

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI-CONSTANTINE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

THESE

POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT D'ETAT EN PHYSIQUE

Spécialité

PHYSIQUE THEORIQUE

**Modèle de Grande Unification E_6 Géométrie Non
Commutative et Violation CP**

Présentée Par

MOUNIR BOUSSAHEL

Soutenue le 27/10/2011

Devant le jury

Président :

Pr. Benslama Achour : Prof. Univ. Mentouri Constantine

Rapporteur :

Pr. Mebarki Noureddine : Prof. Univ. Mentouri Constantine

Examineurs :

Dr. Aissaoui Habib : M.C. Univ. Mentouri Constantine

Dr. Bouayed Noureddine : M.C. Univ. Saad Dahleb Blida

Dr. Zaim Sliman : M.C. Univ. Hadj Lakhdar Batna

Dr. Azeddine Boudine : M.C. Univ. Oum el Bouaghi

Dédicace

*A ma petite et grande famille, ma femme de m'avoir toujours supporté,
à Aymen, Ilyes et Ayoub.*

A mes adorables parents.

Remerciement

Je tiens à remercier toute personne qui m'a offert de son temps de loin ou de près. Je tiens à citer monsieur N.Mebarki de sa confiance qui m'a accompagné le long de toutes ces longues années, je tiens à remercier aussi monsieur A.Benslama d'avoir voulu présider le jury de cette thèse, sans oublier les autres membres de jury.

Je n'oublierai pas aussi mes collègues de l'université de Constantine ou celle de M'sila.

Table des matières

1 Géométrie non Commutative Modèle Standard et au delà du Modèle Standard	1
1.1 Introduction	1
1.2 Interprétation Géométrique du Modèle Standard	4
1.3 Axiomes de la Géométrie Non Commutative	10
1.4 Modèle Standard en Géométrie Non Commutative	16
1.5 Exemple d'Extension du Modèle Standard par un Boson de Jauge de Plus (Z') en GNC.	24
1.5.1 Contraintes Géométriques :	26
2 Géométrie Non Associative et Modèle Standard	31
2.1 Introduction	31
2.2 Contenu de la Géométrie Non Associative	32
2.3 Le Modèle Standard en Géométrie Non Associative	37
3 Modèle Fermionique $SU(3) \otimes U(1)$ en Géométrie Non Associative	71

3.1	Introduction	71
3.2	Construction	74
3.3	calcul du Lagrangien :	95
3.3.1	Action Bosonique	100
3.3.2	Action Fermionique	102
3.4	Masses, Couplages et Angles de Mixages	105
3.4.1	Champs de Jauge Vectoriels	108
3.5	Couplage $V - A$ Fermions- Bosons de Jauge Neutres	121
4	Le Modèle de Grande Unification E_6, GNA, Susy et CP Violation	132
4.1	L' Algèbre E_6 Exceptionnelle et GNC	132
4.1.1	Définitions :	132
4.1.2	Termes de Masse avec Répartition des Fermions :	154
4.2	Le Modèle E_6 Supersymétrique et Violation CP	169
4.2.1	Introduction	169
4.2.2	Modèle de Grande Unification E_6	170
4.2.3	E_6 Supersymétrique et Sources de Violation CP	176
5	Conclusion	180

Résumé

Le modèle classique basé sur le groupe de Lie $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ avec des quarks exotiques a été reformulé en un L-cycle dans le cadre du formalisme de la géométrie non-associative. Les N charges des particules fermioniques et leurs paramètres reliés aux contraintes sont des conséquences algébriques et ils sont déterminés d'une manière unique. Le nombre des particules scalaires est dicté par la non-associativité de la géométrie. Ce formalisme a permis de produire, l'angle de Weinberg w , les masses des bosons de jauge scalaires et neutres et aussi des angles de mixages ont été dérivés. En plus, de multiples expressions du couplage vectoriel et axial des quarks et des leptons avec des bosons de jauge neutres et des faibles limites pour les bosons de jauge lourds ont été obtenus. Indépendamment de ce qui vient d'être cité, de nouvelles sources de violation CP faibles du modèle de grande unification E_6 et E_6 SUSY ont été obtenues. En plus il est montré que le nombre des matrices de Cabibo- Kobayachi- Maskawa correspondant dépend de la brisure spontanée de la symétrie du groupe de jauge et/ ou de la super symétrie.

Chapitre 1

Géométrie non Commutative Modèle Standard et au delà du Modèle Standard

1.1 Introduction

L'une des grandes réalisations de la géométrie non commutative est la géométrisation du modèle standard [1, 2, 3], en fait en GNC le boson du Higgs subit un traitement du même ordre que les bosons W^\pm et Z^0 . Dans cette approche on peut ajouter à l'espace temps ordinaire des dimensions discrètes additionnelles. Si les bosons de jauge sont associés à l'espace-temps continu, le boson de Higgs résulte de la direction discrète après lui avoir associé une symétrie de jauge. Dans l'approche de Connes en GNC, Il est proposé une formule universelle associée à l'action en géométrie non commutative, qui est le triplet spectral. Il est basé sur le spectre de l'opérateur

de Dirac et il est géométriquement invariant. La nouvelle symétrie a pour principe l'automorphisme d'une algèbre A qui combine en même temps les difféomorphisme et les symétries internes. Appliqué à la géométrie, il définit le spectre du modèle standard et il donne une action qui unifie la gravitation avec le modèle standard à une très grande échelle de l'énergie. Seulement, les prescriptions de Connes sont compatibles seulement avec les représentations linéaires des groupes de matrices et qui imposent des contraintes très rigides aux modèles de jauge. Tout de même, il a été montré que [4, 5] les seules modèles qui peuvent être construit dans cette approche sont le modèle standard, et les modèles de Pati-Salam [6] et de Pati-Mohapatra [7, 8]. Maintenant si on prend en compte la condition de réalité du K -cycle [9], les deux derniers modèles seront exclus pour donner à la fin que le modèle standard comme un modèle unique compatible avec les prescriptions de Connes. Il est important de mentionner qu'il existe autres formulations de la GNC où il n'y a pas ce genre de restrictions [10, 11, 12, 13, 14]. Récemment, Wulkenhaar a proposé une modification à la géométrie non commutative où la géométrie différentielle est formulée en termes d'algèbre de Lie différentielle gradée contrairement aux algèbres associatives unitaires comme c'est le cas de l'approche de Connes [15, 16]. Son application à une série de modèles physiques a été un succès. Malgré que cette série figure hors du modèle standard [17], flipped $SU(5) \otimes U(1)$ [18], le modèle $SO(10)$ [19] et le modèle de jauge left-right [20] ect...

La propriété intéressante de l'approche de Wulkenhaar ou la géométrie non-associative (NAG) est l'utilisation d'une algèbre de Lie gradée et l'obtention de relations entre les masses des fermions et des bosons ce qui est sem-

blable au formalisme de Connes. D'autre part, le nombre de familles des fermions dans la nature et aussi les masses des fermions et les angles de mixages sont deux parties d'un puzzle en physique des particules moderne. Dans les dix dernières années, l'extension $3 - 3 - 1$ du modèle standard pour les interactions fortes et électrofaibles, basées sur le groupe de jauge local $SU_c(3) \otimes SU_L(3) \otimes U_X(1)$ ont été étudiés largement [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. Il découle une tentative intéressante pour expliquer la question des répliques des familles. En effet, pour cette extension l'une des meilleurs propriétés est que plusieurs modèles peuvent être construit dans son sein où l'annulation d'anomalie est réalisée par une interaction commune entre les familles [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. Dans une partie d'eux [21, 22, 23, 24], l'annulation d'anomalie impose l'introduction de quarks avec les charges électriques $-4/3$ et $5/3$. Seulement, quelques modèles basés sur la structure de jauge locale $3 - 3 - 1$ sont souhaitables pour décrire quelques propriétés des neutrinos, parce qu'ils incluent naturellement quelques ingrédients dont on a besoin pour expliquer masses et mixages [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

Notre but dans cette thèse, est d'élargir la liste des modèles physiques en GNC [17, 18, 19, 20] en reformulant le modèle $3 - 3 - 1$ dans le cadre de l'approche de Wulkenhaar de l'algèbre de Lie gradée et récupérer en output de cette prescription, les multiples relations de spectres de masses, angles de mixages et les $V - A$ couplages dans les faibles courants neutres pour les quarks et les leptons en plus on a pour but d'investir le groupe E_6 et préparer le terrain pour la construction de ce modèle dans le cadre de la géométrie non commutative qui est notre objectif dans l'immédiat.

Cette thèse est organisé de la sorte : dans le premier chapitre on donne une

présentation compacte et minimale de la géométrie non commutative mais qui est nécessaire pour avoir une idée plus au moins précise sur la construction du modèle standard en géométrie non commutative et une tentative d'élargir le modèle standard à un autre groupe plus large qui est le groupe $G = SU(2) \otimes U(1) \otimes U(1) \otimes SU(3)$. Dans le deuxième chapitre c'est la géométrie non associative qui sera présentée avec la construction du modèle standard en s'étalant un peu plus sur les détails du calcul. Le troisième chapitre représente l'essentiel du travail présenté dans cette thèse, où le modèle 3-3-1 a été construit dans le cadre de la GNA avec une étude qualitative et phénoménologique détaillée. Dans le quatrième et dernier chapitre nous présenterons en première partie une tentative de développement de l'opérateur du Dirac dans le but de pouvoir construire un modèle qui se base sur le groupe de Lie exceptionnel E_6 toujours dans le cadre de la géométrie non associative. Par contre dans la deuxième partie du quatrième chapitre on présentera le modèle de grande unification E_6 et E_6 super symétrique et étude des sources de violation CP dans le cadre de ce modèle. En fin on présentera notre conclusion.

1.2 Interprétation Géométrique du Modèle Standard

Le Modèle standard a été lentement élaboré à partir d'une multitude de découvertes expérimentales et théoriques, où la découverte de la forme vectorielle des courants faibles est très importante, l'hypothèse des bosons intermédiaires qui remplace l'interaction à quatre fermions de la théorie de

Fermi par une interaction renormalisable mais qui exige une masse considérable pour le boson de jauge où l'objectif historique était l'unification de l'interaction électromagnétique avec l'interaction faible. là il y avait une difficulté majeure, car un champ de jauge de type Yang-Mills non abélien est nécessairement de masse nulle . Et grâce à la découverte historique du mécanisme de Higgs qu'on a résolu ce problème, donc c'est grâce au phénomène de la brisure spontanée de la symétrie que les masses des bosons de jauge et des fermions sont engendrées et un nouveau champ appelé le Higgs est introduit.

En explicitant le lagrangien du modèle standard :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_y + \mathcal{L}_V \quad (1.1)$$

De (1.1) on voit que le Higgs apparaît dans trois des cinq termes.

\mathcal{L}_f est le terme cinétique des fermions :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = -\sum_f \left[\bar{\psi}_{fL} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig \frac{t_a}{2} w_{\mu a} + ig \frac{y_L}{2} B_\mu + ig \frac{\lambda_b}{2} V_{\mu b} \right) \psi_{fL} \right] \\ + \bar{\psi}_{fR} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig \frac{y_R}{2} B_\mu + ig \frac{\lambda_b}{2} V_{\mu b} \right) \psi_{fR} \end{aligned} \quad (1.2)$$

où y_L, y_R sont les hypercharges qui spécifient le couplage avec le champ de jauge B_μ et elles sont données de manière ad hoc par :

	e, μ, τ	ν_e, ν_μ, ν_τ	u, c, t	d, s, b
y_L	-1	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_R	$\frac{4}{3}$		$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$

desquelles on peut avoir les charges exactes pour toute famille de quarks et de leptons.

\mathcal{L}_G est le terme de jauge pure :

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{4} (G_{\mu\nu a} G_{\mu\nu}^a) + \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \frac{1}{4} (H_{\mu\nu b} H_{\mu\nu}^b) \quad (1.3)$$

où $G_{\mu\nu a}$ est le champ de force du champ de jauge $w_{\mu a}$ de $SU(2)$; $F_{\mu\nu}$ celui du champ de jauge B_μ de groupe $U(1)$ et $H_{\mu\nu b}$ celui du champ $V_{\mu b}$ de groupe $SU(3)$.

\mathcal{L}_φ est le terme cinétique des champs de Higgs :

$$\mathcal{L}_\varphi = - \left| \left(\partial_\mu + ig \frac{t_a}{2} w_{\mu a} + ig \frac{y_L}{2} B_\mu \right) \varphi \right|^2 \quad (1.4)$$

où $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ est un doublet de $SU(2)$ de champs scalaires complexes.

\mathcal{L}_Y est le couplage de Yukawa Higgs-fermions :

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{f, f'} [H_{f, f'} (\bar{\psi}_{fL} \cdot \varphi) \psi_{f'R} + H_{f, f'} \bar{\psi}_{f'R} (\varphi \cdot \psi_{fL})] \quad (1.5)$$

Et en fin \mathcal{L}_V qui représente l'auto interaction des bosons de Higgs :

$$\mathcal{L}_V = \mu^2 \varphi^+ \varphi - \frac{1}{2} \lambda (\varphi^+ \varphi)^2 \quad (1.6)$$

et qui est la base du mécanisme de Higgs (la brisure spontanée de la symétrie).

Parmi ces cinq termes du lagrangien, les deux premiers sont parfaitement géométriques, bien sur avec la critique faite sur le deuxième terme concernant les valeurs "ad hoc" des hypercharges, mais il n'en va pas du tout de même des trois derniers termes : $\mathcal{L}_\varphi, \mathcal{L}_Y, \mathcal{L}_V$ dans lesquels le champ de Higgs est impliqué. C'est la géométrie non commutative qui a résolu ce problème ce qui a pu donner une signification géométrique à ces trois termes.

Pour que le lagrangien \mathcal{L} du modèle standard devient celui de Maxwell-Dirac, il faut modifier la structure géométrique fine de l'espace temps.

La structure obtenu est déterminée d'une manière unique par le lagrangien standard et correspond à un espace qui n'est ni continu ni discret, mais qui est le produit d'un continu ordinaire de dimension quatre par un espace discret fini dans le cadre de la géométrie non commutative.

Le produit de deux espaces décrit par les modules (A_j, H_j, D_j) est donné par $A_1 \otimes A_2$ agissant dans l'espace de Hilbert $H_1 \otimes H_2$ avec pour opérateur D .

$$D = D_1 \times 1 + \gamma_1 \otimes D_2 \quad (1.7)$$

où la $\mathbb{Z}/2$ graduation γ_1 anticommute avec D_1 et commute avec A_1 .

Soit le simple exemple dans lequel la géométrie non commutative peut être faite sur un ensemble fini F . On prend l'espace F à deux points a et b . L'algèbre A associée sera alors l'algèbre des fonctions sur F , qui est caractérisée par $f(a)$ et $f(b) \in \mathbb{C}$. Le module de Fredholm (H, D) sur A est donnée par un espace de Hilbert H de dimension finie où on peut toujours diagonaliser l'action de A sous la forme :

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} f(a) & 0 \\ 0 & f(b) \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

et en utilisant une décomposition $H = H_a + H_b$ de H en somme directe de deux sous espaces. L'opérateur D prend la forme suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

où M est une matrice. D dans ce cas anticommute avec la $\mathbb{Z}/2$ graduation γ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Et la distance des points a et b dans l'espace géométrique F , qui est en fait une distance géodésique donnée par :

$$d(a, b) = \sup \{|f(a) - f(b)|; \|[D, f]\| \leq 1\} \quad (1.11)$$

et le commutateur $[D, f]$ vaut :

$$[D, f] = (f(b) - f(a)) \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ -M & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

ce qui permet de trouver l'égalité :

$$d(a, b) = 1/\lambda \quad (1.13)$$

λ est la plus grande valeur caractéristique de M .

Et l'espace des potentiels-vecteurs dans ce cas est facile à déterminer et un tel potentiel V est donné par :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\phi}M^* \\ \phi M & 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

où : $\phi \in \mathbb{C}$.

Et la courbure θ :

$$\theta = dV + V^2 \quad (1.15)$$

est donnée par :

$$\theta = - (\phi + \bar{\phi} + \phi\bar{\phi}) \begin{pmatrix} MM^* & 0 \\ 0 & MM^* \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

et l'action de Maxwell-Dirac donne :

$$2 (|\phi + 1|^2 - 1)^2 \text{tr} (M^* M) + \bar{\varphi} \begin{pmatrix} 0 & (1 + \bar{\phi}) M^* \\ (1 + \phi) M & 0 \end{pmatrix} \varphi \quad (1.17)$$

de la dernière équation on peut aisément distinguer que le premier terme, quantique a une ressemblance avec la self interaction quantique des champs de Higgs et le deuxième avec le couplage de Yukawa : Higgs→fermions et en effectuant le produit $(M_4 = \text{continu ordinaire}) \times (\text{espace fini à deux points } F)$ et que l'on calcul le lagrangien de Maxwell-Dirac on obtient les termes \mathcal{L}_V et \mathcal{L}_Y et aussi \mathcal{L}_φ ce qui est remarquable qui était en fait le point de départ sur le modèle standard.

1.3 Axiomes de la Géométrie Non Commutative

L'objet fondamental en géométrie non commutative est un triplet (A, H, D) , appelé triplet spectral.

Définition 1. Un triplet spectral est un triplet (A, H, D) formé d'une algèbre involutive A munie d'une représentation involutive π sur un espace de Hilbert H . D est un opérateur non borné et hermitien à résolvante compacte et tel que $[D, \pi(x)]$ soit borné pour tout $x \in A$.

Remarque. Dans tout ce qui suit, l'algèbre A n'intervient que par sa représentation en tant qu'opérateurs sur H , si cette représentation n'est pas injective, son noyau \mathfrak{S} est un idéal bilatère et l'algèbre A/\mathfrak{S} a une représentation fidèle.

Définition 2. Un triplet spectral est pair s'il existe une involution hermitienne γ , appelée chiralité qui anticommute avec D et commute avec $\pi(x)$ pour tout $x \in A$.

Les axiomes qui seront énoncés dans ce qui suit, leur objectif est de caractériser en premier lieu les structures de spin sur une variété compacte M de dimension n à l'aide des triplets spectraux (A, H, D) , A est l'algèbre des fonctions C^∞ sur M à valeurs complexes.

Axiome 1 (Dimension). Pour une géométrie de dimension n , $ds = |D|^{-1}$ est un infinitésimal d'ordre $1/n$.

Rappelons que par définition, un opérateur compacte est un infinitésimal d'ordre $\alpha \succ 0$ si la suite décroissante de valeurs propres (λ_k) $k \in \mathbb{N}$ satisfait à :

$$\lambda_{k \rightarrow +\infty} = O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) \quad (1.18)$$

Ainsi, D est un opérateur borné dont les valeurs propres croissent au moins aussi vite que la suite $k^{\frac{1}{n}}$ pour une variété de dimension n .

Ensuite il faut imposer à l'opérateur de Dirac d'être un opérateur différentiel d'ordre un.

Axiome 2 (Ordre un). Pour toutes fonctions $a, b \in A$, on a

$$[[D, \pi(a)], \pi(b)] = 0 \tag{1.19}$$

Axiome 3 (Régularité). Pour toute fonction $a \in A$, $\pi(a)$ et $[[D], \pi(a)]$ appartiennent à l'intersection des domaines de toutes les puissances δ^k de la dérivation δ défini par $\delta(b) = [[D], b]$ lorsque b appartienne à l'algèbre engendrée par $\pi(a)$ et $[[D], \pi(a)]$.

Axiome 4 (Orientabilité). Il existe un cycle de Hochschild $c \in \mathbb{Z}_n(A)$ de dimension n tel que $\pi(c) = 1$ lorsque n est impair et $\pi(c) = \gamma$ lorsque n est pair.

Ce dernier axiome permet de caractériser algébriquement la chiralité γ en dimension paire. Tout comme γ^{n+1} , γ n'est défini que lorsque la dimension est paire, aussi en dimension impaire γ est remplacé par 1.

Pour un produit tensoriel général

$$c = a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n, \tag{1.20}$$

On définit

$$\pi(c) = \pi(a_0) [D, \pi(a_1)] \dots [D, \pi(a_n)] \tag{1.21}$$

qui s'étend par linéarité à tous les éléments de $A^{\otimes(n+1)}$.

Axiome 5 (Finitude). L'intersection des domaines de toutes les puissances D^k de l'opérateur de Dirac est un module projectif fini sur A sur lequel la relation suivante définit une structure hermitienne \langle, \rangle .

$$\langle \pi(a)\xi, \zeta \rangle = \int a(\xi, \zeta) ds^n \quad (1.23)$$

pour tous $\xi, \zeta \in H$ et $a \in A$.

Axiome 6 (Dualité de Poincaré). La matrice de la forme d'intersection :

$$\cap : K_*(A) \times K_*(A) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (1.24)$$

est non dégénérée. Où $K_*(A)$ est une notation collective pour tous les $K_n(A)$, et grâce au théorème de périodicité de Bott, on a $K_{n+2}(A) = K_n(A)$.

Dans le dernier axiome l'opérateur antiunitaire J est introduit, appelé structure réelle, et J n'est autre que l'opérateur de conjugaison de charge quand D est l'opérateur de Dirac, où dans le cas général il vérifie les relations suivantes, dont la périodicité est modulo 8.

Axiome 7 (Réalité). Il existe une application antiunitaire J de H dans lui même telle que $J\pi(a)J^{-1} = \pi(a)^*$ pour tout $a \in A$. De plus, J satisfait aux conditions $J^2 = \varepsilon$, $JD = \varepsilon'DJ$ et $J\gamma = \varepsilon''\gamma J$, où $\varepsilon, \varepsilon'$ et ε'' sont donnés, selon la valeur de n modulo 8, par le tableau suivant.

n modulo 8	0	1	2	3	4	5	6	7
ε	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ε'	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
ε''	1		-1		1		-1	

Les axiomes qu'on vient de citer, permettent de caractériser les triplets spectraux (A, H, D) correspondant à la géométrie spinorielle sur une variété compacte. Et pour étendre au cas de la géométrie non commutative ils doivent subir les transformations suivantes.

Axiome 7' (Réalité). Il existe une application antiunitaire J de H $[J\pi(a)J^{-1}, \pi(b)] = 0$ pour tous $a, b \in A$. De plus, J satisfait aux conditions $J^2 = \varepsilon$, $JD = \varepsilon'DJ$ et $J\gamma = \varepsilon''\gamma J$, où $\varepsilon, \varepsilon'$ et ε'' sont donnés, selon la valeur de n modulo 8, par le tableau suivant :

n modulo 8	0	1	2	3	4	5	6	7
ε	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
ε'	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ε''	1		-1		1		-1	

Puisque $J\pi(a)J^{-1}$ commute avec $\pi(b)$ pour tous $a, b \in A$, J est très similaire à l'opérateur de Tomita-Takesaki qui permet de passer de l'algèbre de Von Newman engendré par $\pi(A)$ à son commutant. Cependant, le commutant de $\pi(A)$ est en général plus grand que $J\pi(a)J^{-1}$, ce qui implique que J n'est pas égal à l'opérateur de Tomita-Takésaki en général.

En outre, l'opérateur J permet de représenter sur H l'algèbre $A \otimes A^{op}$ par :

$$\tilde{\pi}(A \otimes A^{op}) = \pi(A) J\pi(b^*) J^{-1}, \quad (1.25)$$

où A^{op} est une algèbre identique à A en tant qu'espace vectoriel, mais dont le produit de a par b est défini par ba . De façon équivalente, π et J munissent

H d'une structure de bimodule sur A , qui est utile pour la construction des modèles physique dans ce cadre.

Axiome 1' (dimension). Il reste inchangé dans le cas non commutatif. Puisqu'il ne fait appel qu'au spectre de l'opérateur de Dirac.

Avant de voir les modifications que subit l'axiome 2, il est indispensable d'introduire le bimodule, pour généraliser la notion qui stipule que l'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel du premier ordre.

Définition 3. Soient A et B deux algèbres et M un (A, B) – bimodule, une application linéaire D de M dans lui même est un opérateur du premier ordre si elle vérifie.

$$D(a\xi b) + aD(\xi)b = aD(\xi b) + D(a\xi)b \quad (1.26)$$

pour tous $a, b \in A$ et $\xi \in M$

L'axiome de réalité permet de munir H d'une structure de bimodule sur A , aussi la généralisation de la condition d'ordre un est donné par.

Axiome 2' (Condition d'ordre un) : L'opérateur de Dirac vérifie.

$$[[D, \pi(a)], \mathfrak{S}\pi(b)\mathfrak{S}^{-1}] = 0 \quad (1.27)$$

pour tous $a, b \in A$.

L'axiome 3 : ne subit aucune modification dans le cas non commutatif.

Axiome 4' :(Orientabilité) En dimension n , γ est l'image d'un cycle de Hochschild de dimension n à valeurs dans $A \otimes A^{op}$.

Un élément $c = (x \otimes y) \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \in C_n(A, A \otimes A^{op})$ est représenté autant qu'opérateur sur H par :

$$\pi(c) = \pi(x) \mathfrak{S} \pi(y) \mathfrak{S}^{-1} [D, \pi(a_1)] \dots \dots \dots [|D|, \pi(a_n)] \quad (1.28)$$

L'axiome 5 : (finitude) ne subit aucune modification.

L'axiome 6 : (Dualité de Poincaré) lorsque A est non commutatif la multiplicité n'est plus un morphisme d'algèbre et ne peut pas induire l'application m_* de $k_*(A) \times k_*(A)$ dans $k_*(A)$ dont on a besoin pour formuler algébriquement la dualité de Poincaré.

Partant de deux projections e_1 et e_2 définissant deux classes dans $k^0(A)$, on leur associe la nouvelle projection $e_1 \otimes e_2$ qui définit un élément de $k^0(A \otimes A^{op})$. Cet élément est représenté par $\pi(e) = \pi(e_1) \mathfrak{S} \pi(y) \mathfrak{S}^{-1}$ et on définit :

$$n(e_1, e_2) = \dim \ker (\pi(e) D^+ \pi(e)) - \dim \ker (\pi(e) D^- \pi(e)) \quad (1.29)$$

Dans le cas impair, la même démarche est employée en remplaçant les projections par des unitaires.

1.4 Modèle Standard en Géométrie Non Commutative

La géométrie non commutative nous permet de construire dans son sein quelques théories de YHM, parmi elles bien sur le modèle standard. Dans ce

cadre, usuellement on considère le produit ordinaire de géométrie euclidienne à quatre dimensions et une variété compacte avec un espace non-commutatif interne, toutes les propriétés de cette géométrie sont incluses dans le triplet spectrale (A_t, H_t, D_t) qui est le résultat d'un produit de deux triplets spectraux correspondants aux deux espaces suivants :

$$\begin{aligned}
A_t &\equiv C^\infty(M) \otimes A & (1.30) \\
H_t &= L^2(S, M) \otimes H \\
D_t &= i\gamma^\mu \partial_\mu \otimes I + \gamma^5 \otimes D
\end{aligned}$$

Où $C^\infty(M)$ est l'algèbre commutative des fonctions continues (smooth) à valeurs complexes sur M représentée dans l'espace de Hilbert des spineurs de Dirac à carré intégrable $L^2(S, M)$ par la multiplication usuelle et les γ^μ sont les matrices de Dirac euclidiennes et hermitiennes. (A, H, D) est le triplet spectral de l'espace interne qui a ρ pour représentation involutive et fidèle de l'algèbre involutive et de dimension finie dans l'espace de Hilbert de dimension finie de tous les fermions et les antifermions existants dans la théorie et un opérateur hermitien D de H , appelé opérateur de Dirac, qui contient toutes les masses des fermions et les termes de mixages.

Pour obtenir une généralisation de la géométrie riemannienne ordinaire dans un espace temps non commutatif, le triplet spectral doit satisfaire tous les axiomes de la géométrie non commutative cités ci dessus avec deux autres opérateurs qui sont, l'opérateur conjugaison de charge J_t (qui échange les

particules et les antiparticules) et la chiralité χ_t (qui sélectionne les particules lefts et rights) dans le produit de géométrie qu'on a défini, ils sont donnés par le produit tensoriel des opérateurs usuelles de la conjugaison de charge et la chiralité sur les spineurs avec les opérateurs J et χ de l'espace de Hilbert à dimension fini H .

Le triplet spectral le plus général peut être écrit sous la forme suivante :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_L^c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_R^c \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{M} \\ 0 & 0 & \overline{M}^* & 0 \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

$$\chi = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} C \quad (1.32)$$

Où L et R désignent les fermions gauches et droits et le sub-indice c désigne les antifermions, M est la matrice de masse avec mixage de tous les fermions, C est la conjugaison complexe et I est la matrice identité avec la dimension souhaité. On note aussi que dans ce cas tous les axiomes de la GNC se réduisent aux trois axiomes de réalité dualité de Poincare et l'orientabilité.

Pour obtenir le triplet spectral (A_t, H_t, D_t) il faut définir une algèbre différentielle qui sera représentée dans l'espace de Hilbert H_t , en fait cette

représentation est obtenue en remplaçant la dérivée extérieure par des commutateurs avec D_t , et en particulier les champs de jauge et de Higgs apparaissent comme des antihémitiens 1-forme sur l'espace produit.

Due à la forme de D_t , ces 1-forme se divisent en des champs de jauge et des champs de Higgs, assumons une implicite dépendance avec l'espace temps, le champs de Higgs peut être écrit en 1-forme purement non-commutatif :

$$H \equiv \sum_i \rho(x_i^0) [D, \rho(x_i^1)] \quad (1.33)$$

avec x_i^0 et $x_i^1 \in A$. Et sa courbure est défini par :

$$C = \delta H + H^2 \quad (1.34)$$

où δ est la dérivation dans l'algèbre différentielle interne.

Donc, le potentiel de Higgs préliminaire est :

$$V_0(H) \equiv Tr(zC^2) \quad (1.35)$$

Où z est une matrice qui est défini positive et qui commute avec $\rho(A)$, $J\rho(x_i^0)J$ et D , tel que :

$$(\omega, \omega') \equiv Tr(z\omega^*\omega') \quad (1.36)$$

Qui est le produit scalaire entre deux 2-forms ω et ω' du même degré. En conséquence et qui est en fait l'un des résultats les plus importants en GNC est que le champs de Higgs et le potentiel de higgs ont une interprétation

géométrique, où le champs de Higgs peut être considéré comme un champs de jauge dans l'espace interne et le potentiel de Higgs n'est que le carré de la norme de sa courbure.

Finalement, on peut associer cette forme explicite au triplet spectral du modèle standard :

$$\rho_L(a) = \text{diag}(a \otimes I_{3N}, a \otimes I_N) \quad (1.37)$$

$$\rho_R(b) = \text{diag}(bI_{3N}, \bar{b}I_{3N}, \bar{b}I_N) \quad (1.38)$$

$$\rho_L^c(b, c) = \text{diag}(I_{2N} \otimes c, \bar{b} \otimes I_{2N}) \quad (1.39)$$

$$\rho_R^c(b, c) = \text{diag}(I_{2N} \otimes c, \bar{b}I_N) \quad (1.40)$$

Le triplet spectral (A, H, D) correspondant au modèle standard doit être choisit de telle manière que le groupe de jauge obtenu, soit un groupe des unitaires de A . Puisque le groupe de jauge du modèle standard est $SU(2) \otimes U(1) \otimes SU(3)$, l'algèbre la plus adaptée est :

$$A = H \oplus \mathbb{C} + M_3(\mathbb{C}) \quad (1.41)$$

Dont le groupe des unitaires est $SU(2) \otimes U(1) \otimes SU(3)$ et avec la condition d'unimodularité, on peut éliminer un facteur de $U(1)$. L'espace de Hilbert est formé de toutes les particules et anti-particules du modèle standard, considérées comme des fermions de Weyl.

Si on considère l'existence de trois familles de fermions, il y a 90 particules qui seront réparties dans les quatre espaces suivants :

$$H = H_L^P \oplus H_R^P \oplus H_L^A \oplus H_R^A \quad (1.42)$$

L'espace $H_L^P = \mathbb{C}^{24}$ qui contient toutes les particules gauches, qui seront réparties sur la base suivante :

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad (1.43)$$

nb : Les indices de couleurs pour les quarks ont été omis.

De même $H_R^P = \mathbb{C}^{21}$ est l'espace de Hilbert des particules droites dans la base :

$$(u)_R, (c)_R, (t)_R, (d)_R, (s)_R, (b)_R, (e)_R, (\mu)_R, (\tau)_R \quad (1.44)$$

Et les anti-particules sont contenues dans les espaces $H_L^A \oplus H_R^A$.

La représentation ρ est diagonale par blocs.

$$\rho = \rho_L^P \oplus \rho_R^P \oplus \rho_L^A \oplus \rho_R^A. \quad (1.45)$$

Et en se basant sur les bases des particules données si dessus on a les blocs de représentation suivants.

$$\rho_L^P(a) = \text{diag}(a \otimes I_9, a \otimes I_3) \quad (1.46)$$

$$\rho_R^P(b) = \text{diag}(b \otimes I_9, \bar{b} \otimes I_9, \bar{b} \otimes I_3) \quad (1.47)$$

$$\rho_L^A(b, c) = \text{diag}(I_6 \otimes c, b \otimes I_6) \quad (1.48)$$

$$\rho_R^A(b, c) = \text{diag}(I_6 \otimes c, b \otimes I_3) \quad (1.49)$$

où $(a, b, c) \in H \oplus \mathbb{C} + M_3(\mathbb{C})$ et :

$$\chi = \begin{pmatrix} -I_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{21} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{21} \\ I_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} C \quad (1.50)$$

L'opérateur de Dirac est

$$\begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ M^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{M} \\ 0 & 0 & \overline{M}^* & 0 \end{pmatrix}$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} M_u \otimes I_3 & 0 & 0 \\ 0 & M_d \otimes I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ M_e \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

avec :

$$\begin{aligned} M_u &= \text{diag}(m_u, m_c, m_t), \\ M_d &= V_{CKM} \text{diag}(m_d, m_s, m_b), \\ M_e &= \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau) \end{aligned} \quad (1.52)$$

La description du triplet spectral fini associé au modèle standard illustré si dessus doit satisfaire aux axiomes de la GNC relatifs aux triplets spectraux finis, vus précédemment.

1.5 Exemple d'Extension du Modèle Standard par un Boson de Jauge de Plus (Z') en GNC.

Dans cette section est illustré un exemple d'extension du modèle standard avec la particule hypothétique qui est le Z' . Le choix du triplet spectral (A_t, H_t, D_t) dans ce cas n'est pas arbitraire et il doit toujours satisfaire à l'ensemble des axiomes de la GNC[59] , dans ce cas ils se réduisent aux axiomes de réalité, dualité de Poincaré et de l'orientabilité.

L'axiome de réalité est équivalent aux deux relations suivantes :

$$[\rho(x), J\rho(x')J] = 0, \quad [[D, \rho(x)], J\rho(x')J] = 0 \quad x, x' \in A. \quad (1.53)$$

Et l'axiome de dualité de Poincaré est donné par la relation suivante :

$$\cap_{ij} = Tr(\chi\rho(p_i)J\rho(p_j)J) \quad (1.54)$$

où les p_i sont les projecteurs hermitiens minimaux de l'algèbre.

L'axiome d'orientabilité révèle que la chiralité peut être écrite de la manière suivante :

$$\chi = \sum_i \rho(a_i)J\rho(b_i)J \quad a_i, b_i \in A \quad (1.55)$$

Pour obtenir une extension du modèle standard par $U(1)$ il faut modifier le triplet spectral, pour cela c'est seulement la représentation de l'algèbre du

modèle standard qui doit être modifier pour obtenir une représentation ρ de l'algèbre $H \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$ où on prend $\rho(a, b, b', c)$ tel que $(a, b, b', c) \in H \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$, sans changer les secteurs faible et fort, avec bien sur l'espace de Hilbert H et les opérateurs J, χ et D sont maintenus inchangés. Donc ρ_L, ρ_L^c et ρ_R^c restent les mêmes et ρ_R peut être écrit :

$$\rho_R(b, b') = \text{diag}(\alpha I_{3N}, \beta I_{3N}, \gamma I_N) \quad (1.56)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \{b, \bar{b}, b', \bar{b}'\}$ et N c'est le nombre de familles.

Ce qui permet d'avoir :

$\chi = \rho(-I_2, 1, 1, I_3) J \rho(-I_2, 1, 1, I_3) J$ ce qui satisfait à l'axiome d'orientabilité. par contre, le déterminant des interactions est égal à zéro pour des distributions particulières de la représentation ρ . En éliminant ces représentations, les axiomes de la GNC permettent d'avoir 40 possibilités de triplets spectraux qui seront présentés dans le tableaux suivants :

α	β	γ	$\det \cap$
b, \bar{b}	b, \bar{b}	b, \bar{b}	$= 0$
b, \bar{b}	b, \bar{b}	b', \bar{b}'	$\neq 0$
b, \bar{b}	b', \bar{b}'	b, \bar{b}	$\neq 0$
b', \bar{b}'	b, \bar{b}	b, \bar{b}	$\neq 0$
b, \bar{b}	b', \bar{b}'	b', \bar{b}'	$= 0$
b', \bar{b}'	b', \bar{b}'	b, \bar{b}	$\neq 0$
b', \bar{b}'	b, \bar{b}	b', \bar{b}'	$= 0$
b', \bar{b}'	b', \bar{b}'	b', \bar{b}'	$\neq 0$

On note que les 40 triplets spectraux ont été proposés par rapport à leur satisfactions aux axiomes de la GNC ou en tenant compte des contraintes géométriques, mais on ne peut pas dire pour autant qu'ils sont satisfaisants avant d'analyser les contraintes et les résultats physiques.

L'analyse des contraintes physiques se divise en deux parties distinctes : l'annulation d'anomalie et la charge électrique.

1.5.1 Contraintes Géométriques :

En GNC, le groupe de jauge G est obtenu à partir d'un groupe d'éléments unitaires de l'algèbre A après application de la condition d'unimodularité qui est donné dans ce cas par[59] :

$$Tr_p [\rho(a, b, b', c) + J\rho(a, b, b', c)J] = 0 \quad (1.57)$$

Ce qui permet de noter l'algèbre de Lie du groupe d'éléments unitaires par $G = su(2) \oplus i\mathbb{R} + i\mathbb{R} + su(3)$ qui a pour représentation $\tilde{\rho} = diag(\tilde{\rho}_L, \tilde{\rho}_R, \tilde{\rho}_L^c, \tilde{\rho}_R^c)$ dans l'espace de Hilbert avec :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_L(a) &= diag(a \otimes I_{3N}, a \otimes I_N), \\ \tilde{\rho}_R(b, b') &= diag((y_a b + y'_a b') I_{3N}, (y_d b + y'_d b') I_{3N}, (y_e b + y'_e b') I_N), \\ \tilde{\rho}_L^c(b, b', c) &= diag(I_{2N} \otimes (c + ubI_3 + u'b'I_3), -bI_{2N}), \\ \tilde{\rho}_R^c(b, b', c) &= diag(I_{2N} \otimes (c + ubI_3 + u'b'I_3), -bI_N), \end{aligned} \quad (1.58)$$

où $(a, b, b', c) \in ig$, $y, y' \in \{1, 0, -1\}$ (l'hypercharges généralisées) et u et u' des combinaisons linéaires rationnelles des hypercharges généralisées. En général l'élimination des anomalies de jauge revient à résoudre l'équation :

$$Tr_p [\chi (\tilde{\rho}(x) + J\tilde{\rho}(x)J)^3] = 0 \quad \text{pour tout } x \in ig \quad (1.59)$$

De cette équation il découle immédiatement que toute extension $U(1)$ du modèle standard est anormale, puisque le groupe de jauge dans ce cas contient quatre constantes de couplages et l'élimination des anomalies dans ce cas ne peut se passer que par l'ajout de nouveaux fermions ou l'adoption d'une base de YMH encore plus large, c'est ce qui a été adopté dans ce cas, Et en étendant cette étude à la charge électrique qui en fait pour qu'elle soit reproduite dans le cadre de la GNC il faut trouver un élément $x \in ig$ tel que $Q = \tilde{\rho}(x) + J\tilde{\rho}(x)J$, ce qui permet à la fin de sélectionner 14 triplets spectraux satisfaisants tous aux axiomes géométriques et physiques :

y_u	y'_u	y_d	y'_d	y_e	y'_e	u	u'	Type
0	1	0	-1	0	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	1
0	-1	0	1	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	1
1	0	-1	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	2
0	1	0	-1	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	2
1	0	-1	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	2
1	0	-1	0	0	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	2
0	-1	-1	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	3
1	0	0	-1	-1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	3
1	0	0	1	-1	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{4}$	3
0	1	-1	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	3
1	0	0	1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	4
0	1	-1	0	-1	0	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{4}$	4
0	-1	-1	0	-1	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	4
1	0	0	-1	0	-1	0	$\frac{1}{3}$	4

après avoir analysé les anomalies géométrique et physique ce qui a permis d'identifier un nombre limité des triplets spectraux répondant aux contraintes exigées par les axiomes de la GNC, le calcul de la masse du Z' après avoir passé par les étapes habituelles comme la brisure spontanée de la symétrie avec un potentiel de Higgs qui est donné en général en GNC par :

$$H = \sum_i \rho(x_i^0) [D, \rho(x_i^1)] \quad \text{avec } x_i^0 \text{ et } x_i^1 \in A \quad (1.60)$$

Et en performant le changement de variables suivant $\Phi = H - iD$ ce qui permet d'avoir la courbure :

$$C = \Phi^2 + D^2 + \theta \quad (1.61)$$

Et après avoir éliminer les junks et un long calcul, la masse du Z' sera donné par :

$$m_Z^2 + m_{Z'}^2 \prec m_t^2 \quad (1.62)$$

Ce qui veut dire que la masse du Z' ne peut pas accéder à 170 GeV.

Dans ce dernier exemple qu'on vient de voir, il ressort comme résultat principale que le modèle qui étudie en fait toutes les extensions $U(1)$ du modèle standard et dans le cadre de la géométrie non commutative sans ajouter de nouvelles particules est anormale, non seulement ce modèle mais la plus part des travaux [58, 59] qui ont tenté de construire des modèles allant au delà du modèle standard dans le cadre de la géométrie non commutative contiennent tous des anomalies, ce qui a laissé émerger de nouvelles voix autres que la géométrie non commutative tel que dans les espaces non commutatifs ou d'autres qui sont des déformations de la géométries non commutative comme dans le cas des modèles présentés par Chamseddine [14, 55, 56], ou le cadre de la géométrie non-commutative à algèbre de Lie gradée qui est nommé géométrie non associative où dans ce cadre plusieurs modèles allant audelà du modèle standards ont été construits [15, 16, 17, 18, 19] et qui s'est avéré très efficaces pour la construction de ce genre de modèle, ce qui nous a encouragé de poursuivre dans ce chemin en procédant à la construction de nombreux modèles sûr tous ceux qui présentent des propriétés phénoménologiques importantes tel que $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ et qui a été déjà construit dans

le cadre de la géométrie non associative par des membres de notre groupe [20], continuant dans la même lancée et en portant la flamme de la construction de modèles au delà du modèle standard mais avec des propriétés physique intéressantes tel que le modèle $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ qui est un modèle libre d'anomalie ou bien le modèle de grande unification E_6 qui est aussi libre d'anomalie.

Chapitre 2

Géométrie Non Associative et Modèle Standard

2.1 Introduction

La plus importante application de la géométrie non commutative à la physique est la description unifiée du modèle standard se basant sur les triplets spectraux vu dans le chapitre précédent, on a vu aussi que toute tentative de produire dans ce cadre des modèles allant au delà du modèle standard ont échoué[14],[55, 56, 58, 59].

Pour cela une modification de la géométrie non commutative est nécessaire et ce qui a été proposé [15, 16, 17, 18, 19] par l'utilisation de l'algèbre unitaire de Lie à la place de l' *-algèbre associative, les algèbres de Lie sont des algèbres non-associatives ce qui donne en fait l'origine à la nomination "géométrie non-associative".

L'avantage de la géométrie non-associative est de pouvoir construire une large classe de modèles physique parmi eux le modèle standard qui peut être construit d'une manière élégante [17, 18, 19, 20] et d'autres modèles de grande unification.

Tout de suite dans cette thèse on reproduira la construction du modèle standard dans le cadre de la géométrie non-associative, et on proposera la construction d'autres modèles de grande unification dans le même cadre qui est la géométrie non-associative dans les deux chapitres qui suivent.

