

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

**N° d'ordre :
Série :**

MEMOIRE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER EN PHYSIQUE

SPECIALITE : ENERGETIQUE

OPTION: PHOTO-THERMIQUE

THEME

**SIMULATION NUMERIQUE DE LA CONVECTION
NATURELLE DANS UNE ENCEINTE A PAROI
VERTICALE IRREGULIERE**

Par

Hocine Boughaba

SOUTENU LE : 06 /07/ 2010

Devant le jury :

Président :	M. AFRID	Prof. Univ. Mentouri Constantine.
Rapporteur :	L. BAHI	Prof. Univ. Mentouri Constantine.
Examineurs :	N. ATTAF	Prof. Univ. Mentouri Constantine.
	A. MOKHNACHE	Prof. Univ. Mentouri Constantine.

Remerciement

Mes remerciements vont tout premièrement à dieu tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée durant toutes ces années d'études.

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du laboratoire de physique énergétique de l'université Mentouri de Constantine.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur **Lakhdar Bahi** professeur à l'université de Constantine, à qui je dois énormément de respect. J'ai particulièrement apprécié sa modestie, ses encouragements et ses conseils dans la poursuite de mon travail.

Je remercie vivement Monsieur **Mohamed Afrid**, professeur à l'université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **Ammar Mokhnache**, et Monsieur **Nadir Attaf**, professeurs à l'Université de Constantine, pour leur participation au jury de ce mémoire.

Je voudrais remercier vivement Docteur **Samia Benattalah** et Monsieur **Abdelhafid Bounecer** pour leur aide, leurs encouragements et surtout pour leur temps précieux qui m'a été réservé.

Enfin, je désire manifester ma gratitude à ma famille et surtout, à ma mère et mon père, mes frères et sœurs, à mes amis et tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

Merci infiniment !

Nomenclature

Symboles latins :

A	rapport d'aspect de cavité.
H	hauteur de la cavité [m].
L	longueur de la cavité [m].
g	accélération de pesanteur [m/s^2].
ΔT	écart de température [K].
T_1	température de la paroi froide [K].
T_2	température de la paroi chaude [K].
P	pression [Pa].
P^*	pression adimensionnelle.
u	composante du vecteur de vitesse suivant x [m/s].
v	composante du vecteur de vitesse suivant y [m/s].
u^*, v^*	composantes adimensionnelle du vecteur de vitesse.
u^c	vitesse contra-variante suivant ξ .
v^c	vitesse contra-variante suivant η .
x, y	coordonnées cartésienne [m].
x^*, y^*	coordonnées cartésiennes adimensionnelles.
Ra	nombre de Rayleigh.
Pr	nombre de Prandtl.
Nu_{moy}	nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude.
Nu_{local}	nombre de Nusselt local sur la paroi chaude.
h	coefficient de transfert de chaleur par convection [Wm^{-2}K].

J : Jacobian de transformation

Φ : variable générale

S : terme source

F : flux convectifs

D : flux diffusifs

G : flux total

G_ξ : flux total suivant ξ

G_η : flux total suivant η

Amp : amplitude de l'ondulation

n : nombre d'ondulation

Symboles grecs :

α diffusivité thermique [m^2/s].

β_T coefficient de dilatation [K^{-1}].

λ conductivité thermique [W/mK].

μ viscosité dynamique [$\text{Kg}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$].

ν viscosité cinématique [m^2/s].

ρ masse volumique [Kg/m^3]

Θ température adimensionnelle

Θ_1 température adimensionnelle de la paroi froide

Θ_2 température adimensionnelle de la paroi chaude

ξ, η, ζ coordonnées curvilignes.

$\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ métrique de transformation

α, β, γ coefficient de transformation.

Φ : variable générale

Exposants :

* variable addimensionnel.

SOMMAIRE

Remerciement

Nomenclature

Introduction générale 1

Chapitre 1 : ANALYSE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1. Phénomènes convectifs	4
1.1.1 Vie courante.....	4
1.1.2 Technologie	5
1.1.3 Géophysique	5
1.1.4 Océanographie	6
1.1.5 Géologie	6
1.2 Mécanisme régissant la convection naturelle (libre).....	7
1.3 Convection naturelle dans les cavités.....	7
a- Cavité avec gradient vertical de température	8
b- Cavité avec gradient horizontal de température.....	9
1.4 Principaux paramètres de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire.....	9
1.5 Travaux antérieures	10
1.5.1 Cavité à paroi lisse	10
1.5.2 Cavité à paroi ondulée	13

Chapitre 2 : MODELISATION MATHEMATIQUE

2.1 Géométrie et conditions aux limites.....	18
2.2 Hypothèse simplificatrice.....	19
2.3 Equations sous forme dimensionnelle.....	20
2.4 Conditions aux limites sous forme dimensionnelle.....	21
2.5 Equations sous forme adimensionnelle.....	21
2.6 Conditions aux limites sous forme adimensionnelle.....	22

Chapitre 3 : GENERATION DE MAILLAGE

3.1 Généralités.....	25
3.2 Techniques de génération du maillage.....	27
3.2.1 Technique algébrique de génération du maillage	27
3.2.2 Technique des équations différentielles partielles	27
3.3 Système d'équations elliptique	28
3.4 Discrétisation des Equations elliptiques.....	29
3.5 Résolution numérique du système d'équations algébriques.....	35
3.6 Transformation des équations de l'écoulement du domaine physique au domaine de calcul.....	36
3.6.1 Transformations des coordonnées généralisées.....	36
3.6.2 Transformations des équations gouvernantes.....	37

Chapitre 4 : METHODES NUMERIQUE

4.1 Présentation de la méthode	44
4.1.1 Maillage	44
4.1.2 Stockage des variables	45
4.2 Discrétisation de l'équation générale du transport.....	46
4.3 Schémas de discrétisation dans l'espace	52
4.3.1 Schéma Upwind	52
4.3.2 Schéma Hybride	52
4.3.3 Schéma Power Law.....	52
4.4 Discrétisation spatial.....	53
4.4.1 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant ξ ...	53

4.4.2	Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant η .	55
4.4.3	Discrétisation de l'équation d'énergie	56
4.4.4	Discrétisation des conditions aux limites	58
4.5	Equation de discrétisation de la pression	59
4.6	La solution séquentielle des équations de discrétisation par l'algorithme SIMPLER	65

Chapitre 5 RESULTATS ET DISCUSSION

5.1	Géométries et maillage sous Gambit.....	67
5.2	Utilisation de Fluent	67
5.3	Etude de maillage.....	68
5.4	Validation.....	69
5.4.1	Comparaison pour les lignes de courant	70
5.4.2	Comparaison pour les lignes isothermes.....	71
5.5	Convection naturelle dans une cavité rectangulaire sans ondulation.....	72
5.5.1	Influence du nombre de Rayleigh.....	72
5.5.1.1	Isothermes et lignes de courants.....	72
5.5.1.2	Variation du nombre de Nusselt local.....	75
5.5.1.3	Variation du nombre de Nusselt moyen.....	76
5.5.2	Influence du rapport d'aspect.....	77
5.5.2.1	Isothermes et lignes de courants.....	77
5.5.2.2	Variation du nombre de Nusselt moyen.....	80
5.6	Convection naturelle dans une cavité rectangulaire avec ondulation.....	81
5.6.1	Influence du nombre de Rayleigh.....	81
5.6.1.1	Isothermes et lignes de courant	81

5.6.1.2	Variation du nombre de Nusselt local.....	82
5.6.1.3	Variation du nombre de Nusselt moyen	82
5.6.2	Influence du rapport d'aspect	85
5.6.2.1	Isothermes et lignes de courant.....	85
5.6.2.2	Variation du nombre de Nusselt moyen.....	85
5.6.3	Influence de l'amplitude de l'ondulation	88
5.6.3.1	Isothermes et lignes de courant.....	88
5.6.3.2	Variation du nombre de Nusselt locale	88
5.6.3.3	Variation du nombre de Nusselt moyen.....	91
5.6.4	Influence de la fréquence de l'ondulation (nombre d'ondulation)	92
5.6.4.1	Isothermes et lignes de courant.....	92
5.6.4.2	Variation du nombre de Nusselt local.....	92
5.6.4.3	Variation du nombre de Nusselt moyen.....	94
5.7	Conclusion.....	95
	CONCLUSIONS GENERALE	96
	Références Bibliographiques.....	99

INTRODUCTION

L'étude de la convection naturelle dans les cavités a été le foyer de nombreuses études pendant ces trois dernières décennies et cela en raison de multiples applications dans l'ingénierie (Croissance des cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, collecteurs d'énergie solaire, double vitrage pour les habitations, refroidissement des instruments électroniques, Isolation des bâtiments.....etc.). Ce mode de transfert d'énergie (convection) peut être naturel ou forcé selon le mécanisme du mouvement du fluide. Si le mouvement du fluide est dû uniquement aux différences de température le mode de transfert est appelée **convection naturelle**, et si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est alors appelé **convection forcée**. Ce mode de transfert apparaît chaque fois qu'il y a des différences de température au sein d'un fluide induisant des différences de densités susceptibles de mettre le fluide en mouvement donc transport et transfert.

L'objectif du travail entrepris, concerne la simulation numérique de la convection naturelle bidimensionnelle laminaire et permanente dans une cavité rectangulaire à paroi verticale droite ondulée et la paroi gauche plane soumise à des gradients horizontaux de température, à travers l'application de la méthode de génération de maillage. Cette méthode est une méthode pratique et efficace particulièrement adapté aux domaines présentant des géométries complexes.

Notre but est d'une part maîtriser les notions de base de la méthode de génération de maillage qui demande des transformations mathématiques sur de nouvelles lignes de coordonnées curvilignes en ξ et η pour générer la géométrie et le maillage du domaine à étudié. Par la suite, on établit les équations gouvernantes du phénomène en termes de ξ et η comme variables indépendantes et on entreprend la discrétisation dans ce domaine de calcul.

Dans le premier chapitre, une introduction aux écoulements de convection naturelle dans la nature comme dans l'industrie avec une partie sur les études antérieures, est présentée.

Le deuxième chapitre traite la modélisation mathématique du phénomène à étudier en exprimant le phénomène physique sous forme d'équations mathématiques, à savoir l'équation de continuité, les équations de quantité de mouvement et l'équation d'énergie.

Le troisième chapitre est consacré à la génération du maillage, en transformant notre domaine physique à paroi ondulée en un domaine de calcul régulier, ainsi que les équations gouvernantes.

Dans le chapitre quatre, intitulé méthodes numériques, on présente la discrétisation numérique de l'équation générale de transport, et les définitions des différents schémas de discrétisation ainsi que les méthodes algébriques, pour la résolution numérique.

Le cinquième chapitre, comporte la discussion des résultats obtenus à partir du code de calcul (Fluent). C'est un code CFD (Computational Fluid Dynamics) commercial très utilisé dans l'industrie et dans différents domaines de recherche. Il permet de résoudre les écoulements de fluides internes et externes en plus de la combustion.

On conclut notre étude par une conclusion générale sur le travail effectué.

Chapitre 1

Analyse bibliographique

La grande majorité des écoulements de fluides, de transfert de chaleur et de matière qui touchent notre vie, notre environnement immédiat, proche ou lointain sont dus à la pesanteur. Ces écoulements sont soumis à l'influence des forces pesantes, forces de flottabilité ou **poussées d'Archimède**. Ces forces se produisent du fait d'inhomogénéités de température, de différences de concentration d'espèces chimiques, de changements de phase et de beaucoup d'autres effets.

Le mouvement de convection naturelle fait partie de ces écoulements, c'est un phénomène de mécanique des fluides, qui se produit lorsqu'une zone change de température et qu'elle se déplace alors verticalement sous l'effet de la poussée d'Archimède. Le changement de température d'un fluide influe en effet sur sa masse volumique, qui se trouve modifiée par rapport à la masse volumique du fluide environnant. De tels déplacements s'appellent des mouvements de convection. Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages) géologiques (remontées de magma),..... etc.

1.1 Phénomènes convectifs :

La convection crée des patrons cycliques de montée de l'air chaud et descente de l'air froid en rouleaux, cellules ou panaches. Ci-dessous est décrit une série de domaines où l'on trouve ce phénomène.

1.1.1 Vie courante :

Le mouvement dans une casserole posée sur le feu **Figure 1.1** s'explique par les différences de densité créées par le chauffage. Le fluide se met en mouvement spontanément quand la différence de température entre le haut et le bas de la couche d'eau atteint une valeur critique.

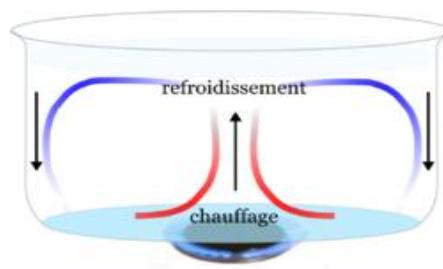


Figure 1.1 Présentation de la convection dans une casserole

1.1.2 Technologie :

Dans le domaine de la technologie on trouve pas mal d'engins qui utilisent la convection, par exemple :

* Le bruleur de la montgolfière réchauffe l'air au-dessus de lui et fait monter la nacelle, la montgolfière utilise la convection comme moyen de sustentation, en emprisonnant une quantité d'air chaud (moins dense que l'air environnant)

* L'eau de circuit secondaire de réacteur des centrales nucléaires est refroidie dans les grandes cheminées en utilisant la capacité d'extraction de chaleur de la convection associée à la chaleur d'évaporation de l'eau particulièrement élevée.

* les tours solaires **Figure 1.2** utilisant également la convection pour produire de l'électricité : l'eau chauffée par le soleil à la base de la tour remonte dans la tour en passant par des turbines.

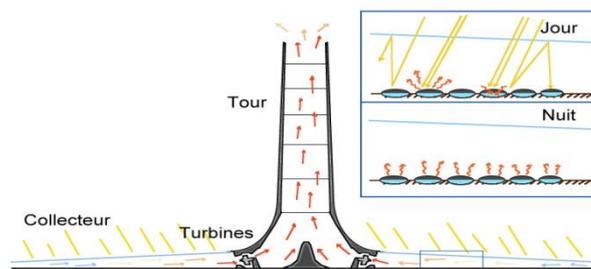


Figure1.2 Schéma fonctionnelle d'une tour solaire

1.1.3 Géophysique (Météorologie):

La convection est un phénomène fréquent dans l'atmosphère terrestre. elle peut être déclenchée par un réchauffement du sol par le soleil, par le mouvement d'une masse d'air froid au-dessus d'un plan d'eau relativement chaude, ou par d'autres phénomènes qui provoquent le réchauffement relatif du bas d'une couche atmosphérique par rapport à son sommet. Le mouvement convectif de l'atmosphère peut donner naissance aux nuages qui ont le nom générique de cumulus **Figure 1.3**.



Figure 1.3 nuages d'origine convective (cumulus de beau temps)

1.1.4 Océanographie :

L'océan est animé de courants marins qui ont pour moteur la convection. Les eaux de surface réchauffées par le soleil à l'équateur se déplacent en courants superficiels ayant une épaisseur jusqu'à 800 mètres sous l'action des vents. Le réchauffement a comme conséquence une évaporation en surface qui concentre le sel contenu dans l'eau et donc la salinité de ces courants. Cette convection océanique est dite aussi *Thermosaline*, car elle est liée à la température et à la salinité de l'eau de mer.

1.1.5 Géologie :

En géologie la convection est présente dans :

- * les volcans (chambre ou poche magmatique).
- * La *convection mantellique*, c'est un phénomène physique se produisant à l'intérieur du manteau terrestre (la couche intermédiaire entre le noyau et la croûte terrestre). Elle est considérée comme le moteur profond de la théorie de la tectonique des plaques mais le sujet est toujours en discussion. Soumises à une forte différence de température entre la base du manteau inférieur (isotherme 3000 °C environ) d'une part et la transition asthénosphère-lithosphère (isotherme 1330 °C) d'autre part, les roches du manteau développent un gradient de densité important. Les parties chaudes, moins denses, auront tendance à s'élever, tandis que les parties froides, plus denses, auront tendance à s'enfoncer.

1.2 Mécanisme régissant la convection naturelle (libre) :

La convection est le mécanisme le plus important du transfert de chaleur entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entour s'effectue en plusieurs étapes

Figure 1.4. D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux molécules adjacentes du fluide. La chaleur ainsi transmise sert à faire augmenter la température et l'énergie interne de ces molécules. En suite les molécules vont se mélanger avec d'autres molécules situées dans une région à une température inférieure et transférer une partie de leur énergie. Dans ce cas l'écoulement transporte le fluide et l'énergie. L'énergie est à présent, emmagasinée dans les molécules du fluide et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement.

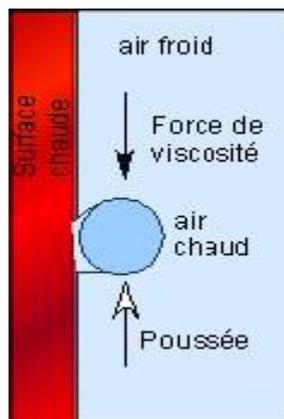


Figure 1.4 Mécanisme de la convection libre

1.3 Convection naturelle dans les cavités :

L'étude de la convection naturelle des fluides dans les cavités a fait l'objet de très grand nombre de travaux. L'intérêt de son étude réside dans son implication dans de nombreux phénomènes naturels et industriels. Plusieurs géométries de cavités ont été utilisées, telles que la cavité rectangulaire, cylindrique et même sphérique en plus des cavités de forme complexe. La cavité rectangulaire continue à être la géométrie qui présente le plus

d'intérêt. Dans ce type de cavité généralement deux parois sont maintenues à des températures différentes (gradient thermique), tandis que les autres parois sont isolées.

Selon les conditions aux limites, on peut distinguer plusieurs types de problèmes dans les cavités, on va citer deux types:

a- Cavité avec gradient vertical de température :

Quand on impose un gradient de température verticale du fond au sommet de la cavité, on a ce qu'on appelle la convection de Rayleigh- Bénard. Elle a une longue et riche histoire. Elle a été étudiée durant des décennies aussi bien pour ses différentes applications industrielles que du point de vue recherche fondamentale. Le mécanisme de base de cette convection est comme suit. Les parois horizontales de la cavité étant respectivement chauffées et refroidies. Par suite de différence de température, la chaleur s'écoule entre le fluide et le corps et provoque une variation de densité des couches fluides au voisinage de la surface. La différence de densité crée un écoulement descendant pour le fluide le plus lourd et un écoulement ascendant pour le fluide le plus léger. Ce phénomène est bien illustré par le schéma ci-dessous **Figure 1.5**.

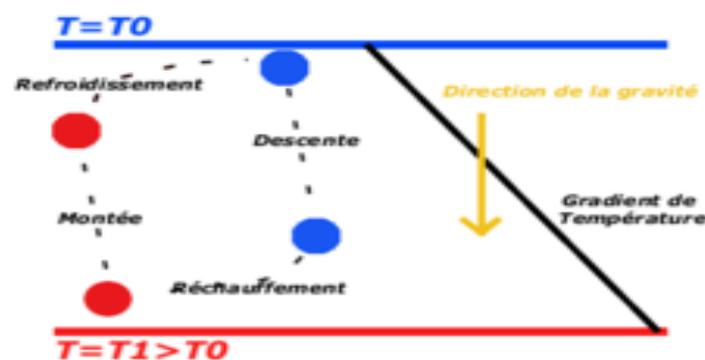


Figure.1.5 Représentation schématique de la convection de Rayleigh-Bénard

Quand le gradient de température est vertical avec paroi supérieure chaude et paroi inférieure froide, on n'aura pas de mouvement et par conséquent pas de convection, le fluide est thermiquement stratifié et on a le cas stable.

b - Cavité avec gradient horizontal de température :

Dans cette configuration, les parois verticales sont chauffées et refroidies, alors que les parois horizontales sont adiabatiques. L'écoulement prend la forme d'un vortex avec le fluide ascendant le long de la paroi chaude et descendant suivant la paroi froide. Pour $Ra \leq 10^3$, le transfert de la chaleur est principalement par conduction dans le fluide et le nombre de Nusselt est égal à l'unité.

1.4 Principaux paramètres de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire :

Lorsqu'il s'agit de la convection naturelle, le terme moteur de mouvement du fluide est $g\beta\Delta T$, avec β est le coefficient d'expansion volumique du fluide et ΔT est l'écart de température entre les deux plaques (si le fluide était dans un canal ou cavité). Le nombre de Rayleigh Ra qui est le paramètre de contrôle de convection naturelle, il exprime le rapport entre la poussée d'Archimède et les forces de dissipation (viscosité et diffusion), puisque la viscosité s'oppose au mouvement du fluide par la force de frottement visqueux et la diffusivité thermique tend à annuler les gradients de température à l'origine de la convection naturelle.

$$Ra = (g\beta\Delta TH^3)/\nu a = (Poussée d' Archimède)/Dissipation$$

- L'élément perturbateur : Poussée d'Archimède
- Les éléments stabilisateurs : La viscosité et la diffusivité thermique.

Concernant le transport de la chaleur dans un milieu fluide, ce dernier s'effectue par diffusion de la quantité de mouvement, dans les couches limites thermiques et hydrodynamiques, respectivement ; le plus souvent ces deux mécanismes coexistent, pour les comparer on définit un autre paramètre sans dimension qui est le nombre de Prandtl, égal au rapport entre les coefficients de viscosité cinématique et de diffusion thermique :

$$Pr = \frac{\nu}{a}$$

ν : viscosité cinématique

α : diffusivité thermique

La géométrie de la cavité utilisée a une grande influence sur la convection naturelle, dans le cas de la cavité rectangulaire, le paramètre non dimensionnel qui caractérise la géométrie est le rapport d'aspect de la cavité $A = H/L$, la hauteur sur la longueur de la cavité.

1.5 Travaux antérieurs :

1.5.1 Cavité à paroi lisse :

La première approche physique de la convection naturelle a été mise en place par Henri Bénard, avec l'étude de la convection dans une couche de fluide soumise à un gradient de température vertical. Ces expériences sont connues sous le nom de Cellules de Bénard.

En 1916, Lord Rayleigh qui fût le théoricien de la convection au début 20^e siècle, publia un article tentant d'expliquer les résultats de Bénard (plaques planes horizontales différenciellement chauffées), en considérant une mince couche de fluide confinée entre deux plaques horizontales. Il a trouvé que le gradient de température qui s'établit à l'intérieure de la couche fluide entraîne une superposition des couches de différentes températures. Et dans ce cas, une simple fluctuation verticale de la position d'une particule fluide sera amplifiée par l'effet de la poussée d'Archimède qui s'applique sur elle.

Pour traiter l'effet du rapport d'aspect de l'enceinte sur le transfert thermique dans le cas où les parois horizontales sont isolées et les parois verticales sont isothermes. Bejan mena un travail de synthèse en 1980 [1] afin d'unifier les résultats expérimentaux et les simulations numériques disponibles à cette époque et surtout les études analytiques (asymptotiques). Il a tracé le comportement général du nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport de forme de l'enceinte pour différents nombres de Rayleigh. Les résultats expérimentaux ont effectivement démontré que l'effet du nombre de Prandtl est négligeable lorsque ce dernier est de l'ordre de 1. En plus, de cette synthèse [1], il apparaît clairement que pour un nombre de Rayleigh donné, le transfert de chaleur atteint le maximum pour un certain rapport de forme optimal. Pour $Ra \approx 10^5$ le maximum se trouve autour de $A \approx 1$, où $A = \frac{H}{L}$. Ce dernier se

déplace vers des valeurs plus faibles lorsque le nombre de Ra est élevé, s'approchant de 0.1 pour $Ra \approx 10^8$.

La cavité horizontale chauffée est un modèle académique pour beaucoup de situations réalistes des écoulements naturelles ou technologiques. Il a été introduit en premier par Batchlor [2], en étudiant la circulation de l'air dans les bâtiments. La géométrie étudiée est une grande et mince cavité caractérisée par un grand rapport d'aspect et le fluide utilisé est l'air caractérisé par un nombre de Pr de l'ordre de 1.

Boehrer [3] a publié une analyse complète des données expérimentales toutes disponibles aussi bien que les échelles théoriques possible pour l'étude de l'écoulement d'un fluide dans une cavité peu profonde bidimensionnelle dont les parois latérales sont chauffées et l'approximation de Boussinesq est utilisée. Il a trouvé qu'il n'y a aucune compréhension claire des plusieurs régimes, qui peuvent se produire dans un tel écoulement apparemment simple. Comme, il a suggéré une image globale des régimes de la convection aussi bien que les paramètres de contrôle pertinents. Son analyse est appliquée aux longues cavités ($0 < A < 0,25$) à condition que le nombre de Rayleigh n'est pas exhaustivement élevé ($Ra < A^{12}$) et que la cavité est remplie de tout fluide tel que le nombre de Prandtl est plus grand que l'unité. Ces résultats sont les suivants:

- Le paramètre du contrôle pertinent est RaA^2 , il existe trois régimes appelés régime conductif; régime transitoire et régime convectif.
- Les limites sont $RaA^2 \approx 10^2$ et $RaA^2 \approx 10^4$.
- Il a fournit aussi des critères pour le gradient de température dans le cœur de la cavité.
- L'analyse de Boehrer est basée sur une comparaison de données publiées avec une analyse physique à des échelles différentes. Il a retracé systématiquement toutes les données d'après différentes hypothèses.

Cependant, l'objectif de l'étude de Boehrer [3] est mis essentiellement sur le comportement du gradient de température dans le cœur de la cavité.

J.-M. Flesselles, et al [4] ont traité la convection naturelle dans une cavité horizontale allongée différentiellement chauffée sur les parois verticales, remplie d'un fluide à grand nombre de Prandtl. L'analyse d'échelles fait apparaître deux régimes cinématiques résultant de la compétition entre le transfert de chaleur par conduction et par convection. Des simulations numériques faites dans une large gamme de nombre de Rayleigh et de facteur de forme confirment l'analyse phénoménologique. Le régime conductif (resp. convectif) apparaît pour RaA^2 inférieur (resp. supérieur) à 443, où Ra est le nombre de Rayleigh et A le facteur de forme. La loi d'échelle du régime convectif donne une vitesse caractéristique indépendante de la hauteur de la cavité.

