

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° de Série :.....

N° d'ordre :.....

**MEMOIRE**

**Présenté pour obtenir le diplôme de**

**MAGISTER EN PHYSIQUE**

**Spécialité: ENERGETIQUE**

**Option : PHOTOTHERMIQUE**

**Thème :**

**ETUDE ANALYTIQUE ET NUMERIQUE DU TRANSFERT THERMIQUE  
AUTOUR D'UN CYLINDRE VERTICAL CHAUFFÉ**

**Par**

**BOUHZEM CHAHINEZ**

**Soutenu le : / /2009**

**Devant le jury :**

<b>Présidente</b>	<b>: A.CHAKER</b>	<b>Prof.</b>	<b>Université M.Constantine</b>
<b>Rapporteur</b>	<b>: L.BAHI</b>	<b>Prof.</b>	<b>Université M.Constantine</b>
<b>Examineurs</b>	<b>: T.BOUFENDI</b>	<b>M.C.</b>	<b>Université M.Constantine</b>
	<b>Z.NEMOUCHI</b>	<b>Prof.</b>	<b>Université M.Constantine</b>

## Remerciement

*Avant tout nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a donné la force et la volonté pour qu'on puisse accomplir ce travail.*

*A notre encadreur L. BAHJI Professeur à l'université Mentouri de Constantine, pour son aide très précieuse qu'elle nous a apporté tout au long de notre préparation de ce mémoire, Qui a bien voulu diriger ce travail.*

*Je tiens à exprimer ma reconnaissance à monsieur M. AFRIDE, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, qui nous faire profiter de son savoir de ses précieux conseils. Qu'il soit assuré de mes remerciements les plus respectueux. Je remercie vivement madame A. CHAKER Professeur à l'université Mentouri de Constantine pour l'honneur qu'elle ma fait d'avoir accepter d'examiner mon travail et de présider le jury. Je remercie également mon enseignant T. BOUFENDI Maître de conférence à l'université Mentouri de Constantine et Monsieur Z. NEMOUCHI, Professeur à l'université Mentouri de Constantine, qui ont acceptés d'examiner mon travail.*

*Je dois par conséquent la totale confiance et la reconnaissance à mes Parents et mon mari pour leur apport moral, leurs conseils et leurs soutiens, qui m'ont toujours réanimé l'envie et le courage de continuer.*

*Nous tenons aussi à remercie tous ce qui nos ont aidé de pré ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.*

## SOMMAIRE

<b>Nomenclature</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Introduction</b> .....	3
<b>Chapitre 2 : Modélisation mathématique</b> .....	12
2.1 Géométrie et conditions aux limites.....	12
2.2 Modélisation mathématique du problème physique.....	14
2.3 Adimensionnalisation des variables.....	16
2.4 Les paramètres de contrôle.....	18
<b>Chapitre 3 : Résolution analytique</b> .....	21
3.1. Etude analytique de la convection naturelle développée au voisinage d'un cylindre vertical isotherme.....	21
3.2. Etude analytique de la convection naturelle développée au voisinage d'un cylindre vertical chauffé par un flux pariétal constant.....	26
<b>Chapitre 4 : Résolution numérique</b> .....	30
4.1 La méthode de résolution.....	30
4.2 Le maillage.....	30
4.3 La forme générale des équations de conservation.....	32
4.4 La discrétisation des équations.....	32
4.4.1 Discrétisation de l'équation de continuité.....	33
4.4.2 Discrétisation de l'équation de conservation de mouvement radiale.....	34
4.4.3 Discrétisation de l'équation de continuité de mouvement axiale.....	37
4.4.4 Discrétisation de l'équation d'énergie.....	40
4.5 Discrétisation des conditions aux limites.....	42
4.6 Equation de pression.....	44
4.7 L'algorithme de calcul.....	47

---

4.8 La méthode de balayage.....	47
4.9 L'algorithme de thomas.....	48
4.10 Critère de convergence.....	49
<b>Chapitre 5 : Résultats et discussion.....</b>	<b>50</b>
5.1 Introduction.....	50
5.2 Etude théorique.....	50
5.2.1 La comparaison entre l'épaisseur de la couche limite du cylindre vertical et celle d'une plaque verticale (température constante).....	50
5.2.2 La comparaison entre l'épaisseur de la couche limite du cylindre vertical et celle d'une plaque verticale (flux constante).....	53
5.3 La convection naturelle le long d'un cylindre vertical isotherme .....	55
5.3.1 Le cas de $Gr_R=10^4$ .....	55
5.3.2 Les cas de $Gr_R=10^5$ et $Gr_R=10^6$ .....	57
5.4 La convection naturelle le long d'un cylindre soumis à un flux de chaleur pariétal constant.....	65
<b>Chapitre 6: Conclusion.....</b>	<b>74</b>
<b>Références.....</b>	<b>77</b>
<b>Résumés</b>	

# **CHAPITRE II**

## **Modélisation mathématique**

# **CHAPITRE III**

## **Résolution analytique**

# **CHAPITRE IV**

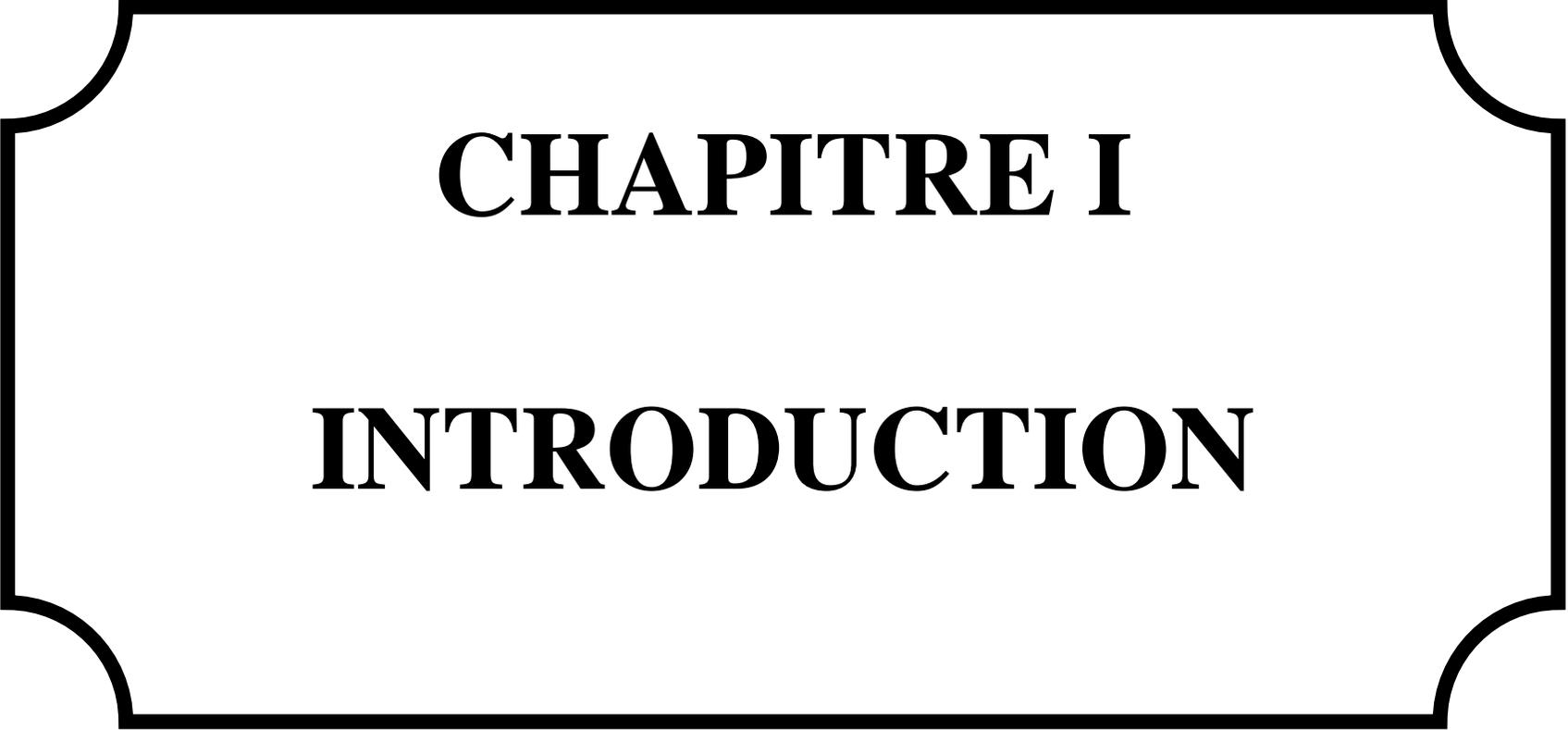
## **Résolution numérique**

# **CHAPITRE V**

## **Résultats et discussion**

# **CHAPITRE VI**

## **Conclusion**



# **CHAPITRE I**

## **INTRODUCTION**

## 1. Introduction

La convection libre est le régime d'écoulement obtenu lorsque l'on chauffe un fluide sans qu'il n'y ait d'écoulement "extérieur" imposé. La convection naturelle ou thermoconvection est causée par des inégalités de masse volumique, c'est donc la force d'Archimède provoquée par la variation de densité induite par le chauffage qui fait déplacer le fluide. La "thermique" et la "dynamique" sont alors très fortement couplés.

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, turbine à gaz, évaporateur ou condenseur. La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques. L'intérêt de la convection naturelle a été encore augmenté avec l'utilisation des métaux liquides comme médias de transfert thermique dans des réacteurs nucléaires [1].

Le refroidissement par convection naturelle de la surface extérieure d'un cylindre vertical, transportant un fluide chaud, monté d'un milieu fluide ambiant, est un problème classique de transfert de chaleur. Cette configuration mécanique et thermique est souvent rencontrée dans de nombreuses installations de chauffage où une partie de la canalisation cylindrique est montée verticalement. Donc, l'intérêt pratique du montage cité est apparent. Pour un chauffage donné de la surface, la convection naturelle, le long d'un cylindre vertical, comme le long d'une plaque verticale, commence laminaire et devient turbulente pour des hauteurs suffisamment grandes. Dans la bibliographie classique (théorique, numérique et expérimentale) du transfert thermique, les corrélations de transfert de chaleur sont données sous formes de relations entre le nombre de Nusselt local (ou moyen) et les nombres de Prandtl et de Grashof (ou de Rayleigh). Dans ce qui suit, nous citons quelques exemples non exhaustifs.

Fujii et. al [2] ont étudié le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire, avec des nombres de Prandtl entre 0.72 et 100, le long de la surface extérieure d'un cylindre vertical. Ils ont comparé les résultats du cylindre vertical et ceux d'une plaque plane verticale ayant les mêmes conditions thermiques. La paroi extérieure du cylindre est isotherme (à une température supérieure à celle du milieu ambiant) ou soumise à un flux constant. Leur model est résolu par la méthode analytique des perturbations. Leurs résultats montrent, que pour n'importe quel nombre de Prandtl, les coefficients locaux de transfert de chaleur sont représentés par les formules approchées suivantes. Lorsque les distributions de température à la surface sont données:  $Nu_{z_c} - Nu_{z_p} \approx 0.435 \frac{z}{R}$ , pour  $\frac{z}{R} \leq 0.7 Nu_{z_p}$ . Lorsque les distributions du flux de chaleur à la surface sont données:  $Nu_{z_c}^* - Nu_{z_p}^* \approx 0.345 \frac{z}{R}$ , pour  $\frac{z}{R} \leq 0.7 Nu_{z_p}^*$ .

w. j. Minkowycz. Et.al. [3] ont étudié la convection naturelle le long d'un cylindre vertical isotherme tel que sa température est supérieure à celle du milieu ambiant, avec  $Pr=0.73$  et un paramètre de courbure entre  $0 < \zeta < 10$  et par la méthode de solution non similaire, ils ont établi une relation entre  $Nu_{z_p}$  et  $Nu_{z_c}$  d'une part et entre  $\overline{Nu_{H_p}}$  et  $\overline{Nu_{H_c}}$  d'une autre part. Pour une première étape ils ont trouvé que lorsque le nombre de Grashof augmente, les rapports entre les deux nombres de Nusselt  $\left( \frac{Nu_{z_c}}{Nu_{z_p}} \right)$  et  $\left( \frac{\overline{Nu_{H_c}}}{\overline{Nu_{H_p}}} \right)$  (qui ont toujours supérieure à 1) diminuent, et l'épaisseur de la couche limite thermique et hydrodynamique devient plus mince. En corollaire, la zone d'action de la convection naturelle le long du cylindre est plus en plus confinée près de la paroi si on augmente le nombre de Grashof.

Ce dernier résultat est la même qui a trouvé A.Pantokratoras [4].

Cebeci [5] a trouvé numériquement pour le transfert thermique par convection naturelle dans le régime laminaire sur un cylindre vertical circulaire isotherme une relation

entre le  $\overline{\text{Nu}}_{\text{Hc}}$  et  $\overline{\text{Nu}}_{\text{Hp}}$  avec un paramètre de courbure  $\zeta = \frac{\sqrt{32}}{Gr_H^{0.25}} \frac{H}{D}$ , tel que  $\zeta < 5$  et  $Pr = 0.72$

comme suit:

$$\frac{\overline{\text{Nu}}_{\text{Hc}}}{\overline{\text{Nu}}_{\text{Hp}}} = 1 + 0.3 \left[ 32^{1/2} (Gr_H)^{-1/4} \left( \frac{H}{D} \right) \right]^{0.9091}$$

Et approximativement pour  $Pr = 0.01 - 100$  par la relation :

$$\frac{\overline{\text{Nu}}_{\text{Hc}}}{\overline{\text{Nu}}_{\text{Hp}}} = 1 + B \left[ 32^{1/2} (Gr_H)^{-1/4} \left( \frac{H}{D} \right) \right]^C$$

D'où :

$$B = 0.0571322 + 0.20305 Pr^{-0.43}$$

$$C = 0.9165 - 0.0043 Pr^{0.5} + 0.01333 \ln Pr + (0.0004809/Pr)$$

De la référence [6] et pour le cas de la plaque verticale isotherme, le nombre de Nusselt moyen est donné comme suit:

$$\begin{cases} \overline{\text{Nu}}_{\text{Hp}} = \frac{2.8}{\ln \left[ 1 + 2.8 / (C_1 Ra_H^{1/4}) \right]} \\ C_1 = \frac{0.671}{\left[ 1 + (0.492/Pr)^{9/16} \right]^{4/9}} \end{cases} \quad (\text{A})$$

Et dans le cas de la plaque verticale soumise sous un flux de chaleur pariétal constant, le nombre de Nusselt moyen est donné comme suite:

$$\begin{cases} \overline{\text{Nu}}_{\text{Hp}}^* = \frac{1.83}{\ln \left[ 1 + 1.83 / (C_2 (Ra_H^*)^{1/5}) \right]} \\ C_2 = 1.2 \left( \frac{Pr}{4 + 9 Pr^{1/2} + 10 Pr} \right)^{1/5} \end{cases} \quad (\text{B})$$

Par la relation (A) et (B), on peut déduire le nombre de Nusselt moyen du cylindre vertical par la relation:

$$\overline{Nu_{HC}} = C_f \overline{Nu_{HP}} \quad \text{ou} \quad \overline{Nu_{HC}^*} = C_f \overline{Nu_{HP}^*}$$

$$\text{Avec : } C_f = \frac{1.8\Phi}{\ln(1+1.8\Phi)}$$

$$\text{Pour le cas du cylindre isotherme : } \Phi = \frac{H/D}{(C_1 Ra_H^{1/4})}$$

$$\text{Pour le cas du cylindre soumis sous un flux de chaleur pariétal constant : } \Phi = \frac{H/D}{C_2 (Ra_H^*)^{1/5}}$$

L'étude de la convection naturelle (uniquement provoquée par des variations de la densité dues à un gradient de température) sur des géométries simples telles que les cylindres présentant différentes inclinaisons, a été bien traitée et sa solution maîtrisée. En particulier on peut citer les travaux de Jisheng Li et al [7], qui ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection naturelle le long d'un cylindre horizontal, incliné et vertical, avec un  $Pr=0.7$ . Ils ont varié le nombre de Rayleigh de  $1,1 \times 10^4$  à  $3,4 \times 10^5$  et l'angle d'inclinaison du cylindre de  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$  et  $90^\circ$  pour démontrer ses effets sur les deux nombres de Nusselt, local et moyen. Ils ont trouvé que ces deux nombres augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh, et diminuent avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison.

Les résultats en termes de nombre de Nusselt moyen basé sur le diamètre du cylindre ont été corrélés en fonction du nombre de Rayleigh sous différents angles sous la forme :

$$\overline{Nu_{DC}} = m Ra_D^n$$

d'où  $m$  et  $n$ , aussi la gamme du nombre de Rayleigh sont donnés dans le tableau 1.

Tableau 1 : Valeurs de  $m$  et  $n$  trouvées par Jisheng pour différents nombres de Rayleigh [7].

L'angle de l'inclinaison	m	n	$Ra_D$
$0^\circ$	0.5925	0.2294	$1.2 \times 10^4 \rightarrow 2.9 \times 10^5$
$45^\circ$	0.5349	0.2313	$1.1 \times 10^4 \rightarrow 3.3 \times 10^5$
$60^\circ$	0.4900	0.2313	$1.2 \times 10^4 \rightarrow 2.5 \times 10^5$
$75^\circ$	0.4375	0.2349	$1.2 \times 10^4 \rightarrow 3.1 \times 10^5$
$90^\circ$	0.3561	0.2339	$1.4 \times 10^4 \rightarrow 3.1 \times 10^5$

C.O. Popiel et. al [8] ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur par convection naturelle, laminaire, avec des nombres de Rayleigh entre  $1.5 \times 10^8$  et  $1.1 \times 10^9$ , avec

un nombre de Prandtl égal à 0.71, et pour  $0 < (H/D) < 60$ , le long de la surface extérieure d'un cylindre isotherme vertical.

Ils ont trouvé que :  $\overline{Nu}_{HC} = A Ra_H^n$

$$D'ou \begin{cases} A = 0.519 + 0.03454(H/D) + 0.0008772(H/D)^2 + 8.855 \times 10^{-6}(H/D)^3 \\ n = 0.25 - 0.00253(H/D) + 1.152 \times 10^{-5}(H/D)^2 \end{cases}$$

De la ref [9], pour la convection naturelle, laminaire développée au voisinage d'un cylindre vertical isotherme, avec  $Pr=0.7$ .

Si  $\frac{D}{H} \geq 35Gr_H^{0.25}$  : on trouve la forme générale du nombre de Nusselt locale et moyen :

$$\begin{aligned} (Nu_{zC})_f &= 0.54(Gr_z)_f^{0.25} \\ (\overline{Nu}_{HC})_f &= 0.59(Ra_H)_f^{0.25} \end{aligned}$$

L'indice **f** rappelle que les propriétés du fluide sont évaluées à la température de film qui est

$$\text{sous la forme : } T_f = \frac{T_\infty + T_p}{2}.$$

Morgane [10] a trouvé par une méthode analytique et pour la convection naturelle le long d'un cylindre vertical isotherme que le nombre de Nusselt moyen est donné par la relation suivante :

$$\overline{Nu}_{HC} = 0.555(Gr_H Pr)^{1/4}. \text{ Avec : } 10^4 \leq Ra_H \leq 10^8$$

Al Arabi et al [11] traitent le cas de la convection naturelle autour d'un cylindre incliné, de diamètre  $D=38(\text{mm})$  et de longueur  $H$ , chauffé par un flux pariétal constant, avec un nombre de Prandtl égal à 0.70, et pour un rapport d'aspect  $\frac{H}{D} = 25$ .

Le nombre de Nusselt moyen est présenté par la corrélation suivante :

$$\overline{Nu}_{HC} = [0.60 - 0.488(\sin \varphi)^{1.09}] (Gr_H \cdot Pr)^{[1/4 + (1/12)\sin \varphi^{1.76}]} \cdot \text{Avec : } \begin{cases} 10^{5.5} \leq Ra_H \leq 10^9 \\ 0 \leq \varphi \leq 90^\circ \end{cases}$$

De la ref [12], dans le cas de la convection naturelle autour d'un cylindre vertical isotherme, régime laminaire, le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}_{DC}$ , défini à partir du diamètre  $D$ , est relié au nombre de Rayleigh, construit sur le diamètre, par :

$$\text{-Si } \frac{D}{H} < 35 \text{ Gr}_D^{-0.25} : \overline{\text{Nu}}_{\text{DC}} \exp\left(-\frac{2}{\overline{\text{Nu}}_{\text{DC}}}\right) = 0.6 \left(\frac{D}{H}\right)^{1/4} \text{ Ra}_D^{1/4} . \text{ Avec : } 10^{-2} < \text{Ra}_D^{1/4} \left(\frac{D}{H}\right)^{1/4} < 10^3$$

-Si  $\frac{D}{H} \geq 35 \text{ Gr}_D^{-0.25}$  : on utilise la même corrélation que pour la plaque plane verticale qui est :

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{HC}} = 0.59 \text{ Ra}_H^{1/4}$$

De nombreux travaux théoriques ont été consacrés au cas d'une plaque plane verticale isotherme et nous pouvons dire qu'après le travail d'Ostrach [13] le problème quelle pose est quasiment résolu. Les distributions des vitesses et des températures ainsi que leurs dérivées ont été calculées numériquement pour des nombres de Prandtl compris entre  $10^{-2}$  et  $10^3$

Par la méthode de similarité. Le nombre de Nusselt local est exprimé par la relation :

$$\text{Nu}_{z_p} = A (\text{Gr}_z / 4)^{0.25}$$

**A** est la dérivée de la température adimensionnelle sur la surface. Cette valeur varie avec le nombre de Prandtl et elle est tabulée dans le tableau 2.

Tableau 2 : Valeurs de A trouvées par Ostrach pour différents nombres de Prandtl [13].

Pr	0.01	0.72	0.733	1.0	2.0	10.0	100.0	1000.0
A	0.0812	0.5046	0.5080	0.5671	0.7165	1.1694	2.1910	3.9660

Pour avoir la valeur du nombre de Nusselt moyen, il suffit d'utiliser la relation suivante :

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{Hp}} = \frac{3}{4} \text{Nu}_{\text{Hp}}$$

Il existe d'autres travaux concernant la convection naturelle sur une plaque verticale, Wilke, Tobias et al [14] ont obtenu dans le cas d'un liquide ( $\text{Pr} > 100$ ) et par la méthode de Von Karman-Pohlhausen une relation pour le nombre de Nusselt moyen:

$$\overline{\text{Nu}}_{\text{Hp}} = 0.677 (\text{Gr}_H \cdot \text{Pr})^{0.25}$$

La convection naturelle dans une plaque verticale isotherme est un sujet important des plusieurs investigations. De la ref [15], et par la considération d'une température de la paroi  $T_p$  et une température ambiante  $T_\infty$  tel que  $T_p > T_\infty$ , on trouve que l'épaisseur de la couche limite ce donne par la relation suivante:

$$\frac{\delta(z)}{z} = 3.93 \text{Pr}^{-1/2} (0.952 + \text{Pr})^{1/4} Gr_z^{-1/4}$$

Le nombre de Nusselt local est relié avec l'épaisseur de la couche limite d'où :

$$Nu_{zP} = 2 \frac{z}{\delta}$$

Il est très clair que le nombre de Nusselt local augmente avec le nombre de Grashof.