2.2 Contenu de la Géométrie Non Associative

L'objet principal en géométrie non associative est le L-cycle (g, h, D, π, Γ) , qui est constitué d'une $*$ représentation π d'une algèbre de Lie unitaire g des opérateurs bornés (bounded) sur un espace de Hilbert h , ensemble avec un opérateur auto adjoint D sur h de résolvançe compacte et un opérateur auto adjoint Γ sur h ,

$$\Gamma^2 = id_h \tag{2.1}$$

qui commute avec $\pi(\mathbf{a})$ et anticommute avec D , L'opérateur D doit être non dégénéré mais le commutateur $[D, \pi(g)]$ est dégénéré, avec les L-cycles des modèles physique sont naturellement construits si on a les données suivantes :

- 1) Un groupe G (groupe de Lie) de transformation de jauge locale.

2) Des spineurs fermionique chiraux ψ se transformant à travers une représentation $\tilde{\pi}$ de G .

3) Une matrice de masse fermionique \tilde{M} , i.e. des masses pour les fermions plus une matrice généralisé de Kobayashi-Maskawa.

4) Une possible contenu de brisure de la symétrie dans G .

$$g = C^\infty(X) \otimes \mathfrak{a} \quad (2.2)$$

g est l'algèbre de Lie du groupe G , où \mathfrak{a} est une algèbre de Lie matricielle et $C^\infty(X)$ est l'algèbre sur un espace temps (compacte euclidien) X .

Soit :

$$L^2(X, S) \otimes \mathbb{C}^F \quad (2.3)$$

où $L^2(X, S)$ l'espace de Hilbert des bispineurs à carré intégrable.

Soit $\pi = 1 \otimes \hat{\pi}$ qui est $\tilde{\pi}_*$ différentiel, où $\hat{\pi}$ est une représentation de \mathfrak{a} dans $M_F\mathbb{C}$.

$$D = \mathcal{D} \otimes 1_F + \gamma^5 \otimes M \quad (2.4)$$

où \mathcal{D} est l'opérateur de Dirac sur X et $M \in M_F\mathbb{C}$ tel que $\gamma^5 \otimes M$ coïncide avec \tilde{M} pour les fermions chiraux. Les propriétés chirales des fermions sont contenues dans :

$$\Gamma = \gamma^5 \otimes \hat{\Gamma} \quad (2.5)$$

L'association de la théorie de champ de jauge au L-cycle a les propriétés suivantes :

Soit $\Omega^1 \mathbf{a}$ l'espace de commutateurs de forme :

$$\omega^1 = \sum_{\alpha, z \geq 0} [a_\alpha^z, \dots [a_\alpha^1, da_\alpha^0] \dots], a_\alpha^i \in \mathbf{a}. \quad (2.6)$$

L'application de la transformation linéaire

$$\widehat{\pi} : \Omega^1 \mathbf{a} \rightarrow M_F \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma} : \Omega^1 \mathbf{a} \rightarrow M_F \mathbb{C} \quad (2.7)$$

est définit par :

$$\widehat{\pi}(\omega^1) = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\widehat{\pi}(a_\alpha^z) \dots \widehat{\pi}(a_\alpha^2) [\widehat{\pi}(a_\alpha^1), [-i\mathcal{M}, \widehat{\pi}(a_\alpha^0)]] \dots] \quad (2.8)$$

$$\widehat{\sigma}(\omega^1) = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\widehat{\pi}(a_\alpha^z) \dots \widehat{\pi}(a_\alpha^2) [\widehat{\pi}(a_\alpha^1), [\mathcal{M}^2, \widehat{\pi}(a_\alpha^0)]] \dots] \quad (2.9)$$

On définit :

$$\Omega^n \mathbf{a} \supset \omega^n = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\omega_{n,\alpha}^1 [\omega_{n-1,\alpha}^1, \dots, [\omega_{2,\alpha}^1, \omega_{1,\alpha}^1]] \dots], \quad (2.10)$$

où $\omega_{i,\alpha}^1 \in \Omega^1 \mathbf{a} \rightarrow M_F \mathbb{C}$.

et l'extension de $\widehat{\pi}$ et $\widehat{\sigma}$ à $\Omega^n \mathbf{a}$ est donnée d'une manière récurrente par

$$\widehat{\pi}([\omega^1, \omega^k]) := \widehat{\pi}(\omega^1) \widehat{\pi}(\omega^k) - (-1)^k \widehat{\pi}(\omega^k) \widehat{\pi}(\omega^1), \quad (2.11)$$

$$\widehat{\sigma}([\omega^1, \omega^k]) := \widehat{\sigma}(\omega^1) \widehat{\pi}(\omega^k) - \widehat{\pi}(\omega^k) \widehat{\sigma}(\omega^1) - \widehat{\pi}(\omega^1) \widehat{\sigma}(\omega^k) - (-1)^k \widehat{\sigma}(\omega^k) \widehat{\pi}(\omega^1) \quad (2.12)$$

On définit pour $n \succeq 2$

$$\widehat{\pi}(\mathfrak{S}^n \mathbf{a}) := \{\widehat{\sigma}(\omega^{n-1}), \omega^{n-1} \in \Omega^{n-1} \mathbf{a} \cap \ker \widehat{\pi}\}. \quad (2.13)$$

Définissons les espaces $\mathbf{r}^0 \mathbf{a} \subset \mathbf{M}_{\mathbf{F}}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{r}^1 \mathbf{a} \subset \mathbf{M}_{\mathbf{F}}(\mathbb{C})$ par :

:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^0 \mathbf{a} &= -(\mathbf{r}^0 \mathbf{a})^* = \widehat{\Gamma}(\mathbf{r}^0 \mathbf{a}) \widehat{\Gamma}, \\ \mathbf{r}^1 \mathbf{a} &= -(\mathbf{r}^1 \mathbf{a})^* = -\widehat{\Gamma}(\mathbf{r}^1 \mathbf{a}) \widehat{\Gamma} \\ [\mathbf{r}^0 \mathbf{a}, \widehat{\pi}(\mathbf{a})] &\subset \widehat{\pi}(\mathbf{a}) \\ [\mathbf{r}^0 \mathbf{a}, \widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a})] &\subset \widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a}) \\ \{\mathbf{r}^0 \mathbf{a}, \widehat{\pi}(\mathbf{a})\} &\subset \{\widehat{\pi}(\mathbf{a}), \widehat{\pi}(\mathbf{a})\} + \widehat{\pi}(\Omega^2 \mathbf{a}) \\ \{\mathbf{r}^0 \mathbf{a}, \widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a})\} &\subset \{\widehat{\pi}(\mathbf{a}), \widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a})\} + \widehat{\pi}(\Omega^3 \mathbf{a}) \\ [\mathbf{r}^1 \mathbf{a}, \widehat{\pi}(\mathbf{a})] &\subset \widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a}) \\ \{\mathbf{r}^1 \mathbf{a}, \widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a})\} &\subset \{\widehat{\pi}(\mathbf{a}), \widehat{\pi}(\mathbf{a})\} + \widehat{\pi}(\Omega^2 \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

On définit les espaces $\mathbf{j}^0 \mathbf{a}, \mathbf{j}^1 \mathbf{a}, \mathbf{j}^2 \mathbf{a} \subset \mathbf{M}_{\mathbf{F}}(\mathbb{C})$ qui sont des matrices $F \times F$ utiles pour la construction de la courbure θ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^0 \mathbf{a} &= \mathbf{c}^0 \mathbf{a} \\ \mathbf{j}^1 \mathbf{a} &= \mathbf{c}^1 \mathbf{a} \\ \mathbf{j}^2 \mathbf{a} &= \mathbf{c}^2 \mathbf{a} + \widehat{\pi}(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a}) + \{\widehat{\pi}(\mathbf{a}), \widehat{\pi}(\mathbf{a})\} \end{aligned} \quad (2.15a)$$

tel que :

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^0\mathbf{a} &= -(\mathbf{c}^0\mathbf{a})^* = \widehat{\Gamma}(\mathbf{c}^0\mathbf{a})\widehat{\Gamma} \\
\mathbf{c}^1\mathbf{a} &= -(\mathbf{c}^1\mathbf{a})^* = -\widehat{\Gamma}(\mathbf{c}^1\mathbf{a})\widehat{\Gamma} \\
\mathbf{c}^2\mathbf{a} &= -(\mathbf{c}^2\mathbf{a})^* = -\widehat{\Gamma}(\mathbf{c}^2\mathbf{a})\widehat{\Gamma} \\
\mathbf{c}^0\mathbf{a}.\widehat{\pi}(\mathbf{a}) &= \mathbf{c}^1\mathbf{a}.\widehat{\pi}(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \\
\mathbf{c}^0\mathbf{a}.\widehat{\pi}(\Omega^1\mathbf{a}) &= \mathbf{c}^1\mathbf{a}.\widehat{\pi}(\Omega^1\mathbf{a}) = \mathbf{0} \\
[\mathbf{c}^2\mathbf{a}, \widehat{\pi}(\mathbf{a})] &= \mathbf{0} \\
[\mathbf{c}^2\mathbf{a}, \widehat{\pi}(\Omega^1\mathbf{a})] &= 0
\end{aligned} \tag{2.15b}$$

et la connection ρ est de la suivante structure :

$$\rho = \sum_{\alpha} (c_{\alpha}^1 \otimes m_{\alpha}^0 + c_{\alpha}^0 \gamma^5 \otimes m_{\alpha}^1) \tag{2.16}$$

où : $c_{\alpha}^1 \in \Lambda^1$, $c_{\alpha}^0 \in \Lambda^0$, $m_{\alpha}^0 \in \mathbf{r}^0\mathbf{a}$, $m_{\alpha}^1 \in \mathbf{r}^1\mathbf{a}$ et Λ^k , où Λ^k est l'espace différentiel des k -formes représenté par les matrices gamma.

Et de la connection ρ on peut obtenir la courbure θ :

$$\begin{aligned}
\theta &= d\rho + \rho^2 - i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\} + \widehat{\sigma}_g(\rho)\gamma^5 + J^2g, \\
J^2g &= (\Lambda^2 \otimes \mathbf{j}^0\mathbf{a}) \oplus (\Lambda^1\gamma^5 \otimes \mathbf{j}^1\mathbf{a}) \oplus (\Lambda^0 \otimes \mathbf{j}^2\mathbf{a})
\end{aligned} \tag{2.17}$$

où d est la dérivée externe et $\widehat{\sigma}_g$ est l'extension des éléments donnés par l'équation juste au dessus.

après avoir calculer la courbure on doit sélectionner les solutions $e(\theta)$ orthogonales à J^2g , i.e. on élimine les junks $j \in J^2g$ tel que :

$$e(\theta) = d\rho + \rho^2 - i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\} + \widehat{\sigma}_g(\rho)\gamma^5 + j \tag{2.18}$$

tel que :

$$\int_X dx \mathbf{tr} (e(\theta)j^2) = 0 \quad \forall j^2 \in J^2g \quad (2.19)$$

Finalement on peut calculer les actions bosoniques et fermioniques :

$$S_B = \int_X dx \frac{1}{g_0^2 F} \mathbf{tr} (e(\theta))^2, \quad S_F = \int_X dx \psi^* (\mathcal{D} + \rho\psi) \quad (2.20)$$

Où g_0 est une constante de couplage et $\psi \in h$. Et avec une rotation de wick on obtiendra les bosons de jauge.

En fait ce que nous venons de voir est une sorte d'organigramme qui doit être suivit étape par étape dans le but de construire des modèles physique dans le cadre de GNA.

2.3 Le Modèle Standard en Géométrie Non Associative

L'algèbre de Lie matricielle du modèle standard est

$$\mathfrak{a} = u(1) \oplus su(2) \oplus su(3) \quad (2.21)$$

L'espace de Hilbert est \mathbb{C}^{48} , avec ν_R inclut, les éléments de \mathbb{C}^{48} sont représenté par les fermions de la première génération de la manière suivante :

$$\left(u_L, d_L, u_R, d_R, \nu_L, e_L, \nu_R, e_R \right)^T \in \mathbb{C}^{48} \quad (2.22)$$

où $u_L, d_L, u_R, d_R \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ et $\nu_L, e_L, \nu_R, e_R \in \mathbb{C}^3$.

La représentation $\widehat{\pi}$ de \mathbf{a} sur \mathbb{C}^{48} est :

$$\widehat{\pi}((a_1, a_2, a_3)) = \text{diag}(\widehat{\pi}_q((a_1, a_2, a_3)), \widehat{\pi}_l((a_1, a_2, a_3)))$$

où

$$\widehat{\pi}_q(a_1, a_2, a_3) = if_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{3}1_3 \otimes 1_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}1_3 \otimes 1_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}1_3 \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{3}1_3 \otimes 1_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (a_3 + if_3 1_3) \otimes 1_3; & i(f_1 - if_2) 1_3 \otimes 1_3; & 0 & 0 \\ i(f_1 + if_2) 1_3 \otimes 1_3; & (a_3 - if_3 1_3) \otimes 1_3; & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \otimes 1_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \otimes 1_3 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

et

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi}_l(a_1, a_2, a_3) &= if_0 \begin{pmatrix} -I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.I_3 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} if_3 \otimes 1_3; & i(f_1 - if_2) \otimes I_3; & 0 & 0 \\ i(f_1 + if_2) \otimes 1_3; & -if_3 \otimes 1_3; & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

où $a_3 \in su(3) \subset M_3\mathbb{C}$ qu'on écrit par une représentation matricielle standard,

$$a_2 = \begin{pmatrix} if_3 \otimes 1_3; & i(f_1 - if_2) \\ i(f_1 + if_2); & -if_3 \otimes 1_3 \end{pmatrix} \in su(2), \tag{2.25}$$

pour $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}$, et $a_1 = if_0 \in u(1) \equiv i\mathbb{R}$.

L'opérateur de Dirac généralisé est :

$$M = \text{diag}(M_q, M_l)$$

où

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1}_3 \otimes M_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1}_3 \otimes M_d \\ \mathbf{1}_3 \otimes M_u^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_3 \otimes M_d^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

et :

$$M_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_e \\ M_\nu^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_e^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

où $M_u, M_d, M_\nu, M_e \in M_3\mathbb{C}$ qui sont des matrices de masse pour les fermions et qui doivent être du même type, différents de zéros et ils sont non dégénéré.

pour $a_\alpha^i = (a_1, a_2, a_3)$, l'espace $\widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a})$ est représenté par τ^1 :

$$\tau^1 = \widehat{\pi}(\omega^1) = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\widehat{\pi}(a_\alpha^z) \dots [\widehat{\pi}(a_\alpha^2) [\widehat{\pi}(a_\alpha^1), [-iM, \widehat{\pi}(a_\alpha^0)]]] \dots] \quad (2.28)$$

et il est donné par :

$$\tau^1 = \text{diag}((\tau_q^1, \tau_l^1)) \quad (2.29)$$

où :

$$\tau_q^1 := i \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{b}_2 I_3 \otimes M_u & b_1 I_3 \otimes M_d \\ 0 & 0 & -\bar{b}_1 I_3 \otimes M_u & b_2 I_3 \otimes M_d \\ b_2 I_3 \otimes M_u^* & -b_1 I_3 \otimes M_u^* & 0 & 0 \\ \bar{b}_1 I_3 \otimes M_d & \bar{b}_2 I_3 \otimes M_d^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

et :

$$\tau_l^1 := i \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{b}_2 \otimes M_\nu & b_1 \otimes M_e \\ 0 & 0 & -\bar{b}_1 \otimes M_\nu & b_2 \otimes M_e \\ b_2 \otimes M_\nu^* & -b_1 \otimes M_\nu^* & 0 & 0 \\ \bar{b}_1 \otimes M_e & \bar{b}_2 \otimes M_e^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

L'opérateur de graduation est :

$$\widehat{\Gamma} = \text{diag}(-I_3 \otimes I_3, -I_3 \otimes I_3, I_3 \otimes I_3, I_3 \otimes I_3, -I_3, -I_3, I_3, I_3) \quad (2.32)$$

tel que :

$$\widehat{\Gamma} = I^{48} \quad (2.33)$$

$$[\widehat{\Gamma}, \widehat{\pi}(a)] = 0 \quad (2.34)$$

$$\{\widehat{\Gamma}, M\} = 0 \quad (2.35)$$

et :

$$\{\widehat{\Gamma}, \widehat{\pi}(\Omega^1 \mathbf{a})\} = 0 \quad (2.36)$$

Soit

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} if_3 \otimes 1_3; & i(f_1 - if_2) \\ i(f_1 + if_2); & -if_3 \otimes 1_3 \end{pmatrix} := \\ & = \begin{pmatrix} i(|b_2|^2 - |b_1|^2); & -2ib_1\bar{b}_2 \\ -2i\bar{b}_1b_2; & -(|b_2|^2 - |b_1|^2) \end{pmatrix} \in su(2) \end{aligned}$$

on a donc :

$$\{\tau^1, \tau^1\} = \text{diag} \left(\{\tau^1, \tau^1\}_q, \{\tau^1, \tau^1\}_l \right) \quad (2.37)$$

où

$$\begin{aligned} \{\tau^1, \tau^1\}_q &= \begin{pmatrix} if_3 I_3 \otimes M_{ud}; & i(f_1 - if_2) I_3 \otimes M_{ud}; & 0 & 0 \\ i(f_1 + if_2) I_3 \otimes M_{ud}; & -if_3 \otimes I_3 \otimes M_{ud}; & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_9 \end{pmatrix} \\ & - (\|b_1^2\| + \|b_2^2\|) \text{diag} (I_3 \otimes M_{\{ud\}}, I_3 \otimes M_{\{ud\}}, I_3 \otimes 2M_u^* M_u, I_3 \otimes 2M_d^* M_d) \end{aligned} \quad (2.38)$$

et

$$\{\tau^1, \tau^1\}_l = \begin{pmatrix} if_3 \otimes M_{\nu e}; & i(f_1 - if_2) \otimes M_{\nu e}; & 0 & 0 \\ i(f_1 + if_2) \otimes M_{\nu e}; & -if_3 \otimes M_{\nu e}; & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_3 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$- (\|b_1^2\| + \|b_2^2\|) \text{diag} (M_{\{\nu e\}}, M_{\{\nu e\}}, 2M_\nu M_\nu^*, 2M_d M_d^*)$$

Ensuite on peut obtenir :

$$\hat{\sigma}(\omega^1) = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\hat{\pi}(a_\alpha^z) \dots \dots \dots [\hat{\pi}(a_\alpha^2) [\hat{\pi}(a_\alpha^1), [M^2, \hat{\pi}(a_\alpha^0)]]] \dots \dots \dots] \quad (2.40)$$

et qui est donnée par :

$$\hat{\sigma}(\omega^1) = \text{diag} \left(\hat{\sigma}(\omega^1)_q, \hat{\sigma}(\omega^1)_l \right) \quad (2.41)$$

où :

$$\hat{\sigma}(\omega^1)_q = \begin{pmatrix} if_3 I_3 \otimes M_{ud}; & i(f_1 - if_2) I_3 \otimes M_{ud}; & 0 & 0 \\ i(f_1 + if_2) I_3 \otimes M_{ud}; & -if_3 \otimes I_3 \otimes M_{ud}; & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_9 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

et

$$\widehat{\sigma}(\omega^1)_l = \begin{pmatrix} if_3 \otimes M_{\nu e}; & i(f_1 - if_2) \otimes M_{\nu e}; & 0 & 0 \\ i(f_1 + if_2) \otimes M_{\nu e}; & -if_3 \otimes M_{\nu e}; & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_3 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Tout élément de $\widehat{\pi}(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})$ est de la forme de $\widehat{\sigma}(\omega^1)$ on peut écrire donc :

$$\widehat{\sigma}(\Omega^1 \mathbf{a}) = \widehat{\pi}(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a}) \quad (2.43)$$

et ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \{\tau^1, \tau^1\}_q &= -(\|b_1^2\| + \|b_2^2\|) \\ \text{diag}(I_3 \otimes M_{\{ud\}}, I_3 \otimes M_{\{ud\}}, I_3 \otimes 2M_u^* M_u, I_3 \otimes 2M_d^* M_d \text{ mod } \widehat{\pi}_q(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\{\tau^1, \tau^1\}_l = -(\|b_1^2\| + \|b_2^2\|) \text{diag}(M_{\{\nu e\}}, M_{\{\nu e\}}, 2M_\nu M_\nu^*, 2M_d M_d^* \text{ mod } \widehat{\pi}_l(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})) \quad (2.45)$$

Pour $n \succeq 3$ il est facile de prouver que :

$$\widehat{\pi}(\Omega^n \mathbf{a}) = \widehat{\pi}(\mathfrak{S}^n \mathbf{a}) \quad (2.46)$$

où $\{\pi_q(a_1, a_3), \pi_q(a_1, a_3)\} \ni \text{diag}(A_q + \Delta_q, A_l + \Delta_l)$. Tel que A_q est dia-

gonale en bloc de la forme suivante :

$$A_q = \sum_{\alpha} i \text{diag} \left(A'_q \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\widehat{\lambda}_{\alpha}^0 + \lambda_{\alpha}^0 \\ -\frac{2}{3}\widehat{\lambda}_{\alpha}^0 + \lambda_{\alpha}^0 \end{pmatrix} a_{3,\alpha} \right) \otimes I_3 \quad (2.47)$$

où :

$$A'_q = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\widehat{\lambda}_{\alpha}^0 + \lambda_{\alpha}^3 + \lambda_{\alpha}^0 \right) a_{3,\alpha} + \frac{1}{3}i\widehat{\lambda}_{\alpha}^3 I_3 & \left(\lambda_{\alpha}^1 - i\lambda_{\alpha}^2 \right) a_{3,\alpha} + \frac{1}{3} \left(\widehat{\lambda}_{\alpha}^1 - i\widehat{\lambda}_{\alpha}^2 \right) I_3 \\ \left(\lambda_{\alpha}^1 + i\lambda_{\alpha}^2 \right) a_{3,\alpha} + \frac{1}{3} \left(\widehat{\lambda}_{\alpha}^1 + i\widehat{\lambda}_{\alpha}^2 \right) I_3 & \left(\frac{1}{3}\widehat{\lambda}_{\alpha}^0 - \lambda_{\alpha}^3 + \lambda_{\alpha}^0 \right) a_{3,\alpha} - \frac{1}{3}i\widehat{\lambda}_{\alpha}^3 I_3 \end{pmatrix}$$

et

$$A_l = \sum_{\alpha} i \begin{pmatrix} -i\widehat{\lambda}_{\alpha}^3 I_3 & -i \left(\widehat{\lambda}_{\alpha}^1 - i\widehat{\lambda}_{\alpha}^2 \right) I_3 & 0 & 0 \\ -i \left(\widehat{\lambda}_{\alpha}^1 + i\widehat{\lambda}_{\alpha}^2 \right) I_3 & i\widehat{\lambda}_{\alpha}^3 I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_3 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_q = & \text{diag} \left(\left(\lambda + \widetilde{\lambda} + \frac{1}{9}\widehat{\lambda} \right) I_3, \left(\lambda + \widetilde{\lambda} + \frac{1}{9}\widehat{\lambda} \right) I_3 \right. \\ & \left. , \left(\lambda + \frac{16}{9}\widehat{\lambda} \right) I_3, \left(\lambda + \frac{4}{9}\widehat{\lambda} \right) I_3 \right) \otimes I_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

et

$$\Delta_l = \text{diag} \left(\left(\widetilde{\lambda} + \widehat{\lambda} \right) I_3, \left(\widetilde{\lambda} + \widehat{\lambda} \right) I_3, 0_3, 4\widehat{\lambda} I_3 \right) \quad (2.50)$$

où $a_{3,\alpha} \in su(3)$ et $\lambda_\alpha^0, \lambda_\alpha^1, \lambda_\alpha^2, \lambda_\alpha^3, \widehat{\lambda}_\alpha^1, \widehat{\lambda}_\alpha^2, \widehat{\lambda}_\alpha^2, \lambda, \widetilde{\lambda}, \widehat{\lambda} \in \mathbb{R}$

Maintenant et pour pouvoir écrire la structure de la connection il faut trouver les espaces $\mathbf{r}^0 a$ et $\mathbf{r}^1 a$, après quelques vérifications et en tenant compte des matrices de masse générique M_u, M_d, M_ν, M_e on peut facilement prouver que :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^0 a &= \widehat{\pi}(a) \\ \mathbf{r}^1 a &= \widehat{\pi}(\Omega^1 a). \end{aligned} \tag{2.51}$$

et toujours et dans le même contexte des matrices de masses génériques on trouve :

$$\begin{aligned} j^0 a &= 0, \\ j^1 a &= 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

et

$$\begin{aligned} j^2 a &= \widehat{\pi}(\mathfrak{S}^2 a) \oplus (\{\widehat{\pi}(a), \widehat{\pi}(a)\} + \text{diag}(\mathbb{R}I_{36}, \mathbb{R}I_{12})) \\ &\ni J_2 \oplus \text{diag}(A_q, A_l) \oplus \text{diag}(J_q, J_l) \end{aligned} \tag{2.53}$$

et

$$J_l = \text{diag}((\lambda_2 + \lambda_0) I_3, (\lambda_2 + \lambda_0) I_3, (\lambda_2 + \lambda_3) I_3, (\lambda_2 + \lambda_3 + 4\lambda_0) I_3) \tag{2.54}$$

où $J_2 \in \widehat{\pi}(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})$, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Finalement et pour pouvoir calculer l'action bosonique il faut sélectionner la représentation $e(\{\tau^1, \tau^1\})$ de $\{\tau^1, \tau^1\} + J_2 \mathbf{a}$ orthogonale à $J_2 \mathbf{a}$, le problème est résolu en trouvant la solution du système d'équation qui résulte du produit suivant :

$$\begin{aligned}
0 &= Tr(\{\tau^1, \tau^1\} + J) \cdot J \\
&= 2 \left(\frac{1}{9}\lambda_0 + \lambda_1\right) Tr\left(\left(\frac{1}{9}\lambda_0 + \lambda_1\right) 1_3 + M_{\{du\}}\right) \\
&\quad + 2(\lambda_0 + \lambda_2) Tr\left((\lambda_0 + \lambda_2) 1_3 + M_{\{e\nu\}}\right) \\
&\quad + (\lambda_2 + \lambda_3) Tr\left((\lambda_2 + \lambda_3) 1_3 + M_\nu M_\nu^c\right) \\
&\quad + (4\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3) Tr\left((4\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3) 1_3 + M_e M_e^c\right) \\
&\quad + \left(\frac{4}{9}\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3\right) Tr\left(\left(\frac{4}{9}\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3\right) 1_3 + 2M_d M_d^c\right) \\
&\quad + \left(\frac{16}{9}\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3\right) Tr\left(\left(\frac{16}{9}\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3\right) 1_3 + 2M_u M_u^c\right)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

du quel résulte le système :

$$3 \left(\frac{1}{9}\lambda_0 + \lambda_1\right) + Tr M_{\{du\}} I_3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\lambda_0 + \lambda_1\right) = -\frac{1}{3} Tr (M_u M_u^* + M_d M_d^*) I_3 \tag{2.56a}$$

$$3(\lambda_0 + \lambda_2) + Tr M_{\{e\nu\}} I_3 = 0 \Rightarrow (\lambda_0 + \lambda_2) = -\frac{1}{3} Tr (M_e M_e^* + M_\nu M_\nu^*) I_3 \tag{2.56b}$$

$$3(\lambda_2 + \lambda_3) + Tr M_\nu M_\nu^c I_3 = 0 \tag{2.56c}$$

$$3(4\lambda_0 + \lambda_2 + \lambda_3) + Tr M_e M_e^c I_3 = 0 \quad (2.56d)$$

$$3\left(\frac{4}{9}\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3\right) + 2Tr M_d M_d^c I_3 = 0 \quad (2.56e)$$

$$3\left(\frac{16}{9}\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_3\right) + 2Tr M_u M_u^c I_3 = 0 \quad (2.56f)$$

où la solution suivante est proposée :

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_{\{ud\}} &:= M_u M_u^* + M_d M_d^* - \frac{1}{3} Tr (M_u M_u^* + M_d M_d^*) I_3 \\ \widetilde{M}_{\{e\nu\}} &:= M_e M_e^* + M_\nu M_\nu^* - \frac{1}{3} Tr (M_e M_e^* + M_\nu M_\nu^*) I_3 \\ \widetilde{M}_{uu} &:= M_u M_u^* - \frac{1}{24} Tr (5M_u M_u^* + 3M_d M_d^* - M_\nu M_\nu^* + M_e M_e^*) I_3 \\ \widetilde{M}_{dd} &:= M_d M_d^* - \frac{1}{24} Tr (3M_u M_u^* + 5M_d M_d^* + M_\nu M_\nu^* - M_e M_e^*) I_3 \\ \widetilde{M}_{\nu\nu} &:= M_\nu^* M_\nu - \frac{1}{24} Tr (-3M_u M_u^* + 3M_d M_d^* + 7M_\nu M_\nu^* + M_e M_e^*) I_3 \\ \widetilde{M}_{ee} &:= M_e^* M_e - \frac{1}{24} Tr (3M_u M_u^* - 3M_d M_d^* + M_\nu M_\nu^* + 7M_e M_e^*) I_3 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Donc la partie canonique $e(\{\tau^1, \tau^1\})$ de $\{\tau^1, \tau^1\} + j^2 a$ orthogonal à $j^2 a$ dans $M_{48}\mathbb{C}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} e(\{\tau^1, \tau^1\}) &= -(\|b_1^2\| + \|b_2^2\|) \\ &diag \left(I_3 \otimes \left(\widetilde{M}_{\{ud\}}, \widetilde{M}_{\{ud\}}, 2\widetilde{M}_{uu}, 2\widetilde{M}_{dd} \right), \widetilde{M}_{\{e\nu\}}, \widetilde{M}_{\{e\nu\}}, 2\widetilde{M}_{\nu\nu}, 2\widetilde{M}_{\nu\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Maintenant et en introduisant la variété Riemannienne à spin X et choisissons une base locale autoadjointe $\{\gamma^\mu\}_{\mu=1,2,3,4}$ de Λ^1 . La connection ρ a la structure suivante :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_q & 0 \\ 0 & \rho_l \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

où

$$\rho_q = \begin{pmatrix} \alpha \otimes I_3 & i\gamma^* I_3 \otimes I_3 & -i\gamma^5 \bar{\phi}_2 \otimes M_u & -i\gamma^5 \phi_1 \otimes M_d \\ i\gamma I_3 \otimes I_3 & \beta \otimes I_3 & i\gamma^5 \bar{\phi}_1 \otimes M_u & -i\gamma^5 \phi_2 \otimes M_d \\ -i\gamma^5 \phi_2 \otimes M_u^* & i\gamma^5 \phi_1 \otimes M_u^* & A + \frac{4}{3}iA_0 & 0 \\ -i\gamma^5 \bar{\phi}_1 \otimes M_d^* & -i\gamma^5 \bar{\phi}_2 \otimes M_d^* & 0 & A - \frac{2}{3}iA_0 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\alpha = \left(A + i \left(\frac{1}{3}A_0 + A_3 \right) I_3 \right), \beta = \left(A + i \left(\frac{1}{3}A_0 - A_3 \right) I_3 \right), \gamma = (A_1 + iA_2)$$

et

$$\rho_l = \begin{pmatrix} i(-A_0 + A_3) \otimes I_3 & i(A_1 - iA_2) \otimes I_3 & -i\gamma^5 \bar{\phi}_2 \otimes M_\nu & -i\gamma^5 \phi_1 \otimes M_e \\ i(A_1 + iA_2) \otimes I_3 & i(-A_0 - A_3) \otimes I_3 & i\gamma^5 \bar{\phi}_1 \otimes M_\nu & -i\gamma^5 \phi_2 \otimes M_e \\ -i\gamma^5 \phi_2 \otimes M_\nu^* & i\gamma^5 \phi_1 \otimes M_\nu^* & 0_3 & 0 \\ -i\gamma^5 \bar{\phi}_1 \otimes M_e & -i\gamma^5 \bar{\phi}_2 \otimes M_e & 0 & -2iA_0 \otimes I_3 \end{pmatrix}$$

Maintenant en incérant ρ dans l'action bosonique on a :

$$\begin{aligned} e(\theta) &= d\rho + \rho^2 - i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\} + \widehat{\sigma}_g(\rho)\gamma^5 + j \\ &= d\rho + \rho^2 - i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\} + \frac{1}{2}\{M, M\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

En suite on calcul $e(\theta)^2$:

$$e(\theta)^2 = \left(d\rho + \rho^2 - i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\} + \frac{1}{2}\{M, M\} \right)^2 \quad (2.61)$$

Dans ce qui suit nous allons montrer plus de détails du calcul, pour montrer la complexité et la dureté de la tâche et aussi pour que sa soit un exemple pratique pour nos étudiants, puisque dans les articles en générale ce genre de détail n'est pas toujours présenté.

$$\begin{aligned} e(\theta)^2 &= (d\rho + \rho^2)^2 - (\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})^2 + (d\rho + \rho^2)(-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) \\ &+ (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})(d\rho + \rho^2) + \left(\frac{1}{2}\{M, M\}\right)^2 \\ &+ (d\rho + \rho^2)\{M, M\} + (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})\left(\frac{1}{2}\{M, M\}\right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

En premier lieu Nous calculons $(d\rho + \rho^2)^2$:

$$((d\rho) + \rho^2)^2 = ((d\rho) + \rho^2)^2 = (d\rho)^2 + (\rho^2)^2 + (d\rho)\rho^2 + \rho^2(d\rho) \quad (2.63)$$

et comme toutes les matrices sont diagonales en block comme c'est illustré dans ce qui suit :

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} \rho_q & 0 \\ 0 & \rho_l \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \rho_q^2 & 0 \\ 0 & \rho_l^2 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

et

$$d\rho = \begin{pmatrix} d\rho_q & 0 \\ 0 & d\rho_l \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

ce qui donne :

$$(d\rho)^2 = \begin{pmatrix} d\rho_q & 0 \\ 0 & d\rho_l \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} d\rho_q^2 & 0 \\ 0 & d\rho_l^2 \end{pmatrix}$$

et puis :

$$d\rho\rho^2 = \begin{pmatrix} d\rho_q & 0 \\ 0 & d\rho_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_q^2 & 0 \\ 0 & \rho_l^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\rho_q\rho_q^2 & 0 \\ 0 & d\rho_l\rho_l^2 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

il va y avoir cette séparation entre quarks et leptons dans toutes les autres matrices donc ce qui permet de faire tous les calculs pour les leptons et la même chose peut être trouver pour les quarks :

Donc pour les leptons ρ_l prend la forme suivante :

$$\rho_l = \begin{pmatrix} i(-A_0+A_3)\otimes I_3 & i(A_1-iA_2)\otimes I_3 & -i\gamma^5\bar{\phi}_2\otimes M_\nu & -i\gamma^5\phi_1\otimes M_e \\ i(A_1+iA_2)\otimes I_3 & i(-A_0-A_3)I_3\otimes I_3 & i\gamma^5\bar{\phi}_1\otimes M_\nu & -i\gamma^5\phi_2\otimes M_e \\ -i\gamma^5\phi_2\otimes M_\nu^* & i\gamma^5\phi_1\otimes M_\nu^* & 0_3 & 0 \\ -i\gamma^5\bar{\phi}_1\otimes M_e & -i\gamma^5\bar{\phi}_2\otimes M_e & 0 & -2iA_0\otimes I_3 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

et pour les quarks ρ_q est donné par :

$$\rho_q = \begin{pmatrix} (A+i(\frac{1}{3}A_0+A_3)I_3)\otimes I_3 & i(A_1-iA_2)I_3\otimes I_3 & -i\gamma^5\bar{\phi}_2\otimes M_u & -i\gamma^5\phi_1\otimes M_d \\ i(A_1+iA_2)I_3\otimes I_3 & (A+i(\frac{1}{3}A_0-A_3)I_3)\otimes I_3 & i\gamma^5\bar{\phi}_1\otimes M_u & -i\gamma^5\phi_2\otimes M_d \\ -i\gamma^5\phi_2\otimes M_u^* & i\gamma^5\phi_1\otimes M_u^* & A+\frac{4}{3}iA_0 & 0 \\ -i\gamma^5\bar{\phi}_1\otimes M_d^* & -i\gamma^5\bar{\phi}_2\otimes M_d^* & 0 & A+\frac{2}{3}iA_0 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Après différenciation et en adoptant la notation où on prend $Q = dA$ et $d\varphi = \Phi$, qui est en fait utilisé que pour faciliter le calcul vu qu'il est très long :

$$d\rho_l = \begin{pmatrix} i(-Q_0 + Q_3) & i(Q_1 - iQ_2) & -i\gamma_c\Phi_2^*M_\nu & -i\gamma_c\Phi_1M_e \\ i(Q_1 + iQ_2) & i(-Q_0 - Q_3) & i\gamma_c\Phi_1^*M_\nu & -i\gamma_c\Phi_2M_e \\ -i\gamma_c\Phi_2M_\nu^* & i\gamma_c\Phi_1M_\nu^* & 0 & 0 \\ -i\gamma_c\Phi_1^*M_e^* & -i\gamma_c\Phi_2^*M_e^* & 0 & -2iQ_0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

et

$$(d\rho_l)^2 = \begin{pmatrix} i(-Q_0 + Q_3) & i(Q_1 - iQ_2) & -i\gamma_c\Phi_2^*M_\nu & -i\gamma_c\Phi_1M_e \\ i(Q_1 + iQ_2) & i(-Q_0 - Q_3) & i\gamma_c\Phi_1^*M_\nu & -i\gamma_c\Phi_2M_e \\ -i\gamma_c\Phi_2M_\nu^* & i\gamma_c\Phi_1M_\nu^* & 0 & 0 \\ -i\gamma_c\Phi_1^*M_e^* & -i\gamma_c\Phi_2^*M_e^* & 0 & -2iQ_0 \end{pmatrix}^2 \quad (2.71)$$

après on calcul la trace :

$$\begin{aligned} & \text{trace}(d\rho_l)^2 = \\ & = \text{trace} \begin{pmatrix} i(-Q_0 + Q_3) & i(Q_1 - iQ_2) & -i\gamma_c\Phi_2^*M_\nu & -i\gamma_c\Phi_1M_e \\ i(Q_1 + iQ_2) & i(-Q_0 - Q_3) & i\gamma_c\Phi_1^*M_\nu & -i\gamma_c\Phi_2^*M_e \\ -i\gamma_c\Phi_2M_\nu^* & i\gamma_c\Phi_1M_\nu^* & 0 & 0 \\ -i\gamma_c\Phi_1^*M_e^* & -i\gamma_c\Phi_2^*M_e^* & 0 & -2iQ_0 \end{pmatrix}^2 \\ & = (-iQ_0 - iQ_3)^2 - 2M_e\Phi_1M_e^*\Phi_1^* - 2\Phi_1M_\nu\Phi_1^*M_\nu^* - 2\Phi_2M_\nu\Phi_2^*M_\nu^* \\ & \quad - 2M_eM_e^*(\Phi_2^*)^2 - 4Q_0^2 + (iQ_3 - iQ_0)^2 + 2(iQ_1 + Q_2)(iQ_1 - Q_2) \end{aligned} \quad (2.73)$$

et la même chose pour les quarks :

$$(d\rho_q)^2 = \begin{pmatrix} Q+i(\frac{1}{3}Q_0+Q_3) & i(Q_1-iQ_2) & -i\gamma_c\phi_2^*M_u & -i\gamma_c\phi_1M_d \\ i(Q_1+iQ_2) & Q+i(\frac{1}{3}Q_0-Q_3) & i\gamma_c\phi_1^*M_u & -i\gamma_c\phi_2M_d \\ -i\gamma_c\phi_2M_u^* & i\gamma_c\phi_1M_u^* & Q + \frac{4}{3}iQ_0 & 0 \\ -i\gamma_c\phi_1^*M_d^* & -i\gamma_c\phi_2^*M_d^* & 0 & Q + -\frac{2}{3}iQ_0 \end{pmatrix}^2 \quad (2.74)$$

et sa trace est :

$$\begin{aligned}
\text{trace}(d\rho_q)^2 &= (Q + \frac{4}{3}iQ_0)^2 - 2M_d\phi_2M_d^*\phi_2^* \\
&\quad - 2M_u\phi_1M_u^*\phi_1^* - 2M_u\phi_2\gamma_c^2M_u^*\phi_2^* - 2M_d\phi_1\gamma_c^2M_d^*\phi_1^* \\
&\quad + (Q - \frac{2}{3}iQ_0)^2 + 2(iQ_1 + Q_2)(iQ_1 - Q_2) \\
&\quad + (Q - iQ_3 + \frac{1}{3}iQ_0)^2 + (Q + \frac{1}{3}iQ_0 + iQ_3)^2
\end{aligned} \tag{2.75}$$

Le calcul de toute la trace passe par les étapes suivantes et pour les leptons et pour les quarks, dans ce qui suit on présente le cas des leptons et de la même façon on obtient le cas des quarks qui présente en fait des résultats similaires :

$$\begin{aligned}
\text{Tracee}(\theta)^2 &= \text{Trace}(d\rho + \rho^2 - i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\} + \frac{1}{2}\{M, M\})^2 \\
&= \text{trace}((d\rho + \rho^2)^2 + (d\rho + \rho^2)(-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) \\
&\quad + (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})(d\rho + \rho^2) + (\frac{1}{2}\{M, M\})^2 + (d\rho + \rho^2)\{M, M\} \\
&\quad + (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})(\frac{1}{2}\{M, M\}) - (\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})^2)
\end{aligned} \tag{2.76}$$

En premier lieu on calcul $(d\rho + \rho^2)^2$:

$$\begin{aligned}
\text{Trace}((\partial\rho) + \rho^2)^2 &= \text{trace}((\partial\rho) + \rho^2)^2 \\
&= (\partial\rho)^2 + (\rho^2)^2 + (\partial\rho)\rho^2 + \rho^2(\partial\rho)
\end{aligned} \tag{2.77}$$

où :

$$\begin{aligned}
& \text{trace} (d\rho_l)^2 = \\
& (-iQ_0 - iQ_3)^2 - 2M_e\Phi_1M_e^*\Phi_1^* - 2\Phi_1M_\nu\Phi_1^*M_\nu^* - 2\Phi_2M_\nu\Phi_2^*M_\nu^* \quad (2.78) \\
& -2M_eM_e^*(\Phi_2^*)^2 - 4Q_0^2 + (iQ_3 - iQ_0)^2 + 2(iQ_1 + Q_2)(iQ_1 - Q_2)
\end{aligned}$$

après on calcul la trace de $(\rho^2)^2$:

$$\begin{aligned}
& \text{trace} (\rho_l^2)^2 = (-\phi_1M_\nu\phi_1^*M_\nu^* - \phi_2M_\nu\phi_2^*M_\nu^*)^2 \\
& - (M_e\phi_1M_e^*\phi_1^* + M_e\phi_2M_e^*\phi_2^* + 4A_0^2)^2 \\
& + ((iA_3 - iA_0)^2 - \phi_2M_\nu\phi_2^*M_\nu^* - M_e\phi_1M_e^*\phi_1^* + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2))^2 \\
& + ((-iA_0 - iA_3)^2 - \phi_1M_\nu\phi_1^*M_\nu^* - M_e\phi_2M_e^*\phi_2^* + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2))^2 \\
& + 2(iM_\nu\gamma^5(\phi_1^*(iA_1 + A_2) - \phi_2^*(iA_3 - iA_0))) \cdot \\
& \quad \cdot (i\gamma^5M_\nu^*(\phi_1(iA_1 - A_2) - \phi_2(iA_3 - iA_0))) \\
& + 2(i\gamma^5M_\nu^*(\phi_1(-iA_0 - iA_3) - \phi_2(iA_1 + A_2))) \cdot \\
& \quad \cdot (i\gamma^5M_\nu(\phi_1^*(-iA_0 - iA_3) - \phi_2^*(iA_1 - A_2))) \\
& + 2(-2A_0M_e\phi_1\gamma^5 - iM_e\phi_2\gamma^5(iA_1 + A_2) - iM_e\phi_1\gamma^5(iA_3 - iA_0)) \\
& + (-2A_0\gamma^5M_e^*\phi_1^* - i\gamma^5M_e^*\phi_2^*(iA_1 - A_2) - i\gamma^5M_e^*\phi_1^*(iA_3 - iA_0)) \\
& + 2(-2A_0\gamma^5M_e^*\phi_2^* - i\gamma^5M_e^*\phi_1^*(iA_1 + A_2) - i\gamma^5M_e^*\phi_2^*(-iA_0 - iA_3)) \\
& + (-2A_0M_e\phi_2\gamma^5 - iM_e\phi_1\gamma^5(iA_1 - A_2) - iM_e\phi_2\gamma^5(-iA_0 - iA_3)) \\
& + 2\left(\phi_1M_\nu(\gamma^5)^2\phi_2^*M_\nu^* - M_e\phi_1(\gamma^5)^2M_e^*\phi_2^*\right) \\
& + \phi_2M_\nu(\gamma^5)^2\phi_1^*M_\nu^* - M_e\phi_2(\gamma^5)^2M_e^*\phi_1^* \\
& + 2(iA_1 + A_2)(-iA_0 - iA_3) + 2(iA_1 + A_2)(iA_3 - iA_0) \\
& + (iA_1 - A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 - A_2)(iA_3 - iA_0)
\end{aligned} \tag{2.79}$$