Oran Aydin et al [5] ont examiné numériquement la convection naturelle laminaire de l'air dans une enceinte bidimensionnelle chauffée isothermiquement d'un côté et refroidi par le sommet. Leur but est d'examiner l'effet du nombre de Rayleigh et le rapport d'aspect sur le mode d'écoulement et le transport d'énergie pour des nombres de Rayleigh dans la gamme de 10^3 et 10^7 et pour cinq rapports d'aspects différents de 0,25 ; 0,5 ; 1,0 ; 2,0 et 4,0. Ils ont trouvé que l'effet du nombre de Rayleigh est plus significatif quand l'enceinte est peu profonde ($a_{Ra} > 1$) et que l'influence du rapport d'aspect est plus significatif quand l'enceinte est haute et le nombre de Rayleigh est élevé.

J.L.Wright et al [6] ont étudié la convection naturelle de l'air dans une grande cavité verticale en utilisant « le modèle de la fumée et de l'interférométrie ». L'expérience couvre le nombre de Rayleigh de $4850 < Ra < 54800$ et le rapport d'aspect $A \approx 40$. Des cellules secondaires ont apparus à Ra plus bas que 6228. L'écoulement a été stable à $Ra < 10^4$. Quand Ra dépasse 10^4 , l'écoulement devient irrégulier, le cœur de l'écoulement devient de plus en plus instable et le mouvement devient évidemment tridimensionnel. L'interférométrie montre que la plupart des chutes de température existent dans les couches limites près des parois. Le cœur est bien mélangé et la température est relativement constante avec peu ou pas de stratification verticale.

1.5.2 Cavité à paroi ondulée :

La convection naturelle dans les clôtures est largement étudiée dans la littérature pour des géométries carrée, rectangulaire ou géométrie à paroi inclinée. Dans la littérature on trouve un nombre limité d'études sur les clôtures à paroi ondulée dû à la complexité de l'écoulement à l'intérieur de l'enceinte et à la difficulté d'imposer des conditions aux limites sur la paroi ondulée. Ce genre de modèle peut être employé pour augmenter le transfert de chaleur dans des applications telles que ; Echangeur de chaleur, Capteur solaire et ainsi de suite.

Yao [7] a étudié théoriquement la convection naturelle le long d'une surface verticale ondulée. Il a trouvé que le taux de transfert de chaleur locale de la surface ondulée est constamment plus petit par rapport à celui de la plaque plane. L'influence des paramètres géométriques sur le nombre de Nusselt moyen est clairement montrée dans son résultat.

L. Adjlout et al. [8] ont effectué une étude numérique de la convection dans une cavité carrée inclinée à paroi verticale ondulée, et différetiellement chauffée. Les testes ont été exécutés pour différents angles d'inclinaisons de 0° jusqu'à 180° avec un pas de 30° , de différentes amplitudes et des nombres de Rayleigh allons jusqu'à 10^6 pour une et trois ondulations. L'allure de l'écoulement et la répartition de la température, au sein de cavité pour une seule ondulation, et pour $Ra=10^5$, $\theta=90^\circ$ (cas de la cavité différentiellement chauffées sur les cotées) est présenter sur la **Figure 1.6** :

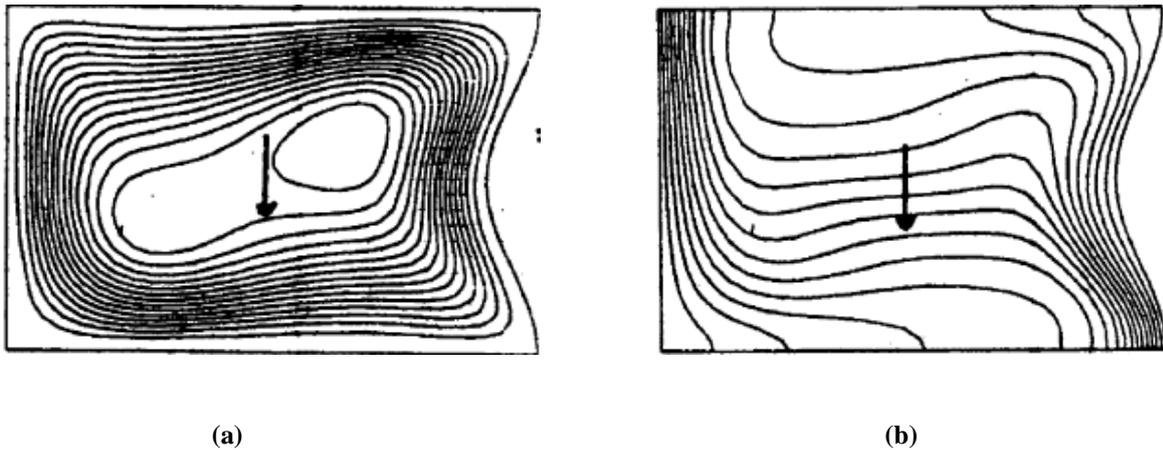


Figure.1.6 : (a) lignes de courants ; (b) lignes isothermes

Les résultats obtenus montrent que l'ondulation de la paroi chaude affecte l'écoulement et les transferts de chaleur dans la cavité, la tendance du transfert de chaleur locale est ondulée et le nombre de Nusselt moyen diminue en comparaison avec la cavité carrée.

A .Sabeur et L. Adjlout [9] mènent une étude numérique sur l'influence des conditions aux limites non uniforme (profil de température sinusoïdale) sur le transfert de chaleur par convection naturelle laminaire. Pour cela ils ont utilisé plusieurs cavités à différents rapport d'aspect et avec une et trois ondulations. Ils ont trouvé que :

- * La tendance du nombre de Nusselt local est ondulée sur la paroi chaude, et le nombre de Nusselt moyen décroît en comparant avec la cavité rectangulaire.

- * La distribution sinusoïdale de la température sur les parois latérales favorise le transfert de chaleur par conséquent le nombre de Nusselt locale et moyen augmentent en comparant aux parois isothermes.

- * Le nombre de Nusselt moyen diminue en augmentant le rapport d'aspect.

Pour but d'aider les concepteurs et les fabricants des capteurs solaire pour obtenir la configuration la plus efficace, Yasin et al [10] ont effectué une étude numérique comparative du transfert de chaleur par convection naturelle et des champs d'écoulement à l'intérieur des capteurs solaires inclinés. Deux cas ont été étudiés et ensuite comparés :

1^{er} Cas : Capteur avec absorbeur ondulé.

2^{em} Cas : Capteur avec absorbeur plat.

Les conditions aux limites sont : température isotherme sur l'absorbeur et l'ouverture des capteurs, les parois verticales sont prises isolées. Ils ont utilisé différents nombres de Rayleigh de (10^6 à $5 \cdot 10^7$), angle d'inclinaison (20° à 60°), longueur d'onde (1.33 vers 4) et rapport d'aspect de (0 à 4).

* Ils ont conclu que le transfert de chaleur et l'écoulement du fluide sont fortement affectés par l'angle d'inclinaison, et que le transfert de chaleur est plus élevé dans le cas du capteur ondulé.

* En plus, le nombre de Nusselt locale a des variations linéaires dans le cas du capteur plan, et il montre des variations oscillatoires dans le cas ondulé.

* Avec le même rapport d'aspect le nombre de Nusselt augmente avec la diminution de l'angle d'onde.

Yasin et al [11] a fait une étude numérique de la convection naturelle dans une enceinte à fond ondulée et peu profonde, chauffée par le bas tandis que la paroi du sommet est prise froide et les parois verticales sont maintenues adiabatique. Ils ont observé que l'écoulement et les champs de température sont affectés par les paramètres géométriques et par le nombre de Rayleigh, et que le nombre de Nusselt a une allure ondulée. Le transfert de chaleur le plus élevée est obtenu pour des rapports d'aspects très petits.

Par intérêt d'étudier la convection naturelle, Amarech et al [12] ont résolu numériquement le problème du transfert de chaleur dans une cavité carrée avec l'une des parois soumise à une condition de température sinusoïdale et les trois autres parois sont maintenues à une température constante. L'une de ces trois parois est courbée avec une ondulation. Le nombre d'ondulation a été varié de un à trois.

Ils ont examiné en détails l'influence de l'amplitude, le nombre de Rayleigh et l'angle d'inclinaison (Φ) sur le mode de l'écoulement et les caractéristiques du transfert de chaleur dans la cavité. Ils ont abouti aux conclusions suivantes :

- Pour des faibles nombres de Rayleigh Ra , il est possible d'augmenter le Nusselt moyen Nu_{av} (transfert de chaleur) sur la paroi ondulée par l'augmentation de l'amplitude de l'ondulation.
- Quand ils augmentent le nombre de Rayleigh, le Nusselt moyen Nu_{av} sur la paroi ondulée diminue avec l'augmentation de l'amplitude.
- Lorsqu'ils augmentent l'amplitude de l'ondulation, le transfert de chaleur sur la paroi ondulée diminue pour le cas de trois ondulations comparé au cas d'une et deux ondulations.

Pour étudier l'influence de la topographie non plane du fond de la cavité sur les transferts thermiques par convection au voisinage de la paroi chaude, M. Rebhi et al [13] ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire dans une enceinte bidimensionnelle à fond non uniforme (sinusoïdal) avec la condition de température constante et uniforme T_p . Les parois verticales sont adiabatiques et la paroi supérieure est maintenue à une température constante T_a ; $T_p > T_a$. Pour des nombres de Rayleigh, $10^3 \leq Ra \leq 5 \cdot 10^5$, et un rapport d'aspect $As = 8$, avec un facteur de forme « a » variant entre 0.1 et 0.2 et le nombre de Prandtl et celui de l'eau, ils ont trouvé que la structure de l'écoulement est notamment affectée par le facteur de forme de la cavité. Cette dernière est caractérisée par des zones de recirculation dans les creux et au dessus des sommets où les nombres de Nusselt locaux sont plus élevés. D'une façon générale, les transferts développés au sein d'une cavité à fond de topographie non plane sont inférieurs à ceux obtenu dans une cavité à fond horizontal et uniforme de même longueur.

Chapitre 2

Modélisation Mathématique

Dans ce chapitre, la géométrie de la configuration considérée est présentée, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans ce mémoire. Ces équations mettent en évidence le comportement de l'air en convection naturelle. Elles sont fondées selon les lois de la physique : équation de conservation de masse, de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie, ainsi les conditions aux limites.

2.1 Géométrie et conditions aux limites :

La géométrie choisie est une cavité rectangulaire à paroi verticale ondulée, de dimension $(L/H * H/H) = (4*1)$, dont le rapport d'aspect $A=L/H=4$, remplie d'air dont le nombre de Prandtl est égale à 0.71 et soumise à une différence de température horizontale, qui régit l'écoulement convectif. La paroi ondulée est maintenue à une température locale chaude T_2 et l'autre paroi verticale est maintenue à une température locale froide T_1 ($T_2 > T_1$). Les parois horizontales sont adiabatique (une condition du flux nul de Newman exprimant l'adiabaticité et l'absence de tout échange de matière). La condition de non glissement des particules fluides est imposée sur les parois de l'enceinte. La géométrie ainsi que les conditions aux limites sont montrées sur la **Figure 2.1**.

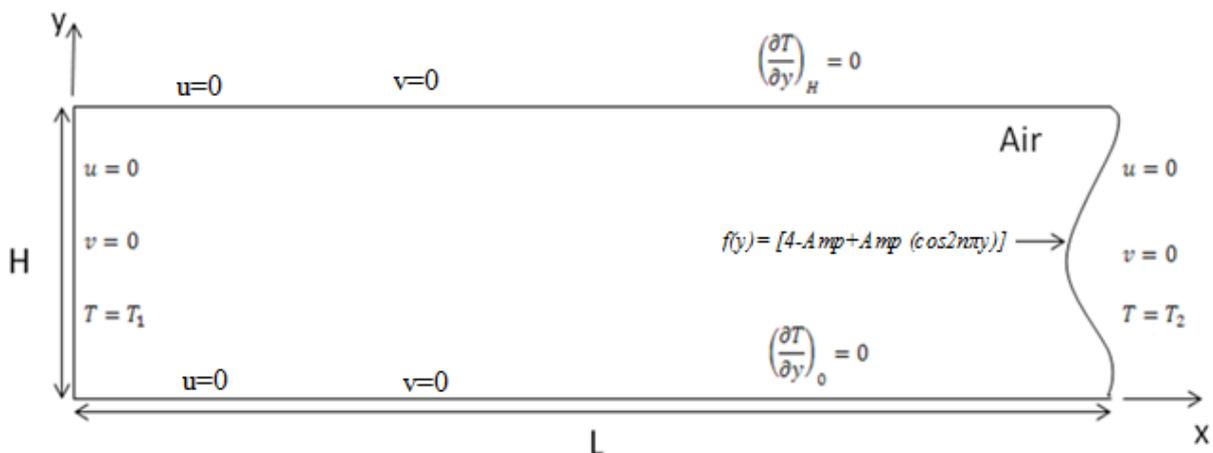


Figure.2.1 Géométrie et conditions aux limites

2.2 Hypothèses simplificatrices :

Afin de pouvoir résoudre les équations régissant l'écoulement de convection naturelle dans une enceinte, les hypothèses simplificatrices suivantes sont adoptées:

- L'écoulement est quasi-incompressible, bidimensionnel et permanent.
- L'absence des sources et puits de chaleur dans l'enceinte.
- On néglige la dissipation de la chaleur par frottement visqueux.
- L'approximation de Boussinesq et adoptée pour la densité de fluide c'est-à-dire que la masse volumique est considérée comme constante (égale à sa valeur de référence) dans tous les termes des équations de transfert sauf dans le terme gravitationnel, où elle est traitée comme variable en fonction de la température et s'exprime comme suit:

$$(\rho - \rho_0)g = -\rho_0 g \beta (T - T_0)$$

- Les propriétés physiques de l'air (α , λ et ν) sont constantes.

2.3 Equations sous forme dimensionnel :

Après la considération des hypothèses de simplification suscitées, les équations générales régissant l'écoulement de convection dans l'enceinte représentée dans la **Figure 2.1** et rapportées à un système de coordonnées cartésiennes sont données par :

- **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant x :**

$$\left[\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (2.2)$$

- **Equation de quantité de mouvement suivant y :**

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + (T - T_1) g \beta_T \quad (2.3)$$

- **Equation d'Energie :**

$$\left[\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} \right] = \alpha \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (2.4)$$

2.4 Conditions aux limites sous forme dimensionnelle :

Pour $0 < y < H$

$$x = 0 ; \quad u = v = 0 \quad T = T_1$$

$$x = f(y) ; \quad u = v = 0 \quad T = T_2$$

Où $f(y)$ est la fonction de la paroi ondulée :

$$f(y) = [4 - Amp + Amp(\cos 2n\pi y)]$$

Amp : Amplitude de l'ondulation.

n : nombre d'ondulation (fréquence) sur la paroi ondulation.

Pour $0 < x < f(y)$

$$y = 0 ; \quad u = 0 \quad v = 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 = 0$$

$$y = H ; \quad u = 0 \quad v = 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_H = 0 .$$

2.5 Equations sous forme adimensionnelle :

En introduisant les variables et les nombres non dimensionnels suivants respectivement pour la longueur, la vitesse, la température et la pression:

$$x^* = \frac{x}{H} ; \quad y^* = \frac{y}{H} ; \quad u^* = \frac{u}{\left(\frac{\alpha}{H} \right)} ; \quad v^* = \frac{v}{\left(\frac{\alpha}{H} \right)} ; \quad \Theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

$$p^* = \frac{p - p_0}{\rho_0 \left(\frac{\alpha}{H} \right)^2}$$

On aboutit au modèle mathématique adimensionnel ci-dessous :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \text{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \right] \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial(u^* v^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \text{Pr} \left[\frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) \right] + Ra \cdot \text{Pr} \cdot \theta \quad (2.7) \quad \Theta$$

$$\frac{\partial(u^* \theta)}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* \theta)}{\partial y^*} = \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y^*} \right) \quad (2.8)$$

2.6 Conditions aux limites sous forme adimensionnelle :

Pour $0 < y^* < 1$

$$\begin{array}{llll} x^* = 0: & u^* = 0 & v^* = 0 & \theta = 0 \\ x^* = \frac{f(y)}{H} : & u^* = 0 & v^* = 0 & \theta = 1 \end{array}$$

Pour $0 < x^* < f(y)/H$

$$\begin{array}{llll} y^* = 0 : & u^* = 0 & v^* = 0 & \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_0 = 0 \\ y^* = 1 : & u^* = 0 & v^* = 0 & \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_1 = 0 \end{array}$$

Remarque : Dans les calculs qui suivent, tous les exposant (*) seront enlever afin de simplifier l'écriture des équations.

Les paramètres du contrôle de ce problème sont :

- $A = \frac{L}{H}$; Rapport d'aspect de l'enceinte.
- $Pr = \frac{\nu}{a}$; Nombre de Prandtl.
- $Ra = \frac{\Delta T g \beta H^3}{\nu a}$; Nombre de Rayleigh.
- Amp : L'amplitude de l'ondulation de la paroi.
- n : nombre d'ondulation sur la paroi ondulée.

Chapitre 3

Génération de Maillage

3.1 Généralité :

Les systèmes physiques continus, tels que l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion, la concentration des contraintes dans un barrage, le champ électrique dans un circuit intégré, ou la concentration des réactifs dans un réacteur chimique, sont généralement des modèles qui utilisent des équations différentiels partiels. Pour résoudre numériquement ces équations ; il faut introduire des approximations qui convertissent les dérivées partielles en utilisant des méthodes numériques de discrétisation tel que les différences finies, les volumes finis ou les éléments finis qui sont utilisées pour réécrire les équations différentielles partielles sous forme d'équation algébrique linéaire. Les équations algébriques approximatives, seront résolues par la suite à point discrets dans le domaine d'intérêt.

Les méthodes de résolution numérique précédentes, fonctionnent très bien pour les géométries simples. Malheureusement la majorité des domaines physiques ont une géométrie plus ou moins complexe, ce qui rend leur résolution très difficile. Pour lever cette difficulté, la méthode de « **Génération du Maillage** » est utilisée. Elle transforme une géométrie complexe en une géométrie simple en utilisant des coordonnées curvilignes (ξ, η, ζ) **Figure 3.1**.

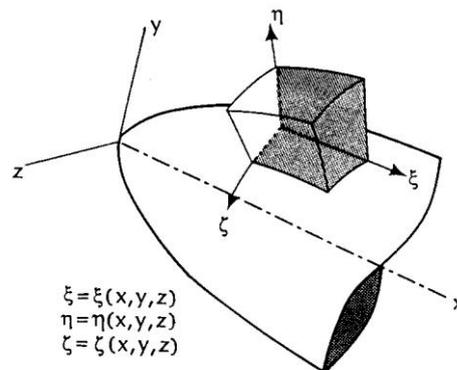


Figure 3.1 Coordonnées curvilignes (généralisée)

Son idée de base est de transformer un domaine physique quelconque d'une géométrie complexe, à un domaine computationnel (dit domaine de calcul) d'une forme simple, avec un maillage uniforme. Par conséquent, imposer un tel domaine de calcul sur un tel domaine physique exigera quelque interpolation pour la mise en œuvre des conditions aux limites.

Pour déterminer l'emplacement des points du maillage dans le domaine physique à partir des points du maillage du domaine de calcul, quelques conditions doivent être imposées Thompson [14]:

- La projection topographique doit être un-à-un, il serait inacceptable de projeter un seul point du maillage de l'espace physique en deux points dans le domaine de calcul, et vice versa.
- les lignes du maillage de la même famille (lignes horizontales ou verticales) ne doivent pas traverser les unes les autres, et les lignes du maillage de la même famille peuvent se traverser une seule fois.

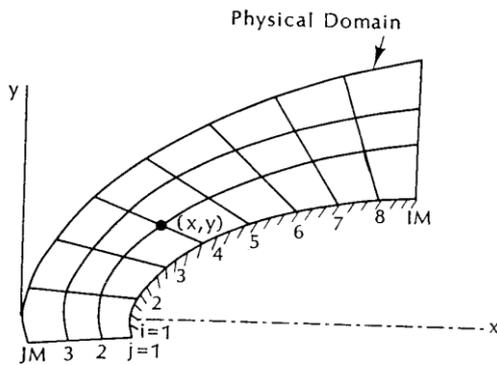


Figure 3.2 Domaine physique

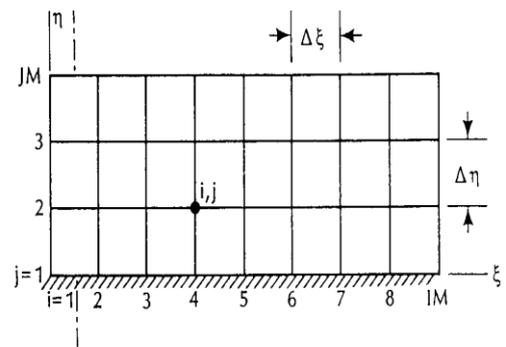


Figure 3.3 Domaine de calcul (computationnel)

Pour généré un maillage selon Hoffman [15], il faut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Méthodes algébriques
- Méthodes des équations différentielles partielles
- La projection topographique conforme basée sur les variables complexes.

De plus le system du maillage généré, peut être catégorisé comme fixe ou adaptatif. Selon le but et l'intérêt de l'étude. Un système du maillage fixe est produit avant que la solution des équations du mouvement de fluide et ils restent fixe et indépendant de la solution. En revanche, un système du maillage adaptatif évolue par suite de la solution des équations de mouvement de fluide, les points du maillage peuvent se déplacer vers les régions de hauts gradients, par exemple : le voisinage d'une onde de choc Fletcher [16].

3.2 Techniques de génération du maillage :

3.2.1 Technique algébrique de génération du maillage :

La technique de génération du maillage la plus simple est la méthode algébrique. L'avantage majeur de cette technique est la vitesse avec laquelle un maillage peut être produit. Une équation algébrique est utilisée pour relier les points du maillage dans le domaine de calcul à ceux dans le domaine physique. Un exemple d'un maillage généré par cette méthode est illustré dans la **Figure 3.4**.

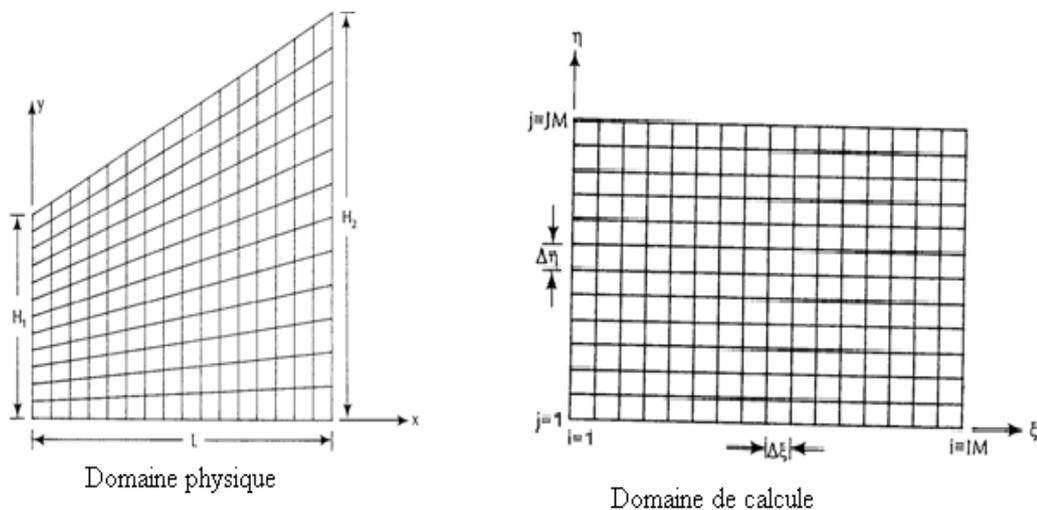


Figure 3.4. Maillage généré par la méthode algébrique

Les inconvénients de la méthode algébriques de générations du maillage sont vaincus par l'usage de la méthode de génération du maillage par les équations différentielles partielles, qui est accompli avec un temps de calcul plus élevée.

3.2.2 Technique des équations différentielles partielles :

Le schéma de génération du maillage qui a gagné le plus de popularité, est celui où des équations différentielles partielles sont utilisées pour générer le système de maillage. Dans ces méthodes, le système d'équations différentielles partielles est résolu pour obtenir l'emplacement des points du maillage dans le domaine physique, alors que le domaine de calcul a une forme rectangulaire avec un maillage uniforme. Ces méthodes peuvent être catégorisées comme un système d'équations différentielles partielles elliptiques, paraboliques, ou hyperboliques.

La méthode de génération de maillage utilisant des équations différentielles partielles de forme elliptique est la méthode la plus développée, et qui il sera utilisé dans ce présent travail.

3.3 Système d'équations elliptiques:

Pour les domaines où toutes les conditions aux limites physiques sont spécifiées, la méthode de génération de maillage par un système d'équation elliptique donne de bons résultats. Un système d'équations elliptiques sous forme de l'équation de Laplace ou l'équation de Poisson, est résolu pour créer le maillage dans le domaine physique. Tous les schémas itératifs tels que Gauss-Seidel, sur relaxation (PSOR), etc.... peuvent être utilisés pour résoudre le système d'équations elliptiques.

On considère l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

Où ξ et η représentent les coordonnées dans le domaine de calcul. On peut résoudre l'équation (3.1) et (3.2) par n'importe quelle technique itérative mentionnée auparavant. Pour transformer les équations différentielles partielles elliptiques, les variables dépendantes (x, y) et les variables indépendantes (ξ, η) sont inter- changer. Après avoir fait une série de manipulation algébrique, les équations elliptique (3.1) et (3.2) seront :

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.3)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (3.4)$$

Où

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (3.5)$$

$$\beta = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (3.6)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (3.7)$$

Les équations elliptiques (3.3) et (3.4) seront résolues dans le domaine de calcul (ξ, η) pour fournir l'emplacement des points du maillage dans le domaine physique (x, y) . Le calcul des coefficients α, β, γ se fait dans l'itération précédente. Pour résoudre numériquement ces équations, il faut les écrire sous forme algébrique donc il faut les discrétiser.

