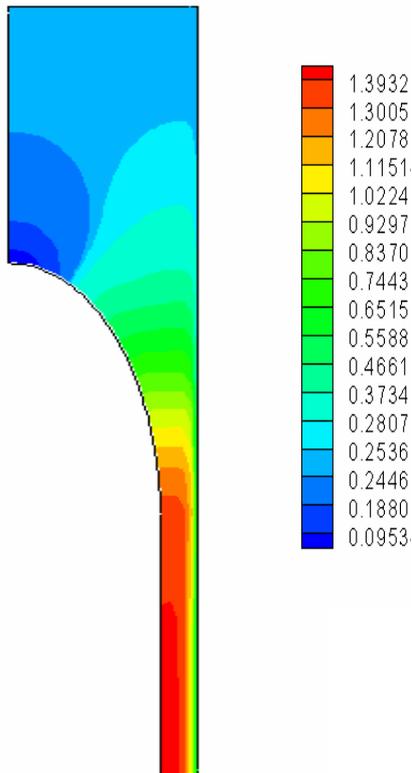


Figure (5-5): Champ de la vitesse axiale U .

Figure (5-6): Champ de la vitesse radiale V .

5-2 Les différents profils de la vitesse axiale :

Cette figure montre la variation de la vitesse axiale à partir de l'entrée de l'écoulement sur l'axe de symétrie jusqu'au nez de la bulle et sur l'interface. Sur l'axe de symétrie la vitesse est uniforme jusqu'à **2cm** au dessus de la bulle de Taylor, puis elle commence sa diminution pour atteindre sa valeur minimale au sommet du nez de la bulle où elle s'annule.

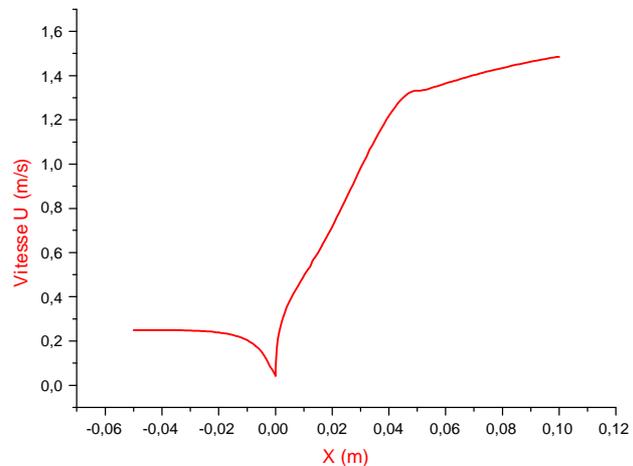


Figure (5-7) : Profil de vitesse de la composante $U(x)$ sur l'axe de symétrie et l'interface.

Au niveau de l'interface la vitesse commence son évolution rapide jusqu'à atteindre la valeur de **1.4 m/s** qui coïncide avec la valeur minimale de l'épaisseur du film liquide à $x = 0.05m$.

Le 3^{ème} palier dans la figure (5-7) représente un régime quasi-établi avec une légère augmentation de la vitesse sur l'interface dans la région du film liquide. La figure (5-8) montre le profil de la vitesse axiale à l'intérieur du film liquide en fonction de la position radiale pour 3 positions différentes, proche de l'interface à $y = 0.021m$, au milieu du film liquide à $y = 0.0225m$ et proche de la paroi à $y = 0.024m$. La courbe en bleu qui correspond au profil de la vitesse à 1mm de la paroi présente des légères fluctuations de la vitesse dans la région de transition, la vitesse atteint sa valeur maximale de 0.9 m/s à l'entrée de la région laminaire puis diminue progressivement pour atteindre une vitesse constante plus loin selon la tendance de la courbe.