En suite :

$$\begin{aligned}
\text{traced } \rho_i \rho_i^2 &= iM_\nu \gamma^5 \Phi_1^* (i\phi_1 \gamma^5 M_\nu^* (-iA_0 - iA_3) - i\phi_2 \gamma^5 M_\nu^* (iA_1 + A_2)) \\
&- 2iQ_0 \left(-4A_0^2 - M_e \phi_1 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_1^* - M_e \phi_2 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_2^* \right) \\
&- i\Phi_2 \gamma^5 M_\nu^* (iM_\nu \gamma^5 \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_\nu \gamma^5 \phi_2^* (iA_3 - iA_0)) \\
&+ i\Phi_1 \gamma^5 M_\nu^* (iM_\nu \gamma^5 \phi_1^* (-iA_0 - iA_3) - iM_\nu \gamma^5 \phi_2^* (iA_1 - A_2)) \\
&- iM_\nu \gamma^5 \Phi_2^* (i\phi_1 \gamma^5 M_\nu^* (iA_1 - A_2) - i\phi_2 \gamma^5 M_\nu^* (iA_3 - iA_0)) \\
&- i\gamma^5 M_e^* \Phi_1^* (-2A_0 M_e \phi_1 \gamma^5 - iM_e \phi_2 \gamma^5 (iA_1 + A_2) - iM_e \phi_1 \gamma^5 (iA_3 - iA_0)) \\
&- iM_e \Phi_2 \gamma^5 (-2A_0 \gamma^5 M_e^* \phi_2^* - i\gamma^5 M_e^* \phi_1^* (iA_1 + A_2) - i\gamma^5 M_e^* \phi_2^* (-iA_0 - iA_3)) \\
&- i\gamma^5 M_e^* \Phi_2^* (-2A_0 M_e \phi_2 \gamma^5 - iM_e \phi_1 \gamma^5 (iA_1 - A_2) - iM_e \phi_2 \gamma^5 (-iA_0 - iA_3)) \\
&- iM_e \Phi_1 \gamma^5 (-2A_0 \gamma^5 M_e^* \phi_1^* - i\gamma^5 M_e^* \phi_2^* (iA_1 - A_2) - i\gamma^5 M_e^* \phi_1^* (iA_3 - iA_0)) \\
&+ (-iQ_0 - iQ_3) \left(-\phi_1 M_\nu (\gamma^5)^2 \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_2^* \right) \\
&+ (-iQ_0 - iQ_3) \left((-iA_0 - iA_3)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2) \right) \\
&+ (iQ_3 - iQ_0) \left(-\phi_2 M_\nu (\gamma^5)^2 \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_1^* \right) \\
&+ (iQ_3 - iQ_0) \left((iA_3 - iA_0)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2) \right) \\
&+ (iQ_1 - Q_2) (\phi_1 M_\nu \gamma_c^2 \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 \gamma_c^2 M_e^* \phi_2^*) \\
&+ (iQ_1 - Q_2) \left((iA_1 + A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 + A_2)(iA_3 - iA_0) \right) \\
&+ (iQ_1 + Q_2) \phi_2 M_\nu (\gamma^5)^2 \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_1^* \\
&+ (iQ_1 + Q_2) (iA_1 - A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 - A_2)(iA_3 - iA_0)
\end{aligned} \tag{2.80}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{trace} \rho_l^2 d\rho_l &= iM_\nu \Phi_1^* (i\phi_1 M_\nu^* (-iA_0 - iA_3) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_1 + A_2)) \\
&- 2iQ_0 \left(-4A_0^2 - M_e \phi_1 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_1^* - M_e \phi_2 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_2^* \right) \\
&- i\Phi_2 (\gamma^5)^2 M_\nu^* (iM_\nu \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_\nu \phi_2^* (iA_3 - iA_0)) \\
&+ i\Phi_1 (\gamma^5)^2 M_\nu^* (iM_\nu \phi_1^* (-iA_0 - iA_3) - iM_\nu \phi_2^* (iA_1 - A_2)) \\
&- iM_\nu (\gamma^5)^2 \Phi_2^* (i\phi_1 M_\nu^* (iA_1 - A_2) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_3 - iA_0)) \\
&- i(\gamma^5)^2 M_e^* \Phi_1^* (-2A_0 M_e \phi_1 - iM_e \phi_2 (iA_1 + A_2) - iM_e \phi_1 (iA_3 - iA_0)) \\
&- iM_e \Phi_2 (\gamma^5)^2 (-2A_0 M_e^* \phi_2^* - iM_e^* \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_e^* \phi_2^* (-iA_0 - iA_3)) \\
&- i(\gamma^5)^2 M_e^* \Phi_2^* (-2A_0 M_e \phi_2 - iM_e \phi_1 (iA_1 - A_2) - iM_e \phi_2 (-iA_0 - iA_3)) \\
&- iM_e \Phi_1 (\gamma^5)^2 (-2A_0 M_e^* \phi_1^* - iM_e^* \phi_2^* (iA_1 - A_2) - iM_e^* \phi_1^* (iA_3 - iA_0)) \\
&+ (-iQ_0 - iQ_3) \left(-\phi_1 M_\nu (\gamma^5)^2 \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_2^* \right) \\
&+ (-iQ_0 - iQ_3) \left((-iA_0 - iA_3)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2) \right) \\
&+ (iQ_3 - iQ_0) \left(-\phi_2 M_\nu (\gamma^5)^2 \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 (\gamma^5)^2 M_e^* \phi_1^* \right) \\
&+ (iQ_3 - iQ_0) \left((iA_3 - iA_0)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2) \right) \\
&+ (iQ_1 - Q_2) (\phi_1 M_\nu \gamma_c^2 \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 \gamma_c^2 M_e^* \phi_2^*) \\
&+ (iQ_1 - Q_2) \left((iA_1 + A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 + A_2)(iA_3 - iA_0) \right) \\
&+ (iQ_1 + Q_2) (\phi_2 M_\nu \gamma_c^2 \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 \gamma_c^2 M_e^* \phi_1^*) \\
&+ (iQ_1 + Q_2) \left((iA_1 - A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 - A_2)(iA_3 - iA_0) \right)
\end{aligned} \tag{2.81}$$

maintenant on calcul :

$$\begin{aligned}
\text{trace} (i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})^2 &= M_e M_e^* (3A_0 + A_3)^2 \\
&+ 2\phi_1 \phi_1^* (M_e M_e^* - M_\nu M_\nu^*)^2 + 2(M_e M_e^*)^2 (\phi_2 + \phi_2^*)^2 \\
&+ 2(M_\nu M_\nu^*)^2 (\phi_2 + \phi_2^*)^2 - 2M_\nu M_\nu^* (iA_3 - iA_0)^2 \\
&- 2M_e M_e^* (iA_1 + A_2) (iA_1 - A_2) \\
&- 2M_\nu M_\nu^* (iA_1 + A_2) (iA_1 - A_2) \\
&+ (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3)) (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3))
\end{aligned} \tag{2.82}$$

et puis on doit calculer la trace de ce terme :

$$(d\rho + \rho^2) (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) + (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) (d\rho + \rho^2)$$

en premier lieu calculons le premier terme :

$$(d\rho + \rho^2) (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) = (d\rho (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) + \rho^2 (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})) \tag{2.83}$$

Le calcul du premier terme du membre de gauche de l'équation (2.83) donne :

$$\begin{aligned}
& \text{traced} \rho(-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) = \\
& M_e M_e^* \Phi_1^* (iA_1 + A_2) - 2iQ_0 (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) \\
& - M_\nu \Phi_1^* M_\nu^* (iA_1 + A_2) + M_e \Phi_1 M_e^* (iA_1 - A_2) \\
& - \Phi_1 M_\nu M_\nu^* (iA_1 - A_2) + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iQ_1 + Q_2) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iQ_1 - Q_2) + \Phi_2 M_\nu M_\nu^* (iA_3 - iA_0) \quad (2.84) \\
& + M_\nu \Phi_2^* M_\nu^* (iA_3 - iA_0) + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-iQ_0 - iQ_3) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (iQ_3 - iQ_0) \\
& - iM_e \Phi_2 (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& - iM_e^* \Phi_2^* (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3))
\end{aligned}$$

Et pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
& \text{trace} \rho^2 (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) = \\
& (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (-\phi_1 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - \phi_2 M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-M_e \phi_1 M_e^* \phi_1^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^* - 4A_0^2) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) ((-iA_0 - iA_3)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2)) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-\phi_1 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) ((iA_3 - iA_0)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2)) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (-\phi_2 M_\nu \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 M_e^* \phi_1^*) \\
& + iM_\nu (iA_1 - A_2) (i\phi_1 M_\nu^* (-iA_0 - iA_3) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_1 + A_2)) \\
& + iM_\nu^* (iA_1 + A_2) (iM_\nu \phi_1^* (-iA_0 - iA_3) - iM_\nu \phi_2^* (iA_1 - A_2)) \\
& + iM_e^* (iA_1 - A_2) (-2A_0 M_e \phi_1 - iM_e \phi_2 (iA_1 + A_2) - iM_e \phi_1 (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_e (iA_1 + A_2) (-2A_0 M_e^* \phi_1^* - iM_e^* \phi_2^* (iA_1 - A_2) - iM_e^* \phi_1^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (\phi_1 M_\nu \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iA_1 + A_2) (-iA_0 - iA_3) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iA_1 + A_2) (iA_3 - iA_0) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (\phi_2 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_1^*) \\
& + M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^* ((iA_1 - A_2) (-iA_0 - iA_3) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iA_1 - A_2) (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_\nu^* (iA_3 - iA_0) (iM_\nu \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_\nu \phi_2^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_\nu (iA_3 - iA_0) (i\phi_1 M_\nu^* (iA_1 - A_2) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + ((2A_0 + i(-iA_0 - iA_3)) M_e) \cdot \\
& \quad \cdot (M_e^* (-2A_0 \phi_2^* - i(\phi_1^* (iA_1 + A_2) + \phi_2^* (-iA_0 - iA_3)))) \\
& + ((2A_0 + i(-iA_0 - iA_3)) M_e^*) \cdot \\
& \quad \cdot (M_e (-2A_0 \phi_2 - i(\phi_1 (iA_1 - A_2) + \phi_2 (-iA_0 - iA_3))))
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Et il y a aussi :

$$\begin{aligned}
& \text{trace}(-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) d\rho = \\
& M_e M_e^* \Phi_1^* (iA_1 + A_2) - 2iQ_0 (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) \\
& - M_\nu \Phi_1^* M_\nu^* (iA_1 + A_2) + M_e \Phi_1 M_e^* (iA_1 - A_2) \\
& - \Phi_1 M_\nu M_\nu^* (iA_1 - A_2) + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iQ_1 + Q_2) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iQ_1 - Q_2) + \Phi_2 M_\nu M_\nu^* (iA_3 - iA_0) \quad (2.86) \\
& + M_\nu \Phi_2^* M_\nu^* (iA_3 - iA_0) + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-iQ_0 - iQ_3) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (iQ_3 - iQ_0) \\
& - iM_e \Phi_2 (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& - iM_e^* \Phi_2^* (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3))
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
& \text{trace}(-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) \rho^2 = \\
& (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) (-\phi_1 \phi_1^* M_\nu M_\nu^* - \phi_2 \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-M_e \phi_1 M_e^* \phi_1^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^* - 4A_0^2) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) ((-iA_0 - iA_3)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2)) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-\phi_1 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) ((iA_3 - iA_0)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2)) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) (-\phi_2^* \phi_2 M_\nu M_\nu^* - \phi_1 \phi_1^* M_e M_e^*) \\
& + iM_\nu (iA_1 - A_2) (i\phi_1 M_\nu^* (-iA_0 - iA_3) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_1 + A_2)) \\
& + iM_\nu^* (iA_1 + A_2) M_\nu (i\phi_1^* (-iA_0 - iA_3) - i\phi_2^* (iA_1 - A_2)) \\
& + iM_e^* (iA_1 - A_2) M_e (-2A_0 \phi_1 - i\phi_2 (iA_1 + A_2) - i\phi_1 (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_e (iA_1 + A_2) M_e^* (-2A_0 \phi_1^* - i\phi_2^* (iA_1 - A_2) - i\phi_1^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (\phi_1 M_\nu \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iA_1 + A_2) (-iA_0 - iA_3) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iA_1 + A_2) (iA_3 - iA_0) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (\phi_2 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_1^*) + \\
& (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iA_1 - A_2) (-iA_0 - iA_3) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iA_1 - A_2) (iA_3 - iA_0) \\
& + iM_\nu^* (iA_3 - iA_0) M_\nu (i\phi_1^* (iA_1 + A_2) - i\phi_2^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_\nu (iA_3 - iA_0) M_\nu^* (i\phi_1 (iA_1 - A_2) - i\phi_2 (iA_3 - iA_0)) \\
& + M_e (2A_0 + i(-iA_0 - iA_3)) \cdot \\
& \quad \cdot M_e^* (-2A_0 \phi_2^* - i\phi_1^* (iA_1 + A_2) - i\phi_2^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& + M_e^* (2A_0 + i(-iA_0 - iA_3)) \cdot \\
& \quad \cdot M_e (-2A_0 \phi_2 - i\phi_1 (iA_1 - A_2) - i\phi_2 (-iA_0 - iA_3))
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Après tout calcul fait que nous avons résumé dans les étapes précédentes

représentés dans le calcul de l'équation (2.83) en faisant la somme de toutes les traces obtenues :

$$\begin{aligned}
& \text{trace}((d\rho + \rho^2)^2 - (\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})^2 + (d\rho + \rho^2)(-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\}) \\
& + (-i\{\gamma^5 \otimes M, \rho\})(d\rho + \rho^2)) \\
& = -2Q_0Q_3 - Q_0^2 - Q_3^2 - 4Q_0^2 + 2Q_0Q_3 - Q_0^2 - Q_3^2 - 2Q_1^2 - 2Q_2^2 \\
& - 2M_e\Phi_1M_e^*\Phi_1^* - 2\Phi_1M_\nu\Phi_1^*M_\nu^* - 2\Phi_2M_\nu\Phi_2^*M_\nu^* - 2M_eM_e^*(\Phi_2^*)^2 \\
& + (-\phi_1M_\nu\phi_1^*M_\nu^* - \phi_2M_\nu\phi_2^*M_\nu^*)^2 + (-M_e\phi_1M_e^*\phi_1^* - M_e\phi_2M_e^*\phi_2^* - 4A_0^2)^2 \\
& + ((iA_3 - iA_0)^2 - \phi_2M_\nu\phi_2^*M_\nu^* - M_e\phi_1M_e^*\phi_1^* + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2))^2 \\
& + ((-iA_0 - iA_3)^2 - \phi_1M_\nu\phi_1^*M_\nu^* - M_e\phi_2M_e^*\phi_2^* + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2))^2 \\
& + 2(iM_\nu\gamma^5\phi_1^*(iA_1 + A_2) - iM_\nu\gamma^5\phi_2^*(iA_3 - iA_0)) \\
& (i\phi_1\gamma^5M_\nu^*(iA_1 - A_2) - i\phi_2\gamma^5M_\nu^*(iA_3 - iA_0)) \\
& + 2(i\phi_1\gamma^5M_\nu^*(-iA_0 - iA_3) - i\phi_2\gamma^5M_\nu^*(iA_1 + A_2)) \\
& (iM_\nu\gamma^5\phi_1^*(-iA_0 - iA_3) - iM_\nu\gamma^5\phi_2^*(iA_1 - A_2)) \\
& + 2(-2A_0M_e\phi_1\gamma^5 - iM_e\phi_2\gamma^5(iA_1 + A_2) - iM_e\phi_1\gamma^5(iA_3 - iA_0)) \\
& (-2A_0\gamma_cM_e^*\phi_1^* - i\gamma_cM_e^*\phi_2^*(iA_1 - A_2) - i\gamma_cM_e^*\phi_1^*(iA_3 - iA_0)) \\
& + 2(-2A_0\gamma_cM_e^*\phi_2^* - i\gamma_cM_e^*\phi_1^*(iA_1 + A_2) - i\gamma_cM_e^*\phi_2^*(-iA_0 - iA_3)) \\
& (-2A_0M_e\phi_2\gamma_c - iM_e\phi_1\gamma_c(iA_1 - A_2) - iM_e\phi_2\gamma_c(-iA_0 - iA_3)) \\
& + 2(\phi_1M_\nu\gamma_c^2\phi_2^*M_\nu^* - M_e\phi_1\gamma_c^2M_e^*\phi_2^*) + \phi_2M_\nu\gamma_c^2\phi_1^*M_\nu^* - M_e\phi_2\gamma_c^2M_e^*\phi_1^* \\
& + 2((iA_1 + A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 + A_2)(iA_3 - iA_0)) \\
& + (iA_1 - A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 - A_2)(iA_3 - iA_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +iM_\nu\gamma_c\Phi_1^*(i\phi_1\gamma_cM_\nu^*(-iA_0-iA_3)-i\phi_2\gamma_cM_\nu^*(iA_1+A_2)) \\
& -2iQ_0(-4A_0^2-M_e\phi_1\gamma_c^2M_e^*\phi_1^*-M_e\phi_2\gamma_c^2M_e^*\phi_2^*) \\
& -i\Phi_2\gamma_cM_\nu^*(iM_\nu\gamma_c\phi_1^*(iA_1+A_2)-iM_\nu\gamma_c\phi_2^*(iA_3-iA_0)) \\
& +i\Phi_1\gamma_cM_\nu^*(iM_\nu\gamma_c\phi_1^*(-iA_0-iA_3)-iM_\nu\gamma_c\phi_2^*(iA_1-A_2)) \\
& -iM_\nu\gamma_c\Phi_2^*(i\phi_1\gamma_cM_\nu^*(iA_1-A_2)-i\phi_2\gamma_cM_\nu^*(iA_3-iA_0)) \\
& -i\gamma_cM_e^*\Phi_1^*(-2A_0M_e\phi_1\gamma_c-iM_e\phi_2\gamma_c(iA_1+A_2)-iM_e\phi_1\gamma_c(iA_3-iA_0)) \\
& -iM_e\Phi_2\gamma_c(-2A_0\gamma_cM_e^*\phi_2^*-i\gamma_cM_e^*\phi_1^*(iA_1+A_2)-i\gamma_cM_e^*\phi_2^*(-iA_0-iA_3)) \\
& -i\gamma_cM_e^*\Phi_2^*(-2A_0M_e\phi_2\gamma_c-iM_e\phi_1\gamma_c(iA_1-A_2)-iM_e\phi_2\gamma_c(-iA_0-iA_3)) \\
& -iM_e\Phi_1\gamma_c(-2A_0\gamma_cM_e^*\phi_1^*-i\gamma_cM_e^*\phi_2^*(iA_1-A_2)-i\gamma_cM_e^*\phi_1^*(iA_3-iA_0)) \\
& +(-iQ_0-iQ_3)((-iA_0-iA_3)^2+(iA_1+A_2)(iA_1-A_2)) \\
& -(-iQ_0-iQ_3)(\phi_1M_\nu\gamma_c^2\phi_1^*M_\nu^*+M_e\phi_2\gamma_c^2M_e^*\phi_2^*) \\
& +(iQ_3-iQ_0)(iA_3-iA_0)^2+(iA_1+A_2)(iA_1-A_2) \\
& -(iQ_3-iQ_0)(\phi_2M_\nu\gamma_c^2\phi_2^*M_\nu^*+M_e\phi_1\gamma_c^2M_e^*\phi_1^*) \\
& +(iQ_1-Q_2)(\phi_1M_\nu\gamma_c^2\phi_2^*M_\nu^*-M_e\phi_1\gamma_c^2M_e^*\phi_2^*) \\
& +(iQ_1-Q_2)((iA_1+A_2)(-iA_0-iA_3)+(iA_1+A_2)(iA_3-iA_0)) \\
& +(iQ_1+Q_2)(\phi_2M_\nu\gamma_c^2\phi_1^*M_\nu^*-M_e\phi_2\gamma_c^2M_e^*\phi_1^*) \\
& +(iQ_1+Q_2)((iA_1-A_2)(-iA_0-iA_3)+(iA_1-A_2)(iA_3-iA_0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +iM_\nu\Phi_1^*(i\phi_1M_\nu^*(-iA_0-iA_3)-i\phi_2M_\nu^*(iA_1+A_2)) \\
& -2iQ_0(-4A_0^2-M_e\phi_1\gamma_c^2M_e^*\phi_1^*-M_e\phi_2\gamma_c^2M_e^*\phi_2^*) \\
& -i\Phi_2\gamma_cM_\nu^*(iM_\nu\gamma_c\phi_1^*(iA_1+A_2)-iM_\nu\gamma_c\phi_2^*(iA_3-iA_0)) \\
& +i\Phi_1\gamma_cM_\nu^*(iM_\nu\gamma_c\phi_1^*(-iA_0-iA_3)-iM_\nu\gamma_c\phi_2^*(iA_1-A_2)) \\
& -iM_\nu\gamma_c\Phi_2^*(i\phi_1\gamma_cM_\nu^*(iA_1-A_2)-i\phi_2\gamma_cM_\nu^*(iA_3-iA_0)) \\
& -i\gamma_cM_e^*\Phi_1^*(-2A_0M_e\phi_1\gamma_c-iM_e\phi_2\gamma_c(iA_1+A_2)-iM_e\phi_1\gamma_c(iA_3-iA_0)) \\
& -iM_e\Phi_2\gamma_c(-2A_0\gamma_cM_e^*\phi_2^*-i\gamma_cM_e^*\phi_1^*(iA_1+A_2)-i\gamma_cM_e^*\phi_2^*(-iA_0-iA_3)) \\
& -i\gamma_cM_e^*\Phi_2^*(-2A_0M_e\phi_2\gamma_c-iM_e\phi_1\gamma_c(iA_1-A_2)-iM_e\phi_2\gamma_c(-iA_0-iA_3)) \\
& -iM_e\Phi_1\gamma_c(-2A_0\gamma_cM_e^*\phi_1^*-i\gamma_cM_e^*\phi_2^*(iA_1-A_2)-i\gamma_cM_e^*\phi_1^*(iA_3-iA_0)) \\
& +(-iQ_0-iQ_3)((-iA_0-iA_3)^2+(iA_1+A_2)(iA_1-A_2)) \\
& -(-iQ_0-iQ_3)(\phi_1M_\nu\gamma_c^2\phi_1^*M_\nu^*+M_e\phi_2\gamma_c^2M_e^*\phi_2^*) \\
& +(iQ_3-iQ_0)((iA_3-iA_0)^2+(iA_1+A_2)(iA_1-A_2)) \\
& -(iQ_3-iQ_0)(\phi_2M_\nu\gamma_c^2\phi_2^*M_\nu^*+M_e\phi_1\gamma_c^2M_e^*\phi_1^*) \\
& +(iQ_1-Q_2)(\phi_1M_\nu\gamma_c^2\phi_2^*M_\nu^*-M_e\phi_1\gamma_c^2M_e^*\phi_2^*) \\
& +(iQ_1-Q_2)((iA_1+A_2)(-iA_0-iA_3)+(iA_1+A_2)(iA_3-iA_0)) \\
& +(iQ_1+Q_2)(\phi_2M_\nu\gamma_c^2\phi_1^*M_\nu^*-M_e\phi_2\gamma_c^2M_e^*\phi_1^*) \\
& +(iQ_1+Q_2)((iA_1-A_2)(-iA_0-iA_3)+(iA_1-A_2)(iA_3-iA_0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +M_e M_e^* (3A_0 + A_3)^2 + 2\phi_1 \phi_1^* (M_e M_e^* - M_\nu M_\nu^*)^2 \\
& + 2(M_e M_e^*)^2 (\phi_2 + \phi_2^*)^2 + 2(M_\nu M_\nu^*)^2 (\phi_2 + \phi_2^*)^2 \\
& - 2M_\nu M_\nu^* (iA_3 - iA_0)^2 - 2M_e M_e^* (iA_1 + A_2) (iA_1 - A_2) \\
& - 2M_\nu M_\nu^* (iA_1 + A_2) (iA_1 - A_2) \\
& + (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3)) (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& + M_e M_e^* \Phi_1^* (iA_1 + A_2) - 2iQ_0 (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) \\
& - M_\nu \Phi_1^* M_\nu^* (iA_1 + A_2) + M_e \Phi_1 M_e^* (iA_1 - A_2) \\
& - \Phi_1 M_\nu M_\nu^* (iA_1 - A_2) + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iQ_1 + Q_2) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iQ_1 - Q_2) + \Phi_2 M_\nu M_\nu^* (iA_3 - iA_0) \\
& + M_\nu \Phi_2^* M_\nu^* (iA_3 - iA_0) + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-iQ_0 - iQ_3) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (iQ_3 - iQ_0) \\
& - iM_e \Phi_2 (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& - iM_e^* \Phi_2^* (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +M_e M_e^* \Phi_1^* (iA_1 + A_2) - 2iQ_0 (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) \\
& -M_\nu \Phi_1^* M_\nu^* (iA_1 + A_2) + M_e \Phi_1 M_e^* (iA_1 - A_2) \\
& -\Phi_1 M_\nu M_\nu^* (iA_1 - A_2) + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (iQ_1 + Q_2) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iQ_1 - Q_2) + \Phi_2 M_\nu M_\nu^* (iA_3 - iA_0) \\
& + M_\nu \Phi_2^* M_\nu^* (iA_3 - iA_0) + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-iQ_0 - iQ_3) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (iQ_3 - iQ_0) \\
& -iM_e \Phi_2 (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& -iM_e^* \Phi_2^* (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3)) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (-\phi_1 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - \phi_2 M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-M_e \phi_1 M_e^* \phi_1^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^* - 4A_0^2) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-\phi_1 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) ((-iA_0 - iA_3)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2)) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) (-\phi_2 M_\nu \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 M_e^* \phi_1^*) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + M_\nu \phi_2^* M_\nu^*) ((iA_3 - iA_0)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2)) \\
& + iM_\nu (iA_1 - A_2) (i\phi_1 M_\nu^* (-iA_0 - iA_3) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_1 + A_2)) \\
& + iM_\nu^* (iA_1 + A_2) (iM_\nu \phi_1^* (-iA_0 - iA_3) - iM_\nu \phi_2^* (iA_1 - A_2)) \\
& + iM_e^* (iA_1 - A_2) (-2A_0 M_e \phi_1 - iM_e \phi_2 (iA_1 + A_2) - iM_e \phi_1 (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_e (iA_1 + A_2) (-2A_0 M_e^* \phi_1^* - iM_e^* \phi_2^* (iA_1 - A_2) - iM_e^* \phi_1^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (\phi_1 M_\nu \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) ((iA_1 + A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 + A_2)(iA_3 - iA_0)) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (\phi_2 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_1^*) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) ((iA_1 - A_2)(-iA_0 - iA_3) + (iA_1 - A_2)(iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_\nu^* (iA_3 - iA_0) (iM_\nu \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_\nu \phi_2^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_\nu (iA_3 - iA_0) (i\phi_1 M_\nu^* (iA_1 - A_2) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3)) (-2A_0 M_e^* \phi_2^* - iM_e^* \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_e^* \phi_2^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& + (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3)) (-2A_0 M_e \phi_2 - iM_e \phi_1 (iA_1 - A_2) - iM_e \phi_2 (-iA_0 - iA_3))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) (-\phi_1 \phi_1^* M_\nu M_\nu^* - \phi_2 \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (-M_e \phi_1 M_e^* \phi_1^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^* - 4A_0^2) \\
& + (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) ((-iA_0 - iA_3)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2)) \\
& - (M_e \phi_2 M_e^* + M_e M_e^* \phi_2^*) (\phi_1 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* + M_e \phi_2 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) (iA_3 - iA_0)^2 + (iA_1 + A_2)(iA_1 - A_2) \\
& - (\phi_2 M_\nu M_\nu^* + \phi_2^* M_\nu M_\nu^*) (\phi_2^* \phi_2 M_\nu M_\nu^* + \phi_1 \phi_1^* M_e M_e^*) \\
& + iM_\nu (iA_1 - A_2) (i\phi_1 M_\nu^* (-iA_0 - iA_3) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_1 + A_2)) \\
& + iM_\nu^* (iA_1 + A_2) (iM_\nu \phi_1^* (-iA_0 - iA_3) - iM_\nu \phi_2^* (iA_1 - A_2)) \\
& + iM_e^* (iA_1 - A_2) (-2A_0 M_e \phi_1 - iM_e \phi_2 (iA_1 + A_2) - iM_e \phi_1 (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_e (iA_1 + A_2) (-2A_0 M_e^* \phi_1^* - iM_e^* \phi_2^* (iA_1 - A_2) - iM_e^* \phi_1^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) (\phi_1 M_\nu \phi_2^* M_\nu^* - M_e \phi_1 M_e^* \phi_2^*) \\
& + (M_e M_e^* \phi_1^* - M_\nu \phi_1^* M_\nu^*) ((iA_1 + A_2) (-iA_0 - iA_3) + (iA_1 + A_2) (iA_3 - iA_0)) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (\phi_2 M_\nu \phi_1^* M_\nu^* - M_e \phi_2 M_e^* \phi_1^*) \\
& + (M_e \phi_1 M_e^* - \phi_1 M_\nu M_\nu^*) (iA_1 - A_2) (-iA_0 - iA_3) + (iA_1 - A_2) (iA_3 - iA_0) \\
& + iM_\nu^* (iA_3 - iA_0) (iM_\nu \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_\nu \phi_2^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + iM_\nu (iA_3 - iA_0) (i\phi_1 M_\nu^* (iA_1 - A_2) - i\phi_2 M_\nu^* (iA_3 - iA_0)) \\
& + (2A_0 M_e + iM_e (-iA_0 - iA_3)) \cdot \\
& \cdot (-2A_0 M_e^* \phi_2^* - iM_e^* \phi_1^* (iA_1 + A_2) - iM_e^* \phi_2^* (-iA_0 - iA_3)) \\
& + (2A_0 M_e^* + iM_e^* (-iA_0 - iA_3)) \cdot \\
& \cdot (-2A_0 M_e \phi_2 - iM_e \phi_1 (iA_1 - A_2) - iM_e \phi_2 (-iA_0 - iA_3))
\end{aligned}$$

De la même façon sa sera pour le cas des quarks, et en rassemblant tous

les résultats trouvés on obtient la forme suivante de l'action bosonique :

$$S_B = \frac{1}{48g_0^2} \int_X dx \text{tr} (e(\theta))^2 = \int_X dx (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0) \quad (2.88)$$

et pour $\mathbf{A} \in \Lambda^1 \otimes su(3)$, $\tilde{\mathbf{A}} := \begin{pmatrix} iA_3 & i(iA_1 - A_2) \\ i(iA_1 + A_2) & -iA_3 \end{pmatrix} \in \Lambda^1 \otimes su(2)$, $A_0 \in \Lambda^1$, $\Phi_1, \Phi_2 \in \Lambda^0 \otimes \mathbb{C}$.

on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \frac{1}{4g_0^2} tr \left((d\mathbf{A} + \frac{1}{2} \{A, A\})^2 \right) \\ & + \frac{1}{4g_0^2} tr \left((d\tilde{\mathbf{A}} + \frac{1}{2} \{\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}\})^2 \right) + \frac{5}{6g_0^2} tr ((dA_0)^2), \end{aligned} \quad (2.89)$$

\mathcal{L}_1 aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \frac{1}{24g_0^2} tr (|d\Phi_1 + i(A_0 + A_3)\Phi_1 + i(A_1 - iA_2)(\Phi_2 + 1)|^2 \\ & + |d\Phi_2 + i(A_0 + A_3)(\Phi_2 + 1) + i(A_1 - iA_2)\Phi_1|^2) \times \\ & \times tr (3M_u M_u^* + 3M_d M_d^* + M_\nu M_\nu^* + M_e M_e^*) \end{aligned} \quad (2.90)$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & (|\Phi_1|^2 + |\Phi_2 + 1| - 1) tr(1) \times \\ & tr \left(6\tilde{M}_{\{ud\}} + 12\tilde{M}_{uu} + 12\tilde{M}_{dd} + 2\tilde{M}_{\{e\nu\}} + 4\tilde{M}_{\nu\nu} + 4\tilde{M}_{ee} \right) \end{aligned} \quad (2.91)$$

Et en performant les reparamétrisations suivantes :

$$\mathbf{A} = \sum_{a=1}^8 i \frac{g_0}{2} G_\mu^a \gamma^\mu \otimes \lambda^a; \quad \tilde{\mathbf{A}} = \sum_{a=1}^3 i \frac{g_0}{2} W_\mu^a \gamma^\mu \otimes \sigma^a; \quad A_0 = i \frac{g_0}{2} \sqrt{\frac{3}{5}} W_\mu^0 \gamma^\mu. \quad (2.92)$$

et

$$\Phi_i = g_0 \phi_i / \sqrt{\text{tr} \left(M_u M_u^* + M_d M_d^* + \frac{1}{3} M_\nu M_\nu^* + \frac{1}{3} M_e M_e^* \right)}, \quad i = 1, 2 \quad (2.93)$$

où les $\{\sigma^a\}$ sont les matrices de Pauli et les $\{\lambda^a\}$ sont les matrices de Gell-Mann.

En utilisant la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \text{tr} ((\gamma^5 [\kappa] \wedge \gamma^5 [\lambda]) (\gamma^5 [\mu] \wedge \gamma^5 [\nu])) &= 4 (\delta^{\lambda\mu} \delta^{\kappa\nu} - \delta^{\kappa\mu} \delta^{\lambda\nu}); \\ \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^5 [\nu]) &= \delta^{\mu\nu}; \text{ et } \text{tr} (1) = 4 \end{aligned}$$

et après avoir performé une rotation de Wick , on obtient l'action bosonique exacte du modèle standard.

Chapitre 3

Modèle Fermionique

$SU(3) \otimes U(1)$ en Géométrie Non Associative

3.1 Introduction

Le modèle $3-3-1$ basé sur le groupe de jauge $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ est particulièrement intéressant et c'est possible que sa soit la façon la plus simple pour élargir le groupe de jauge $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Pour cela le prix à payer est l'introduction des quarks exotiques qui ont pour charges électriques $5/3$ et $-4/3$. Mais ce qui nous motive le plus pour étudier ce modèle est, la prédiction naturelle des trois générations de familles basé sur l'annulation d'anomalie. Donc, le nombre de familles doit être égal à trois. Ce résultat vient du fait que le modèle est libre d'anomalies seulement

si on a un nombre égal de triplets et anti-triplets, tenant compte de $SU(3)_c$ couleurs, et admettant que la somme des charges de tous les fermions est nulle. L'annulation d'anomalie triangulaire est vérifiée pour le cas de trois, ou multiple de trois, ensemble et non pas génération par génération comme c'est le cas du modèle standard (MS). Il est important de mentionner que l'incorporation de la troisième famille des quarks différemment des deux autres, permet un large potentiel de courants neutres changeants de saveurs. Le Z' qui est un boson vectoriel neutre de plus il conserve la saveur dans le secteur des leptons mais non pas dans celui des quarks. Seulement, c'est le plus simple modèle qui introduit des bileptons. Où le nombre de leptons est violé explicitement par l'échange de bosons scalaires chargés et des bosons vectoriels lourds en ajoutant des champs vectoriels avec des charges électriques doubles. Le modèle contient aussi plusieurs sources de violation de CP de manière spontanée ou explicite.

On note par :

$$L^1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \\ e^c \end{pmatrix}; \quad Q^1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} u \\ d \\ J_1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Le triplet (resp. singulet) les représentations des leftes (L) (resp. right (R)) champs (des leptons L^1 et des quarks Q^1) sont :

$$L_L^1 \sim (1, 3, 0); \quad Q_L^1 \sim (3, 3, +\frac{2}{3}) \quad (3.2)$$

et

$$\begin{aligned}
L_{1R}^1 &\sim (1, 1, 0); & L_{2R}^1 &\sim (1, 1, -1); & L_{3R}^1 &\sim (1, 1, +1) \\
Q_{1R}^1 &\sim (3, 1, +\frac{2}{3}); & Q_{2R}^1 &\sim (3, 1, -\frac{1}{3}); & Q_{3R}^1 &\sim (3, 1, +\frac{5}{3})
\end{aligned} \quad (3.3)$$

Les nombres 0, 2/3 dans l'équation 3.3 et 2/3, -1/3 et 5/3 sont les $U(1)_N$ charges. Le facteur de normalisation $\sqrt{2}$ est introduit pour des raisons pratiques.

L'opérateur charge électrique Q_e est défini en fonction des N charges comme :

$$\frac{Q_e}{e} = \frac{1}{2} (\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8) + N\mathbf{1}_3 \quad (3.4)$$

où λ_3 et λ_8 sont les matrices de Gell-Mann usuelles.

Les deux autres familles de leptons et quarks sont :

$$L^2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \\ \mu^c \end{pmatrix}; \quad L^3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \\ \tau^c \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} s \\ c \\ J_2 \end{pmatrix}; \quad Q^3 = \begin{pmatrix} b \\ t \\ J_3 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

à travers les représentations :

$$L_L^2 \sim (1, 3, 0); L_L^3 \sim (1, 3, 0) \quad (3.7)$$

$$L_{1R}^2 \sim (1, 1, 0); L_{2R}^2 \sim (1, 1, -1); L_{3R}^2 \sim (1, 1, +1) \quad (3.8)$$

$$L_{1R}^3 \sim (1, 1, 0); L_{2R}^3 \sim (1, 1, -1); L_{3R}^3 \sim (1, 1, +1) \quad (3.9)$$

$$Q_L^2 \sim (3, 3^*, -\frac{1}{3}); Q_L^3 \sim (3, 3^*, -\frac{1}{3}) \quad (3.10)$$

$$Q_{1R}^2 \sim (3, 1, -\frac{1}{3}); Q_{2R}^2 \sim (3, 1, +\frac{2}{3}); Q_{3R}^2 \sim (3, 1, -\frac{4}{3}) \quad (3.11)$$

$$Q_{1R}^3 \sim (3, 1, -\frac{1}{3}); Q_{2R}^3 \sim (3, 1, +\frac{2}{3}); Q_{3R}^3 \sim (3, 1, -\frac{4}{3}) \quad (3.12)$$

Ici u, d, s, c, b, t et J_1, J_2, J_3 sont les fonctions d'ondes des quarks up, down, strange, charm, bottom, top et exotique respectivement, Et, e^c (resp. μ^c et τ^c “ dans l' équation 3.1 (resp. eqs.3.5) sont les champs conjugué du “ e ”.(resp. μ et τ)

3.2 Construction

Le L -cycle représenté par : $(a, \mathcal{H}, \mathcal{M})$ où a consiste en l'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{a} = su(3) \oplus su(3) \oplus u(1) \ni \{a'_3, a_3, a_1\} \quad (3.13)$$

Pour les trois générations, l'espace interne de Hilbert total est \mathbb{C}^{72} représenté par les éléments :

$$(Q, l)^T \quad (3.14)$$

où :

$$Q = (Q_{iL}^1, Q_{iL}^2, Q_{iL}^3, Q_{iR}^1, Q_{iR}^2, Q_{iR}^3)$$

et

$$l = (L_{iL}^1, L_{iL}^2, L_{iL}^3, L_{iR}^1, L_{iR}^2, L_{iR}^3)$$

où $i = \overline{1, 3}$, $Q_{iL}^1, Q_{iL}^2, Q_{iL}^3, Q_{iR}^1, Q_{iR}^2, Q_{iR}^3 \in \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ et $L_{iL}^1, L_{iL}^2, L_{iL}^3, L_{iR}^1, L_{iR}^2, L_{iR}^3 \in \mathbb{C}^3$. Ou qu' on représente habituellement de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} Q_{iL}^1 \\ Q_{iL}^2 \\ Q_{iL}^3 \\ Q_{iR}^1 \\ Q_{iR}^2 \\ Q_{iR}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_L & c_L & t_L \\ d_L & s_L & b_L \\ J_{1L} & J_{2L} & J_{3L} \\ u_R & c_R & t_R \\ d_R & s_R & b_R \\ J_{1R} & J_{2R} & J_{3R} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} L_{iL}^1 \\ L_{iL}^2 \\ L_{iL}^3 \\ L_{iR}^1 \\ L_{iR}^2 \\ L_{iR}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} & \nu_{\mu L} & \nu_{\tau L} \\ e_L & \mu_L & \tau_L \\ e_L^c & \mu_L^c & \tau_L^c \\ \nu_{eR} & \nu_{\mu R} & \nu_{\tau R} \\ e_R & \mu_R & \tau_R \\ e_R^c & \mu_R^c & \tau_R^c \end{pmatrix}$$

Dans ce qui suit Le secteur des interactions fortes sera omit. Dans ce cas, l'algèbre de Lie \mathfrak{a} agit sur \mathcal{H} via la représentation :

$$\widehat{\pi}(a_1, a_3) = \begin{pmatrix} \widehat{\pi}_Q(a_1, a_3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widehat{\pi}_l(a_1, a_3) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

En utilisant le fait que les éléments de l'algèbre $su(3)$ ont la représentation suivante en général :

$$\begin{aligned} & f_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; f_2 \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; f_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; f_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ & f_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; f_6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; f_7 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; f_8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

où d'une façon un peu plus compacte on a :

$$a_3 = \begin{pmatrix} f_3 + f_8 & f_1 - if_2 & f_4 - if_5 \\ f_1 + if_2 & -f_3 + f_8 & f_6 - if_7 \\ f_4 + if_5 & f_6 + if_7 & -2f_8 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

et comme l'une des familles des quarks est introduite différemment par rapport aux deux autres, la représentation $\widehat{\pi}_Q(a_1, a_3)$ des quarks est de la forme suivante :

$$\widehat{\pi}_Q(a_1, a_3) = \widehat{\pi}_{Q1} + \widehat{\pi}_{Q3} \quad (3.17)$$

où $\widehat{\pi}_{Q_1}$ est donnée par :

$$if_0 \text{diag} \left[\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3, \widehat{\beta} \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\gamma} \otimes \mathbf{I}_3, \begin{pmatrix} \widehat{\delta} & \mathbf{0}_2 \\ 0 & -\frac{4}{3} \otimes \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \right]$$

avec :

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} & \mathbf{0}_2 \\ 0 & -\frac{1}{3} \otimes \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$$

et $\widehat{\pi}_{Q_3}$ par :

$$\begin{pmatrix} if_{3+8} & \mathbf{0}_{21} & f_{1+2} & \mathbf{0}_{21} & f_{4+5} & \mathbf{0}_{21} & \\ 0_{12} & f_{3+8} \otimes \mathbf{I}_2 & 0_{12} & f_{1+2} \otimes \mathbf{I}_2 & 0_{12} & f_{4+5} \otimes \mathbf{I}_2 & \\ f_{1-2} & \mathbf{0}_{21} & if_{8-3} & \mathbf{0}_{21} & f_{6+7} & \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_9 \\ 0_{12} & f_{1-2} \otimes \mathbf{I}_2 & 0_{12} & if_{8-3} \otimes \mathbf{I}_2 & 0_{12} & f_{6+7} \otimes \mathbf{I}_2 & \\ f_{4-5} & \mathbf{0}_{21} & f_{6-7} & \mathbf{0}_{21} & -2if_8 & \mathbf{0}_{21} & \\ 0_{12} & f_{4-5} \otimes \mathbf{I}_2 & 0_{12} & f_{6-7} \otimes \mathbf{I}_2 & 0_{12} & -2if_8 \otimes \mathbf{I}_2 & \\ & & & \mathbf{0}_9 & & & \mathbf{0}_9 \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{0}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_{3\pm 8} = f_3 \pm f_8$, $f_{1,4,6\pm 2,5,7} = if_{1,4,6} \pm f_{2,5,7}$ et les f_i sont des nombres réels et $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{\delta}$ sont des opérateurs hermitiens qui ont pour valeurs propres sur les états Q_i^j :

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}Q_{iL}^j &= \left(\frac{1}{2}\delta_{1j} + \delta_{2j} + \delta_{3j}\right) \alpha^j Q_{iL}^j \\
\widehat{\beta}Q_{iR}^j &= \left(\frac{1}{2}\delta_{1j} + \delta_{2j} + \delta_{3j}\right) \delta_{1i}\beta^j Q_{iR}^j \\
\widehat{\gamma}Q_{iR}^j &= \left(\frac{1}{2}\delta_{1j} + \delta_{2j} + \delta_{3j}\right) \delta_{2i}\gamma^j Q_{iR}^j \\
\widehat{\delta}Q_{iR}^j &= \left(\frac{1}{2}\delta_{1j} + \delta_{2j} + \delta_{3j}\right) \delta_{3i}\delta^j Q_{iR}^j
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Il est très important de mentionner que pour donner à notre construction plus de clarté que possible, nous avons choisis les opérateurs $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{\delta}$ associés à l'algèbre $u(1)$ a priori avec des valeurs arbitraires après leur action sur les quarks. Comme il est mentionné dans la référence [20], on verra et après avoir discuté le terme d'interactions électromagnétiques (comme il est prévu) que les valeurs propres α^j , β^j , γ^j et δ^j correspondent exactement aux N charges du modèle commutatif [21]. De la même façon pour les leptons, la représentation $\widehat{\pi}_l(a_1, a_3)$ est de la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{\pi}_l(a_1, a_3) &= if_0 \text{diag} \left(\widehat{\alpha}' \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\alpha}' \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\alpha}' \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\beta}' \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\gamma}' \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\delta}' \otimes \mathbf{I}_3 \right) \\
&+ i \begin{pmatrix} f'_3 + f'_8 \otimes \mathbf{I}_3 & f'_1 - if'_2 \otimes \mathbf{I}_3 & f'_4 - if'_5 \otimes \mathbf{I}_3 & & \\ f'_1 + if'_2 \otimes \mathbf{I}_3 & f'_8 - f'_3 \otimes \mathbf{I}_3 & f'_6 - if'_7 \otimes \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_9 & \\ f'_4 + if'_5 \otimes \mathbf{I}_3 & f'_6 + if'_7 \otimes \mathbf{I}_3 & -2f'_8 \otimes \mathbf{I}_3 & & \\ & \mathbf{0}_9 & & & \mathbf{0}_9 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

où les f'_i sont des nombres réels, d'une manière similaire pour les leptons,

nous assignons aux opérateurs coefficients $\widehat{\alpha}'$, $\widehat{\beta}'$, $\widehat{\gamma}'$ et $\widehat{\delta}'$ arbitrairement les valeurs propres α'^j , β'^j , γ'^j et δ'^j tel que :

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha}' L_{iL}^j &= \alpha'^j L_{iL}^j \\ \widehat{\beta}' L_{iR}^j &= \beta'^j L_{iR}^j \\ \widehat{\gamma}' L_{iR}^j &= \gamma'^j L_{iR}^j \\ \widehat{\delta}' L_{iR}^j &= \delta'^j L_{iR}^j\end{aligned}\tag{3.20}$$

qui seront déterminées plus tard et qui correspondent aux N charges des leptons comme dans le cas du modèle original [21].

