MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIERE ET DE LA RECHERCH SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MENTOURI- CONSTANTINE -1

FACULTE DES SCIENCES EXACTES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

N°d'ordre : ....

N° de série : ....

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de :

Magister en Mathématiques

OPTION

Analyse

Thème

Régularité Maximale d'une classe D'opérateur non locaux

Par :

Ramdane Samira

Devant le jury :

Président : Marhounne A.L Professeur UNIVERSITE CONSTANTINE -1

Rapporeur : Denche .M Professeur UNIVERSITE CONSTANTINE -1

Examinateur : Abdelli .M Professeur UNIVERSITE CONSTANTINE -1

Saidouni.C M.CA UNIVERSITE CONSTANTINE -1

soutenu le : 17-12-2014

TABLE DES MATIERES

Introduction

Le présent travail est à l'étude de la régularité maximale L^p pour une classe d'opérateur non locale dans les espaces de Banach du type U.M.D.

Le travail est composé d'une introduction et de trois chapitres.

On commence tout d'abord au premier chapitre par une présentation des notions utiliser tout ce travail, à savoir l'inégalité de Khinchine-Kahane, la décomposition de Schader , R-bornitude , les Martingale, le multiplicateur de Fourier .

Le second chapitre est consacré à l'étude de les espaces U.M.D et quelque propriété de ces espaces.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de la régularité maximale d'une classe d'opérateur non locale dans les espaces U.M.D.

CHAPITRE 1

Notions Preliminaires

Dans ce chapitre en bref certaine notions utiliser pour les martingales,la décompositoion de Shauder et pour la R-bornitude.

Soit X, Y duex espaces de Banach.

1-1 L'esperance Conditionelle

Dans ce chapitre nous considérons Ω un ensemble quelconque.

Définition 1.1. On dit que $F \subset \Omega$ est une algébre sur Ω si:

(i) $\Omega.\varnothing \in F$.

(ii) $\forall E \in F,\ \complement_{\Omega}^{E} \in F$.

(iii) $\forall E_1, E_2 \in F,\ E_1 \cup E_2 \in F$.

Définition 1.2. On dit que $F \subset \Omega$ est une $\sigma-$algébre (tribu) sur Ω si

(i) $\Omega.\varnothing \in F$.

(ii) $\forall E \in F,\ \complement_{\Omega}^{E} \in F$.

(iii) $\forall \left(E_i\right),\ E_1 \cup E_2 \in F,\ \underset{i\in I}{\cup} \left(E_i\right) \in F$, où I est un ensemble dénombrable quelconque.

$\Diamond$ Le couple (Ω, F) est dit un espase mesurable.

Définition 1.3. Soit (Ω, F) un espase mesurable, on dit que la fonction μ : $F \rightarrow \overline{R_+}$ est une fonction mesure positive si: $\forall \left(E_i\right)_{i\in I},\ E_1 \cup E_2 \in F$, avec

$E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, on a

$$\mu\left(\underset{i\in I}{\cup} E_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(E_i)$$

$\Diamond$ Le triblet (Ω, F, μ) est dit espace mesuré.

$\Diamond$ Si $\mu(\Omega) = 1$, le triblet (Ω, F, μ) est appelé espace de probabilité, et dans ce cas on le note par (Ω, F, P).

Définition 1.4. Soient (Ω_1, F_1) et (Ω_2, F_2) deux espaces mesurables, on dit que l'application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est une fonction mesurable si:

$$\forall E_2 \in F_2,\ f^{-1}(E_2) \in F_1$$

$\Diamond$ Si (Ω_1, F_1, P_1) et (Ω_2, F_2, P_2) sont deux espaces de probabilité, alors f est une variable aléatoire.

$\Diamond$ si $\Omega_2 = R$,on dit que f est une variable aléatoire réelle.

soit E un espace de Banach et $\gamma = \gamma(x)$ une fonction muserable.