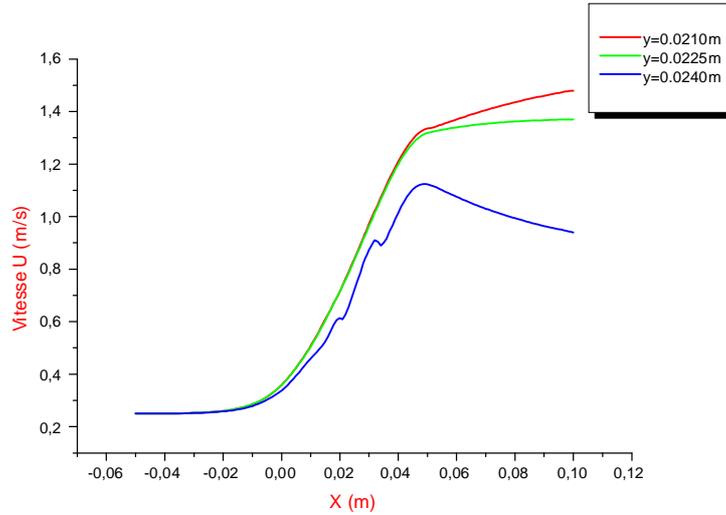


Figure (5-8) : Profil de vitesse de la composante U(x) par rapport à la position y

La courbe en vert correspond au profil de la vitesse au milieu du film liquide qui montre une évolution de la vitesse axiale son fluctuation qui atteint son maximum au même point avec une valeur de 1.40 m/s, dans la région laminaire ce profil de vitesse montre un régime établi plus visible. La dernière courbe illustre la variation de la vitesse à 1mm de l'interface qui coïncide avec la courbe précédente jusqu'à atteindre la fin de la région transitoire, par contre dans la partie laminaire la vitesse continue à augmenter légèrement.

5-3 Les différents profils de la vitesse radiale :

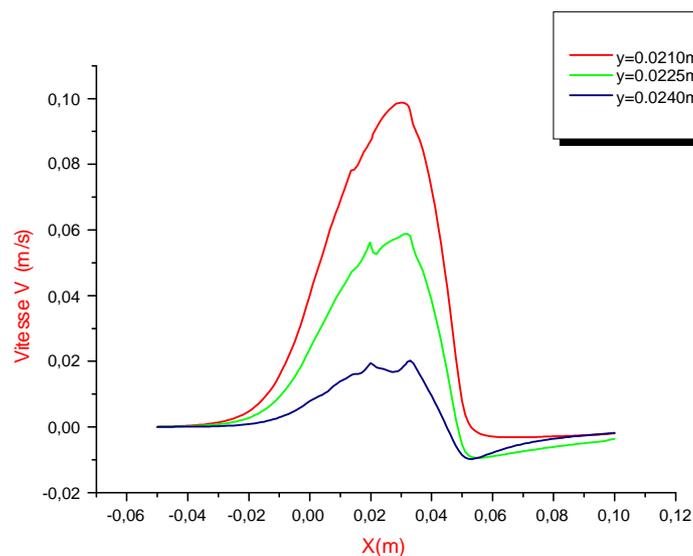


Figure (5-9) : Profil de vitesse de la composante V(x) par rapport à la position y

La figure ci-dessus montre la variation de la vitesse dans la direction de y dite vitesse radiale le long de l'écoulement pour les 3 position précédentes de y . on remarque que cette vitesse n'est significative qu'au niveau de l'interface, la courbe en rouge qui correspond $y = 0.021m$ la vitesse atteint **0.1 m/s** cette position est à 1mm de l'interface.

5-4 L'effet de l'épaisseur du film liquide sur le profil de la vitesse axiale :

La figure (5-10) montre l'effet de valeur de l'épaisseur sur la vitesse axiale du liquide dans la région de l'écoulement laminaire, on remarque que cet effet remonte même aux régions à écoulement transitoire et à écoulement potentielle. L'augmentation de l'épaisseur de 0.5mm à engendrer une diminution de la vitesse à $x = 0.05m$ de 2.2 m/s à 1.9 m/s pour $e= 3.5mm$ et $e= 3 mm$ respectivement.

Qualitativement le profil de vitesse pour $e = 5mm$ présente un régime établi le long du film liquide par rapport aux autres courbes qui correspondent à $e = 3.5mm$ et $3mm$. On remarque que la variation de la vitesse du liquide est très sensible à la valeur de l'épaisseur du film liquide notamment dans limite de la région de l'écoulement transitoire à $x = 0.05m$ où la vitesse a diminuée de 14% pour une augmentation de 0.5mm.