Pour la matrice de masse (le Dirac) M du L -cycle, il est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_Q & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & M_L \end{pmatrix}\tag{3.21}$$

où :

$$M_Q = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{Q^1} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{Q^2} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{Q^3} \\ M_{Q^1}^* & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & M_{Q^2}^* & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{Q^3}^* & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix}\tag{3.22}$$

et

$$M_L = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{L^1} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{L^2} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{L^3} \\ M_{L^1}^* & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & M_{L^2}^* & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & M_{L^3}^* & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Ici M_{Q^i} et $M_{L^i} \in M_3(\mathbb{C})$ sont les matrices de masses des fermions (quarks et leptons) tel que :

$$M_{Q^{1,2,3}} = \begin{pmatrix} m_{u,d,J_1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{s,c,J_2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{b,t,J_3} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

et

$$M_{L^1} = \begin{pmatrix} m_{\nu_e} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{\nu_\mu} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_{\nu_\tau} \end{pmatrix}, \quad M_{L^2} = M_{L^3} = \begin{pmatrix} m_e & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_\mu & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & m_\tau \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Il est important de mentionner que dans ce formalisme l'opérateur gradé $\widehat{\Gamma}$ prend la forme suivante :

$$\widehat{\Gamma} = \text{diag}(-\mathbf{I}_3, -\mathbf{I}_3, -\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3, -\mathbf{I}_3, -\mathbf{I}_3, -\mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3, \mathbf{I}_3) \quad (3.26)$$

L'espace $\widehat{\pi}(\boldsymbol{\Omega}^1 \mathbf{a})$ généré par les éléments du type :

$$\tau^1 = \widehat{\pi}(\omega^1) = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\widehat{\pi}(a_\alpha^z) \dots, [\widehat{\pi}(a_\alpha^2), [\widehat{\pi}(a_\alpha^1), [-i\mathcal{M}, \widehat{\pi}(a_\alpha^0)]]] \dots] \quad (3.27)$$

avec :

$$a_\alpha^z = (a_1^z, a_3^z) \quad (3.28)$$

après quelques simplifications on a, et du à la décompositions suivante :

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} \tau_Q^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau_l^1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

où :

$$\tau_Q^1 = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tau_{1Q}^1 \\ \tau_{2Q}^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

et :

$$\tau_l^1 = i \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tau_{1l}^1 \\ \tau_{2l}^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

avec :

$$\tau_{1Q}^1 = \begin{pmatrix} M_{Q^1} k_{11} & M_{Q^2} k_{12} & M_{Q^3} k_{13} \\ -M_{Q^1} k_{12}^* & M_{Q^2} k_{22} & M_{Q^3} k_{23} \\ -M_{Q^1} k_{13}^* & -M_{Q^2} k_{23}^* & M_{Q^3} k_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

et :

$$\tau_{2Q}^1 = \begin{pmatrix} M_{Q1}^* k_{11}^* & -M_{Q1}^* k_{12} & -M_{Q1}^* k_{13} \\ M_{Q2}^* k_{12}^* & M_{Q2}^* k_{22}^* & -M_{Q2}^* k_{23} \\ M_{Q3}^* k_{13}^* & M_{Q3}^* k_{23}^* & M_{Q3}^* k_{33}^* \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

puis :

$$\tau_{1l}^1 = \begin{pmatrix} M_{L1} k'_{11} & M_{L2} k'_{12} & M_{L3} k'_{13} \\ -M_{L1}^* k'_{12}^* & M_{L2} k'_{22} & M_{L3} k'_{23} \\ -M_{L1} k'_{13}^* & -M_{L2} k'_{23}^* & M_{L3} k'_{33} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

et finalement :

$$\tau_{2l}^1 = \begin{pmatrix} M_{L1}^* k'_{11}^* & -M_{L1}^* k'_{12} & -M_{L1}^* k'_{13} \\ M_{L2}^* k'_{12}^* & M_{L2}^* k'_{22} & -M_{L2}^* k'_{23} \\ M_{L3}^* k'_{13}^* & M_{L3}^* k'_{23} & M_{L3}^* k'_{33} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Les coefficients : $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{22}, k_{23}, k_{33}, k'_{11}, k'_{12}, k'_{13}, k'_{22}, k'_{23}$ et k'_{33} sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_{12} &= i f_1 + f_2 \\ k_{13} &= i f_4 + f_5 \\ k_{23} &= i f_6 + f_7 \\ k_{11} &= i (f_3 + f_8) + (\widehat{\alpha} - \widehat{\beta}) f_0 \\ k_{22} &= i (-f_3 + f_8 + (\widehat{\alpha} - \widehat{\gamma}) f_0) \\ k_{33} &= -i (-2f_8 + (\widehat{\alpha} - \widehat{\delta}) f_0) \end{aligned} \quad (3.44a)$$

et

$$\begin{aligned}
k'_{12} &= if'_1 + f'_2 \\
k'_{13} &= if'_4 + f'_5 \\
k'_{23} &= if'_6 + f'_7 \\
k'_{11} &= i \left(f'_3 + f'_8 + (\widehat{\alpha}' - \widehat{\beta}') f'_0 \right) \\
k'_{22} &= i \left(-f'_3 + f'_8 + (\widehat{\alpha}' - \widehat{\gamma}') f'_0 \right) \\
k'_{33} &= -i \left(-2f'_8 + (\widehat{\alpha}' - \widehat{\delta}') f'_0 \right)
\end{aligned} \tag{3.44b}$$

Dans ce qui suit, et dans l'ordre d'avoir un modèle consistant avec la *GNA*, on prend les paramètres réels f_i et les f'_i egals et la même chose pour les k_{ii} et les k'_{ii} .

$$f_i = f'_i \quad ; \quad k_{ii} = k'_{ii} \tag{3.45}$$

En s'intéressant aux éléments $\tau^2 \in \widehat{\pi}(\Omega^2 \mathbf{a})$, Ils sont obtenus en sommant les éléments du type :

$$\tau^2 = \{\tau^1, \tau^1\} = \begin{pmatrix} \tau_Q^2 & 0 \\ 0 & \tau_l^2 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

après quelques étapes de calcul on a pour le cas des quarks :

$$\tau_Q^2 = \begin{pmatrix} \tau_{1Q}^2 & \mathbf{0}_9 \\ \mathbf{0}_9 & \tau_{2Q}^2 \end{pmatrix} \tag{3.47}$$

où :

$$\tau_{1Q}^2 = \begin{pmatrix} \zeta_{11}^1 & \zeta_{12}^1 & \zeta_{13}^1 \\ \zeta_{21}^1 & \zeta_{22}^1 & \zeta_{23}^1 \\ \zeta_{31}^1 & \zeta_{32}^1 & \zeta_{33}^1 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

et

$$\tau_{2Q}^2 = \begin{pmatrix} \zeta_{11}^2 & \zeta_{12}^2 & \zeta_{13}^2 \\ \zeta_{21}^2 & \zeta_{22}^2 & \zeta_{23}^2 \\ \zeta_{31}^2 & \zeta_{32}^2 & \zeta_{33}^2 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^1 &= -2 \left(k_{11}k_{11}^* M_{Q^1} M_{Q^1}^* + k_{12}^* k_{12} M_{Q^2} M_{Q^2}^* + k_{13}^* k_{13} M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{22}^1 &= -2 \left(k_{12}k_{12}^* M_{Q^1} M_{Q^1}^* + k_{22}k_{22}^* M_{Q^2} M_{Q^2}^* + k_{23}k_{23}^* M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{33}^1 &= -2 \left(k_{13}k_{13}^* M_{Q^1} M_{Q^1}^* + k_{23}k_{23}^* M_{Q^2} M_{Q^2}^* + k_{33}k_{33}^* M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{21}^1 &= 2 \left(k_{12}^* k_{11} M_{Q^1} M_{Q^1}^* - k_{12}^* k_{22} M_{Q^2} M_{Q^2}^* - k_{13}^* k_{23} M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{12}^1 &= 2 \left(k_{12}k_{11} M_{Q^1} M_{Q^1}^* - k_{12}k_{22}^* M_{Q^2} M_{Q^2}^* - k_{13}k_{23}^* M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{31}^1 &= 2 \left(k_{13}^* k_{11} M_{Q^1} M_{Q^1}^* + k_{12}^* k_{23}^* M_{Q^2} M_{Q^2}^* - k_{13}^* k_{33} M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{13}^1 &= 2 \left(k_{13}k_{11} M_{Q^1} M_{Q^1}^* + k_{12}k_{23} M_{Q^2} M_{Q^2}^* - k_{13}k_{33}^* M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{32}^1 &= 2 \left(-k_{13}^* k_{12} M_{Q^1} M_{Q^1}^* + k_{23}^* k_{22}^* M_{Q^2} M_{Q^2}^* - k_{23}^* k_{33} M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \\ \zeta_{23}^1 &= 2 \left(-k_{13}k_{12}^* M_{Q^1} M_{Q^1}^* + k_{23}k_{22} M_{Q^2} M_{Q^2}^* - k_{23}k_{33}^* M_{Q^3} M_{Q^3}^* \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

et

$$\begin{aligned}
\zeta_{11}^2 &= -2 (k_{12}^* k_{12} + k_{11}^* k_{11} + k_{13}^* k_{13}) M_{Q^1} M_{Q^1}^* \\
\zeta_{22}^2 &= -2 (k_{23}^* k_{23} + k_{22}^* k_{22} + k_{12}^* k_{12}) M_{Q^2} M_{Q^2}^* \\
\zeta_{33}^2 &= -2 (k_{33}^* k_{33} + k_{23}^* k_{23} + k_{13}^* k_{13}) M_{Q^3} M_{Q^3}^* \\
\zeta_{21}^2 &= 2 (k_{12}^* (k_{22}^* - k_{11}^*) - k_{23} k_{13}^*) M_{Q^1} M_{Q^2}^* \\
\zeta_{12}^2 &= 2 (k_{12} (k_{22} - k_{11}^*) - k_{23}^* k_{13}) M_{Q^2} M_{Q^1}^* \\
\zeta_{31}^2 &= 2 (k_{13}^* (k_{33}^* - k_{11}^*) + k_{12}^* k_{23}^*) M_{Q^1} M_{Q^3}^* \\
\zeta_{13}^2 &= 2 (k_{13} (k_{33} - k_{11}^*) + k_{12} k_{23}) M_{Q^3} M_{Q^1}^* \\
\zeta_{32}^2 &= 2 (k_{23}^* (k_{22} - k_{33}^*) - k_{12} k_{13}^*) M_{Q^2} M_{Q^3}^* \\
\zeta_{23}^2 &= 2 (k_{23} (k_{22}^* - k_{33}) - k_{12}^* k_{13}) M_{Q^3} M_{Q^2}^*
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Maintenant on peut passer au calcul de $\widehat{\sigma}(\omega^1)$, en utilisant l'expression de l'équation (2.9) où on a des calculs un peu long, on peut montrer que pour les quarks on a la forme suivante :

$$\widehat{\sigma}(\omega^1) \rightarrow \sigma_Q = \begin{pmatrix} \sigma_{Q11} & \sigma_{Q12} & \sigma_{Q13} & \\ \sigma_{Q21} & \sigma_{Q22} & \sigma_{Q23} & \mathbf{0}_9 \\ \sigma_{Q31} & \sigma_{Q32} & \sigma_{Q32} & \\ & \mathbf{0}_9 & & \mathbf{0}_9 \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

où :

$$\sigma_{Q11} = 2 [(f_4^2 + f_5^2) M_{Q^1 Q^3} + (f_1^2 + f_2^2) M_{Q^1 Q^2}]$$

$$\sigma_{Q21} = (if_6 + f_7) (f_5 - if_4) (M_{Q^2 Q^1} + 2M_{Q^1 Q^3}) + 2if_3 (f_2 - if_1) M_{Q^2 Q^1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_{31}} &= (f_5 - if_4)(-if_3 - 3f_8)M_{Q^1Q^3} \\ &\quad - (f_7 - if_6)(f_2 - if_1)(M_{Q^1Q^3} + 2M_{Q^3Q^2})\end{aligned}$$

$$\sigma_{Q_{12}} = (f_7 - if_6)(if_4 + f_5)(M_{Q^2Q^1} + 2M_{Q^1Q^3}) - 2if_3(if_1 + f_2)M_{Q^2Q^1}$$

$$\sigma_{Q_{22}} = 2[(f_6^2 + f_7^2)M_{Q^2Q^3} + (f_1^2 + f_2^2)M_{Q^1Q^2}]$$

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_{32}} &= (if_6 + f_7)(3f_8 - if_3)M_{Q^2Q^3} \\ &\quad - (if_4 + f_5)(f_2 - if_1)(M_{Q^2Q^3} + 2M_{Q^1Q^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_{13}} &= (if_4 + f_5)(if_3 - 3f_8)M_{Q^1Q^3} \\ &\quad - (if_6 + f_7)(if_1 + f_2)(M_{Q^1Q^3} + 2M_{Q^3Q^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{Q_{23}} &= (if_6 + f_7)(3f_8 - if_3)M_{Q^2Q^3} \\ &\quad - (if_4 + f_5)(f_2 - if_1)(M_{Q^2Q^3} + 2M_{Q^1Q^2})\end{aligned}$$

$$\sigma_{Q_{33}} = 2[(f_6^2 + f_7^2)M_{Q^2Q^3} + (f_4^2 + f_5^2)M_{Q^1Q^3}]$$

avec :

$$M_{Q^i Q^j} \equiv M_{Q^i} M_{Q^i}^* - M_{Q^j} M_{Q^j}^* \quad (3.53)$$

On peut montrer que τ_Q^2 prend la forme :

$$\tau_Q^2 = \tau_Q^{2'} + \sigma_Q = \text{diag}(\tau_{1Q}^{2'}, \tau_{2Q}^{2'}) + \sigma_Q \quad (3.54)$$

où :

$$\tau_{1Q}^{2'} = \begin{pmatrix} \zeta_{11}^{1'} & \zeta_{12}^{1'} & \zeta_{13}^{1'} \\ \zeta_{21}^{1'} & \zeta_{22}^{1'} & \zeta_{23}^{1'} \\ \zeta_{31}^{1'} & \zeta_{32}^{1'} & \zeta_{33}^{1'} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

avec :

$$\begin{aligned} \zeta_{11}^{1'} &= \zeta_{11}^2 \\ \zeta_{22}^{1'} &= \zeta_{22}^2 \\ \zeta_{33}^{1'} &= \zeta_{33}^2 \\ \zeta_{21}^{1'} &= (k_{12}^* (k_{11}^* - k_{22}) - k_{23} k_{13}^*) M_{\{Q^2 Q^1\}} \\ \zeta_{12}^{1'} &= (k_{12} (k_{11} - k_{22}^*) - k_{23}^* k_{13}) M_{\{Q^1 Q^2\}} \\ \zeta_{31}^{1'} &= (k_{13}^* (k_{11}^* - k_{33}) + k_{12}^* k_{23}^*) M_{\{Q^3 Q^1\}} \\ \zeta_{13}^{1'} &= (k_{13} (k_{11} - k_{33}^*) + k_{12} k_{23}) M_{\{Q^1 Q^3\}} \\ \zeta_{32}^{1'} &= (k_{23}^* (k_{22}^* - k_{33}) - k_{12}^* k_{13}) M_{\{Q^3 Q^2\}} \\ \zeta_{23}^{1'} &= (k_{23} (k_{22} - k_{33}^*) - k_{12} k_{13}^*) M_{\{Q^2 Q^3\}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

et :

$$M_{\{Q^i Q^j\}} \equiv M_{Q^i} M_{Q^i}^* + M_{Q^j} M_{Q^j}^* \quad (3.57)$$

Donc, τ_Q^2 peut être réécrit comme dans cette forme :

$$\tau_Q^2 = \text{diag} (\tau_{1Q}^2, \tau_{2Q}^2) \text{ mod } \sigma_Q (\boldsymbol{\Omega}^1 \mathbf{a}) \quad (3.58)$$

Maintenant, et en utilisant les conditions imposés par les équations (2.15a,2.15b,2.16)

on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^0 a &= \widehat{\pi} (a) \\ \mathbf{r}^1 a &= \widehat{\pi} (\boldsymbol{\Omega}^1 a) \\ \mathbf{j}^0 a &= 0 \\ \mathbf{j}^1 a &= 0 \end{aligned} \quad (3.59)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^2 a &= \widehat{\pi} (\mathfrak{S}^2 a) \oplus (\{\widehat{\pi}(a), \widehat{\pi}(a)\} \oplus \text{diag} (\mathbb{R}\mathbf{I}_{18}, \mathbb{R}\mathbf{I}_{18})) \\ &\ni J_2 \oplus \text{diag} (A_Q + \Delta_Q, A_l + \Delta_l) \oplus \text{diag} (J_Q, J_l) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Rappelons que l'idéal $\widehat{\pi} (\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})$ est donné par l'ensemble des éléments $j_2 \in J_2 = \widehat{\pi} (\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})$ qui ont la forme :

$$j_2 = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\widehat{\pi} (a_\alpha^z), \dots [\widehat{\pi} (a_\alpha^1), [M^2, \widehat{\pi} (a_\alpha^0)]] \dots] \quad (3.61)$$

où :

$$0 = \sum_{\alpha, z \geq 0} [\widehat{\pi} (a_\alpha^z), \dots [\widehat{\pi} (a_\alpha^1), [-iM, \widehat{\pi} (a_\alpha^0)]] \dots] \quad (3.62)$$

Calculons maintenant l'anticommutateur $\{\widehat{\pi}(a_1, a_3), \widehat{\pi}(a_1, a_3)\}$:

$$\{\widehat{\pi}(a_1, a_3), \widehat{\pi}(a_1, a_3)\} = \text{diag}(\{\widehat{\pi}_Q(a_1, a_3), \widehat{\pi}_Q(a_1, a_3)\}, \{\widehat{\pi}_l(a_1, a_3), \widehat{\pi}_l(a_1, a_3)\}) \quad (3.63)$$

Où des simplifications directes mènent à la forme suivante :

$$\{\widehat{\pi}_Q(a_1, a_3), \widehat{\pi}_Q(a_1, a_3)\} = A_Q + \Delta_Q \quad (3.64)$$

avec :

$$A_Q = 2 \begin{pmatrix} \Lambda_{\alpha 9} & \mathbf{0}_9 \\ \mathbf{0}_9 & \mathbf{0}_9 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

où :

$$\Lambda_{\alpha 9} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha} \widehat{\lambda}_\alpha^{0(3+8)} \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha} (\widehat{\lambda}_\alpha^1 - i \widehat{\lambda}_\alpha^2) \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha} (\widehat{\lambda}_\alpha^{04} - i \widehat{\lambda}_\alpha^{05}) \otimes \mathbf{I}_3 \\ \widehat{\alpha} (\widehat{\lambda}_\alpha^1 + i \widehat{\lambda}_\alpha^2) \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha} \widehat{\lambda}_\alpha^{0(3-8)} \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha} (\widehat{\lambda}_\alpha^{06} - i \widehat{\lambda}_\alpha^{07}) \otimes \mathbf{I}_3 \\ \widehat{\alpha} (\widehat{\lambda}_\alpha^{04} + i \widehat{\lambda}_\alpha^{05}) \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha} (\widehat{\lambda}_\alpha^{06} + i \widehat{\lambda}_\alpha^{07}) \otimes \mathbf{I}_3 & 4 \widehat{\alpha} \widehat{\lambda}_\alpha^{08} \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

et

$$\Delta_Q = 2 \begin{pmatrix} \Lambda_{Q9} & \mathbf{0}_9 \\ \mathbf{0}_9 & \Lambda'_{Q9} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

tel que :

$$\Lambda'_{Q9} = \left(\widehat{\beta}^2 \widehat{\lambda} \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\gamma}^2 \widehat{\lambda} \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\delta}^2 \widehat{\lambda} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \quad (3.68)$$

et

$$\Lambda_{Q_9} = \begin{pmatrix} (\widehat{\lambda}^1 + \widehat{\alpha}^2 \widehat{\lambda}) \otimes \mathbf{I}_3 & (\widehat{\lambda}_1 - i\widehat{\lambda}_2) \otimes \mathbf{I}_3 & (\widehat{\lambda}_3 - i\widehat{\lambda}_4) \otimes \mathbf{I}_3 \\ (\widehat{\lambda}_1 + i\widehat{\lambda}_2) \otimes \mathbf{I}_3 & (\widehat{\lambda}^2 + \widehat{\alpha}^2 \widehat{\lambda}) \otimes \mathbf{I}_3 & (\widehat{\lambda}_5 - i\widehat{\lambda}_6) \otimes \mathbf{I}_3 \\ (\widehat{\lambda}_3 + i\widehat{\lambda}_4) \otimes \mathbf{I}_3 & (\widehat{\lambda}_5 + i\widehat{\lambda}_6) \otimes \mathbf{I}_3 & (\widehat{\lambda}^3 + \widehat{\alpha}^2 \widehat{\lambda}) \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Où les paramètres $\widehat{\lambda}_\alpha^{0(3+8)}$, $\widehat{\lambda}_\alpha^1$, $\widehat{\lambda}_\alpha^2$, $\widehat{\lambda}_\alpha^{04}$, $\widehat{\lambda}_\alpha^{05}$, $\widehat{\lambda}_\alpha^{0(3-8)}$, $\widehat{\lambda}_\alpha^{06}$, $\widehat{\lambda}_\alpha^{07}$, $\widehat{\lambda}_\alpha^{08}$, $\widehat{\lambda}^1$, $\widehat{\lambda}^2$, $\widehat{\lambda}^3$, $\widehat{\lambda}$, $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$, $\widehat{\lambda}_3$, $\widehat{\lambda}_4$, $\widehat{\lambda}_5$ et $\widehat{\lambda}_6 \in \mathbb{R}$. De la même façon pour les leptons l'anticommutateur $\{\pi_l(a_1, a_3), \pi_l(a_1, a_3)\}$ prend la forme suivante :

$$\{\pi_l(a_1, a_3), \pi_l(a_1, a_3)\} = A_l + \Delta_l \quad (3.70)$$

où :

$$A_l = 2 \begin{pmatrix} \Lambda_{\alpha'9} & \mathbf{0}_9 \\ \mathbf{0}_9 & \mathbf{0}_9 \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

et

$$\Lambda_{\alpha'9} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}' \widehat{\lambda}_{\alpha'}^{0(3+8)} \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha}' (\widehat{\lambda}_{\alpha'}^1 - i\widehat{\lambda}_{\alpha'}^2) \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha}' (\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{04} - i\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{05}) \otimes \mathbf{I}_3 \\ \widehat{\alpha}' (\widehat{\lambda}_{\alpha'}^1 + i\widehat{\lambda}_{\alpha'}^2) \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha}' \widehat{\lambda}_{\alpha'}^{0(3-8)} \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha}' (\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{06} - i\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{07}) \otimes \mathbf{I}_3 \\ \widehat{\alpha}' (\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{04} + i\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{05}) \otimes \mathbf{I}_3 & \widehat{\alpha}' (\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{06} + i\widehat{\lambda}_{\alpha'}^{07}) \otimes \mathbf{I}_3 & 4\widehat{\alpha}' \widehat{\lambda}_{\alpha'}^{08} \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

on a aussi :

$$\Delta_l = 2 \begin{pmatrix} \Lambda_{l9} & \mathbf{0}_9 \\ \mathbf{0}_9 & \Lambda'_{l9} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

avec :

$$\Lambda'_{l9} = \left(\widehat{\beta}^2 \widetilde{\lambda} \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\gamma}^2 \widetilde{\lambda} \otimes \mathbf{I}_3, \widehat{\delta}^2 \widetilde{\lambda} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \quad (3.74)$$

et

$$\Lambda_{l9} = \begin{pmatrix} \left(\widetilde{\lambda}^1 + \widetilde{\alpha}^2 \widetilde{\lambda} \right) \otimes \mathbf{I}_3 & \left(\widetilde{\lambda}_1 - i \widetilde{\lambda}_2 \right) \otimes \mathbf{I}_3 & \left(\widetilde{\lambda}_3 - i \widetilde{\lambda}_4 \right) \otimes \mathbf{I}_3 \\ \left(\widetilde{\lambda}_1 + i \widetilde{\lambda}_2 \right) \otimes \mathbf{I}_3 & \left(\widetilde{\lambda}^2 + \widetilde{\alpha}^2 \widetilde{\lambda} \right) \otimes \mathbf{I}_3 & \left(\widetilde{\lambda}_5 - i \widetilde{\lambda}_6 \right) \otimes \mathbf{I}_3 \\ \left(\widetilde{\lambda}_3 + i \widetilde{\lambda}_4 \right) \otimes \mathbf{I}_3 & \left(\widetilde{\lambda}_5 + i \widetilde{\lambda}_6 \right) \otimes \mathbf{I}_3 & \left(\widetilde{\lambda}^3 + \widetilde{\alpha}^2 \widetilde{\lambda} \right) \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

Ici $\widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 0(3+8)}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 0(3-8)}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 08}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 04}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 05}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 06}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 07}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 1}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 2}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 1}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 2}, \widetilde{\lambda}_\alpha^{\sim 3}, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3, \widetilde{\lambda}_4, \widetilde{\lambda}_5$ et $\widetilde{\lambda}_6 \in \mathbb{R}$. pour les matrices de masses génériques $M_{Q_1}, M_{Q_2}, M_{Q_3}, M_{L_1}, M_{L_2}, M_{L_3}$ (voir l'équation (3.25,3.26), Les équations (2.15a, 2.15b, 2.16) ont les solutions $\mathbf{j}^0 a = 0$ et $\mathbf{j}^1 a = 0$ et l'équation. (3.60), où J_Q et J_l sont de la forme suivante :

$$J_Q = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 + \widehat{\alpha}^2 \lambda_0, \lambda_2 + \widehat{\alpha}^2 \lambda_0, \lambda_3 + \widehat{\alpha}^2 \lambda_0, \lambda_1 + \lambda_8 + \widehat{\beta}^2 \lambda_0, \\ \lambda_2 + \lambda_8 + \widehat{\gamma}^2 \lambda_0, \lambda_3 + \lambda_8 + \widehat{\delta}^2 \lambda_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \quad (3.76)$$

et

$$J_l = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} \nu_1 + \widehat{\alpha}'^2 \lambda_0, \nu_2 + \widehat{\alpha}'^2 \lambda_0, \nu_3 + \widehat{\alpha}'^2 \lambda_0, \nu_1 + \nu_8 + \widehat{\beta}'^2 \lambda_0, \\ \nu_2 + \nu_8 + \widehat{\gamma}'^2 \lambda_0, \nu_3 + \nu_8 + \widehat{\delta}'^2 \lambda_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I}_3 \right) \quad (3.77)$$

pour $j_2 \in \widehat{\pi}(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})$ et $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_8, \nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}$. On constate que pour l'analyse du $\widehat{\pi}(\mathfrak{S}^2 \mathbf{a})$, on doit trouver l'espace des éléments $\widehat{\sigma}(\omega^1)$, où $\omega^1 \in \Omega^1 \mathbf{a} \cap \ker \widehat{\pi}$. Pour la factorisation et l'élimination des junk forms, le problème consiste en la résolution de l'équation (2.20) qui est équivalent à trouver pour chaque $\tau^2 \in \widehat{\pi}(\Omega^2 \mathbf{a})$ donné un élément $j \in J = j_2 \oplus \text{diag}(A_Q + \Delta_Q, A_l + \Delta_l) \oplus \text{diag}(J_Q, J_l)$ tel que :

$$\text{Tr} j^{l*} (\tau^2 + j) = 0, \forall j \in J \quad (3.78)$$

Notons que, puisque J est diagonale en bloc, la partie anti-diagonale de $\tau_{i,j}^2$ ne contribue pas à la trace dans l'équation (3.77). après un long calcul utilisant surtout le maple on obtient les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + x_1 \widehat{\alpha} + \lambda_0 \widehat{\alpha}^2 &= \frac{2}{9} (k_{12} k_{12}^* + k_{13}^* k_{13} + k_{11}^* k_{11}) Tr M_{Q_1} M_{Q_1}^* \\
\lambda_2 + x_2 \widehat{\alpha} + \lambda_0 \widehat{\alpha}^2 &= \frac{2}{9} (k_{12} k_{12}^* + k_{23}^* k_{23} + k_{22}^* k_{22}) Tr M_{Q_2} M_{Q_2}^* \\
\lambda_3 + 4x_3 \widehat{\alpha} + \lambda_0 \widehat{\alpha}^2 &= \frac{2}{9} (k_{13}^* k_{13} + k_{23}^* k_{23} + k_{33}^* k_{33}) Tr M_{Q_3} M_{Q_3}^* \\
z_1 + y_1 \widehat{\alpha} &= \frac{1}{9} (-k_{23}^* k_{13} + k_{12}^* (-k_{22} + k_{11}^*)) Tr M_1 \\
z_2 + y_2 \widehat{\alpha} &= \frac{1}{9} (k_{12}^* k_{23}^* + k_{13}^* (-k_{33} + k_{11}^*)) Tr M_2 \\
z_3 + y_3 \widehat{\alpha} &= \frac{1}{9} (-k_{12} k_{13}^* + k_{23}^* (-k_{33} + k_{22}^*)) Tr M_3 \\
\lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_0 \widehat{\beta}^2 &= \frac{1}{9} (k_{12} k_{12}^* + k_{13}^* k_{13} + k_{11}^* k_{11}) Tr M_{Q_1} M_{Q_1}^* \\
\lambda_2 + \lambda_8 + \lambda_0 \widehat{\gamma}^2 &= \frac{1}{9} (k_{12} k_{12}^* + k_{23}^* k_{23} + k_{22}^* k_{22}) Tr M_{Q_2} M_{Q_2}^* \\
\lambda_3 + \lambda_8 + \lambda_0 \widehat{\delta}^2 &= \frac{1}{9} (k_{13}^* k_{13} + k_{23}^* k_{23} + k_{33}^* k_{33}) Tr M_{Q_3} M_{Q_3}^* \\
\nu_1 + x_1 \widehat{\alpha}' + \lambda_0 \widehat{\alpha}'^2 &= \frac{2}{9} (k'_{12} k'_{12}{}^* + k'_{13}{}^* k'_{13} + k'_{11}{}^* k'_{11}) Tr M_{L_1} M_{L_1}^* \\
\nu_2 + x_2 \widehat{\alpha}' + \lambda_0 \widehat{\alpha}'^2 &= \frac{2}{9} (k'_{12} k'_{12}{}^* + k'_{23}{}^* k'_{23} + k'_{22}{}^* k'_{22}) Tr M_{L_2} M_{L_2}^* \\
\nu_3 + 4x_3 \widehat{\alpha}' + \lambda_0 \widehat{\alpha}'^2 &= \frac{2}{9} (k'_{13}{}^* k'_{13} + k'_{23}{}^* k'_{23} + k'_{33}{}^* k'_{33}) Tr M_{L_3} M_{L_3}^* \\
z_1 + y_1 \widehat{\alpha}' &= \frac{1}{9} (k'_{12}{}^* (-k'_{11}{}^* + k'_{22}) + k'_{23}{}^* k'_{13}) Tr W_1 \\
z_2 + y_2 \widehat{\alpha}' &= \frac{1}{9} (k'_{13}{}^* (-k'_{11}{}^* + k'_{33}) + k'_{12}{}^* k'_{23}{}^*) Tr W_2 \\
z_3 + y_3 \widehat{\alpha}' &= \frac{1}{9} (k'_{23}{}^* (-k'_{22}{}^* + k'_{33}) + k'_{12}{}^* k'_{13}{}^*) Tr W_3 \\
\nu_1 + \nu_8 + \lambda_0 \widehat{\beta}'^2 &= \frac{1}{9} (k'_{12} k'_{12}{}^* + k'_{13}{}^* k'_{13} + k'_{11}{}^* k'_{11}) Tr M_{L_1} M_{L_1}^* \\
\nu_2 + \nu_8 + \lambda_0 \widehat{\gamma}'^2 &= \frac{1}{9} (k'_{12} k'_{12}{}^* + k'_{23}{}^* k'_{23} + k'_{22}{}^* k'_{22}) Tr M_{L_2} M_{L_2}^* \\
\nu_3 + \nu_8 + \lambda_0 \widehat{\delta}'^2 &= \frac{1}{9} (k'_{13}{}^* k'_{13} + k'_{23}{}^* k'_{23} + k'_{33}{}^* k'_{33}) Tr M_{L_3} M_{L_3}^*
\end{aligned} \tag{3.79}$$

où :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \widehat{\lambda}_\alpha^{0(3+8)}, x_2 = \widehat{\lambda}_\alpha^{0(3-8)}, x_3 = \widehat{\lambda}_\alpha^{08} \\
y_1 &= \widehat{\lambda}_\alpha^1 + i\widehat{\lambda}_\alpha^2, y_2 = \widehat{\lambda}_\alpha^{04} + i\widehat{\lambda}_\alpha^{05}, y_3 = \widehat{\lambda}_\alpha^{06} + i\widehat{\lambda}_\alpha^{07} \\
z_1 &= \widehat{\lambda}_1 + i\widehat{\lambda}_2, z_2 = \widehat{\lambda}_3 + i\widehat{\lambda}_4, z_3 = \widehat{\lambda}_5 + i\widehat{\lambda}_6 \tag{3.80} \\
M_1 &= M_{\{Q_2Q_1\}}, M_2 = M_{\{Q_1Q_3\}}, M_3 = M_{\{Q_3Q_2\}} \\
W_1 &= M_{\{L_2L_1\}}, W_2 = M_{\{L_1L_3\}}, W_3 = M_{\{L_3L_2\}}
\end{aligned}$$

Donc, On a trouvé $j \in J = j_2 \oplus \text{diag}(A_Q + \Delta_Q, A_l + \Delta_l) \oplus \text{diag}(J_Q, J_l)$ ou d'une manière équivalente les relations des équations. (3.78) sont vérifiées tel que chaque terme $e(\theta)$ est orthogonal à $J \equiv \mathbf{J}^2g$ et les junks forms sont éliminés. Il est important de mentionner qu'on ait entrain de traiter avec les bosons scalaires et vectoriels soit avec les leptons ou avec les quarks, surtout pour que notre modèle soit conforme avec la GNA à la Wulkenhaar, on doit avoir :

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_\alpha^{0(3+8)} &= \widetilde{\lambda}_\alpha^{0(3+8)}, \widehat{\lambda}_\alpha^{0(3-8)} = \widetilde{\lambda}_\alpha^{0(3-8)}, \widehat{\lambda}_\alpha^{08} = \widetilde{\lambda}_\alpha^{08} \tag{3.81} \\
\widehat{\lambda}_\alpha^1 + i\widehat{\lambda}_\alpha^2 &= \widetilde{\lambda}_\alpha^1 + i\widetilde{\lambda}_\alpha^2, \widehat{\lambda}_\alpha^{04} + i\widehat{\lambda}_\alpha^{05} = \widetilde{\lambda}_\alpha^{04} + i\widetilde{\lambda}_\alpha^{05}, \widehat{\lambda}_\alpha^{06} + i\widehat{\lambda}_\alpha^{07} = \widetilde{\lambda}_\alpha^{06} + i\widetilde{\lambda}_\alpha^{07} \\
\widehat{\lambda}_1 + i\widehat{\lambda}_2 &= \widetilde{\lambda}_1 + i\widetilde{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3 + i\widehat{\lambda}_4 = \widetilde{\lambda}_3 + i\widetilde{\lambda}_4, \widehat{\lambda}_5 + i\widehat{\lambda}_6 = \widetilde{\lambda}_5 + i\widetilde{\lambda}_6
\end{aligned}$$

Soient, les propositions suivantes :

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_{uu} &= M_u M_u^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_u M_u^* \\
\widetilde{M}_{dd} &= M_d M_d^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_d M_d^* \\
\widetilde{M}_{JJ} &= M_J M_J^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_J M_J^* \\
\widetilde{M}_{\nu\nu} &= M_\nu M_\nu^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_\nu M_\nu^* \\
\widetilde{M}_{ee} &= M_e M_e^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_e M_e^* \\
\widetilde{M}_{e^c e^c} &= M_{e^c} M_{e^c}^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_{e^c} M_{e^c}^*
\end{aligned}$$

Ou tout simplement on l'écrit d'une manière générale comme suit :

$$\widetilde{M}_{Q_i Q_i} = M_{Q_i} M_{Q_i}^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_{Q_i} M_{Q_i}^* \quad (3.81a)$$

$$\widetilde{M}_{l_i l_i} = M_{l_i} M_{l_i}^* - \frac{1}{3} \text{tr} M_{l_i} M_{l_i}^* \quad (3.81b)$$

Qui peut être une solution acceptable pour l'équation (3.79) et qui est du même type de solutions que 2.57. après la résolution de ce problème qui est un peu spécial on peut passer au calcul de l'action bosonique .

3.3 calcul du Lagrangien :

En utilisant la paramétrisation :

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}^1 \otimes b_{1\alpha} = \phi_i \in \Lambda^0 \otimes \mathbb{C} \quad (3.82)$$

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha}^1 \otimes a_{1\alpha} = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^1 \otimes i f_{0\alpha} = i A_0 \in \Lambda^1 \otimes u(1) \quad (3.83)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} c_{\alpha}^1 \otimes a_{3\alpha} &= \mathbf{A} \in \Lambda^1 \otimes su(3) \\ &= \begin{pmatrix} i(A_3 + A_8) & i(A_1 - iA_2) & i(A_4 - iA_5) \\ i(A_1 + iA_2) & -i(A_3 - A_8) & i(A_6 - iA_7) \\ i(A_4 + iA_5) & i(A_6 + iA_7) & -2iA_8 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.84)$$

La connection ρ a la forme d'une matrice diagonale en bloc :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_Q & 0 \\ 0 & \rho_l \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

tel que :

$$\rho_Q = \begin{pmatrix} \rho_Q^{A^1} & \rho_Q^{H^1} \\ \rho_Q^{H^2} & \rho_Q^{A^2} \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

et

$$\rho_l = \begin{pmatrix} \rho_l^{A^1} & \rho_l^{H^1} \\ \rho_l^{H^2} & \rho_l^{A^2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\rho_Q^{A^1} = \begin{pmatrix} i(A_{38} + \alpha A_0) \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{-12} \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{-45} \otimes \mathbf{I}_3 \\ iA_{12} \otimes \mathbf{I}_3 & i(-A_{-38} + \alpha A_0) \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{-67} \otimes \mathbf{I}_3 \\ iA_{45} \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{67} \otimes \mathbf{I}_3 & (-2iA_8 + i\alpha A_0) \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

et :

$$\rho_Q^{A^2} = \begin{pmatrix} i\beta A_0 \otimes \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & i\gamma A_0 \otimes \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & i\delta A_0 \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

et on a aussi :

$$\rho_Q^{H^1} = \begin{pmatrix} -i\gamma^5 \phi_4 M_{Q^1} & -i\gamma^5 \bar{\phi}_1 M_{Q^2} & -i\gamma^5 \phi_2 M_{Q^3} \\ i\gamma^5 \phi_1 M_{Q^1} & -i\gamma^5 \phi_5 M_{Q^2} & -i\gamma^5 \bar{\phi}_3 M_{Q^3} \\ i\gamma^5 \bar{\phi}_2 M_{Q^1} & i\gamma^5 \phi_3 M_{Q^2} & -i\gamma^5 \phi_6 M_{Q^3} \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

et

$$\rho_Q^{H^2} = \begin{pmatrix} -i\gamma^5 \bar{\phi}_4 M_{Q^1}^* & i\gamma^5 \bar{\phi}_1 M_{Q^1}^* & i\gamma^5 \phi_2 M_{Q^1}^* \\ -i\gamma^5 \phi_1 M_{Q^2}^* & -i\gamma^5 \bar{\phi}_5 M_{Q^2}^* & i\gamma^5 \bar{\phi}_3 M_{Q^2}^* \\ -i\gamma^5 \bar{\phi}_2 M_{Q^3}^* & -i\gamma^5 \phi_3 M_{Q^3}^* & -i\gamma^5 \bar{\phi}_6 M_{Q^3}^* \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

et pour les leptons on a :

$$\rho_l^{A^1} = \begin{pmatrix} iA_{38} \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{-12} \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{-45} \otimes \mathbf{I}_3 \\ iA_{12} \otimes \mathbf{I}_3 & -iA_{-38} \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{-67} \otimes \mathbf{I}_3 \\ iA_{45} \otimes \mathbf{I}_3 & iA_{67} \otimes \mathbf{I}_3 & -2iA_8 \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

et :

$$\rho_l^{A^2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & -iA_0 \otimes \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & iA_0 \otimes \mathbf{I}_3 \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

avec :

$$\rho_l^{H^1} = \begin{pmatrix} -i\gamma^5\phi_4 M_{L^1} & -i\gamma^5\bar{\phi}_1 M_{L^2} & -i\gamma^5\phi_2 M_{L^3} \\ i\gamma^5\phi_1 M_{L^1} & -i\gamma^5\phi_5 M_{L^2} & -i\gamma^5\bar{\phi}_3 M_{L^3} \\ i\gamma^5\bar{\phi}_2 M_{L^1} & i\gamma^5\phi_3 M_{L^2} & -i\gamma^5\phi_6 M_{L^3} \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

et

$$\rho_l^{H^2} = \begin{pmatrix} -i\gamma^5\bar{\phi}_4 M_{L^1}^* & i\gamma^5\bar{\phi}_1 M_{L^1}^* & i\gamma^5\phi_2 M_{L^1}^* \\ -i\gamma^5\phi_1 M_{L^2}^* & -i\gamma^5\bar{\phi}_5 M_{L^2}^* & i\gamma^5\bar{\phi}_3 M_{L^2}^* \\ -i\gamma^5\bar{\phi}_2 M_{L^3}^* & -i\gamma^5\phi_3 \otimes M_{L^3}^* & -i\gamma^5\bar{\phi}_6 M_{L^3}^* \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Ici $A_{\pm ij} \equiv (A_i \pm iA_j)$. ou bien on peut les écrire comme suit :

$$\begin{aligned} (A_4 + iA_5) &= A_{45}, (A_6 - iA_7) = A_{-67}, i(A_4 - iA_5) = A_{-45}, \\ (A_6 + iA_7) &= A_{67}, (A_1 + iA_2) = A_{12}, (A_1 - iA_2) = A_{-12}, \\ A_8 &= A_8, (A_3 + A_8) = A_{38}, (-A_3 + A_8) = A_{-38} \end{aligned}$$

Il est très important de mentionner que la représentation dans $su(3)$ du multiplet du Higgs est uniquement déterminé par la matrice de masses fermionique. En effet, les degrés de liberté des particules scalaires ϕ_i , $i = \overline{1,6}$ sont dictés et imposés par la GNC et en regardant le modèle économique (minimal) où il y a deux triplets de Higgs [34, 35], seulement ce secteur scalaire minimal (comme il sera vu après) est capable de briser la symétrie de $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ spontanément en $SU(3)_c \otimes U(1)_{em}$ en une seule étape. L'action des opérateurs hermitiens $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\alpha}'$, $\hat{\beta}'$, $\hat{\gamma}'$ et $\hat{\delta}'$ sur la matière scalaire et sur les champs vectoriels ϕ_i et A_0 respectivement est donné par :

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}\phi_i &= \widehat{\alpha}'\phi_i = \alpha\phi_i \\
\widehat{\beta}\phi_i &= \widehat{\beta}'\phi_i = \beta\phi_i \\
\widehat{\gamma}\phi_i &= \widehat{\gamma}'\phi_i = \gamma\phi_i \\
\widehat{\delta}\phi_i &= \widehat{\delta}'\phi_i = \delta\phi_i
\end{aligned} \tag{3.95a}$$

$$\left(3\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta}\right) A_0 = \sqrt{x}A_0 \tag{3.95b}$$

et

$$\left(3\widehat{\alpha}' + \widehat{\beta}' + \widehat{\gamma}' + \widehat{\delta}'\right) A_0 = 0 \tag{3.95c}$$

où α , β , γ et δ sont des nombres réels arbitraires. Le paramètre x est relié aux N charges et indépendant des familles (voir l'équation 3.97). Notons aussi que contrairement à la construction du modèle de grande unification flipped $SU(5) \otimes U(1)$ dans le cadre de la géométrie non associative [18] où l'algèbre de Lie matricielle $su(5)$ est comme un input et d'autre part $u(1)$ est considéré comme une conséquence algébrique de l'algèbre matricielle $su(5) \oplus u(1)$, par contre on a considéré dans cette thèse les mêmes conditions que la référence [20]. Les raisons sont que dans la référence [18], dans l'ordre de calculer la structure des éléments dans $\mathbf{r}^0\mathbf{a}$ et après leur décomposition en représentations irréductibles de $su(5)$, la condition $[\mathbf{r}^0\mathbf{a}, \widehat{\pi}(\mathbf{a})] \subset \widehat{\pi}(\mathbf{a})$ mène à un bloc de structure où la compatibilité avec les deux conditions $\{\mathbf{r}^0\mathbf{a}, \widehat{\pi}(\mathbf{a})\} \subset \{\widehat{\pi}(\mathbf{a}), \widehat{\pi}(\mathbf{a})\} + \widehat{\pi}(\Omega^2\mathbf{a})$ et $\{\mathbf{r}^0\mathbf{a}, \widehat{\pi}(\Omega^1\mathbf{a})\} \subset \{\widehat{\pi}(\mathbf{a}), \widehat{\pi}(\Omega^1\mathbf{a})\} + \widehat{\pi}(\Omega^3\mathbf{a})$ implique que la connection a une structure avec une partie additionnelle en

$u(1)$ avec une représentation unique dans l'espace de Hilbert fermionique. Ce qui n'est pas notre cas dans ce travail présenté dans cette thèse.