Donc on peut conclure que l'augmentation du nombre de Grashof accompagne l'augmentation du nombre de Nusselt local et moyen. Dans le cas d'une plaque soumise d'un flux de chaleur constant, le nombre de Nusselt local est donné par la relation:

$$Nu_{zP} = 0.60 (Gr_z^* \text{Pr})^{1/5} \quad \text{pour} \quad 10^5 < Gr_z^* \text{Pr} < 10^{11} \quad (\text{laminair})$$

La méthode d'intégration de Von Karman a été utilisée par plusieurs chercheurs notamment Squire [16], Sugawara et Michiyoshi [17], Merk et Prins [18] etc..., surtout dans le cas où le nombre de Prandtl est proche de l'unité. Les résultats trouvés par Squire [16] s'écrivent :

$$Nu_{zP} = 0.51 \text{Pr}^{0.5} (\text{Pr} + 20/21)^{-0.25} Gr_z^{0.25}$$

et

$$\overline{Nu}_{Hp} = 0.68 \text{Pr}^{0.5} (\text{Pr} + 20/21)^{-0.25} Gr_H^{0.25}$$

Schmidt et Beckam [19] ont découvert que l'écoulement a lieu dans une région près de la surface dont l'épaisseur est très faible par rapport à la hauteur de la plaque. Ceci permet de conclure que les composantes parallèles à la surface des gradients des différentes grandeurs physique (vitesse, température, concentration, pression, etc) sont relativement faibles. Ainsi le problème de la convection naturelle peut être résolu à l'aide des approximations dites de la couche limite qui consistent précisément à négliger les composants des gradients parallèles à la surface.

De la ref [20], on a donné des solutions similaires pour une plaque inclinée isotherme ou soumise à un flux de chaleur constant, soit  $\alpha$  l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale, dans le régime laminaire.

Plaque inclinée isotherme :

- $0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$

$$\text{-Si } 10^3 \leq Ra_z \leq 10^9 : Nu_{zp} = K_1(\text{Pr}) \left( \frac{Ra_z}{5} \right)^{\frac{1}{5} + C(\alpha)}$$

$$\text{-Si } 10^3 \leq Ra_H \leq 10^9 : \overline{Nu_{Hp}} = \frac{K_1(\text{Pr})}{3 \left[ \frac{1}{5} + C(\alpha) \right]} \left( \frac{Ra_H}{5} \right)^{\frac{1}{5} + C(\alpha)}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} C(\alpha) = 0.070 \sqrt{\sin \alpha} \\ K_1(\text{Pr}) = \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{0.25 + 1.6 \sqrt{\text{Pr}}} \end{cases}$$

- $15^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

$$\text{-Si } 5.10^3 \leq Ra_z \sin \alpha \leq 5.10^9 : Nu_{zp} = K_2(\text{Pr}) (Ra_z \sin \alpha)^{1/4}$$

$$\text{-Si } 5.10^3 \leq Ra_H \sin \alpha \leq 5.10^9 : \overline{Nu_{Hp}} = \frac{4}{3} K_2(\text{Pr}) (Ra_H \sin \alpha)^{1/4}$$

$$\text{Avec : } K_2(\text{Pr}) = \frac{3}{4} \left[ \frac{2 \text{Pr}}{5 + 10 \sqrt{\text{Pr}} + 10 \text{Pr}} \right]^{1/4}$$

Plaque inclinée à flux surfacique constant :

- $0^\circ \leq \alpha \leq 15^\circ$

$$\text{-Si } 10^4 \leq Ra_z^* \leq 10^{10} : Nu_{zp}^* = K_3(\text{Pr}) \left( \frac{Ra_z^*}{6} \right)^{\frac{1}{6} + D(\alpha)}$$

$$\text{-Si } 10^4 \leq Ra_H^* \leq 10^{10} : \overline{Nu_{Hp}^*} = \frac{K_3(\text{Pr})}{4 \left[ \frac{1}{6} + D(\alpha) \right]} \left( \frac{Ra_H^*}{6} \right)^{\frac{1}{6} + D(\alpha)}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} K_3(\text{Pr}) = \frac{\sqrt{\text{Pr}}}{0.12 + 1.2 \sqrt{\text{Pr}}} \\ D(\alpha) = 0.038 \sqrt{\sin \alpha} \end{cases}$$

- $15^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

$$\text{-Si } 5.10^4 \leq Ra_z^* \sin \alpha \leq 5.10^{10} : Nu_{zp}^* = K_4(\text{Pr}) (Ra_z^* \sin \alpha)^{1/5}$$

$$\text{-Si } 5.10^4 \leq Ra_H^* \sin \alpha \leq 5.10^{10} : \overline{Nu_{Hp}^*} = \frac{5}{4} K_4(\text{Pr}) (Ra_H^* \sin \alpha)^{1/5}$$

$$\text{Avec : } K_4(\text{Pr}) \left[ \frac{\text{Pr}}{4 + 9 \sqrt{\text{Pr}} + 10 \text{Pr}} \right]^{1/5}$$

Une expression simple pour le nombre de Nusselt moyen est obtenue à l'aide du modèle de Churchill et Chu [21] pour la convection naturelle, laminaire, développée au voisinage d'une plaque plane verticale isotherme qui est sous la forme suivante :

$$\overline{Nu}_{HP} = 0.68 + \frac{0.67 Ra_H^{1/4}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16}\right]^{4/9}} . \text{ Avec : } 10^{-1} < Ra_H < 10^9$$

Dans cette étude nous considérons la simulation analytique et numérique de la convection naturelle bidimensionnelle, laminaire et axisymétrique le long d'un cylindre vertical isotherme ou soumis à un flux de chaleur pariétal constant. Le rapport d'aspect du cylindre (longueur sur le Rayon) est fixé égal à 6. Le fluide est l'air avec un nombre de Prandtl égal à 0.7. La convection naturelle est modélisée avec les équations différentielles, aux dérivées partielles, de continuité, des quantités de mouvements (radial et axial) et d'énergie, dans les coordonnées cylindriques. Bien que nous ayons utilisé une forme complète des équations de Navier-Stokes (sans l'approximation de la couche limite), le choix des conditions aux limites considérées permet l'obtention des couches limites, hydrodynamique et thermique, dans une partie du domaine physique. L'un des objectifs de cette étude est la détermination des champs, hydrodynamique et thermique, de la convection naturelle, et la quantification du transfert thermique par le nombre de Nusselt, en fonction du nombre de Grashof. Un autre objectif est la comparaison qualitative et quantitative des couches limites du cylindre et d'une plaque plane comparable (ayant la même hauteur). Nous avons expliqué et confirmé par une étude analytique détaillée, les similitudes qualitatives et les différences quantitatives des couches limites du cylindre et de la plaque. Cette étude analytique, bien qu'approximative, confirme les résultats numériques obtenus et qui sont en bon accord avec les résultats publiés dans la bibliographie citée.

### 3. Résolution analytique

Ce chapitre présente une étude analytique très originale de la convection naturelle laminaire développée au voisinage d'un cylindre verticale chauffé pour enfin trouvé l'épaisseur de la couche limite dans les deux cas de chauffages.

Nous particularisons ensuite nos résultats aux cas de la plaque plane verticale, chauffée.

#### 3.1. Etude analytique de la convection naturelle développée au voisinage d'un cylindre vertical isotherme.

##### Formulation mathématique de problème

L'équation de continuité

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rU) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

L'équation de quantité de mouvement axiale

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rUV) + \frac{\partial}{\partial z}(VV) = g\beta(T - T_\infty) + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \quad (3.2)$$

L'équation d'énergie

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rUT) + \frac{\partial}{\partial z}(VT) = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] \quad (3.3)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\text{A } y = 0 : T = T_p, U = V = 0 \quad (3.4)$$

$$\text{A } y = \delta : \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \frac{\partial V}{\partial r} = 0, T = T_\infty, U = V = 0 \quad (3.5)$$

##### Choix des profils de vitesse et de température

Nous allons travailler avec une nouvelle coordonnée radiale  $r^* = r - R; 0 \leq r^* \leq \delta$ ,  $\delta(z)$  (fonction de  $z$ ) est l'épaisseur de la couche limite.

Le profile de la température est approché par un polynôme de second ordre sous la forme:

$$T(r^*, z) = a_1 + b_1 r^* + c_1 r^{*2} \quad (3.6)$$

On suppose, avec approximation, que les épaisseurs des couches limites, hydrodynamique et thermique, sont égales; et valent  $\delta(z)$ .

$a_1, b_1$  et  $c_1$  sont des fonction de  $z$ .

Nous appliquons les conditions aux limites thermiques pour déterminer les coefficients  $a_1, b_1$  et  $c_1$ . L'équation (3.6) deviendra:

$$\frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \left(1 - \frac{r^*}{\delta}\right)^2 \quad (3.7)$$

On propose une représentation polynomiale radiale cubique de la vitesse:

$$V(r^*, z) = a_2 + b_2 r^* + c_2 r^{*2} + d_2 r^{*3} \quad (3.8)$$

Quatre conditions aux limites sont nécessaires pour déterminer les fonctions de  $z, a_2, b_2, c_2,$  et  $d_2$ .

Trois conditions sont déjà disponibles, la quatrième est obtenue par l'évaluation de l'équation (3.2) à  $r^* = 0$ , qui nous donne :

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial r^*} \right]_{r^*=0} = -\frac{g\beta(T_p - T_\infty)}{\nu} \quad (3.9)$$

Par l'application de ces conditions, l'équation de vitesse devient :

$$V(r^*, z) = V_0(z) \left[ \frac{r^*}{\delta} - \frac{2r^{*2}}{\delta^2} + \frac{r^{*3}}{\delta^3} \right] \quad (3.10)$$

Avec:

$$\begin{cases} V_0(z) = \left( \frac{4R}{4R - \delta} \right) V_0^*(z) \\ V_0^*(z) = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)\delta^2}{4\nu} \end{cases} \quad (3.11)$$

### L'intégration de l'équation de continuité

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) r dr + \int_R^{R+\delta} \frac{\partial V}{\partial z} r dr = 0$$

$$\begin{aligned}
rU|_R^{R+\delta} &= - \int_R^{R+\delta} \frac{\partial V}{\partial z} r \, dr \\
rU|_{R+\delta} &= - \int_R^{R+\delta} \frac{\partial V}{\partial z} r \, dr
\end{aligned} \tag{3.12}$$

**L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant (z).**

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) r dr + \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (VV) r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr + \int_R^{R+\delta} \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) r dr$$

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) r dr = rUV|_R^{R+\delta} = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (VV) r dr &= \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} V^2 r dr = \frac{d}{dz} \int_0^\delta V^2 (r^* + R) dr^* \\
&= \frac{d}{dz} \left[ V_0^2(z) \int_0^\delta \left( \frac{r^*}{\delta} + \frac{2r^*}{\delta^2} + \frac{r^{*3}}{\delta^3} \right)^2 (r^* + R) dr^* \right] \\
&= \frac{d}{dz} \left[ V_0^2(z) \left( \frac{\delta^2}{280} + \frac{\delta R}{105} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr &= g\beta \int_0^\delta (T_p - T_\infty) \left( 1 - \frac{2r^*}{\delta} + \frac{r^{*2}}{\delta^2} \right) (r^* + R) dr^* \\
&= g\beta(T_p - T_\infty) \left[ \frac{\delta^2 + 4R\delta}{12} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_R^{R+\delta} \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) r dr &= \nu r \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_R^{R+\delta} \\
&= - \frac{\nu R V_0(z)}{\delta}
\end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans l'équation suivante:

$$\frac{d}{dz} \left[ V_0^{*2}(z) \left( \frac{4R}{4R - \delta} \right)^2 \left( \frac{\delta^2}{280R} + \frac{\delta}{105} \right) \right] = V_0^*(z) \left[ \frac{\nu}{3R} + \frac{4\nu}{3\delta} - \frac{4R\nu}{4R\delta - \delta^2} \right] \tag{3.13}$$

### L'intégration de l'équation d'énergie

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr + \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (VT) r dr = \alpha \int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr$$

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr = rUT \Big|_R^{R+\delta}$$

D'après l'équation (3.12) nous trouvons que

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr = - \int_R^{R+\delta} \frac{\partial (VT_\infty)}{\partial z} r dr$$

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr + \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (VT) r dr = \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} V(T - T_\infty) r dr$$

$$= \frac{d}{dz} \left[ \int_0^\delta V(T - T_\infty) (r^* + R) dr^* \right]$$

$$= \frac{d}{dz} V_0 (T_p - T_\infty) \left[ \frac{\delta^2}{105} + \frac{\delta R}{30} \right]$$

$$\alpha \int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr = \alpha r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R^{R+\delta} = -\alpha R \frac{\partial T}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = 2\alpha R \left( \frac{T_p - T_\infty}{\delta} \right)$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans l'équation suivante:

$$\frac{d}{dz} V_0^* \left( \frac{4}{4R - \delta} \right) \left[ \frac{\delta^2}{105} + \frac{\delta R}{30} \right] = \frac{2\alpha}{\delta} \quad (3.14)$$

L'équation (3.13) et l'équation (3.14) sont représentées respectivement sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} [V_0^{*2} f(\delta)] = V_0^* g(\delta) \\ \frac{d}{dz} [V_0^* l(\delta)] = M(\delta) \end{cases} \quad (3.15)$$

Avec:

$$f(\delta) = \left( \frac{4R}{4R - \delta} \right)^2 \left( \frac{\delta^2}{280R} + \frac{\delta}{105} \right); g(\delta) = \left[ \frac{v}{3R} + \frac{4v}{3\delta} - \frac{4Rv}{4R\delta - \delta^2} \right]$$

$$l(\delta) = \left( \frac{4}{4R - \delta} \right) \left[ \frac{\delta^2}{105} + \frac{\delta R}{30} \right]; M(\delta) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

Notons que  $g(\delta)$  n'est pas l'accélération de la pesanteur  $g$  du premier terme à la droite de l'équation (3.2).

Donc:

$$\begin{cases} V_0^{*2} \left[ \frac{df}{d\delta} \frac{d\delta}{dz} \right] + 2fV_0^* \frac{dV_0^*}{dz} = gV_0^* \\ V_0^* \left[ \frac{dl}{d\delta} \frac{d\delta}{dz} \right] + \frac{dV_0^*}{dz} l = M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0^* F \frac{d\delta}{dz} + 2f \frac{dV_0^*}{dz} = g \\ V_0^* L \frac{d\delta}{dz} + l \frac{dV_0^*}{dz} = M \end{cases} \quad (3.16)$$

Avec :

$$L(\delta) = \frac{dl}{d\delta} \quad \text{et} \quad F(\delta) = \frac{df}{d\delta} \quad (3.17)$$

Par la solution de l'ensemble (3.16), on déduit les variables  $\frac{dV_0^*}{dz}$ ,  $V_0^* \frac{d\delta}{dz}$  comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dV_0^*}{dz} = \frac{gL - MF}{2fL - Fl} \\ V_0^* \frac{d\delta}{dz} = \frac{2fM - gl}{2fL - Fl} \end{cases} \quad (3.18)$$

De l'ensemble (3.18), on trouve :

$$\frac{d}{dz} [V_0^* \delta^2] = \frac{\delta^2 (gL - MF) + 2\delta(2fM - gl)}{2fL - Fl} \quad (3.19)$$

Remplaçons  $V_0^*$  par son expression, et supposant que  $\delta^4 = \Delta$  et avec :

$$\begin{cases} z^* = \frac{z}{R} \\ \Delta^* = \frac{\Delta}{R^4} \end{cases}$$

Et on obtient:

$$\frac{d\Delta^*}{dz^*} = \frac{4}{Gr} \left[ \frac{\frac{\delta}{\nu} (gL - MF) + \frac{1}{\nu} (4fM - 2gl)}{2 \left( \frac{fL}{\delta} \right) - \left( \frac{Fl}{\delta} \right)} \right] \quad (3.20)$$

On remplace chaque terme par son expression et on obtient:

$$\frac{d\Delta^*}{dz^*} = \frac{420}{Gr} \left[ \frac{\left( \frac{6}{Pr} - \frac{7}{6} \right) + \left( \frac{7}{12} - \frac{1}{Pr} \right) \left( \frac{\delta}{R} \right) + \left( \frac{3}{8} - \frac{3}{4Pr} \right) \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 - \frac{7}{48} \left( \frac{\delta}{R} \right)^3 - \frac{1}{48} \left( \frac{\delta}{R} \right)^4}{\frac{7}{2} + 3 \left( \frac{\delta}{R} \right) + 4 \left( \frac{\delta}{R} \right)^2} \right] \quad (3.21)$$

$$\frac{d\delta^4}{dz} = \frac{420R^3}{Gr_R} \left[ \frac{\left(\frac{6}{Pr} - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4Pr}\right)\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 + \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{Pr}\right)\left(\frac{\delta}{R}\right) - \frac{7}{48}\left(\frac{\delta}{R}\right)^3 - \frac{1}{48}\left(\frac{\delta}{R}\right)^4}{\frac{7}{2} + 3\left(\frac{\delta}{R}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2} \right] \quad (3.22)$$

$Gr$  est le nombre de Grashof basé sur  $R$  comme longueur caractéristique et  $(T_p - T_\infty)$  comme échelle de température,  $Pr$  est le nombre de Prandtl. Cette équation différentielle ordinaire et non linéaire est résolue avec la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre quatre. La solution (numérique) de l'équation (3.22) nous donnera le profil axial de l'épaisseur de la couche limite  $\delta(z)$ , pour des nombres de Grashof et de Prandtl donnés. Le profil de la couche limite servira à l'évaluation des nombres de Nusselt locaux.

Remarquons que dans l'équation (3.22) si le rayon du cylindre tend vers l'infini, on obtiendra alors une équation de l'épaisseur de la couche limite d'une plaque plane; valable pour les nombres de Prandtl proches de 1.

### 3.2. Etude analytique de la convection naturelle développée au voisinage d'un cylindre vertical chauffé par un flux pariétal constant.

Si la paroi du cylindre vertical est chauffée par un flux de chaleur pariétal constant  $q_w$ , alors on obtiendra une autre couche limite le long de la paroi cylindrique avec une température axialement croissante. La modélisation de la convection naturelle est similaire à celle du cas du cylindre isotherme; cependant la condition thermique à la paroi du cylindre est différente. Donc le problème est modélisé avec les équations (3.1), (3.2) et (3.3). Les conditions aux limites sont:

$$\text{A } y=0 : -k \frac{\partial T}{\partial r} = q_w, U = V = 0 \quad (3.23)$$

$$\text{A } y = \delta : \frac{\partial T}{\partial r^*} = 0, \frac{\partial V}{\partial r^*} = 0, T = T_\infty, U = V = 0 \quad (3.24)$$

On considère un profil radial parabolique de la température similaire à celui de l'équation (3.6); et avec les conditions aux limites thermiques citées dans les équations (3.23) et (3.24), le profil de la température est:

$$T = T_{\infty} + \frac{q_w \delta}{k} \left[ \frac{1}{2} - \frac{r^*}{\delta} + \frac{r^{*2}}{2\delta^2} \right] \quad (3.25)$$

Avec ce profil, on détermine une autre (une quatrième) condition hydrodynamique à la paroi du cylindre. D'après l'équation (3.2); évaluée à  $r^* = 0$ , et compte tenu du profil de la température, on a:

$$\left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial r^*} \right]_{r^*=0} = - \frac{g\beta(T_p - T_{\infty})}{\nu} = - \frac{g\beta q_w \delta}{2k\nu} \quad (3.26)$$

On propose un profil radial cubique de la vitesse axiale, similaire à celui de l'équation (3.8); et on utilise les conditions aux limites hydrodynamiques, précisées dans les équations (3.23), (3.24) et (3.26) pour obtenir le profil de la vitesse:

$$V(r^*, z) = V_0(z) \left[ \frac{r^*}{\delta} - \frac{2r^{*2}}{\delta^2} + \frac{r^{*3}}{\delta^3} \right] \quad (3.27)$$

Avec:

$$\begin{cases} V_0(z) = \left( \frac{4R}{4R - \delta} \right) V_0^*(z) \\ V_0^*(z) = \frac{g\beta q_w \delta^3}{8k\nu} \end{cases} \quad (3.28)$$

Les profils de la température et de la vitesse sont utilisés dans les équations intégrales de continuité, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

### L'intégration de l'équation de quantité de mouvement suivant (z)

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) r dr + \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (VV) r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_{\infty}) r dr + \int_R^{R+\delta} \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) r dr$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans l'équation suivante:

$$\frac{d}{dz} \left[ V_0^{*2}(z) \left( \frac{4R}{4R - \delta} \right)^2 \left( \frac{\delta^2}{280R} + \frac{\delta}{105} \right) \right] = V_0^*(z) \left[ \frac{\nu}{3R} + \frac{4\nu}{3\delta} - \frac{4R\nu}{4R\delta - \delta^2} \right] \quad (3.29)$$

### L'intégration de l'équation d'énergie

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr + \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (VT) r dr = \alpha \int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr$$

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr = rUT \Big|_R^{R+\delta}$$

D'après l'équation (3.12) nous trouvons que

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr = - \int_R^{R+\delta} \frac{\partial (VT_\infty)}{\partial z} r dr$$

$$\int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) r dr + \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} (VT) r dr = \int_R^{R+\delta} \frac{\partial}{\partial z} V(T - T_\infty) r dr$$

$$= \frac{d}{dz} \left[ \int_0^\delta \frac{V_0 q_w \delta}{k} \left( \frac{r^*}{\delta} - \frac{2r^{*2}}{\delta^2} + \frac{r^{*3}}{\delta^3} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{r^*}{\delta} + \frac{r^{*2}}{2\delta^2} \right) (r^* + R) dr^* \right]$$

$$= \frac{d}{dz} \left( \frac{V_0 q_w \delta}{k} \right) \left[ \frac{\delta^2}{210} + \frac{\delta R}{60} \right]$$

$$\alpha \int_R^{R+\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr = \alpha r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R^{R+\delta} = -\alpha R \frac{\partial T}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = \frac{\alpha R q_w}{k}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans l'équation suivante:

$$\frac{d}{dz} V_0^* \left( \frac{4\delta^2}{4R - \delta} \right) \left[ \frac{\delta}{210} + \frac{R}{60} \right] = \alpha \tag{3.30}$$