3.4 Discrétisation des Equations elliptiques :

Pour discrétiser les équations elliptiques (3.3) et (3.4) sur un volume de contrôle rectangulaire du domaine de calcul **Figure 3.5**, on va utiliser les expressions des différences centrées afin d'aboutir à un système algébrique linéaire. Une fois le système d'équations algébriques est obtenu, on peut utiliser les méthodes itératives pour déterminer les valeurs de x et y générées dans le domaine physique.

L'intégration des équations (3.3) et (3.4) sur le volume de contrôle s'écrit comme suit :

$$\iint_{ws}^{en} \left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right) J d\xi d\eta = 0 \quad (3.8)$$

$$\iint_{ws}^{en} \left(\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right) J d\xi d\eta = 0 \quad (3.9)$$

On peut remarquer que les équations (3.8) et (3.9) sont analogues, donc pour simplifier les calculs, on va intégrer une seule équation avec la variable générale Q . Ainsi l'équation à intégrer devient :

$$\iint_{ws}^{en} \left(\alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} \right) J d\xi d\eta = 0$$

On peut écrire :

$$\iint_{ws}^{en} \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} J d\xi d\eta - \iint_{ws}^{en} 2\beta \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} J d\xi d\eta + \iint_{ws}^{en} \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} J d\xi d\eta = 0 \quad (3.10)$$

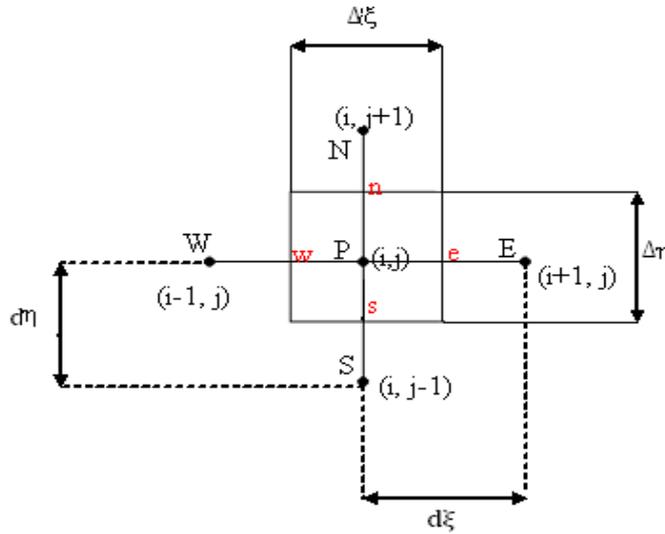


Figure 3.5 Volume de contrôle typique dans le domaine de calcul

Chaque terme de l'équation (3.10) doit être intégré séparément. On fera la démonstration du calcul seulement pour le premier terme, et les deux autres termes seront calculés de la même manière :

$$\iint_{ws}^{en} \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = \int_s^n \alpha \frac{\partial Q}{\partial \xi} \Big|_w^e d\eta$$

$$\iint_{ws}^{en} \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = \alpha \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi} \Big|_e - \frac{\partial Q}{\partial \xi} \Big|_w \right) \Delta\eta$$

En utilisant les différences centrées, les dérivées premières de la variable Q calculées sur le volume du contrôle sont :

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \Big|_e = \frac{Q_E - Q_P}{d\xi_e}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi} \Big|_w = \frac{Q_P - Q_W}{d\xi_w}$$

Sachant que le maillage est uniforme, donc :

$$\Delta\eta = \Delta\xi = d\xi = d\eta = 1$$

Après les calculs, le premier terme de l'équation (3.10) s'écrit :

$$\iint_{ws}^{en} \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = \alpha [Q_E - 2Q_p + Q_W] \quad (3.11)$$

Comme c'est indiqué sur le volume du contrôle **Figure 3.5**, on peut aussi écrire l'équation (3.11) sous forme indicielle (i, j) :

$$\iint_{ws}^{en} \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = \alpha [Q_{i+1,j} - 2Q_{i,j} + Q_{i-1,j}] \quad (3.12)$$

L'intégration du deuxième terme donne :

$$\begin{aligned} - \iint_{ws}^{en} 2\beta \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta &= -2 \int_s^n \beta \frac{\partial Q}{\partial \eta} \Big|_w^e d\eta \\ &= -2 \int_s^n \beta \left(\frac{\partial Q}{\partial \eta} \Big|_e - \frac{\partial Q}{\partial \eta} \Big|_w \right) d\eta \\ &= -2\beta (Q_e|_s^n - Q_w|_s^n) \\ - \iint_{ws}^{en} 2\beta \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta &= -2\beta (Q_{en} - Q_{es} - Q_{wn} + Q_{ws}) \end{aligned}$$

Sous forme indicielle on a :

$$- \iint_{ws}^{en} 2\beta \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = -2\beta \left(Q_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - Q_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + Q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.13)$$

Chaque valeur de Q dans cette équation est calculée sur la limite du volume de contrôle, les valeurs de Q sont :

$$Q_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(Q_{i+1,j} + Q_{i,j} + Q_{i+1,j+1} + Q_{i,j+1})$$

$$Q_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(Q_{i+1,j} + Q_{i,j} + Q_{i+1,j-1} + Q_{i,j-1})$$

$$Q_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(Q_{i-1,j} + Q_{i,j} + Q_{i-1,j+1} + Q_{i,j+1})$$

$$Q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(Q_{i-1,j} + Q_{i,j} + Q_{i-1,j-1} + Q_{i,j-1})$$

La somme des quatre valeurs de Q donne :

$$Q_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - Q_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - Q_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + Q_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(Q_{i+1,j+1} - Q_{i+1,j-1} - Q_{i-1,j+1} + Q_{i-1,j-1})$$

En remplaçant cette somme dans l'équation (3.13), on obtient l'intégration du deuxième terme de l'équation (3.10):

$$- \iint_{ws}^{en} 2\beta \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = -\frac{1}{2}\beta(Q_{i+1,j+1} - Q_{i+1,j-1} - Q_{i-1,j+1} + Q_{i-1,j-1}) \quad (3.14)$$

Comme on peut l'apercevoir le troisième terme de l'équation (3.10) est identique au premier terme, donc on tire directement le résultat suivant :

$$\iint_{ws}^{en} \gamma \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} d\xi d\eta = \gamma[Q_{i,j+1} - 2Q_{i,j} + Q_{i,j-1}] \quad (3.15)$$

Le résultat final de discrétisation de l'équation générale (3.10) est obtenu par le réarrangement des équations (3.12), (3.14) et (3.15) :

$$2(\alpha + \gamma)Q_{i,j} - \alpha Q_{i+1,j} - \frac{\beta}{2}(-Q_{i+1,j+1} + Q_{i+1,j-1} + Q_{i-1,j+1} - Q_{i-1,j-1}) - \alpha Q_{i-1,j} - \gamma Q_{i,j+1} - \gamma Q_{i,j-1} = 0 \quad (3.16)$$

On réarrange cette équation pour obtenir l'équation algébrique standard de discrétisation suivante :

$$A_{(i,j)}Q_{i,j} = A_{i+1,j}Q_{i+1,j} + A_{i-1,j}Q_{i-1,j} + A_{i,j+1}Q_{i,j+1} + A_{i,j-1}Q_{i,j-1} + S_{i,j} \quad (3.17)$$

Avec :

$$A_{(i,j)} = 2(\alpha + \gamma)$$

$$A_{i+1,j} = A_{i-1,j} = \alpha$$

$$A_{i,j+1} = A_{i,j-1} = \gamma$$

$$S_{i,j} = \frac{\beta}{2}(-Q_{i+1,j+1} + Q_{i+1,j-1} + Q_{i-1,j+1} - Q_{i-1,j-1})$$

Après avoir obtenu l'équation générale de discrétisation avec la variable générale Q, on doit la réécrire avec les deux variables x et y. Pour cela on remplace la variable générale Q par x et y dans l'équation (3.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(\alpha + \gamma)x_{i,j} = \alpha x_{i+1,j} + \alpha x_{i-1,j} + \gamma x_{i,j+1} + \gamma x_{i,j-1} \\ + \frac{\beta}{2}(-x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j-1}) = 0 \quad (3.17) \\ 2(\alpha + \gamma)y_{i,j} = \alpha y_{i+1,j} + \alpha y_{i-1,j} + \gamma y_{i,j+1} + \gamma y_{i,j-1} \\ + \frac{\beta}{2}(-y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j+1} - y_{i-1,j-1}) = 0 \quad (3.18) \end{array} \right.$$

De même, il faut discrétiser les coefficients métriques de transformation α , β et γ indispensables pour le calcul itératif, et qui sont dépendants des variables x et y . La procédure de discrétisation est la même que la précédente :

On a :

$$\iint_{ws}^{en} \alpha = \iint_{ws}^{en} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

$$\iint_{ws}^{en} \beta = \iint_{ws}^{en} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] d\xi d\eta$$

$$\iint_{ws}^{en} \gamma = \iint_{ws}^{en} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] d\xi d\eta$$

Le résultat de discrétisation est :

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{4} \left((x_{i,j+1} - x_{i,j-1})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})^2 \right) \quad (3.19)$$

$$\beta_{i,j} = \frac{1}{4} \left((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) \right) \quad (3.20)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{4} \left((x_{i+1,j} - x_{i-1,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i-1,j})^2 \right) \quad (3.21)$$

Après avoir discrétisé toutes les équations on doit maintenant passer à la résolution numérique.

3.5 Résolution numérique du système d'équations algébriques :

Pour résoudre numériquement les équations algébriques (3.17) et (3.18), l'utilisation de l'algorithme de la matrice tri-diagonale TDMA (Tri-diagonal Matrice Algorithme) est fortement recommandée, pour obtenir toutes les valeurs de $x(i, j)$, $y(i, j)$ générées dans tout le domaine physique. Pour cela, il faut insérer les conditions aux limites du domaine physique, qui sont les valeurs de x et y sur les limites du domaine physique et qui ont une influence majeure sur le résultat.

Notre but pour tous ces calculs est de générer un maillage uniforme dans le domaine physique, à partir d'un domaine de calcul rectangulaire. Les deux domaines sont illustrés dans la **Figure 3.6**.

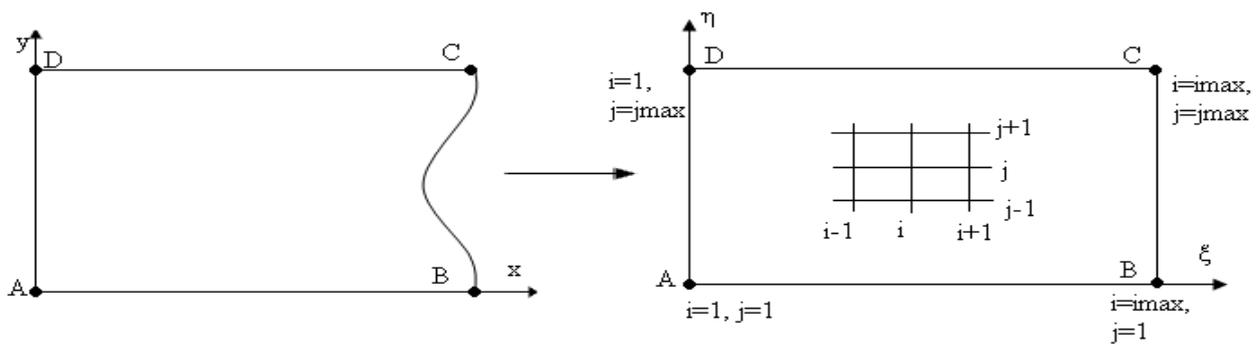


Figure 3.6 Transformation des domaines

Après avoir fait toutes ces transformations, on a élaboré un code de calcul sous Fortran pour générer le maillage dans le domaine physique, dont le résultat est représenté sur la **Figure.3.7** :

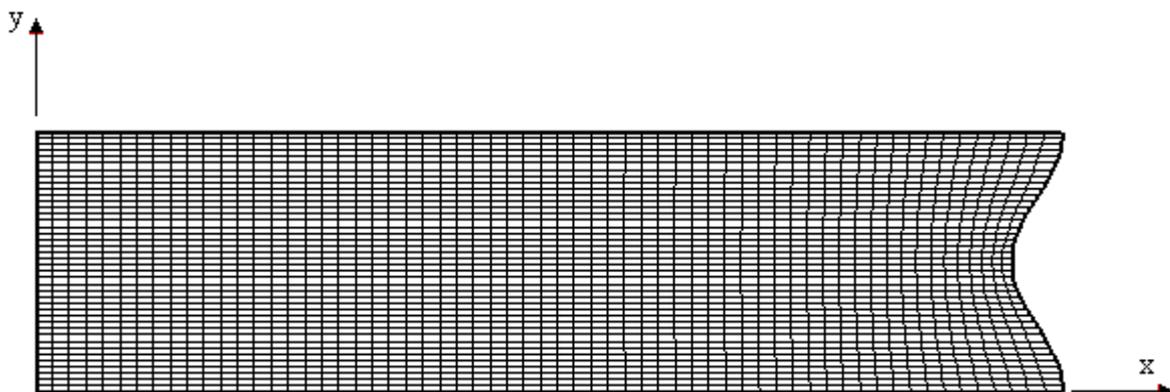


Figure 3.7 Maillage généré du domaine physique

3.6 Transformation des équations de l'écoulement du domaine physique au domaine de calcul:

On a transformé le domaine physique en un domaine de calcul, pour améliorer l'efficacité et l'exactitude du schéma numérique et pour simplifier la mise en œuvre des conditions aux limites. Pour que la résolution des équations du mouvement dans le domaine de calcul soit possible, il faut faire quelques transformations.

3.6.1 Transformations des coordonnées généralisées :

Les équations gouvernantes sont transformées du domaine physique (x, y) au domaine du calcul (ξ, η) par les relations suivantes :

$$\xi = \xi(x, y) \quad (3.22)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (3.23)$$

Les dérivées partielles de ces équations donnent :

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy \quad (3.24)$$

$$d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy \quad (3.25)$$

Avec
$$\xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cong \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \quad (3.26)$$

Dans les équations (3.26), (3.27) les expressions ξ_x, ξ_y, η_x et η_y sont apparues. Ces dérivées sont définies comme métrique de transformation. Ces équations sont les équations algébriques de transformation. Donc pour faire la transformation il suffit de remplacer les dérivées partielles par ces expressions.

Après quelque manipulation algébrique on obtient la valeur des métriques de transformation :

$$\xi_x = Jy_\eta, \quad \xi_y = -Jx_\eta, \quad \eta_x = -Jy_\xi, \quad \eta_y = Jx_\xi \quad (3.27)$$

Où

$$J = \frac{1}{x_\zeta y_\eta - y_\xi x_\eta} \quad (3.28)$$

J est défini comme le Jacobian de transformation, il est interpréter comme le rapport de surface (volume trois dimensions) du domaine physique à celle du domaine de calcul.

3.6.2 Transformations des équations gouvernantes :

Maintenant en peut faire la transformation des équations (2.5), (2.6), (2.7) et (2.8) :

L'équation de Continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Les dérivées cartésiennes sont remplacées par les équations (3.24) et (3.25) on obtient :

$$\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

En remplaçant les métriques de transformation par leurs valeurs :

$$Jy_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - Jy_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - Jx_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} + Jx_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

En réarrangeant et simplifiant cette équation on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [y_\eta u - x_\eta v] + \frac{\partial}{\partial \eta} [x_\xi v - y_\xi u] = 0$$

Le résultat final de transformation de l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u^c}{\partial \xi} + \frac{\partial v^c}{\partial \eta} = 0 \quad (3.29)$$

De la même façon en va écrire les équations de quantité de mouvement et de l'énergie. La transformation de ces équations est très longue pour ça en va écrire le résultat directement :

Equation de Quantité de mouvement suivant x :

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Pr \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]$$

Le résultat :

$$\frac{\partial(u^c u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(v^c u)}{\partial \eta} = - \left(f_{11} \frac{\partial p}{\partial \xi} + f_{21} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + Pr \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{11} J \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12} J \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12} J \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{22} J \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.30)$$

Avec :

$$f_{11} = y_\eta, \quad f_{12} = -x_\eta, \quad f_{21} = -y_\xi, \quad f_{22} = x_\xi$$

$$q_{11} = (f_{11}^2 + f_{12}^2), \quad q_{22} = (f_{21}^2 + f_{22}^2), \quad q_{12} = (f_{11}f_{21} + f_{12}f_{22})$$

$$u^c = y_\eta u - x_\eta v = f_{11}u + f_{12}v$$

$$v^c = x_\xi v - y_\xi u = f_{22}v + f_{21}u$$

Equation de Quantité de mouvement suivant y :

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + Pr \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + Ra.Pr.\theta$$

Le résultat de la transformation :

$$\frac{\partial(u^c v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(v^c v)}{\partial \eta} = - \left(f_{12} \frac{\partial p}{\partial \xi} + f_{22} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + Pr \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{11} J \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12} J \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12} J \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{22} J \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{PrRa\theta}{J} \quad (3.31)$$

Equation d'Energie :

$$\frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y} \right)$$

Le résultat de la transformation :

$$\frac{\partial(u^c\theta)}{\partial\xi} + \frac{\partial(v^c\theta)}{\partial\eta} = \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(q_{11J} \frac{\partial\theta}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(q_{12J} \frac{\partial\theta}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\xi} \left(q_{12J} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(q_{22J} \frac{\partial\theta}{\partial\eta} \right) \right] \quad (3.32)$$

Les équations gouvernantes transformées peuvent être écrites sous la forme générale de l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial(U^c\phi)}{\partial\xi} + \frac{\partial(V^c\phi)}{\partial\eta} = \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\Gamma_{\phi\xi} \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\Gamma_{\phi\eta} \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right) \right] + S_\phi \quad (3.33)$$

Tous les termes de l'équation générale du transport sont montrés dans le **Tableau 3.1**.

Termes Equations	ϕ	$\Gamma_{\phi\xi}$	$\Gamma_{\phi\eta}$	S_ϕ
Continuité	1	0	0	0
Quantité de mouvement suivant x	u	$PrJq_{11}$	$PrJq_{22}$	$Pr \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12}J \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12}J \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right]$ $- \left(f_{11} \frac{\partial p}{\partial \xi} + f_{21} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)$
Quantité de mouvement suivant y	v	$PrJq_{11}$	$PrJq_{22}$	$Pr \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12}J \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12}J \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{PrRa\theta}{J}$ $- \left(f_{12} \frac{\partial p}{\partial \xi} + f_{22} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)$
Energie	θ	Jq_{11}	Jq_{22}	$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12}J \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12}J \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$

Tableau 3.1 Termes de l'équation générale du transport.

Chapitre 4

Méthodes Numériques

L'écoulement de convection naturelle dans une cavité bidimensionnel à paroi verticale ondulée est modélisé par les équations différentielles aux dérivées partielles de conservation de masse et de quantité de mouvement suivant les deux directions horizontale et verticale en plus de l'équation d'énergie. Ces équations n'ont pas de solution analytique exacte, pour les résoudre il faut utiliser une méthode numérique telle que la méthode des volumes finis, la méthode des différences finies ou la méthode des éléments finis.

Dans cette présente étude, la résolution numérique des équations de quantité de mouvement, d'énergie et de l'équation de continuité, est faite par la méthode des volumes finis. Ce choix s'est surtout basé sur les arguments suivants :

- L'idée de base est facile à comprendre et aboutit directement à des interprétations physiques réelles du problème envisagé.
- L'approche d'une solution convergente du problème, implique que les intégrales des équations de conservation telles que l'équation de continuité, de mouvement et de l'énergie sont satisfaites dans le volume de contrôle typique et aussi dans tout le domaine d'intégration.

En résumé, cette procédure (méthode des volumes finis) est destinée à intégrer puis à résoudre des équations algébriques non linéaires couplées obtenues par des méthodes itératives. Les coefficients des équations algébriques linéaires sont calculés à l'aide des valeurs initiales des variables. Il est à signaler qu'une discrétisation doit respecter les quatre règles fondamentales de la méthode des volumes finis :

Règle1 :

Le flux à travers une face commune à deux volumes de contrôle doit être évalué par la même expression dans les équations de discrétisation.

Règle2 :

Tous les coefficients dans les équations algébriques doivent toujours être

positifs. La valeur de la variable dépendante notée ϕ à un nœud P, est influencée par les nœuds voisins. Ainsi une augmentation de la variable ϕ d'un nœud donnée est suivie d'une augmentation et non d'une diminution au nœud voisin. La même chose peut se dire quand il y a une diminution de ϕ . Les coefficients doivent être de même signe, par convention ils seront tous positifs. Dans le cas contraire, une solution physiquement irréaliste pourrait apparaître.

Règle 3 :

Si le terme source est linéarisé de la façon suivante :

$$S = S_c + S_p \phi_p$$

Alors la pente doit être négative pour éviter toute instabilité de la solution, car si ϕ_p est positif, A_p peut être négatif (violation de la 2^{ème} règle).

Règle 4 :

L'équation discrétisée est mise sous la même forme finale suivante :

$$A_p(i, j)\phi(i, j) = A_E(i, j)\phi(i+1, j) + A_W(i, j)\phi(i-1, j) + A_N(i, j)\phi(i, j+1) + A_S(i, j)\phi(i, j-1) + S(i, j)$$

Il faut que

$$A_p = \sum A_{nb}.$$

Où les A_{nb} représentant les coefficients des nœuds voisins. Ceci implique que si ϕ est une solution de l'équation différentiel alors $\phi + c$ l'est aussi, c étant une constante.

4.1 Présentation de la méthode :

Comme introduite par Suhas V. Patankar [17], la méthode des volumes finis consiste principalement à diviser le domaine physique en un nombre fini de petits volumes adjacents qui seront nommés volumes de contrôle. Chaque volume de contrôle contient un point placé en son centre appelé nœud. Les fonctions discrétisées qu'on calculera, auront leurs valeurs aux nœuds, chaque nœud considéré sera entouré de quatre nœuds voisins noté par W (ouest) ; E (est) ; N (nord) ; S (sud) **Figure 4.1**.

4.1.1 Maillage :

Le domaine physique étudié est discrétisé en un domaine de calcul qui se compose d'un nombre fini des volumes contigus entourant chacun un nœud, où les nœuds sont liés par des lignes continues, et les lignes en pointillés représentent les faces des volumes finis.

Dans notre cas le maillage du domaine physique est déjà fait, par la méthode de génération du maillage, comme on l'a montré dans le **Chapitre 3**.

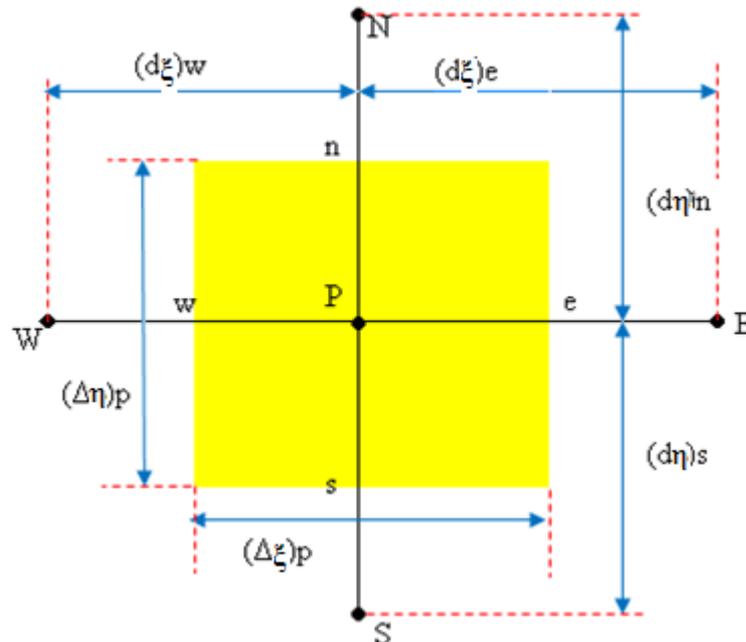


Figure4.1 Volume de contrôle typique

4.1.2 Stockage des variables :

Les variables dépendantes scalaires (P, θ), (pression, température) sont stockées aux nœuds du maillage, tandis que les variables dépendantes vectorielles U et V sont stockés aux milieux des segments reliant les nœuds **Figure 4.2**, ça veut dire sur les faces des volumes de contrôles. Les équations de continuité et de l'énergie sont intégrées sur le volume de contrôle associé aux variables scalaires et les équations de quantité de mouvement sont intégrées sur les volumes associés aux composantes de vitesse U et V . Ce type de maillage dit intercaler (Staggered grid) permet, une meilleure estimation des flux convectifs, une bonne estimation de la force de pression dans les équations de conservation de la quantité de mouvement, ainsi qu'une stabilisation numérique de la solution.

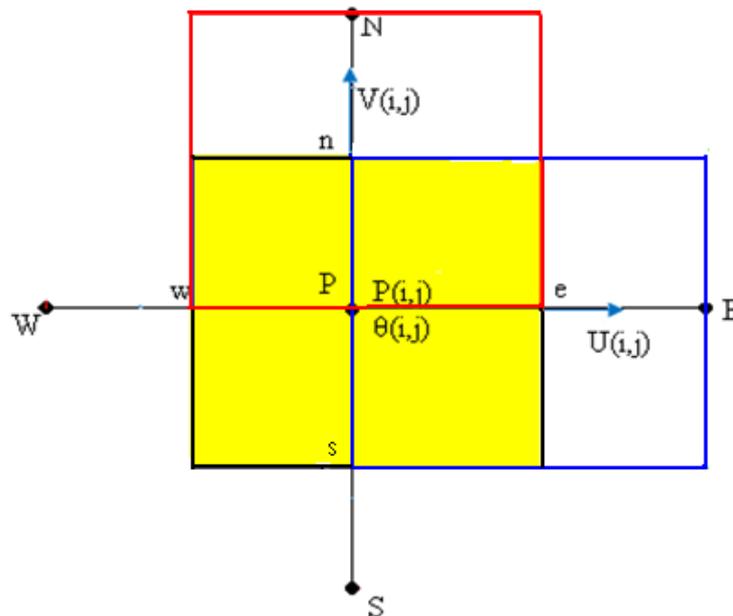


Figure 4.2 stockage des variables

- variables scalaires telles que la pression $P(i, j)$ et la température $\theta(i, j)$ sont stockées au centre du volume de contrôle typique (étalée en jaune).
- La première composante vectorielle de la variable de la vitesse, $u(i, j)$ est stockée au centre du volume de contrôle décalée vers l'est (limitée en bleu).
- La deuxième composante de la vitesse, $v(i, j)$ est stockée au centre du volume de contrôle décalée vers le nord (limitée en rouge)

4.2 Discrétisation de l'équation générale du transport :

La discrétisation du modèle mathématique définis par les équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires de (3.29) jusqu'à (3.32), consiste à le transformer en un système d'équations algébrique numériquement résolubles.