Maintenant et après avoir trouver tous les éléments nécessaires on peut passer au calcul de l' action bosonique.

3.3.1 Action Bosonique

L' action bosonique en général peut prendre la forme suivante :

$$S_B = \frac{1}{36g_0^2} \int_X dx \operatorname{tr} (e(\theta)^2) = \frac{1}{36g_0^2} \int_X dx (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) \quad (3.96)$$

Ici g_0 est la constante de couplage de $U(1)_N$. après un très long calcul on a obtenu les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0) = & \frac{1}{18g_0^2} \\ & \{ \operatorname{Tr} \left(\left(\widetilde{M}_{Q_1 Q_1} \right)^2 + \left(\widetilde{M}_{L_1 L_1} \right)^2 \right) (\bar{\phi}_1 \phi_1 + \bar{\phi}_2 \phi_2 + (\bar{\phi}_4 - 1) (\phi_4 - 1))^2 \\ & + 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\widetilde{M}_{Q_1 Q_1} \widetilde{M}_{Q_2 Q_2} + \widetilde{M}_{L_1 L_1} \widetilde{M}_{L_2 L_2} \right) \right) |(\phi_4 - \bar{\phi}_5) \phi_1 - \bar{\phi}_2 \bar{\phi}_3|^2 \\ & + \operatorname{Tr} \left(\left(\left(\widetilde{M}_{Q_2 Q_2} \right)^2 + \left(\widetilde{M}_{L_2 L_2} \right)^2 \right) \right) (\bar{\phi}_1 \phi_1 + \bar{\phi}_3 \phi_3 + (\bar{\phi}_5 - 1) (\phi_5 - 1))^2 \\ & + 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\widetilde{M}_{Q_3 Q_3} \widetilde{M}_{Q_2 Q_2} + \widetilde{M}_{L_2 L_2} \widetilde{M}_{L_3 L_3} \right) \right) |(\phi_5 - \bar{\phi}_6) \phi_3 - \bar{\phi}_2 \bar{\phi}_1|^2 \\ & + \operatorname{Tr} \left(\left(\widetilde{M}_{Q_3 Q_3} \right)^2 + \left(\widetilde{M}_{L_3 L_3} \right)^2 \right) (\bar{\phi}_2 \phi_2 + \bar{\phi}_3 \phi_3 + (\bar{\phi}_6 - 1) (\phi_6 - 1))^2 \\ & + 2 \operatorname{Tr} \left(\left(\widetilde{M}_{Q_3 Q_3} \widetilde{M}_{Q_1 Q_1} + \widetilde{M}_{L_3 L_3} \widetilde{M}_{L_1 L_1} \right) \right) |(\phi_6 - \bar{\phi}_4) \phi_2 - \bar{\phi}_3 \bar{\phi}_1|^2 \} \end{aligned} \quad (3.97)$$

et \mathcal{L}_1 a pour expression :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_1) &= \frac{1}{18g_0^2} \\
&\{[tr(|d\phi_1 + (-i((\beta - \alpha)A_0 - A_{38}))\phi_1 + iA_{-67}\bar{\phi}_2 + iA_{12}(\phi_4 + 1)|^2) \\
&+ tr(|d\phi_2 + (-i(2A_8 + (\beta - \alpha)A_0))\phi_2 + iA_{-67}\bar{\phi}_1 + iA_{-45}(\bar{\phi}_4 + 1)|^2) \\
&+ tr(|d\phi_4 + iA_{-45}\bar{\phi}_2 + iA_{-12}\phi_1 + (-iA_{38} + (\beta - \alpha)A_0)(\phi_4 + 1)|^2)] \times \\
&\times \{Tr(M_{\{Q_1Q_1\}} + M_{\{L_1L_1\}})\} \\
&+ [tr(|d\phi_1 + (-i((\gamma - \alpha)A_0 - A_{38}))\phi_1 + \bar{\phi}_3(-iA_{45}) + iA_{12}(\bar{\phi}_5 + 1)|^2) \\
&+ tr(|d\phi_3 - iA_{45}\bar{\phi}_1 + (-i(2A_8 + (\gamma - \alpha)A_0))\phi_3 - iA_{67}(\phi_5 + 1)|^2) \\
&+ tr(|d\phi_5 + iA_{12}\bar{\phi}_1 + iA_{-67}\phi_3 + (i(A_{-38} - (\gamma - \alpha)A_0))(\phi_5 + 1)|^2)] \times \\
&\times \{Tr(M_{\{Q_2Q_2\}} + M_{\{L_2L_2\}})\} \\
&+ [tr(|d\phi_6 + iA_{45}\phi_2 + iA_{67}\phi_3 + (i((\delta - \alpha)A_0 - 2A_8))(\phi_6 + 1)|^2) \\
&+ tr(|d\phi_3 + iA_{-12}\bar{\phi}_2 + (i(A_{-38} + (\delta - \alpha)A_0))\phi_3 + iA_{67}(\bar{\phi}_6 + 1)|^2) \\
&+ tr(|d\phi_2 + (i((\delta - \alpha)A_0 + A_{38}))\phi_2 + iA_{-12}\bar{\phi}_3 + iA_{-45}(\phi_6 + 1)|^2)] \times \\
&\times \{Tr(M_{\{Q_3Q_3\}} + M_{\{L_3L_3\}})\} \} \\
\end{aligned} \tag{3.98}$$

en fait on a posé

$$(\beta - \alpha) = (\beta' - \alpha')$$

$$(\gamma - \alpha) = (\gamma' - \alpha') \tag{3.99}$$

$$(\delta - \alpha) = (\delta' - \alpha')$$

qui est le résultat directe des conditions imposés par (3.45) et \mathcal{L}_2 a la suivante expression :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 = & \frac{1}{3g_0^2} \text{tr} \left[(dA_3 + \frac{1}{2} \{A_3, A_3\})^2 + (dA_8 + \frac{1}{2} \{A_8, A_8\})^2 \right] \\
& + \frac{1}{36g_0^2} \text{xtr} (dA_0)^2 \\
+ \text{tr} & \left(\sum_{i=1}^6 d(A_i \pm iA_{i+1}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \{(A_i \pm iA_{i+1}), (A_i \pm iA_{i+1})\} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.100}$$

où :

$$x = \sum (N \text{ charges})^2$$

3.3.2 Action Fermionique

Si on note Ψ_{Q^j} (resp. Ψ_{L^j}) par :

$$\Psi_{Q^j}(Q_{1L}^j, Q_{2L}^j, Q_{3L}^j, Q_{1R}^j, Q_{2R}^j, Q_{3R}^j) \tag{3.101}$$

et

$$\Psi_{L^j}(L_{1L}^j, L_{2L}^j, L_{3L}^j, L_{1R}^j, L_{2R}^j, L_{3R}^j) \tag{3.102}$$

après une rotation de Wick et en redéfinissant les champs de jauge comme

suit :

$$A_0 = \frac{ig_0}{\sqrt{x}} \gamma^\mu W_\mu^0 \tag{3.103}$$

$$A_{\pm 12} = A_1 \pm iA_2 = ig\gamma^\mu (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) = ig\gamma^\mu W_\mu^\pm \tag{3.104}$$

$$A_{\pm 45} = A_4 \pm iA_5 = ig\gamma^\mu(W_\mu^4 \mp iW_\mu^5) = ig\gamma^\mu V_\mu^\pm \quad (3.105)$$

$$A_{\pm 67} = A_6 \pm iA_7 = ig\gamma^\mu(-W_\mu^6 \mp iW_\mu^7) = ig\gamma^\mu U_\mu^\pm \quad (3.106)$$

$$A_8 = ig\gamma^\mu W_\mu^8 \quad (3.107)$$

et

$$A_3 = ig\gamma^\mu W_\mu^3 \quad (3.109)$$

On obtient les interactions fermioniques suivantes (les bosons de jauge vectoriels et les champs scalaires (termes de Yukawa) sont notés par \mathcal{L}_{int} et \mathcal{L}_Y respectivement). Le cas des quarks, présente les termes suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \mathcal{L}_{int}^Q \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{-ig_0}{\sqrt{x}} [\bar{Q}_{1R}^j \beta^j \gamma^\mu W_\mu^0 Q_{1R}^j + \bar{Q}_{2R}^j \gamma^j \gamma^\mu W_\mu^0 Q_{2R}^j + \bar{Q}_{3R}^j \delta^j \gamma^\mu W_\mu^0 Q_{3R}^j] \right. \\ &\quad + ig[-\bar{Q}_{1L}^j \gamma^\mu (W_\mu^3 + W_\mu^8 + \alpha^j W_\mu^0) Q_{1L}^j + \bar{Q}_{2L}^j \gamma^\mu (W_\mu^3 - W_\mu^8 - \alpha^j W_\mu^0) Q_{2L}^j \\ &\quad + \bar{Q}_{3L}^j \gamma^\mu (2W_\mu^8 - \alpha^j W_\mu^0) Q_{3L}^j + \bar{Q}_{1R}^j \gamma^\mu W_\mu^- Q_{2L}^j - \bar{Q}_{2R}^j \gamma^\mu W_\mu^+ Q_{1L}^j \\ &\quad \left. - \bar{Q}_{3R}^j \gamma^\mu V_\mu^- Q_{1L}^j + \bar{Q}_{1R}^j \gamma^\mu V_\mu^+ Q_{3L}^j + \bar{Q}_{3R}^j \gamma^\mu U_\mu^{--} Q_{2L}^j - \bar{Q}_{2R}^j \gamma^\mu U_\mu^{++} Q_{3L}^j] \right\} \end{aligned} \quad (3.110)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y &= \mathcal{L}_Y^Q = \\
&\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{\text{Tr}M_{1,1}}} m_{Q_1^j} \left(\bar{Q}_{1L}^j \phi_4 Q_{1R}^j - \bar{Q}_{2L}^j \phi_1 Q_{1R}^j - \bar{Q}_{3L}^j \phi_2^* Q_{1R}^j + c.c \right) \right. \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\text{Tr}M_{2,2}}} m_{Q_2^j} \left(\bar{Q}_{1L}^j \phi_1^* Q_{2R}^j - \bar{Q}_{2L}^j \phi_5 Q_{2R}^j - \bar{Q}_{3L}^j \phi_3 Q_{2R}^j + c.c \right) \\
&\left. + \frac{1}{\sqrt{\text{Tr}M_{3,3}}} m_{Q_3^j} \left(\bar{Q}_{3L}^j \phi_6 Q_{3R}^j - \bar{Q}_{1L}^j \phi_2 Q_{3R}^j - \bar{Q}_{2L}^j \phi_3^* Q_{3R}^j + c.c \right) \right] \quad (3.111)
\end{aligned}$$

Ici 'cc' veut dire le complexe conjugué et g est la constante de couplage de $SU(3)_L$.

Pour les leptons on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int} &= \mathcal{L}_{int}^L \\
&= \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{-ig_0}{\sqrt{x}} \left[-\bar{L}_{2R}^j \gamma^\mu W_\mu^0 L_{2R}^j + \bar{L}_{3R}^j \gamma^\mu W_\mu^0 L_{3R}^j \right] \right. \\
&+ ig \left[-\bar{L}_{1L}^j \gamma^\mu (W_\mu^3 + W_\mu^8) L_{1L}^j + \bar{L}_{2L}^j \gamma^\mu (W_\mu^3 - W_\mu^8) L_{2L}^j \right. \\
&+ 2\bar{L}_{3L}^j \gamma^\mu W_\mu^8 L_{3L}^j + \bar{L}_{1R}^j \gamma^\mu W_\mu^- L_{2L}^j - \bar{L}_{2R}^j \gamma^\mu W_\mu^+ L_{1L}^j - \bar{L}_{3R}^j \gamma^\mu V_\mu^+ L_{1L}^j \\
&\left. \left. + \bar{L}_{1R}^j \gamma^\mu V_\mu^- L_{3L}^j + \bar{L}_{3R}^j \gamma^\mu U_\mu^{++} L_{2L}^j - \bar{L}_{2R}^j \gamma^\mu U_\mu^{--} L_{3L}^j \right] \right\} \quad (3.112)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_Y &= \mathcal{L}_Y^L \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{\text{Tr}M_{1,1}}} m_{L_1^j} \left(\bar{L}_{1L}^j \phi_4 L_{1R}^j - \bar{L}_{2L}^j \phi_1 L_{1R}^j - \bar{L}_{3L}^j \phi_2^* L_{1R}^j + c.c \right) \right. \\
&+ \frac{1}{\sqrt{\text{Tr}M_{2,2}}} m_{L_2^j} \left(\bar{L}_{1L}^j \phi_1^* L_{2R}^j - \bar{L}_{2L}^j \phi_5 L_{2R}^j - \bar{L}_{3L}^j \phi_3 L_{2R}^j + c.c \right) \\
&\left. + \frac{1}{\sqrt{\text{Tr}M_{3,3}}} m_{L_3^j} \left(-\bar{L}_{1L}^j \phi_2 L_{3R}^j - \bar{L}_{2L}^j \phi_3^* L_{3R}^j + \bar{L}_{3L}^j \phi_6 L_{3R}^j + c.c \right) \right] \quad (3.113)
\end{aligned}$$

où

$$M_{i,i} = (M_{\{Q_i Q_i\}} + M_{\{L_i L_i\}}), i = \overline{1,3}$$

3.4 Masses, Couplages et Angles de Mixages

Dans le but de lire correctement la densité lagrangienne de l'équation.(3.96), redéfinissons les champs scalaires de la manière suivantes :

$$\Phi_i = \frac{3}{\sqrt{2}} g_0 \Omega_{\tilde{\Phi}_i} \tilde{\Phi}_i, i = \overline{1,3} \quad (3.114)$$

et

$$\Phi_i - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}} g_0 \Omega_{\tilde{\Phi}_i} \tilde{\Phi}_i, i = \overline{4,5} \quad (3.115)$$

Tel que :

$$\begin{aligned} \Omega_{\tilde{\Phi}_1} &= \Omega_{\tilde{\Phi}_1} = [Tr (M_{\{Q_1 Q_1\}} + M_{\{Q_2 Q_2\}} + M_{\{L_1 L_1\}} + M_{\{L_2 L_2\}})]^{-\frac{1}{2}} \\ \Omega_{\tilde{\Phi}_2} &= \Omega_{\tilde{\Phi}_2} = [Tr (M_{\{Q_1 Q_1\}} + M_{\{Q_3 Q_3\}} + M_{\{L_1 L_1\}} + M_{\{L_3 L_3\}})]^{-\frac{1}{2}} \\ \Omega_{\tilde{\Phi}_3} &= \Omega_{\tilde{\Phi}_3} = [Tr (M_{\{Q_2 Q_2\}} + M_{\{Q_3 Q_3\}} + M_{\{L_2 L_2\}} + M_{\{L_3 L_3\}})]^{-\frac{1}{2}} \\ \Omega_{\tilde{\Phi}_4} &= \Omega_{\tilde{\Phi}_4} = [Tr (M_{\{Q_1 Q_1\}} + M_{\{L_1 L_1\}})]^{-\frac{1}{2}} \\ \Omega_{\tilde{\Phi}_5} &= \Omega_{\tilde{\Phi}_5} = [Tr (M_{\{Q_2 Q_2\}} + M_{\{L_2 L_2\}})]^{-\frac{1}{2}} \\ \Omega_{\tilde{\Phi}_6} &= \Omega_{\tilde{\Phi}_6} = [Tr (M_{\{Q_3 Q_3\}} + M_{\{L_3 L_3\}})]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.116)$$

où la densité lagrangienne \mathcal{L}_0 de l'équation (3.96) prend la forme suivante ;

$$\mathcal{L}_0 = \frac{9}{8}g_0^2 \left[\sum_{j=1}^6 \Theta_j \right] \quad (3.117)$$

où

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \varpi_1 \left(\chi(\tilde{\Phi}_1, \bar{\Phi}_1) + \frac{9}{2}\chi(\tilde{\Phi}_2, \bar{\Phi}_2) + \chi(\tilde{\Phi}_4, \bar{\Phi}_4) \right)^2 \\ \Theta_2 &= 2\varpi_2 \left| \chi(\tilde{\Phi}_4, \bar{\Phi}_1) - \chi(\bar{\Phi}_5, \bar{\Phi}_1) - \chi(\bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3) \right|^2 \\ \Theta_3 &= \varpi_3 \left(\chi(\tilde{\Phi}_1, \bar{\Phi}_1) + \chi(\tilde{\Phi}_3, \bar{\Phi}_3) + \chi(\tilde{\Phi}_5, \bar{\Phi}_5) \right)^2 \\ \Theta_4 &= 2\varpi_4 \left| \chi(\tilde{\Phi}_5, \bar{\Phi}_3) - \chi(\bar{\Phi}_6, \bar{\Phi}_3) - \chi(\bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_1) \right|^2 \\ \Theta_5 &= \varpi_5 \left(\chi(\tilde{\Phi}_2, \bar{\Phi}_2) + \chi(\tilde{\Phi}_3, \bar{\Phi}_3) + \chi(\tilde{\Phi}_6, \bar{\Phi}_6) \right)^2 \\ \Theta_6 &= 2\varpi_6 \left| \chi(\tilde{\Phi}_6, \bar{\Phi}_2) - \chi(\bar{\Phi}_4, \bar{\Phi}_2) - \chi(\bar{\Phi}_3, \bar{\Phi}_1) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.118)$$

tel que :

$$\chi(A, B) = \Omega_A \Omega_B A.B \quad (3.119)$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned} \varpi_1 &= \Omega_{\tilde{\Phi}_4}^{-2} \\ \varpi_2 &= Tr \left(\tilde{M}_{Q_1 Q_1} \tilde{M}_{Q_2 Q_2} + \tilde{M}_{L_1 L_1} \tilde{M}_{L_2 L_2} \right) \\ \varpi_3 &= \Omega_{\tilde{\Phi}_5}^{-2} \\ \varpi_4 &= Tr \left(\tilde{M}_{Q_2 Q_2} \tilde{M}_{Q_3 Q_3} + \tilde{M}_{L_2 L_2} \tilde{M}_{L_3 L_3} \right) \\ \varpi_5 &= \Omega_{\tilde{\Phi}_6}^{-2} \\ \varpi_6 &= Tr \left(\tilde{M}_{Q_3 Q_3} \tilde{M}_{Q_1 Q_1} + \tilde{M}_{L_3 L_3} \tilde{M}_{L_1 L_1} \right) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Notons que \mathcal{L}_0 représente le potentiel minimal à champs scalaires à deux triplets de bosons de Higgs. Si on choisit les VeV 's des champs scalaires générés par :

$$\langle \tilde{\Phi}_j \rangle = 0, \quad j = \overline{1, 3} \quad (3.121)$$

$$\langle \tilde{\Phi}_j \rangle = v_{j-3}, \quad j = \overline{4, 6}$$

une analyse simple montre que l'ensemble des VeV 's brise la symetrie en une seule étape :

$$SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N \rightarrow SU(3)_c \otimes U(1)_Q \quad (3.122)$$

Pour la valeur particulière $v_2 = 0$ ou $v_1 = 0$, la chaine de brisure de symetrie devient :

$$SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{v_3} SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{v_1 \text{ ou } v_2} SU(3)_c \otimes U(1)_Q \quad (3.123)$$

après le mécanisme de Higgs, les masses des bosons scalaires prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
M_{\tilde{\Phi}_1}^2 &= \frac{9}{4}g_0^2\Omega_{\tilde{\Phi}_1}^2 \left(\Omega_{\tilde{\Psi}_1}^2 v_1^2\varpi_1 - 2\Omega_{\tilde{\Psi}_1}\Omega_{\tilde{\Psi}_2} v_1v_2\varpi_2 + \Omega_{\tilde{\Psi}_2}^2 v_2^2\varpi_3 \right) \\
M_{\tilde{\Phi}_2}^2 &= \frac{9}{4}g_0^2\Omega_{\tilde{\Phi}_2}^2 \left(\Omega_{\tilde{\Psi}_1}^2 v_1^2\varpi_1 - 2\Omega_{\tilde{\Psi}_1}\Omega_{\tilde{\Psi}_3} v_1v_3\varpi_6 + \Omega_{\tilde{\Psi}_3}^2 v_3^2\varpi_5 \right) \\
M_{\tilde{\Phi}_3}^2 &= \frac{9}{4}g_0^2\Omega_{\tilde{\Phi}_3}^2 \left(\Omega_{\tilde{\Psi}_2}^2 v_2^2\varpi_3 - 2\Omega_{\tilde{\Psi}_2}\Omega_{\tilde{\Psi}_3} v_2v_3\varpi_4 + 2\Omega_{\tilde{\Psi}_3}^2 v_3^2\varpi_5 \right) \\
M_{\tilde{\Psi}_1}^2 &= \frac{27}{4}g_0^2v_1^2\Omega_{\tilde{\Psi}_1}^2 \\
M_{\tilde{\Psi}_2}^2 &= \frac{27}{4}g_0^2v_2^2\Omega_{\tilde{\Psi}_2}^2 \\
M_{\tilde{\Psi}_3}^2 &= \frac{27}{4}g_0^2v_3^2\Omega_{\tilde{\Psi}_3}^2
\end{aligned} \tag{3.124}$$

3.4.1 Champs de Jauge Vectoriels

Bosons de Jauge Chargés

Dans la base $\{W^\pm, V^\pm, U^{\pm\pm}\}$, et après une étape de brisure spontanée de la symétrie et le mécanisme de Higgs, on obtient la matrice de masse des bosons de jauge chargés suivante :

$$M_{CGB} = g^2 \begin{pmatrix} v_1^2 + v_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_1^2 + v_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_2^2 + v_3^2 \end{pmatrix} \tag{3.125}$$

et par conséquent, on déduit que :

$$M_{W^\pm}^2 = g^2 (v_1^2 + v_2^2) \tag{3.126}$$

pour

$$M_{V^\pm}^2 = g^2 (v_1^2 + v_3^2) \tag{3.127}$$

et

$$M_{U^{\pm\pm}}^2 = g^2 (v_2^2 + v_3^2) \quad (3.128)$$

Bosons de Jauge Neutres

Pour les bosons de jauge, et après quelques simplifications utilisant l'équation.(3.97), on obtient (après *SSB*) dans la base $\{W_\mu^0, W_\mu^3, W_\mu^8\}$ la suivante symétrique et non diagonale matrice de masse M_{NGB} :

$$M_{NGB} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12} & M_{22} & M_{23} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

où

$$M_{11} = \frac{g^2}{x} [(\beta - \alpha)^2 v_1^2 + (\gamma - \alpha)^2 v_2^2 + (\delta - \alpha)^2 v_3^2] \quad (3.130a)$$

$$M_{22} = g^2 [v_1^2 + v_2^2] \quad (3.130b)$$

$$M_{33} = g^2 [v_1^2 + v_2^2 + v_3^2] \quad (3.130c)$$

$$M_{12} = \frac{gg_0}{\sqrt{x}} [(\gamma - \alpha) v_2^2 + (\alpha - \beta) v_1^2] \quad (3.130d)$$

$$M_{13} = \frac{-gg_0}{\sqrt{x}} [(\beta - \alpha) v_1^2 + (\gamma - \alpha) v_2 + 2(\delta - \alpha) v_3^2] \quad (3.130e)$$

$$M_{23} = g^2 [v_1^2 - v_2^2] \quad (3.130f)$$

Si on choisit $v_1 = v_2$ et dans l'ordre d'avoir une valeur propre (eigenvalue) nulle (qui représente la masse au repos du photon M_γ^2), on obtient la condition suivante :

$$-M_{12}^2 M_{33} - M_{13}^2 M_{22} + M_{11} M_{22} M_{33} = 0 \quad (3.131)$$

dû aux relations :

$$\delta - \alpha = \beta - \gamma \quad (3.132)$$

et

$$\alpha = \beta \quad (3.133)$$

Les valeurs propres non nulles restantes notées par M_1^2 et M_2^2 qu'on peut identifier au carré des masses des bosons Z' et Z^0 respectivement données par :

$$M_1^2 = M_{Z'}^2 = \left[\frac{g_0^2}{x} (\gamma - \alpha)^2 + 4g^2 \right] v_3^2 \quad (3.134)$$

et

$$M_2^2 = M_{Z^0}^2 = \frac{4g^2 \left[\frac{3g_0^2}{x} (\gamma - \alpha)^2 + 2g^2 \right]}{\left[\frac{g_0^2}{x} (\gamma - \alpha)^2 + 4g^2 \right]} v_1^2 \quad (3.135)$$

Maintenant, et en introduisant un angle de mixage θ tel que :

$$\tan \theta = \frac{g_0}{g\sqrt{x}} \quad (3.136)$$

et si on veut que les masses des bosons de jauge Z^0 et W^\pm soient les mêmes que dans le cas du modèle standard, donc, on peut montrer facilement que :

$$\tan^2 \theta = \frac{4 \sin^2 \theta_w}{(\gamma - \alpha)^2 (6 \cos^2 \theta_w - 1)} \quad (3.137)$$

ou par l'expression équivalente :

$$\cos \theta_w = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4} (\gamma - \alpha)^2 \tan^2 \theta}{1 + \frac{3}{2} (\gamma - \alpha)^2 \tan^2 \theta}} \quad (3.138)$$

ou θ_w est l'angle de mixage de Weinberg.

De l'expression de l'équation.3.136, on peut déduire que $\cos^2 \theta_w \geq \frac{1}{6}$. Cette faible limite est compatible avec la valeur expérimentale $\cos^2 \theta_w \approx 0.76$. Notons aussi que si $\sin^2 \theta_w \approx \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\tan \theta \approx \pm \frac{1}{|\gamma - \alpha|} \sqrt{\frac{2}{7}} \quad (3.139)$$

Où les états propres reliés aux valeurs propres M_γ^2 , $M_{Z'}^2$, et M_Z^2 , on peut montrer qu'ils sont donnés par les expressions suivantes :

$$B_\mu = \mathfrak{S}_B [\zeta_{11} W_\mu^0 + \zeta_{12} W_\mu^3 + \zeta_{13} W_\mu^8] \quad (3.140a)$$

$$Z'_\mu = \mathfrak{S}_{Z'} [\zeta_{21} W_\mu^0 + \zeta_{22} W_\mu^3 + \zeta_{23} W_\mu^8] \quad (3.140b)$$

et

$$Z_\mu = \mathfrak{S}_Z [\zeta_{31} W_\mu^0 + \zeta_{32} W_\mu^3 + \zeta_{33} W_\mu^8] \quad (3.140c)$$

où

$$\zeta_{11} = \zeta_{21} = \zeta_{31} = 1 \quad (3.141a)$$

$$\zeta_{12} = \zeta_{13} = \zeta_{33} = -\frac{(\gamma - \alpha)}{2} \tan \theta \quad (3.141b)$$

$$\zeta_{22} = 0 \quad (3.141c)$$

$$\zeta_{23} = 2 \cot \theta \quad (3.141d)$$

$$\zeta_{32} = \frac{2 \cot \theta}{5(\gamma - \alpha)} + \frac{\gamma - \alpha}{10} \quad (3.141e)$$

avec

$$\mathfrak{S}_B = (\zeta_{11}^2 + \zeta_{12}^2 + \zeta_{13}^2)^{-1/2} \quad (3.142a)$$

$$\mathfrak{S}_{Z'} = (\zeta_{21}^2 + \zeta_{22}^2 + \zeta_{23}^2)^{-1/2} \quad (3.142b)$$

et

$$\mathfrak{S}_Z = (\zeta_{31}^2 + \zeta_{32}^2 + \zeta_{33}^2)^{-1/2} \quad (3.142c)$$

Bien sur, on peut montrer que les transformations précédentes sont le résultat de rotation d'ordre général avec les angles d'Euler $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$. La matrice de rotation correspondante $R(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ est :

$$R(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = \begin{pmatrix} c_{\tilde{\alpha}}c_{\tilde{\gamma}} - s_{\tilde{\alpha}}c_{\tilde{\beta}}s_{\tilde{\gamma}} & -c_{\tilde{\alpha}}s_{\tilde{\gamma}} - s_{\tilde{\alpha}}c_{\tilde{\beta}}c_{\tilde{\gamma}} & s_{\tilde{\beta}}s_{\tilde{\alpha}} \\ s_{\tilde{\alpha}}c_{\tilde{\gamma}} + c_{\tilde{\alpha}}c_{\tilde{\beta}}s_{\tilde{\gamma}} & -s_{\tilde{\alpha}}s_{\tilde{\gamma}} + c_{\tilde{\alpha}}c_{\tilde{\beta}}c_{\tilde{\gamma}} & -s_{\tilde{\beta}}c_{\tilde{\alpha}} \\ s_{\tilde{\beta}}s_{\tilde{\gamma}} & s_{\tilde{\beta}}c_{\tilde{\gamma}} & c_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

avec l'abréviation des fonctions sinus et cosinus par s et c , respectivement et où :

$$\zeta_{12} = \zeta_{13} = \zeta_{33} = -\frac{(\gamma - \alpha)}{2} \tan \theta \quad (3.143a)$$

$$\zeta_{22} = 0 \quad (3.143b)$$

$$\zeta_{23} = 2 \cot \theta \quad (3.143c)$$

$$\zeta_{32} = \frac{2 \cot \theta}{5(\gamma - \alpha)} + \frac{\gamma - \alpha}{10} \quad (3.143d)$$

avec :

$$\tan \tilde{\gamma} = \zeta_{32} \quad (3.144)$$

où :

$$\tan \tilde{\alpha} = -\frac{\zeta_{12}}{\zeta_{23}} (1 + \zeta_{23}^2)^{-1/2} (1 + \zeta_{12}^2)^{-1/2} \quad (3.145)$$

et

$$\cot \tilde{\beta} = \frac{\tan \tilde{\alpha} \tan \tilde{\gamma}}{\sqrt{1 - \tan^2 \tilde{\alpha} \tan^2 \tilde{\gamma}}} \quad (3.146)$$

Si par exemple $\alpha = \frac{2}{3}$ et $\gamma = -\frac{1}{3}$, donc, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$ prennent les valeurs $\tilde{\alpha} \approx -15,96^\circ$, $\tilde{\beta} \approx -68,13^\circ$ et $\tilde{\gamma} \approx 54,38^\circ$ respectivement. Comme illustration on a tracé dans la figure.(3.1), $\tan \tilde{\alpha}$ (en ligne continue, notée par alpha), $\tan \tilde{\beta}$ (en ligne étirée notée par beta) et $\tan \tilde{\gamma}$ (en ligne pointillée, notée par gamma) en fonction de $\tan \theta$. Notons que dans l' intervalle où $\theta \in [2.29^\circ, 27.92^\circ]$, $\tan \tilde{\beta}$ (resp. $\tan \tilde{\gamma}$) est croissante (resp. décroissante) en fonction de θ par contre $\tan \tilde{\alpha}$ est toujours constante.

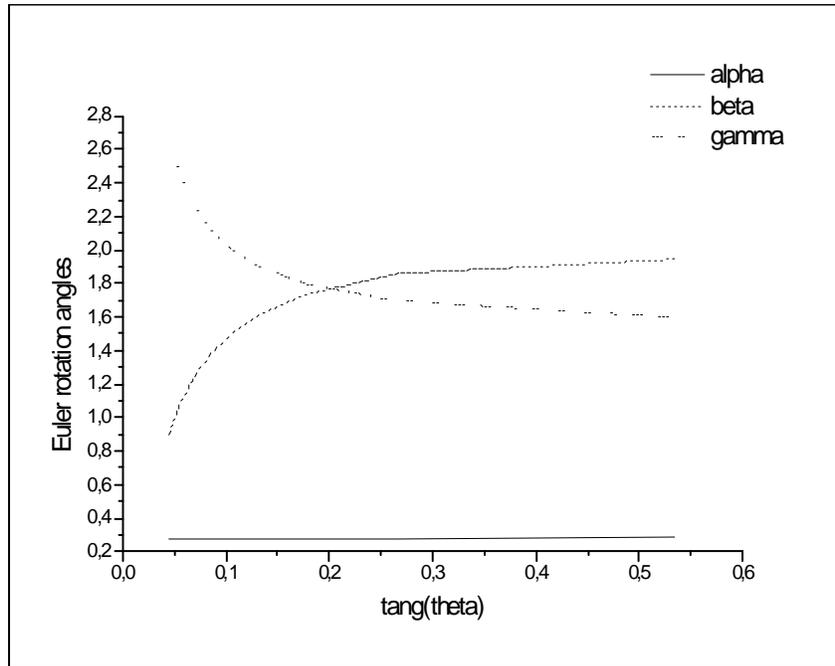


Figure 3.1 $\tan \tilde{\alpha}$, $\tan \tilde{\beta}$ et $\tan \tilde{\gamma}$ en fonction de $\tan \theta$.

Termes d'Interactions Electromagnétiques des Fermions

Pour donner plus de clarté que possible à nos résultats, prenons la première génération de quarks (u, d, J_1). Il est facile de montrer que la densité lagrangienne électromagnétique \mathcal{L}_Q^{EM} prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_Q^{EM} = \frac{g_0}{\sqrt{x}} \Omega \left(\beta^1 \bar{Q}_1^1 \gamma^\mu B_\mu Q_1^1 + \gamma^1 \bar{Q}_2^1 \gamma^\mu B_\mu Q_2^1 + \delta^1 \bar{Q}_3^1 \gamma^\mu B_\mu Q_3^1 \right) \quad (3.147)$$

où

$$\Omega = \frac{4 \cot \theta (1 + 4 \cot \theta) \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \theta\right)}{(24 + \tan \theta - 16 \cot^2 \theta - 4 \cot \theta - 5 \tan^2 \theta)} \quad (3.148)$$

avec les conditions :

$$\delta^1 - \alpha^1 = \alpha^1 - \gamma^1 = 1 \quad (3.149)$$

et

$$\beta^1 = \alpha^1 \quad (3.150)$$

Par identification de la charge du quark u dans l'équation.(3.147), on peut déduire que :

$$\frac{g_0}{\sqrt{x}}\Omega = e \quad (3.151)$$

et

$$\beta^1 = \frac{2}{3} \quad (3.152)$$

(e est la charge électrique) et par conséquent :

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= -\frac{1}{3} \\ \delta^1 &= \frac{5}{3} \end{aligned} \quad (3.153)$$

Notons que les valeurs de β^1 , γ^1 et δ^1 sont compatibles avec les conditions de l'équation.(3.148) et correspondent exactement aux N charges de la première génération de quarks left et right du modèle commutative [21]. Donc on peut mentionner ce résultat important, est que la géométrie non associative reproduit uniquement en output, les valeurs des N charges des particules. De la même façon, sa sera pour la deuxième et la troisième familles des quarks (s, c, J_2) et (b, t, J_3), on peut montrer que :

$$\delta^{2,3} - \alpha^{2,3} = \alpha^{2,3} - \gamma^{2,3} = 1 \quad (3.154)$$

et

$$\begin{aligned}
\beta^2 = \beta^3 = \alpha^2 = \alpha^3 &= -\frac{1}{3} \\
\gamma^2 = \gamma^3 &= +\frac{2}{3} \\
\delta^2 = \delta^3 &= -\frac{4}{3}
\end{aligned}
\tag{3.155}$$

On peut faire la même chose pour les leptons et on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta'^j - \alpha'^j &= \alpha'^j - \gamma'^j = 1 \\
\beta'^j &= \alpha'^j = 0 \\
\gamma'^j &= -1 \\
\delta'^j &= +1, \forall j = \overline{1, 3}
\end{aligned}
\tag{3.156}$$

Il est très important de mentionner ce résultat remarquable qui réside en fait dans, l'universalité des résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\delta^j - \alpha^j = \alpha^j - \gamma^j &= \delta'^j - \alpha'^j = \alpha'^j - \gamma'^j = 1 \\
\beta^j = \alpha^j = \beta'^j &= \alpha'^j, \forall j = \overline{1, 3}
\end{aligned}
\tag{3.157}$$

Indépendamment du type des particules soit des leptons ou des quarks et aussi indépendamment du type de famille, et des relations similaires résultent pour les paramètres α, β, γ et δ . Ce qui est probablement lié au fait que le modèle est libre d'anomalies, la valeur du paramètre x qui est lié directement à la charge N des quarks. a une valeur constante indépendamment du type de la famille. En effet on peut facilement trouver (en utilisant les équations.(3.95c-3.63) que $x = 4$ pour les quarks et elle est nulle pour les leptons.

3.5 Couplage $V - A$ Fermions- Bosons de Jauge Neutres

Si on note par \mathcal{L}^{NC} la densité lagrangienne pour les courants neutres couplée aux bosons vectoriels massifs $Z^{0'}$ et Z^0 :

$$\mathcal{L}^{NC} = \mathcal{L}_Q^{NC} + \mathcal{L}_L^{NC} \quad (3.158)$$

où

$$\mathcal{L}_Q^{NC} = \frac{-g}{2 \cos \theta_w} \sum_{i,j} \left[\bar{Q}_i^j \gamma^\mu \left(g_{V,Z}^{Q_i^j} - g_{A,Z'}^{Q_i^j} \gamma_5 \right) Q_i^j Z_\mu + \bar{Q}_i^j \gamma^\mu \left(g_{V,Z'}^{Q_i^j} - g_{A,Z}^{Q_i^j} \gamma_5 \right) Q_i^j Z'_\mu \right] \quad (3.159)$$

et

$$\mathcal{L}_L^{NC} = \frac{-g}{2 \cos \theta_w} \sum_{i,j} \left[\bar{L}_i^j \gamma^\mu \left(g_{V,Z}^{L_i^j} - g_{A,Z'}^{L_i^j} \gamma_5 \right) L_i^j Z_\mu + \bar{L}_i^j \gamma^\mu \left(g_{V,Z'}^{L_i^j} - g_{A,Z}^{L_i^j} \gamma_5 \right) L_i^j Z'_\mu \right] \quad (3.160)$$

Et il résulte les couplage $V - A$ Fermions- Bosons de Jauge Neutres suivants

$$g_{V,Z}^{Q_i^j}, g_{V,Z'}^{Q_i^j}, g_{A,Z}^{Q_i^j}, g_{A,Z'}^{Q_i^j}, g_{V,Z}^{L_i^j}, g_{V,Z'}^{L_i^j}, g_{A,Z}^{L_i^j} \text{ et } g_{A,Z'}^{L_i^j} :$$

i) Pour les quarks :

$$\begin{aligned} g_{V,Z}^{Q_1^j} &= -D^{*j} [t_{32}^j + t_{33}^j + \varepsilon_3^j t_{31}^j], \\ g_{V,Z'}^{Q_1^j} &= D^{*j} [t_{33}^j - \varepsilon_3^j t_{21}^j], g_{A,Z}^{Q_1^j} = -g_{A,Z'}^{Q_1^j} = D^{*j} t_{33}^j, \end{aligned} \quad (3.161a)$$

$$\begin{aligned}
g_{V,Z}^{Q_2^j} &= D^{*j} [t_{32}^j - t_{33}^j - \varepsilon_4^j t_{31}^j], g_{V,Z'}^{Q_2^j} = D^{*j} [t_{33}^j - \varepsilon_4^j t_{21}^j], \\
g_{A,Z}^{Q_2^j} &= D^{*j} [-t_{32}^j + t_{33}^j + \varepsilon_5^j t_{31}^j], g_{A,Z'}^{Q_2^j} = D^{*j} [-t_{33}^j + \varepsilon_5^j t_{21}^j]
\end{aligned} \tag{3.161b}$$

et

$$g_{V,Z}^{Q_3^j} = g_{V,Z'}^{Q_3^j} = D^{*j} [2t_{32}^j + \varepsilon_1^j t_{31}^j], g_{A,Z}^{Q_3^j} = g_{A,Z'}^{Q_3^j} = D^{*j} [-2t_{32}^j + \varepsilon_2^j t_{31}^j] \tag{3.161c}$$

ii) Pour les leptons :

$$g_{V,Z}^{L_1^j} = -D^{*j} [t_{32}^j + t_{33}^j], g_{V,Z'}^{L_1^j} = D^{*j} [-t_{32}^j + t_{33}^j], g_{A,Z}^{L_1^j} = -g_{A,Z'}^{L_1^j} = -D^{*j} t_{33}^j \tag{3.162a}$$

$$\begin{aligned}
g_{V,Z}^{L_2^j} &= D^{*j} [t_{32}^j - t_{33}^j + t_{31}^j], g_{V,Z'}^{L_2^j} = D^{*j} [t_{33}^j + t_{31}^j], \\
g_{A,Z}^{L_2^j} &= D^{*j} [-t_{32}^j + t_{33}^j + t_{31}^j], g_{A,Z'}^{L_2^j} = D^{*j}
\end{aligned} \tag{3.162b}$$

$$\begin{aligned}
g_{A,Z}^{L_2^j} &= D^{*j} [-t_{32}^j + t_{33}^j + t_{31}^j], g_{A,Z'}^{L_2^j} \\
&= D^{*j}
\end{aligned} \tag{3.162c}$$

et

$$g_{V,Z}^{L_3^j} = g_{V,Z'}^{L_3^j} = D^{*j} [2t_{33}^j - t_{31}^j], g_{A,Z}^{L_3^j} = g_{A,Z'}^{L_3^j} = D^* [-2t_{33}^j - t_{21}^j] \quad (3.162d)$$

où :

$$D^{*j} = D^* \frac{\cos \theta_w}{\chi} \quad (3.163)$$

et

$$\varepsilon_1^j = -(\alpha^j + \delta^j) \tan \theta \quad (3.164a)$$

$$\varepsilon_2^j = (\alpha^j - \delta^j) \tan \theta \quad (3.164b)$$

$$\varepsilon_3^j = -2\alpha^j \tan \theta \quad (3.164c)$$

$$\varepsilon_4^j = -(\alpha^j + \gamma^j) \tan \theta \quad (3.164d)$$

et :

$$\varepsilon_5^j = (\alpha^j - \gamma^j) \tan \theta \quad (3.164e)$$

aussi pour les t :

$$t_{31} = \mathfrak{S}_B \mathfrak{S}_{Z'} \zeta_{12} \zeta_{23} \quad (3.165f)$$

$$t_{32} = \mathfrak{S}_B \mathfrak{S}_{Z'} (\zeta_{12} - \zeta_{23}) \quad (3.165g)$$

$$t_{21} = \mathfrak{S}_B \mathfrak{S}_Z \zeta_{12} (\zeta_{32} - \zeta_{12}) \quad (3.165h)$$

et

$$t_{33} = \mathfrak{S}_B \mathfrak{S}_Z (\zeta_{32} - \zeta_{12}) \quad (3.165i)$$

finalement on a :

$$\chi = \mathfrak{S}_B \mathfrak{S}_{Z'} \mathfrak{S}_Z (-\zeta_{23} \zeta_{32} - (\zeta_{12})^2 + \zeta_{12} \zeta_{23} + \zeta_{12} \zeta_{32}) \quad (3.166)$$

Notons que en géométrie non associative et contrairement au référence [21] (le cas commutatif), le quark exotique est couplé au bosons de jauge Z^0

non seulement à travers les courants vectoriels mais aussi à travers les courants axiaux. La figure.(3.2) représente le couplage vectoriel (ligne continue, représentée par $g_{V,Z'}^{J_1}$) et le couplage axiale (ligne pointillée, représentée par $g_{A,Z'}^{J_1}$) du quark exotique J_1 avec le boson de jauge Z' en fonction de $\tan \theta$. Notons que et contrairement à la composante vectorielle, le couplage axiale est négatif et il est rapidement décroissant.