L'équation (3.29) et l'équation (3.30) sont représentées respectivement sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} [V_0^{*2} f_1(\delta)] = V_0^* g_1(\delta) \\ \frac{d}{dz} [V_0^* l_1(\delta)] = M_1(\delta) \end{cases} \tag{3.31}$$

Avec:

$$f_1(\delta) = \left( \frac{4R}{4R - \delta} \right)^2 \left( \frac{\delta^2}{280R} + \frac{\delta}{105} \right); g_1(\delta) = \left[ \frac{v}{3R} + \frac{4v}{3\delta} - \frac{4Rv}{4R\delta - \delta^2} \right]$$

$$l_1(\delta) = \left( \frac{4\delta^2}{4R - \delta} \right) \left[ \frac{\delta}{210} + \frac{R}{60} \right]; M_1(\delta) = \alpha$$

Donc:

$$\begin{cases} V_0^{*2} \left[ \frac{df_1}{d\delta} \frac{d\delta}{dz} \right] + 2f_1 V_0^* \frac{dV_0^*}{dz} = g_1 V_0^* \\ V_0^* \left[ \frac{dl_1}{d\delta} \frac{d\delta}{dz} \right] + \frac{dV_0^*}{dz} l_1 = M_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_0^* F_1 \frac{d\delta}{dz} + 2f_1 \frac{dV_0^*}{dz} = g_1 \\ V_0^* L_1 \frac{d\delta}{dz} + l_1 \frac{dV_0^*}{dz} = M_1 \end{cases} \tag{3.32}$$

Avec :

$$L_1(\delta) = \frac{dl_1}{d\delta} \text{ et } F_1(\delta) = \frac{df_1}{d\delta} \quad (3.33)$$

Les profiles de la température et de la vitesse sont utilisés dans les équations intégrales de continuité, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Après de nombreuses manipulations algébriques, similaires a celles présentées pour le cas du cylindre isotherme, on trouve :

$$\frac{d}{dz} [V_0^* \delta^2] = \frac{\delta^2 (g_1 L_1 - M_1 F_1) + 2\delta (2f_1 M_1 - g_1 l)}{2f_1 L_1 - F_1 l_1} \quad (3.34)$$

Remplaçons  $V_0^*$  par son expression, et supposant que  $\delta^5 = \Delta$  et avec :

$$\begin{cases} z^* = \frac{z}{R} \\ \Delta^* = \frac{\Delta}{R^5} \end{cases}$$

on obtient:

$$\frac{d\Delta^*}{dz^*} = \frac{8}{Gr_R^*} \left[ \frac{\frac{\delta}{\nu} (g_1 L_1 - M_1 F_1) + \frac{1}{\nu} (4f_1 M_1 - 2g_1 l)}{2 \left( \frac{f_1 L_1}{\delta} \right) - \left( \frac{F_1 l_1}{\delta} \right)} \right] \quad (3.35)$$

Finalement on aboutira à l'équation différentielle de l'épaisseur de la couche limite.

$$\frac{d(\delta^5)}{dz} = \frac{210R^4}{Gr_R^*} \left[ \frac{\left( \frac{192}{Pr} \right) + \left( 20 - \frac{32}{Pr} \right) \left( \frac{\delta}{R} \right) - \frac{24}{Pr} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 - 5 \left( \frac{\delta}{R} \right)^3}{84 + 61 \left( \frac{\delta}{R} \right) + 12 \left( \frac{\delta}{R} \right)^2} \right] \quad (3.36)$$

$Gr_R^*$  est le nombre de Grashof basé sur R comme longueur caractéristique et  $\frac{q_w R}{k}$  comme

échelle de température, Pr est le nombre de Prandtl. L'équation différentielle ordinaire et non linéaire (3.36) est résolue avec la méthode numérique de Runge-Kutta d'ordre quatre. Remarquons que dans l'équation (3.36) si le rayon du cylindre tend vers l'infini, on obtiendra alors une équation de l'épaisseur de la couche limite d'une plaque plane; valable pour les nombres de Prandtl proches de 1.

## 4. Résolution numérique

### 4.1 La méthode de résolution

L'écoulement bidimensionnel le long d'un cylindre vertical est modélisé par les équations différentielles, aux dérivées partielles, de conservation de la masse, de la conservation des quantités de mouvement (radiale et axiale), et de conservation d'énergie, exprimées dans un système de coordonnées cylindriques. Ces équations ne sont pas linéaires, ils n'ont pas de solution exacte, donc on les résout numériquement. Ceci a été rendu possible grâce à l'évènement d'une part de calculateurs de plus en plus puissants, et d'autre part d'outils numériques de plus en plus performants. Pour notre présente étude, nous avons choisis la méthode des volumes finis, elle intègre les équations de transport sur un ensemble de volumes finis jointifs, couvrant le domaine physique. Cette méthode est conservative. Ce qui est particulièrement important lorsqu'on résout des lois de conservation.

### 4.2 Le maillage

Le domaine d'étude est subdivisé en volumes finis, chaque volume sera repéré par un nœud et limité par quatre faces. Les variables scalaires sont stockées dans les noeuds telles que la température et la pression. Par contre les variables vectorielles, qui sont les composantes des vitesses, sont localisées aux milieux des faces des volumes de contrôle [22]. Les nombres de nœuds suivant la direction  $r$  et  $z$  sont respectivement  $IL=102$  et  $JL=202$ . Bien qu'on n'ait pas considéré l'effet de l'affinage de ce maillage sur les résultats, les résultats obtenus avec ce dernier sont en bon accord avec ceux de la bibliographie; ce qui démontre que la résolution spatiale de ce maillage est suffisante pour capturer l'essentielle de la physique de notre problème. La figure 4.2.1 illustre la projection d'une partie du maillage dans le plan  $r$ - $z$ .

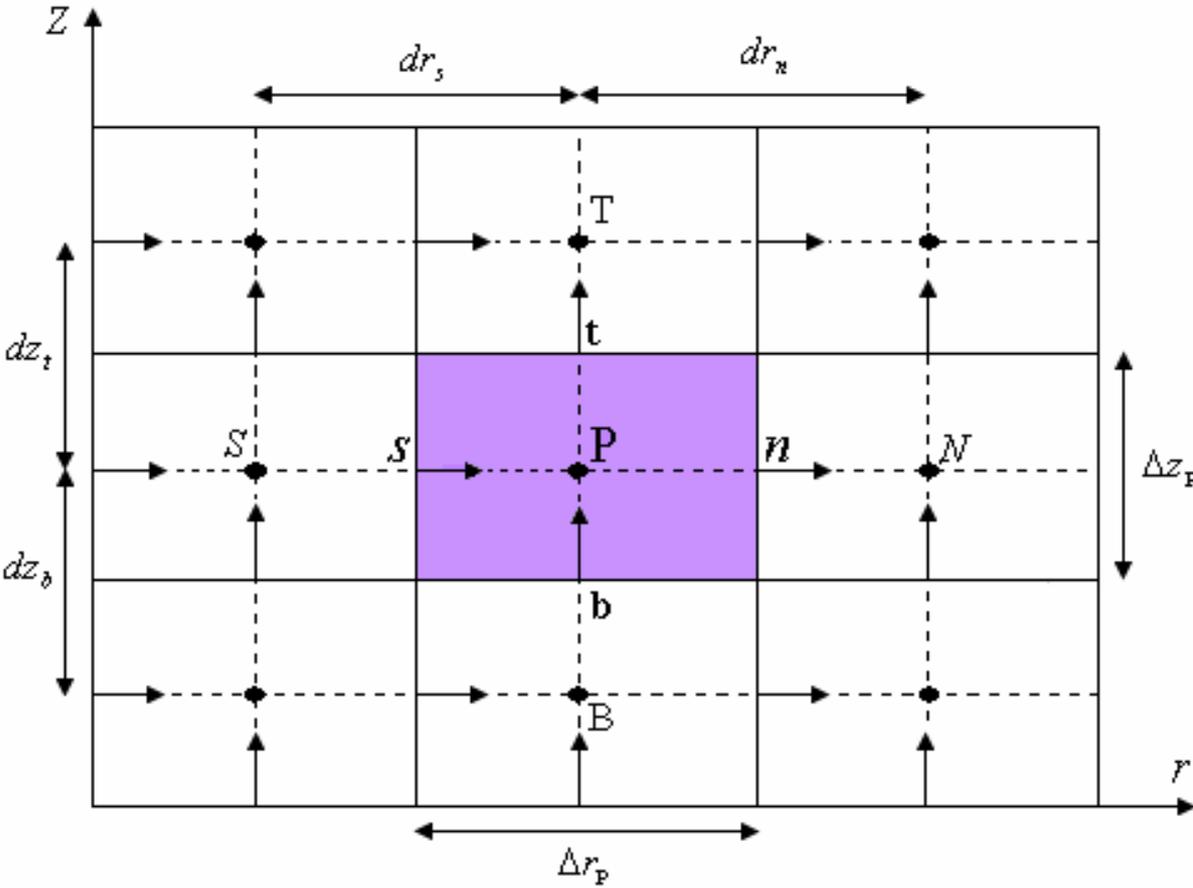


Figure 4.2.1 – La projection du maillage dans le plan  $(r, z)$ .

### 4.3 La forme générale des équations de conservation

Telles qu'elles sont écrites, les équations (2.2)-(2.5) peuvent être regroupées sous une forme générale locale et conservative faisant apparaître la conservation de la variable dépendante  $\Phi$ .

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \tau^*}}_{\text{Variation temporelle de } \Phi} + \sqrt{Gr} \left[ \underbrace{\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* U^* \Phi)}_{\text{Advection ou convection}} + \frac{\partial}{\partial z^*} (V \Phi) \right] = \Gamma_{\Phi 0} \left[ \underbrace{\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \Phi}{\partial r^*} \right)}_{\text{Diffusion}} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z^*} \right) \right] + \underbrace{S_{\Phi}}_{\text{Source}} \quad (4.1)$$

$\Phi$ : Les variables dépendantes.

$\Gamma_{\Phi 0}$ : Les expressions des coefficients des termes diffusifs.

$S_{\Phi}$ : Des termes de source.

Les sources  $S_{\Phi}$  sont spécifiées dans le tableau 4.1.

**Tableau 4.1: Variable, coefficients de diffusion et sources.**

Eq.de conservation	$\Phi$	$\Gamma_{\Phi 0}$	$S_{\Phi}$
Continuité	1	0	0
Mouvement radial	$U^*$	1	$-\frac{\partial P^*}{\partial r^*} - \frac{U^*}{r^{*2}}$
Mouvement axial	$V^*$	1	$-\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + T^* \sqrt{Gr}$
Énergie	$T^*$	$\frac{1}{Pr_0}$	0

### 4.4 La discrétisation des équations

Pour la discrétisation des variables  $\Phi$  non stationnaires dans les équations de quantité de mouvement radiale et axiale, et l'équation d'énergie on utilise la relation suivante avec une erreur de troncature d'ordre deux :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\tau+\Delta\tau} = \frac{3\Phi^{\tau+\Delta\tau} - 4\Phi^{\tau} + \Phi^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} \quad (4.2)$$

Pour la discrétisation des variables  $\Phi^{\tau+\Delta\tau}$  convectives, on applique le développement en séries de Taylor qui donne la discrétisation d'Adams-Bashforth comme suit :

$$\phi^{\tau+\Delta\tau} \approx 2\phi^{\tau} - \phi^{\tau-\Delta\tau} \quad (4.3)$$

Pour la discrétisation des variables  $\Phi^{\tau+\Delta\tau}$  diffusifs et les termes de pression aux temps  $\tau + \Delta\tau$ , on utilise un schéma temporel totalement implicite.

Toutes les discrétisations spatiales utilisent le schéma des différences centrées avec une erreur de troncature d'ordre deux.

Dans la présente étude, on discrétise l'équation de continuité et l'équation d'énergie dans le volume non décalé. La discrétisation de l'équation de mouvement radiale se fait dans un volume de contrôle décalé suivant  $r$ , tandis que l'équation de mouvement axiale se fait suivant la direction  $z$ . Pour simplifier l'écriture, on enlève les étoiles caractérisant les équations adimensionnelles.

#### 4.4.1 Discrétisation de l'équation de continuité

La discrétisation des termes dans un volume fini typique se fait comme suit :

$$\begin{aligned} \int_s^n \int_b^t \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) + \frac{\partial V}{\partial z} \right] r dr dz &= \int_s^n \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU) \Big|_{\tau+\Delta\tau} r dr dz + \int_s^n \int_b^t \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{\tau+\Delta\tau} r dr dz \\ &= (r_n U_n^{\tau+\Delta\tau} - r_s U_s^{\tau+\Delta\tau}) \Delta z_p + (V_t^{\tau+\Delta\tau} - V_b^{\tau+\Delta\tau}) r_p \Delta r_p \end{aligned} \quad (4.4)$$

Et on obtient l'équation de continuité discrétisée :

$$(r_n U_n^{\tau+\Delta\tau} - r_s U_s^{\tau+\Delta\tau}) \Delta z_p + (V_t^{\tau+\Delta\tau} - V_b^{\tau+\Delta\tau}) r_p \Delta r_p = 0 \quad (4.5)$$

#### 4.4.2 Discrétisation de l'équation de conservation de mouvement radiale

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale est intégré dans le volume de contrôle décalé dans la direction radiale (voir les figures (4.4.1)).

$$\int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[ \frac{\partial U}{\partial \tau} + \sqrt{Gr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUU) + \frac{\partial(VU)}{\partial z} \right] \right] r dr dz = \int_{s_u}^{n_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{U}{r^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial r} \right] r dr dz \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
 P_u &\equiv n \\
 n_u &\equiv N \\
 s_u &\equiv P \\
 S_u &\equiv s \\
 ts_u &\equiv t \\
 bs_u &\equiv b
 \end{aligned}$$

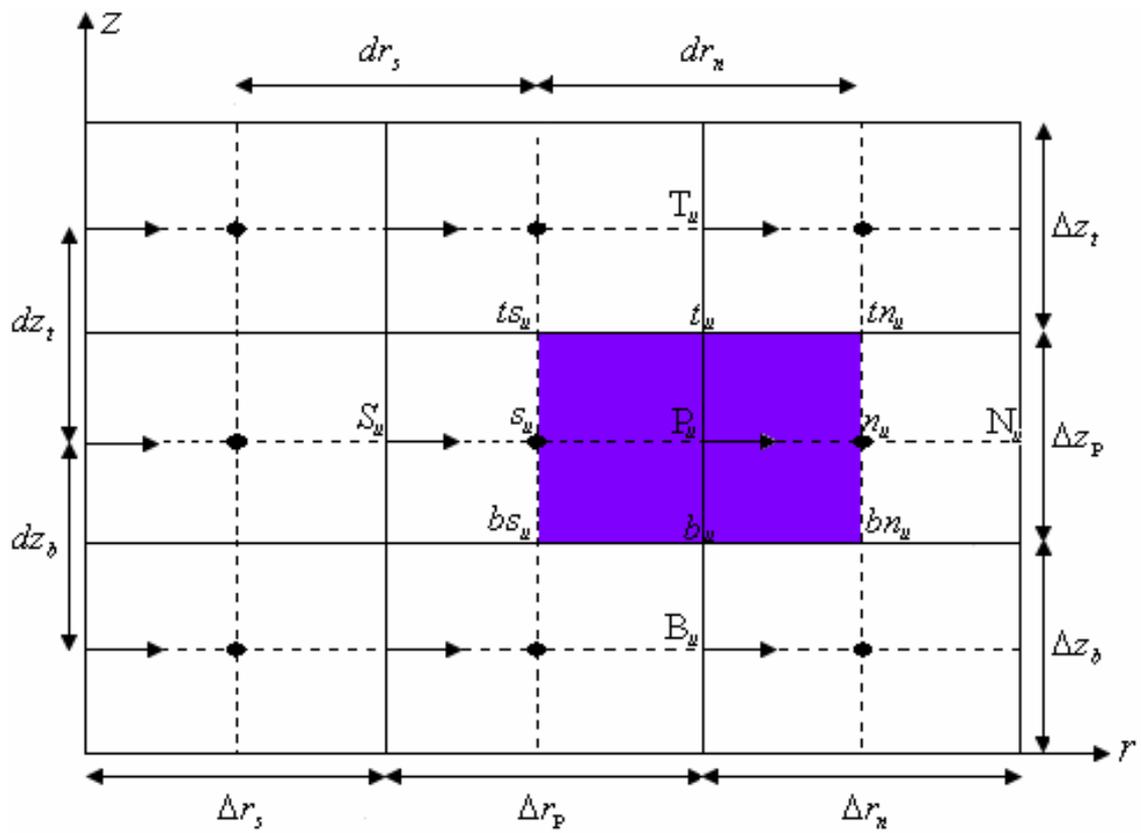


Figure 4.4.1 - La projection d'une partie du maillage décalé suivant r.

$$\begin{aligned}
 * \int_{s_u}^{t_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial U}{\partial \tau} \Big|^{t+\Delta\tau} r dr dz &= \frac{3U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - 4U_{P_u}^{\tau} + U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} r_n dr_n \Delta z_p \\
 * \int_{s_u}^{t_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{t+\Delta\tau} r dr dz &= \int_{s_u}^{t_u} \int_{b_u}^{t_u} \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{\tau} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUU) \Big|^{\tau-\Delta\tau} \right] r dr dz \\
 &= \left[ 2(r_{n_u} U_{n_u}^{\tau} U_{n_u}^{\tau} - r_{s_u} U_{s_u}^{\tau} U_{s_u}^{\tau}) - (r_{n_u} U_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} - r_{s_u} U_{s_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{s_u}^{\tau-\Delta\tau}) \right] \Delta z_p \\
 &= 2 \left[ r_{n_u} \left( \frac{U_{P_u}^{\tau} + U_{N_u}^{\tau}}{2} \right)^2 - r_{s_u} \left( \frac{U_{P_u}^{\tau} + U_{S_u}^{\tau}}{2} \right)^2 \right] \Delta z_p \\
 &\quad - \left[ r_{n_u} \left( \frac{U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau} + U_{N_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right)^2 - r_{s_u} \left( \frac{U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau} + U_{S_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right)^2 \right] \Delta z_p \\
 * \int_{s_u}^{t_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial (VU)}{\partial z} \Big|^{t+\Delta\tau} r dr dz &= \left[ 2(V_{t_u}^{\tau} U_{t_u}^{\tau} - V_{b_u}^{\tau} U_{b_u}^{\tau}) - (V_{t_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{t_u}^{\tau-\Delta\tau} - V_{b_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{b_u}^{\tau-\Delta\tau}) \right] r_n dr_n \\
 &= \left[ 2 \left( V_{t_u}^{\tau} \frac{U_{T_u}^{\tau} + U_{P_u}^{\tau}}{2} - V_{b_u}^{\tau} \frac{U_{B_u}^{\tau} + U_{P_u}^{\tau}}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left( V_{t_u}^{\tau-\Delta\tau} \frac{U_{T_u}^{\tau-\Delta\tau} + U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2} - V_{b_u}^{\tau-\Delta\tau} \frac{U_{B_u}^{\tau-\Delta\tau} + U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) \right] r_n dr_n \\
 * \int_{s_u}^{t_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \Big|^{t+\Delta\tau} r dr dz &= \left[ r_{n_u} \left( \frac{U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau}}{dr_n} \right) - r_{s_u} \left( \frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau}}{dr_s} \right) \right] \Delta z_p \\
 * \int_{s_u}^{t_u} \int_{b_u}^{t_u} -\frac{U}{r^2} \Big|^{t+\Delta\tau} r dr dz &= -\frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau}}{r_{P_u}} dr_n \Delta z_p \\
 * \int_{s_u}^{t_u} \int_{b_u}^{t_u} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|^{t+\Delta\tau} r dr dz &= \left( \frac{U_{T_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau}}{dz_t} - \frac{U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} - U_{B_u}^{\tau+\Delta\tau}}{dz_b} \right) r_n dr_n
 \end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_{P_u} U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = A_{N_u} U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{S_u} U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{T_u} U_{T_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{B_u} U_{B_u}^{\tau+\Delta\tau} + S_u \quad (4.7)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 A_{N_u} &= \frac{r_{n_u} \Delta z_p}{dr_n} \\
 A_{S_u} &= \frac{r_{S_u} \Delta z_p}{dr_s} \\
 A_{T_u} &= \frac{r_n dr_n}{dz_t} \\
 A_{B_u} &= \frac{r_n dr_n}{dz_b} \\
 A_{P_u} &= A_{E_u} + A_{W_u} + A_{N_u} + A_{S_u} + \frac{3}{2} \frac{r_n dr_n \Delta z_p}{\Delta \tau} + \frac{dr_n \Delta z_p}{r_{P_u}} \\
 S_u &= (p_P^{\tau+\Delta\tau} - p_N^{\tau+\Delta\tau}) r_n \Delta z_p + \frac{4U_{P_u}^{\tau} - U_{P_u}^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} r_n dr_n \Delta z_p \\
 &\quad + \sqrt{Gr} \left[ \begin{aligned} & (r_{n_u} U_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} - r_{s_u} U_{s_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{s_u}^{\tau-\Delta\tau}) \Delta z_p \\ & - 2(r_{n_u} U_{n_u}^{\tau} U_{n_u}^{\tau} - r_{s_u} U_{s_u}^{\tau} U_{s_u}^{\tau}) \Delta z_p \\ & + (V_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{n_u}^{\tau-\Delta\tau} - V_{s_u}^{\tau-\Delta\tau} U_{s_u}^{\tau-\Delta\tau}) r_n dr_n \\ & - 2(V_{n_u}^{\tau} U_{n_u}^{\tau} - V_{s_u}^{\tau} U_{s_u}^{\tau}) r_n dr_n \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

#### 4.4.3 Discrétisation de l'équation de continuité de mouvement axiale

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement axiale est intégré dans le volume de contrôle décalé dans la direction axiale (voir les figures (4.4.2)).

$$\int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[ \frac{\partial V}{\partial \tau} + \sqrt{Gr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) + \frac{\partial}{\partial z} (VV) \right] \right] r dr dz = \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + T\sqrt{Gr} \right] r dr dz \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
 t_v &\equiv T \\
 P_v &\equiv t \\
 b_v &\equiv P \\
 B_v &\equiv t \\
 sb_v &\equiv s \\
 nb_v &\equiv n
 \end{aligned}$$