Le system d'équations différentielles représentant le modèle mathématique :

$$\frac{\partial u^c}{\partial \xi} + \frac{\partial v^c}{\partial \eta} = 0$$

$$\frac{\partial(u^c u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(v^c u)}{\partial \eta} - \left(f_{11} \frac{\partial p}{\partial \xi} + f_{21} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) Pr \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{11} J \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12} J \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12} J \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{22} J \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right]$$

$$\frac{\partial(u^c v)}{\partial \xi} + \frac{\partial(v^c v)}{\partial \eta} = - \left(f_{12} \frac{\partial p}{\partial \xi} + f_{22} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + Pr \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{11} J \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12} J \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12} J \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{22} J \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{Pr Ra \theta}{J}$$

$$\frac{\partial(u^c \theta)}{\partial \xi} + \frac{\partial(v^c \theta)}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{11} J \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{12} J \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \left(q_{12} J \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(q_{22} J \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right]$$

Pour simplifier sa manipulation, le système d'équations ci-dessus, est représenté par l'équation générale de transport suivante :

$$\frac{\partial(U^c \phi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(V^c \phi)}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Gamma_{\phi \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Gamma_{\phi \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + S_{\phi} \quad (4.1)$$

On relie les flux convectifs et diffusives de chaque direction ξ et η :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(u^c \phi - \Gamma_{\phi \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v^c \phi - \Gamma_{\phi \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = S_\phi \quad (4.2)$$

On donne au flux total selon la direction ξ la notation G_ξ tel que :

$$G_\xi = u^c \phi - \Gamma_{\phi \xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \quad (4.3)$$

Et selon η le G_η comme :

$$G_\eta = v^c \phi - \Gamma_{\phi \eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (4.4)$$

L'équation (4.2) sera :

$$\frac{\partial G_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial G_\eta}{\partial \eta} = S_\phi. \quad (4.5)$$

On considère le volume de contrôle typique **Figure 4.1**. L'intégration de l'équation (4.5) sur ce volume de contrôle donne :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial G_\xi}{\partial \xi} d\xi d\eta + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial G_\eta}{\partial \eta} d\xi d\eta = \int_s^e \int_w^e S_\phi d\xi d\eta \quad (4.6)$$

L'intégration donne :

$$(G_{\xi e} - G_{\xi w}) \Delta \eta + (G_{\eta e} - G_{\eta s}) \Delta \xi = S_\phi \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.7)$$

De la même façon, on intègre l'équation de continuité :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial u^c}{\partial \xi} d\xi d\eta + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial v^c}{\partial \eta} d\xi d\eta = 0 \quad (4.8)$$

L'intégration donne :

$$(u_e^c - u_w^c)\Delta\eta + (v_n^c - v_s^c)\Delta\xi = 0 \quad (4.9)$$

En réarrangeant cette équation on trouve :

$$(u_e^c \Delta\eta - u_w^c \Delta\eta + v_n^c \Delta\xi - v_s^c \Delta\xi) = 0 \quad (4.10)$$

Et enfin l'équation de continuité peut être écrite comme suit :

$$(F_e - F_w + F_n - F_s) = 0 \quad (4.11)$$

Où F_e, F_w, F_n, F_s sont les flux convectifs à travers les faces de volume de contrôle, avec :

$$F_e = u_e^c \Delta\eta$$

$$F_n = v_n^c \Delta\xi$$

$$F_w = u_w^c \Delta\eta$$

$$F_s = v_s^c \Delta\xi$$

On multiplie l'équation (4.11) par ϕ_p et on soustrait la de L'équation (4.7) :

$$(4.11)*\phi_p \longrightarrow (F_e\phi_p - F_w\phi_p + F_n\phi_p - F_s\phi_p) = 0 \quad (4.12)$$

$$(4.8) - (4.12) \longrightarrow \left[\begin{array}{l} (G_{\xi e} \Delta\eta - F_e\phi_p) - (G_{\xi w} \Delta\eta - F_w\phi_p) + (G_{\eta n} \Delta\xi - F_n\phi_p) - \\ (G_{\eta s} \Delta\xi - F_s\phi_p) \end{array} \right] = S_\phi \Delta\xi \Delta\eta$$

On linéarisant le terme source on trouve :

$$\left[(G_{\xi_e} \Delta \eta - F_e \phi_p) - (G_{\xi_w} \Delta \eta - F_w \phi_p) + (G_{\eta_n} \Delta \xi - F_n \phi_p) - (G_{\eta_s} \Delta \xi - F_s \phi_p) \right] = (S_c + S_p \phi_p) \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.13)$$

Pour évaluer les flux aux faces des volumes de contrôle on considère deux nœuds adjacents i et $i+1$ séparés par une distance $(\delta \xi)$, comme c'est indiqué dans le schéma suivant :

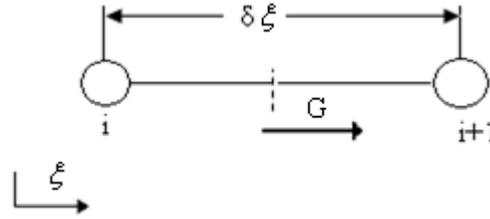


Figure. 4.3 Deux nœuds adjacents

Le flux total est donné par l'expression selon Patankar [17] :

$$G^* = \frac{G \delta \xi}{\Gamma_\phi} \quad (4.14)$$

Avec, $G = u^c \phi - \Gamma_\phi \frac{d\phi}{d\xi}$:

$$G^* = \frac{u^c \delta \xi}{\Gamma_\phi} \phi - \frac{d\phi}{d\left(\frac{\xi}{\delta \xi}\right)}$$

Finalement, on a :

$$G^* = P \phi - \frac{d\phi}{d\left(\frac{\xi}{\delta \xi}\right)} \quad (4.15)$$

P est le nombre de Pecklet, $P = \frac{u^c \delta \xi}{\Gamma_\phi}$

D'après le schéma numérique du POWER LAW de S. V. PATANKAR [17], l'équation (4.15) sera :

$$G^* D - F \phi_i = [DA(P)_+ || -F, 0] (\phi_i - \phi_{i+1}) \quad (4.16)$$

L'application de cette expression au volume de contrôle **Figure 4.1**, aboutit les équations suivantes :

$$\begin{aligned} G_e^* D_e - F_e \phi_p &= [D_e A(P_e)_+ || -F_e, 0] (\phi_p - \phi_e) \\ G_w^* D_w - F_w \phi_p &= [D_w A(P_w)_+ || -F_w, 0] (\phi_w - \phi_p) \\ G_n^* D_n - F_n \phi_p &= [D_n A(P_n)_+ || -F_n, 0] (\phi_p - \phi_n) \\ G_s^* D_s - F_s \phi_p &= [D_s A(P_s)_+ || -F_s, 0] (\phi_s - \phi_p) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dans ces équations on trouve les coefficients suivants sur les faces du volume de contrôle :

Les flux convectifs :

$$F_e = u_e^c \Delta \eta ; \quad F_w = u_w^c \Delta \eta ; \quad F_n = v_n^c \Delta \xi ; \quad F_s = v_s^c \Delta \xi .$$

Les flux diffusifs :

$$D_e = \frac{\Gamma_{\phi \xi} \Delta \eta}{(\delta \xi)_e} ; \quad D_w = \frac{\Gamma_{\phi \xi} \Delta \eta}{(\delta \xi)_w} ; \quad D_n = \frac{\Gamma_{\phi \eta} \Delta \xi}{(\delta \eta)_n} ; \quad D_s = \frac{\Gamma_{\phi \eta} \Delta \xi}{(\delta \eta)_s} .$$

Les nombres de Pecklet :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} ; \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} ; \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} ; \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} .$$

Afin d'aboutir à une forme simple de l'équation (4.17) on pose :

$$\begin{aligned}
 A_E &= D_e A(P_e) + \|-F_e, 0\| \\
 A_w &= D_w A(P_w) + \|-F_w, 0\| \\
 A_n &= D_n A(P_n) + \|-F_n, 0\| \\
 A_s &= D_s A(P_s) + \|-F_s, 0\|
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

On injecte les coefficients de l'équation (4.18) dans l'équation (4.13), avec $G_e^* D_e = G_e \Delta \xi_e$ on obtient :

$$A_E (\phi_p - \phi_e) - A_w (\phi_w - \phi_p) + A_n (\phi_p - \phi_n) - A_s (\phi_s - \phi_p) = (S_c + S_p \phi_p) \Delta \xi \Delta \eta
 \tag{4.19}$$

Pour des raisons de stabilité numérique le coefficient S_p est choisi négatif ou nul (Règle n=3). On pose que :

$$\begin{aligned}
 A_e + A_w + A_n + A_s - S_p \Delta x \Delta y &= A_p \\
 \text{et} \\
 S_c \Delta x \Delta y &= S'
 \end{aligned}$$

L'équation (4.19) sera comme suit :

$$A_p \phi_p = A_e \phi_e + A_w \phi_w + A_n \phi_n + A_s \phi_s + S'
 \tag{4.20}$$

On va maintenant intégrer l'équation (4.20)

4.3 Schémas de discrétisation dans l'espace :

Les profils approximatifs décrivant la variation de ϕ entre les nœuds, sont exprimés par la fonction $A(|P|)$ spécifique pour chaque schéma numérique.

La concordance des résultats obtenus par ces schémas et la stabilité numérique sont deux critères de choix du schéma. Suhas V.Patankar [17] a cité cinq schémas. On citera trois de ces schémas :

4.3.1 Schéma Upwind :

Il correspond à $A(|P|) = 1$. Il lève la difficulté rencontrée dans le schéma des différences centrées quand $|P| > 2$. Donc il n'y aura pas de coefficients négatifs dans l'équation discrétisée. L'expérience numérique indique qu'il y a risque de rencontrer des solutions non physiques.

4.3.2 Schéma hybride :

Il lui correspond la fonction $A(|P|)$ définie par $A(|P|) = \max(0, 1 - 0,5|P|)$.

Et comme son nom l'indique, ce schéma est la combinaison des schémas des différences centrées et « Upwind ». En effet, pour les valeurs de P compris dans le domaine $[-2, 2]$, le schéma est identique au profil des différences centrées. En dehors de ce domaine (où $|P| > 2$), le schéma hybride est comparable au schéma « Upwind ».

4.3.3 Schéma « power Law » :

Dans le schéma hybride il a été exagéré de considérer que la diffusion est nulle, et favorise la convection au dépend de la diffusion. Alors, on fait appel aux solutions stables et respectent les quatre règles de base des volumes finis. Le schéma de puissance (power Law) dérivé du schéma exponentiel par interpolation polynomiale entre deux nœuds adjacents, il s'approche mieux de la solution exacte en augmentant le nombre d'intervalles d'approximation.

La fonction $A(|P|)$ est exprimé par :

$$A(|P|) = \left\| 0, (1 - 0,1|P|)^5 \right\|.$$

La signification physique des différents coefficients de l'équation (4.20) soit facile à comprendre. Les coefficients croissants A_E, A_W, A_N et A_S représentent l'influence de la convection et de la diffusion au quatre faces du volume de contrôle, en terme du taux de convection F et de la conductance D .

4.4 Discrétisation spatial :

Il est nécessaire d'aboutir à une formulation détaillée des équations discrétisées, il est nécessaire de développer l'expression des vitesses et des termes de sources, sur les faces des volumes de contrôle.

4.4.1 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant ξ :

Pour évaluer les valeurs des vitesses sur les faces des volumes de contrôle on va utiliser le volume de contrôle décalé suivant la direction ξ . L'équation (4.20) dans le volume de contrôle décalée s'écrit comme :

$$A_p u_{pu} = A_e u_{eu} + A_w u_{wu} + A_n u_{nu} + A_s u_{su} + S' \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.21)$$

Avec :

$$u_{eu} = \frac{u_{Eu} + u_{Pu}}{2}$$

$$u_{wu} = \frac{u_{Wu} + u_{Pu}}{2}$$

$$u_{nu} = \frac{u_{Pu} + u_{Nu}}{2}$$

$$u_{su} = \frac{u_{Su} + u_{Pu}}{2}$$

$$v_{eu} = \frac{v_{Ev} + v_{EvSv}}{2}$$

$$v_{wu} = \frac{v_{Pv} + v_{Sv}}{2}$$

$$v_{nu} = \frac{v_{Pv} + v_{Ev}}{2}$$

$$v_{su} = \frac{v_{Sv} + v_{SvEv}}{2}$$

* **Les flux convectifs :**

$$\left. \begin{aligned} F_e &= (y_\eta u_{eu} - x_\eta v_{eu}) \Delta \eta \\ F_w &= (y_\eta u_{wu} - x_\eta v_{wu}) \Delta \eta \end{aligned} \right| \begin{aligned} F_n &= (x_\xi v_{nu} - y_\xi u_{nu}) \Delta \xi \\ F_s &= (x_\xi v_{su} - y_\xi u_{su}) \Delta \xi \end{aligned}$$

* **Les flux diffusifs :**

$$\left. \begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \eta}{(\delta\xi)_{eu}} \\ D_w &= \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \eta}{(\delta\xi)_{wu}} \end{aligned} \right| \begin{aligned} D_n &= \frac{\Gamma_{\phi\eta} \Delta \xi}{(\delta\eta)_{nu}} \\ D_s &= \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \xi}{(\delta\eta)_{su}} \end{aligned}$$

* **discrétisation du terme de source ξ :**

Lors de l'intégration de l'équation générale de transport les termes autres que les coefficients des variables aux nœuds, sont regroupés sous forme d'une source discrétisée.

L'intégration du terme de source correspondant à l'équation de quantité de mouvement suivant ξ est donnée par l'expression suivante :

$$\int_w^e \int_s^n \left(y_\xi \frac{\partial P}{\partial \eta} - y_\eta \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \text{Pr } q_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \text{Pr } q_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + \int_w^e \int_s^n u_p^{(n)} d\xi d\eta \quad (4.22)$$

Après les intégrations le résultat final de discrétisation du terme source est :

$$y_\eta (P_p - P_E) \Delta \eta + y_\xi \left(\frac{P_N - P_S}{2} \right) - \frac{1}{2} J \text{Pr } q_{12} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) + u_p^{(n)} \delta \xi_e \Delta \eta_p \quad (4.23)$$

Toutes les intégrations précédentes sont évaluées au volume de contrôle associée au variable générale du transport.

4.4.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant η :

L'équation générale de discrétisation (4.20) écrite sur le volume de contrôle associé à v **Figure 4.2** :

$$A_p v_{pv} = A_e v_{ev} + A_w v_{wv} + A_n v_{nv} + A_s v_{sv} + S_v' \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.24)$$

Avec :

$$u_{ev} = \frac{u_{Nu} + u_{Pu}}{2}$$

$$u_{wv} = \frac{u_{Wu} + u_{WuNu}}{2}$$

$$v_{nv} = \frac{v_{Pv} + v_{Nv}}{2}$$

$$u_{sv} = \frac{u_{Wu} + u_{Pu}}{2}$$

$$v_{ev} = \frac{v_{Ev} + v_{Pv}}{2}$$

$$v_{wv} = \frac{v_{Pv} + v_{Wv}}{2}$$

$$u_{nv} = \frac{u_{NuWu} + u_{Nu}}{2}$$

$$v_{sv} = \frac{v_{Sv} + v_{Pv}}{2}$$

* **Les flux convectifs :**

$$F_e = (y_\eta u_{ev} - x_\eta v_{ev}) \Delta \eta$$

$$F_w = (y_\eta u_{wv} - x_\eta v_{wv}) \Delta \eta$$

$$F_n = (x_\xi v_{nv} - y_\xi u_{nv}) \Delta \xi$$

$$F_s = (x_\xi v_{sv} - y_\xi u_{sv}) \Delta \xi$$

* **Les flux diffusifs :**

$$D_e = \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \eta}{(\delta\xi)_{ev}}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \eta}{(\delta\xi)_{wv}}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_{\phi\eta} \Delta \xi}{(\delta\eta)_{nv}}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \xi}{(\delta\eta)_{sv}}$$

* **Discretisation du terme de source :**

$$\bar{S}_v = \int \int_{w \ s} \left(x_\eta \frac{\partial P}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta - \int \int_{w \ s} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \text{Pr} q_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta - \int \int_{w \ s} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \text{Pr} q_{12} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + \int \int Ra. \text{Pr} . \theta . J . d\xi d\eta + \int \int_{w \ s} u_p^{(n)} d\xi d\eta \quad (4.25)$$

Le résultat final est :

$$\begin{aligned} \bar{S}_v = & x_\xi (P_p - P_N) \Delta \xi + x_\eta \left(\frac{P_E - P_W}{2} \right) \Delta \eta - \frac{1}{2} J \text{Pr} q_{12} (v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) \\ & + Ra. \text{Pr} . \left(\frac{\theta_N + \theta_P}{2} \right) J \Delta \xi \Delta \eta + v_p^{(n)} \delta \xi_e \Delta \eta_p \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.4.3 Discretisation de l'équation d'énergie :

L'équation générale de discretisation est écrit sur le volume de contrôle associe au variable scalaire **Figure 4.2**, ça donne :

$$A_p \theta_p = A_e \theta_e + A_w \theta_w + A_n \theta_n + A_s \theta_s + S_\theta' \Delta \xi \Delta \eta \quad (4.27)$$

$$u_e = u_{Pu}$$

$$u_w = u_{wu}$$

$$u_n = \frac{u_{Pu} + u_{Nu} + u_{Nwu} + u_{Wu}}{4}$$

$$u_s = \frac{u_{Pu} + u_{Wu} + u_{Swu} + u_{Su}}{4}$$

$$v_e = \frac{v_{Pv} + v_{Ev} + v_{Sv} + v_{SEv}}{4}$$

$$v_w = \frac{v_{Pv} + v_{Wv} + v_{Sv} + v_{WSv}}{4}$$

$$v_n = v_{Pv}$$

$$v_s = v_{Sv}$$

* **Les flux convectifs :**

$$\begin{array}{l|l}
 F_e = (y_\eta u_e - x_\eta v_e) \Delta \eta & F_n = (x_\xi v_n - y_\xi u_n) \Delta \xi \\
 F_w = (y_\eta u_w - x_\eta v_w) \Delta \eta & F_s = (x_\xi v_s - y_\xi u_s) \Delta \xi
 \end{array}$$

* **Les flux diffusifs :**

$$\begin{array}{l|l}
 D_e = \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \eta}{(\delta\xi)_e} & D_n = \frac{\Gamma_{\phi\eta} \Delta \xi}{(\delta\eta)_n} \\
 D_w = \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \eta}{(\delta\xi)_w} & D_s = \frac{\Gamma_{\phi\xi} \Delta \xi}{(\delta\eta)_s}
 \end{array}$$

* **Discrétisation du terme source de l'équation d'énergie :**

L'intégration du terme de la source de l'équation d'énergie s'écrit :

$$\bar{S}_\theta = - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \text{Pr} q_{12} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta - \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \text{Pr} q_{12} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta + \int_w^e \int_s^n \theta_p^{(n)} d\xi d\eta \tag{4.28}$$

Le résultat final est :

$$\bar{S}_\theta = -\frac{1}{2} J q_{12} (\theta_{i+1,j+1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1} + \theta_{i-1,j-1}) + \theta_p^{(n)} \Delta \xi_e \Delta \eta_p$$

4.4.4 Discrétisation des conditions aux limites :

Les équations des conditions aux limites sont exprimées sous la forme générale de l'équation de discrétisation de l'équation générale de transport (3.20) :

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + S_\phi.$$

Les coefficients de ces équations sont spécifiés sur chaque paroi et pour chaque variable de transport. La valeur de u et v sur les quarts parois est la même donc, les coefficients obtenus après la discrétisation des équations sur les limites du domaine sont :

$$A_p = 1$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = S_\phi = 0$$

La condition de Dirichlet pour la température au niveau des parois verticales, et discrétisée en substituant les coefficients de l'équation discrétisée associé à θ par les valeurs suivantes :

Pour $0 < \eta < 1$:

* $\xi = 0$

$$A_p = 1$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = S_\phi = 0$$

* $\xi = 1$

$$A_p = 1$$

$$S_\phi = 1$$

$$A_E = A_W = A_N = A_S = 0$$

La condition du flux thermique nulle de Newman sur les parois horizontales est discrétisé en introduisant les valeurs suivantes dans l'équation discrétisée de la température.

Pour $0 < \xi < 1$

* $\eta = 0$

$$A_p = 1$$

$$A_N = 1$$

$$A_E = A_W = A_S = S_\phi = 0$$

* $\eta = 1$

$$A_p = 1$$

$$A_S = 1$$

$$A_E = A_W = A_N = S_\phi = 0$$

4.5 Equation de discrétisation de la pression :

De l'équation générale (4.20) on a :

Suivant ξ :

$$A_p u_{p_u} = A_E u_{E_u} + A_W u_{W_u} + A_N u_{N_u} + A_S u_{S_u} + \bar{S}_u \quad (4.29)$$

On va écrire le terme de la source comme suit :

$$\bar{S}_u = b + y_\eta (P_p - P_E) \Delta \eta_p$$

L'équation (4.40) deviendra :

$$u_{p_u} = \frac{A_E u_{E_u} + A_W u_{W_u} + A_N u_{N_u} + A_S u_{S_u} + b}{A_p} + (P_p - P_E) \frac{y_\eta \Delta \eta_p}{A_p} \quad (4.30)$$

Selon le volume de contrôle décalé suivant ξ :

$p_u \equiv e$, on va introduire ça dans l'équation :

$$u_e = \hat{u}_e + (P_p - P_E) de \quad (4.31)$$

Où :

$$\hat{u}_e = \frac{A_E u_{E_u} + A_W u_{W_u} + A_N u_{N_u} + A_S u_{S_u} + b}{A_p} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{A_p}$$

$$de = \frac{y_\eta \Delta y_p}{A_p}$$

De même pour w :

$$u_w = \hat{u}_w + (P_w - P_p) dw \quad (4.32)$$

Suivant η :

$$A_p v_{p_v} = A_E v_{E_v} + A_W v_{W_v} + A_N v_{N_v} + A_S v_{S_v} + c + (P_p - P_N) x_\xi \Delta x_p \quad (4.33)$$

Avec :

$$v_{p_v} = \frac{A_E v_{E_v} + A_W v_{W_v} + A_N v_{N_v} + A_S v_{S_v} + c}{A_p} + (P_p - P_N) \frac{x_\xi \Delta x_p}{A_p}$$

Selon le volume de control décalé suivant η on a :

$p_v \equiv n$, introduisant ça dan l'équation :

$$v_n = \widehat{v}_n + (P_p - P_N) dn \quad (4.34)$$

Avec :

$$\widehat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + c}{A_p}$$

$$dn = \frac{x_\xi \Delta x_p}{A_p}$$

De même pour s :

$$v_s = \widehat{v}_s + (P_s - P_p) ds \quad (4.35)$$

On reconsidère l'équation de continuité et on va la discrétiser dans le volume de contrôle typique

Figure 4.1 :

$$\int_s^e \int_w^e \frac{\partial u^c}{\partial \xi} d\xi d\eta + \int_s^e \int_w^e \frac{\partial v^c}{\partial \eta} d\xi d\eta = 0$$

$$y_\eta (u_e - u_w) \Delta \eta_p + x_\xi (v_n - v_s) \Delta \xi_p + x_\eta (v_w - v_e) \Delta \eta_p + y_\xi (u_s - u_n) \Delta \xi = 0 \quad (4.36)$$

On va remplacer les quatre équations (4.31), (4.32), (4.34) et (4.35) dans l'équation de continuité (4.36) le résultat est :

$$y_\eta [\hat{u}_e + de(P_p - P_E)] \Delta \eta_p - y_\eta [\hat{u}_w + dw(P_p - P_p)] \Delta \eta_p + x_\xi [\hat{v}_n + dn(P_p - P_N)] \Delta \xi_p - x_\xi [\hat{v}_s + ds(P_p - P_p)] \Delta \xi_p + x_\eta (v_w - v_e) \Delta \eta + y_\xi (u_s - u_n) \Delta \xi = 0 \quad (4.37)$$

On va maintenant réécrire cette équation sous la forme standard :

$$(y_\eta de \Delta e_p + y_\eta dw \Delta w_p + x_\xi dn \Delta n_p + x_\xi ds \Delta s_p) P_p = (y_\eta de \Delta e_p) P_E + (y_\eta dw \Delta w_p) P_w + (x_\xi dn \Delta n_p) P_N + (x_\xi ds \Delta s_p) P_s + (\hat{u}_w - \hat{u}_e) y_\eta \Delta \eta_p + (\hat{v}_s - \hat{v}_n) x_\xi \Delta \xi_p + (v_e - v_w) x_\eta \Delta \eta_p + (u_n - u_s) y_\xi \Delta \xi_p \quad (4.38)$$

Donc l'équation de pression s'écrit comme :

$$A_p P_p = A_E P_E + A_W P_W + A_N P_N + A_S P_S + S \quad (4.39)$$

Avec :

$$A_E = y_\eta de \Delta \eta_p$$

$$A_W = y_\eta dw \Delta \eta_p$$

$$A_N = x_\xi dn \Delta \xi_p$$

$$A_S = x_\xi ds \Delta \xi_p$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$S = (\hat{u}_w - \hat{u}_e) y_\eta \Delta \eta_p + (\hat{v}_s - \hat{v}_n) x_\xi \Delta \xi_p + (v_e - v_w) x_\eta \Delta \eta_p + (u_n - u_s) y_\xi \Delta \xi_p$$

On obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} A_p u_{p_u} = A_E u_{E_u} + A_W u_{W_u} + A_N u_{N_u} + A_S u_{S_u} + b + (P_p - P_E) y_\eta \Delta \eta_p \\ A_p v_{p_v} = A_E v_{E_v} + A_W v_{W_v} + A_N v_{N_v} + A_S v_{S_v} + c + (P_p - P_N) x_\xi \Delta \xi_p \\ A_p P_p = A_E P_E + A_W P_W + A_N P_N + A_S P_S + S \end{cases} \quad (4.40)$$

On va estimer une valeur de la pression (p), en notant ces estimations avec un astérisque (*).