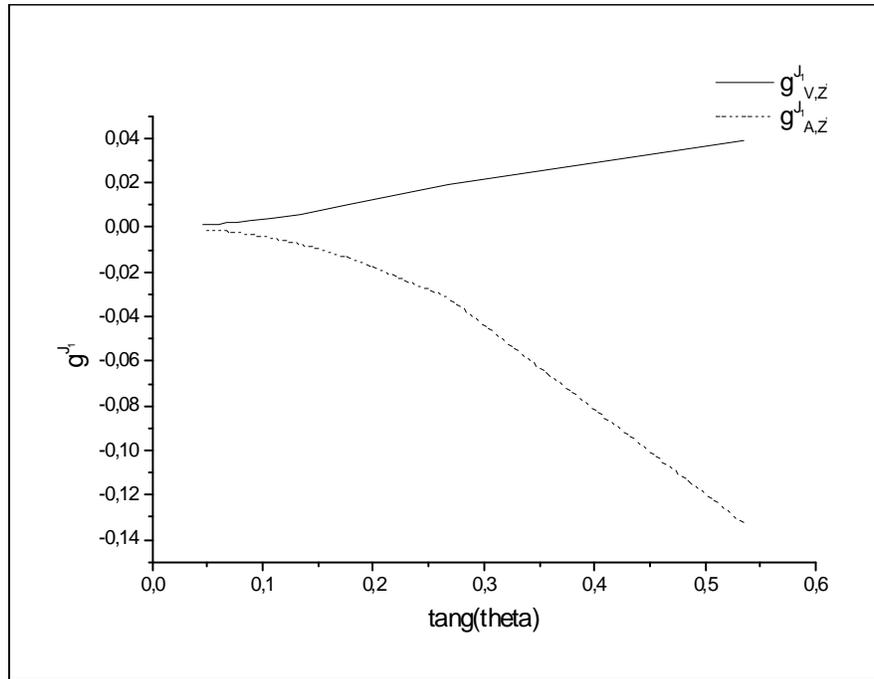


Figure 3.2 Couplage vectoriel et axial du quark exotique J_1 avec le boson Z' en fonction de $\tan \theta$.

Dans la référence suivante [21], les masses des bosons vectoriels exotiques sont fortement limités ce qui est du aux changement de saveur des courants neutres (*FCNC*) induit par le $Z^{0'}$, il peut être obtenu dans le cas de notre modèle si on considère la contribution à la différence de masse du $\overline{K}_L^0 - \overline{K}_S^0$ due à l'échange d'un boson neutre lourd. Si on considère pour simplifier les choses le mixage entre deux familles, on peut obtenir dans l'expression de densité lagrangienne un terme comme :

$$-\frac{g}{4} \frac{M_{Z^0}}{M_W} \cos \theta_c \sin \theta_c \left[\bar{d} \gamma^\mu \left(g_{V,Z}^{Q_2^1} - g_{A,Z'}^{Q_2^1} \gamma_5 \right) s - \bar{d} \gamma^\mu \left(g_{V,Z}^{Q_1^2} - g_{A,Z'}^{Q_1^2} \gamma_5 \right) s \right] Z'_\mu \quad (3.167)$$

où Q_2^1 (resp. Q_1^2) représente le d (resp. s quark), on a donc aux faibles énergies l'interaction effective :

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{g^2}{16} \left(\frac{M_{Z^0}}{M_W} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta_c \sin^2 \theta_c}{M_{Z^{0'}}^2} \left[\bar{d} \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) s \right]^2 \quad (3.168)$$

avec

$$c_V = c_A = g_{V,Z}^{Q_2^1} - g_{V,Z}^{Q_1^2} = D^* \tan \theta \quad (3.169)$$

Rappelons aux lecteurs que la contribution du c -quark dans le modèle standard est [36, 37] :

$$\mathcal{L}_{eff}^{SM} = -\frac{G_F \alpha_e}{\sqrt{2}} \frac{m_c^2}{4\pi M_W^2 \sin^2 \theta_w} \cos^2 \theta_c \sin^2 \theta_c \left[\bar{d} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) s \right]^2 \quad (3.170)$$

où

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad (3.171)$$

θ_c , α_e et G_F sont l'angle de cabbibo, la constante de couplage de structure fine électromagnétique et la constante de Fermi respectivement. Maintenant, si on assume que n'importe quelle contribution additionnelle à la différence de masse de la part du boson $Z^{0'}$ ne peut être plus grande que celle de la contribution du quark charmé [38]. Donc on peut obtenir la faible limite suivante :

$$M_Z^2 \gtrsim \frac{2\pi}{\alpha_e} \frac{M_W^4}{m_c^2} D^{*2} \tan^2 \theta \tan^2 \theta_w \quad (3.172)$$

et par conséquent la valeur du VeV v_3 a une faible limite :

$$v_3^2 \gtrsim \frac{\sqrt{2}\pi}{4G_F \alpha_e} \frac{M_W^2}{m_c^2} D^{*2} \tan^2 g\theta \tan^2 g\theta_w / [\tan^2 g\theta (\gamma - \alpha)^2 + 4] \quad (3.173)$$

Ce qui implique (si $v_3 \gg v_1, v_2$) comme dans l' équation (3.126) et(3.127) que :

$$M_{V^\pm, U^{\pm\pm}}^2 \gtrsim \frac{2\pi}{\alpha_e} \frac{M_W^4}{m_e^2} D^{*2} \tan^2 \theta \tan^2 \theta_w / [\tan^2 g\theta (\gamma - \alpha)^2 + 4] \quad (3.174)$$

Pour $(\gamma - \alpha)^2 = 1$, on obtient $M_{Z^{0'}} \approx 21.76 TeV$, $v_3 \approx 13.49 TeV$ et $M_{V^\pm, U^{\pm\pm}} \approx 10, 51 TeV$. Voir figure.(3.3) (resp.figure.(3.4)) qui tracent les variations des faibles limites du $M_{Z^{0'}}$ (resp. $M_{V^\pm, U^{\pm\pm}}$) en fonction de $\tan \theta$. Notons que autant que θ est faible, les variations des $M_{Z^{0'}}$ (resp. $M_{V^\pm, U^{\pm\pm}}$) sont très importantes $\sim O(4 - 14) TeV$ (resp. $\sim O(2 - 7) TeV$) dans l' intervalle $\theta \in [18.10^{-4} - 28.10^{-4}]$.

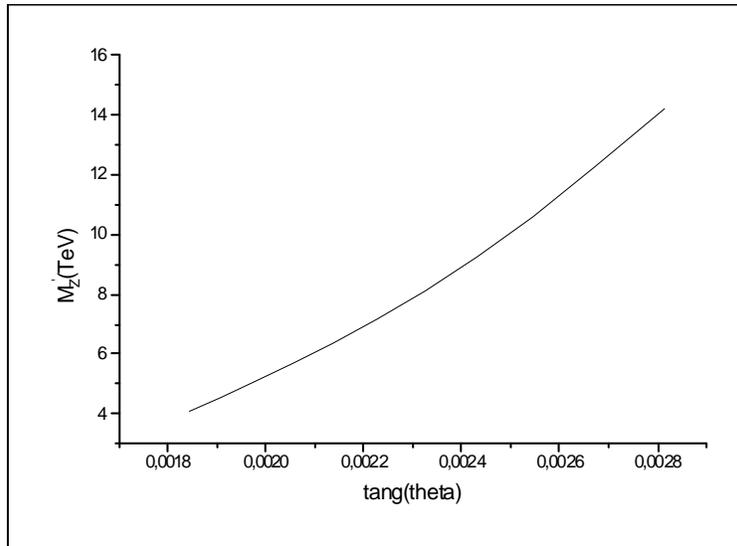


figure 3.3 Variation de faibles bandes du M_{Z^0} , en fonction de $\tan \theta$.

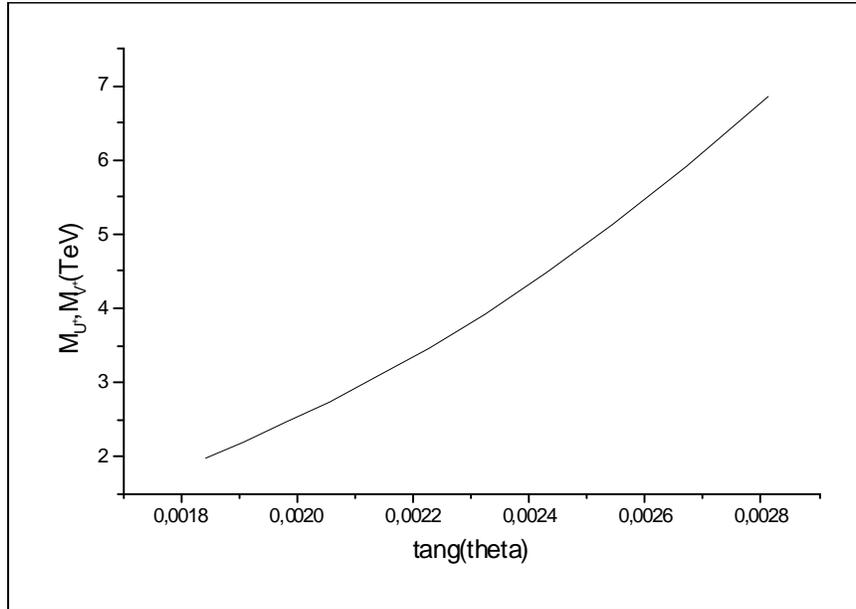


Figure 3.4 Variation de M_{U^{++}, V^+} en fonction de $\tan \theta$.

Chapitre 4

Le Modèle de Grande

Unification E_6 , GNA, Susy et

CP Violation

4.1 L' Algèbre E_6 Exceptionnelle et GNC

4.1.1 Définitions :

I. Une algèbre exceptionnelle est une algèbre simple de Lie de dimension finie, et on a cinq algèbres exceptionnelles qui sont E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 [51].

On peut mentionner les particularités de ces cinq algèbres comme suit :

- 1- elles sont directement liées aux octonions .
- 2- leurs structures (précisément le type des sous algèbres qu'elles contiennent)
- 3- Et bien sûr leur propriété (exceptionnelle) qui fait qu'ils ne sont que cinq (5 un nombre limité).

Et il se trouve que parmi ces cinq algèbres seul E_6 est l'algèbre exceptionnelle à représentations complexes (pour les autres toutes les représentations sont réelles).

E_6 est de rang 6, sa représentation fondamentale est de dimension 27 et sa représentation adjointe est de dimension 78 et a pour sous algèbre maximale $su(3) \oplus su(3) \oplus su(3)$.

La représentation de E_6 est de la forme suivante :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

où $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{C}$ (complexes) et x, y, z sont des octonions complexes avec leurs octonioniques conjugués $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

II. Une algèbre de composition (composition algebra) est une algèbre \mathcal{A} avec une identité et une forme quadratique non dégénérée Q qui est définie sur l'algèbre \mathcal{A} tel que Q permet la composition i.e pour $x, y \in \mathcal{A}$,

$$Q(xy) = Q(x)Q(y). \quad (4.2)$$

Une algèbre de composition est dite algèbre de division si la forme quadratique Q est anisotrope i.e si $Q(x) = 0 \implies x = 0$ si non l'algèbre est dite split [50].

III. Une algèbre exceptionnelle défini sur un champ de complexes peut avoir pour représentation soit :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix} = \bar{J}^T \quad (4.3)$$

défini sur la base octonionique $e_\mu (\mu = 0, 1, \dots, 7)$, ou en même temps on peut la définir sur la base split complexe octonionique (u_α, u_α^*) ou $\alpha = 0, 1, 2, 3$. tel que :

$$J = Lu_0 + L^T u_0^* + R^i u_i + S^i u_i^* \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

Où les u_α sont défini en termes des e_μ par

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= u_0^*, & \bar{u}_k &= -u_k, \\ u_0^2 &= u_0, & u_0 u_0^* &= 0, \\ u_0 u_k &= u_k u_0^* = u_k, & u_0^* u_k &= u_k u_0 = 0, \\ u_i u_j &= \varepsilon_{ijk} u_k^* & u_i u_j^* &= -u_0 \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Où L est une matrice 3×3 complexe et R^i et S^i sont des matrices 3×3 complexes et anti-symétriques, ces deux représentations sont en fait les mêmes, ce qui n'est pas le cas des algèbres réelles octonioniques, où une algèbre réelle octonionique défini sur la base $e_\mu (\mu = 0, 1, \dots, 7)$ est une réelle algèbre de division par contre l'algèbre réelle défini sur la base split (u_α, u_α^*) ou $\alpha = 0, 1, 2, 3$. (connue par l'algèbre de Cayley split) n'est pas une algèbre réelle de division puisque elle contient des diviseurs de zéros [51].

Donc si on ait tenté par une quelconque répartition des fermions sur la deuxième représentation sans tenir compte de n'importe quelle sous algèbre , la première chose qui nous attire sur cette forme de décomposition est l'indice $i = 1, 2, 3$ que je peut affecter aux couleurs et donc je peut déjà dire que les matrices anti-symétriques R^i et S^i ne peuvent être affectées qu'aux quarks et puisque R et S sont constituées chacune de trois paramètres indépendants et il y a un certain lien de conjugaison entre R et S on peut voir qu'on a trois types de quarks différents qu'on peut répartir sur R et S et pour les leptons ils seront répartis sur la matrice L , si on a au moins des prémices de répartition qui peuvent nous aider à définir le module $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$ avec la répartition préliminaire qu'on a définit :

$J^+DJ \cong \overline{27} \times 27 \times 27$ (donc on commence par cette répartition générale et puis voir la forme de D) mais en réalité cette répartition qu'on viens de proposer n'est qu'une répartition selon le sous groupe maximale $su(3) \oplus su(3) \oplus su(3)$. et selon Gursej le fait d'écrire un élément de l'algèbre suivant la base complexe split[53] (c'était en étudiant le secteur de Higgs) c'est comme si le choix de la décomposition $su(3) \oplus su(3) \oplus su(3)$.est fait automatiquement.

Donc si on veut définir le module $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$ sans l'utilisation d'aucune répartition se basant sur quelconque éventuelle brisure on doit donc utiliser la forme compacte :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

et donc on a le module :

$$J^+DJ \cong \overline{27} \otimes 27 \otimes 27 \quad (4.7)$$

où ($\overline{27} = J^*$) et on a ($27 \otimes 27$) est défini par un produit où on a ce dernier qui se couple directement avec $\overline{27}$ (J^*) [43],[44],[45] et donc on a le module qu'on veut définir est représenté par le produit :

$$\begin{aligned} J^\dagger DJ &\cong \overline{27} \otimes (27 \otimes 27) \\ &\cong \overline{27} \otimes \overline{27} \end{aligned} \quad (4.8)$$

est ce que c' est 27

IV. Est ce que $\overline{27} \otimes (27 \otimes 27) \rightarrow 27$.

On a ($27 \otimes 27$) obéit au produit freudhental[54] (qui sera très important pour l' étude du secteur du Higgs) et qui est défini par :

$$2(J_1 \times J_2) = (J_1 + J_2) \times (J_1 + J_2) J_1 - J_1 \times J_2 - J_2 \times J_1 \quad (4.9)$$

pour deux matrices complexes octonionique :

$$J \times J = J^{-1}DetJ = J^2 - JTrJ - \frac{1}{2}I [TrJ^2 - (TrJ)^2] \quad (4.10)$$

de[45] on a

$$\Phi^+ \times (\Phi \times \Phi) - \frac{1}{2}\Phi Tr(\Phi^+.\Phi) = -\frac{1}{2}c^2\Phi \quad (4.11)$$

de cette équation on voit donc que le produit $\overline{27} \otimes (27 \otimes 27) \rightarrow 27$ donc on a le module $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$ est bien défini.

Et comme le module est défini donc la forme du Dirac D doit être extraite directement de la représentation compacte avec bien sûr la répartition qui se base sur le sous groupe $su(3) \otimes su(3) \otimes su(3)$ et qui est donnée par Gursev[44].

En fait dans leur conquête à la construction de modèles de grande unification dans le cadre de la géométrie non commutative deux approches ont été développées la première qui tient compte dès le début de la brisure ou des brisures souhaités qui est le cas des modèles construits par Chamseddine, Felder et Frolich [13],[20],[51],[55] et la deuxième approche et qui ne tient compte d'aucune brisure dans la définition du L cycle qui est illustré par les modèles construit par wulkenhaar [17],[18],[19],[20].

$$L = \begin{pmatrix} \widehat{N}_R^\theta & \widehat{\theta}_R & \widehat{l}_R \\ \theta_L^- & \nu_L^\theta & \beta_L \\ l_L^- & \nu_L^l & \alpha_L \end{pmatrix}, \quad q_L^i = \begin{pmatrix} U_L^i \\ D_L^i \\ B_L^i \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_R^i = \begin{pmatrix} \widehat{U}_R^i \\ \widehat{D}_R^i \\ \widehat{B}_R^i \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

où :

$$\widehat{\psi}_R = i\sigma_2 \psi_R^* = (\psi^c)_L \quad (4.13)$$

et donc mon prochain but est de définir la forme du Dirac en se basant sur cette forme de répartition bien sure après avoir défini la représentation $\pi(a)$:

$$J = 27 = \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

et

$$J^* = \overline{27} = \begin{pmatrix} a_1^* & x^* & \bar{y}^* \\ \bar{x}^* & a_2^* & z^* \\ y^* & \bar{z}^* & a_3^* \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

tel que a_1, a_2, a_3 sont des complexes et x, y et z sont des octonions complexes \bar{x}, \bar{y} et \bar{z} sont les octonioniques conjugués et les a_1^*, a_2^* et a_3^* sont des complexes conjugués, donc l'opération bar veut dire octonionique conjugué et l'opération * c' est le complexe conjugué.

Comme E_6 est une algèbre de Jordan Exceptionnelle donc tous ses élément obéissent au produit suivant :

$$X.Y = \frac{1}{2}(XY + YX) \quad (4.16)$$

Soit les notations suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & y_2 \\ x_2 & a_2 & z_1 \\ y_1 & z_2 & a_3 \end{pmatrix}. \quad (4.17a)$$

et

$$J^* = \begin{pmatrix} a_1^* & x^* & \bar{y}^* \\ \bar{x}^* & a_2^* & z^* \\ y^* & \bar{z}^* & a_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* & x_1^* & y_2^* \\ x_2^* & a_2^* & z_1^* \\ y_1^* & z_2^* & a_3^* \end{pmatrix} \quad (4.17b)$$

soit :

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & e & j \\ f & d_2 & i \\ g & h & d_3 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & y_2 \\ x_2 & a_2 & z_1 \\ y_1 & z_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & e & j \\ f & d_2 & i \\ g & h & d_3 \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 a_1 + f x_1 + g y_2 & a_1 e + x_1 d_2 + y_2 h & a_1 j + i x_1 + y_2 d_3 \\ x_2 d_1 + a_2 f + z_1 g & e x_2 + d_2 a_2 + h z_1 & x_2 j + i a_2 + d_3 z_1 \\ y_1 d_1 + z_2 f + a_3 g & y_1 e + z_2 d_2 + a_3 h & j y_1 + i z_2 + d_3 a_3 \end{pmatrix} \quad (4.19) \\ & = A \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 & e & j \\ f & d_2 & i \\ g & h & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & y_2 \\ x_2 & a_2 & z_1 \\ y_1 & z_2 & a_3 \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} d_1 a_1 + e x_2 + j y_1 & d_1 x_1 + e a_2 + j z_2 & d_1 y_2 + e z_1 + j a_3 \\ f a_1 + d_2 x_2 + i y_1 & f x_1 + d_2 a_2 + i z_2 & f y_2 + d_2 z_1 + i a_3 \\ g a_1 + h x_2 + d_3 y_1 & g x_1 + h a_2 + d_3 z_2 & g y_2 + h z_1 + d_3 a_3 \end{pmatrix} \quad (4.20) \\ & = B \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A+B) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc} 2d_1a_1 + ex_2 + jy_1 & a_1e + x_1d_2 + y_2h + & d_1y_2 + ez_1 + ja_3 + \\ & +fx_1 + gy_2 & d_1x_1 + ea_2 + jz_2 & a_1j + ix_1 + y_2d_3 \\ fa_1 + d_2x_2 + iy_1 + & ex_2 + 2d_2a_2 + & fy_2 + d_2z_1 + ia_3 + \\ x_2d_1 + a_2f + z_1g & hz_1 + fx_1 + iz_2 & x_2j + ia_2 + d_3z_1 \\ y_1d_1 + z_2f + a_3g + & y_1e + z_2d_2 + a_3h + & jy_1 + iz_2 + 2d_3a_3 \\ ga_1 + hx_2 + d_3y_1 & gx_1 + ha_2 + d_3z_2 & +gy_2 + hz_1 \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Et pour la deuxième partie on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc} a_1^* & x_1^* & y_2^* \\ x_2^* & a_2^* & z_1^* \\ y_1^* & z_2^* & a_3^* \end{array} \right) \cdot \\ & \left(\begin{array}{ccc} 2d_1a_1 + ex_2 + jy_1 & a_1e + x_1d_2 + y_2h + & d_1y_2 + ez_1 + ja_3 + \\ & +fx_1 + gy_2 & d_1x_1 + ea_2 + jz_2 & a_1j + ix_1 + y_2d_3 \\ fa_1 + d_2x_2 + iy_1 + & ex_2 + 2d_2a_2 + & fy_2 + d_2z_1 + ia_3 + \\ x_2d_1 + a_2f + z_1g & hz_1 + fx_1 + iz_2 & x_2j + ia_2 + d_3z_1 \\ y_1d_1 + z_2f + a_3g + & y_1e + z_2d_2 + a_3h + & jy_1 + iz_2 + 2d_3a_3 \\ ga_1 + hx_2 + d_3y_1 & gx_1 + ha_2 + d_3z_2 & +gy_2 + hz_1 \end{array} \right) \\ & = M \end{aligned} \quad (4.23)$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

avec :

$$M_1 = 2a_1^*d_1a_1 + a_1^*ex_2 + a_1^*jy_1 + a_1^*fx_1 + a_1^*gy_2 + x_1^*fa_1 + x_1^*d_2x_2 + ix_1^*y_1 \\ + x_1^*x_2d_1 + x_1^*a_2f + x_1^*z_1g + y_2^*y_1d_1 + y_2^*z_2f + y_2^*a_3g + y_2^*ga_1 + y_2^*hx_2 + y_2^*d_3y_1$$

$$M_2 = a_1^*a_1e + a_1^*x_1d_2 + a_1^*y_2h + a_1^*d_1x_1 + a_1^*ea_2 + a_1^*jz_2 + x_1^*ex_2 + 2x_1^*d_2a_2 \\ + x_1^*hz_1 + x_1^*fx_1 + ix_1^*z_2 + y_2^*y_1e + y_2^*z_2d_2 + y_2^*a_3h + y_2^*gx_1 + y_2^*ha_2 + y_2^*d_3z_2$$

$$M_3 = a_1^*d_1y_2 + a_1^*ez_1 + a_1^*ja_3 + a_1^*a_1j + ia_1^*x_1 + a_1^*y_2d_3 + x_1^*fy_2 + x_1^*d_2z_1 \\ + ix_1^*a_3 + x_1^*x_2j + ix_1^*a_2 + x_1^*d_3z_1 + y_2^*jy_1 + iy_2^*z_2 + 2y_2^*d_3a_3 + y_2^*gy_2 + y_2^*hz_1$$

$$M_4 = 2x_2^*d_1a_1 + x_2^*ex_2 + x_2^*jy_1 + x_2^*fx_1 + x_2^*gy_2 + a_2^*fa_1 + a_2^*d_2x_2 + ia_2^*y_1 \\ + a_2^*x_2d_1 + a_2^*a_2f + a_2^*z_1g + z_1^*y_1d_1 + z_1^*z_2f + z_1^*a_3g + z_1^*ga_1 + z_1^*hx_2 + z_1^*d_3y_1$$

$$M_5 = x_2^*a_1e + x_2^*x_1d_2 + x_2^*y_2h + x_2^*d_1x_1 + x_2^*ea_2 + x_2^*jz_2 + a_2^*ex_2 + 2a_2^*d_2a_2 \\ + a_2^*hz_1 + a_2^*fx_1 + ia_2^*z_2 + z_1^*y_1e + z_1^*z_2d_2 + z_1^*a_3h + z_1^*gx_1 + z_1^*ha_2 + z_1^*d_3z_2$$

$$M_6 = x_2^*d_1y_2 + x_2^*ez_1 + x_2^*ja_3 + x_2^*a_1j + ix_2^*x_1 + x_2^*y_2d_3 + a_2^*fy_2 + a_2^*d_2z_1 + \\ ia_2^*a_3 + a_2^*x_2j + ia_2^*a_2 + a_2^*d_3z_1 + z_1^*jy_1 + iz_1^*z_2 + 2z_1^*d_3a_3 + z_1^*gy_2 + z_1^*hz_1$$

$$M_7 = 2y_1^*d_1a_1 + y_1^*ex_2 + y_1^*jy_1 + y_1^*fx_1 + y_1^*gy_2 + z_2^*fa_1 + z_2^*d_2x_2 + iz_2^*y_1 \\ + z_2^*x_2d_1 + z_2^*a_2f + z_2^*z_1g + a_3^*y_1d_1 + a_3^*z_2f + a_3^*a_3g + a_3^*ga_1 + a_3^*hx_2 + a_3^*d_3y_1$$

$$M_8 = y_1^*a_1e + y_1^*x_1d_2 + y_1^*y_2h + y_1^*d_1x_1 + y_1^*ea_2 + y_1^*jz_2 + z_2^*ex_2 + 2z_2^*d_2a_2 \\ + z_2^*hz_1 + z_2^*fx_1 + iz_2^*z_2 + a_3^*y_1e + a_3^*z_2d_2 + a_3^*a_3h + a_3^*gx_1 + a_3^*ha_2 + a_3^*d_3z_2$$

$$M_9 = y_1^*d_1y_2 + y_1^*ez_1 + y_1^*ja_3 + y_1^*a_1j + iy_1^*x_1 + y_1^*y_2d_3 + z_2^*fy_2 + z_2^*d_2z_1 \\ + iz_2^*a_3 + z_2^*x_2j + iz_2^*a_2 + z_2^*d_3z_1 + a_3^*jy_1 + ia_3^*z_2 + 2a_3^*d_3a_3 + a_3^*gy_2 + a_3^*hz_1$$

et en inversant les produits on a :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2d_1a_1 + ex_2 + jy_1 & a_1e + x_1d_2 + y_2h + & d_1y_2 + ez_1 + ja_3 + \\ +fx_1 + gy_2 & d_1x_1 + ea_2 + jz_2 & a_1j + ix_1 + y_2d_3 \\ fa_1 + d_2x_2 + iy_1 + & ex_2 + 2d_2a_2 + & fy_2 + d_2z_1 + ia_3 + \\ x_2d_1 + a_2f + z_1g & hz_1 + fx_1 + iz_2 & x_2j + ia_2 + d_3z_1 \\ y_1d_1 + z_2f + a_3g + & y_1e + z_2d_2 + a_3h + & jy_1 + iz_2 + 2d_3a_3 \\ ga_1 + hx_2 + d_3y_1 & gx_1 + ha_2 + d_3z_2 & +gy_2 + hz_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^* & x_1^* & y_2^* \\ x_2^* & a_2^* & z_1^* \\ y_1^* & z_2^* & a_3^* \end{pmatrix} = M' \quad (4.24)$$

tel que :

$$M' = \begin{pmatrix} M'_1 & M'_2 & M'_3 \\ M'_4 & M'_5 & M'_6 \\ M'_7 & M'_8 & M'_9 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

où

$$M'_1 = 2a_1^*d_1a_1 + a_1^*ex_2 + a_1^*jy_1 + a_1^*fx_1 + a_1^*gy_2 + x_2^*a_1e + x_2^*x_1d_2 + x_2^*y_2h \\ + x_2^*d_1x_1 + x_2^*ea_2 + x_2^*jz_2 + y_1^*d_1y_2 + y_1^*ez_1 + y_1^*ja_3 + y_1^*a_1j + iy_1^*x_1 + y_1^*y_2d_3$$

$$M'_2 = 2x_1^*d_1a_1 + x_1^*ex_2 + x_1^*jy_1 + x_1^*fx_1 + x_1^*gy_2 + a_2^*a_1e + a_2^*x_1d_2 + a_2^*y_2h \\ + a_2^*d_1x_1 + a_2^*ea_2 + a_2^*jz_2 + z_2^*d_1y_2 + z_2^*ez_1 + z_2^*ja_3 + z_2^*a_1j + iz_2^*x_1 + z_2^*y_2d_3$$

$$M'_3 = 2y_2^*d_1a_1 + y_2^*ex_2 + y_2^*jy_1 + y_2^*fx_1 + y_2^*gy_2 + z_1^*a_1e + z_1^*x_1d_2 + z_1^*y_2h \\ + z_1^*d_1x_1 + z_1^*ea_2 + z_1^*jz_2 + a_3^*d_1y_2 + a_3^*ez_1 + a_3^*ja_3 + a_3^*a_1j + ia_3^*x_1 + a_3^*y_2d_3$$

$$M'_4 = a_1^*fa_1 + a_1^*d_2x_2 + ia_1^*y_1 + a_1^*x_2d_1 + a_1^*a_2f + a_1^*z_1g + x_2^*ex_2 + 2x_2^*d_2a_2 \\ + x_2^*hz_1 + x_2^*fx_1 + ix_2^*z_2 + y_1^*fy_2 + y_1^*d_2z_1 + iy_1^*a_3 + y_1^*x_2j + iy_1^*a_2 + y_1^*d_3z_1$$

$$M'_5 = x_1^*fa_1 + x_1^*d_2x_2 + ix_1^*y_1 + x_1^*x_2d_1 + x_1^*a_2f + x_1^*z_1g + a_2^*ex_2 + 2a_2^*d_2a_2 \\ + a_2^*hz_1 + a_2^*fx_1 + ia_2^*z_2 + z_2^*fy_2 + z_2^*d_2z_1 + iz_2^*a_3 + z_2^*x_2j + iz_2^*a_2 + z_2^*d_3z_1$$

$$M'_6 = y_2^*fa_1 + y_2^*d_2x_2 + iy_2^*y_1 + y_2^*x_2d_1 + y_2^*a_2f + y_2^*z_1g + z_1^*ex_2 + 2z_1^*d_2a_2 \\ + z_1^*hz_1 + z_1^*fx_1 + iz_1^*z_2 + a_3^*fy_2 + a_3^*d_2z_1 + ia_3^*a_3 + a_3^*x_2j + ia_3^*a_2 + a_3^*d_3z_1$$

$$M'_7 = a_1^* y_1 d_1 + a_1^* z_2 f + a_1^* a_3 g + a_1^* g a_1 + a_1^* h x_2 + a_1^* d_3 y_1 + x_2^* y_1 e + x_2^* z_2 d_2 \\ + x_2^* a_3 h + x_2^* g x_1 + x_2^* h a_2 + x_2^* d_3 z_2 + y_1^* j y_1 + i y_1^* z_2 + 2 y_1^* d_3 a_3 + y_1^* g y_2 + y_1^* h z_1$$

$$M'_8 = x_1^* y_1 d_1 + x_1^* z_2 f + x_1^* a_3 g + x_1^* g a_1 + x_1^* h x_2 + x_1^* d_3 y_1 + a_2^* y_1 e + a_2^* z_2 d_2 \\ + a_2^* a_3 h + a_2^* g x_1 + a_2^* h a_2 + a_2^* d_3 z_2 + z_2^* j y_1 + i z_2^* z_2 + 2 z_2^* d_3 a_3 + z_2^* g y_2 + z_2^* h z_1$$

$$M'_9 = y_2^* y_1 d_1 + y_2^* z_2 f + y_2^* a_3 g + y_2^* g a_1 + y_2^* h x_2 + y_2^* d_3 y_1 + z_1^* y_1 e + z_1^* z_2 d_2 \\ + z_1^* a_3 h + z_1^* g x_1 + z_1^* h a_2 + z_1^* d_3 z_2 + a_3^* j y_1 + i a_3^* z_2 + 2 a_3^* d_3 a_3 + a_3^* g y_2 + a_3^* h z_1$$

On remarque que dans ce dernier produit les opérateurs ont été automatiquement commuté par le logiciel mais je crois qu'il n'y a pas une grande influence sur le résultat final.

Maintenant je fait la somme et où j'obtient la matrice I :

$$I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_1 & I_4 & I_7 \\ I_2 & I_5 & I_8 \\ I_3 & I_6 & I_9 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

où

$$I_1 = y_2^* d_3 y_1 + 2 a_1^* e x_2 + 2 a_1^* j y_1 + 2 a_1^* g y_2 + 2 a_1^* f x_1 + x_1^* f a_1 + x_1^* d_2 x_2 \\ + x_1^* x_2 d_1 + x_1^* a_2 f + x_1^* z_1 g + y_2^* y_1 d_1 + y_2^* z_2 f + y_2^* a_3 g + y_2^* g a_1 + y_2^* h x_2 \\ + x_2^* a_1 e + x_2^* x_1 d_2 + x_2^* y_2 h + x_2^* d + x_2^* e a_2 + x_2^* j z_2 + y_1^* d_1 y_2 + y_1^* e z_1 \\ + y_1^* j a_3 + y_1^* a_1 j + y_1^* y_2 d_3 + 4 a_1^* d_1 a_1 + i x_1^* y_1 + i y$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & 2x_2^*ex_2 + x_2^*jy_1 + x_2^*gy_2 + 2x_2^*fx_1 + a_2^*fa_1 + a_2^*d_2x_2 + a_2^*x_2d_1 + a_2^*a_2f \\
& + a_2^*z_1g + z_1^*y_1d_1 + z_1^*z_2f + z_1^*a_3g + z_1^*ga_1 + z_1^*hx_2 + z_1^*d_3y_1 + a_1^*fa_1 \\
& + a_1^*d_2x_2 + a_1^*a_2f + a_1^*x_2d + a_1^*z_1g + x_2^*hz_1 + y_1^*fy_2 + y_1^*d_2z_1 + y_1^*x_2j \\
& + y_1^*d_3z_1 + 2x_2^*d_1a_1 + 2x_2^*d_2a_2 + ia_2^*y_1 + ia_1^*y_1 + ix_2^*z_2 + iy_1^*a_3 + iy_1^*a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & a_3^*hx_2 + a_3^*ga_1 + a_3^*a_3g + a_3^*z_2f + a_3^*y_1d_1 + z_2^*z_1g + z_2^*a_2f + z_2^*x_2d_1 \\
& + z_2^*d_2x_2 + z_2^*fa_1 + y_1^*fx_1 + 2y_1^*gy_2 + 2y_1^*jy_1 + y_1^*ex_2 + 2y_1^*d_3a_3 + 2y_1^*d_1a_1 \\
& + y_1^*hz_1 + x_2^*d_3z_2 + x_2^*ha_2 + x_2^*gx_1 + x_2^*a_3h + x_2^*z_2d_2 + x_2^*y_1e + a_1^*d_3y_1 \\
& + a_1^*ga_1 + a_1^*hx_2 + a_1^*a_3g + a_1^*z_2f + a_1^*y_1d_1 + a_3^*d_3y_1 + iy_1^*z_2 + iz_2^*y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 = & y_2^*a_3h + a_1^*a_1e + a_1^*x_1d_2 + a_1^*y_2h + a_1^*ea_2 + a_1^*d_1x_1 + a_1^*jz_2 + 2x_1^*ex_2 \\
& + x_1^*hz_1 + 2x_1^*fx_1 + y_2^*y_1e + y_2^*z_2d_2 + y_2^*gx_1 + y_2^*ha_2 + y_2^*d_3z_2 + x_1^*jy_1 \\
& + x_1^*gy_2 + a_2^*a_1e + a_2^*x_1d_2 + a_2^*y_2h + a_2^*d_1x_1 + a_2^*ea_2 + a_2^*jz_2 + z_2^*d_1y_2 \\
& + z_2^*ez_1 + z_2^*ja_3 + z_2^*a_1j + z_2^*y_2d_3 + 2x_1^*d_2a_2 + 2x_1^*d_1a_1 + ix_1^*z_2 + iz_2^*x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = & x_2^*a_1e + x_2^*x_1d_2 + x_2^*y_2h + x_2^*ea_2 + x_2^*d_1x_1 + x_2^*jz_2 + 2a_2^*ex_2 \\
& + 2a_2^*hz_1 + 2a_2^*fx_1 + z_1^*y_1e + z_1^*z_2d_2 + z_1^*a_3h + z_1^*gx_1 + z_1^*ha_2 + z_1^*d_3z_2 \\
& + x_1^*fa_1 + x_1^*d_2x_2 + x_1^*a_2f + x_1^*x_2d_1 + x_1^*z_1g + z_2^*fy_2 + z_2^*d_2z_1 + z_2^*x_2j \\
& + z_2^*d_3z_1 + 4a_2^*d_2a_2 + 2ia_2^*z_2 + ix_1^*y_1 + iz_2^*a_3 + iz_2^*a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 = & 2z_2^*d_2a_2 + z_2^*jy_1 + a_2^*d_3z_2 + a_2^*ha_2 + a_2^*gx_1 + a_2^*a_3h + a_2^*z_2d_2 + x_1^*d_3y_1 \\
& + x_1^*ga_1 + x_1^*hx_2 + x_1^*a_3g + x_1^*z_2f + x_1^*y_1d_1 + a_3^*d_3z_2 + a_3^*ha_2 + a_3^*gx_1 \\
& + a_3^*a_3h + a_3^*z_2d_2 + a_3^*y_1e + z_2^*fx_1 + 2z_2^*hz_1 + z_2^*ex_2 + y_1^*jz_2 + y_1^*d_1x_1 \\
& + y_1^*ea_2 + y_1^*y_2h + y_1^*x_1d_2 + y_1^*a_1e + 2a_2^*d_3a_3 + a_2^*gy_2 + 2ia_2^*z_2 + a_2^*y_1e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 = & a_1^* e z_1 + a_1^* j a_3 + a_1^* a_1 j + a_1^* y_2 d_3 + x_1^* f y_2 + x_1^* d_2 z_1 + x_1^* x_2 j + x_1^* d_3 z_1 \\
& + 2y_2^* j y_1 + 2y_2^* g y_2 + y_2^* h z_1 + y_2^* e x_2 + y_2^* f x_1 + z_1^* a_1 e + z_1^* x_1 d_2 + z_1^* y_2 h \\
& + z_1^* d_1 x_1 + z_1^* e a_2 + z_1^* j z_2 + a_3^* d_1 y_2 + a_3^* e z_1 + a_3^* j a_3 + a_3^* a_1 j + a_3^* y_2 d_3 \\
& + 2y_2^* d_3 a_3 + 2y_2^* d_1 a_1 + a_1^* d_1 y_2 + i a_1^* x_1 + i x_1^* a_3 + i x_1^* a_2 + i y_2^* z_2 + i a_3^* x_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 = & 2z_1^* h z_1 + x_2^* d_1 y_2 + x_2^* e z_1 + x_2^* j a_3 + x_2^* a_1 j + x_2^* y_2 d_3 + a_2^* f y_2 + a_2^* d_2 z_1 \\
& + a_2^* x_2 j + a_2^* d_3 z_1 + z_1^* j y_1 + z_1^* g y_2 + y_2^* f a_1 + y_2^* d_2 x_2 + y_2^* a_2 f + y_2^* x_2 d_1 \\
& + y_2^* z_1 g + z_1^* e x_2 + z_1^* f x_1 + a_3^* f y_2 + a_3^* d_2 z_1 + a_3^* x_2 j + a_3^* d_3 z_1 + 2z_1^* d_3 a_3 \\
& + 2z_1^* d_2 a_2 + i x_2^* x_1 + i a_2^* a_3 + i a_2^* a_2 + 2i z_1^* z_2 + i y_2^* y_1 + i a_3^* a_3 + i a_3^* a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9 = & y_1^* d_1 y_2 + 4a_3^* d_3 a_3 + z_1^* d_3 z_2 + z_1^* h a_2 + z_1^* g x_1 + z_1^* a_3 h + z_1^* z_2 d_2 \\
& + z_1^* y_1 e + y_2^* d_3 y_1 + y_2^* g a_1 + y_2^* h x_2 + y_2^* a_3 g + y_2^* z_2 f + y_2^* y_1 d_1 + 2a_3^* h z_1 \\
& + 2a_3^* g y_2 + 2a_3^* j y_1 + z_2^* d_3 z_1 + z_2^* x_2 j + z_2^* d_2 z_1 + z_2^* f y_2 + y_1^* y_2 d_3 \\
& + y_1^* a_1 j + y_1^* j a_3 + y_1^* e z_1 + i y_1^* x_1 + i z_2^* a_3 + i z_2^* a_2 + 2i a_3^* z_2
\end{aligned}$$