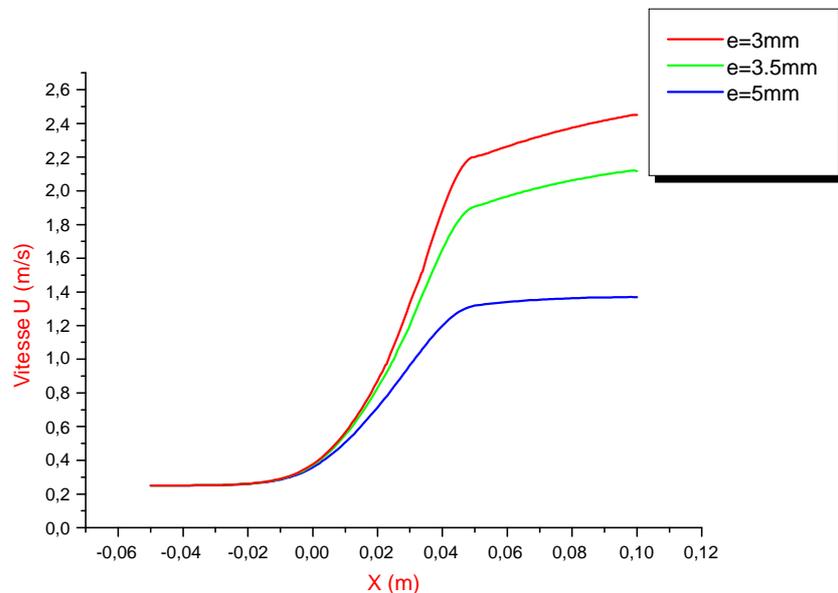


Figure (5-10) : Profils de la vitesse $U(x)$ en fonction de l'épaisseur du film liquide.

5-5 Les différents profils de la contrainte pariétale :

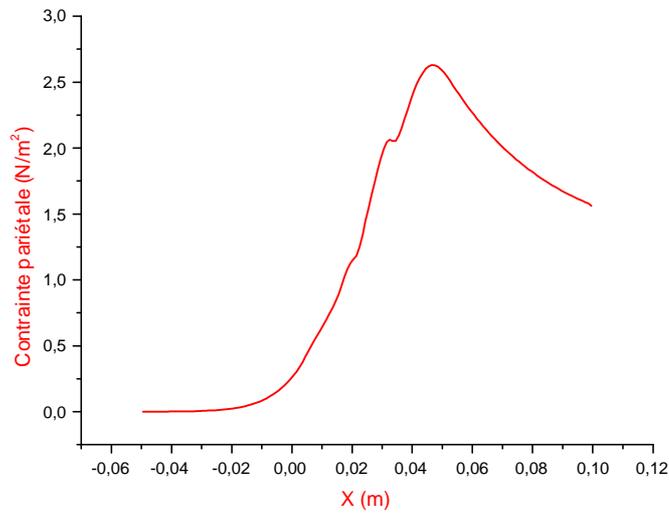


Figure (5-11) : Le profil de contrainte pariétale

Cette figure (5-11) montre la contrainte de cisaillement au niveau de la paroi en fonction x , cette contrainte appelée pariétale est exprimée en N/m^2 .

La naissance de cette contrainte commence un peu plus haut du nez de la bulle sur la paroi à $x = -0,02m$ puis continue son évolution jusqu'à atteindre sa valeur maximale qui est de l'ordre de $2,7 N/m^2$. Dans cette région de transition l'évolution de la contrainte pariétale correspond quantitativement avec les résultats des études de Mao & Duckler [6] voir Figure (5-11).

En ce concerne la région laminaire dans cette figure, on remarque une diminution de la contrainte pour atteindre une valeur stable plus loin dans le film liquide, dans cette partie les valeurs de la contrainte dans la présente étude ne correspond pas aux résultats de Mao & Duckler [6] voir figure (5-12), dans ce cas la contrainte pariétale continue à augmenter le long du film liquide dans la région de turbulence.