Le system d'équation (4.40) devient :

$$\begin{cases} A_p u^*_{p_u} = A_E u^*_{E_u} + A_W u^*_{W_u} + A_N u^*_{N_u} + A_S u^*_{S_u} + b + (P^*_p - P^*_E) y_\eta \Delta \eta \\ A_p v^*_{p_v} = A_E v^*_{E_v} + A_W v^*_{W_v} + A_N v^*_{N_v} + A_S v^*_{S_v} + c + (P^*_p - P^*_N) x_\xi \Delta \xi_p \\ A_p P^*_p = A_E P^*_E + A_W P^*_W + A_N P^*_N + A_S P^*_S + S^* \end{cases} \quad (4.41)$$

Puisque le champ de P^* est une estimation, le champ de la vitesse trouvée sera aussi une estimation. Donc il faut la corrigée :

$$\begin{aligned} u &= u^* + u' \\ v &= v^* + v' \\ p &= p^* + p' \end{aligned}$$

Où les exposons (*) indiquent les estimations, tandis que (') indiquent les corrections.

Donc le système d'équation (4.41) sera comme suit :

$$\begin{cases} A_p u^*_{p_u} + A_p u'_{p_u} = A_E u^*_{E_u} + A_E u'_{E_u} + A_W u^*_{W_u} + A_W u'_{W_u} + A_N u^*_{N_u} + A_N u'_{N_u} + A_S u^*_{S_u} + A_S u'_{S_u} \\ + b + (P^*_p - P^*_E) y_\eta \Delta \eta + (P'_p - P'_E) y_\eta \Delta \eta \\ A_p v^*_{p_v} + A_p v'_{p_v} = A_E v^*_{E_v} + A_E v'_{E_v} + A_W v^*_{W_v} + A_W v'_{W_v} + A_N v^*_{N_v} + A_N v'_{N_v} + A_S v^*_{S_v} + A_S v'_{S_v} \\ + c + (P^*_p - P^*_N) x_\xi \Delta \xi + (P'_p - P'_N) x_\xi \Delta \xi \end{cases} \quad (4.42)$$

Maintenant, soustrayons (4.42) de (4.41) on obtient :

$$\begin{cases} A_p u'_{p_u} = A_E u'_{E_u} + A_W u'_{W_u} + A_N u'_{N_u} + A_S u'_{S_u} + (P'_p - P'_E) y_\eta \Delta \eta_p \\ A_p v'_{p_v} = A_E v'_{E_v} + A_W v'_{W_v} + A_N v'_{N_v} + A_S v'_{S_v} + (P'_p - P'_N) x_\xi \Delta \xi_p \end{cases} \quad (4.43)$$

On introduit des corrections de vitesse qui sont liée seulement à des corrections de pression :

$$A_p u'_{p_u} = (P'_p - P'_E) \Delta y_p$$

$$A_p v'_{p_v} = (P'_p - P'_N) \Delta x_p$$

Si on a les corrections de pression on peut avec une simple manipulation algébrique calculer les vitesses corrigées.

Malheureusement on n'a pas les corrections de pression, pour cela on va les chercher:

$$u_{p_u} = u_{p_u}^* + u'_{p_u} = u_{p_u}^* + (P'_p - P'_E) \frac{y_\eta \Delta \eta_p}{A_p} \quad (a)$$

$$v_{p_v} = v_{p_v}^* + v'_{p_v} = v_{p_v}^* + (P'_p - P'_N) \frac{x_\xi \Delta \xi_p}{A_p} \quad (b)$$

Avec : $P_u \equiv e$ et $P_v \equiv n$ donc :

$$(a) \longrightarrow \begin{cases} u_e = u_e^* + (P'_p - P'_E) \frac{y_\eta \Delta \eta_p}{A_p} \\ u_w = u_w^* + (P'_w - P'_p) \frac{y_\eta \Delta \eta_p}{A_p} \end{cases}$$

$$(b) \longrightarrow \begin{cases} v_n = v_n^* + (P'_p - P'_N) \frac{x_\xi \Delta \xi_p}{A_p} \\ v_s = v_s^* + (P'_s - P'_p) \frac{x_\xi \Delta \xi_p}{A_p} \end{cases}$$

On reconsidère l'équation de continuité équation (4.36):

$$y_\eta (u_e - u_w) \Delta \eta_p + x_\xi (v_n - v_s) \Delta \xi_p + x_\eta (v_w - v_e) \Delta \eta_p + y_\xi (u_s - u_n) \Delta \xi = 0$$

Et on remplace les variables u et v par leurs valeurs de (a) et (b) dans l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} & \left[u_e^* + (P'_p - P'_E) \frac{\overbrace{y_\eta \Delta \eta_p}^{de}}{A_p} \right] \Delta \eta_p + \left[u_w^* + (P'_w - P'_p) \frac{\overbrace{y_\eta \Delta \eta_p}^{dw}}{A_p} \right] \Delta \eta_p + \left[v_n^* + (P'_p - P'_N) \frac{\overbrace{x_\xi \Delta \xi_p}^{dn}}{A_p} \right] \Delta \xi_p \\ & + \left[v_s^* + (P'_s - P'_p) \frac{\overbrace{x_\xi \Delta \xi_p}^{ds}}{A_p} \right] \Delta \xi_p + x_\eta (v_w - v_e) \Delta \eta + y_\xi (u_s - u_n) \Delta \xi = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

En réarrangeant cette équation sous la forme de l'équation standard de discrétisation, on obtient :

$$A_p P'_p = A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S + B$$

Où :

$$A_E = y_\eta de \Delta \eta_p$$

$$A_W = y_\eta dw \Delta \eta_p$$

$$A_N = x_\xi dn \Delta \xi_p$$

$$A_S = x_\xi ds \Delta \xi_p$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S$$

$$B = (u_w^* - u_e^*) y_\eta \Delta \eta_p + (v_s^* - v_n^*) x_\xi \Delta \xi_p + (v_e - v_w) x_\eta \Delta \eta_p + (u_n - u_s) y_\xi \Delta \xi_p$$

4.6 La solution séquentielle des équations de discrétisation par l'algorithme SIMPLER :

Étapes :

- 1- Commencer les calculs par un champ de vitesse initiale.
- 2- Calculer les pseudos vitesse \hat{u} et \hat{v} .
- 3- Utiliser les pseudos vitesse dans les sources de l'équation de pression.
- 4- Résoudre le système d'équations de discrétisation et obtenir un champ de pression.
Considérer comme une estimation de la pression P^* .
- 5- Utiliser P^* dans les sources des équations u^* et v^* .
- 6- Résoudre les systèmes des équations de u^* et v^* et obtenir des estimations des vitesses u^* et v^* .
- 7- Utiliser u^* et v^* dans les sources de l'équation de P' .
- 8- Résoudre le système d'équations de P' pour obtenir la correction de pression.
- 9- Corriger le champ de vitesse.

$$u = u^* + u'$$

$$v = v^* + v'$$

- 10- Résoudre le système d'équation de discrétisation d'énergie pour obtenir la température θ .
- 11- Vérifiez la convergence (où le régime permanent).
 - S'il y a convergence arrêté le calcul.
 - Si non retourner à l'étape (2).
- 12- Faire les calculs auxiliaires.

Chapitre 5

Résultats et Discussions

Introduction :

La simulation numérique de la convection naturelle laminaire dans une cavité bidimensionnelle remplie d'air, à paroi verticale ondulée chauffée et l'autre paroi verticale refroidie, les deux parois horizontales maintenues adiabatiques, est faite utilisant le code de calcul **Fluent**. La construction des géométries et leurs maillages sont faits à l'aide du logiciel **Gambit**. Les principaux résultats obtenus reflétant le comportement des champs dynamiques et thermiques dans la cavité, sont exposés dans ce chapitre.

5.1 Géométries et maillage sous Gambit :

Ce logiciel est utilisé pour définir et créer le domaine d'étude (surface ou volume) et de le mailler suivant le bon vouloir de l'utilisateur. Pour plus de détails sur **Gambit** et son utilisation, on invite le lecteur à s'orienter vers la référence [18]. Dans cette étude on a construit plusieurs configurations de cavités, en faisant varier le rapport d'aspect A , l'amplitude Amp de l'ondulation et le nombre d'ondulation de la paroi chaude. L'une de ces configurations construites par **Gambit** est montrée sur la **Figure 5.1**.

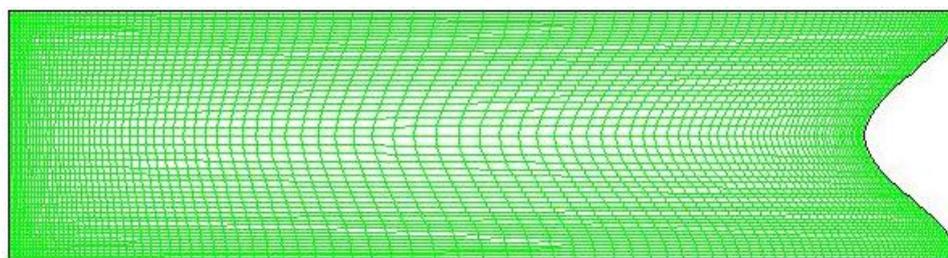


Figure 5.1 *géométrie et maillage construit sur Gambit, $A=4$, $Amp=0.2$*

5.2 Utilisation du Fluent :

« **Fluent** » est un code de calcul commercial très utilisé pour résoudre les problèmes de la mécanique des fluides ainsi que les transferts de chaleur. Dans cette étude, on a utilisé **Fluent** pour faire la simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité. On a étudié l'influence de plusieurs paramètres sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité :

- Effet du nombre de Rayleigh
- Effet du rapport d'aspect
- Effet de l'amplitude d'ondulation
- Effet de la fréquence d'ondulation (nombre d'ondulation).

5.3 Étude du maillage :

Pour vérifier l'effet du maillage sur les résultats numériques, plusieurs maillages ont été utilisés arbitrairement pour la configuration suivante : une cavité rectangulaire $A=4$, avec paroi verticale ondulée d'une amplitude $Amp=0.05$ et un nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^5 . Dans le **Tableau 5.1** on présente les valeurs de U_{max} et de y (U_{max} est la valeur maximale de vitesse horizontale adimensionnelle sur la section verticale située au milieu de la cavité, et y est la hauteur adimensionnelle où cette vitesse maximale est obtenue), et celle de V_{max} et de x (maximum de vitesse verticale adimensionnelle sur la section horizontale à mi-cavité et la position x adimensionnelle correspondante). D'après les résultats obtenus on retient le maillage (92*52) pour le reste des calculs.

	$X_{IL} * Y_{JL}$	62*42	72*42	82*42	92*52	102*52	112*52	122*62
$Ra = 10^3$	$U_{max}(1/2,y)$	1.707	1.707	1.505	1.505	1.505	1.505	1.505
	y	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21
	$V_{max}(x,1/2)$	1.422	1.441	1.441	1.565	1.565	1.565	1.565
	x	3.70	3.70	3.70	3.70	3.70	3.70	3.70
$Ra = 10^4$	$U_{max}(1/2,y)$	12.207	12.207	12.207	12.207	12.207	12.207	12.207
	y	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21	0.21
	$V_{max}(x,1/2)$	13.492	13.492	13.492	13.492	13.492	13.492	13.492
	x	3.75	3.75	3.77	3.77	3.77	3.77	3.77
$Ra = 10^5$	$U_{max}(1/2,y)$	35.340	35.430	35.338	35.164	35.164	36.164	36.164
	y	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
	$V_{max}(x,1/2)$	64.212	65.537	65.537	68.199	68.199	68.199	68.199
	x	3.83	3.83	3.84	3.84	3.85	3.85	3.85

Tableau 5.1 Etude du maillage

5.4 Validation :

La première étape consiste à valider notre simulation numérique (notre modèle sous Fluent) en comparant nos résultats avec ceux de la littérature. Pour cela on va exposer les solutions du problème de Davis [19], où il a considéré une cavité carrée de côté L avec les murs gauche et droit sont différentiellement chauffées tandis que les murs haut et bas ont pour conditions aux limites des flux thermiques nuls, le fluide utilisé est l'air. On va comparer les nombres de Nusselt moyen sur la paroi chaude avec ceux obtenus par Davis [19] **Tableau 5.2**, en plus on compare aussi les lignes de courants et les lignes isothermes du même problème présenter dans la référence [18].

	Ra	10^3	10^4	10^5	10^6
	Maillage	41*41	41*41	41*41	73*73
Résultat Davis	Nu_{moy}	1.116	2.242	4.523	8.825
Nos résultats	Nu_{moy}	1.082	2.161	4.412	8.859
Ecart relatif	(Nos résultats- Davis)/Davis	-0.030	-0.036	-0.024	0.004

Tableau 5.2 Comparaison des nombres de Nusselt moyen

Les résultats obtenus montrent un bon accord avec les résultats de De Vahl Davis [19], l'écart relatif maximal dans tous les cas n'atteint pas 4 %.

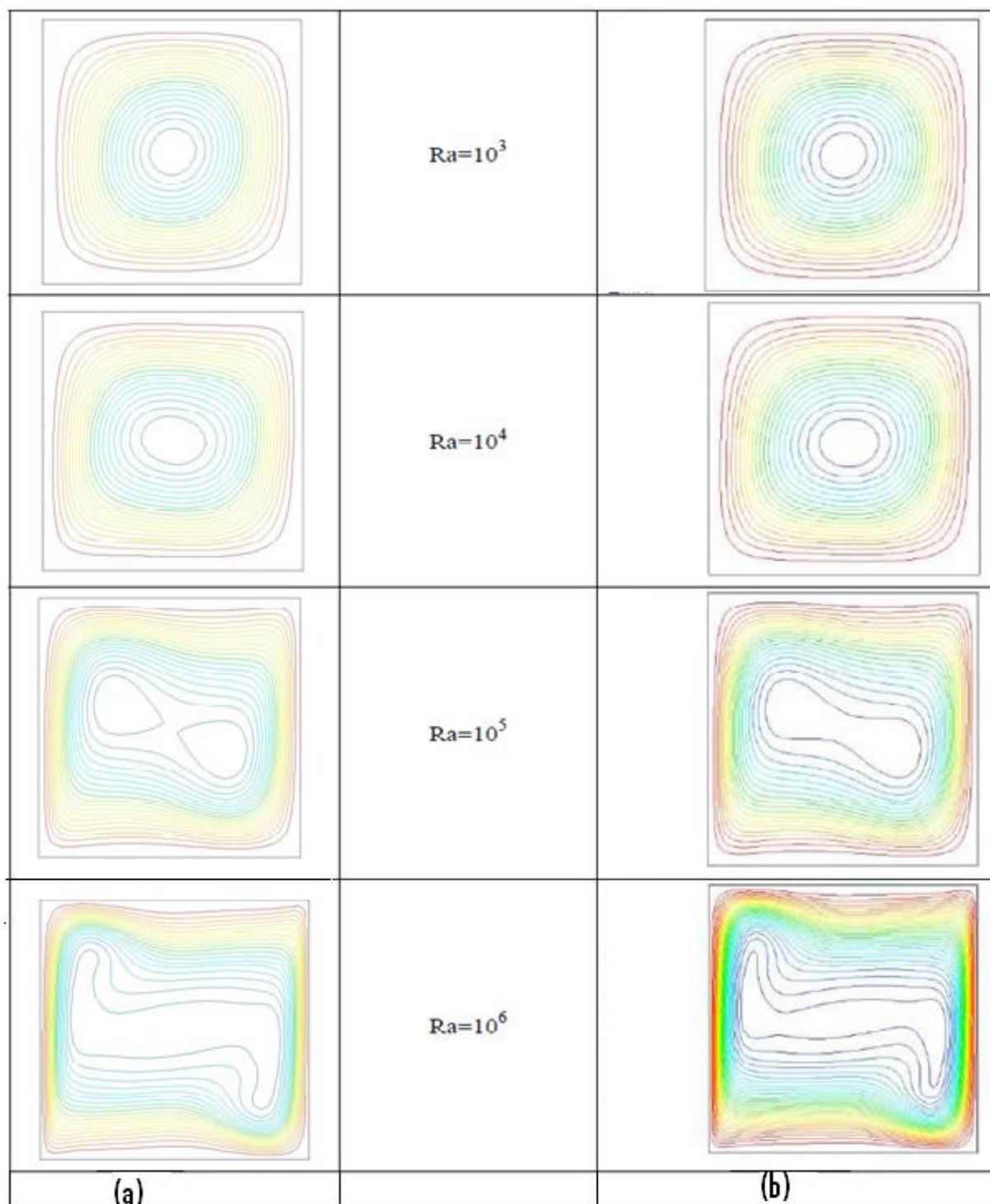
5.4.1 Comparaison pour les lignes de courant :

Figure 5.2 Lignes de courants dans une cavité carrée différentiellement chauffée

(a) Nos résultats

(b) Référence [18]

5.4.2 Comparaison pour les lignes isothermes:

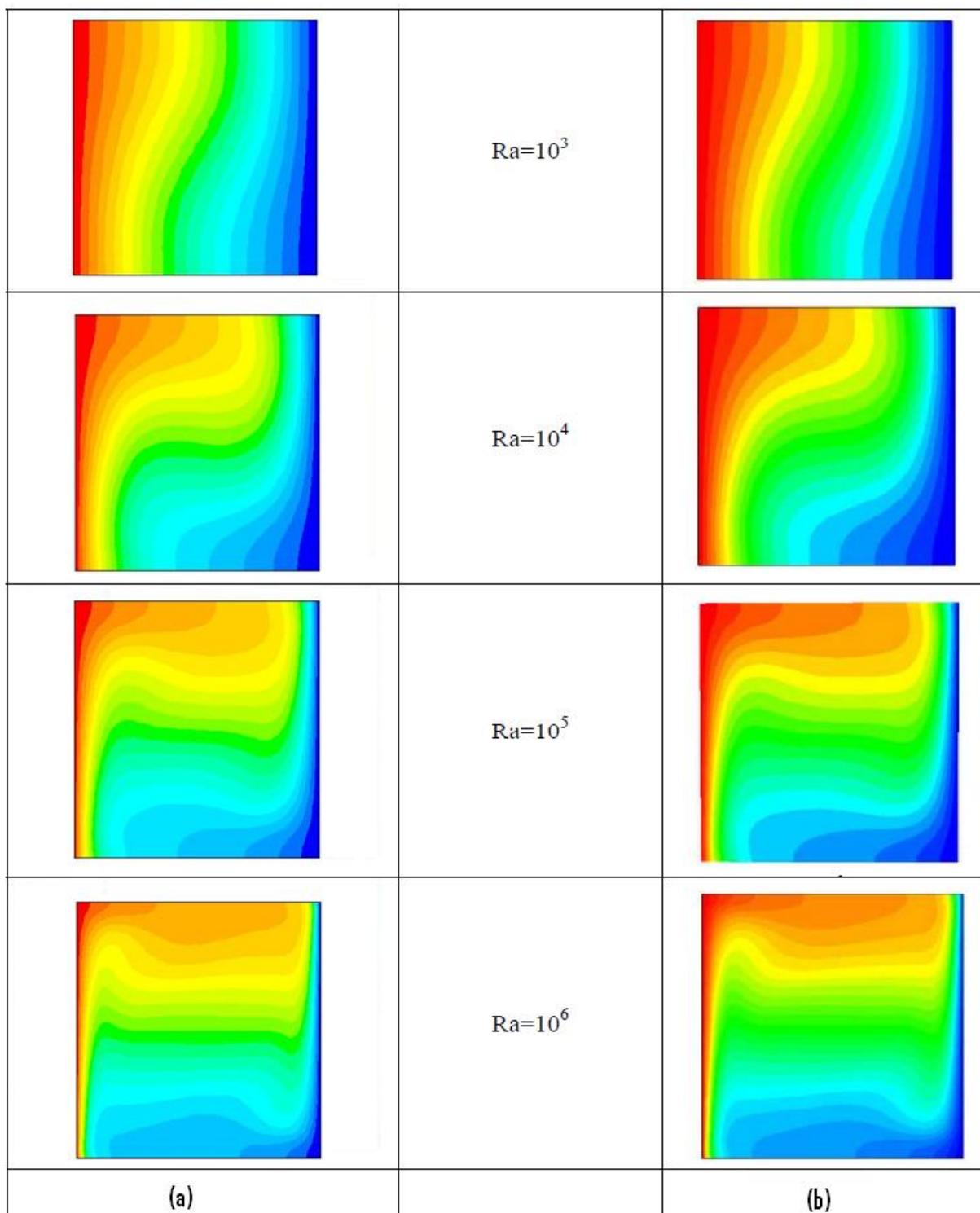


Figure 5.3 Isothermes dans une cavité carrée différentiellement chauffée

(a) Nos résultats

(b) Référence [18]

5.5 Convection naturelle dans une cavité rectangulaire sans ondulation :

Pour commencer notre étude, on se doit tout d'abord de considérer notre configuration sans la présence d'ondulations pour pouvoir par la suite voir l'influence de leurs introductions sur les champs dynamique et thermique ainsi que sur le taux du transfert de chaleur.

5.5.1 Influence du nombre de Rayleigh :

D'après les équations adimensionnées décrivant l'écoulement et les transferts de chaleur établies auparavant, notre problème dépend du nombre de Rayleigh et il est donc nécessaire d'étudier son influence.

5.5.1.1 Isothermes et lignes de courants :

Il est nécessaire d'interpréter les champs dynamiques (ligne de courants) et thermiques dans une cavité sans ondulation avant d'entamer l'étude de notre configuration. La **Figure 5.4** montre les lignes de courants et les isothermes pour $Ra = 10^3$, 10^4 , 10^5 et 10^6 , cavité rectangulaire $A=4$ et $Pr=0.71$ celui de l'air.

On constate que :

- 1- L'écoulement est monocellulaire, un vortex tournant appelé (vortex primaire) au sens contraire d'une aiguille d'une montre, ce phénomène est créé du fait que le fluide à coté de la paroi chaude reçoit de la chaleur est devient plus léger et ascendant du fait de la poussée d'Archimède, a proximité de la paroi froide le fluide se refroidie devient plus lourd et descendant le long de cette paroi.
- 2- Pour $Ra=10^3$, $Ra=10^4$ Les lignes de courant montrent un grand degré de symétrie par rapport au centre de la cavité ($x=2$), cette symétrie est légèrement compromise à mesure que le nombre de Rayleigh augmente $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$. Les lignes de courants deviennent plus serrées près des parois latérales à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, cela montre que l'écoulement est accéléré dans ces régions.
- 3- Pour $Ra=10^3$ les lignes isothermes sont des courbes presque parallèles aux parois latérales (froide et chaude) les transferts thermique se font par pseudo conduction, car les champs de vitesse sont différents de zéro.

- 4- Pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh $Ra=10^4$ et $Ra=10^5$ les lignes de courants se modifie sensiblement pour suivre le sens de l'écoulement jusqu'à ce qu'elles deviennent horizontal (parallèles aux parois horizontales) au centre de la cavité pour $Ra=10^6$, ce qui traduit une transformation du transfert conductif au transfert convectif.
- 5- On remarque aussi que les isothermes deviennent plus serrées à coté des parois latérales à mesure que le nombre de Rayleigh augmente.

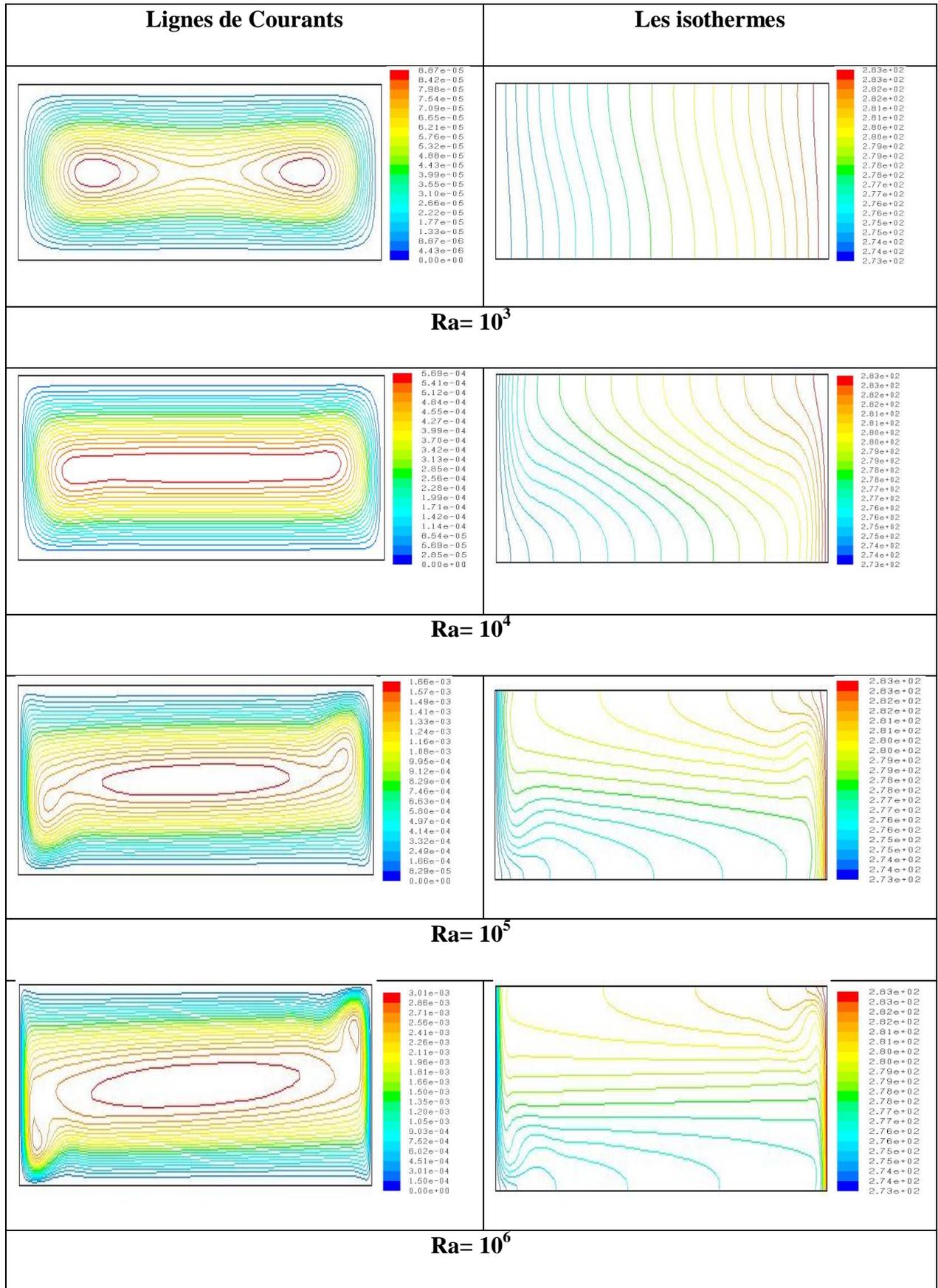


Figure 5.4. Les lignes de courants et les isothermes pour une cavité rectangulaire sans ondulation, pour Ra= 10³, 10⁴, 10⁵ et 10⁶.