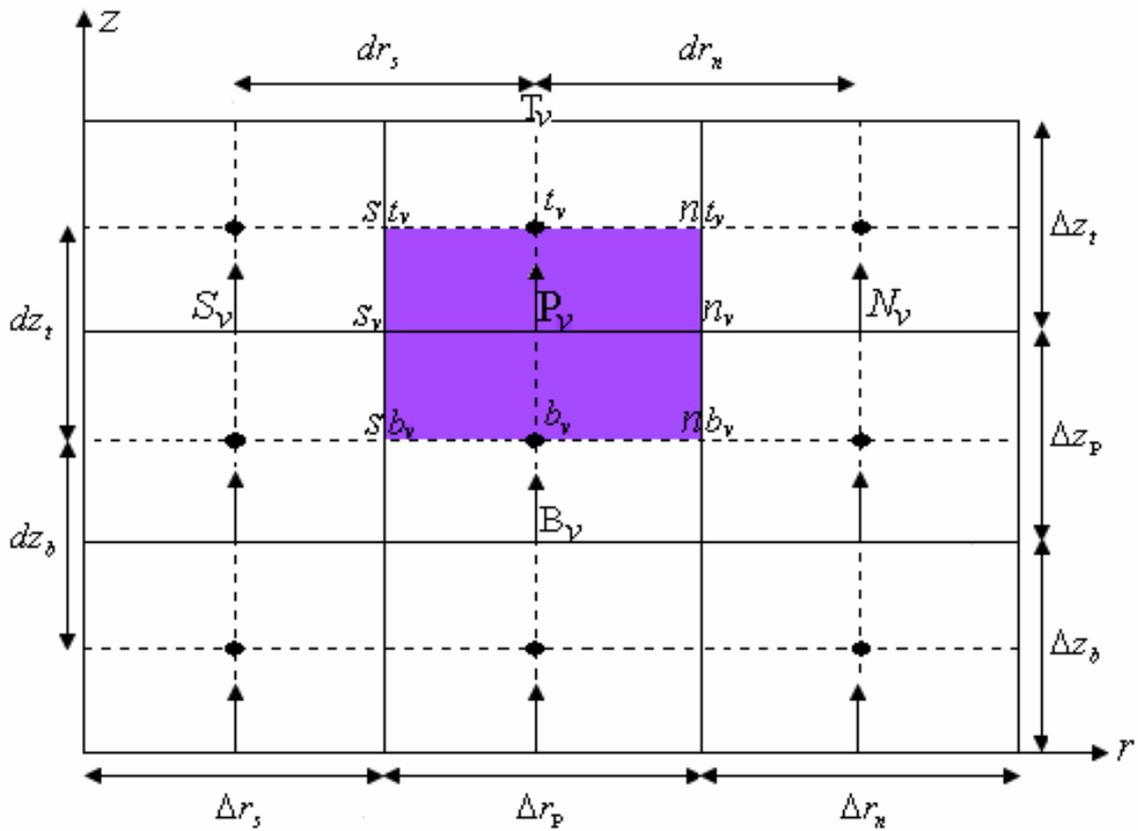


Figure 4.4.2 - La projection d'une partie du maillage décalé suivant z.

$$\begin{aligned}
 & * \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left. \frac{\partial V}{\partial \tau} \right|^{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \left[ \frac{3V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - 4V_{P_v}^{\tau} + V_{P_v}^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} \right] r_p \Delta r_p dz_t \\
 & * \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \right|^{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[ \left. \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \right|^{\tau} - \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUV) \right|^{\tau-\Delta\tau} \right] r dr dz \\
 & \quad = \left[ 2(r_{n_v} U_{n_v}^{\tau} V_{n_v}^{\tau} - r_{s_v} U_{s_v}^{\tau} V_{s_v}^{\tau}) - (r_{n_v} U_{n_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{n_v}^{\tau-\Delta\tau} - r_{s_v} U_{s_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{s_v}^{\tau-\Delta\tau}) \right] dz_t \\
 & * \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left. \frac{\partial}{\partial z} (vV) \right|^{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left[ \left. \frac{2\partial}{\partial z} (vV) \right|^{\tau} + \left. \frac{\partial}{\partial z} (vV) \right|^{\tau-\Delta\tau} \right] r dr dz = \left[ \frac{2(V_{t_v}^{\tau} V_{t_v}^{\tau} - V_{b_v}^{\tau} V_{b_v}^{\tau})}{- (V_{t_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{t_v}^{\tau-\Delta\tau} - V_{b_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{b_v}^{\tau-\Delta\tau})} \right] r_p dr_p \\
 & * \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right|^{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \left( r_{n_v} \frac{V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau}}{dr_n} - r_{s_v} \frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{S_v}^{\tau+\Delta\tau}}{dr_s} \right) dz_t \\
 & * \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right|^{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \left( \frac{V_{T_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau}}{dz_t} - \frac{V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} - V_{B_v}^{\tau+\Delta\tau}}{dz_b} \right) r_p \Delta r_p \\
 & * \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left. \left( -\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right|^{\tau+\Delta\tau} r dr dz = (p_p^{\tau+\Delta\tau} - p_T^{\tau+\Delta\tau}) r_p \Delta r_p \\
 & * \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left. T_{P_v} \right|^{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} (2T_{P_v}^{\tau} - T_{P_v}^{\tau-\Delta\tau}) r dr dz = \int_{s_v}^{n_v} \int_{b_v}^{t_v} \left( 2 \frac{T_P^{\tau} + T_T^{\tau}}{2} - \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_T^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) r dr dz \\
 & \quad = \left( 2 \frac{T_P^{\tau} + T_T^{\tau}}{2} - \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_T^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) r_p \Delta r_p dz_t
 \end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_{P_v} V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} = A_{N_v} V_{N_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_{S_v} V_{S_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_{T_v} V_{T_v}^{\tau+\Delta\tau} + A_{B_v} V_{B_v}^{\tau+\Delta\tau} + S_v \quad (4.10)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 A_{N_v} &= \frac{r_{n_v} dz_t}{dr_n} \\
 A_{S_v} &= \frac{r_{s_v} dz_t}{dr_s} \\
 A_{T_v} &= \frac{r_p \Delta r_p}{dz_t} \\
 A_{B_v} &= \frac{r_p \Delta r_p}{dz_b}
 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$A_{P_v} = A_{N_v} + A_{S_v} + A_{T_v} + A_{B_v} + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p dz_n}{\Delta\tau}$$

$$S_v = (p_P^{\tau+\Delta\tau} - p_T^{\tau+\Delta\tau})r_P\Delta r_P + \left[ \frac{4V_{P_v}^\tau + V_{P_v}^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} \right] r_P\Delta r_P dz_t$$

$$+ \sqrt{Gr} \left[ \begin{aligned} & \left[ 2\left(\frac{T_P^\tau + T_T^\tau}{2}\right) - \left(\frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_T^{\tau-\Delta\tau}}{2}\right) \right] r_P\Delta r_P dz_t \\ & \left[ \begin{aligned} & (V_{t_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{t_v}^{\tau-\Delta\tau} - V_{b_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{b_v}^{\tau-\Delta\tau}) \\ & - 2(V_{t_v}^\tau V_{t_v}^\tau - V_{b_v}^\tau V_{b_v}^\tau) \end{aligned} \right] r_P\Delta r_P \\ & \left[ \begin{aligned} & (r_{n_v} U_{n_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{n_v}^{\tau-\Delta\tau} - r_{s_v} U_{s_v}^{\tau-\Delta\tau} V_{s_v}^{\tau-\Delta\tau}) \\ & - (r_{n_v} U_{n_v}^\tau V_{n_v}^\tau - r_{s_v} U_{s_v}^\tau V_{s_v}^\tau) \end{aligned} \right] dz_t \end{aligned} \right]$$

#### 4.4.4 Discrétisation de l'équation d'énergie

L'équation d'énergie est discrétisée dans un volume fini typique:

$$\int_s^t \int_b^t \left[ \frac{\partial T}{\partial \tau} + \sqrt{Gr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) + \frac{\partial}{\partial z} (VT) \right] \right] r dr dz = \int_s^t \int_b^t \left[ \frac{1}{Pr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \right] r dr dz \quad (4.12)$$

$$* \int_s^t \int_b^t \frac{\partial T}{\partial \tau} \Big|_{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \left[ \frac{3T_P^{\tau+\Delta\tau} - 4T_P^\tau + T_P^{\tau-\Delta\tau}}{2\Delta\tau} \right] r_P \Delta r_P \Delta z_P$$

$$* \int_s^t \int_b^t \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|_{\tau+\Delta\tau} r dr dz = \int_s^t \int_b^t \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^\tau - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rUT) \Big|^{\tau-\Delta\tau} \right] r dr dz$$

$$= 2 \int_b^t \left[ r_n U_n^\tau T_n^\tau - r_s U_s^\tau T_s^\tau \right] dz - \int_b^t \left[ r_n U_n^{\tau-\Delta\tau} T_n^{\tau-\Delta\tau} - r_s U_s^{\tau-\Delta\tau} T_s^{\tau-\Delta\tau} \right] dz$$

$$= 2 \int_b^t \left[ r_n U_n^\tau \left( \frac{T_P^\tau + T_N^\tau}{2} \right) - r_s U_s^\tau \left( \frac{T_P^\tau + T_S^\tau}{2} \right) \right] dz$$

$$- \int_b^t \left[ r_n U_n^{\tau-\Delta\tau} \left( \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) - r_s U_s^{\tau-\Delta\tau} \left( \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_S^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) \right] dz$$

$$= 2 \left[ r_n U_n^\tau \left( \frac{T_P^\tau + T_N^\tau}{2} \right) - r_s U_s^\tau \left( \frac{T_P^\tau + T_S^\tau}{2} \right) \right] \Delta z_P$$

$$- \left[ \begin{aligned} & r_n U_n^{\tau-\Delta\tau} \left( \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) \\ & - r_s U_s^{\tau-\Delta\tau} \left( \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_S^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) \end{aligned} \right] \Delta z_P$$

$$\begin{aligned}
 * \int_s^i \int_b^t \frac{\partial}{\partial z} (VT) \Big|_{\tau+\Delta\tau} r dr dz &= \int_s^i \left[ 2 \frac{\partial}{\partial z} (VT) \Big|_{\tau} - \frac{\partial}{\partial z} (VT) \Big|_{\tau-\Delta\tau} \right] r dr \\
 &= \int_s^i \left[ 2(V_t^\tau T_t^\tau - V_b^\tau T_b^\tau) - (V_t^{\tau-\Delta\tau} T_t^{\tau-\Delta\tau} - V_b^{\tau-\Delta\tau} T_b^{\tau-\Delta\tau}) \right] r dr \\
 &= \left[ 2 \left( V_t^\tau \frac{T_t^\tau + T_p^\tau}{2} - V_b^\tau \frac{T_b^\tau + T_p^\tau}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left( V_t^{\tau-\Delta\tau} \frac{T_p^{\tau-\Delta\tau} + T_t^{\tau-\Delta\tau}}{2} - V_b^{\tau-\Delta\tau} \frac{T_b^{\tau-\Delta\tau} + T_p^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) \right] r_p \Delta r_p \\
 * \int_s^i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{\tau+\Delta\tau} r dr dz &= \int_b^i \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_n^{\tau+\Delta\tau} - r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_s^{\tau+\Delta\tau} \right) dz \\
 &= \int_b^i \left[ r_n \frac{T_N^{\tau+\Delta\tau} - T_p^{\tau+\Delta\tau}}{dr_n} - r_s \frac{T_p^{\tau+\Delta\tau} - T_S^{\tau+\Delta\tau}}{dr_s} \right] dz \\
 &= \left[ r_n \frac{T_N^{\tau+\Delta\tau} - T_p^{\tau+\Delta\tau}}{dr_n} - r_s \frac{T_p^{\tau+\Delta\tau} - T_S^{\tau+\Delta\tau}}{dr_s} \right] \Delta z_p
 \end{aligned}$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_{P_T} T_p^{\tau+\Delta\tau} = A_{N_T} T_N^{\tau+\Delta\tau} + A_{S_T} T_S^{\tau+\Delta\tau} + A_{T_T} T_T^{\tau+\Delta\tau} + A_{B_T} T_B^{\tau+\Delta\tau} + S_T \quad (4.13)$$

Avec :

$$\begin{aligned}
 A_{N_T} &= \frac{r_n \Delta z_p}{Pr dr_n} \\
 A_{S_T} &= \frac{r_s \Delta z_p}{Pr dr_s} \\
 A_{T_T} &= \frac{r_p \Delta r_p}{Pr dz_t} \\
 A_{B_T} &= \frac{r_p \Delta r_p}{Pr dz_b} \\
 A_{P_T} &= A_{N_T} + A_{S_T} + A_{T_T} + A_{B_T} + \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p \Delta z_p}{\Delta \tau}
 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$S_T = \frac{3}{2} \frac{r_p \Delta r_p \Delta z_p}{\Delta \tau} + \sqrt{Gr} \left[ \begin{array}{l} \left[ r_n U_n^{\tau-\Delta\tau} \left( \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_N^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) - r_s U_s^{\tau-\Delta\tau} \left( \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_S^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right) \right] \Delta z_p \\ - 2 \left[ r_n U_n^\tau \left( \frac{T_P^\tau + T_N^\tau}{2} \right) - r_s U_s^\tau \left( \frac{T_P^\tau + T_S^\tau}{2} \right) \right] \Delta z_p \\ + \left[ V_t^{\tau-\Delta\tau} \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_T^{\tau-\Delta\tau}}{2} - V_b^{\tau-\Delta\tau} \frac{T_P^{\tau-\Delta\tau} + T_B^{\tau-\Delta\tau}}{2} \right] r_p \Delta r_p \\ - 2 \left[ V_t^\tau \frac{T_P^\tau + T_T^\tau}{2} - V_b^\tau \frac{T_P^\tau + T_B^\tau}{2} \right] r_p \Delta r_p \end{array} \right]$$

**4.5 Discrétisation des conditions aux limites**

- Sur la paroi extérieure du cylindre  $r = 1$  :

Pour U et V :

$$A_p \phi_p = A_N \phi_N + A_S \phi_S + A_T \phi_T + A_B \phi_B + S_\phi \tag{4.15}$$

D'où  $\phi = U$  ou  $V$

$$\begin{aligned} A_p &= 1 \\ A_N = A_S = A_T = A_B = S_\phi &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Pour T :

**(a) Température imposée**

$$\begin{aligned} A_p &= 1 \\ A_N = A_S = A_T = A_B &= 0 \\ S_T &= 1 \end{aligned} \tag{4.17}$$

**(b) Flux imposé**

$$\begin{aligned} A_p &= 1 \\ A_N &= 1 \\ A_S = A_T = A_B &= 0 \quad \bullet \text{ Loin de la paroi } r = \frac{R+L}{R} = 3 \\ S_T &= dr(1) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Pour U :

Les débit entrant = Les débits sortant

$$m_{|z}^{\phi} + m_{|r=3}^{\phi} = m_{|z+dz}^{\phi} \tag{4.19}$$

Donc:

$$m_{|r=3}^{\phi} = m_{|z+dz}^{\phi} - m_{|z}^{\phi}$$

$$n\mathcal{K}_{|z} = \int_0^{2\pi R+L} \int_R V(i, j-1) r dr d\theta = 2\pi \sum_{i=1}^{iL} V(i, j-1) r_p(i) \Delta r(i)$$

$$n\mathcal{K}_{|z+dz} = \int_0^{2\pi R+L} \int_R V(i, j) r dr d\theta = 2\pi \sum_{i=1}^{iL} V(i, j) r_p(i) \Delta r(i)$$

$$n\mathcal{K}_{|R+L} = - \int_z^{z+dz} \int_0^{2\pi} U(IL-1, j) r dr d\theta = -2\pi U(IL-1, j) r_c(IL-1) \Delta z(j)$$

On trouve finalement:

$$U(IL-1, j) = - \frac{\sum_{i=1}^{iL} (V(i, j) - V(i, j-1)) r_p(i) \Delta r(i)}{r_c(IL-1) \Delta z(j)} \quad (4.20)$$

On écrit cette condition sous la même forme générale de l'équation de discrétisation qui est :

$$A_p U_p = A_N U_N + A_S U_S + A_T U_T + A_B U_B + S \quad (4.21)$$

$$A_p = 1$$

$$A_N = A_S = A_T = A_B = 0$$

$$S = - \frac{\sum_{i=1}^{iL} (V(i, j) - V(i, j-1)) r_p(i) \Delta r(i)}{r_c(IL-1) \Delta z(j)} \quad (4.22)$$

Pour V et T:

$$A_p = 1$$

$$A_N = A_S = A_T = A_B = S = 0$$

(4.23)

• A  $z = 0$  on trouve :

Pour U,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \Rightarrow A_p U_p = A_T U_T$$

$$A_p = 1$$

$$A_T = 1$$

$$A_N = A_S = A_B = S = 0$$

(4.24)

Pour V et T,

$$A_p = 1$$

$$A_N = A_S = A_T = A_B = S = 0$$

(4.25)

•  $A_z = \frac{H}{R} = 6$  :

Pour U, V, et T on trouve de la même manière :

$$A_p = 1$$

$$A_B = 1$$

$$A_N = A_S = A_T = S = 0$$

(4.26)

#### 4.6 Equation de pression

Notant que les pseudo vitesses sont celle déterminées avec des sources qui ne contiennent pas les termes de pression; elles sont ci-après notées:  $\hat{U}_n^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $\hat{U}_s^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $\hat{V}_t^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $\hat{V}_b^{\tau+\Delta\tau}$ . Considérons

l'équation de discrétisation de la vitesse radiale:

$$A_{P_u} U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = A_{N_u} U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{S_u} U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{T_u} U_{T_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{B_u} U_{B_u}^{\tau+\Delta\tau} + S'_u + \frac{r_n \Delta z_P}{A_{P_u}} (p_P^{\tau+\Delta\tau} - p_N^{\tau+\Delta\tau})$$

$$U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = \frac{A_{N_u} U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{S_u} U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{T_u} U_{T_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{B_u} U_{B_u}^{\tau+\Delta\tau} + S'_u}{A_{P_u}} + \frac{r_n \Delta z_P}{A_{P_u}} (p_P^{\tau+\Delta\tau} - p_N^{\tau+\Delta\tau})$$

(4.27)

En utilisant l'équivalence des notations des maillages typique et décalé suivant la direction radiale on aura :

$$U_{P_u}^{\tau+\Delta\tau} = U_n^{\tau+\Delta\tau} = \hat{U}_n^{\tau+\Delta\tau} + d_n (p_P^{\tau+\Delta\tau} - p_N^{\tau+\Delta\tau})$$

(4.28)

Avec la définition de la pseudo vitesse:

$$\hat{U}_n^{\tau+\Delta\tau} = \frac{A_{N_u} U_{N_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{S_u} U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{T_u} U_{T_u}^{\tau+\Delta\tau} + A_{B_u} U_{B_u}^{\tau+\Delta\tau} + S'_u}{A_{P_u}}$$

(4.29)

Trouvant les autres pseudo-vitesse de même manière que  $\hat{U}_n^{\tau+\Delta\tau}$ .

$$U_{S_u}^{\tau+\Delta\tau} = U_s^{\tau+\Delta\tau} = \hat{U}_s^{\tau+\Delta\tau} + d_s (p_S^{\tau+\Delta\tau} - p_P^{\tau+\Delta\tau})$$

$$V_{P_v}^{\tau+\Delta\tau} = V_t^{\tau+\Delta\tau} = \hat{V}_t^{\tau+\Delta\tau} + d_t (p_P^{\tau+\Delta\tau} - p_T^{\tau+\Delta\tau})$$

$$V_{B_v}^{\tau+\Delta\tau} = V_b^{\tau+\Delta\tau} = \hat{V}_b^{\tau+\Delta\tau} + d_b (p_B^{\tau+\Delta\tau} - p_P^{\tau+\Delta\tau})$$

(4.30)

Avec les coefficients des termes de pression qui sont :

$$d_n = \frac{r_n \Delta z_P}{A_{P_u}}$$

$$d_s = \frac{r_s \Delta z_P}{A_{S_u}}$$

$$d_t = \frac{r_p \Delta r_p}{A_p}$$

$$d_b = \frac{r_p \Delta z_p}{A_{B_v}}$$

On remplace les expressions des vitesses, en fonction des pseudo vitesses et la pression, dans l'équation de continuité et on trouve :

$$\left[ r_n (\hat{U}_n^{\tau+\Delta\tau} + d_n (p_p^{\tau+\Delta\tau} - p_N^{\tau+\Delta\tau})) - r_s (\hat{U}_s^{\tau+\Delta\tau} + d_s (p_s^{\tau+\Delta\tau} - p_p^{\tau+\Delta\tau})) \right] \Delta z_p + \left[ (\hat{V}_t^{\tau+\Delta\tau} + d_t (p_p^{\tau+\Delta\tau} - p_T^{\tau+\Delta\tau})) - (\hat{V}_b^{\tau+\Delta\tau} + d_b (p_B^{\tau+\Delta\tau} - p_p^{\tau+\Delta\tau})) \right] r_p \Delta r_p = 0 \quad (4.31)$$

Puit on réarrange cette équation sous la forme :

$$A_p p_p^{\tau+\Delta\tau} = A_N p_N^{\tau+\Delta\tau} + A_S p_s^{\tau+\Delta\tau} + A_T p_T^{\tau+\Delta\tau} + A_B p_B^{\tau+\Delta\tau} + S_p \quad (4.32)$$

Sachant que les coefficients de cette équation sont :

$$A_N = r_n d_n \Delta z_p$$

$$A_S = r_s d_s \Delta z_p$$

$$A_T = r_p d_t \Delta r_p \quad (4.33)$$

$$A_B = r_p d_b \Delta r_p$$

$$A_p = A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$S_p = (r_s \hat{U}_s^{\tau+\Delta\tau} - r_n \hat{U}_n^{\tau+\Delta\tau}) \Delta z_p + (\hat{V}_b^{\tau+\Delta\tau} - \hat{V}_t^{\tau+\Delta\tau}) r_p \Delta r_p$$

Avec un champ de vitesse initial, on peut calculer les pseudo vitesse et obtenir une estimation du champ de pression  $p^*$ . Avec cette pression estimée, on peut obtenir une estimation du champ de vitesse  $U^*, V^*$ . Les estimations indiquées nécessitent des corrections  $U', V'$  et  $p'$ .