Définition 1.5. $\triangleright$ Soit $L_{p,\gamma}(\Omega, E)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to E$ fortement mesurables menu de la norme

$$\|f\|_{\Omega,p,\gamma} = \|f\|_{L_{p,\gamma}} = \|f\|_{L_{p,\gamma}(\Omega,E)} = \left(\int \|f(x)\|_E^p\ \gamma(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1 \leq p < \infty.$$

$\blacktriangleright$ Pour $\gamma(x) = 1$, l'espace $L_{p,\gamma}(\Omega, E)$ noté par $L_p(\Omega, E)$ et la norme de f donné par

$$\|f\|_p = \left(\int \|f(x)\|_E^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1 \leq p < \infty.$$

Dans la suite de ce paragraphe nous considérons $F \subset \Omega$ une algébre et $B \subset F$ une sous $\sigma-$algébre de F.

Définition 1.6. Soient $f \in L^1(F,X)$, $F \subset \Omega$ une algébre et $B \subset F$ une sous $\sigma-$algébre de F. L'espérance conditionnelle de f par apport à B noté par $E(f/B)$ est une fonction $g \in L^1(B,X)$ qui satisfait

$$\int_G g dp = \int_G f dp \quad \text{pour tout} \quad G \subset B.$$

Exemple 1.1. Soient $f \in L^1(F,X)$ et $B \subset F$ une sous $\sigma-$algébre, si f est une fonction $B-$mesurable, alors $E(f/B) = f$.

Proposition 1.1. *Soient (Ω, F, P) une space de probabilité, $f \in L^1(F,X)$ et $B \subset F$ une sous $\sigma-$algébre de l'algebre F. Alors*

- *L'operateur $E(./B) : L^1(F,X) \to L^1(B,X)$ définie par $f \mapsto E(f/B)$ est linéaire.*
- *Si $B_1 \subset B_2 \subset F$, alors $E(E(f/B_1)/B_2) = E(E(f/B_2)/B_1)$.*

Lemme 1.1. *Pour $f \in L^1(F,X)$ et $B \subset F$ une sous $\sigma-$algébre de l 'algebre F. L'espérance conditionnelle de f par apport à B est $E(f/B)$ qui est existe telle que*

$$|E(f/B)|_X \leq E(|f|_X/B) \quad (P.P).$$

L'operateure $E(./B)$ est une projection contractive de $L^1(F,X)$ dans $L^1(B,X)$.

Lemme 1.2 (Théorème de la convergence monotone). *Soient $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1(F,X)$ et $B \subset F$ une sous $\sigma-$algébre de l 'algebre F. Si $0 \leq f_n \nearrow f \quad (P.P)$, alors*

$$0 \leq E(f_n/B) \nearrow E(f/B) \quad (P.P).$$

Lemme 1.3 (Le lemme de Fatou). *Soient* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1(F,X)$ *et* $B \subset F$ *une sous* $\sigma-$*algébre de l 'algebre* F. *Si* $0 \leq f_n$, *alors*

$$E\left(\liminf_{n\to\infty} f_n/B\right) \leq \liminf_{n\to\infty} E(f/B) \quad (P.P).$$

Lemme 1.4 (Théorème de la convergence doménie). *Soient* $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L^1(F,X)$ *et* $B \subset F$ *une sous* $\sigma-$*algébre de l 'algebre* F *et* $g \in L^1(F,X)$. *Si* $|f_n| \leq g$ *et* $f_n \to f \quad (P.P)$, *alors quand* $n \to \infty$ *on a*

$$E(|f_n - f|/B) \to 0 \quad (P.P).$$

De plus il résulte que $E(f_n/B) \to E(f/B) \quad (P.P)$.

Remarque 1.1. Le Lemme 1.4 peut être prolongé à un espace de Banach, c'est-à-dire si $|f_n|_X \leq g \in L^1(F,X)$ et $f_n \to f \qquad (P.P)$ quand $n \to \infty$ (i.e; $|f_n - f|_X \to 0 \quad (P.P)$) quand $n \to \infty$ alors $E(|f_n - f|_X /B) \to 0$ $(P.P)$.

De plus il résulte que $E(f_n/B) \to E(f/B) \quad (P.P)$.

Corollaire 1.1. *Pour une sous* $\sigma-$*algébre* $B \subset F$, *L'espérance conditionnelle est une projection contractive de* $L^p(F,X)$ *dans* $L^p(B,X)$ *pour* $1 \leq p \leq \infty$.