5.5.1.2 Variation du nombre de Nusselt local :

Il est impératif pour notre étude d’observer les variations du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude. Ceci est défini comme suit :

* Pour la paroi chaude : $Nu_{local} = - \frac{\partial T}{\partial X} \Big|_{x=A}$ (5.1)

La **Figure 5.5** montre la variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude en fonction de Y pour un nombre de Rayleigh allant de 10^3 à 10^6 .

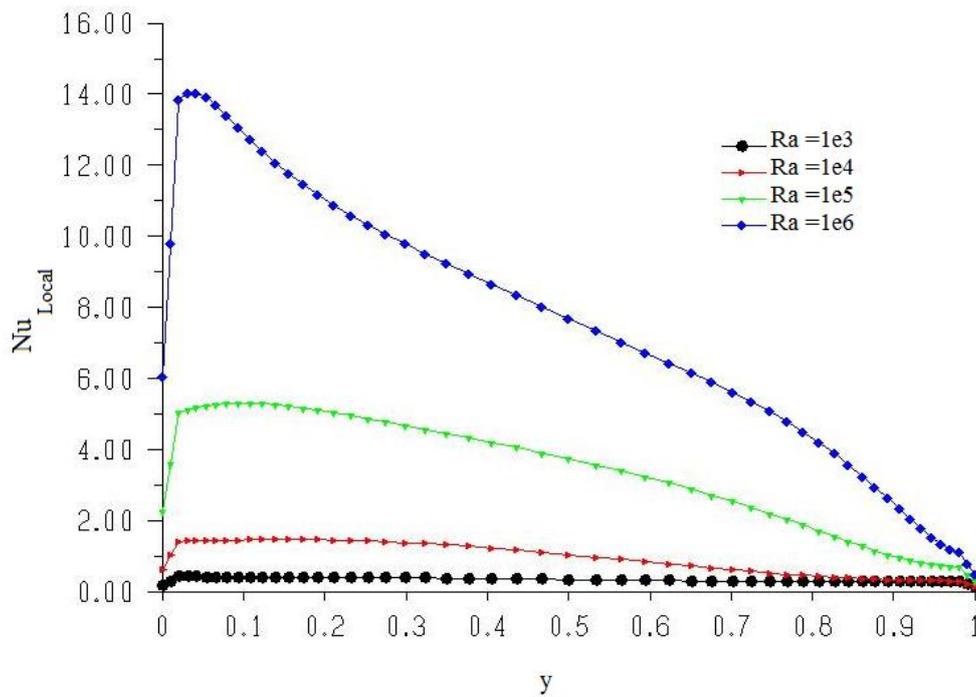


Figure 5.5 Les nombre de Nusselt locaux le long de la paroi chaude et froide de la cavité en fonction de y et pour différents Rayleigh.

D’après ce graphe on constate que :

- 1- Le nombre de Nusselt local sur la paroi chaude est une fonction décroissante de (Y), il atteint sa valeur maximale au bas de la paroi latérale chaude là où l’air reçoit une quantité de chaleur (énergie) qu’elle aide à remonter.
- 2- Pour une même valeur de (y) Le Nusselt Local augmente avec Rayleigh.

5.5.1.3 Variation du nombre de Nusselt moyen :

Une autre variable utilisée pour évaluer le taux du transfert thermique est le nombre de Nusselt moyen pour la paroi chaude.

Les nombres de Nusselt moyens pour la paroi chaude ont été obtenus en moyennant l'équation de Nusselt local (5.1), selon la formule donnée ci-dessous :

$$Nu_{moy} = \frac{\sum_{noeud} Nu_{local}}{m} \dots\dots\dots (5.2)$$

Où m est le nombre de nœuds.

La **Figure 5.6** montre la variation des nombres de Nusselt moyens sur la paroi chaude pour $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 .

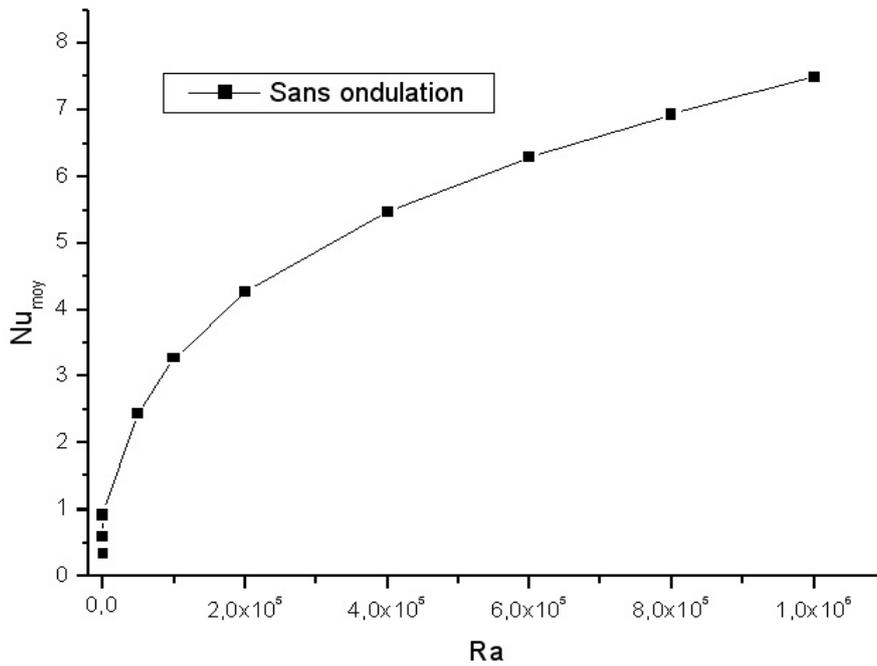


Figure 5.6 Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh, A=4.

On remarque que le nombre de Nusselt moyen, sur la paroi chaude augmente avec le nombre de Rayleigh. Le transfert de chaleur se fait essentiellement par conduction pour des nombres de Rayleigh ≤ 1000 , pour les plus grandes valeurs du nombre de Rayleigh le transfert devient convectif.

5.5.2 Influence du rapport d'aspect :

Pour l'étude qui suit on considère $Ra=10^5$, $Pr=0.7$ et ce pour les différents rapports d'aspect suivants :

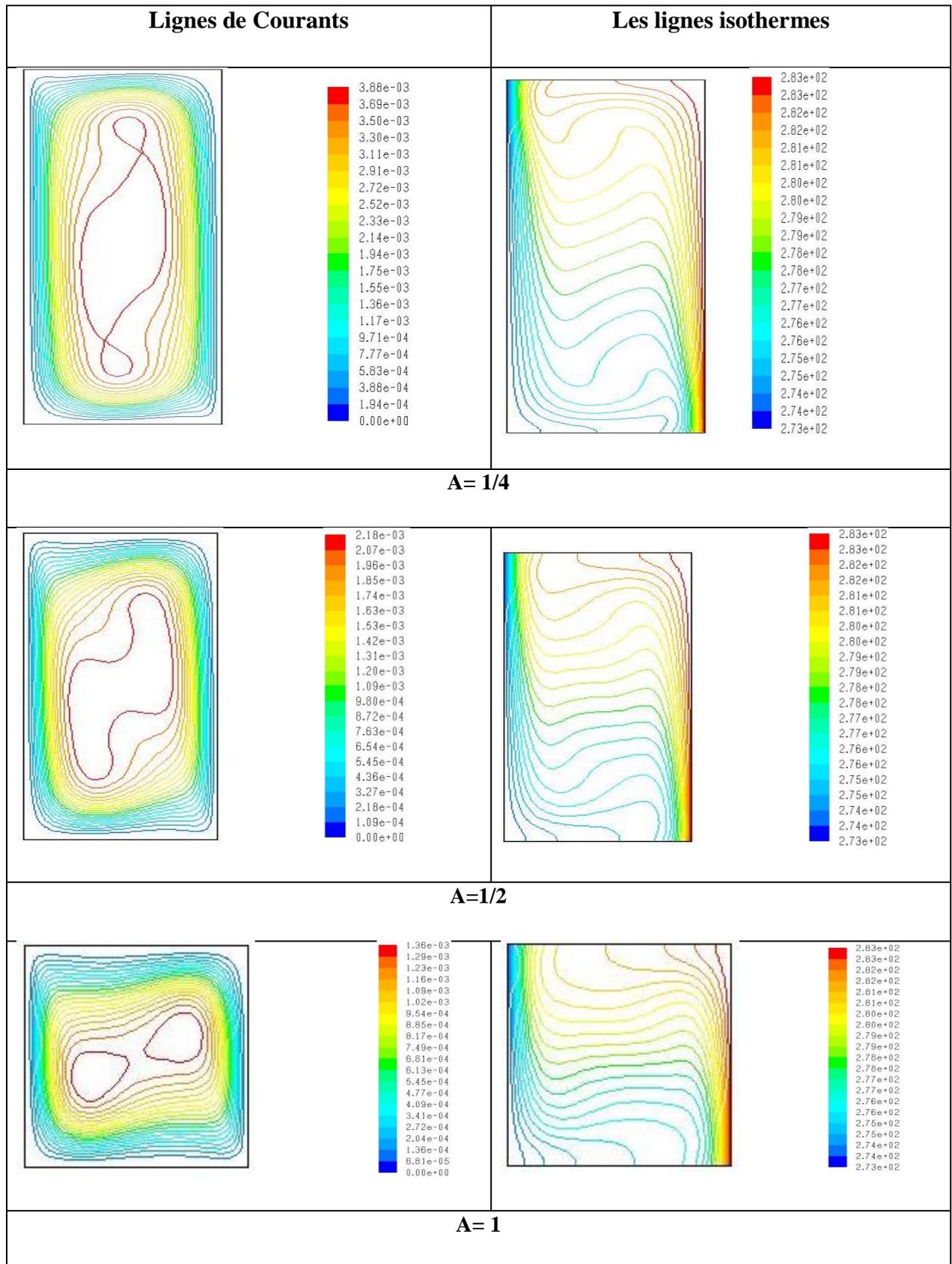
$A=1$ Cavité carrée.

$A=1/4$ et $1/2$ Cavité verticale, $A=2$ et 4 Cavité horizontale allongée.

5.5.2.1 Lignes de courants et isothermes :

Le **Figure 5.7** montre les lignes de courants et les lignes isothermes dans la cavité pour différents rapports d'aspect, on constate que :

- 1- la configuration de la cavité a une influence majeure sur l'écoulement et le transfert de chaleur. On aperçoit que l'écoulement suit la forme de la cavité, dans le cas de la cavité verticale on a une cellule verticale, et dans le cas horizontal on obtient une cellule horizontale tandis que dans le cas carrée on a une cellule carrée.
- 2- le cœur de la cavité subit un grand changement lorsqu'on change la configuration de la cavité.
- 3- les lignes de courants près des parois latérales sont très serrées pour toutes les formes, indiquant que l'écoulement est accéléré dans ces zones.
- 4- les isothermes ont presque la même allure pour toutes les cavités, ils sont serrés   coté des parois latérales là où le transfert est intéressant, et ils deviennent parallèles aux parois horizontales donnant un état de stratification thermique pour le fluide dans le cœur de la cavité.



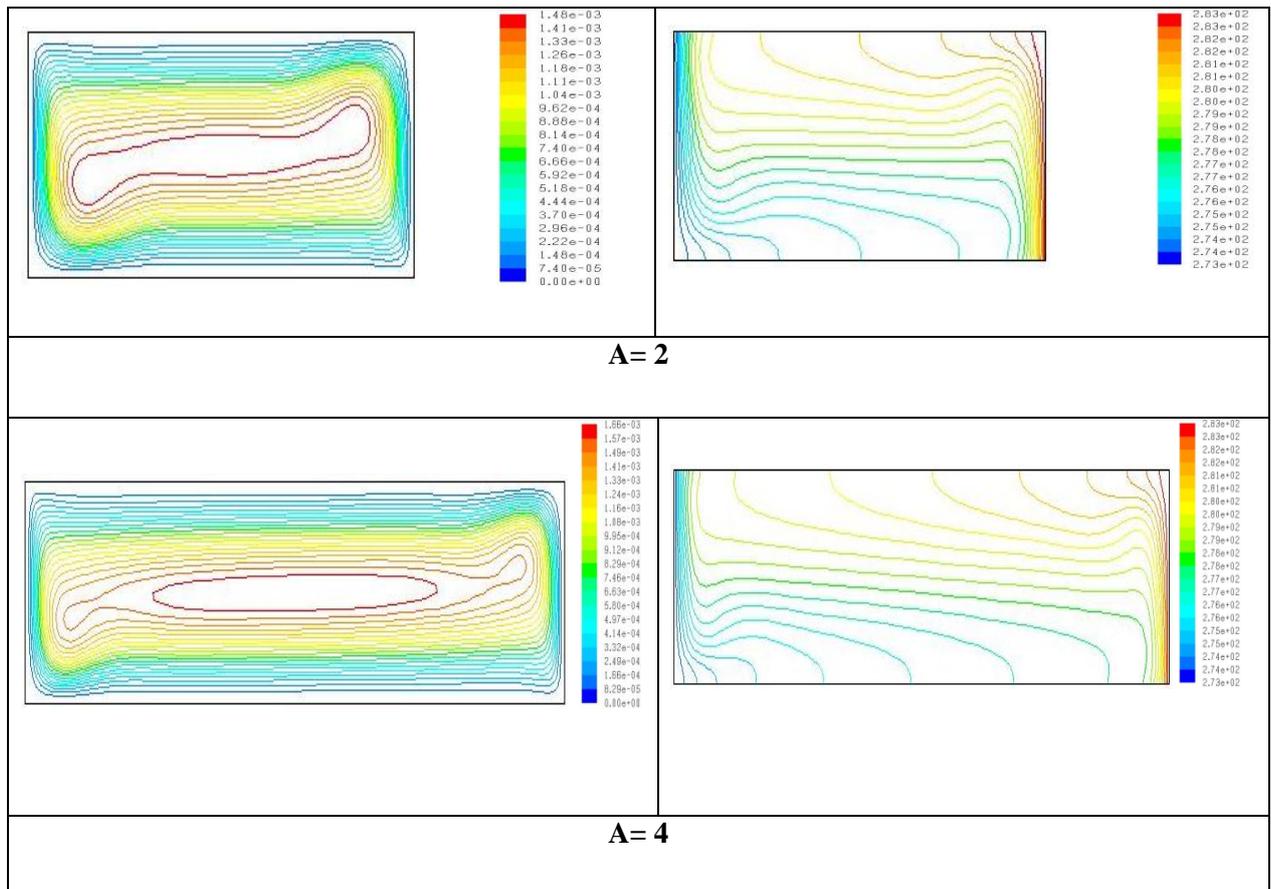


Figure 5.7 Les lignes de courants et les isothermes pour une cavité rectangulaire sans ondulation, pour des rapports d'aspects $A= 1/4, 1/2, 1, 2$ et $4, Ra=10^5$

5.5.2.2 Variation du nombre de Nusselt moyen :

La **Figure 5.8** représente le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du rapport d'aspect (A).

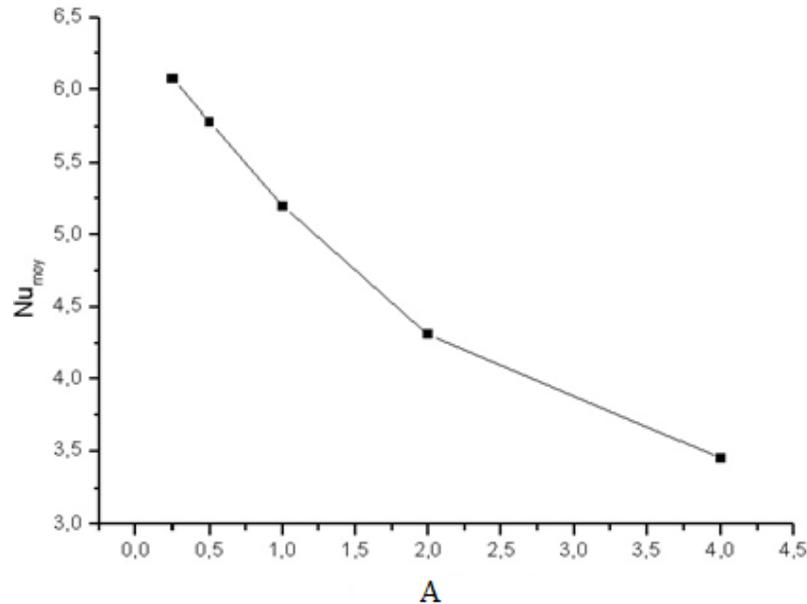


Figure 5.8 nombre de Nusselt moyen en fonction du rapport d'aspect, $Ra=10^5$.

On peut constater que :

- 1- La configuration verticale est plus efficace que la configuration horizontale, du point de vue transfert de chaleur, puisque les valeurs maximales du nombre de Nusselt moyen sont atteintes dans la configuration verticale.
- 2- Le rapport d'aspect ($A=1/4$) de la cavité, correspond à la valeur maximale de Nusselt moyen sur la paroi chaude.
- 3- Le nombre de Nusselt moyen est une fonction décroissante du rapport d'aspect de la cavité.

5.6 Convection naturelle dans une cavité rectangulaire avec paroi ondulée :

5.6.1 Influence du nombre de Rayleigh :

Le paramètre principal qui gouverne l'écoulement convectif est le nombre de Rayleigh qui est le rapport entre les forces de flottabilité (poussée d'Archimède) et les forces de dissipation (viscosité, diffusivité thermique). La **Figure 5.9** représente les lignes de courant et les isothermes pour différents nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^6 , dans une cavité rectangulaire ($A=4$) à paroi verticale ondulée ($Amp=0.05$) avec une seule ondulation.

5.6.1.1 Isothermes et lignes de courant :

- 1- l'écoulement est monocellulaire, représenté par une grande cellule de forme elliptique, on peut l'expliquer en suivant la trajectoire d'une particule fluide. La particule fluide s'échauffe près de la paroi chaude et sa densité diminue (sera légère) et elle remonte à cause de la force d'Archimède (flottabilité) puis sa trajectoire sera modifiée par la présence de la paroi horizontale supérieure. En se rapprochant de la paroi froide la particule perd sa chaleur (son énergie cinétique) et se refroidit (s'alourdit) et redescend le long de la paroi froide avec une trajectoire qui sera encore modifiée par la présence de la paroi horizontale inférieure. Le long de cette dernière, la particule fluide s'échauffe en se rapprochant de la paroi chaude, c'est ainsi qu'une cellule de circulation est créée.
- 2- Les lignes de courant sont très serrées près des parois verticales et sont affectées par la forme de la paroi ondulée. Cela mène à une accélération du fluide dans ces zones. L'accélération du fluide peut être expliquée par le débit entre deux lignes de courant successives, dans le cas de l'écoulement incompressible le débit entre deux lignes de courant est quantifié, lorsque la distance entre deux lignes de courants successives est très petite, la vitesse sera très grande.
- 3- Pour des nombre de Rayleigh $Ra=10^3$ les lignes isothermes sont des courbes parallèles aux parois verticales, on a un gradient de température entre la paroi chaude et la paroi froide, l'écoulement est très lent et légèrement affecté par la paroi ondulée et les transferts de chaleur se font par pseudo conduction. En augmentant le nombre de Rayleigh $Ra=10^4$ les lignes isothermes subissent une distorsion est suivent le sens de l'écoulement, et le transfert de chaleur deviens convectif. A $Ra=10^5$ et $Ra=10^6$ les isothermes sont très serrées près des parois verticales et se déforment jusqu'à se

qu'elles deviennent parallèle aux parois horizontale et perpendiculaire, à la force de gravité dans le cœur de la cavité en donnant une stratification du fluide dans cette zone, les lignes de courants sont serrées près des parois latérales indiquant que l'écoulement est accéléré dans ces zones.

- 4- Dans le voisinage de la paroi chaude et froide l'épaisseur de la couche limite thermique augmente dans la direction de l'écoulement, et se rétrécit lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh.

5.6.1.2 Variation du nombre de Nusselt local:

La **Figure 5.10** montre la variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour différents nombre de Rayleigh. On constate que :

- 1- Le transfert de chaleur se fait principalement par conduction pour $Ra=10^3$ du fait que le nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude est proche de zéro, sachant que le Nu représente le rapport entre le transfert thermique par convection et le transfert par conduction.
- 2- En augmentant le nombre de Rayleigh, le transfert thermique par convection devient dominant et par conséquent le nombre de Nusselt atteint des valeurs maximales pour $Ra=10^6$.

5.6.1.3 Variation du nombre de Nusselt moyen :

De la **Figure 5.11** on constate que :

- 1- le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude est une fonction croissante du nombre de Rayleigh, en augmentant le nombre de Rayleigh le transfert de chaleur à travers la paroi chaude augmente.
- 2- L'écart entre les nombre de Nusselt moyen sur la paroi plane et la paroi ondulée augment avec le nombre de Rayleigh, la paroi plane un transfert plus grand que la paroi ondulée.
- 3- Malgré que la surface d'échange de la paroi chaude augmente par rapport au cas de la paroi plan, les valeurs de Nusselt moyen pour différents nombre de Rayleigh diminuent en comparant avec le cas de la cavité rectangulaire sans ondulation. cela est du au fait que l'ondulation bloque le mouvement du fluide est affaibli le vortex primaire.

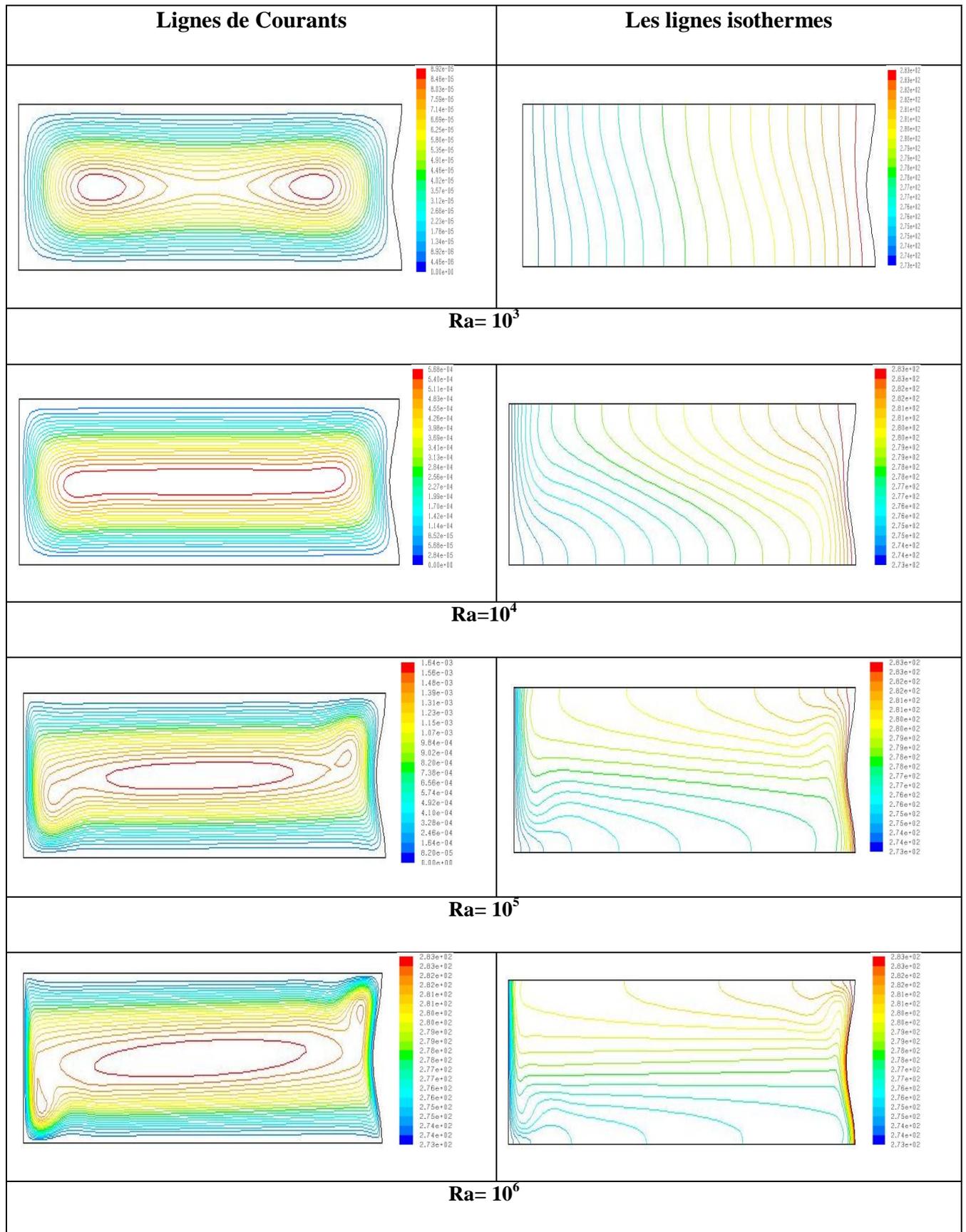


Figure 5.9 Isothermes et lignes de courants pour $Ra= 10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 , $A=4$ et $Amp=0.05$, $n=1$.