Par conséquent on peut écrire les composantes correctes comme suite :

$$U = U^* + U'$$

$$V = V^* + V' \quad (4.34)$$

$$p = p^* + p'$$

$$A_{p_u} U'_{p_u} + A_{p_u} U^*_{p_u} = A_{N_u} U'_{N_u} + A_{S_u} U'_{S_u} + A_{T_u} U'_{T_u} + A_{B_u} U'_{B_u} + r_n \Delta z_p (p'_p - p'_N) + A_{N_u} U^*_{N_u} + A_{S_u} U^*_{S_u} + A_{T_u} U^*_{T_u} + A_{B_u} U^*_{B_u} + r_n \Delta z_p (p^*_p - p^*_N) \quad (4.35)$$

$$A_{p_v} V'_{p_v} + A_{p_v} V^*_{p_v} = A_{N_v} V'_{N_v} + A_{S_v} V'_{S_v} + A_{T_v} V'_{T_v} + A_{B_v} V'_{B_v} + r_p \Delta z_p (p'_p - p'_T) + A_{N_v} V^*_{N_v} + A_{S_v} V^*_{S_v} + A_{T_v} V^*_{T_v} + A_{B_v} V^*_{B_v} + r_p \Delta z_p (p^*_p - p^*_T) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} A_{P_u} U'_{P_u} &= [A_{N_u} U'_{N_u} + A_{S_u} U'_{S_u} + A_{T_u} U'_{T_u} + A_{B_u} U'_{B_u}] + r_n \Delta z_p (p'_P - p'_N) \\ A_{P_v} V'_{P_v} &= [A_{N_v} V'_{N_v} + A_{S_v} V'_{S_v} + A_{T_v} V'_{T_v} + A_{B_v} V'_{B_v}] + r_p \Delta z_p (p'_P - p'_T) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Comme approximation, on peut négliger les corrections de vitesses aux nœuds voisins, et par conséquence redéfinir les corrections des vitesses en fonction, seulement, des corrections de la pression:

$$\begin{aligned} U'_{P_u} &= \frac{r_n \Delta z_p}{A_{P_u}} (p'_P - p'_N) \\ V'_{P_v} &= \frac{r_p \Delta z_p}{A_{P_v}} (p'_P - p'_T) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ainsi, les composants de vitesse aux nœuds voisins seront corrigées comme suit :

$$\begin{aligned} U_n &= U_n^* + (p'_P - p'_N) d_n \\ U_s &= U_s^* + (p'_S - p'_P) d_s \\ V_t &= V_t^* + (p'_P - p'_t) d_t \\ V_b &= V_b^* + (p'_B - p'_P) d_b \end{aligned} \quad (4.39)$$

Pour corriger la vitesse, il faut calculer le champ de correction de la pression.

L'équation algébrique de la correction de la pression est obtenue en introduisant les équations (4.39) dans l'équation de discrétisation de continuité et après un certain réarrangement, l'équation de discrétisation de la correction de pression s'écrit comme suit :

$$A_P p'_P = A_N p'_P + A_S p'_S + A_T p'_S + A_B p'_B + b' \quad (4.40)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_N &= r_n d_n \Delta z_p \\ A_S &= r_s d_s \Delta z_p \\ A_T &= d_t r_p \Delta r_p \\ A_B &= d_b r_p \Delta r_p \\ A_P &= A_N + A_S + A_T + A_B \\ b' &= (r_s U_s^* - r_n U_n^*) \Delta z_p + (V_b^* - V_t^*) r_p \Delta r_p \end{aligned} \quad (4.41)$$

Donc, connaissant un champ de vitesse estimé, on l'introduit dans la source de l'équation (4.40) et avec la résolution de cette équation on aura la correction de la pression.

#### 4.7 L'algorithme de calcul

La solution séquentielle de l'ensemble des équations de discrétisation (systèmes d'équations) des variables dépendantes est faite suivant l'algorithme SIMPLER. Les étapes de ce dernier sont énumérées ci-après.

1. Initier un champ de vitesse.
2. Calculer les coefficients des équations de discrétisation des vitesses et déterminer les pseudo-vitesses  $\hat{U}$  et  $\hat{V}$ .
3. Calculer les coefficients de l'équation de pression discrétisée et résoudre cette équation pour obtenir une estimation du champ de pression  $p$ .
4. Utiliser l'estimation de pression dans les équations de discrétisation des vitesses. Résoudre ces équations et obtenir une estimation du champ de vitesse.
5. Utiliser les estimations des vitesses dans l'équation de correction de pression. Résoudre cette équation et obtenir la correction de pression.
6. Corriger les estimations des vitesses avec les corrections de pression.
7. Résoudre l'équation discrétisée d'énergie pour obtenir le champ de température.
8. Augmenter le pas du temps et retourner à l'étape 2 jusqu'à l'obtention de la solution stationnaire.

#### 4.8 La méthode de balayage

L'équation de discrétisation d'une variable dépendante représente en fait un système d'équations algébriques linéaires: une équation pour chaque point du maillage. On choisit la méthode de balayage pour la solution itérative d'un système d'équations algébriques parce qu'elle converge plus vite que la méthode de Gauss-Seidel; par exemple parce qu'elle fait introduire l'effet des conditions aux limites vers l'intérieur du domaine de calcul avec le taux d'une ligne par itération au lieu d'un point par itération (qui est le cas de la méthode de Gauss-Seidel). On fait le balayage suivant deux directions, un balayage suivant la direction radiale, et un autre suivant la direction axiale. Pour une représentation convenable de l'algorithme de la méthode de balayage, il est nécessaire d'utiliser une écriture indicielle des termes de l'équation de discrétisation:

$$A_P(i, j)\phi_{i,j} = A_N(i, j)\phi_{i+1,j} + A_S(i, j)\phi_{i-1,j} + A_T(i, j)\phi_{i,j+1} + A_B(i, j)\phi_{i,j-1} + S_\phi(i, j) \quad (4.42)$$

Pour le premier balayage qui est suivant la direction radiale  $r$  on trouve :

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i \quad (4.43)$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_i &= A_p(i, j) \\ b_i &= A_N(i, j) \\ c_i &= A_S(i, j) \\ d_i &= A_T(i, j)\phi_{i,j+1} + A_B(i, j)\phi_{i,j-1} + S_\phi(i, j) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ce système est tri diagonal et peut être résolu par l'algorithme de Thomas, ci-après exposé:

#### 4.9 L'algorithme de thomas

On a l'équation :

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i \phi_{i-1} + d_i$$

On introduit une relation de récurrence comme suit:

$$\phi_i = p_i \phi_{i+1} + q_i \quad (4.45)$$

Pour l'indice i-1 on trouve que :

$$\phi_{i-1} = p_{i-1} \phi_i + q_{i-1} \quad (4.46)$$

Si on remplace  $\phi_{i-1}$  par sa valeur dans la première équation on trouve :

$$a_i \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i [p_{i-1} \phi_i + q_{i-1}] + d_i \quad (4.47)$$

où

$$[a_i - c_i p_{i-1}] \phi_i = b_i \phi_{i+1} + c_i q_{i-1} + d_i \quad (4.48)$$

Donc

$$\phi_i = \left[ \frac{b_i}{a_i - c_i p_{i-1}} \right] \phi_{i+1} + \left[ \frac{c_i q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i p_{i-1}} \right] \quad (4.49)$$

Par identification avec l'équation (4.45) on trouve deux autres relations de récurrence:

$$p_i = \frac{b_i}{a_i - c_i p_{i-1}}, \quad q_i = \frac{c_i q_{i-1} + d_i}{a_i - c_i p_{i-1}} \quad (4.50)$$

Par définition :  $c_1 = A_S(1, j) = 0$  par conséquent :

$p_1 = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $q_1 = \frac{d_1}{a_1}$ ; Avec ces valeurs, on détermine tous les coefficients de (4.50) par récurrence.

D'autre part on a :

$$b_{il} = A_N(il, j) = 0$$

Et donc:

$$p_{il} = 0$$

On trouve facilement que:

$$\phi_{il} = q_{il} \tag{4.51}$$

Avec la relation de récurrence (4.45), on détermine toutes les  $\phi_i$ .

Le balayage suivant la direction axiale z est effectué de la même manière que celui suivant la direction radiale. L'équation de discrétisation est réécrite sous la forme tri diagonale:

$$a_j \phi(i, j) = b_j \phi(i, j + 1) + c_j \phi(i, j - 1) + d_j \tag{4.52}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} a_j &= A_p(i, j) \\ b_j &= A_r(i, j) \\ c_j &= A_B(i, j) \\ d_j &= A_N(i, j)\phi_{i+1,j} + A_S(i, j)\phi_{i,j-1} + S_\phi(i, j) \end{aligned} \tag{4.53}$$

#### 4.10 Critère de convergence

Le régime permanent (stationnaire) est atteint lorsque le maximum de la variation temporelle de la vitesse et de la température entre les temps ( $\tau$ ) et ( $\tau + \Delta\tau$ ) soit négligeable (tendant vers zéro). A cet état, les bilans, massique et thermique, sont satisfaits dans le domaine de calcul.

## 5. Résultats et discussion

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter et discuter nos résultats concernant la convection naturelle le long d'un cylindre vertical chauffé. Ces résultats sont divisés en trois parties.

-Première partie : nous analysons théoriquement l'influence du nombre de Grashof sur l'épaisseur de la couche limite.

-Deuxième partie : la paroi du cylindre est maintenue à une température constante.

-Troisième partie : la paroi du cylindre est soumise à un chauffage pariétal uniforme.

Dans cette étude, on fixe les paramètres suivants :  $Pr = 0.7$ ,  $H=6$ ,  $R = 1$ , et on fait varier le nombre de Grashof:  $Gr_R=10^6$ ,  $Gr_R=10^5$  et  $Gr_R=10^4$ . Le pas de temps utilisé dans toutes les simulations numériques est  $\Delta\tau = 10^{-6}$ .

### 5.2 Etude analytique

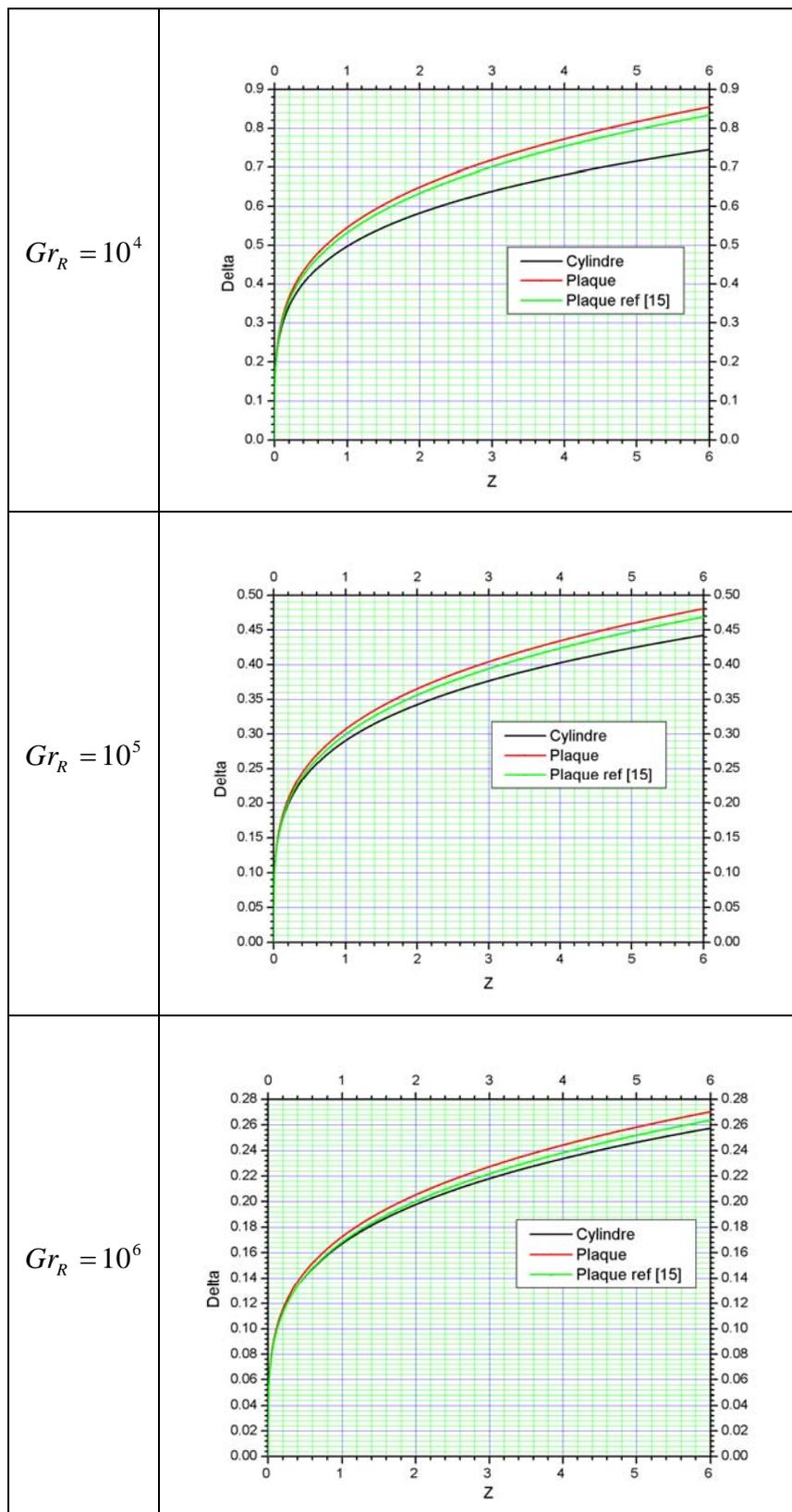
#### 5.2.1 La comparaison entre l'épaisseur de la couche limite du cylindre vertical et celle d'une plaque verticale (température constante).

Dans l'étude analytique, du chapitre 3, nous avons obtenu une équation différentielle liant l'épaisseur de la couche limite à la coordonnée axiale. Cette équation est réécrite ci-dessous.

$$\frac{d\delta^4}{dz} = \frac{420R^3}{Gr_R} \left[ \frac{\left( \frac{6}{Pr} - \frac{7}{6} \right) + \left( \frac{3}{8} - \frac{3}{4Pr} \right) \left( \frac{\delta}{R} \right)^2 + \left( \frac{7}{12} - \frac{1}{Pr} \right) \left( \frac{\delta}{R} \right) - \frac{7}{48} \left( \frac{\delta}{R} \right)^3 - \frac{1}{48} \left( \frac{\delta}{R} \right)^4}{\frac{7}{2} + 3 \left( \frac{\delta}{R} \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2} \right]$$

Cette équation différentielle nous donne la possibilité de comparer les épaisseurs des couches limites du cylindre vertical isotherme et de la plaque verticale isotherme. Lorsque  $\frac{\delta(z)}{R} \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $\delta(z) \ll R$ , on récupère l'équation différentielle de la variation axiale de la couche limite d'une plaque verticale isotherme. Ce cas se présente lorsque la hauteur du cylindre est inférieure à son rayon; et donc même à la hauteur du cylindre, la couche limite est encore très mince par rapport au rayon. Ce cas se présente aussi lorsque le nombre de Grashof est relativement élevé et le rapport d'aspect du cylindre ( $H/R$ ) est relativement modéré (pas très

grand). On montrera, plus tard, que l'épaisseur de la couche limite décroît avec l'augmentation du nombre de Grashof et donc même à la hauteur du cylindre cette épaisseur reste faible par rapport au rayon pour des nombres de Grashof relativement grands. Dans ce cas, le rapport  $\frac{\delta(z)}{R}$  et ses puissances (supérieures à 1) sont faibles et donc ont une faible contribution à la solution de l'équation différentielle de la variation axiale de l'épaisseur de la couche limite. Ces constats sont exemplifiés et quantifiés par la solution numérique de l'équation différentielle, avec la méthode de Runge-Kutta [23], pour les trois nombres de Grashof considérés dans cette étude. On compare les épaisseurs des couches limites du cylindre vertical (avec un rapport d'aspect  $H/R=6$ ) et de la plaque verticale ayant la même hauteur que le cylindre. La solution de la plaque est celle de l'équation différentielle sans les termes contenant  $\frac{\delta(z)}{R}$  et ses puissances. De la **figure 5.1**, on voit que pour le plus grand nombre de Grashof, les épaisseurs des couches limites, du cylindre et de la plaque, sont presque confondues, la différence des épaisseurs est difficile à visualiser graphiquement. Cependant, pour le cas du nombre de Grashof égal à  $10^4$ , on voit que la différence des épaisseurs croît axialement. A la hauteur maximale la différence relative est égale à **12.84%**. C'est la couche limite du cylindre qui est relativement plus mince. La conclusion est que la courbure de la surface cylindrique tend à amincir la couche limite. Comme, le coefficient de transfert de chaleur local est inversement proportionnel à l'épaisseur de la couche limite; la courbure tend à améliorer (relativement et localement) le transfert thermique. Cette comparaison théorique des couches limites du cylindre et de la plaque est confirmée par les résultats expérimentaux et numériques publiés dans la bibliographie [3, 6]. Dans plusieurs ouvrages classiques de transferts thermiques, les auteurs présentent des coefficients de corrections permettant le calcul du nombre de Nusselt moyen du cylindre vertical en fonction de celui de la plaque verticale; pour les mêmes conditions hydrodynamiques et thermiques. Nos résultats sont en bon accord avec ceux de la bibliographie [6].



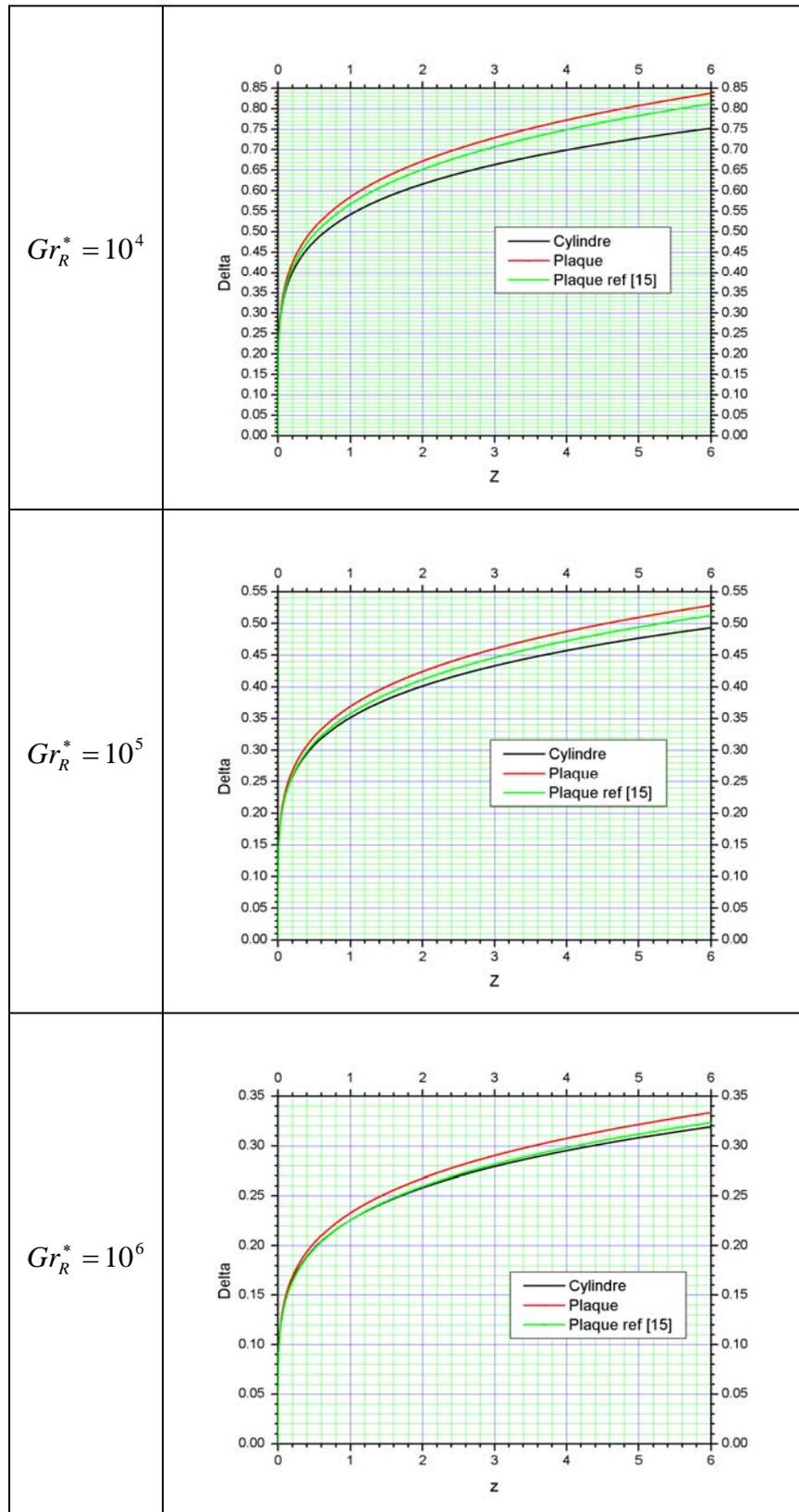
**Figure 5.1.** La variation axiale de l'épaisseur de la couche limite pour la plaque et le cylindre pour les trois nombres de Grashof.

### 5.2.2 La comparaison entre l'épaisseur de la couche limite du cylindre vertical et celle d'une plaque verticale (flux constante).

Dans le cas du flux constant, nous avons aussi obtenu une équation différentielle dont la solution nous donne la croissance de l'épaisseur de la couche limite en fonction de la coordonnée axiale ; pour un Rayon cylindrique donné et un nombre de Grashof fixé. Cette équation est réécrite ci-après.

$$\frac{d\delta^5}{dz} = \frac{210R^4}{Gr_R^*} \left[ \frac{\left(\frac{192}{Pr}\right) + \left(20 - \frac{32}{Pr}\right)\left(\frac{\delta}{R}\right) - \frac{24}{Pr}\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 - 5\left(\frac{\delta}{R}\right)^3}{84 + 61\left(\frac{\delta}{R}\right) + 12\left(\frac{\delta}{R}\right)^2} \right]$$

La solution numérique de cette équation; par la méthode de Runge-Kutta [23], nous a donné les résultats illustrés dans la **Figure 5.2**. Comme dans le cas du cylindre isotherme, on remarque que l'épaisseur de la couche limite cylindrique est relativement inférieure à celle de la plaque isotherme. Cependant, la différence décroît avec l'augmentation du nombre de Grashof. De la même figure, on conclue qu'on a un bon accord avec les résultats de la bibliographie [6].



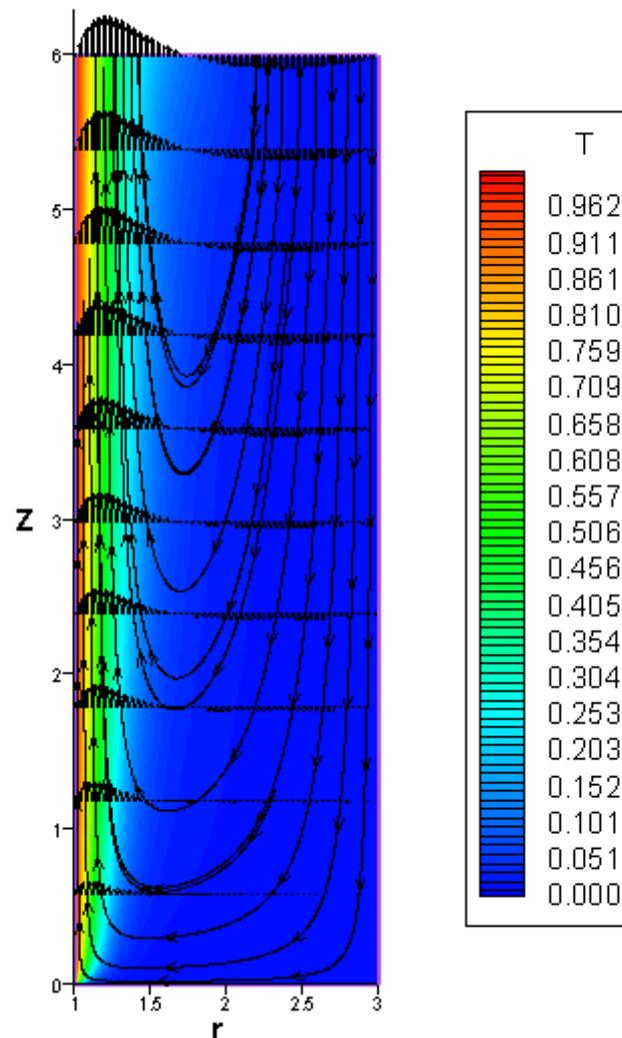
**Figure 5.2.** La variation axiale de l'épaisseur de la couche limite pour la plaque et le cylindre pour les trois nombres de Grashof.