Dans la figure suivante sont exposés les résultats de l'évolution de la contrainte pariétale pour le cas expérimental et celui de la simulation de Mao & Duckler [6] ainsi que le résultats de la simulation de Zhao [10].

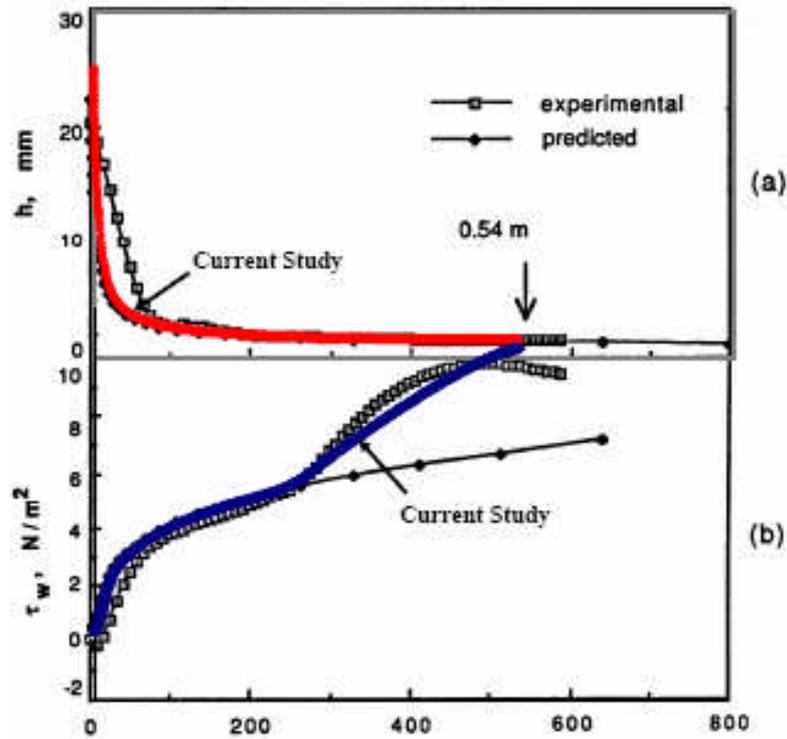


Figure (5-12) : Résultats expérimentaux & numériques de la contrainte pariétale dans l'étude de Mao & Duckler [6] et Zhao [10] (Courbe en bleu).

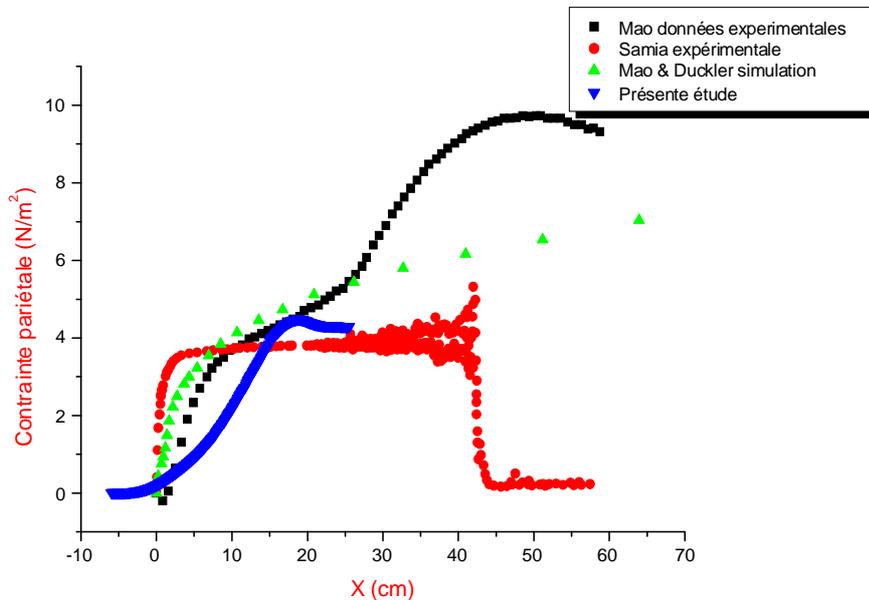


Figure (5-13) : Comparaison de la contrainte pour un diamètre $D= 1.06$ cm, épaisseur du film liquide $e= 0.04$ cm et vitesse initiale de 6.7 cm/s et de $L_p= 25$ cm.