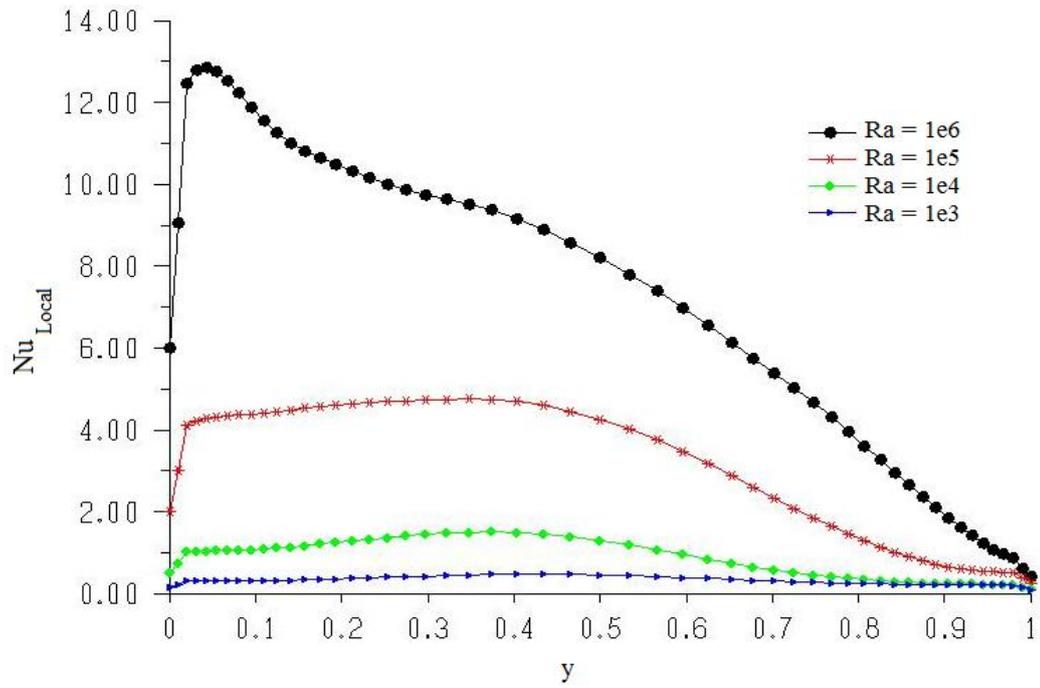


Figure 5.10 : Nombre de Nusselt locale sur la paroi chaude pour différents nombre de Rayleigh, $A=4$, $Amp=0.05$ et $n=1$.

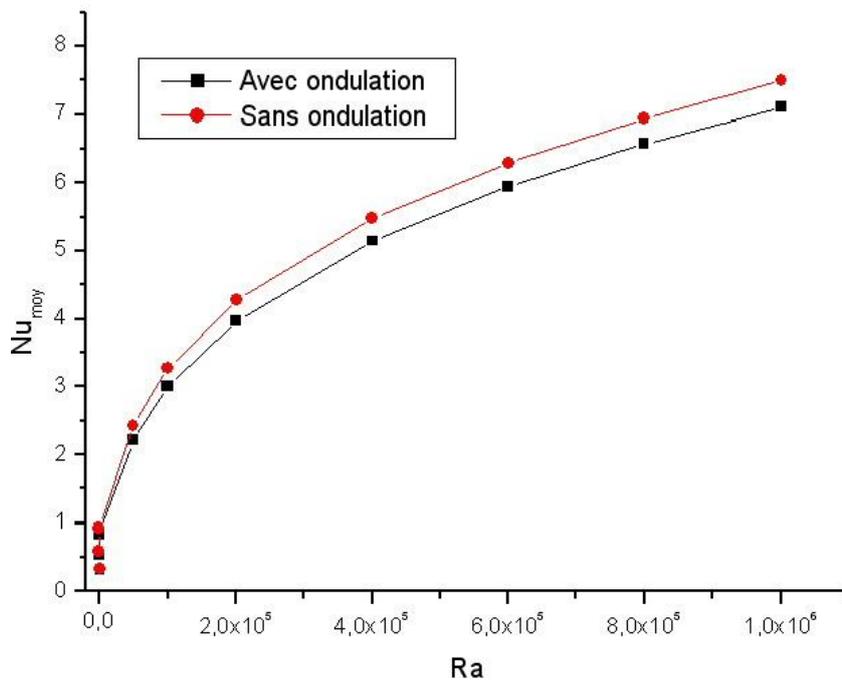


Figure 5.11: Nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction du nombre de Rayleigh, $A=4$, $Amp=0.05$ et $n=1$.

5.6.2 Influence du rapport d'aspect :

Pour l'étude de l'influence du rapport d'aspect, on considère $Ra=10^5$, $Pr=0.71$ et une ondulation avec l'amplitude $Amp= 0.05$ et ce pour les différents rapports d'aspect suivantes :

$A=1$ Cavité carrée.

$A=1/4$ et $1/2$ Cavité verticale, $A= 2$ et 4 Cavité horizontal allongée.

5.6.2.1 Isothermes et lignes de courant :

La **figure 5.12** montre que, le changement du rapport d'aspect affect l'écoulement et le transfert de chaleur par convection dans la cavité, ainsi que le changement de la forme de la paroi chaude. On constat que :

1 - La région du cœur de la cavité varie en fonction du rapport d'aspect, et elle est affectée par l'ondulation de la paroi. Notant que la région du cœur a changé par rapport au cas de la paroi plane.

2- Les lignes de courant sont serrées au niveau du sommet de l'ondulation.

3 - le champ des lignes isothermes n'a pas changée par rapport au cas de la paroi plane.

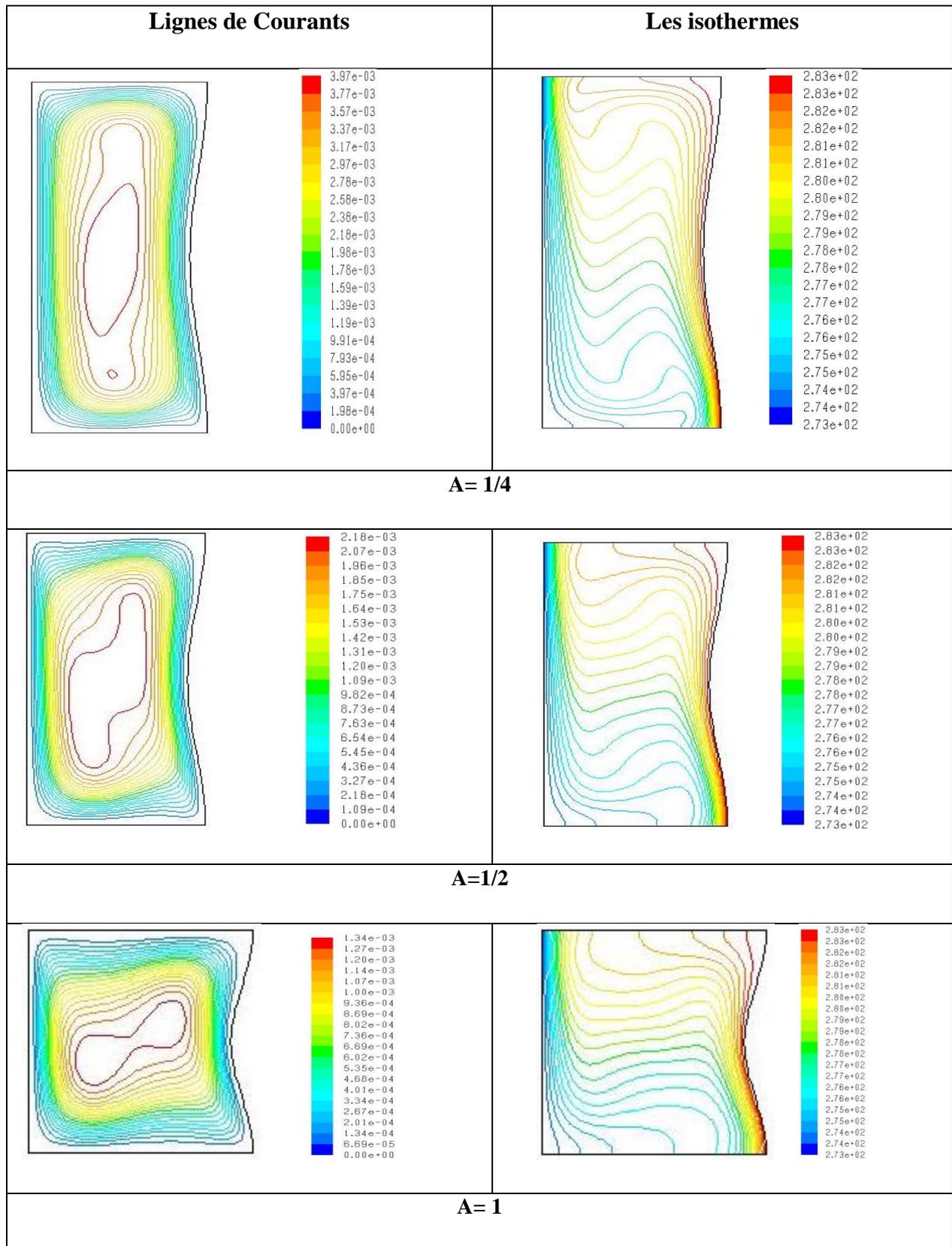
5.6.2.2 Variation du nombre de Nusselt moyen:

La **figure 5.13** représente les nombres de Nusselt moyens sur la paroi chaude en fonction du rapport d'aspect (paroi plane et paroi ondulée). On constate que :

1- La meilleure configuration qui assure un bon transfert de chaleur, est la cavité verticale ($A=1/4$).

2- Le nombre de Nusselt moyen est une fonction décroissante du rapport d'aspect de la cavité. Plus en augmente le rapport d'aspect le transfert de chaleur diminue.

3- Les valeurs du nombre de Nusselt moyen diminuent par rapport aux valeurs obtenues pour le cas de la paroi chaude plane.



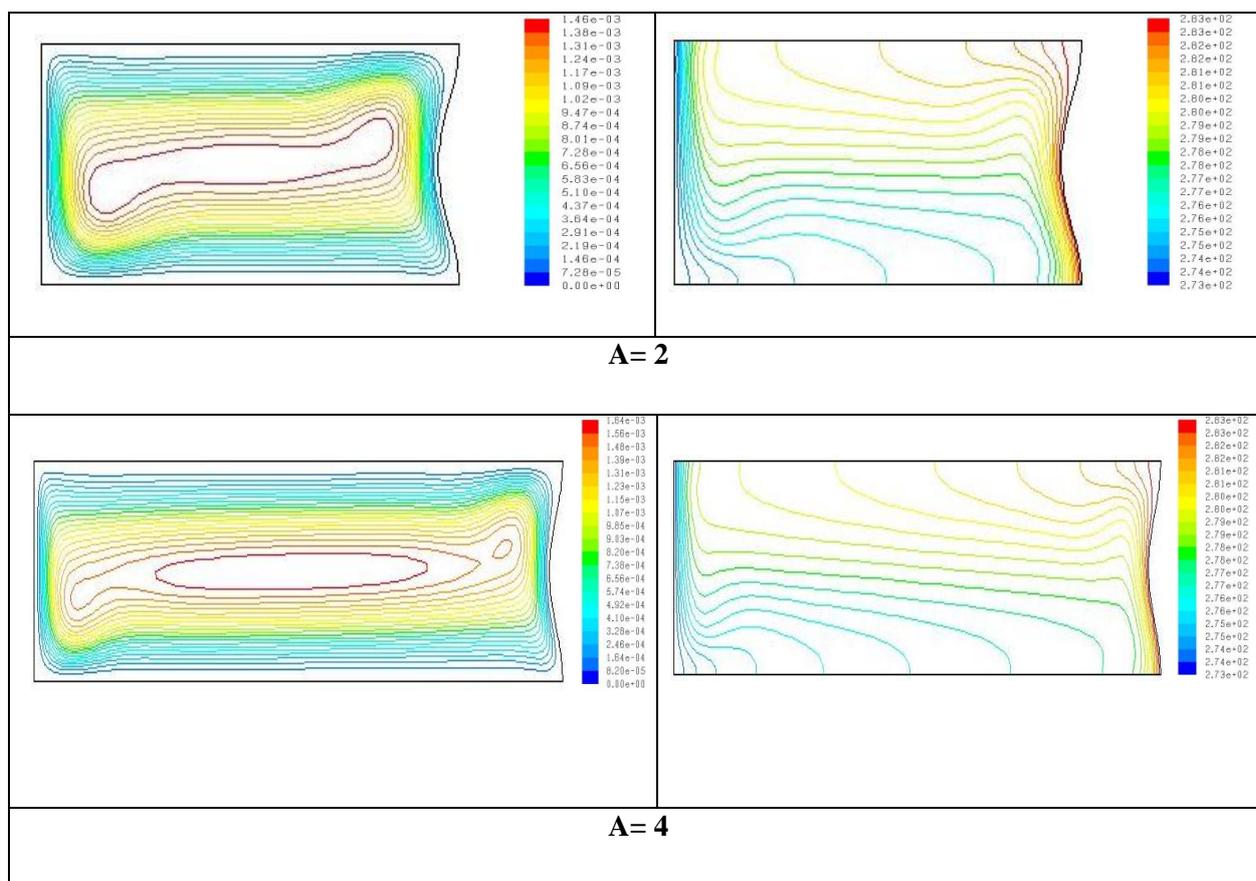


Figure 5.12 Les lignes de courants et les isothermes pour une cavité rectangulaire ondulée, pour des rapports d'aspects $A=1/4, 1/2, 1, 2$ et $4, Ra=10^5, Amp=0.05$ et $n=1$.

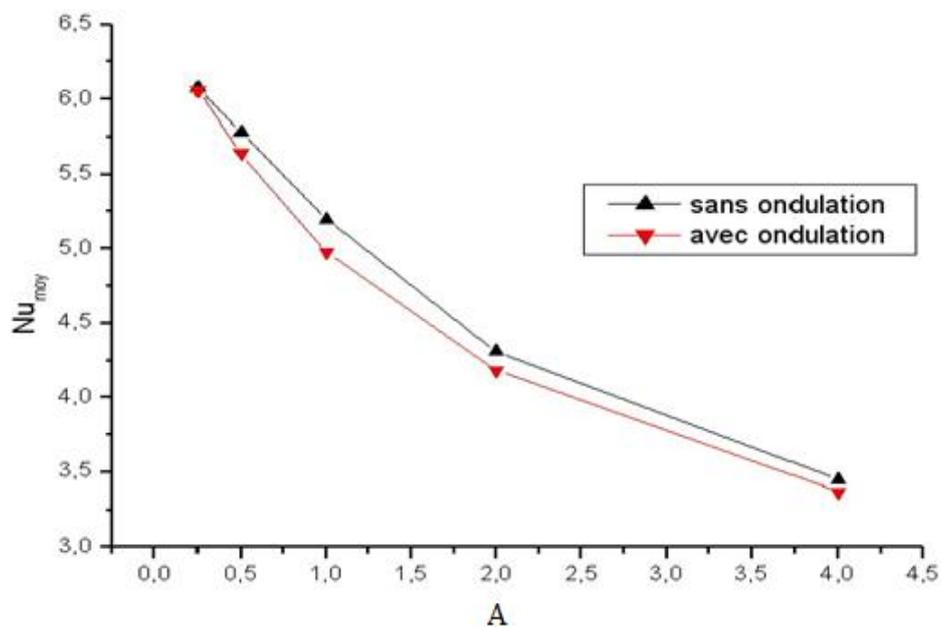


Figure 5.13: Nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude pour différents rapports d'aspect (A) dans une cavité rectangulaire avec et sans ondulation, $Ra=10^5$ et $Amp=0.05$.

5.6.3 Influence de l'amplitude de l'ondulation :

La **Figure 5.14** représente les lignes de courants et les isothermes dans une cavité rectangulaire avec $Ra=10^5$, $A=4$ et une ondulation de la paroi chaude avec différents amplitudes $Amp=0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20$ et 0.25 .

5.6.3.1 Isothermes et lignes de courants :

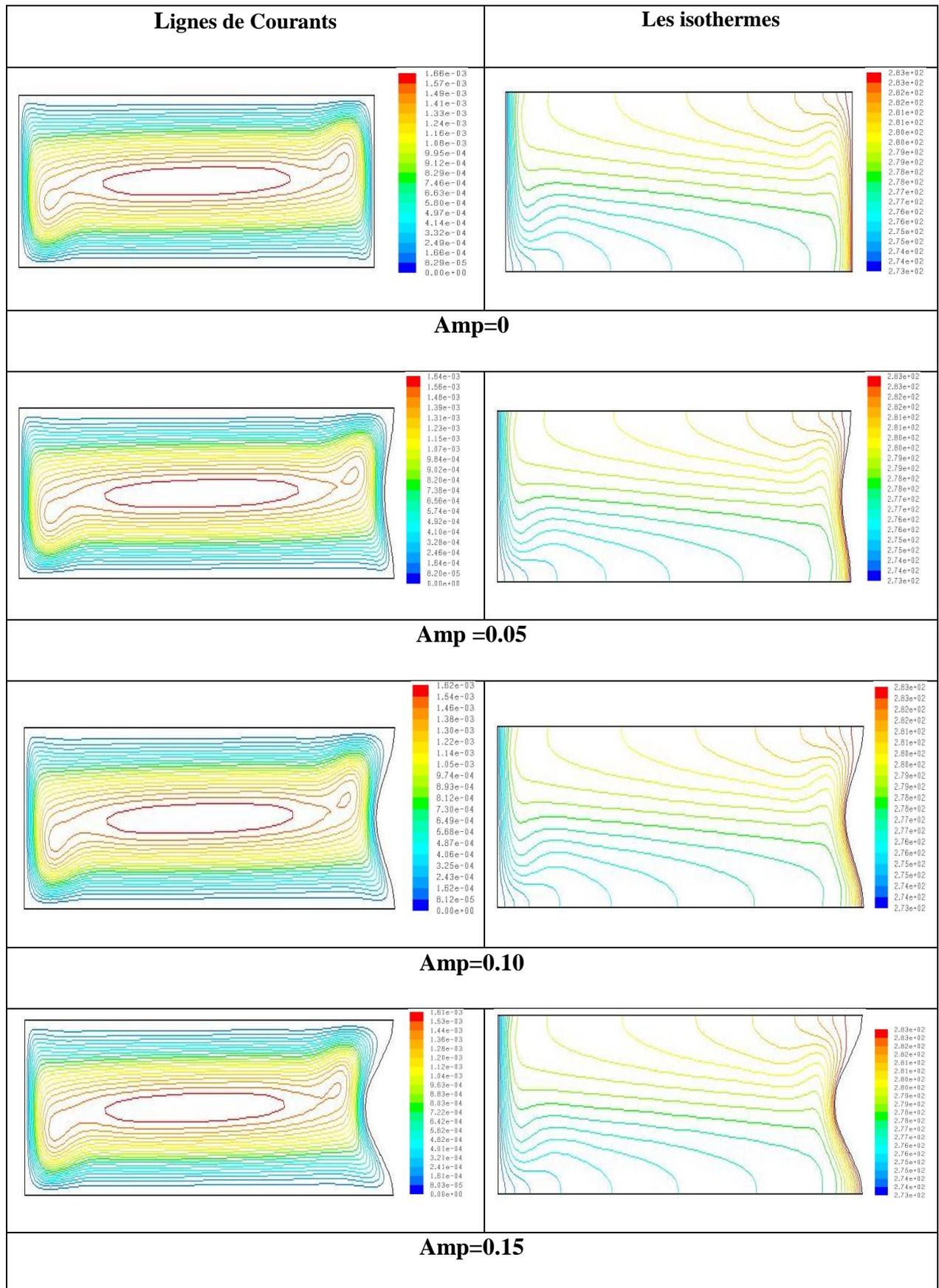
On constate que :

- 1- Plus on augmente l'amplitude de la paroi chaude ondulée, plus les lignes de courant aux extrémités s'éloignent de la paroi. L'amplitude de l'ondulation fait pousser le fluide loin de la paroi.
- 2- en augmentant l'amplitude de l'ondulation, les lignes de courant seront très serrées au sommet de l'ondulation, mènent à une accélération du fluide dans cette zone.
- 3- L'épaisseur de la couche limite thermique augment dans la direction de l'écoulement ce résultat est en accord avec les résultats Adjlout et al [8] et Sabeur et al [9], et plus en augmentant l'amplitude l'épaisseur de la couche limite sera grande dans la partie supérieure de la paroi.

5.6.3.2 Variation du nombre de Nusselt locale:

La **Figure 5.15** montre la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude de la cavité pour différentes amplitude d'ondulation, on constate que :

- 1- Pour chaque amplitude les valeurs de Nusselt locale augmentent dans le sens de y jusqu'à des valeurs maximales puis elles diminuent vers des valeurs proches de zéro à $y=1$ (sommet de la paroi).
- 2- De $Y=0$ à $Y\approx 0.45$ et de $Y\approx 0.65$ à $Y=1$, plus en augmentant l'amplitude les valeurs de Nusselt locale sont plus petites pour les mêmes valeurs de Y . Pour $Y\approx 0.45$ à $Y\approx 0.65$ les graphes seront inverser et les grandes valeurs du nombre de Nusselt local correspondent aux valeurs élevées d'amplitudes.



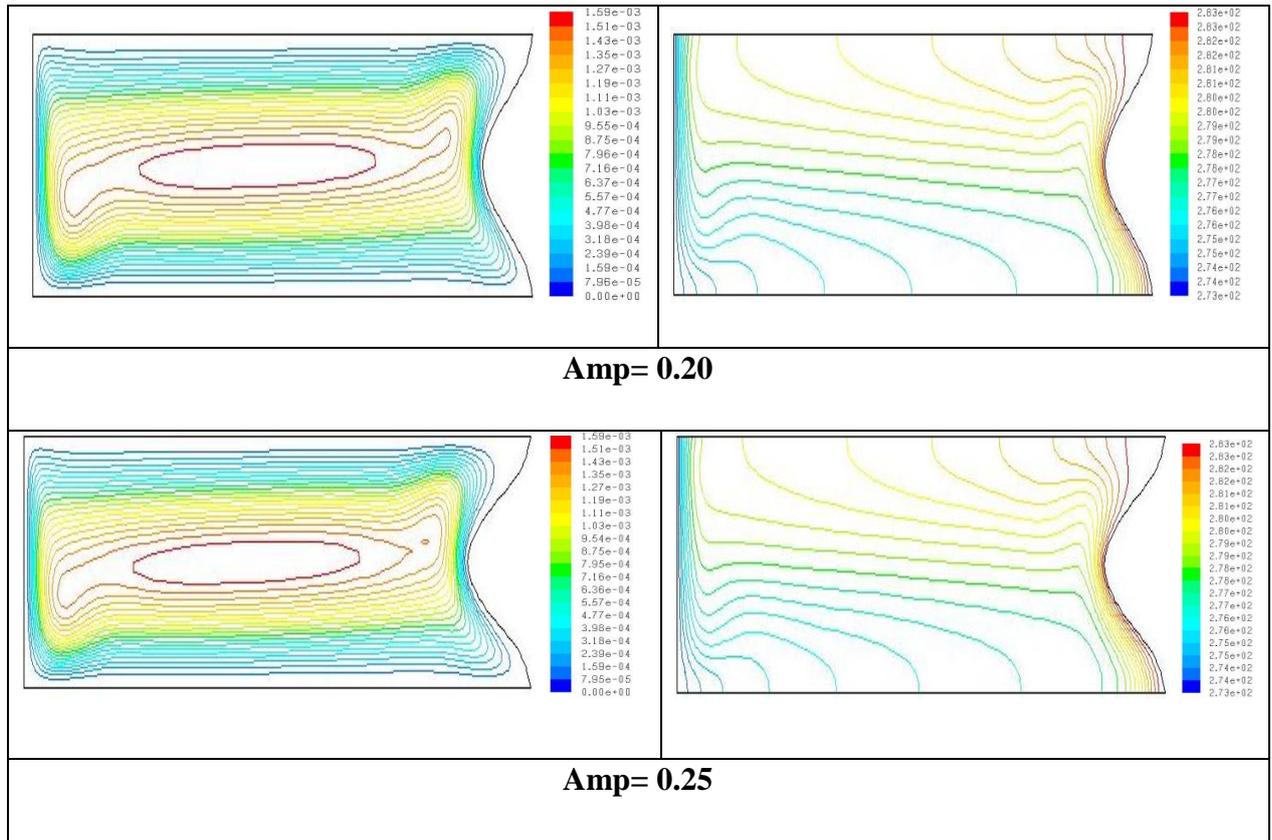


Figure 5.14 Les lignes de courants et les isothermes pour une cavité rectangulaire, $Ra=10^5$, $A=4$ et $Amp= 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25$ et $n=1$.