### 5.3 La convection naturelle le long d'un cylindre vertical isotherme.

#### 5.3.1 Le cas de $Gr_R=10^4$

La **Figure 5.3** illustre les distributions spatiales du champ de la température et des vecteurs de la vitesse à quelques stations axiales arbitrairement choisies (pour ne pas encombrer le graphisme). Aussi, sur la même figure, sont représentées les lignes de courant tangentes aux vecteurs de vitesse. La paroi du cylindre est isotherme à la température maximale. A chaque position axiale, suivant la direction radiale, il est clair que la température décroît en s'éloignant de la paroi. Son domaine de variation quantifie l'épaisseur de la couche limite. Cette épaisseur croît avec l'augmentation de la coordonnée axiale: elle est nulle à la base du cylindre et atteint (approximativement) 0.75 à la hauteur du cylindre. Donc la position radiale maximale du domaine de calcul (égale à 3) est largement suffisante pour capturer la couche limite thermique. La variation de la température se limite à la zone de la couche limite ; en dehors de cette région le fluide est froid et isotherme à la température ambiante. Cette distribution de température induit un écoulement de convection naturelle qui s'explique comme suit: le fluide dans la zone de la couche limite est plus chaud et sous l'effet de la poussée thermique (poussée d'Archimède) subit un mouvement ascendant le long de la paroi du cylindre. Dans cette couche limite, à chaque élévation axiale, en suivant la direction radiale, la vitesse est nulle à la paroi, elle augmente à son maximum à environ une distance de la paroi égale à un tiers de l'épaisseur de la couche limite; ensuite elle décroît à presque zéro à la limite radiale de la couche limite. Suivant la direction axiale, le niveau de la vitesse augmente avec l'augmentation de la position axiale. Cet écoulement ascendant est remplacé par celui qui est en dehors de la couche limite. Cet écoulement est très spécifique: à la limite axiale inférieure, on a imposé une vitesse axiale nulle et un gradient axial nul de la composante radiale de la vitesse. A la limite radiale maximale du domaine de calcul, on a imposé une vitesse axiale nulle comme une approximation assez justifiée à cette limite très loin de la limite de la couche limite. A cette même limite, on a utilisé l'équation de continuité pour déterminer la condition de la vitesse radiale à cette limite radiale: autrement dit, la vitesse radiale à cette limite est celle qui satisfait l'équation de continuité à cette limite entre deux niveaux axiaux consécutifs. A la limite axiale supérieure du domaine de calcul, on a imposé (par approximation) des gradients axiaux nuls des vitesses. Bien sûr, à la paroi du cylindre, les vitesses sont nulles. Les conditions aux limites hydrodynamiques citées ci-dessus

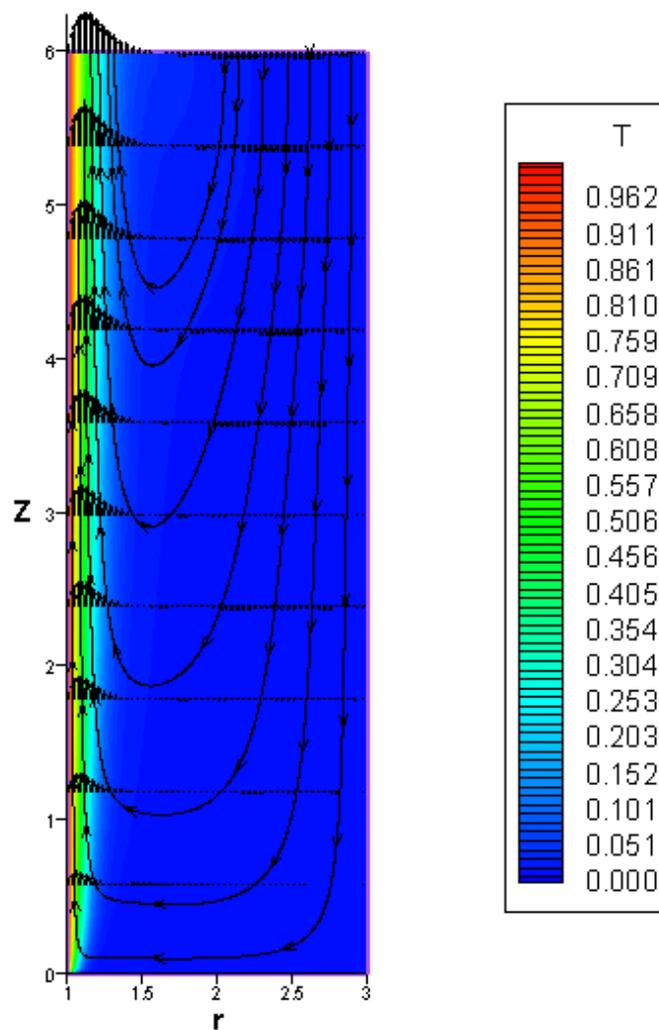
nous donne l'écoulement de la couche limite déjà présenté et celui en dehors de cette couche. En dehors de la couche limite, on voit que près de la limite radiale supérieure du domaine, l'écoulement froid est surtout descendant (sous l'effet de la poussée thermique). Sa descendance est cependant bloquée par la condition hydrodynamique à la limite axiale inférieure; et donc il doit remonter près de la couche limite.  $Gr_R = 10^5$ .



**Figure 5.3.** Champs de vitesse et de température et Lignes de courant.  $Gr_R=10^4$ .

### 5. 3. 2 Les cas de $Gr_R=10^5$ et $Gr_R=10^6$

Les champs hydrodynamique et thermique de ces nombres de Grashof sont présentés dans les **Figures 5.4** et **5.5**. Ces champs sont qualitativement similaires à ceux de  $Gr_R=10^4$ . Cependant, il est clair, que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation du nombre de Grashof. Une conséquence attendue de ce constat est que le transfert thermique augmente avec le nombre de Grashof, car le coefficient de transfert thermique est inversement proportionnel à l'épaisseur de la couche limite.



**Figure 5.4.** Champs de vitesse et de température et lignes de courant.  $Gr_R=10^5$ .

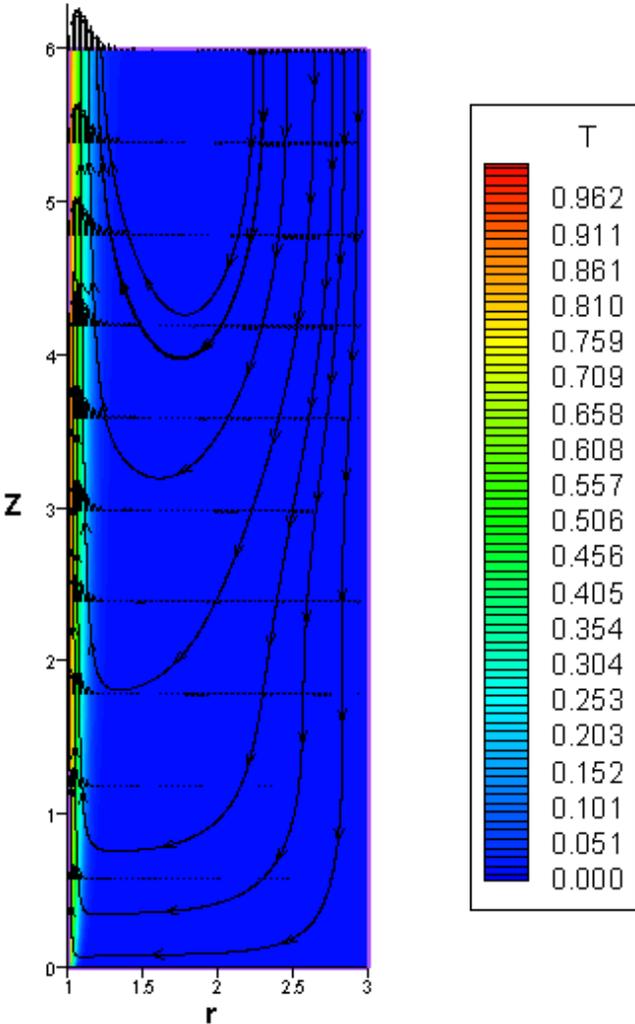


Figure 5.5. Champs de vitesse et de température et lignes de courant.  $Gr_R=10^6$ .

Le fait que la couche limite devient plus mince lorsqu'on augmente le nombre de Grashof est nettement plus visible dans la **figure 5.6**. Dans cette figure, les couches limites, hydrodynamiques et thermiques, sont comparées à quelques stations axiales, arbitrairement choisies. Il est clair que l'épaisseur des couches limites diminue et la vitesse axiale augmente considérablement avec l'augmentation du nombre de Grashof. L'augmentation du niveau de la vitesse axiale avec le nombre de Grashof est caractéristique de l'intensification de la convection naturelle, entraînée par la poussée thermique qui est directement proportionnelle au nombre de Grashof. Aussi, l'épaisseur des couches limites et la vitesse axiale maximale augmentent axialement. Ces variations s'expliquent par l'analyse théorique (même si elle est approximative) qui nous a montré que l'épaisseur de la couche limite varie comme

$$\delta(z) = \left[ R^3 \left( \frac{720}{\text{Pr}} - 140 \right) \right]^{0.25} \left( \frac{z}{Gr_R} \right)^{0.25} \text{ et que la vitesse axiale maximale varie}$$

comme  $V_{\max}^*(r, z) = \frac{\sqrt{Gr_R}}{27} \left( \frac{\delta}{R} \right)^2$ . Dans cette figure, on a reconsidéré la forme non

dimensionnelle de la vitesse pour permettre une comparaison des résultats des différents nombres de Grashof. Ainsi, les vitesses représentées dans la figure sont normalisées par  $(v/R)$  au lieu de  $(\sqrt{Gr} v/R)$  utilisé dans la simulation numérique. Aussi, de la figure citée, on remarque qu'à chaque élévation, le maximum de la vitesse axiale se localise généralement, approximativement à un tiers de l'épaisseur de la couche limite comme prévu par l'étude théorique. En dehors de la couche limite, l'écoulement froid descendant à un profil quasi parabolique.

$$Z = 1.5$$

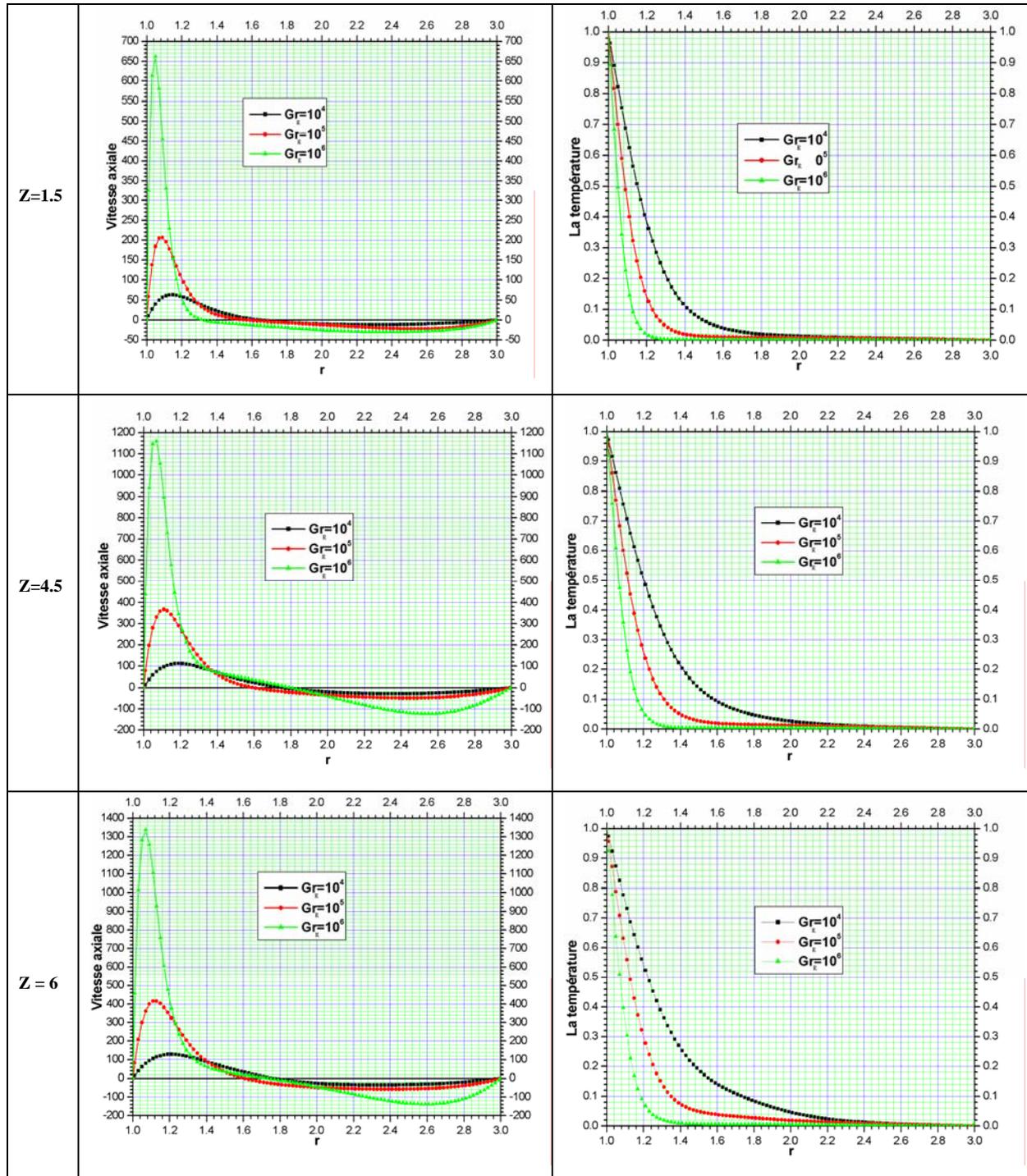
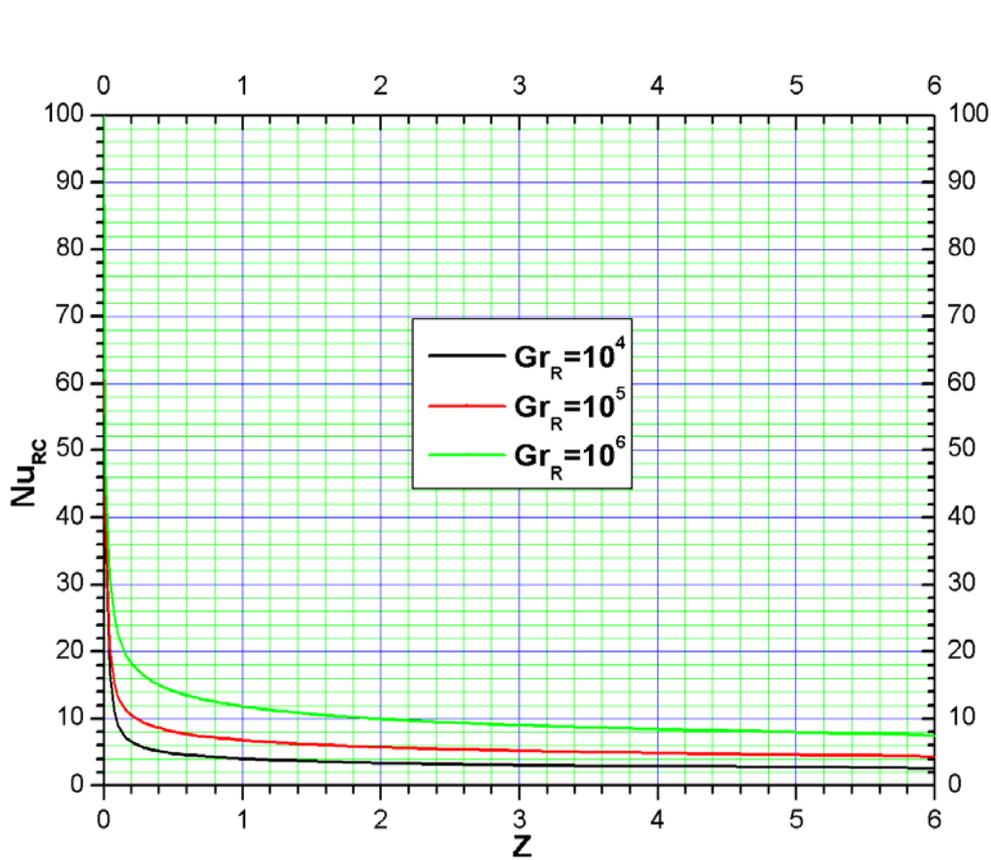


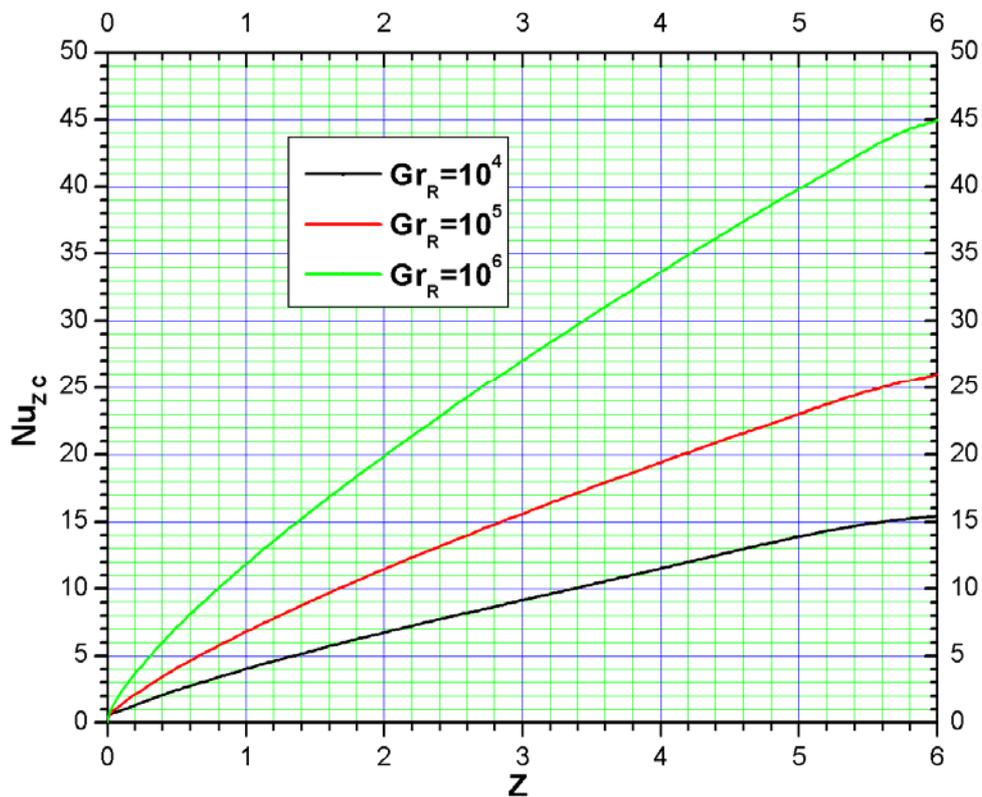
Figure 5.6. Variations radiales de la vitesse axiale et de la température à quelques stations axiales; pour les trois nombres de Grashof considérés.

Les variations axiales des nombres de Nusselt locaux basés sur R (comme longueur caractéristique) sont représentées dans **la figure 5.7**. On remarque que le nombre de Nusselt local augmente avec le nombre de Grashof comme il le doit. Ce résultat était prévu, car le nombre de Nusselt quantifie le taux de transfert thermique qui doit être amélioré avec l'augmentation du nombre de Grashof: cette augmentation du nombre de Grashof augmente la poussée thermique qui améliore l'effet convectif. L'importante chute du nombre de Nusselt s'effectue en bas du cylindre entre  $z = 0$  et  $z = 0.5$ . Cette chute est caractéristique de la chute rapide du coefficient de transfert de chaleur au début de la zone de transfert thermique. A partir de  $z = 0.5$  et jusqu'à la hauteur du cylindre ( $z = 6$ ), les nombres de Nusselt subissent une légère décroissance monotone.



**Figure 5.7.** Les nombres de Nusselt axiaux (basés sur R) des trois nombres de Grashof.

Une autre définition du nombre de Nusselt axial local est celle basée sur la coordonnée  $z$  comme longueur caractéristique. On utilisant cette définition, les trois nombres de Nusselt locaux, des trois nombres de Grashof, sont comparés dans la **Figure 5.8**. Dans les trois cas, le nombre de Nusselt axial a une croissance monotone axiale entre la base et la hauteur du cylindre. Il est très clair que le nombre de Nusselt local augmente avec le nombre de Grashof. Cette deuxième définition du nombre de Nusselt est motivée par la volonté de la comparaison de nos résultats avec ceux de la bibliographie [3, 6]. Nous avons trouvé que nos résultats sont en bon accord avec ceux de la bibliographie. Dans le tableau **5.1**, on compare les nombres de Nusselt moyens (basés sur la hauteur) de nos simulations numériques et ceux de la référence [6]. Il est clair qu'on a un excellent accord avec les résultats de la référence citée.