Sur la figure (5-13) on a la comparaison directe des résultats expérimentaux de samia [7] et de Mao & Duckler [6] et ceux de la présente étude pour les mêmes paramètres cités ci-dessus. Qualitativement les valeurs de la contrainte pariétale dans les deux régions de l'écoulement potentiel et transitoire c'est-à-dire autour du nez de la bulle sont très proches en terme d'ordre de grandeur, par exemple à 'entrée de la région laminaire la contrainte dans le travail de Samia est de $\tau_w = 3.78 N / m^2$ et dans la présente étude est de $\tau_w = 4.5 N / m^2$.

Dans la région du film liquide on constate que pour les deux courbes en rouge et bleu la contrainte est quasi-uniforme dans cette zone laminaire. La courbe en bleu qui représente le résultat de la contrainte dans la présente étude se caractérise par une légère baisse.

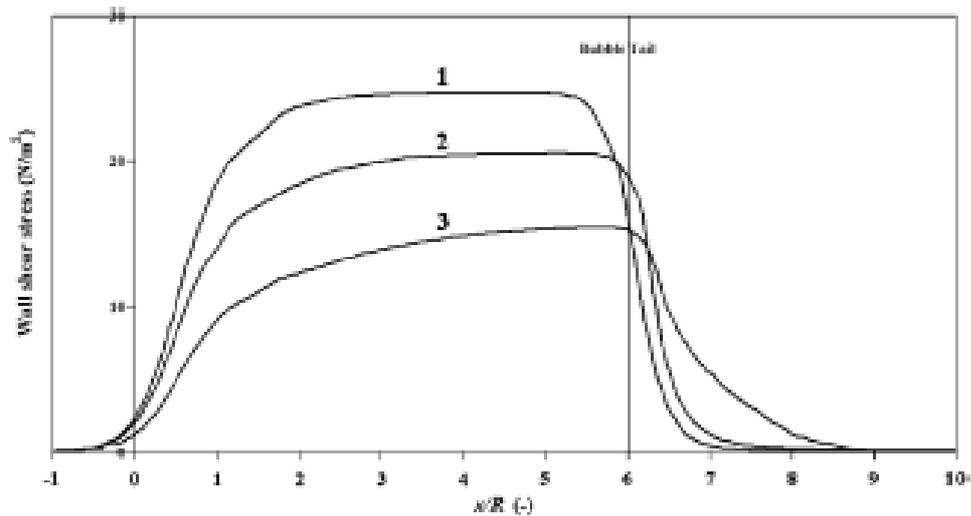


Figure (5-14) : La contrainte pariétale dans le travail de Taha & Cui [9] pour le cas d'un écoulement à bulle de Taylor dans un liquide stagnant pour différentes valeurs de N_f (nombre adimensionnel relatif à la viscosité).

La figure ci-dessus montre l'évolution de la contrainte de cisaillement dite contrainte pariétale dans liquide qui le glycérol pour différentes valeurs de l'inverse de la viscosité pour voir l'effet de la viscosité sur la contrainte ce travail a été établi par Taha & Cui [9].

L'importance de cette figure pour la présente étude se focalise sur l'aspect qualitatif de l'évolution de la contrainte dans les deux régions à écoulement potentiel et transitoire, on voit clairement que le profil de la contrainte dans la figure (5-10) est similaire à celui dans la figure ci-dessus.

5-6 L'effet de l'épaisseur du film liquide sur le profil de la contrainte pariétale :

La figure ci-dessous illustre l'effet de l'épaisseur du film liquide sur la variation de la contrainte pariétale, on remarque que la contrainte est inversement proportionnelle l'épaisseur c'est-à-dire plus le film liquide est mince plus la contrainte est élevée.