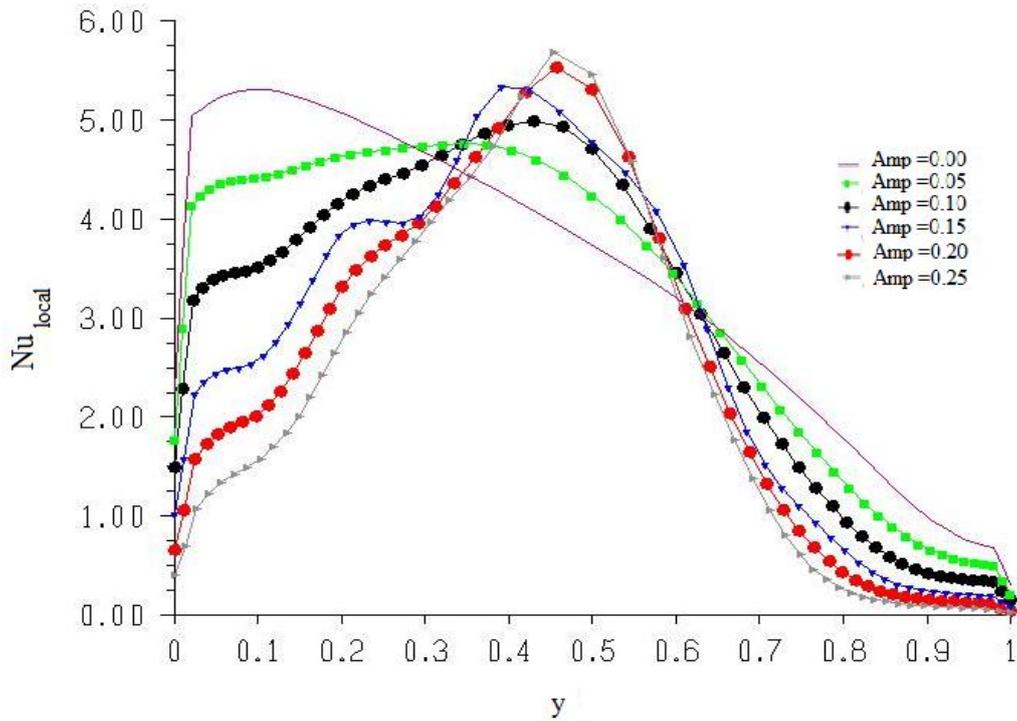


Figure 5.15 : Nombre de Nusselt locale sur la paroi chaude pour différentes amplitudes, $Ra=10^5$, $A=4$ et $n=1$.

5.6.3.3 Variation du nombre de Nusselt moyen :

La **Figure 5.16** montre la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude ondulée en fonction de l'amplitude de l'ondulation, on constate que :

- 1- Les nombres de Nusselt moyen diminuent en augmentant l'amplitude de l'ondulation, et pour la même valeur d'amplitude les valeurs de Nusselt moyen augmentent en fonction de Rayleigh.
- 2- La présence de l'ondulation au sein de la cavité fait bloquer l'écoulement est réduit le transfert de chaleur. Plus l'amplitude est grande plus son effet sur l'écoulement et le transfert de chaleur est grand.
- 3- la cavité sans ondulation assure un transfert de chaleur plus élevée par rapport à la cavité avec ondulation.
- 4- l'augmentation du nombre de Rayleigh mène à un effet de l'amplitude très grand, à $Ra=10^6$ la diminution de Nusselt moyen en fonction de l'amplitude est très claire par rapport au cas de $Ra=10^3$.

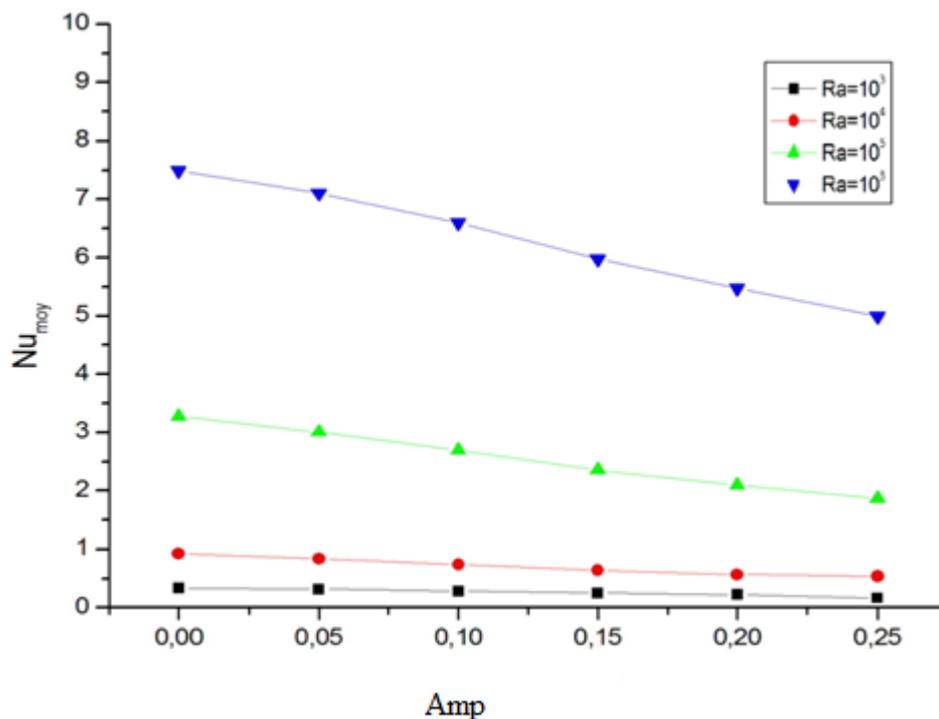


Figure 5.16 : Nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude en fonction de l'amplitude de l'ondulation, $A=4$, $n=1$ et $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 .

5.6.4 Influence de la fréquence de l'ondulation (nombre d'ondulation) :

La **Figure 5.17** montre les lignes de courant et les isothermes dans une cavité rectangulaire à paroi chaude ondulée, on considère une deux trois et quatre ondulation avec $Ra=10^5$, $A=4$ et $Amp=0.05$.

5.6.4.1 Isothermes et lignes de courant :

La **Figure 5.17** montre que :

- 1- L'écoulement dans la cavité est monocellulaire, il est clair que le nombre d'ondulation de la paroi a une influence sur la forme géométrique de la cellule de l'écoulement, ainsi que sur la distribution des isothermes près de la paroi ondulée.
- 2- les lignes de courants et les isothermes convergent au niveau des crêtes et divergent au niveau des creux. Cela signifie que l'écoulement est accéléré au niveau des crêtes et par conséquent la convection est importante, mènent à des valeurs maximales du nombre de Nusselt locale. Au niveau des creux l'écoulement est décéléré, la convection est moins importantes menant à des valeurs minimales du nombre de Nusselt moyen.

5.6.4.2 Variation du nombre de Nusselt local :

La **Figure 5.18** représente les nombre de Nusselt local sur la paroi chaude en fonction du nombre d'ondulation sur cette dernière, pour une cavité rectangulaire ($A=4$), $Ra=10^5$ et $Amp=0.05$. On constate que :

- 1- Le nombre de Nusselt local est affecté par la géométrie de la paroi chaude, il atteint des valeurs maximales et minimales correspondant aux nombres d'ondulations pour chaque configuration. Les valeurs maximales se situent au niveau des crêtes et les valeurs minimales se situent au niveau des creux.
- 2- La valeur maximale de Nusselt local est obtenue pour la paroi à quatre ondulations.

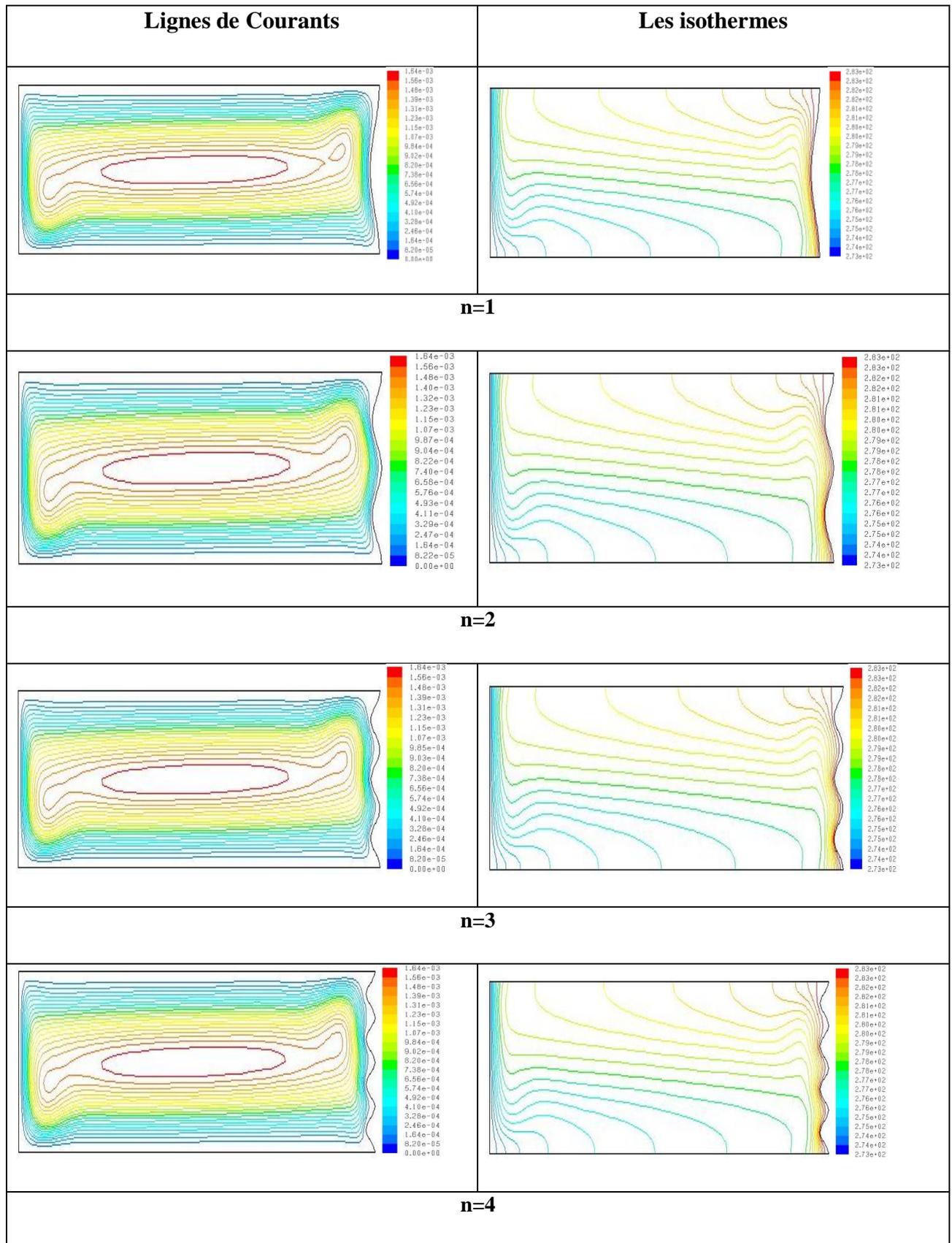


Figure 5.17 Les lignes de courants et les isothermes pour une cavité rectangulaire ondulée, $A=4$, $Ra=10^5$, $Amp=0.05$ et pour 1, 2, 3 et 4 ondulations.

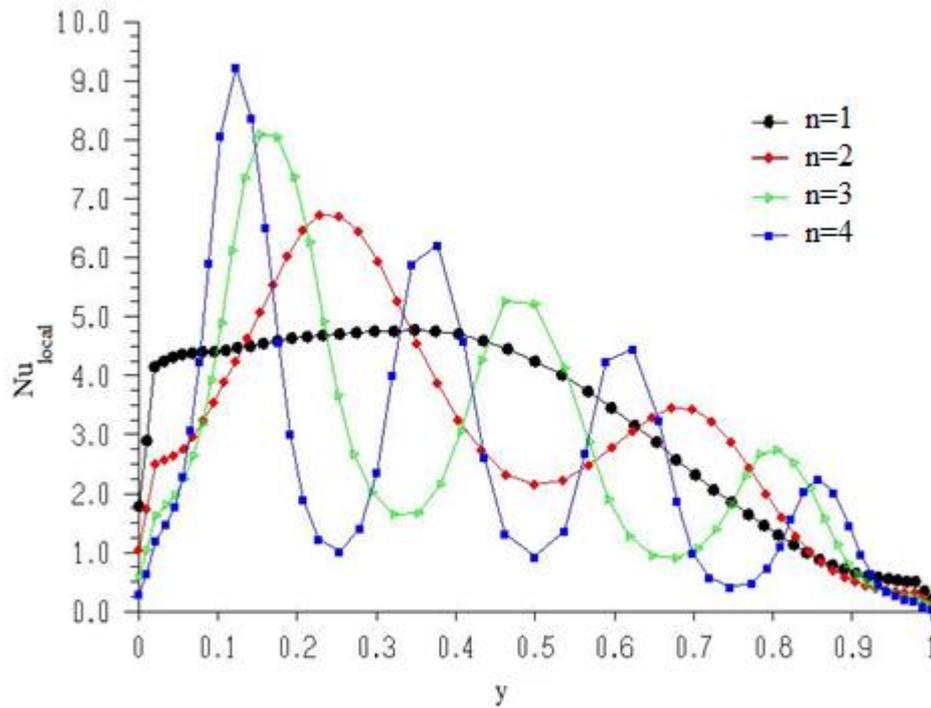


Figure 5.18: Nombre de Nusselt locale sur la paroi chaude pour différentes nombre d'ondulations, $A=4$, $Ra=10^5$ et $Amp=0.05$.

5.6.4.3 Variation du nombre de Nusselt moyen :

La **Figure 5.19** montre la variation du nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude ondulée en fonction du nombre d'ondulation n de cette paroi. On remarque que :

- 1- le nombre de Nusselt moyen est une fonction décroissante du nombre d'ondulation de la paroi chaude. Plus le nombre d'ondulations sur la paroi augment et plus le transfert de chaleur diminue.
- 2- La présence d'une ondulation sur la paroi fait bloquer l'écoulement, plus le nombre d'ondulation augment le fluide sera bloqué à plusieurs reprises.
- 3- la configuration avec une seule ondulation est la bonne, donnant la valeur maximale du nombre de Nusselt moyen.
- 4- En augmentant le nombre de Rayleigh, l'effet de l'augmentation du nombre d'ondulation sera important. Pour $Ra=10^6$ la diminution du nombre de Nusselt moyen

en fonction du nombre d'ondulation est importante, au contraire au cas de $Ra=10^3$ où la diminution est très petite.

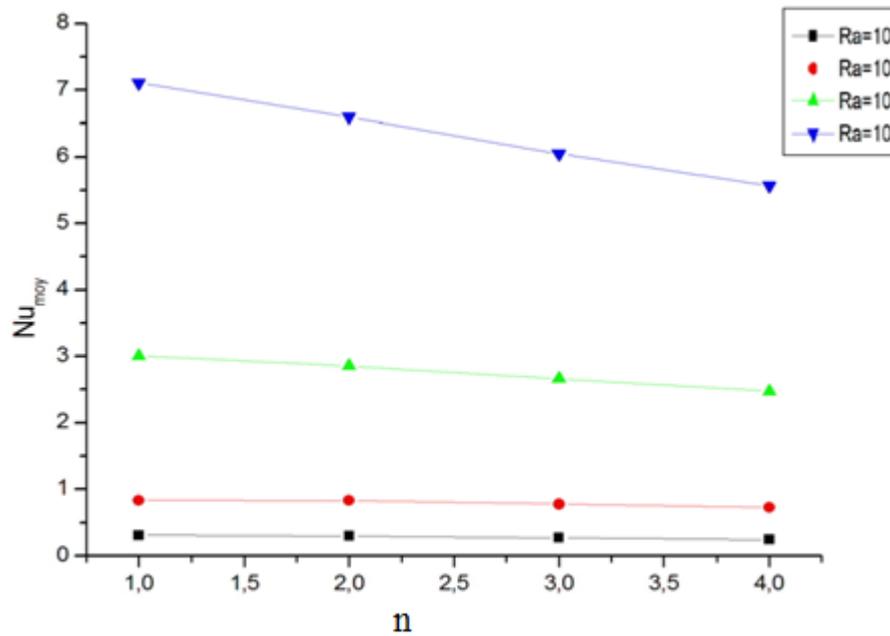


Figure 5.19 : Nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude pour différents nombres d'ondulation, $A=4$, $Amp=0.05$ et pour $Ra=10^3, 10^4, 10^5$ et 10^6 .

5.7 Conclusion :

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyses des divers résultats sont également présentes.

Conclusions Générales

Dans ce mémoire, on a mené une étude numérique du transfert de chaleur par convection naturelle laminaire et permanente dans une enceinte à paroi verticale ondulée. La configuration étudiée est une cavité rectangulaire avec une paroi verticale ondulée, et avec des conditions aux limites de type Dirichlet (température constante) pour les parois verticales et de type Newman (flux de chaleur nul) pour les parois horizontales.

En se basant sur les approximations de Boussinesq, on a développé le modèle mathématique décrivant notre problème. En suite on a introduit la méthode de « Génération du Maillage » pour pouvoir mailler notre domaine physique un peut compliquer, et réécrire notre modèle mathématique dans un domaine de calcul plus simple. On a mis également au point un modèle numérique basé sur la méthode des volumes finis avec un schéma hybride pour discrétiser les équations gouvernante. On a validé notre procédure de simulation numérique sous Fluent en comparant nos résultats avec ceux d'autres auteurs.

Par la suite une étude de la convection naturelle laminaire permanente dans une cavité rectangulaire avec et sans ondulation a été menée. L'étude a consisté à étudier l'influence de la variation du nombre de Rayleigh, du rapport d'aspect de la cavité, de l'amplitude de l'ondulation et du nombre d'ondulation de la paroi ondulée sur les champs de température et des lignes de courant ainsi que sur le nombre de Nusselt.

Pour montrer l'influence du nombre de Rayleigh sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection, on a fait varier le nombre de Rayleigh de 10^3 jusqu'à 10^6 , les résultats montrent que L'augmentation du nombre Rayleigh fait accélérer l'écoulement dans la cavité et le transfert de chaleur passe du mode conductif $Ra=10^3$ au mode convectif, et par conséquence le nombre de Nusselt augmente. La présence d'une ondulation dans la cavité fait diminuer le transfert de chaleur, et les valeurs de Nusselt moyen dans le cas de la cavité sans ondulation sont plus élevés que dans le cas de la cavité avec ondulation.

Par la suite. On a varié le rapport d'aspect de l'enceinte afin d'examiner son effet sur l'écoulement et le transfert de chaleur dans la cavité, et on a tracé le nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude (ondulée) en fonction du rapport d'aspect. Le résultat montre que la configuration de la cavité verticale donne un meilleur transfert de chaleur, et le nombre de Nusselt décroît lorsque le rapport d'aspect augmente.

On a varié le nombre d'ondulation de la paroi ondulée pour examiner son effet sur le transfert de chaleur, en fixant le nombre de Rayleigh, l'amplitude et le rapport d'aspect. Les

résultats obtenus montrent que le nombre de Nusselt moyen est disproportionnelle au nombre d'ondulation, et la tendance du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude a une allure ondulée, les maximums correspondent aux sommets des ondulations et les minimums correspondent aux creux.

On a examiné l'effet de l'amplitude de l'ondulation sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection naturelle. En augmentant l'amplitude de l'ondulation le transfert de chaleur diminue du fait de la diminution du nombre de Nusselt moyen. On a tracer la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'amplitude, cela montre que la configuration qui assure un meilleur transfert et la cavité à paroi plane (amplitude égal à zéro).

Dans le futur, il nous semble intéressant d'élaborer notre propre code de calcul, et de mener des études en trois dimensions et en régime turbulent et ceci dans le but d'avoir des résultats numériques qui reflètent mieux la réalité physique. Pour cela il faudra tenir en compte de la variation des propriétés physiques du fluide en fonction de la température lors de l'établissement du modèle mathématique. Il sera également possible d'étudier d'autre forme de paroi avec d'autres conditions aux limites.

References bibliographiques

- [1] Bejan, A. Analysis of melting by natural convection in an enclosure, *Int. J. Heat and fluid flow*, vol.10 no 3, p. 245-252. (1989)
- [2] G, K, Batchlor. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperature, *Q. Appl. Math*-12. 209-233. (1954)
- [3] B, Boehrer. Convection in a long cavity with differentially heated end walls. *Int, J, Heat Mass Transfer* 40. 4105-4114. (1997)
- [4] Flesselles, J. M., and Pigeonneau, F. Kinematic regimes of convection at high Prandtl number in a shallow cavity. *C. R. Mecanique* 332. 783-788. (2004)
- [5] O. Aydin, A. Unal, T. Ayhan, Natural convection in rectangular enclosure heated from one side and cooled from the ceiling, *Int. J. Heat and Mass transfer* 42 2345-2355. (1999)
- [6] J.L. Wright, H. Jin, K.G.T. Hollands, D. Naylor, Flow visualization of natural convection in a tall, air-filled vertical cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49 889-904. (2006)
- [7] L, S, Yao. Natural convection along a vertical wavy surface. *J. Heat transfers* .105. 456-468. (1983)
- [8] L. Adjlout, O. Imine, A. Azzi, M. Belkadi, Laminar natural convection in an inclined cavity with a wavy wall, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 45 2141-2152. (2002)
- [9] A. Sabeur-Bendehina, L. Adjlout, O. Imine, Effect of sinusoidal distribution of the temperature on laminar natural convection in wavy rectangular enclosures, *Journal of Applied Sciences* 6(3) 710-715,(2006)
- [10] Y. Varol, Hakan F. Oztop, A comparative numerical study on natural convection in inclined wavy and flat-plate solar collectors, *Building and environment* 43 1535-1544. (2008)
- [11] Y. Varol, Hakan F. Oztop, Free convection in a shallow wavy enclosure, *International communications in Heat and Mass Transfer* 33 764-771. (2006)
- [12] A. Dalal, M. K. Das, Laminar natural convection in an inclined complicated cavity with spatially variable wall temperature, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 48 2986-3007. (2005)

- [13] M. Rebhi, A. Belkacem, A. Touhami, Simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité à fond sinusoïdal, 12èmes Journées Internationales de Thermique 343-346. (2005)
- [14] J. F. Thompson, Z. U. A Warsi, C. Wayne Mastin, Numerical grid generation foundations and applications, Ed. Elsevier. (1985)
- [15] Klaus A. Hoffmann, Computational fluid dynamics for engineers, Ed. P.E.E.S, Austin, Texas. (1989)
- [16] C. A. J. Fletcher, « Computational techniques for fluid dynamics 2 », Ed. Springer. (1988)
- [17] Suhas V. Patankar, « Numerical heat transfer and fluid flow », Ed. Taylor & Francis. (1980)
- [18] B. Olivier, F. Thomas, G. Erwin, M. Sandrine, R. Azdine, Etude de la convection naturelle dans une cavité carrée en 2D et 3D sous Fluent et Gambit.
- [19] De Vahl Davis, Natural convection of air in a square cavity ; a benchmark numerical solution, Int J for Numerical methods in fluids, vol. 3, pp. 249-264, (1983)

Numerical simulation of natural convection in an enclosure with irregular vertical wall

Summary:

In this paper, a numerical study of heat transfer by laminar natural convection in an enclosure with a vertical wavy wall has been completed. The configuration is a rectangular cavity with a wavy vertical wall and the other is plane, the boundary conditions used are Dirichlet for the vertical walls and the Newman for the horizontal walls, the fluid used is air.

The mathematical model describing our problem has been developed based on the Boussinesq approximations. In the following we introduced the concept of " Mesh Generation " to be able to mesh our physical domain, and rewrite our mathematical model in a simpler computational domain. It has also developed a numerical model based on the finite volume method with a hybrid scheme to discretize the governing equations.

The numerical simulation of this problem has been made in the computer code Fluent. First, convection in a rectangular cavity without undulation for different Rayleigh numbers and for different aspect ratio was studied to get an idea about the shape of the flow and heat transfer rate. In following study was conducted taking into consideration the effect of Rayleigh number, aspect ratio, the amplitude of the ondulation and the number of ondulations on the flow and heat transfer convection in a rectangular cavity with vericla ondulated wall.

The numerical results were represented as streamlines, temperature fields, local Nusselt number and average Nusselt number on hot wall. The results show that flow and heat transfer is affected by the presence of the hot wall undulation. The trend of local Nusselt number is wavy, and the mean Nusselt number decreases comparing to the case of the rectangular cavity with a flat wall. Increasing the exchange surface by the increase of the amplitude of undulation or number of undulation on the hot wall, the heat transfer through the latter decreases.

Keywords: Natural convection, finite volume method, mesh generation, flow in cavities, Fluent.

Simulation numérique de la convection naturelle dans une enceinte à paroi verticale irrégulière

Résumé :

Dans ce mémoire, une étude numérique du transfert de chaleur par convection naturelle laminaire et permanente dans une enceinte à paroi verticale ondulée a été menée. La configuration étudiée est une cavité rectangulaire avec une paroi verticale ondulée et l'autre plane, les conditions aux limites utilisées sont de type Dirichlet pour les parois verticales et de type Newman pour les parois horizontales, le fluide utilisé est l'air.

Le modèle mathématique décrivant notre problème a été développé en se basant sur les approximations de Boussinesq.

La simulation numérique de ce problème a été faite sous le code de calcul Fluent. En premier lieu, la convection naturelle dans une cavité rectangulaire sans ondulation pour différents nombres de Rayleigh et pour différents rapport d'aspect a été étudiée, afin de prendre une idée sur l'allure de l'écoulement et le taux du transfert de chaleur. En suit, l'étude a été menée en prenant en considération l'effet du nombre de Rayleigh, du rapport d'aspect, de l'amplitude de l'ondulation et du nombre d'ondulation sur l'écoulement et le transfert de chaleur par convection dans une cavité rectangulaire à paroi verticale ondulée.

Les résultats numériques obtenus, ont été représentés sous forme de lignes de courants, champs de température, nombre de Nusselt local et nombre de Nusselt moyen sur la paroi chaude. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement et le transfert de chaleur est affecté par la présence de la paroi chaude ondulée. Le nombre de Nusselt local a une tendance ondulée, et le nombre de Nusselt moyen diminue par rapport au cas de la cavité rectangulaire à paroi plane. En augmentant la surface d'échange par l'augmentation du nombre d'ondulation ou l'amplitude de l'ondulation sur la paroi chaude, le transfert de chaleur à travers cette dernière diminue.

Mots clés : *Convection naturelle, Méthode des volumes finis, Génération de maillage, écoulement dans les cavités, Fluent.*