**Figure 5.8.** Les nombres de Nusselt axiaux (basés sur  $z$ ) des trois nombres de Grashof.

**Tableau 5.1** : Nombres de Nusselt moyens basés sur la hauteur.

		Nos résultats	Résultats de la référence [6]	Erreur (%)
$\overline{Nu}_{HC}$	$Gr_R=10^6$	61.7904	61.1311	1.066
	$Gr_R=10^5$	36.3270	36.1874	0.384
	$Gr_R=10^4$	22.0096	22.1750	0.746

Les résultats numériques précédents montrent que, qualitativement, les couches limites (hydrodynamique et thermique) d'un cylindre vertical sont similaires à celles d'une plaque verticale; cependant nous allons montrer que quantitativement il y'a une certaine petite différence dans certains cas. S'il y'a une différence, la courbure de la surface cylindrique a tendance à améliorer le transfert thermique. Ce résultat peut être déduit des travaux expérimentaux et numériques [3,6]. Notre étude numérique confirme aussi les résultats de la bibliographie. Aussi, dans notre étude, nous avons par une étude théorique analytique démontré que pour les même conditions (hydrodynamique et thermique et hauteur géométrique), l'épaisseur de la couche limite cylindrique ne peut être que relativement plus mince que celle de la plaque plane et donc le nombre de Nusselt du cylindre est relativement plus grand. Mais la différence entre les résultats du cylindre et de la plaque n'est apparente que dans les cas des faibles nombres de Grashof et à des hauteurs élevées. Nos résultats numériques confirment nos résultats théoriques. Dans la **Figure 5.9** on compare les nombres de Nusselt locaux numériques du cylindre et ceux de la plaque publiés dans la référence [15]. Il est clair que les résultats du cylindre et de la plaque se rapprochent en augmentant le nombre de Grashof. Aussi, même pour le nombre de Grashof le plus faible, les résultats se rapprochent aux faibles élévations.

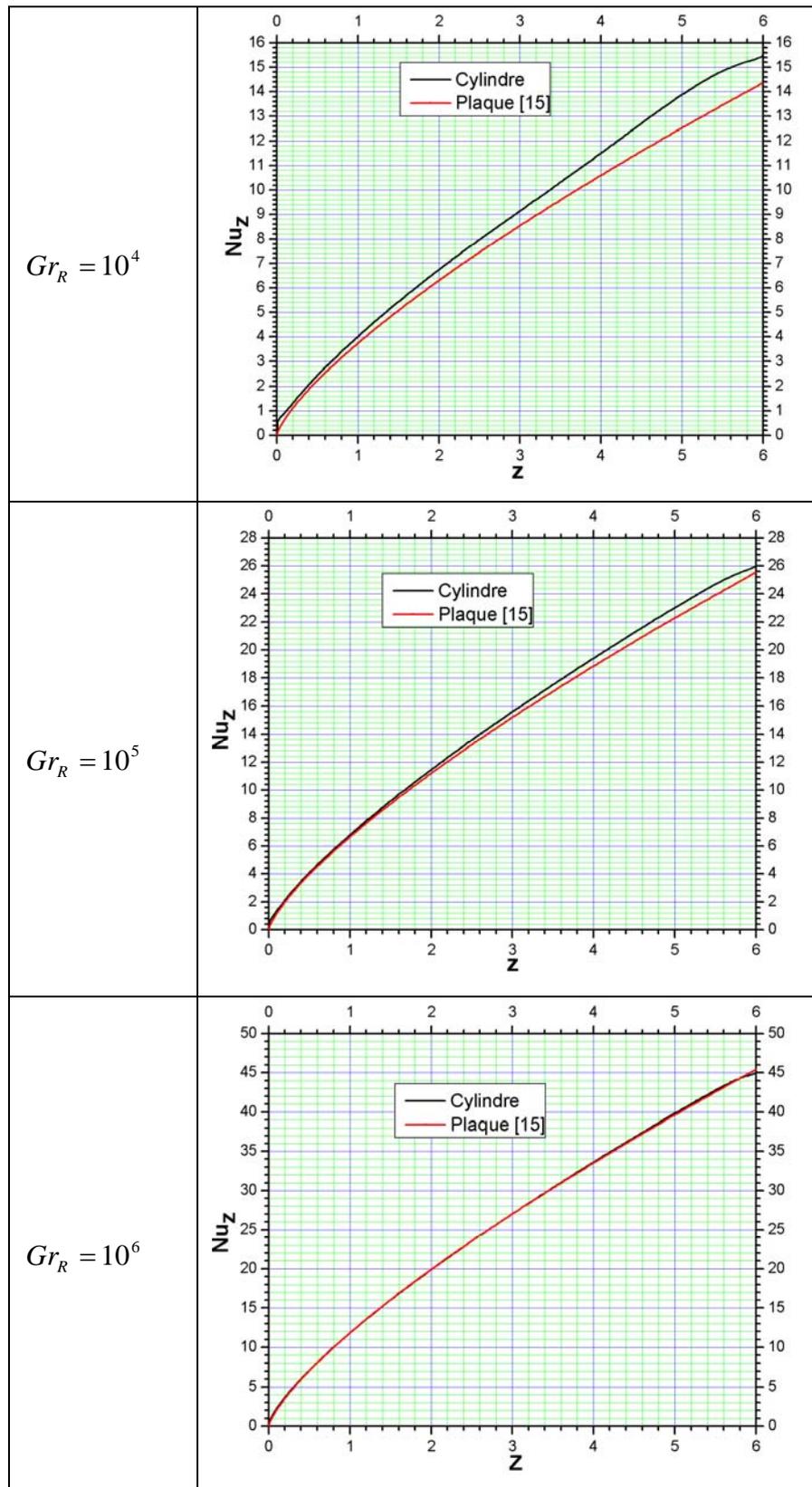
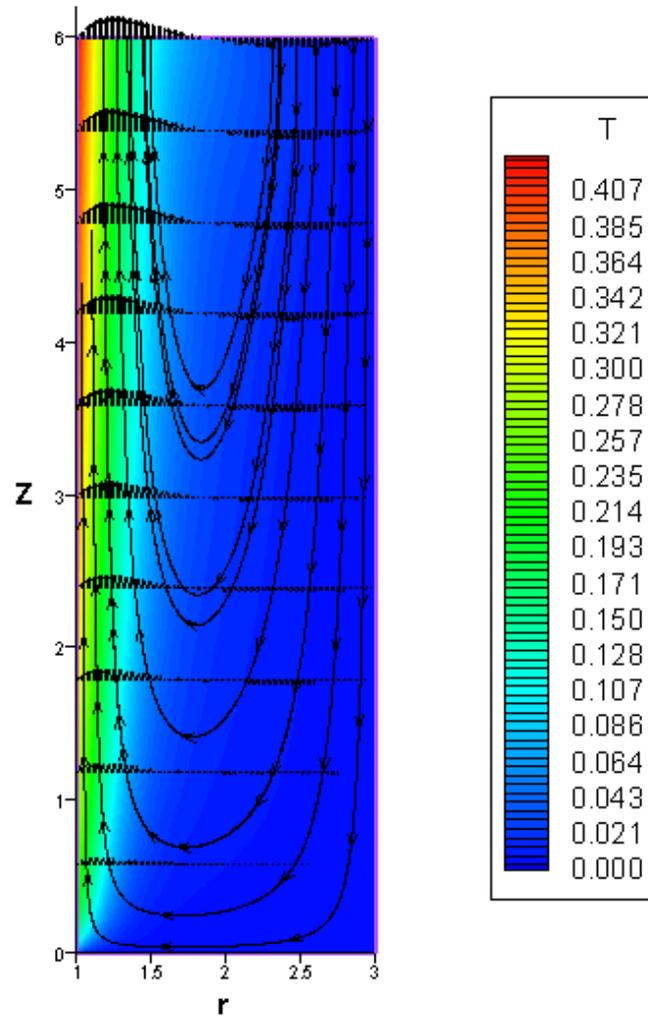


Figure 5.9. Comparaison des nombres de Nusselt locaux du cylindre et de la plaque

#### 5. 4 La convection naturelle le long d'un cylindre soumis à un flux de chaleur pariétal constant.

Dans le cas où la surface du cylindre vertical est soumise à un flux de chaleur pariétal constant, **la température de cette surface n'est pas constante**; elle croît axialement. Dans ce cas l'échelle constante de la température (pour un cas donné) n'est la différence entre la température de la paroi (axialement variable) et celle du fluide du milieu ambiant ; elle est arbitrairement choisie égale au produit du flux de chaleur et le rayon du cylindre divisé par la conductivité thermique du fluide (supposée constante dans notre étude). Cette échelle nous donne une définition du nombre de Grashof caractéristique différente de celle du cas du cylindre isotherme. Il faut mentionner que les équations modélisantes de la convection naturelle sur un cylindre soumis à un flux de chaleur constant ont la même forme que celles du cas du cylindre isotherme, sauf que la condition thermique à la paroi du cylindre est différente et que la définition du nombre de Grashof est différente. Donc, on s'attendait à ce que, globalement et qualitativement, les champs hydrodynamique et thermique soient similaires a ceux du cas du cylindre isotherme. Mais, certaines différences quantitatives sont inévitables. Une différence concerne la température de la paroi du cylindre, dans le cas du cylindre isotherme elle est constante alors que dans le cas du chauffage par un flux constant elle est axialement croissante, comme il sera démontré plus tard. Une autre différence concerne le niveau des températures non dimensionnelles: ce niveau dépend de la valeur numérique du nombre de Grashof. Il est trouvé que le niveau des températures non dimensionnelles diminue avec l'augmentation du nombre de Grashof. Mais il faut rappeler que l'échelle de la température n'est pas le même pour des nombres de Grashof différents. Concernant la comparaison des couche limites du cylindre et la plaque pour le cas du flux de chaleur constant, on s'attendait à trouver les mêmes conclusions obtenues pour le cas isotherme.

Les **figures 5.10, 5.11 et 5.12** illustrent les distributions spatiales de la vitesse et de la température à quelques stations axiales arbitrairement choisies. Aussi, sont représentées les lignes de courant tangentes aux vecteurs de vitesse. La comparaison avec les **figures 5.3, 5.4 et 5.5** du cas isotherme, montre une similarité qualitative remarquable. Les épaisseurs des couche limites sont comparables (très proches) pour la même valeur numérique des nombres de Grashof.



**Figure 5.10.** Champs de vitesse et de température et Lignes de courant.  $Gr_R^* = 10^4$ .

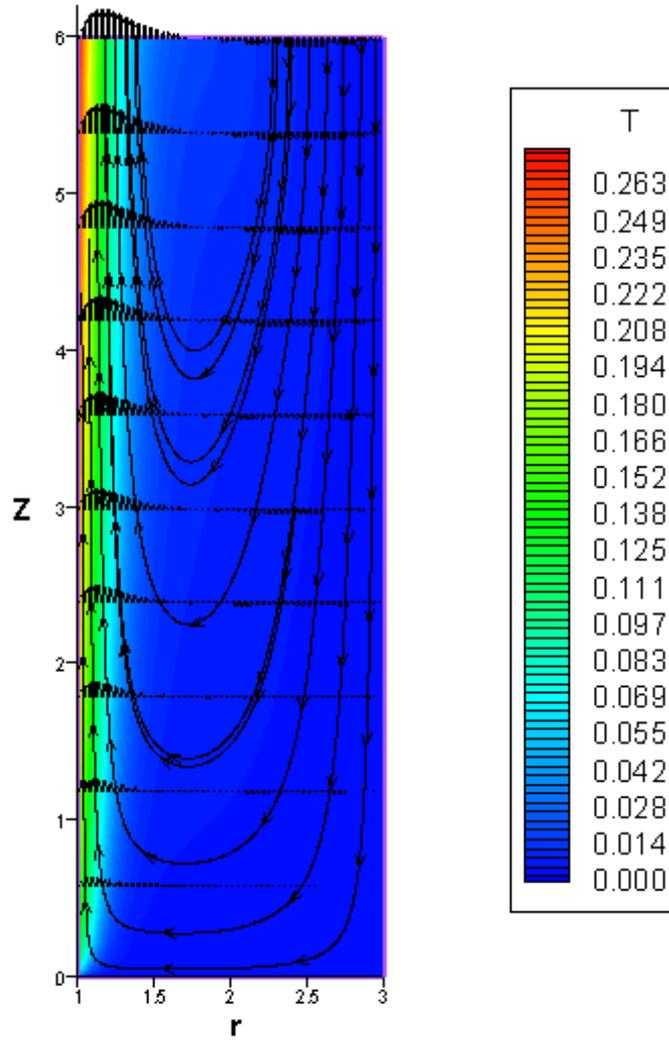
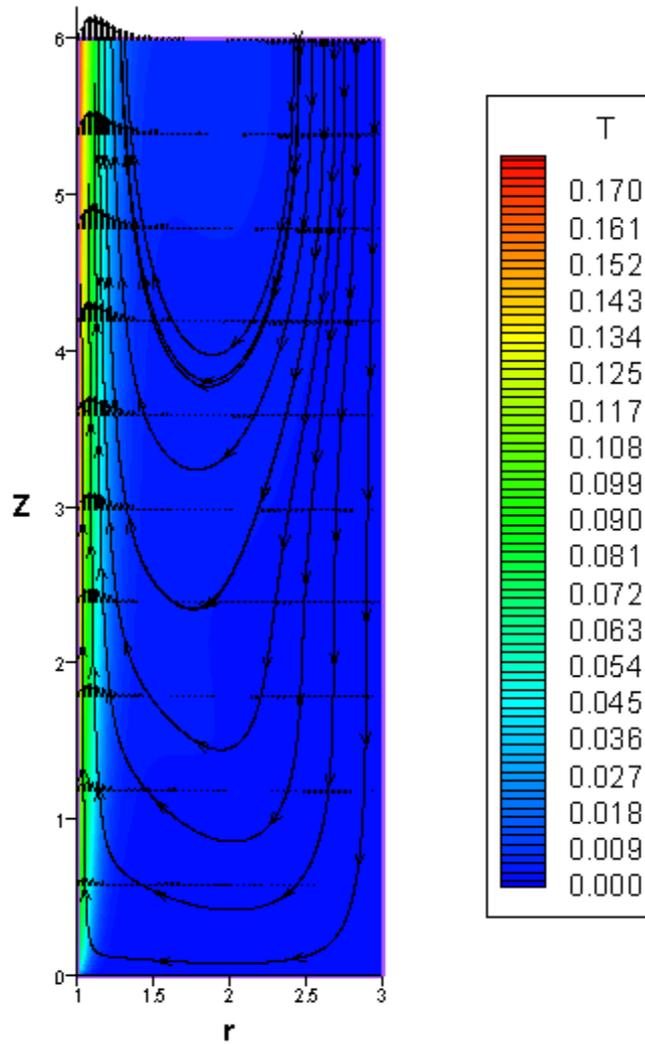


Figure 5.11. Champs de vitesse et de température et Lignes de courant.  $Gr_R^* = 10^5$ .



**Figure 5.12.** Champs de vitesse et de température et Lignes de courant.  $Gr_R^* = 10^6$ .

La **Figure 5.13** montre l'influence du nombre de Grashof sur l'épaisseur de la couche limite dans le cas d'un cylindre soumis à un flux de chaleur constant. Plus le nombre de Grashof est grand, plus l'écoulement est confiné près de la paroi. Il est clair que l'épaisseur des couches limites diminue et la vitesse axiale augmente considérablement avec l'augmentation du nombre de Grashof, Aussi, l'épaisseur des couches limites et la vitesse axiale maximale augmente axialement. Ces variations s'expliquent par l'analyse théorique qui nous a montré

que l'épaisseur de la couche limite varie comme  $\delta(z) = \left[ \frac{480 R^4}{Pr} \right]^{0.2} \left( \frac{z}{Gr_R^*} \right)^{0.2}$  et que la vitesse

axiale maximale varie comme  $V_{\max}^*(r, z) = \frac{\sqrt{Gr_R^*}}{54} \left( \frac{\delta}{R} \right)^3$ .

En augmentant le nombre de Grashof, la température décroît rapidement suivant la direction radiale, de la paroi à la limite de la couche limite. Cette figure montre l'intensification de la convection naturelle lorsqu'on augmente le nombre de Grashof. Ceci est démontré par l'augmentation du niveau de la vitesse. Cette augmentation diminue le niveau des températures non dimensionnelles, ce qui est caractéristique de l'amélioration de la convection de chaleur quantifiée par l'augmentation du nombre de Nusselt. Les nombres de Nusselt axiaux basés sur  $\mathbf{R}$  pour  $Gr_R^* = 10^4, 10^5$  et  $10^6$  sont comparés dans la **Figure 5.14**. On voit que le nombre de Nusselt diminue continuellement le long de la direction axiale et l'importante variation s'effectue en bas du cylindre par une grande chute.

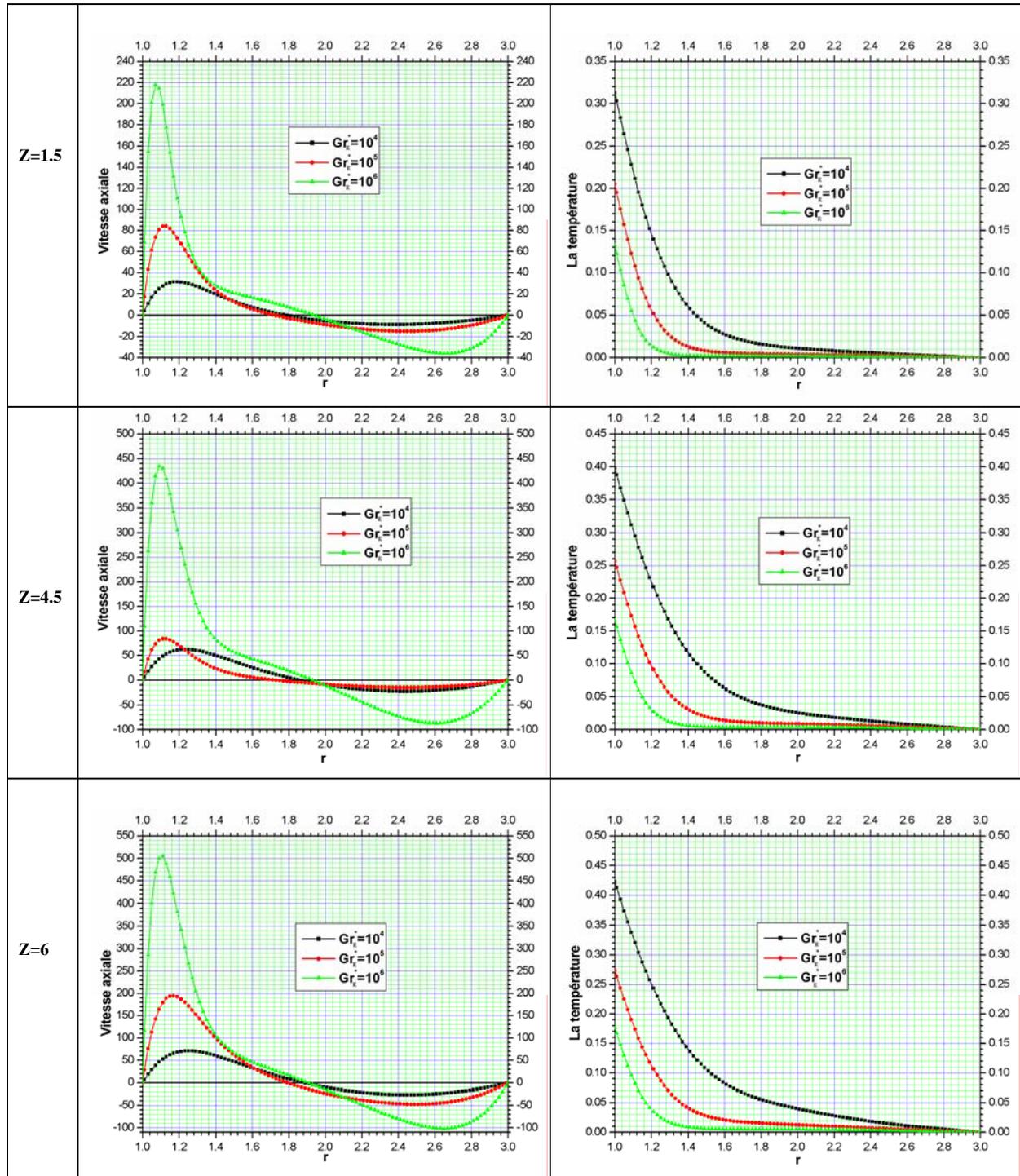


Figure 5.13. Variations radiales de la vitesse axiale et de la température à quelques stations axiales; pour les trois nombre de Grashof considérés.

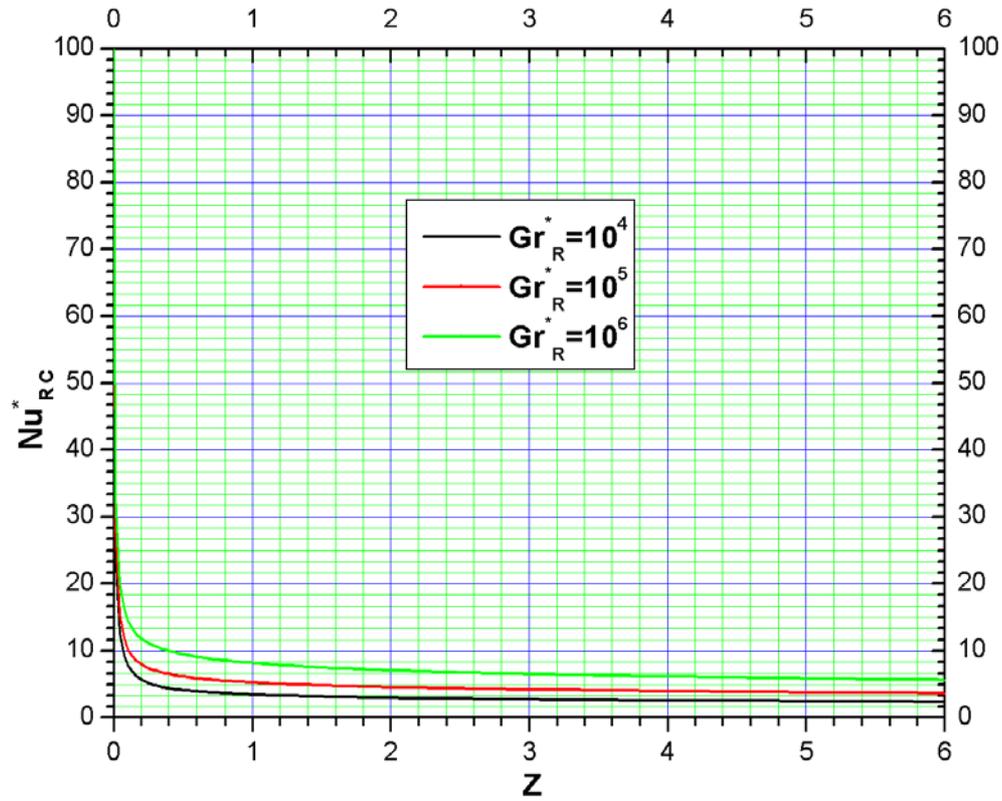


Figure 5.14. Les nombres de Nusselt axiaux (basés sur R) des trois nombres de Grashof.