Dans cette figure le profil de la contrainte présente des fluctuations qui correspondent à l'écoulement transitoire dans cette région.

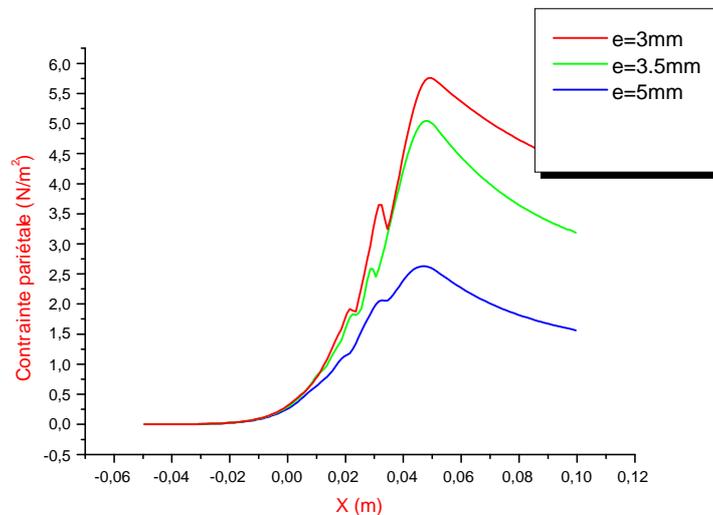


Figure (5-15) : Profils de la contrainte pariétale en fonction de l'épaisseur du film liquide.

Dans le cas de $e = 5\text{mm}$ la valeur maximale de la contrainte est de l'ordre de $2,7\text{ N/m}^2$ et pour $e = 3\text{mm}$ cette valeur augmente jusqu'à $5,8\text{ N/m}^2$. On remarque également que pour une épaisseur de $e = 3,5\text{mm}$ la valeur de la contrainte est de $5,0\text{ N/m}^2$, c'est-à-dire pour $0,5\text{mm}$ la contrainte a augmenté de 14%. On a retrouvé le même pourcentage pour l'effet de l'épaisseur sur la vitesse dans la figure (5-8) ce qui est logique car la contrainte n'est qu'une dérivée de la vitesse liée par la relation suivante :

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial U(x)}{\partial y} \right)_w$$

5-7 Explication du caractère décroissant de la contrainte dans la région laminaire :

La connaissance de l'évolution de la contrainte pariétale dans les écoulements diphasique est très importante, notamment dans les écoulements à bulle de Taylor le long du film liquide. Cette contrainte varie sensiblement en fonction de la vitesse de la bulle pour le cas d'un liquide en repos et en fonction du profil ainsi que l'épaisseur du film liquide.

On a remarqué que le profil de la contrainte pariétale dans cette étude la région de l'écoulement potentiel ainsi que dans la région de l'écoulement transitoire concorde avec les résultats expérimentaux et numériques des travaux cités dans ce chapitre, par contre dans la région laminaire le profil de la présente étude présente un caractère décroissant qui ne correspond pas aux travaux antérieurs. Dans le film liquide le régime est supposé établi dans la région de l'écoulement laminaire ce qui implique un profil de la contrainte pariétale qui doit être relativement constant qui n'est pas le cas dans ce travail.

La décroissance de la contrainte pariétale dans la région laminaire du film liquide résulte de plusieurs paramètres qui relèvent des choix et des restrictions pour le code de calcul élaboré dans la présente étude, les paramètres les plus significatifs dans ce cas sont :

- La condition aux limites pour un régime établi dans le film liquide qui implique un débit constant. On a constaté que la vitesse au niveau de l'interface continue à augmenter dans cette région figure (5-6) et pour vérifier cette condition on remarque que la vitesse au voisinage de la paroi diminue figure (5-6), on remarque que la valeur maximale de la contrainte est atteinte juste à l'entrée de la région laminaire puis elle diminue progressivement, ce qui explique que si la vitesse au niveau de l'interface est restée constante, la contrainte reste dans son maximum le long du film liquide.
- Dans la présente étude on a négligé l'effet de la tension superficielle qui contribue dans le bilan de la quantité de mouvement chapitre2, Eq (2-10) et qui va agir sur les vitesses au niveau de l'interface.
- Dans les études expérimentales pour les cas des écoulements à bulle de Taylor l'observation indique que l'interface dans le film liquide ne correspond pas à une ligne droite qui est le cas dans la présente étude, l'épaisseur décroît continuellement le long du film.