Lemme 1.5. Si $g \in L^1(B, B(X,Y))$, $p \in (1,\infty)$, $f \in L^p(F,X)$ et $B \subset F$, alors

$$E(gf/B) = gE(f/B).$$

1-2 Les Matigales

Définition 1.7. Une martingale est une suite $f = (f_k)_{k=1}^{\infty}$ de variables aléatoires sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) associée à une suite croissante $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous $\sigma-$algébre de F telle que $F_k \nearrow F$ et la différence définit par: $\delta f_k = f_k - f_{k-1}$ avec $f_0 = 0$ satisfait la condition

$$E\left(\delta f_k / F_{k-1}\right) = 0. \tag{1.1}$$

telle que f_k est $F_k - mesurable.$

Remarque 1.2. La condition (1.1) est equivalent à

$$f_{k-1} = E\left(f_k / F_{k-1}\right). \tag{1.2}$$

Preuve. On a $E\left(\delta f_k / F_{k-1}\right) = 0$, c'est-à-dire $E\left(f_k - f_{k-1} / F_{k-1}\right) = 0.$

D'aprés la linéarité de l'éspérance conditionnnelle on a

$$E\left(f_k - f_{k-1} / F_{k-1}\right) = E\left(f_k / F_{k-1}\right) - E\left(f_{k-1} / F_{k-1}\right) = 0.$$

L'exemple (1.1) nous donne

$$E\left(f_k - f_{k-1} / F_{k-1}\right) = E\left(f_k / F_{k-1}\right) - f_{k-1} = 0.$$

D'ou

$$E\left(f_k / F_{k-1}\right) = f_{k-1}.$$

Exemple 1.2. Soient $f \in L^1(F, X)$, (Ω, F, P) espace de probabilité et $(F_k\ )_{k=1}^{\infty}$ est une suite croissante d'une sous $\sigma-$algébre de F, alors la suite $(F_k)_{k=0}^{\infty}$ définit par

$$f_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ E\left(f / F_k\right) & \text{si } k \geq 1, \end{cases}$$

est une martingale.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
E\left(\delta f_k/F_{k-1}\right) &= E\left(f_k - f_{k-1}/F_{k-1}\right) \\
&= E\left(f_k/F_{k-1}\right) - E\left(f_{k-1}/F_{k-1}\right) \\
&= E\left(E\left(f/F_k\right)/F_{k-1}\right) - E\left(E\left(f/F_{k-1}\right)/F_{k-1}\right)
\end{aligned}
$$

D' aprés la proposition (1.2) on trouve$E\left(\delta f_k/F_{k-1}\right) = 0\cdot$

Corollaire 1.2 Si $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ est une martingale ,et $\Phi \colon X \to \mathbb{R}$ une application continue convexe , telle que : $\Phi \circ f_k$ est intégrable pour $k \in \mathbb{Z}$,.Alors $(\Phi \circ f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^1(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ est une sous martingale.

Corollary 1

Remarque 1.3 *Soit $(f_k)_{k=1}^{\infty}$une martingale. Dans le cas ou $\Phi = |.|_X$, alors $(|f_k|_X)_{k=1}^{\infty}$ est une sous -martingale non négative.*

Corollaire 1.3 *Si $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega, X)^{\mathbb{Z}_+}$ est une martingale sur X , et $\Psi \in B\ (X, Y)$, Alors $\Psi f = (\Psi f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega, Y)^{\mathbb{Z}_+}$est une martingale sur Y.*

Remark 2 Corollary 3

Lemme 1.6 *Si H est une espace de Hilbert , $f \in L^2(F, H)$,et $B \subset F$ une sous -$\sigma-$algébre de F ,alors $E(f/B)$ est la projection de f dans $L^2(B, H)$.*

Corollaire 1.4 *Si H est une espace de Hilbert , $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^2(\Omega, H)^{\mathbb{Z}_+}$ est une martingale adaptée à $(F_k)_{k=1}^{\infty}$,alors les differences δf_k sont orthogonales.*