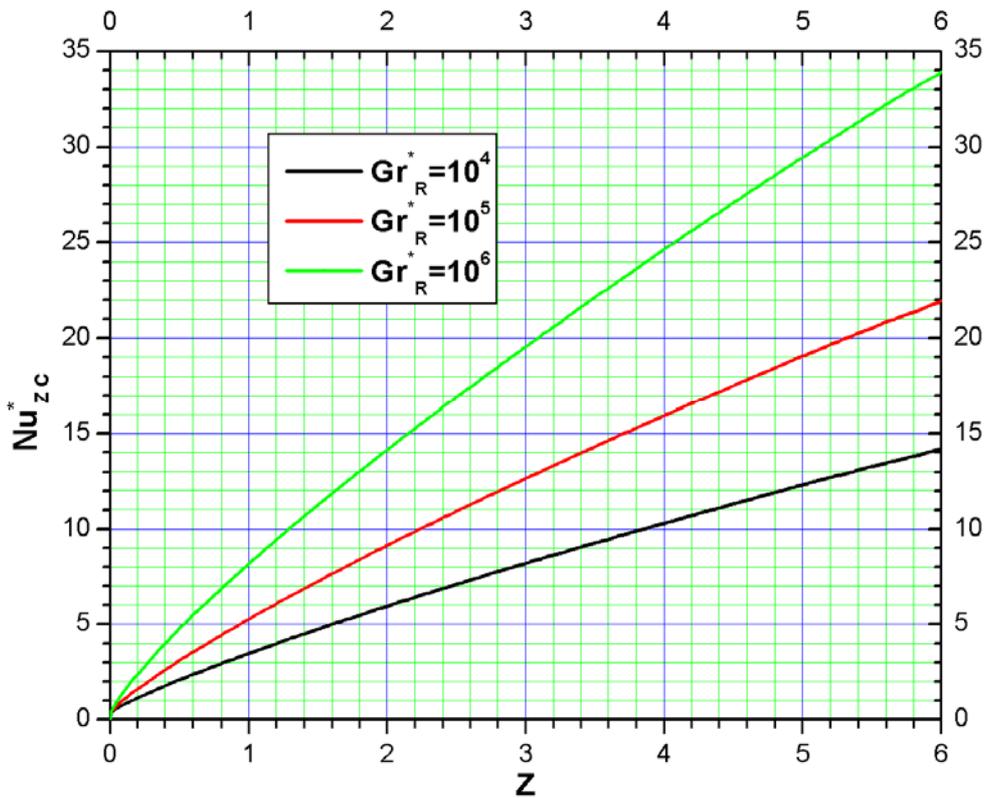
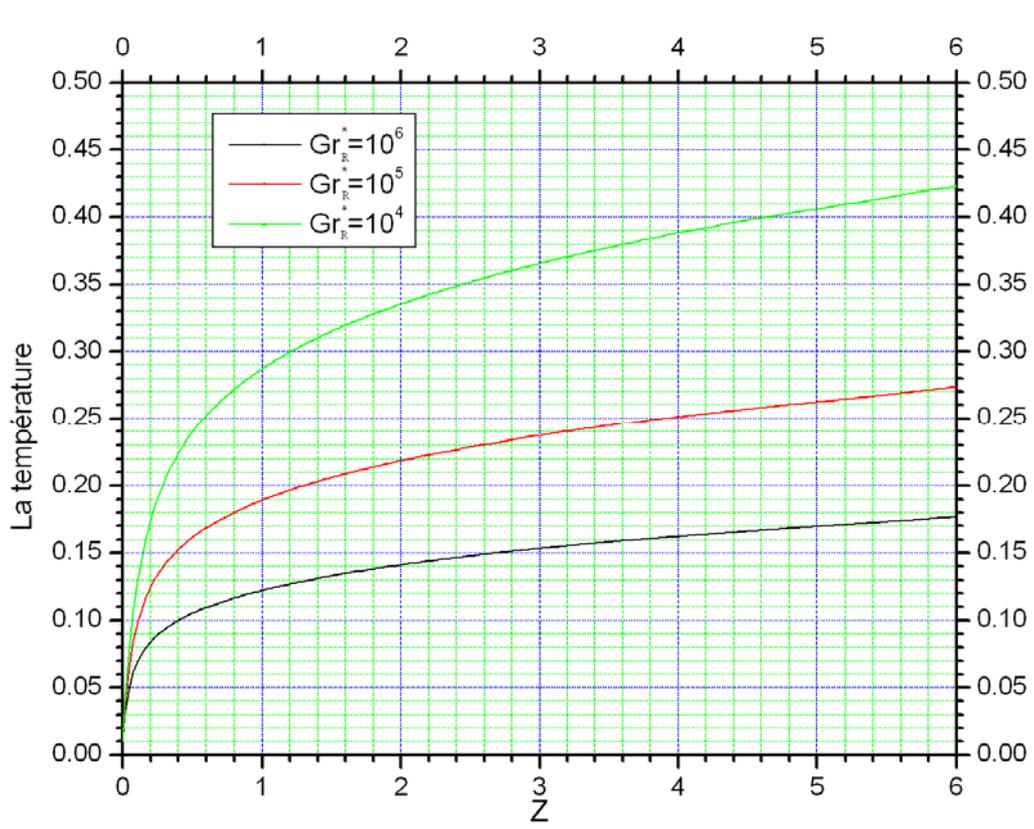


Figure 5.15. Les nombres de Nusselt axiaux (basés sur z) des trois nombres de Grashof.

La figure 5.15 donne la variation axiale du nombre de Nusselt basés sur  $z$  le long du cylindre pour les trois valeurs de Grashof  $Gr_R^* = 10^6, 10^5, \text{ et } 10^4$ . Nous constatons que ce nombre de Nusselt croît axialement. Nous remarquons aussi que le nombre de Nusselt augmente avec le nombre de Grashof. Ceci est évident car pour des grandes valeurs de Grashof l'épaisseur de la couche limite diminue et par conséquent la résistance au transfert de chaleur est faible.



**Figure 5.16.** Evolution des températures de la paroi du cylindre en fonction de  $Z$ .

De la **Figure 5.16**, il est clair que la température augmente axialement pour les trois nombres de Grashof considérés. Ceci est dû au chauffage axial continu. Le long du cylindre, la variation axiale de la température pour  $Gr_R^* = 10^6$  est la plus faible par rapport aux autres nombres de Grashof. L'augmentation du nombre de Grashof augmente la convection naturelle et donc réduit le niveau de la température de la paroi. Dans le tableau 5.2, on compare les nombres de Nusselt moyens (basés sur la hauteur  $H$ ) de nos simulations numériques et ceux

de la référence [6]. Il est clair qu'on a un excellent accord avec les résultats de la référence citée.

**Tableau 5.2** : Nombres de Nusselt moyens basés sur la hauteur.

		Nos résultats	Résultats de la référence [6]	Erreur (%)
$\overline{Nu}_{HC}^*$	$Gr_R^* = 10^6$	43.4658	42.1738	2.972
	$Gr_R^* = 10^5$	28.5351	27.9421	2.078
	$Gr_R^* = 10^4$	19.0660	18.9644	0.533

## Conclusion

Ce mémoire concerne l'étude analytique et numérique de la convection naturelle laminaire et axisymétrique sur un cylindre vertical isotherme ou soumis à un flux de chaleur pariétal constant. Cette convection naturelle est modélisée par les équations différentielles aux dérivées partielles de continuité, de Navier-Stokes et d'énergie, et de leurs conditions initiales et aux limites, dans les coordonnées cylindriques. La dimension axiale du domaine est égale à la hauteur du cylindre, la dimension radiale du domaine (à partir de la surface du cylindre) est choisie égale à deux fois le rayon du cylindre. Le choix de la dimension radial est dicté par le fait qu'elle soit suffisamment supérieure à l'épaisseur maximale de la couche limite pour que cette dernière soit bien couverte. La dimension radiale choisie est trouvée largement suffisante. Les conditions aux limites thermiques imposées sont raisonnablement choisies. La paroi est soit isotherme soit soumise à un flux pariétal constant. A la limite axiale inférieure et à la limite radiale supérieure le fluide est suffisamment loin de la paroi chauffée pour que sa température soit égale à celle du milieu ambiant. A la limite axiale supérieure, le flux de chaleur normal à cette limite est imposé constant: la dérivée seconde axiale de la température est nulle. Concernant les conditions aux limites hydrodynamiques, à la paroi on a les conditions d'adhérence à la paroi (des vitesses nulles) et à la limite axiale supérieure des gradients axiaux nuls des vitesses. Cependant, à la limite axiale inférieure et à la limite radiale supérieure les conditions aux limites hydrodynamiques ne sont pas évidentes et dépendent du montage du cylindre dans son milieu ambiant extérieur. Plusieurs possibilités se profilent et il fallait faire un choix spécifique. Nous avons choisi des conditions permettant l'obtention d'une couche limite de la vitesse axiale qui a une épaisseur nulle à l'origine de la coordonnée axiale pour permettre la comparaison avec les résultats des modèles de la couche limites publiés dans la bibliographie. Donc à la limite axiale inférieure nous avons imposé une vitesse axiale nulle et un gradient axial nul de la vitesse radiale. Nous avons aussi le souci de satisfaire le bilan massique global: le champ de vitesse de la solution doit satisfaire le bilan massique global. Pour atteindre ce but, nous avons imposé à la limite radiale supérieure une vitesse axiale nulle et une condition de la vitesse radiale satisfaisant la conservation de la masse dans le domaine comme l'exige l'équation de continuité. Bien que ces conditions soient très spécifiques, nous les avons jugé assez raisonnables.

La convection naturelle dépend de trois paramètres de contrôle: le rapport d'aspect (arbitrairement choisi égal à 6), le nombre de Prandtl (arbitrairement choisi égal à

0.7, valeur typique pour l'air) et le nombre de Grashof. Ce dernier est basé sur le rayon du cylindre et l'échelle caractéristique de la température et prend les valeurs  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ . La valeur maximale est limitée par la limite de transition à la turbulence: sachant que cette limite correspond à un nombre de Grashof (**basé sur la hauteur**) égal à  $10^9$ . Donc si notre nombre de Grashof  $10^6$  est recalculé en fonction de la hauteur ( $H=6R$ ), il sera égal à  $2.16 \cdot 10^8$  dans le cas isotherme et égal à  $1.296 \cdot 10^9$  dans le cas du flux de chaleur constant; et avec ces valeur on est près de la transition à la turbulence.

Les équations modélisantes et leurs conditions initiales et aux limites sont résolues par la méthode numérique des volumes finis. Nous avons utilisé un maillage avec 102 points suivant la direction radiale et 202 points suivant la direction axiale. Le maillage est uniforme suivant chaque direction. La discrétisation spatiotemporelle utilisée est avec une précision du second ordre. La solution séquentielle de l'ensemble des équations de discrétisation des variables calculées suit l'algorithme SIMPLER. Pour chaque variable calculée, le système d'équations de discrétisation est résolu avec la méthode itérative de balayage impliquant l'utilisation directionnelle de l'algorithme de Thomas. Le pas du temps utilisé est égal à  $10^{-6}$ . A partir des conditions initiales, la marche dans le temps est suivie jusqu'à l'obtention de la solution stationnaire. Cette dernière satisfait les bilans massique et énergétique. Les résultats obtenus sont validés par la comparaison avec ceux de la bibliographie.

Les résultats de la simulation numérique de la convection naturelle sur un cylindre vertical isotherme permettent les conclusions suivantes. Le modèle des équations complètes de continuité, de Navier-Stokes et d'énergie avec les conditions aux limites imposées permet l'obtention d'un écoulement composé de celui d'une couche limite de la vitesse axiale et un second écoulement, en dehors de cette zone, qui assure la satisfaction du bilan massique. Cela veut dire que l'écoulement complet inclue celui de la couche limite. Les couches limites hydrodynamique et thermique sont, qualitativement et quantitativement, physiquement acceptables et comparables à celle de la bibliographie. Dans ce cas, l'écoulement du fluide froid, en dehors de la couche limite, quelque soit son allure, présente peut d'intérêt. Il est trouvé que les nombres de Nusselt locaux et moyen augment avec la l'augmentation du nombre de Grashof. La variation axiale des nombres de Nusselt locaux est en bon accord avec celle de la bibliographie. Nous avons, avec une approche analytique, comparé les couches limites du cylindre et d'une plaque verticale et montré les conditions des similitudes et des différences quantitatives. On a trouvé que lorsque l'épaisseur de la couche limite normalisée

par le rayon du cylindre ( $\frac{\delta(z)}{R}$ ) est très petite, les résultats de la couche limite de la plaque s'appliquent avec une bonne approximation au cas du cylindre. La condition citée se présente dans le cas d'un rapport d'aspect faible ( $H/R$  faible) et un nombre de Grashof relativement élevé.

Les résultats de la simulation numérique de la convection naturelle sur un cylindre vertical soumis à un flux de chaleur pariétal constant aboutissent aux conclusions suivantes. Sans surprise, on a trouvé que les champs hydrodynamique et thermiques sont globalement qualitativement similaires à ceux du cas du cylindre isotherme. Bien sûr, la différence apparente est la croissance axiale monotone de la température de la paroi du cylindre dans le cas du flux de chaleur imposé. Comme dans le cas du cylindre isotherme, on a trouvé que l'épaisseur de la couche limite diminue avec l'augmentation du nombre de Grashof et cette diminution améliore le transfert thermique: augmente le nombre de Nusselt. Les valeurs numériques des résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la bibliographie.

**Références**

- [1] René Leleu : «Transferts de chaleur».Techniques de l'ingénieur. École centrale de Lille. J 1 080-4.
- [2] Tetsu Fujii et Haruo Uehara: «Laminar natural-convective heat transfer from the outer surface of a vertical cylinder» J.Heat and Mass Transfer, vol 13, issue 3, pp. 607-615, 1970.
- [3] W.J.Minkowycz et E.M.Sparrow: «Local nonsimilar solutions for natural convection on a vertical cylinder» J.Heat Transfer. pp. 178-183.1974.
- [4] A.Pantokratoras: «Laminar natural convection of pure and saline water along a vertical isothermal cylinder»J. Heat and Mass Transfer. Paper No. 74-HT-Y,pp.351-360.2000.
- [5]T. Cebeci: «Laminar-free-convective-heat transfer from the outer surface of a vertical slender circular cylinder» Proceedings of the 5th International Heat Transfer conference, vol.3.Paper NC 1.4, Tokyo, pp 15-19. 1974.
- [6] «Hand book of Applied Thermal Design». E.C.Guye.Editor in chief. MCGRaw-Hill company.1989. Chapter 3.Majid Charmchi et Jose G.Martin «Natural convection Heat Transfer». pp 1-34,1-35,1-37.
- [7] Jisheng Li et J.D. Tarasuk: «Local free convection around inclined cylinders in air: An Interferometric Study ». Experimental thermal and fluid science, vol 5, issue 2, pp 235-242, 1992.
- [8] C.O. Popiel\*, J. Wojtkowiak et K.Bober:«Laminar free convective heat transfer from isothermal vertical slender cylinder». Experimental Thermal and Fluid Science, vol 32, pp 607-613, 2007.

- [9] J. F. Sacadura: «Initiation aux transferts thermiques». Technique et documentation (Paris).pp.265.1993.
- [10] Morgan, V. T: «The overall convective heat transfer from smooth circular cylinders». Adv. Heat transfer, vol 11, pp 199-212, 1975.
- [11] Al Arabi, M., et Salman, Y. K: «Laminar natural convection heat transfer from an inclined cylinder». Int. J. Heat and Mass transfer, vol 23, pp 45-51, 1980.
- [12] Ana-Maria Bianchi, Yves Fautrelle et Jacqueline Etay: « Transferts thermiques». Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. pp 206. 2004.
- [13] S.Ostrach:«An analysis of laminar free-convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force».Report 1111 to the National Advisory committee for Aeronautics, pp.1-17.1952.
- [14] C.R.Wilke, P.W.Tobias et M.Eisenberg: «Free convection mass transfer at vertical plates». Chem.Engng.Prog, vol 49, pp 663-674, 1953.
- [15] M.Necati Öziçik: «Heat Transfer a Basic Approach ».McGraw-Hill Book company.pp.443-444,422-428,433. 1985.
- [16] Squire: « Eckert E.R.G., Drake R.M. »Heat and mass Transfer, pp. 316, Mac Graw Hill, 1959.
- [17] S.Sugawara et I. Michiyoshi, Trans. JSME, pp 17-109.1951.
- [18] H.J.Merk et J.A.Prins: «Thermal convection in laminary boundary layers».I., Appl.Sci.Res., vol 4, pp 11-24, 1953.
- [19] Schmidt E., Beckman W.-Tech.Mach. Thermodynam., 1, pp.1-24,1930.

[20] Chen T.S., Tien J. P.et Armaly B.F:«Natural convection on horizontal, inclined and vertical plates whith variable surface temperature or heat flux». Int. J.Heat. Mass Transfer. Vol 29, No 10, pp. 1465-1478.1986.

[21] Churchill S.W. et Chu H. H. S: «correlating equations for laminar and turbulent free convection from a vertical plate». Int. J.Heat Mass Transfer, vol 18, pp 1323. 1975.

[22] S.Patankar: «Numerical heat transfer and fluid flow».Mc Graw Hill, USA, 1980.

[23] K. E. Atkinson: «An introduction to numerical analysis».pp. 366-376, John Wiley et Sons. NS.1978.

**Nomenclature**

- D : Diamètre du cylindre ( $m$ ).
- H : Hauteur du cylindre ( $m$ ).
- $h$  : Coefficient de transfert ( $W/m^2 \cdot K$ ).
- $g$  : Accélération de la pesanteur ( $g = 9.81 m/s^2$ ).
- $Gr_R$  : Le nombre de *Grashof* basé sur R (Paroi isotherme).
- $Gr_R^*$  : Le nombre de *Grashof modifié* basé sur R (Paroi soumise à un flux de chaleur pariétal constant).
- $Gr_z$  : Le nombre de *Grashof* basé sur Z (Paroi isotherme).
- $Gr_z^*$  : Le nombre de *Grashof modifié* basé sur Z (Paroi soumise à un flux de chaleur pariétal constant).
- $Nu_{RC}$  : Nombre de *Nusselt* du cylindre, basé sur R (Paroi isotherme).
- $Nu_{zC}$  : Nombre de *Nusselt* du cylindre, basé sur z (Paroi isotherme).
- $Nu_{zP}$  : Nombre de *Nusselt* de la plaque plane, basé sur z (Paroi isotherme).
- $Nu_{RC}^*$  : Nombre de *Nusselt* du cylindre, basé sur R (paroi soumise à un flux pariétal constant).
- $Nu_{zC}^*$  : Nombre de *Nusselt* du cylindre, basé sur Z (paroi soumise à un flux pariétal constant).
- $Nu_{zP}^*$  : Nombre de *Nusselt* de la plaque plane, basé sur Z (Paroi soumise à un flux pariétal constant).
- P : Pression ( $Pa$ ).
- Pr : Nombre de *Prandtl*.
- $q_w$  : Densité de flux de la chaleur ou de masse ( $W/m^2$ ).
- R : Rayon du cylindre ( $m$ ).
- U : Composante radiale de la vitesse ( $m/s$ ).
- V : Composante axiale de la vitesse ( $m/s$ ).
- T : Température dimensionnelle ( $^{\circ}K$ ).
- $Ra_R$  : Nombre de *Rayleigh* basé sur R ( $Ra_R = Gr_R \cdot Pr$ ).
- $Ra_R^*$  : Nombre de *Rayleigh modifié* basé sur R ( $Ra_R^* = Gr_R^* \cdot Pr$ ).
- $Ra_z$  : Nombre de *Rayleigh* basé sur Z ( $Ra_z = Gr_z \cdot Pr$ ).
- $Ra_z^*$  : Nombre de *Rayleigh modifié* basé sur Z ( $Ra_z^* = Gr_z^* \cdot Pr$ ).

***Lettres grecques***

- $\alpha$  : Coefficient de diffusion thermique ( $m^2/s$ ).
- $\beta$  : Compressibilité thermique du fluide ( $^{\circ}k^{-1}$ ).
- $\lambda$  : Conductivité thermique du fluide ( $w/m^{\circ}k$ ).
- $\delta$  : L'épaisseur de la couche limite ( $m$ ).
- $\mu$  : Viscosité dynamique ( $kg/ms$ ).
- $\nu$  : Viscosité cinématique du fluide ( $m^2/s$ ).
- $\rho$  : Masse volumique ( $Kg/m^3$ ).
- $a$  : Diffusivité thermique ( $m^2/s$ ).
- $\tau$  : Temps dimensionnel ( $s$ ).
- $\phi$  : Variable générale de transport.

***Indices***

- $s, n$  : Faces sud et nord du volume de contrôle.
- $t, b$  : Faces haut et bas du volume de contrôle.

## Abstract

In this work, we study, theoretically and numerically the axisymmetric natural convection along a vertical cylinder that is isothermal or heated by a constant heat flux. The length of the cylinder is six times its radius. The Prandtl number is equal to 0.7. The Grashof number is varied: it is equal to  $10^4$ ,  $10^5$  and  $10^6$ . Regarding the numerical simulation, the conservation equations of mass, Navier-Stokes and energy are solved by the finite volume numerical method with a space and time second order accurate numerical discretization. It is demonstrated, with a theoretical approach, that the cylinder local Nusselt number is close to that of the vertical plate in the case when the ratio of the boundary layer thickness and the cylinder radius is very weak. This result is confirmed by the numerical results which show that the difference between the cylinder and the plate local Nusselt numbers is apparent in the case of the weak Grashof number. For high Grashof numbers, the difference is relatively weak and is manifested only at the axial positions where the ratio of the boundary layer thickness and the cylinder radius is relatively considerable.

**Key words:** Free convection, Boundary layers, Vertical cylinder, Heat transfer, Nusselt number.

## Résumé

Dans ce travail, on étudie théoriquement et numériquement la convection naturelle axisymétrique le long d'un cylindre vertical isotherme ou soumis à un flux pariétal constant. La longueur du cylindre est six fois son rayon. Le nombre de Prandtl est fixé à 0.7. Le nombre de Grashof est varié: il est égal à  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ . Concernant la simulation numérique, les équations de conservation de masse, de Navier-Stokes et d'énergie sont résolues avec la méthode numérique des volumes finis avec une discrétisation numérique spatiotemporelle d'ordre deux. On démontre, par une approche théorique, que le nombre de Nusselt local du cylindre se rapproche de celui de la plaque verticale dans le cas où le rapport de l'épaisseur de la couche limite et du rayon du cylindre est très faible. Ce résultat est confirmé par les résultats numériques qui montrent que la différence entre les nombres de Nusselt locaux, du cylindre et de la plaque, est apparente dans le cas du faible nombre de Grashof. Pour les grands nombres de Grashof, la différence est relativement faible et ne se manifeste qu'à des positions axiales où le rapport de l'épaisseur de la couche limite et du rayon est relativement considérable.

**Mots clés :** Convection naturelle. Couche limite. Cylindre verticale. Transfert thermique. Nombre de Nusselt.