Ces trois paramètres cités ci-dessus sont responsables du caractère décroissant de la contrainte dans la région du film liquide pour le cas de la présente étude. D'autres facteurs peuvent être responsables également de ce résultat de la contrainte pariétale comme par exemple l'effet du maillage au voisinage de la paroi, les instabilités du code de calcul et le calcul des paramètres métrique dans le codes de calcul pour la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques, ce qui nécessite un travail plus approfondi pour aboutir un arriver à des résultats satisfaisants.

Conclusion et perspectives.

Les objectifs fixés au départ de ce travail ont été atteints, on les résume dans les points suivants :

- Etablir les équations qui régissent l'écoulement diphasique à partir des bilans globaux pour obtenir des équations locales et les conditions de l'interface.
- Transformer le domaine physique en un domaine de calcul en utilisant la méthode appelée "Grid Generation".
- Transformer les équations qui régissent l'écoulement et les conditions d'interface dans le nouveau système de coordonnées.
- Utiliser la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations transformées en respectant la forme générale de l'équation de transport.
- Elaborer un code de calcul en Fortran qui traite l'écoulement dans la région laminaire autour de la bulle de Taylor.
- Comparer les résultats obtenus de la contrainte de cisaillement "la contrainte pariétale" avec les données expérimentales et numériques des travaux similaires.

Les résultats obtenus correspondent visiblement avec les données qui existent dans la littérature notamment avec les travaux récents de Taha & Cui [9]. Quantitativement nos résultats correspondent parfaitement aux données des travaux mentionnés dans la discussion des résultats. Qualitativement cette correspondance est valable uniquement dans les deux régions à écoulement potentiel et à écoulement transitoire. Ces résultats ne correspondent pas aux attentes dans la région du film liquide.

L'amélioration de ce code de calcul peut se faire en incluant des paramètres physiques ainsi que numériques, les changements ci-dessous sont considérés comme nos perspectives :

- Considérer la tension superficielle qui joue un rôle très important au niveau de l'interface gaz-liquide notamment pour les petites échelles d'écoulement.
- Corriger le profile de la bulle de Taylor en fonction de la pression au niveau de l'interface au cours du calcul.

- Appliquer la méthode V.O.F (volume of fluid) dans la méthode des volumes finis, cette méthode consiste à calculer le taux du vide dans un volume fini qui nous permet de suivre l'évolution de la bulle au cours de l'écoulement.
- Adopter un modèle de turbulence pour pouvoir élargir notre domaine physique et voir ce qui se passe dans la région de l'écoulement turbulent et la région de recirculation.
- Utiliser l'équation générale pour la transformation du domaine physique en un domaine de calcul qui nous permet de contrôler le maillage généré et faire un raffinement dans les régions significatives.