Maintenant on ne doit avoir que les termes qui seront des termes de masses et les autres seront éliminés automatiquement, mais avant sa il faut retourner à la notation initiale :

$$\begin{pmatrix} a_1^* & x^* & \bar{y}^* \\ \bar{x}^* & a_2^* & z^* \\ y^* & \bar{z}^* & a_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^* & x_1^* & y_2^* \\ x_2^* & a_2^* & z_1^* \\ y_1^* & z_2^* & a_3^* \end{pmatrix}$$

ce qui permet de réécrire la matrice I dans l'équation 4.26 par :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \bar{y}^* d_3 y + 2a_1^* e \bar{x} + 2a_1^* j y + 2a_1^* g \bar{y} + 2a_1^* f x + x^* f a_1 + x^* d_2 \bar{x} + x^* \bar{x} d_1 \\
& + x^* a_2 f + x^* z g + \bar{y}^* y d_1 + \bar{y}^* \bar{z} f + \bar{y}^* a_3 g + \bar{y}^* g a_1 + \bar{y}^* h \bar{x} + \bar{x}^* a_1 e \\
& + \bar{x}^* x d_2 + \bar{x}^* \bar{y} h + \bar{x}^* d_1 x + \bar{x}^* e a_2 + \bar{x}^* j \bar{z} + y^* d_1 \bar{y} + y^* e z + y^* j a_3 \\
& + y^* a_1 j + y^* \bar{y} d_3 + 4a_1^* d_1 a_1 + i x^* y + i y^* x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \bar{y}^* a_3 h + a_1^* a_1 e + a_1^* x d_2 + a_1^* \bar{y} h + a_1^* e a_2 + a_1^* d_1 x + a_1^* j \bar{z} + 2x^* e \bar{x} \\
& + x^* h z + 2x^* f x + \bar{y}^* y e + \bar{y}^* \bar{z} d_2 + \bar{y}^* g x + \bar{y}^* h a_2 + \bar{y}^* d_3 \bar{z} + x^* j y + x^* g \bar{y} \\
& + a_2^* a_1 e + a_2^* x d_2 + a_2^* \bar{y} h + a_2^* d_1 x + a_2^* e a_2 + a_2^* j z_2 + \bar{z}^* d_1 \bar{y} + \bar{z}^* e z \\
& + \bar{z}^* j a_3 + \bar{z}^* a_1 j + \bar{z}^* \bar{y} d_3 + 2x^* d_2 a_2 + 2x^* d_1 a_1 + i x^* \bar{z} + i \bar{z}^* x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & a_1^* e z + a_1^* j a_3 + a_1^* a_1 j + a_1^* \bar{y} d_3 + x^* f \bar{y} + x^* d_2 z + x^* \bar{x} j + x^* d_3 z \\
& + 2\bar{y}^* j y + 2\bar{y}^* g \bar{y} + \bar{y}^* h z + \bar{y}^* e \bar{x} + \bar{y}^* f x + z^* a_1 e + z^* x d_2 + z^* \bar{y} h \\
& + z^* d_1 x + z^* e a_2 + z^* j \bar{z} + a_3^* d_1 \bar{y} + a_3^* e z + a_3^* j a_3 + a_3^* a_1 j + a_3^* \bar{y} d_3 \\
& + 2\bar{y}^* d_3 a_3 + 2\bar{y}^* d_1 a_1 + a_1^* d_1 \bar{y} + i a_1^* x + i x^* a_3 + i x^* a_2 + i \bar{y}^* \bar{z} + i a_3^* x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 = & 2\bar{x}^* e \bar{x} + \bar{x}^* j y + \bar{x}^* g \bar{y} + 2\bar{x}^* f x + a_2^* f a_1 + a_2^* d_2 \bar{x} + a_2^* \bar{x} d_1 + a_2^* a_2 f \\
& + a_2^* z g + z^* y d_1 + z^* \bar{z} f + z^* a_3 g + z^* g a_1 + z^* h x_2 + z^* d_3 y + a_1^* f a_1 \\
& + a_1^* d_2 \bar{x} + a_1^* a_2 f + a_1^* \bar{x} d_1 + a_1^* z g + \bar{x}^* h z + y^* f \bar{y} + y^* d_2 z + y^* \bar{x} j \\
& + y^* d_3 z + 2\bar{x}^* d_1 a_1 + 2\bar{x}^* d_2 a_2 + i a_2^* y + i a_1^* y + i \bar{x}^* \bar{z} + i y^* a_3 + i y^* a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 = & \bar{x}^* a_1 e + \bar{x}^* x d_2 + \bar{x}^* y_2 h + \bar{x}^* e a_2 + \bar{x}^* d_1 x + \bar{x}^* j \bar{z} + 2a_2^* e \bar{x} \\
& + 2a_2^* h z + 2a_2^* f x + z^* y e + z^* \bar{z} d_2 + z^* a_3 h + z^* g x + z^* h a_2 \\
& + z^* d_3 \bar{z} + x^* f a_1 + x^* d_2 \bar{x} + x^* a_2 f + x^* \bar{x} d_1 + x^* z g + \bar{z}^* f \bar{y} \\
& + \bar{z}^* d_2 z + \bar{z}^* \bar{x} j + \bar{z}^* d_3 z + 4a_2^* d_2 a_2 + 2i a_2^* \bar{z} + i x^* y + i \bar{z}^* a_3 + i \bar{z}^* a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 = & 2z^*hz + \bar{x}^*d_1\bar{y} + \bar{x}^*ez + \bar{x}^*ja_3 + \bar{x}^*a_1j + \bar{x}^*\bar{y}d_3 + a_2^*f\bar{y} + a_2^*d_2z \\
& + a_2^*\bar{x}j + a_2^*d_3z + z^*jy + z^*g\bar{y} + \bar{y}^*fa_1 + \bar{y}^*d_2\bar{x} + \bar{y}^*a_2f + \bar{y}^*\bar{x}d_1 \\
& + \bar{y}^*zg + z^*e\bar{x} + z^*fx + a_3^*f\bar{y} + a_3^*d_2z + a_3^*\bar{x}j + a_3^*d_3z + 2z^*d_3a_3 \\
& + 2z^*d_2a_2 + i\bar{x}^*x + ia_2^*a_3 + ia_2^*a_2 + 2iz^*\bar{z} + i\bar{y}^*y + ia_3^*a_3 + ia_3^*a_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7 = & a_3^*h\bar{x} + a_3^*ga_1 + a_3^*a_3g + a_3^*\bar{z}f + a_3^*yd_1 + \bar{z}^*zg + \bar{z}^*a_2f + \bar{z}^*\bar{x}d_1 \\
& + \bar{z}^*d_2\bar{x} + \bar{z}^*fa_1 + y^*fx + 2y^*g\bar{y} + 2y^*jy + y^*e\bar{x} + 2y^*d_3a_3 + 2y^*d_1a_1 \\
& + y^*hz + \bar{x}^*d_3\bar{z} + \bar{x}^*ha_2 + \bar{x}^*gx + \bar{x}^*a_3h + \bar{x}^*\bar{z}d_2 + \bar{x}^*ye + a_1^*d_3y \\
& + a_1^*ga_1 + a_1^*h\bar{x} + a_1^*a_3g + a_1^*\bar{z}f + a_1^*yd_1 + a_3^*d_3y + iy^*\bar{z} + i\bar{z}^*y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8 = & 2\bar{z}^*d_2a_2 + \bar{z}^*jy + a_2^*d_3\bar{z} + a_2^*ha_2 + a_2^*gx + a_2^*a_3h + a_2^*\bar{z}d_2 + x^*d_3y \\
& + x^*ga_1 + x^*h\bar{x} + x^*a_3g + x^*\bar{z}f + x^*yd_1 + a_3^*d_3\bar{z} + a_3^*ha_2 + a_3^*gx \\
& + a_3^*a_3h + a_3^*\bar{z}d_2 + a_3^*ye + \bar{z}^*fx + 2\bar{z}^*hz + \bar{z}^*e\bar{x} + y^*j\bar{z} + y^*d_1x \\
& + y^*ea_2 + y^*\bar{y}h + y^*xd_2 + y^*a_1e + 2a_2^*d_3a_3 + a_2^*g\bar{y} + 2ia_2^*\bar{z} + a_2^*ye
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9 = & y^*d_1\bar{y} + 4a_3^*d_3a_3 + z^*d_3z_2 + z^*ha_2 + z^*gx + z^*a_3h + z^*\bar{z}d_2 \\
& + z^*ye + \bar{y}^*d_3y + \bar{y}^*ga_1 + \bar{y}^*h\bar{x} + \bar{y}^*a_3g + \bar{y}^*\bar{z}f + \bar{y}^*yd_1 \\
& + 2a_3^*hz + 2a_3^*g\bar{y} + 2a_3^*jy + \bar{z}^*d_3z + \bar{z}^*\bar{x}j + \bar{z}^*d_2z + \bar{z}^*f\bar{y} \\
& + y^*\bar{y}d_3 + y^*a_1j + y^*ja_3 + y^*ez + iy^*x + i\bar{z}^*a_3 + i\bar{z}^*a_2 + 2ia_3^*\bar{z}
\end{aligned}$$

Ensuite on ne prend que les éléments qui peuvent donner des termes de masses.

$$\left(\begin{array}{ccc} a_1^* & x^* & \bar{y}^* \\ \bar{x}^* & a_2^* & z^* \\ y^* & \bar{z}^* & a_3^* \end{array} \right) \cdot \left(\left(\begin{array}{ccc} d_1 & e & j \\ f & d_2 & i \\ g & h & d_3 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{array} \right) \right)_m = (J^*.D.J)_m \quad (4.27)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc} \bar{y}^* d_3 y + x^* d_2 \bar{x} + & & \\ x^* \bar{x} d_1 + \bar{y}^* y d_1 + & a_1^* a_1 e + 2x^* e \bar{x} + & a_1^* a_1 j + x^* \bar{x} j + \\ \bar{x}^* x d_2 + \bar{x}^* d_1 x + & 2x^* f x + \bar{y}^* y e + & 2\bar{y}^* j y + 2\bar{y}^* g \bar{y} + \\ y^* d_1 \bar{y} + y^* \bar{y} d_3 + & a_2^* e a_2 + \bar{z}^* e z + & z^* j \bar{z} + a_3^* j a_3 \\ 4a_1^* d_1 a_1 & & \\ & \bar{x}^* x d_2 + \bar{x}^* d_1 x & \\ 2\bar{x}^* e \bar{x} + 2\bar{x}^* f x + & + z^* \bar{z} d_2 + z^* d_3 \bar{z} + & 2z^* h z + i \bar{x}^* x + \\ a_2^* a_2 f + z^* \bar{z} f + & x^* d_2 \bar{x} + x^* \bar{x} d_1 + & i a_2^* a_2 + 2i z^* \bar{z} + \\ a_1^* f a_1 + y^* f \bar{y} & \bar{z}^* d_2 z + \bar{z}^* d_3 z + & i \bar{y}^* y + i a_3^* a_3 \\ & 4a_2^* d_2 a_2 & \\ & & y^* d_1 \bar{y} + 4a_3^* d_3 a_3 + \\ a_3^* a_3 g + \bar{z}^* z g + & a_2^* h a_2 + x^* h \bar{x} + & z^* d_3 z_2 + z^* \bar{z} d_2 + \\ 2y^* g \bar{y} + 2y^* j y + & a_3^* a_3 h + 2\bar{z}^* h z + & \bar{y}^* d_3 y + y^* y d_1 + \\ \bar{x}^* g x + a_1^* g a_1 + & y^* \bar{y} h + 2a_2^* d_3 a_3 & \bar{z}^* d_3 z + \bar{z}^* d_2 z + \\ & & y^* \bar{y} d_3 + \end{array} \right)$$

Il faut une bonne réflexion sur cette symétrie.

Il est claire que des termes de masses peuvent se trouver soit dans la diagonale soit dans les autres parties de la matrice mais ceux de la diagonale sont faciles à isoler et on peut les obtenir directement par le calcul de la trace

du produit suivant.

$$C = \begin{pmatrix} a_1^* & x^* & \bar{y}^* \\ \bar{x}^* & a_2^* & z^* \\ y^* & \bar{z}^* & a_3^* \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix} \right) \quad (4.28)$$

Le résultat final peut être obtenu après quelques étapes de calcul matriciel qu'on s'est permis de montrer les détails dans ce qui suit, vu que les éléments des matrices considérés sont de deux natures différentes, elles sont soit complexes soit octonioniques :

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & x_1 & y_2 \\ x_2 & a_2 & z_1 \\ y_1 & z_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 a_1 & d_1 x_1 & d_1 y_2 \\ d_2 x_2 & d_2 a_2 & d_2 z_1 \\ d_3 y_1 & d_3 z_2 & d_3 a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_1 & y_2 \\ x_2 & a_2 & z_1 \\ y_1 & z_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 d_1 & x_1 d_2 & y_2 d_3 \\ x_2 d_1 & a_2 d_2 & z_1 d_3 \\ y_1 d_1 & z_2 d_2 & a_3 d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 a_1 & d_1 x_1 & d_1 y_2 \\ d_2 x_2 & d_2 a_2 & d_2 z_1 \\ d_3 y_1 & d_3 z_2 & d_3 a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 d_1 & x_1 d_2 & y_2 d_3 \\ x_2 d_1 & a_2 d_2 & z_1 d_3 \\ y_1 d_1 & z_2 d_2 & a_3 d_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2a_1d_1 & d_1x_1 + x_1d_2 & d_1y_2 + y_2d_3 \\ d_2x_2 + x_2d_1 & 2a_2d_2 & d_2z_1 + z_1d_3 \\ d_3y_1 + y_1d_1 & d_3z_2 + z_2d_2 & 2a_3d_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2d_1a_1 & (d_2 + d_1)x_1 & (d_1 + d_3)y_2 \\ (d_2 + d_1)x_2 & 2d_2a_2 & (d_2 + d_3)z_1 \\ (d_1 + d_3)y_1 & (d_2 + d_3)z_2 & 2d_3a_3 \end{pmatrix} \quad (4.29)
\end{aligned}$$

on peut se permettre d'écrire l'égalité suivante :

$$d_1x_1 + x_1d_2 = (d_2 + d_1)x_1 \quad (4.30)$$

puisque d_2, d_1 sont dans la diagonale donc sous forme complexe même si on ne tient pas compte sa ne va pas avoir d'influence sur le résultat final :

$$\begin{pmatrix} a_1^* & x_1^* & y_2^* \\ x_2^* & a_2^* & z_1^* \\ y_1^* & z_2^* & a_3^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2d_1a_1 & (d_2 + d_1)x_1 & (d_1 + d_3)y_2 \\ (d_2 + d_1)x_2 & 2d_2a_2 & (d_2 + d_3)z_1 \\ (d_1 + d_3)y_1 & (d_2 + d_3)z_2 & 2d_3a_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2a_1^*d_1a_1 + x_1^*x_2d_2 & a_1^*x_1d_2 + a_1^*x_1d_1 & a_1^*y_2d_1 + a_1^*y_2d_3 + \\ +x_1^*x_2d_1 + y_2^*y_1d_1 & +2x_1^*d_2a_2 + y_2^*z_2d_2 & x_1^*z_1d_2 + x_1^*z_1d_3 \\ +y_2^*y_1d_3 & +y_2^*z_2d_3 & +2y_2^*d_3a_3 \\ 2x_2^*d_1a_1 + a_2^*x_2d_2 & x_2^*x_1d_2 + x_2^*x_1d_1 + \\ +a_2^*x_2d_1 + z_1^*y_1d_1 & 2a_2^*d_2a_2 + z_1^*z_2d_2 & a_2^*z_1d_2 + a_2^*z_1d_3 + \\ +z_1^*y_1d_3 & +z_1^*z_2d_3 & 2z_1^*d_3a_3 \\ 2y_1^*d_1a_1 + z_2^*x_2d_2 & y_1^*x_1d_2 + y_1^*x_1d_1 + \\ +z_2^*x_2d_1 + a_3^*y_1d_1 & 2z_2^*d_2a_2 + a_3^*z_2d_2 & y_1^*y_2d_1 + y_1^*y_2d_3 + \\ +a_3^*y_1d_3 & +a_3^*z_2d_3 & z_2^*z_1d_2 + z_2^*z_1d_3 \\ & & +2a_3^*d_3a_3 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2d_1a_1 & (d_2 + d_1)x_1 & (d_1 + d_3)y_2 \\ (d_2 + d_1)x_2 & 2d_2a_2 & (d_2 + d_3)z_1 \\ (d_1 + d_3)y_1 & (d_2 + d_3)z_2 & 2d_3a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* & x_1^* & y_2^* \\ x_2^* & a_2^* & z_1^* \\ y_1^* & z_2^* & a_3^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2d_1a_1a_1^* + x_1x_2^*d_2 & 2d_1a_1x_1^* + x_1a_2^*d_2 & 2d_1a_1y_2^* + x_1z_1^*d_2 \\ +x_1x_2^*d_1 + y_2y_1^*d_1 & +x_1a_2^*d_1 + y_2z_2^*d_1 & +x_1z_1^*d_1 + y_2a_3^*d_1 \\ +y_2y_1^*d_3 & +y_2z_2^*d_3 & +y_2a_3^*d_3 \\ x_2a_1^*d_2 + x_2a_1^*d_1 + \\ 2d_2a_2x_2^* + z_1y_1^*d_2 & 2d_2a_2a_2^* + z_1z_2^*d_2 & 2d_2a_2z_1^* + z_1a_3^*d_2 \\ +z_1y_1^*d_3 & +z_1z_2^*d_3 & +z_1a_3^*d_3 \\ y_1a_1^*d_1 + y_1a_1^*d_3 + \\ z_2x_2^*d_2 + z_2x_2^*d_3 & z_2a_2^*d_2 + z_2a_2^*d_3 & z_2z_1^*d_2 + z_2z_1^*d_3 \\ +2d_3a_3y_1^* & +2d_3a_3z_2^* & +2d_3a_3a_3^* \end{pmatrix}$$

Et la somme des deux matrices résultantes nous donne C :

où :

$$C_1 = 2d_1a_1a_1^* + 2a_1^*d_1a_1 + (x_1^*x_2 + x_1x_2^*)(d_2 + d_1) + (y_2^*y_1 + y_2y_1^*)(d_3 + d_1) \quad (4.31)$$

$$C_5 = (x_2^*x_1 + x_2x_1^*)(d_2 + d_1) + 2d_2a_2a_2^* + 2a_2^*d_2a_2 + (z_1^*z_2 + z_1z_2^*)(d_2 + d_3) \quad (4.32)$$

$$C_9 = (y_1^*y_2 + y_1y_2^*)(d_1 + d_3) + (z_2^*z_1 + z_2z_1^*)(d_3 + d_2) + 2d_3a_3a_3^* + 2a_3^*d_3a_3 \quad (4.33)$$

et avec :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ C_7 & C_8 & C_9 \end{pmatrix} \quad (4.34a)$$

tel que :

$$C_2 = a_1^*x_1d_2 + a_1^*x_1d_1 + 2x_1^*d_2a_2 + y_2^*z_2d_2 + y_2^*z_2d_3 \\ + 2d_1a_1x_1^* + x_1a_2^*d_2 + x_1a_2^*d_1 + y_2z_2^*d_1 + y_2z_2^*d_3$$

$$C_3 = 2d_1a_1y_2^* + z_1^*x_1d_2 + x_1z_1^*d_1 + y_2a_3^*d_1 + y_2a_3^*d_3 \\ + a_1^*y_2d_1 + a_1^*y_2d_3 + x_1^*z_1d_2 + x_1^*z_1d_3 + 2y_2^*d_3a_3$$

$$C_4 = x_2a_1^*d_2 + x_2a_1^*d_1 + 2d_2a_2x_2^* + z_1y_1^*d_2 + z_1y_1^*d_3 \\ + 2x_2^*d_1a_1 + a_2^*x_2d_2 + a_2^*x_2d_1 + z_1^*y_1d_1 + z_1^*y_1d_3$$

$$C_6 = x_2 y_2^* d_2 + x_2 y_2^* d_1 + 2d_2 a_2 z_1^* + z_1 a_3^* d_2 + z_1 a_3^* d_3 \\ + x_2^* y_2 d_1 + x_2^* y_2 d_3 + a_2^* z_1 d_2 + a_2^* z_1 d_3 + 2z_1^* d_3 a_3$$

$$C_7 = y_1 a_1^* d_1 + y_1 a_1^* d_3 + z_2 x_2^* d_2 + z_2 x_2^* d_3 + 2d_3 a_3 y_1^* \\ + 2y_1^* d_1 a_1 + z_2^* x_2 d_2 + z_2^* x_2 d_1 + a_3^* y_1 d_1 + a_3^* y_1 d_3$$

$$C_8 = y_1 x_1^* d_1 + y_1 x_1^* d_3 + z_2 a_2^* d_2 + z_2 a_2^* d_3 + 2d_3 a_3 z_2^* \\ + y_1^* x_1 d_2 + y_1^* x_1 d_1 + 2z_2^* d_2 a_2 + a_3^* z_2 d_2 + a_3^* z_2 d_3$$

et c'est très facile de voir que la trace nous donne directement les termes de masse.

$$Tr \left(\begin{pmatrix} a_1^* & x^* & \bar{y}^* \\ \bar{x}^* & a_2^* & z^* \\ y^* & \bar{z}^* & a_3^* \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix} \right) \right) =$$

$$trC = C_1 + C_5 + C_9 \quad (4.34b)$$

On voit ici que nous sommes arrivés au terme des manipulations sans tenir compte de n'importe quelle répartition des fermions.

4.1.2 Termes de Masse avec Répartition des Fermions :

Notre objectif dans cette partie de cette thèse est de prédire une forme spécifique du Dirac ou au moins arriver à la mettre dans un cadre plus au moins clair, donc dans ce qui suit on va essayer d'obtenir la forme du Dirac ou en général l'action en utilisant la représentation 27 dans la base splitte

$$J = Lu_0 + L^T u_0^* + R^i u_i + S^i u_i^* \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.35)$$

$$J^* = L^* u_0^* + L^{*T} u_0 + R^{i*} u_i^* + S^{i*} u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.36)$$

Où les u_α sont définis en termes des e_μ par

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= u_0^*, & \bar{u}_k &= -u_k, \\ u_0^2 &= u_0, & u_0 u_0^* &= 0, \\ u_0 u_k &= u_k u_0^* = u_k, & u_0^* u_k &= u_k u_0 = 0, \\ u_i u_j &= \varepsilon_{ijk} u_k^* & u_i u_j^* &= -u_0 \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$u_0 = \frac{1}{2} (1 + ie_7), \quad u_k = \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3}) \quad k = 1, 2, 3 \quad (4.38)$$

En appliquant cette transformation sur J dans la base splite on obtiendra J dans la base e_μ :

$$\begin{aligned} J &= L \frac{1}{2} (1 + ie_7) + L^T \frac{1}{2} (1 + ie_7)^* \\ &+ R^i \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3}) + S^i \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3}) \end{aligned} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3$$

et la même chose pour J^* :

$$\begin{aligned} J^* &= L^* \frac{1}{2} (1 + ie_7)^* + L^{*T} \frac{1}{2} (1 + ie_7) \\ &+ R^{i*} \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3})^* + S^{i*} \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3}) \end{aligned} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad (4.40)$$

Donc maintenant on peut avoir le module mais avant d'assembler J et J^* on doit remplacer les matrices L , R^i et S^i par leurs véritables expressions :

$$(S^i)_{lm} = \varepsilon_{lmn} (q_L^i)^n \text{ et } (R^i)_{lm} = \varepsilon_{lmn} (\hat{q}_R^i)^n \quad (4.41)$$

où :

$$L = \begin{pmatrix} \hat{N}_R^\theta & \hat{\theta}_R & \hat{l}_R \\ \theta_L^- & \nu_L^\theta & \beta_L \\ \bar{l}_L^- & \nu_L^l & \alpha_L \end{pmatrix}, \quad q_L^i = \begin{pmatrix} U_L^i \\ D_L^i \\ B_L^i \end{pmatrix}, \quad \hat{q}_R^i = \begin{pmatrix} \hat{U}_R^i \\ \hat{D}_R^i \\ \hat{B}_R^i \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

et on a les matrices S et R tel que :

$$S^i = \begin{pmatrix} 0 & B_L^i & -D_L^i \\ -B_L^i & 0 & U_L^i \\ D_L^i & -U_L^i & 0 \end{pmatrix}, \quad R^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{B}_R^i & -\hat{D}_R^i \\ -\hat{B}_R^i & 0 & \hat{U}_R^i \\ \hat{D}_R^i & -\hat{U}_R^i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

C'est ce qui nous permettra d'écrire :

$$\begin{aligned} J = & \begin{pmatrix} \hat{N}_R^\theta & \hat{\theta}_R & \hat{l}_R \\ \theta_L^- & \nu_L^\theta & \beta_L \\ \bar{l}_L^- & \nu_L^l & \alpha_L \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + ie_7) + \begin{pmatrix} \hat{N}_R^\theta & \theta_L^- & \bar{l}_L^- \\ \hat{\theta}_R & \nu_L^\theta & \nu_L^l \\ \hat{l}_R & \beta_L & \alpha_L \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + ie_7)^* \\ & + \begin{pmatrix} 0 & \hat{B}_R^i & -\hat{D}_R^i \\ -\hat{B}_R^i & 0 & \hat{U}_R^i \\ \hat{D}_R^i & -\hat{U}_R^i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3}) \\ & + \begin{pmatrix} 0 & B_L^i & -D_L^i \\ -B_L^i & 0 & U_L^i \\ D_L^i & -U_L^i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3})^* \end{aligned} \quad (4.44)$$

avec $i = 1, 2, 3$.

La somme des deux premiers termes du deuxième membre de l'équation (4.44) permet d' avoir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \widehat{N}_R^\theta & \widehat{\theta}_R & \widehat{l}_R \\ \theta_L^- & \nu_L^\theta & \beta_L \\ l_L^- & \nu_L^l & \alpha_L \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + ie_7) + \begin{pmatrix} \widehat{N}_R^\theta & \theta_L^- & l_L^- \\ \widehat{\theta}_R & \nu_L^\theta & \nu_L^l \\ \widehat{l}_R & \beta_L & \alpha_L \end{pmatrix} \frac{1}{2} (1 + ie_7)^* = \\
& = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\widehat{N}_R^\theta; & \widehat{\theta}_R + \theta_L^- & \widehat{l}_R + l_L^- \\ & +i(\widehat{\theta}_R - \theta_L^-) e_7; & +i(l_R^- - \widehat{l}_L) e_7; \\ \widehat{\theta}_R + \theta_L^- & 2\nu_L^\theta; & \beta_L + \nu_L^l \\ +i(\widehat{\theta}_L - \theta_R^-) e_7; & & +i(\beta_L - \nu_L^l) e_7; \\ \widehat{l}_R + l_L^- & \beta_L + \nu_L^l & 2\alpha_L; \\ +i(l_L^- - \widehat{l}_R) e_7; & +i(\nu_L^l - \beta_L) e_7; & \end{pmatrix} \quad (4.45)
\end{aligned}$$

et de la même façon que 4.45 on doit traiter les autres matrices R et S :

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \widehat{B}_R^i & -\widehat{D}_R^i \\ -\widehat{B}_R^i & 0 & \widehat{U}_R^i \\ \widehat{D}_R^i & -\widehat{U}_R^i & 0 \end{array} \right) \frac{1}{2} (e_k + ie_{k+3}) \\ + \left(\begin{array}{ccc} 0 & B_L^i & -D_L^i \\ -B_L^i & 0 & U_L^i \\ D_L^i & -U_L^i & 0 \end{array} \right) \frac{1}{2} (e_k - ie_{k+3}) \end{array} \right) = \\
& \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & (\widehat{B}_R^i + B_L^i) e_i + & -(\widehat{D}_R^i + D_L^i) e_i \\ & i(\widehat{B}_R^i - B_L^i) e_{i+3} & -i(\widehat{D}_R^i - D_L^i) e_{i+3} \\ -\widehat{B}_R^i (e_i + ie_{i+3}) & 0 & (\widehat{U}_R^i + U_L^i) e_i + i \\ -B_L^i (e_i - ie_{i+3}) & & (\widehat{U}_R^i - U_L^i) e_{i+3} \\ (\widehat{D}_R^i + D_L^i) e_i & -(\widehat{U}_R^i + U_L^i) e_i & 0 \\ +i(\widehat{D}_R^i - D_L^i) e_{i+3} & -i(\widehat{U}_R^i - U_L^i) e_{i+3} & \end{array} \right) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Et en faisant la somme des deux résultats obtenus dans les équations (4.45,4.46) on a J .

$$J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ J_4 & J_5 & J_6 \\ J_7 & J_8 & J_9 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

où :

$$J_1 = 2\widehat{N}_R^\theta$$

$$J_2 = \widehat{\theta}_R + \theta_L^- + i \left(\widehat{\theta}_R - \theta_L^- \right) e_7 + \left(\widehat{B}_R^i + B_L^i \right) e_i + i \left(\widehat{B}_R^i - B_L^i \right) e_{i+3}$$

$$J_3 = \widehat{l}_R + l_L^- + i \left(l_R^- - \widehat{l}_L \right) e_7 - \left(\widehat{D}_R^i + D_L^i \right) e_i - i \left(\widehat{D}_R^i - D_L^i \right) e_{i+3}$$

$$J_4 = \widehat{\theta}_R + \theta_L^- - i \left(\widehat{\theta}_R - \theta_L^- \right) e_7 - \left(\widehat{B}_R^i + B_L^i \right) e_i - i \left(\widehat{B}_R^i - B_L^i \right) e_{i+3}$$

$$J_5 = 2\nu_L^\theta$$

$$J_6 = \beta_L + \nu_L^l + i \left(\beta_L - \nu_L^l \right) e_7 + \left(\widehat{U}_R^i + U_L^i \right) e_i + i \left(\widehat{U}_R^i - U_L^i \right) e_{i+3}$$

$$J_7 = \widehat{l}_R + l_L^- - i \left(l_R^- - \widehat{l}_L \right) e_7 + \left(\widehat{D}_R^i + D_L^i \right) e_i + i \left(\widehat{D}_R^i - D_L^i \right) e_{i+3}$$

$$J_8 = \beta_L + \nu_L^l - i \left(\beta_L - \nu_L^l \right) e_7 - \left(\widehat{U}_R^i + U_L^i \right) e_i - i \left(\widehat{U}_R^i - U_L^i \right) e_{i+3}$$

$$J_9 = 2\alpha_L$$

On a obtenu en fait la forme :

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & x & \bar{y} \\ \bar{x} & a_2 & z \\ y & \bar{z} & a_3 \end{pmatrix}$$

et de la même façon on trouve :

$$J^* = \begin{pmatrix} a_1^* & x^* & \bar{y}^* \\ \bar{x}^* & a_2^* & z^* \\ y^* & \bar{z}^* & a_3^* \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

où :

$$J^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_1^* & J_2^* & J_3^* \\ J_4^* & J_5^* & J_6^* \\ J_7^* & J_8^* & J_9^* \end{pmatrix}$$

tel que :

$$J_1^* = 2\widehat{N}_R^{\theta^*}$$

$$J_2^* = \widehat{\theta}_R^* + \theta_L^{-*} - i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^{-*} \right) e_7 + \left(\widehat{B}_R^{i^*} + B_L^{i^*} \right) e_i - i \left(\widehat{B}_R^{i^*} - B_L^{i^*} \right) e_{i+3}$$

$$J_3^* = \widehat{l}_R^* + l_L^{-*} - i \left(\widehat{l}_R^* - l_L^{-*} \right) e_7 - \left(\widehat{D}_R^{i^*} + D_L^{i^*} \right) e_i + i \left(\widehat{D}_R^{i^*} - D_L^{i^*} \right) e_{i+3}$$

$$J_4^* = \widehat{\theta}_R^* + \theta_L^{-*} + i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^{-*} \right) e_7 - \left(\widehat{B}_R^{i^*} + B_L^{i^*} \right) e_i + i \left(\widehat{B}_R^{i^*} - B_L^{i^*} \right) e_{i+3}$$

$$J_5^* = 2\nu_L^{\theta^*}$$

$$J_6^* = \beta_L^* + \nu_L^{l^*} - i(\beta_L^* - \nu_L^{l^*})e_7 + (\widehat{U}_R^{i^*} + U_L^{i^*})e_i - i(\widehat{U}_R^{i^*} - U_L^{i^*})e_{i+3}$$

$$J_7^* = \widehat{l}_R^* + l_L^{-*} + i(\widehat{l}_R^* - \widehat{l}_L^*)e_7 + (\widehat{D}_R^{i^*} + D_L^{i^*})e_i - i(\widehat{D}_R^{i^*} - D_L^{i^*})e_{i+3}$$

$$J_8^* = \beta_L^* + \nu_L^{l^*} + i(\beta_L^* - \nu_L^{l^*})e_7 - (\widehat{U}_R^{i^*} + U_L^{i^*})e_i + i(\widehat{U}_R^{i^*} - U_L^{i^*})e_{i+3}$$

$$J_9^* = 2\alpha_L^*$$

donc par identification des derniers résultats on trouve :

$$a_1 = 2\widehat{N}_R^\theta$$

$$x = \widehat{\theta}_R + \theta_L^- + i(\widehat{\theta}_R - \theta_L^-)e_7 + (\widehat{B}_R^i + B_L^i)e_i + i(\widehat{B}_R^i - B_L^i)e_{i+3}$$

$$\bar{x} = \widehat{\theta}_R + \theta_L^- - i(\widehat{\theta}_R - \theta_L^-)e_7 - (\widehat{B}_R^i + B_L^i)e_i - i(\widehat{B}_R^i - B_L^i)e_{i+3}$$

$$a_2 = 2\nu_L^\theta$$

$$y = \widehat{l}_R + l_L^- - i \left(l_R^- - \widehat{l}_L \right) e_7 + \left(\widehat{D}_R^i + D_L^i \right) e_i + i \left(\widehat{D}_R^i - D_L^i \right) e_{i+3}$$

$$\bar{y} = \widehat{l}_R + l_L^- + i \left(\widehat{l}_R - l_L^- \right) e_7 - \left(\widehat{D}_R^i + D_L^i \right) e_i - i \left(\widehat{D}_R^i - D_L^i \right) e_{i+3}$$

$$a_3 = 2\alpha_L$$

$$z = \beta_L + \nu_L^l + i \left(\beta_L - \nu_L^l \right) e_7 + \left(\widehat{U}_R^i + U_L^i \right) e_i + i \left(\widehat{U}_R^i - U_L^i \right) e_{i+3}$$

$$\bar{z} = \beta_L + \nu_L^l + i \left(\nu_L^l - \beta_L \right) e_7 - \left(\widehat{U}_R^i + U_L^i \right) e_i - i \left(\widehat{U}_R^i - U_L^i \right) e_{i+3}$$

et aussi pour l'identification des éléments de J^* :

$$a_1^* = 2\widehat{N}_R^{\theta^*}$$

$$x^* = \widehat{\theta}_R^* + \theta_L^{-*} - i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^{-*} \right) e_7 + \left(\widehat{B}_R^{i*} + B_L^{i*} \right) e_i - i \left(\widehat{B}_R^{i*} - B_L^{i*} \right) e_{i+3}$$

$$\bar{x}^* = \widehat{\theta}_R^* + \theta_L^{-*} + i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^{-*} \right) e_7 - \left(\widehat{B}_R^{i*} + B_L^{i*} \right) e_i + i \left(\widehat{B}_R^{i*} - B_L^{i*} \right) e_{i+3}$$

$$a_2^* = 2\nu_L^{\theta^*}$$

$$y^* = \widehat{l}_R^* + l_L^{-*} + i \left(\widehat{l}_R^* - \widehat{l}_L^* \right) e_7 + \left(\widehat{D}_R^{i*} + D_L^{i*} \right) e_i - i \left(\widehat{D}_R^{i*} - D_L^{i*} \right) e_{i+3}$$

$$\bar{y}^* = \widehat{l}_R^* + l_L^{-*} - i \left(l_R^{-*} - \widehat{l}_L^* \right) e_7 - \left(\widehat{D}_R^{i*} + D_L^{i*} \right) e_i + i \left(\widehat{D}_R^{i*} - D_L^{i*} \right) e_{i+3}$$

$$a_3^* = 2\alpha_L^*$$

$$z^* = \beta_L^* + \nu_L^{l*} - i \left(\beta_L^* - \nu_L^{l*} \right) e_7 + \left(\widehat{U}_R^{i*} + U_L^{i*} \right) e_i - i \left(\widehat{U}_R^{i*} - U_L^{i*} \right) e_{i+3}$$

$$\bar{z}^* = \beta_L^* + \nu_L^{l*} + i \left(\beta_L^* - \nu_L^{l*} \right) e_7 - \left(\widehat{U}_R^{i*} + U_L^{i*} \right) e_i + i \left(\widehat{U}_R^{i*} - U_L^{i*} \right) e_{i+3}$$

$$trC = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} 2d_1 a_1 a_1^* + 2a_1^* d_1 a_1 + (x^* \bar{x} + x \bar{x}^*) (d_2 + d_1) \\ + (\bar{y}^* y + \bar{y} y^*) (d_3 + d_1) + 2d_2 a_2 a_2^* + 2a_2^* d_2 a_2 \\ + (\bar{x}^* x + \bar{x} x^*) (d_2 + d_1) + (z^* \bar{z} + z \bar{z}^*) (d_2 + d_3) \\ + (y^* \bar{y} + y \bar{y}^*) (d_1 + d_3) + (\bar{z}^* z + \bar{z} z^*) (d_3 + d_2) \\ + 2d_3 a_3 a_3^* + 2a_3^* d_3 a_3 \end{array} \right)$$

où

$$\begin{aligned}
(x^*\bar{x} + x\bar{x}^*) = & \\
& \left(\widehat{\theta}_R^* + \theta_L^- - i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^- \right) e_7 + \left(\widehat{B}_R^{i*} + B_L^{i*} \right) e_i - i \left(\widehat{B}_R^{i*} - B_L^{i*} \right) e_{i+3} \right) \cdot \\
& \cdot \left(\widehat{\theta}_R + \theta_L^- - i \left(\widehat{\theta}_R - \theta_L^- \right) e_7 - \left(\widehat{B}_R^i + B_L^i \right) e_i - i \left(\widehat{B}_R^i - B_L^i \right) e_{i+3} \right) \\
& + \left(\widehat{\theta}_R + \theta_L^- + i \left(\widehat{\theta}_R - \theta_L^- \right) e_7 + \left(\widehat{B}_R^i + B_L^i \right) e_i + i \left(\widehat{B}_R^i - B_L^i \right) e_{i+3} \right) \cdot \\
& \cdot \left(\widehat{\theta}_R^* + \theta_L^- + i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^- \right) e_7 - \left(\widehat{B}_R^{i*} + B_L^{i*} \right) e_i + i \left(\widehat{B}_R^{i*} - B_L^{i*} \right) e_{i+3} \right)
\end{aligned} \tag{4.49}$$

avec :

$$\begin{aligned}
x &= \widehat{\theta}_R + \theta_L^- - i \left(\widehat{\theta}_R - \theta_L^- \right) e_7 + \left(\widehat{B}_R^i + B_L^i \right) e_i + i \left(\widehat{B}_R^i - B_L^i \right) e_{i+3} \\
&= \widehat{\theta}_R (1 + ie_7) + \theta_L^- (1 - ie_7) + \widehat{B}_R^i (e_i + ie_{i+3}) + B_L^i (e_i - ie_{i+3}) \\
&= \widehat{\theta}_R u_0 + \theta_L^- u_0^* + \widehat{B}_R^i u_i + B_L^i u_i^*
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \widehat{\theta}_R + \theta_L^- - i \left(\widehat{\theta}_R - \theta_L^- \right) e_7 - \left(\widehat{B}_R^i + B_L^i \right) e_i - i \left(\widehat{B}_R^i - B_L^i \right) e_{i+3} \\
&= \widehat{\theta}_R (1 - ie_7) + \theta_L^- (1 + ie_7) - \widehat{B}_R^i (e_i + ie_{i+3}) - B_L^i (e_i - ie_{i+3}) \\
&= \widehat{\theta}_R u_0^* + \theta_L^- u_0 - \widehat{B}_R^i u_i - B_L^i u_i^*
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
x^* &= \left(\widehat{\theta}_R^* + \theta_L^- - i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^- \right) e_7 + \left(\widehat{B}_R^{i*} + B_L^{i*} \right) e_i - i \left(\widehat{B}_R^{i*} - B_L^{i*} \right) e_{i+3} \right) \\
&= \widehat{\theta}_R^* (1 + ie_7) + \theta_L^- (1 - ie_7) - \widehat{B}_R^{i*} (e_i - ie_{i+3}) - B_L^{i*} (e_i + ie_{i+3}) \\
&= \left(\widehat{\theta}_R^* u_0^* + \theta_L^- u_0 + \widehat{B}_R^{i*} u_i^* + B_L^{i*} u_i \right)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}^* &= \widehat{\theta}_R^* + \theta_L^{-*} + i \left(\widehat{\theta}_R^* - \theta_L^{-*} \right) e_7 - \left(\widehat{B}_R^{i*} + B_L^{i*} \right) e_i + i \left(\widehat{B}_R^{i*} - B_L^{i*} \right) e_{i+3} \\
&= \widehat{\theta}_R^* (1 + ie_7) + \theta_L^{-*} (1 - ie_7) - \widehat{B}_R^{i*} (e_i - ie_{i+3}) - B_L^{i*} (e_i + ie_{i+3}) \\
&= \widehat{\theta}_R^* u_0 + \theta_L^{-*} u_0^* - \widehat{B}_R^{i*} u_i^* - B_L^{i*} u_i
\end{aligned} \tag{4.53}$$

et en tenant compte de la règle de multiplication des u_i :

$$x^* \bar{x} = \left(\widehat{\theta}_R^* u_0^* + \theta_L^{-*} u_0 + \widehat{B}_R^{i*} u_i^* + B_L^{i*} u_i \right) \left(\widehat{\theta}_R u_0^* + \theta_L^{-} u_0 - \widehat{B}_R^i u_i - B_L^i u_i^* \right) \tag{4.54}$$

après développement on a :

$$\begin{aligned}
x^* \bar{x} &= \widehat{\theta}_R^* u_0^* \widehat{\theta}_R u_0^* + \widehat{\theta}_R^* u_0^* \theta_L^{-} u_0 - \widehat{\theta}_R^* u_0^* \widehat{B}_R^i u_i - \widehat{\theta}_R^* u_0^* B_L^i u_i^* \\
&+ \theta_L^{-*} u_0 \widehat{\theta}_R u_0^* + \theta_L^{-*} u_0 \theta_L^{-} u_0 - \theta_L^{-*} u_0 \widehat{B}_R^i u_i - \theta_L^{-*} u_0 B_L^i u_i^* \\
&+ \widehat{B}_R^{i*} u_i^* \widehat{\theta}_R u_0^* + \widehat{B}_R^{i*} u_i^* \theta_L^{-} u_0 - \widehat{B}_R^{i*} u_i^* \widehat{B}_R^i u_i - \widehat{B}_R^{i*} u_i^* B_L^i u_i^* \\
&+ B_L^{i*} u_i \widehat{\theta}_R u_0^* + B_L^{i*} u_i \theta_L^{-} u_0 - B_L^{i*} u_i \widehat{B}_R^i u_i - B_L^{i*} u_i B_L^i u_i^*
\end{aligned}$$

et après quelques simplifications on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
x^* \bar{x} &= \widehat{\theta}_R^* \widehat{\theta}_R u_0^* - \widehat{\theta}_R^* B_L^i u_i^* + \theta_L^{-*} \theta_L^{-} u_0 - \theta_L^{-*} \widehat{B}_R^i u_i \\
&+ \widehat{B}_R^{i*} \theta_L^{-} u_i^* + \widehat{B}_R^{i*} \widehat{B}_R^i u_0^* + B_L^{i*} \widehat{\theta}_R u_i + B_L^{i*} B_L^i u_0 \\
&= \left(\widehat{\theta}_R^* \widehat{\theta}_R + \widehat{B}_R^{i*} \widehat{B}_R^i \right) u_0^* + \left(\theta_L^{-*} \theta_L^{-} + B_L^{i*} B_L^i \right) u_0 \\
&+ \left(\widehat{B}_R^{i*} \theta_L^{-} - \widehat{\theta}_R^* B_L^i \right) u_i^* + \left(B_L^{i*} \widehat{\theta}_R - \theta_L^{-*} \widehat{B}_R^i \right) u_i
\end{aligned}$$

de la même façon on a :

$$\begin{aligned}
x\bar{x}^* &= \left(\widehat{\theta}_R u_0 + \theta_L^- u_0^* + \widehat{B}_R^i u_i + B_L^i u_i^* \right) \left(\widehat{\theta}_R^* u_0 + \theta_L^{-*} u_0^* - \widehat{B}_R^{i*} u_i^* - B_L^{i*} u_i \right) \\
&= \left(\widehat{\theta}_R \widehat{\theta}_R^* + \widehat{B}_R^i \widehat{B}_R^{i*} \right) u_0 + \left(\theta_L^- \theta_L^{-*} + B_L^i B_L^{i*} \right) u_0^* + \left(\widehat{B}_R^i \theta_L^{-*} - \widehat{\theta}_R B_L^{i*} \right) u_i \\
&+ \left(B_L^i \widehat{\theta}_R^* - \theta_L^- \widehat{B}_R^{i*} \right) u_i^*
\end{aligned} \tag{4.55}$$

et finalement on peut avoir :

$$\begin{aligned}
(x^* \bar{x} + x \bar{x}^*) &= \\
&= \left(\widehat{\theta}_R^* \widehat{\theta}_R + \widehat{B}_R^{i*} \widehat{B}_R^i \right) u_0^* + \left(\theta_L^{-*} \theta_L^- + B_L^{i*} B_L^i \right) u_0 + \left(\widehat{B}_R^{i*} \theta_L^- - \widehat{\theta}_R^* B_L^i \right) u_i^* \\
&+ \left(B_L^i \widehat{\theta}_R^* - \theta_L^- \widehat{B}_R^{i*} \right) u_i + \left(\widehat{\theta}_R \widehat{\theta}_R^* + \widehat{B}_R^i \widehat{B}_R^{i*} \right) u_0 + \left(\theta_L^- \theta_L^{-*} + B_L^i B_L^{i*} \right) u_0^* \\
&+ \left(\widehat{B}_R^i \theta_L^{-*} - \widehat{\theta}_R B_L^{i*} \right) u_i + \left(B_L^i \widehat{\theta}_R^* - \theta_L^- \widehat{B}_R^{i*} \right) u_i^*
\end{aligned}$$

Comme θ_L^- et \widehat{B}_R^{i*} sont indépendants l'un de l'autre donc ils commutent :

$$\begin{aligned}
(x^* \bar{x} + x \bar{x}^*) &= \left(\widehat{\theta}_R^* \widehat{\theta}_R + \widehat{B}_R^{i*} \widehat{B}_R^i \right) u_0^* + \left(\theta_L^{-*} \theta_L^- + B_L^{i*} B_L^i \right) u_0 \\
&+ \left(\widehat{\theta}_R \widehat{\theta}_R^* + \widehat{B}_R^i \widehat{B}_R^{i*} \right) u_0 + \left(\theta_L^- \theta_L^{-*} + B_L^i B_L^{i*} \right) u_0^*
\end{aligned} \tag{4.56}$$

et qui s'écrit sous la forme :

$$(x^* \bar{x} + x \bar{x}^*) = \left(\widehat{\theta}_R^* \widehat{\theta}_R + \widehat{B}_R^{i*} \widehat{B}_R^i \right) u_0^* + CC + \left(\theta_L^{-*} \theta_L^- + B_L^{i*} B_L^i \right) u_0 + CC \tag{4.57}$$

et de la même façon on peut avoir tous les autres termes.