Ces améliorations prévues pour nos futurs travaux qui seront d'un intérêt conséquent pour l'ingénierie pétrolière qui représente la colonne vertébrale de l'économie nationale.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Thomas Bonometti**, « Développement d'une méthodes de simulation d'écoulement à bulles et à gouttes », Thèse de doctorat de L'INP de Toulouse, France (2006).
- [2] **O. Grégoire, A. Kumbaro**, « Introduction aux modèles industriels pour les écoulements liquide-gas », Cours diphasiques industriel ,Paris VI (2006).
- [3] **Fethi Aloui**, « Ecoulements diphasique gas-liquide en conduite », Cours diphasiques, université de nantes (2001).
- [4] **Dumitriscu**, “ Strömung an einer luftblase in senkrechten rohr”, J. Z. Angew. Math. Mech. Vol. 23, part. 3, p. 139 (1943).
- [5] **Davies & Taylor**, “The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through in tubes”, J. Proc.Roy, Soc. Vol 200A, P. 375-390 (1950).
- [6] **Zai-Sha Mao, A. E. Duckler** , “ The motion of Taylor bubbles in vertical tubes-numerical simulation for the shape and rise velocity of Taylor bubbles in stagnant and flowing liquid”, J. Comput. Phy. Vol. 91, p.132-160 (1990).
- [7] **Samia Benattallah**, « Contribution expérimentale sur les bilans à l'interface gas- liquide » Thèse de doctorat de L'INP de Lorraine, France (1994).
- [8] **A. Clarke and R. I. Issa**, “A numerical model of slug flow in vertical tubes”, Computers & fluids, Vol. 26, N° 4, p. 395-415 (1997).
- [9] **Taha Taha, Z. F. Cui**, “CFD modelling of slug flow in vertical tubes”, Elsevier, Chemical Eng. Sc. Vol. 61, p. 676-687 (2006).
- [10] **Zhao Xiaodong**, « Mechanistic-based models for slug flow in vertical pipes », Thèse de doctorat à l'université du Texas, USA (2005).

- [11] **J. M. Delhay**e, « Equations fondamentales dans les écoulements diphasiques », Rapport CEA-R-3429, France (1968).
- [12] **Jean Noël Solesio**, « Instabilités des film liquides isothermes », Rapport CEA-R-4835, France (1977).
- [13] **C. A. J. Fletcher**, « Computational techniques for fluid dynamics 2 », Ed. Springer (1988).
- [14] **J. F. Thompson, Z. U. A Warsi, C. Wayne Mastin**, “Numerical grid generation foundations and applications”, Ed. Elsevier (1985).
- [15] **Klaus A. Hoffmann**, « Computational fluid dynamics for engineers », Ed. P.E.E.S, Austin, Texas (1989).
- [16] **S. V. Patankar**, « Numerical heat transfer and fluid flow », Ed. Taylor & Francis (1980).
- [17] **Pieter Wesseling**, « Principles of computational fluid dynamics », Ed. Springer (2001).

RESUME

Ce travail présente une investigation numérique sur la structure de l'écoulement laminaire ascendant d'une bulle de gaz appelée bulle de Taylor dans un liquide en repos. La méthode utilisée pour la discrétisation des équations est la méthode des volumes finis appliquée sur un maillage généré par la méthode de génération de maillage, qui consiste à transformer le domaine physique non uniforme en un domaine de calcul uniforme.

L'écoulement étudié est un écoulement diphasique à poches. Le domaine physique se compose de plusieurs régions d'écoulements. Le présent travail traite les régions de l'écoulement potentiel, la région de l'écoulement transitoire et la région laminaire qui représente la zone du liquide entre la paroi solide et l'interface (liquide-gaz).

Les distributions de vitesses radiale et axiale ainsi que la contrainte pariétale sont calculées pour un régime d'écoulement laminaire de l'eau, pour un diamètre nominal de la conduite qui est de 5cm, une vitesse moyenne à l'entrée de 0.25 m/s et une épaisseur du film liquide de 5mm.

Mots-clefs : Etude numérique, Génération de maillage, Ecoulement diphasique, volumes finis, Bulle de Taylor.

ABSTRACT

This work presents a numerical investigation on the structure of the ascending laminar motion of a single bubble of gas called Taylor's bubble in a stagnant liquid. The method used for the discretisation is the finite volume method applied to a mesh generated by the Grid Generation method, which consists in transforming the non uniform physical domain into a uniform domain of computation.

The motion studied is a biphasic motion. The physical domain consists of several regions of motion. The present work treats the regions which are the region of the potential motion, the region of transition and the laminar region which represents the zone of the liquid between the solid wall and the interface of bubble.

The distributions of velocities radial, axial and the shear stress are calculated for a regime of laminar flow of water, a nominal diameter of the canal is 5cm, an average inlet velocity is 0.25 m/s and a thickness of the liquid film of 5mm.

Key-words: Numerical study, Grid generation, Two phase flow, finite volume, Taylor bubble.