Et on peut avoir donc :

$$(\bar{x}^* x + \bar{x} x^*) = \left(\widehat{\theta}_R^* \widehat{\theta}_R + B_L^{i*} B_L^i \right) u_0 + CC + \left(\theta_L^{-*} \theta_L^- + \widehat{B}_R^{i*} \widehat{B}_R^i \right) u_0^* + CC \tag{4.58}$$

de la même façon on trouve $(\bar{y}^*y + \bar{y}y^*)$, $(y^*\bar{y} + y\bar{y}^*)$, $(z^*\bar{z} + z\bar{z}^*)$, $(\bar{z}^*z + \bar{z}z^*)$:

$$(\bar{y}^*y + \bar{y}y^*) = \left(\widehat{l}_R^* \widehat{l}_R + \widehat{D}_R^{i*} \widehat{D}_R^i \right) u_0^* + CC + (l_L^- l_L^- + D_L^{i*} D_L^i) u_0 + CC \quad (4.59)$$

$$(y^*\bar{y} + y\bar{y}^*) = \left(\widehat{l}_R^* \widehat{l}_R + D_L^{i*} D_L^i \right) u_0^* + CC + (l_L^- l_L^- + \widehat{D}_R^{i*} \widehat{D}_R^i) u_0 + CC \quad (4.60)$$

$$(z^*\bar{z} + z\bar{z}^*) = \left(\beta_L^* \beta_L + \widehat{U}_R^{i*} \widehat{U}_R^i \right) u_0^* + CC + (\nu_L^l \nu_L^l + U_L^{i*} U_L^i) u_0 + CC \quad (4.61)$$

$$(\bar{z}^*z + \bar{z}z^*) = (\beta_L^* \beta_L + U_L^{i*} U_L^i) u_0 + CC + (\nu_L^l \nu_L^l + \widehat{U}_R^{i*} \widehat{U}_R^i) u_0^* + CC \quad (4.62)$$

Finalement on a :

$$\begin{aligned} M &= TrC \\ &= \frac{1}{2} (2d_1 a_1 a_1^* + 2a_1^* d_1 a_1 + (x^* \bar{x} + x \bar{x}^*) (d_2 + d_1) + (\bar{y}^* y + \bar{y} y^*) (d_3 + d_1) \\ &\quad + 2d_2 a_2 a_2^* + 2a_2^* d_2 a_2 + (\bar{x}^* x + \bar{x} x^*) (d_2 + d_1) + (z^* \bar{z} + z \bar{z}^*) (d_2 + d_3) + \\ &\quad (y^* \bar{y} + y \bar{y}^*) (d_1 + d_3) + (\bar{z}^* z + \bar{z} z^*) (d_3 + d_2) + 2d_3 a_3 a_3^* + 2a_3^* d_3 a_3) \end{aligned} \quad (4.63)$$

et tenant compte des équations (4.58, 4.59, 4.60, 4.61, 4.62) on obtient :

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{4}(8d_1\widehat{N}_R^\theta\widehat{N}_R^{\theta*} + 8\widehat{N}_R^{\theta*}d_1\widehat{N}_R^\theta + 8d_2\nu_L^\theta\nu_L^{\theta*} \\
&+ 8\nu_L^{\theta*}\nu_L^\theta d_2 + 8d_3\alpha_L\alpha_L^* + 8\alpha_L^*d_3\alpha_L) \\
&+ \left(\left(\widehat{\theta}_R^*\widehat{\theta}_R + \widehat{B}_R^{i*}\widehat{B}_R^i \right) u_0^* + CC + (\theta_L^-\theta_L^- + B_L^{i*}B_L^i) u_0 + CC \right) (d_2 + d_1) + \\
&\left(\left(\widehat{l}_R^*\widehat{l}_R + \widehat{D}_R^{i*}\widehat{D}_R^i \right) u_0^* + CC + (l_L^-\theta_L^- + D_L^{i*}D_L^i) u_0 + CC \right) (d_3 + d_1) + \\
&\left(\left(\widehat{l}_R^*\widehat{l}_R + \widehat{D}_R^{i*}\widehat{D}_R^i \right) u_0^* + CC + (l_L^-\theta_L^- + D_L^{i*}D_L^i) u_0 + CC \right) (d_3 + d_1) + \\
&\left(\left(\widehat{l}_R^*\widehat{l}_R + \widehat{D}_R^{i*}\widehat{D}_R^i \right) u_0^* + CC + (l_L^-\theta_L^- + D_L^{i*}D_L^i) u_0 + CC \right) (d_3 + d_1) + \\
&\left(\left(\widehat{\theta}_R^*\widehat{\theta}_R + B_L^{i*}B_L^i \right) u_0 + CC + (\theta_L^-\theta_L^- + \widehat{B}_R^{i*}\widehat{B}_R^i) u_0^* + CC \right) (d_2 + d_1) + \\
&\left(\left(\beta_L^*\beta_L + \widehat{U}_R^{i*}\widehat{U}_R^i \right) u_0^* + CC + (\nu_L^*\nu_L^l + U_L^{i*}U_L^i) u_0 + CC \right) (d_2 + d_3) + \\
&\left(\left(\widehat{l}_R^*\widehat{l}_R + D_L^{i*}D_L^i \right) u_0^* + CC + (l_L^-\theta_L^- + \widehat{D}_R^{i*}\widehat{D}_R^i) u_0 + CC \right) (d_1 + d_3) + \\
&\left((\beta_L^*\beta_L + U_L^{i*}U_L^i) u_0 + CC + (\nu_L^*\nu_L^l + \widehat{U}_R^{i*}\widehat{U}_R^i) u_0^* + CC \right) (d_3 + d_2)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

De ce résultat on peut faire les identifications suivantes :

$$\begin{aligned}
(d_2 + d_1) &= M_{\theta,B} \\
(d_3 + d_1) &= M_{l^-,D} \\
(d_2 + d_3) &= M_{\beta,\nu,U}
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Et de ces trois équations on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(M_{\theta,B} + M_{l^-,D} - M_{\beta,\nu,U}) &= \frac{1}{2}((d_2 + d_1) + (d_3 + d_1) - (d_2 + d_3)) = d_1 \\
\frac{1}{2}(M_{\beta,\nu,U} + M_{\theta,B} - M_{l^-,D}) &= \frac{1}{2}((d_2 + d_3) + (d_2 + d_1) - (d_3 + d_1)) = d_2 \\
\frac{1}{2}(M_{l^-,D} + M_{\beta,\nu,U} - M_{\theta,B}) &= \frac{1}{2}((d_3 + d_1) + (d_2 + d_3) - (d_2 + d_1)) = d_3
\end{aligned} \tag{4.65}$$

En Résumé. Dans cette première partie du quatrième chapitre, notre principal objectif était la construction du modèle de grande unification E_6 dans

le cadre de la géométrie non associative ou (la géométrie non commutative avec l'algèbre de Lie à la Wulkenhaar).

Dans la première partie de ce chapitre, il était indispensable de prouver l'existence du module, ie que l'algèbre exceptionnelle est compatible avec les principes de la géométrie non-associative $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$.

la deuxième partie de cette tâche est de trouver la forme du Dirac, et où on obtient une forme très simple pour le cas de E_6 ce qui est très encourageant pour la suite du travail.

Et normalement la troisième partie est bien sûr qui est la partie principale, est la construction du modèle, avec tous ce qui suit (étude phénoménologique, calcul des masses des particules etc.....) et qui est en cours de réalisation.

4.2 Le Modèle E_6 Supersymétrique et Violation CP

4.2.1 Introduction

La violation CP est un phénomène physique, qui a été observé par les expérimentateurs dans les grands accélérateurs de particules. On prédit même qu'elle est à l'origine de la création de la matière dans l'univers dans les premiers temps du Big-Bang. Il est à noter que la violation CP a été observé pour la première fois dans le cas du mélange $K^0 - \bar{K}^0$ [36], et la recherche de sa détection dans d'autres mélanges tel que le mélange de $B^0 - \bar{B}^0$ se poursuit encore, cependant aucune justification théorique de l'existence de ce phénomène n'a été convaincante avant la construction du modèle standard

par Glashow, Weinberg et Salam[48].

Ce dernier justifie l'existence de ce phénomène et localise sa source, mais l'estimation de cette dernière n'est pas identique à celle mesurée expérimentalement [37] ; il y a aussi d'autres problèmes dont souffre le modèle standard ce qui a poussé les physiciens à considérer des modèles de grande unification se basant sur des groupes de Lie plus larges.

Guidé par cette idée, dans ce travail qu'on présente dans cette thèse, où on a contribué à l'étude de ce phénomène dans un cadre plus large, qui est le modèle de grande unification E_6 et E_6 supersymétrique où en plus de la symétrie par rapport au groupe de jauge on a la super symétrie.

4.2.2 Modèle de Grande Unification E_6

On sait que le groupe E_6 est de rang 6 et d'ordre 78 il possède plusieurs sous groupe tel que $SU(5)$, $SU(6)$ et $SO(10)$ à travers lesquels une brisure spontanée est possible, donc on peut avoir des représentations différentes pour les multiplets de particules. Mais Gursev[43, 44, 45] et contrairement à d'autres modèles[46, 47, 49, 52] a choisit la représentation à travers la brisure :

$$E_6 \rightarrow SU_L(3) \otimes SU_R(3) \otimes SU_C(3)$$

qui est de représentation fondamentale 27 tel que :

$$27 = (\bar{3}, 3, 1) + (3, 1, 3) + (1, \bar{3}, \bar{3}) \quad (4.66)$$

où l'on a la répartition de la matière suivante 4.67 : dans celui correspondant au $(\bar{3}, 3, 1)$ c'est des leptons qui seront en un multiplet 3×3 :

$$L = \begin{pmatrix} \widehat{N}_R^\theta & \widehat{\theta}_R & \widehat{\ell}_R \\ \theta_L^- & \nu_L^\theta & \beta_L^\ell \\ \ell_L^- & \nu_L^\ell & \alpha_L^\ell \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Et les représentations $(3, 1, 3)$ et $(1, \bar{3}, \bar{3})$ contiennent les neufs (9) quarks suivants :

$$q_L^i = \begin{pmatrix} U_L^i \\ D_L^i \\ B_L^i \end{pmatrix}, \quad \widehat{q}_R^i = \begin{pmatrix} \widehat{U}_R^i \\ \widehat{D}_R^i \\ \widehat{B}_R^i \end{pmatrix} \quad i = \overline{1, 3} \quad (4)$$

Où $U = (u, c, t)$, $D = (d, s, b)$ et $\widehat{\psi}_R = i\sigma_2\psi_R^* = (\psi^c)_L$
(ψ est valable pour les leptons L et les quarks q).

Bosons de Jauges La représentation adjointe de E_6 est 78 qui se décompose à travers $SU_L(3) \otimes SU_R(3) \otimes SU_C(3)$ par :

$$78 = (8, 1, 1) + (1, 8, 1) + (1, 1, 8) + (\bar{3}, \bar{3}, 3) + (3, 3, \bar{3}) \quad (4.69)$$

et la représentation suivante est aussi valable [44] : $\{Q^\lambda\} = \{Q_L^\alpha, Q_R^\alpha, Q_j^i, Q_{bc}^i, Q_i^{ad}\}$
et qui contient les octets bosoniques left et right mais qui sont singulets de couleurs $W_{\mu L}$ et $W_{\mu R}$ (en particulier, les bosons de jauge W_μ^\pm , Z_μ et A_μ) et les huit gluons colorés respectivement. L'octet $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$ de bosons de jauge de saveurs est représenté par $W_{\mu L}$ et $W_{\mu R}$:

$$W_{\mu L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{A_\mu}{\sqrt{3}} + \frac{2Z_\mu}{\sqrt{20}} & & \\ + \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}}; & W_\mu^+ & V_\mu^+ \\ & -\frac{A_\mu}{\sqrt{12}} - \frac{3Z_\mu}{\sqrt{20}} & U_\mu^\circ \\ & -\frac{2B_\mu}{\sqrt{30}}; & \\ & \bar{U}_\mu^\circ & -\frac{A_\mu}{\sqrt{12}} + \frac{Z_\mu}{\sqrt{20}} \\ & & + \frac{4B_\mu}{\sqrt{30}}; \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

et

$$W_{\mu R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{A_\mu}{\sqrt{3}} - \frac{2Z_\mu}{\sqrt{20}} & & \\ + \frac{2B_\mu}{\sqrt{30}}; & W_\mu^{+'} & V_\mu^{+'} \\ & -\frac{A_\mu}{\sqrt{12}} + \frac{Z_\mu}{\sqrt{20}} & U_\mu^{\circ'}$$

$$\begin{pmatrix} & -\frac{B_\mu}{\sqrt{30}} + \frac{C_\mu}{\sqrt{2}}; & \\ & \bar{U}_\mu^{\circ'} & -\frac{A_\mu}{\sqrt{12}} + \frac{Z_\mu}{\sqrt{20}} \\ & & -\frac{B_\mu}{\sqrt{30}} - \frac{C_\mu}{\sqrt{2}}; \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Il est à noter que dans les représentations $(\bar{3}, \bar{3}, 3)$ et $(3, 3, \bar{3})$, on peut avoir les leptos-quarks X et Y .

Lagrangien E6 : En général le lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{masse}} + \mathcal{L}_{\text{interaction}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{cinétique}} + V(\varphi, \chi) \quad (4.72)$$

où :

$$\mathcal{L}_{\text{cinétique}} = i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L + i\bar{q}_L\gamma^\mu D_\mu q_L + i\bar{q}_R\gamma^\mu D_\mu q_R \quad (4.73)$$

et la dérivée covariante est :

$$(D_\mu \psi)_b^a = (\partial_\mu \psi)_b^a - ig (A_\mu T)_c^a (\psi)_b^c \quad (4.74)$$

T représente les 78 générateurs de E_6 . Ce qui nous permet d'écrire :

$$(D_\mu L)_b^a = (\partial_\mu L)_b^a - ig (G_\mu)_c^a L_b^c + ig (G_\mu)_b^d L_d^a \quad (4.75)$$

Et dans le cas des leptons on n'a que les générateurs non colorés qui interviennent. Par contre pour les quarks :

$$(D_\mu q_L)^{ai} = \partial_\mu q_L^{ai} - ig (A_\mu)_c^a q_L^{ci} + ig (G_\mu)_d^i q_L^{ad} \quad (4.76)$$

et la même chose pour \widehat{q}_R :

$$(D_\mu \widehat{q}_R)^{ai} = \partial_\mu \widehat{q}_R^{ai} - ig (A_\mu)_c^a \widehat{q}_R^{ci} + ig (G_\mu)_d^i \widehat{q}_R^{ad} \quad (4.77)$$

En remplaçant les dérivées covariante par leur expression dans le lagrangien on obtiendra les interactions entre fermions (leptons et quarks) avec les bosons de jauge.

Dans le Cas des quarks on a :

$$i\bar{q}_L (\gamma^\mu D_\mu q_L) \rightarrow i\bar{q}_L (\gamma^\mu W_{\mu L} q_L) + i\bar{q}_R (\gamma^\mu W_{\mu R} q_R) + . \quad (4.78)$$

et la même chose pour \widehat{q}_R . Le développement de l'équation (4.78) nous permet d'écrire :

$$\bar{q}_L (\gamma^\mu W_{\mu L} q_L) = 2 (\bar{q}_L)^{bi} (\gamma^\mu W_{\mu L})_b^a (q_L)_{ai} \quad (4.79)$$

Et de la même façon sa sera pour les leptons ce qui nous permet d'avoir à la fin les termes d'interactions des leptons et quarks qui sont : $(\bar{L})_a^b (W_{\mu L})_c^a (L)_b^c$ et $(\bar{q}_L)_a (W_{\mu L})_b^a (q_L)^b$ respectivement, Notons que les formes dominantes des termes d'interactions des quarks dans les courants chargés est :

$\bar{U}V^{-B}$, $\bar{U}W^{-D}$ et $\bar{D}B\bar{U}^{\circ}$ et puisque U , D , et B sont complètement différents, donc il existe trois différentes matrices de Kobayashi et Maskawa M_{KM} .

Maintenant, si on s'intéresse à la brisure spontanée de la symétrie du groupe de jauge E_6 , elle est réaliser grâce à trois types de particules de Higgs φ_{27} , χ_{78} et η_{351} où on a les représentations fondamentale, adjointe et de dimension 351 respectivement.

après la brisure spontanée de la symétrie du groupe E_6 au sous groupes $SU_L(3) \otimes SU_R(3) \otimes SU_C(3)$ et en utilisant la décomposition 4.66 et 4.69, notons que φ et χ (noté par χ_1 et χ_2) qui sont de représentations respectives $(\bar{3}, 3, 1)$ et $(8, 1, 1)$ ou $(1, 8, 1)$. En fait, les χ 's ne sont responsables que de la brisure spontanée de $SU_L(3) \otimes SU_R(3)$. Donc, la brisure spontanée de la symétrie de E_6 avec laquelle on peut générer des masses au fermions, ne peut être faite qu'avec le Higgs φ_{27} par conséquent, le terme de Yukawa du lagrangien prend la forme générale :

$$\mathcal{L} = \Gamma_1 \bar{L} \varphi_{27} L + \Gamma_2 \bar{q} \varphi_{27} q + \Gamma_3 \bar{q} \varphi_{27} L + CC \quad (4.80)$$

Mais pour préserver la conservation du nombre quantique de couleur, le troisième terme du lagrangien $(\Gamma_3 \bar{q} \varphi_{27} L)$ doit être éliminé, et dans le second terme il ne reste que le couplage entre quarks de différentes hélicités. Ce qui est du purement à la théorie des groupes, en effet le produit tensoriel

entre deux représentations de $SU_L(3)$ qui sont 3 et $\bar{3}$ qui représentent q_L et \bar{q}_L respectivement donne : $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$. Donc il ne peut y avoir de couplage entre ces deux quarks (avec ces hélicités spécifiques) et le Higgs φ_{27} . De la même façon le produit tensoriel des représentations $\bar{3}$ et 3 de $SU_R(3)$ qui représentent q_R et \bar{q}_R . Seulement, si on prend le produit tensoriel des représentations $\bar{3}$ et $\bar{3}$ et qui représente \bar{q}_L et q_R respectivement on obtient : $\bar{3} \otimes \bar{3} = 3 \oplus 6$ et par conséquent le couplage avec le φ_{27} est possible, Donc, le terme du lagrangien de Yukawa prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \frac{1}{2} \Gamma^{mn} \left[\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{rst} \left(\bar{L}_r^\beta \right)_m \varphi_s^\alpha L_{t,n}^\gamma + \left(\bar{q}_L^i \right)_m^s \varphi_s^\alpha \left(\hat{q}_R^i \right)_{\alpha n} \right] \quad (4.81)$$

Il est intéressant de noter dans cette voie que la masse du quark B est la même que celle du lepton θ . Mais, et pour générer des masses pour les quarks U et D on doit introduire le Higgs η_{351} . finalement le terme de masse des fermions est de la forme suivante :

$$\mathcal{L}_M = \bar{U} M_1 U + \bar{D} M_2 D + \bar{B} M_3 B + \bar{\ell}^- M_2 \ell + \bar{\theta}^- M_3 \theta \quad (4.82)$$

Maintenant et après diagonalisation des matrices de masses M_1 , M_2 et M_3 par les matrices unitaire X_L , X_R , Y_L , Y_R , Z_L , Z_R ie :

$$\begin{aligned} M_1 &\longrightarrow X_L M_1 X_R^+ \\ M_2 &\longrightarrow Y_L M_2 Y_R^+ \\ M_3 &\longrightarrow Z_L M_3 Z_R^+ \end{aligned} \quad (4.83)$$

ce qui nous permet de redéfinir le champ de quarks fermioniques par :

$$\begin{aligned}
U_{i,L} &\rightarrow U'_{i,L} = X_{L,ij}U_{L,j} \\
D_{i,L} &\rightarrow D'_{i,L} = Y_{L,ij}D_{L,j} \\
B_{i,L} &\rightarrow B'_{i,L} = Z_{L,ij}B_{L,j}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

En remplaçant dans l'équation 4.80, on obtient trois différentes matrices KM qui constituent en fait des sources pour la violation de CP [38, 39, 40, 41, 42].

4.2.3 E_6 Supersymétrique et Sources de Violation CP

Dans le modèle E_6 super symétric $N = 1$, les bosons de jauge (respectivement les fermions) et leurs partenaires forment des supermultiplets vectoriels (respectivement chiral) à travers la même représentation de dimension 78 (représentation adjointe) (respectivement 27 (représentation fondamentale)) et le lagrangien d'interaction prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -i\bar{L}\gamma_\mu(D_\mu L) - (D_\mu \tilde{L})^+ (D_\mu \tilde{L}) - i\bar{q}_L\gamma_\mu(D_\mu q_L) + \\
& - (D_\mu \tilde{q}_L)^+ (D_\mu \tilde{q}_L) - i\bar{q}_R\gamma_\mu(D_\mu \hat{q}_R) - (D_\mu \tilde{q}_R)^+ (D_\mu \tilde{q}_R) + \\
& ig/\sqrt{2}\bar{L}T\tilde{W}_{LR}\tilde{L} + ig/\sqrt{2}\bar{q}_L T\tilde{G}_{78}\tilde{q}_L + ig/\sqrt{2}\bar{q}_R T\tilde{G}_{78}\tilde{q}_R + \\
& -i\bar{H}_1\gamma^\mu(D_\mu \tilde{H}_1) - (D_\mu H_1)^+ (D_\mu H_1) - i\bar{H}_2\gamma^\mu(D_\mu \tilde{H}_2) + \\
& - (D_\mu H_2)^+ (D_\mu H_2) + ig/\sqrt{2}\bar{H}_1 T\tilde{W}_{LR}H_1 + ig/\sqrt{2}\bar{H}_2 T\tilde{W}_{LR}H_2 + CC
\end{aligned} \tag{4.85}$$

où :

\tilde{L}, \tilde{q}_L les $\tilde{W}_{LR}, \tilde{G}_{78}$ et $\tilde{H}_{1,2}$ sont les multiplets scalaires et fermioniques pour les multiplets fermioniques L, R , les W_{LR} et les particules scalaires Higgs respectivement.

Donc, il existe neuf différentes interactions possibles qui résultent du mixage entre particules fermioniques et leurs partenaires et trois qui viennent des particules scalaires super symétriques.

Si on s'intéresse au terme de Yukawa on peut écrire :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \sum_{a,b} \frac{\partial^2 W}{\partial A_a \partial A_b} \Psi_a \Psi_b + CC \quad (4.86)$$

où le super potentiel W a l'expression suivante :

$$W = h_1 \varepsilon_{klm} \varepsilon^{ij} \bar{L}_i^k L_j^l H_1^m + h_2 \bar{q}_L^{i\alpha} \hat{q}_R^{j\beta} \varepsilon_{i\alpha j \beta \gamma} H_2^\gamma + \lambda_1 (H_{1i} H_2^j \chi_{1j}^i + H_{1i} H_2^j \chi_{2j}^i) + W(\chi) \quad (4.87)$$

où :

$$W(\chi) = Y_k Tr(\chi^k) + X_k Tr(\chi^k)^2 + Z_k Tr(\chi^k)^3 \quad (4.88)$$

et Ψ est :

$$\Psi = \begin{pmatrix} L \\ \tilde{L} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_L^I \\ \tilde{q}_L^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{q}_R^I \\ \tilde{q}_R^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{H}_{1,2} \\ H_{1,2} \end{pmatrix} \quad (4.89)$$

après quelques simplifications on a :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = h_1 \left(H_1 \bar{L} L + \bar{L} \widetilde{H}_1 \tilde{L} \right) + h_2 \left(H_2 \bar{q}_L \hat{q}_R + \widetilde{H}_2 \bar{q}_L \tilde{q}_R + \tilde{q}_L \widetilde{H}_2 \hat{q}_R \right) + \lambda (\chi_2 \widetilde{H}_1 \widetilde{H}_2 + H_2 \chi_1 \widetilde{H}_1 + H_1 \chi_2 \widetilde{H}_2) \quad (4.90)$$

et le potentiel V est de la forme :

$$V = \sum_{\alpha} \left| \frac{\partial W}{\partial A_{\alpha}} \right|^2 = \left| h_1 \left(\bar{L}L + \tilde{L}^+ \tilde{L} + \bar{L} \tilde{L} \right) + \lambda \left(H_2 \chi + H_2 \tilde{\chi} + \tilde{H}_2 \tilde{\chi} + \tilde{H}_2 \chi \right) \right|^2 \quad (4.91)$$

après minimisation du potentiel V , les VeV (vacuum expectation values) responsables de la brisure spontanée de la super symétrie. Dans notre cas on a brisé la super symétrie spontanément à la Fayet-O'Raitfeartaigh. Il est à noter la méthode de Fayet Iliopoulos de brisure de $SUSY$ est applicable seulement au groupes de jauge de la forme $G \otimes U(1)$ et qui n'est pas notre cas. Donc après la brisure du groupe de jauge E_6 et $SUSY$ le terme de masse des quarks prend la forme suivante :

$$\mathcal{L}_M = \overline{U}_L^+ M_U \hat{U}_R + \overline{D}_L^+ M_D \hat{D}_R + \overline{B}_L^+ M_B \hat{B}_R + \tilde{U}_L^+ M_{\tilde{U}} \tilde{\tilde{U}}_R + \tilde{D}_L^+ M_{\tilde{D}} \tilde{\tilde{D}}_R + \tilde{B}_L^+ M_U \tilde{\tilde{B}}_R \quad (4.92)$$

Maintenant, après diagonalisation des matrices M_U , M_D , etc, en redéfinissant les champs de matières par des matrices unitaires et en remplaçant dans le lagrangien d'interaction on a :

$$\mathcal{L}_{I,\tilde{q}} = g^2 (\bar{U}V^+) \tilde{U}_L^+ \tilde{U}_{KM} \tilde{D}_L + g^2 (W^- \bar{U}^o) \tilde{B}_L^+ \tilde{V}_{KM} \tilde{U}_L + ig (V^+ W^-) \tilde{D}_L \tilde{W}_{KM} \tilde{B}_L \quad (4.93)$$

où :

$$\tilde{U}_{KM} = \tilde{X} \tilde{Y}^+, \tilde{V}_{KM} = \tilde{X} \tilde{Z}^+, \tilde{W}_{KM} = \tilde{Y} \tilde{Z}^+ \quad (4.94)$$

On a obtenu trois matrices KM de la même forme avec différentes phases qui ont résulté du couplage entre les bosons de jauge E_6 avec les quarks U, D et B , neuf matrices KM qui viennent du couplage des (U, D, B) et leurs partenaires avec des gajinos. Trois matrices KM du couplage des quarks scalaires $(\tilde{U}, \tilde{D}, \tilde{B})$ avec des bosons jauge E_6 .

Chapitre 5

Conclusion

Nous avons reformulé le modèle de jauge classique basé sur le groupe de Lie $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ avec des quarks exotiques associé à un L -cycle dans le cadre du formalisme de la GNA. En effet, nous avons déterminé les éléments de la représentation $\widehat{\pi}$ agissant sur l'espace $\Omega^1 \mathbf{a}$ et $\Omega^2 \mathbf{a}$ 1-forms et 2-forms respectivement et nous avons défini l'application $\widehat{\sigma} : \Omega^1 \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{F}} \mathbb{C}$. Les éléments des junk forms définissant les espaces $\mathbf{j}^0 \mathbf{a}$, $\mathbf{j}^1 \mathbf{a}$ et $\mathbf{j}^2 \mathbf{a} \subset \mathbf{M}_{\mathbf{F}}(\mathbb{C})$ sont aussi déterminés et de son élimination résulte des contraintes sur les paramètres de GNA (voir l'équation 3.79). Les éléments des espaces $\mathbf{r}^0 \mathbf{a} \subset \mathbf{M}_{\mathbf{F}} \mathbb{C}$ et $\mathbf{r}^1 \mathbf{a} \subset \mathbf{M}_{\mathbf{F}}(\mathbb{C})$ dont on a besoin pour la construction de la connection ρ et la représentation de la courbure $e(\theta)$ orthogonal à $\mathbf{J}^2 g$ ont été construits et après une rotation de wick nous avons calculé les actions bosoniques et fermioniques. Comme l'une des familles des quarks a été incorporée différemment par rapport aux deux autres familles, nous étions obligés d'introduire dans la représentation $\widehat{\pi}_Q(a_1, a_3)$ et $\widehat{\pi}_L(a_1, a_3)$ des quarks et des leptons respectivement les opérateurs $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}, \widehat{\delta}$ etc...et de leurs action sur les fermions

résultent les N charges et qui sont déterminées d'une manière unique. Plus intéressant encore c'est l'universalité des contraintes imposées aux paramètres qui représentent ces N charges (voir les équations.3.157). C'est probablement une autre forme de l'annulation d'anomalie et peut être considéré comme un output de la GNA et c'est un résultat similaire à celui présenté par le modèle économique $3 - 3 - 1$ non-supersymétrique avec deux triplets de Higgs. Donc les degrés de liberté dans le secteur scalaire sont imposés par la GNA. Si on voit un peu plus en détail les prédictions de ce formalisme, nous avons obtenu une relation entre l'angle de Weinberg θ_w , quelques paramètres libres représentant les valeurs propres des opérateurs $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}$ et $\hat{\gamma}$ sur les particules scalaires et l'angle de mixage θ (voir l'équation.3.137). Nous avons aussi trouvé les expressions de masses de tous les bosons scalaires, bosons de jauge chargés et neutres. En effet, si on suit l'argument de la référence [21], nous avons obtenu des faibles limites pour M_{Z^0} et M_{V^\pm, U^\pm} en fonction de l'angle θ . Nous avons aussi déterminé les angles de mixage entre les bosons de jauge neutres $Z^0, Z^{0'}$ et le photon B représenté par la rotation des angles d'Euler $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ et $\tilde{\gamma}$. Concernant les multiples expressions du couplage $V - A$ des quarks et des leptons avec les bosons de jauge $Z^{0'}$ et Z^0 on les a aussi trouvé et nous les avons donné explicitement en termes de l'angle de mixage θ , et les paramètres libres $\alpha, \beta, \text{etc...}$ Il est à noter que contrairement au cas commutatif, les quarks exotiques sont couplés avec le boson de jauge Z^0 non seulement par des courants vectoriels mais aussi par des courants axiaux. La dernière partie de notre travail qui est représenté dans le quatrième chapitre où nous avons élaboré un calcul qui nous met au devant pour la construction du modèle de grande unification E_6 dans le cadre de la géométrie non com-

mutative où on a déterminé une forme simple du Dirac, et nous pensons que cette forme simple est due à la représentation irréductible du groupe exceptionnel E_6 . Et finalement, nous avons terminé le dernier chapitre par l'étude des sources de violation CP dans le modèle de grande unification E_6 et E_6 SUSY.

Bibliographie

- [1] A.Connes and J.Lott, *Particle models and noncommutative geometry*, *Nucl. Phys.* **18B** (*Proc. Suppl.*) (1991) 29.
- [2] A.Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, New York (1994).
- [3] T.Schucker and J.M.Zylinski, *Connes's model building kit*, *J.Geom.Phys.* **16** (1995) 207.
- [4] F.Lizzi, G.Mangano, G.Miele et G.Sparano, *Constraints on unified gauge theories from noncommutative geometry*, *Mod. Phys. Lett.* **A11** (1996) 2561.
- [5] R.Brout, *Notes on Connes's construction of the standard model*, *Nucl.Phys.* **65** (*Proc.Suppl.*) (1998) 3.
- [6] J.C.Pati et A.Salam, *Lepton number as the fourth color*, *Phys.Rev.* **D10** (1974) 175.
- [7] R.N.Mohapatra et J.C.Pati, *Left-right gauge symmetry and an 'isoconjugate' model of CP-violation*, *Phys. Rev.* **D11**(1975) 566.
- [8] R.N.Mohapatra and G.Senjanovic, *Current algebra predictions for $D \longrightarrow K_{\pi}K_{\pi}L$ neutrino decay*, *Phys. Rev.* **D21** (1981) 165.

- [9] A.Connes, *Noncommutative geometry and reality*, *J.Math.Phys.* **36** (1995) 6194.
- [10] N.Mebarki, M.Harrat and M.Boussahel, *Extended Chamseddine-Frohlich approach to noncommutative geometry and the two doublets higgs model*, *Int. J. Mod. Phys.***A22** (2007) 6279.
- [11] R.Coquereaux, G.Esposito-Farèse et F.Scheck, *Noncommutative geometry et graded algebras in electroweak interactions*, *Int. J. Mod. Phys.***A7** (1992) 6555.
- [12] R.Coquereaux, G.Esposito-Farèse et G.Vaillant, *Higgs fields as Yang-Mills fields et discrete symmetries*, *Nucl. Phys.* B353 (1991) 689.
- [13] Y.Okumura, *SO(10) grand unified theory in noncommutative differential geometry on the discrete space $M_4 \otimes Z_N$* , *Prog.Theor.Phys.* 94 (1995) 607.
- [14] A.H.Chamseddine et J.Frohlich, *SO(10) unification in noncommutative geometry*, *Phys. Rev.* D 50 (1994) 2893.
- [15] R.Wulkenhaar, *Non-associative geometry-unified models based on L-cycles*, PhD Thesis, Leipzig University 1997.
- [16] R.Wulkenhaar, *Noncommutative geometry with graded differential Lie algebras*, *J.Math.Phys.* **38** (1997) 3358.
- [17] R.Wulkenhaar, *The standard model within non-associative geometry*, *Phys. Lett.* B 390 (1997) 119.
- [18] R.Wulkenhaar, *Graded differential Lie algebras and $SU(5) \otimes U(1)$ grand unification*, *Int.J.Mod.Phys.***A13** (1998) 2627.
- [19] R.Wulkenhaar, *SO(10) unification in noncommutative geometry revisited*, *Int. J. Mod. Phys.***A 14** (1999) 559.

- [20] A.Benslama and N.Mebarki, *Left-right gauge model in nonassociative geometry*, *JHEP* **0002** (2000) 018.
- [21] F.Pisano and V.Pleitez, *$SU(3) \otimes U(1)$ model for electroweak interactions*, *Phys. Rev. D* **46** (1992) 410.
- [22] P.H.Frampton, *Chiral dilepton model and the flavor question*, *Phys.Rev.Lett.* **69** (1992) 2889.
- [23] V.Pleitez and M.D.Tonasse, *Heavy charged leptons in an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ model*, *Phys.Rev.D* **48** (1993) 2353.
- [24] D.Ng, *Electroweak theory of $SU(3) \otimes U(1)$* , *Phys. Rev. D* **49**, (1994) 4805.
- [25] J.C. Monetro, F.Pisano et V.Pleitez, *Neutral currents et Glashow-Iliopoulos-Maiani mechanism in $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ models for electroweak interactions*, *Phys. Rev. D* **47** (1993) 2918.
- [26] H.N.Long, *$SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ model with right-handed neutrinos*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 437.
- [27] V.Pleitez, *New fermions and a vectorlike third generation in $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ models*, *Phys. Rev. D* **53** (1996) 514.
- [28] D.A.Gutierrez, W.A.Ponce et L.A.Sanchez, *Study of the $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ model with the minimal scalar sector*, *Int.J.Mod.Phys. A* **21** (2006) 2217.
- [29] T.Kitabayashi and M.Yasuè, *Two-loop radiative neutrino mechanism in an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ gauge model*, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 095006.
- [30] Y.Okamoto and M.Yasuè, *Radiatively generated neutrino masses in $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ gauge models*, *Phys. Lett. B* **466** (1999) 267.

- [31] T.Kitabayashi, *Comment on neutrino masses and oscillations in an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ model with radiative mechanism.* *Phys. Rev.* **D 64** (2001) 057301.
- [32] T.Kitabayashi and M.Yasuè, *Neutrino oscillations induced by two loop radiative mechanism,* *Phys. Lett.* **B 490** (2000) 236.
- [33] T.Kitabayashi and M.Yasuè, *$S(2L)$ permutation symmetry for left-handed mu and tau families and neutrino oscillations in an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ gauge model,* *Phys. Rev.* **D 67** (2003) 015006.
- [34] P. V. Dong, H. N. Long, and D. T. Nhung, *$SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ model with two Higgs triplets,* *Phys. Rev.* **D 73** (2006) 035004.
- [35] W.A.Ponce, Y.Giraldo and L.A.Sanchez, *Phys. Rev.* **D 67**, (2003) 075001.
- [36] M.K.Gaillard and B.W.Lee, *Rare decay modes of the K mesons in gauge theories,* *Phys.Rev.* **D 10** (1974) 897.
- [37] R.Shrock and S.B.Treiman, *$K^0 - \bar{K}^0$ Transition amplitude in the MIT bag model.,* *Phys.Rev.* **D 19** (1979) 2148.
- [38] R.N.Cahn and H.Harari, *Bounds on the Masses of Neutral Generation Changing Gauge Bosons,* *Nucl.Phys.* **B 176** (1980) 135.
- [39] *B. Winstein and L. Wolfenstein Rev. of. Mod. Phys. 65, (1993),1113.*
- [40] *Y.Nir and H.Quinn, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 42, (1992), 221.*
- [41] *E.A.Pashos and U.Türke, Phys. Rep. 178, (1989),147.*
- [42] *P.Langaker,Phys.Report, 72, (1981), 187.*
- [43] *F.Gursey and M.Serdarouglou Il Nuovo Ci-mento. Vol.65A,N.3.(1981).P.337.*

- [44] *F.Gursey and, P.Ramet and P.Sikivie, Phys.Rev, D16, (1977), 816.*
- [45] *F.Gursey and P.Sikivie, Phys.Rev.Lett, 36, (1976), 775.*
- [46] *E.Ma and D.Ng, TRI-PP-93-3. UCRHEP-T 103, Jan, (1993).*
- [47] *E.Ma, Phys.Rev, D36, (1987), 274.*
- [48] *K.S.Babu and R.N.Mohapatra MdDP-PP-90-077, (1989).*
- [49] *M.Bando and T.Kugo. Prog.Theor.Phys.101 :1313-1333, (1999).*
- [50] *Quark structure and octonions.F.Gursey and Murat.GunaydinJ.Math.phys,vol. 14.No.11,November 1973.(p.1651).*
- [51] *Introduction to octonions and the non associative algebras in physics (SUSUMO OKUBO). (page 68).*
- [52] *H.Ruegg and T.Schucker Nuclear Physics B161(1979) 388-396.*
- [53] *F.Gursey and M.Serdarouglou Lettre Al Nuovo Cimento. Vol.2,N.1.(1978).P.28.*
- [54] *H.freudenthal.Adv.Math.1(1964) 145.*
- [55] *A. H. Chamseddine, G. Felder and J.Frohlich. grand Unification in non Commutative Geometry. Nucl. Phys. B 395 (1992) 672–698.*
- [56] *A. H. Chamseddine, G. Felder and J.Frohlich.Unified Gauge Theories in non Commutative Geometry. Phys. lett. B 296 (1992) 109-116.*
- [57] *A.Connes. Gravity coupled with matter and the foundation of non commutative geometry, Commun.Math.Phys.182 :155-176,(1996).*
- [58] *I. Pris and T. Schucker. Non-commutative geometry beyond the standard Model, J.Math.Phys.38 :2255-2265, (1997).*

- [59] T. KRAJEWSKI and I. PRIS. Towards a Z' Gauge Boson in Noncommutative Geometry, *Lett.Math.Phys.*39 :187-202,(1997),

Abstract

A classical gauge model based on the Lie group $SU(3)_L \times U(1)_N$ with exotic quarks is reformulated within the formalism of non-associative geometry associated to an L-cycle. The N charges of the fermionic particles and the related parameters constraints are algebraic consequences and uniquely determined. Moreover, the numbers of scalar particles are dictated by the non-associativity of the geometry. As a byproduct of this formalism, the Weinberg angle w , scalar, charged and neutral gauge bosons masses as well as the mixing angles are derived. Furthermore, various expressions of the vector and axial couplings of the quarks and leptons with the neutral gauge bosons and lower bounds of the very heavy gauge bosons are also obtained. Independently New sources of the weak CP violation from the E_6 inspired heterotic string model are found. It is shown that the number of the corresponding Cabibo- Kobayachi- Maskawa like matrices depends on the spontaneous break down of the E_6 gauge symmetry and / or the super symmetry.

ملخص

تمت إعادة كتابة النموذج الكلاسيكي الاختياري للزمرة $U(1)_N \times SU(3)_L$ بالكواركات السحرية ل: L - cycle. الشحنات N للجسيمات الفرميونية و وسائط القيد المرتبطة هي نتائج جبرية و وحدة التعريف كذلك عدد الجسيمات السلمية هي مملاة من طرف الهندسة الغير تجميعية من نواتج هذه التركيبية زاوية (Weinberg) (w) كتل البوزونات الاختيارية السلمية و المشحونة و عديمة الشحنة. و نفس الشيء بالنسبة لزوايا المزج تم اشتقاقها زيادة على هذا، علاقات متعددة الارتباطات الشعاعية والمحورية للكواركات واللبتونات مع البوزونات الاختيارية عديمة الشحنة وكذلك مجالات ضعيفة للبوزونات الثقيلة التي تم الحصول عليها، على غرار ما سبق منابع جديدة لاختراق CP الضعيفة لنموذج التوحيد الأكبر E_6 و E_6 Susy تم الحصول عليها وبالإضافة إلى ذلك تم تبين أن عدد المصفوفات (Cabibo-Kobayachi-Maskawa) المقابل يرتبط بالكسر التلقائي لتناظر الزمرة الاختيارية و / أو الزمرة الفائقة التناظر .

Résumé

Le modèle classique basé sur le groupe de Lie $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ avec des quarks exotiques a été reformulé en un L-cycle dans le cadre du formalisme de la géométrie non-associative. Les N charges des particules fermioniques et leurs paramètres reliés aux contraintes sont des conséquences algébriques et ils sont déterminés d'une manière unique. Le nombre des particules scalaires est dicté par la non-associativité de la géométrie. Ce formalisme a permis de produire, l'angle de Weinberg w , les masses des bosons de jauge scalaires et neutres et aussi des angles de mixages ont été dérivés. En plus, de multiples expressions du couplage vectoriel et axial des quarks et des leptons avec des bosons de jauge neutres et des faibles limites pour les bosons de jauge lourds ont été obtenus. Indépendamment de ce qui vient d'être cité, de nouvelles sources de violation CP faibles du modèle de grande unification E_6 et E_6 SUSY ont été obtenues. En plus il est montré que le nombre des matrices de Cabibo- Kobayachi- Maskawa correspondant dépend de la brisure spontanée de la symétrie du groupe de jauge et/ ou de la super symétrie.