1-3 R-Norme

Définition 1.8 *soit* (Ω, F, P) *un espace de probabilité, on dit que les variables aléatoires :* $X_{1,}X_{2,}......X_{n,}$*définit de* Ω *sur* $\mathbb{R}$ *sont indépendantes si:*

$$P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., Xn = x_n\right) = P\left(X_1 = x_1\right) P\left(X_2 = x_2\right) ....P\left(Xn = x_n\right).$$

Définition 1.9 *soit*(Ω, F, P)*un space de probabilité,les fonctions de Radmacher* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$*sont des variables aléatoires indépendantes,identiquement,distribués définit sur* Ω *à valeurs dans* $\{-1,1\}\, \xi_k : \Omega \to \{-1,1\}$.

et vérifiant :

(i) $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sont des variables aléatoires réelles .*

(ii) $P\left(\xi_k(\omega) = 1\right) = P\left(\xi_k(\omega) = -1\right) = \frac{1}{2}$.

(iii) $P\left(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega) ......\xi n(\omega)\right) = P\left(\xi 1(\omega)\right) P\left(\xi_n(\omega)\right) ......P\left(\xi n(\omega)\right)$.

Exemple 1.3 *les fonctions*

$$\xi_k(\omega) = sign\left(\sin\left(2^k\pi\omega\right)\right), \omega \in [0,1], k \in \mathbb{N}.$$

sont des fonctions de Radmacher.

Définition 1.10 *la norme aléatoire de* $x_1, x_2, ...x_n \in X$ *est définit par :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_{L^P(\Omega,X)} = \left[\int_{\Omega}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_X^p dp(\omega)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ou X*est un espace normé,* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$*est une suite des variables aléatoires appelée fonctions de Radmacher ,*$x_k \in X$ *et* $\omega \in \Omega$*.*

Exemple 1.4 *(i) la norme d un element de* X *:*

Definition 4 ***Example 5*** $$|\xi x|_{L^p(\Omega,X)} = \left[\int_\Omega |\xi x|_X^p \, dp(\omega)\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\left|\sum_{\xi\in\{-1,1\}} \xi x\right|_X^p p(\xi)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left|\sum_{\xi\in\{-1,1\}} \xi x\right|_X^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(|x|_X^p + |-x|_X^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} = \left(|x|_X^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |x|_X .$$

$\surd$ *La norme aléatoire d 'une seul element de X est la norme de cette élément dans X*

(ii) la norme de la somme de deux élément de X :

$$\left|\sum_{k=1}^{2} \xi_k x_k\right|_{L^P(\Omega,X)} = \left[\int_\Omega \left|\sum_{k=1}^{2} \xi_k x_k\right|_X^p dp(\omega)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\sum_{\xi_1 \in\{-1,1\}} \sum_{\xi_2 \in\{-1,1\}} |\xi_1 \ x_1 + \xi_2 \ x_2|_X^p \ p(\xi_1) \ .p(\xi_2)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2^2} \sum_{\xi_1\in\{-1,1\}} |\xi_1 \ x_1 - \ x_2|_X^p + |\xi_1 \ x_1 + \ x_2|_X^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2^2}\left(|-x_1 - \ x_2|_X^p + | \ x_1 - \ x_2|_X^p + |- \ x_1 + \ x_2|_X^p + | \ x_1 + \ x_2|_X^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2^2} 2\left(| \ x_1 - \ x_2|_X^p + | \ x_1 + \ x_2|_X^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(| \ x_1 - \ x_2|_X^p + | \ x_1 + \ x_2|_X^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

(iii) la norme de la somme de n élément de X :

Definition 6

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_{L^P(\Omega,X)} = \left[\int_\Omega \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_X^p dp(\omega)\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left[\sum_{\xi_1\in\{-1,1\}} \ldots\ldots \sum_{\xi_n\in\{-1,1\}} \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_X^p p(\xi_1)\ldots\ldots p(\xi_n)\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left[\frac{1}{2^n}\sum_{\xi_1\in\ \{-1,1\}} \ldots\ldots \sum_{\xi_n\in\{-1,1\}} \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_X^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left[\frac{1}{2^n}\sum_{\vartheta\in\{-1,1\}} \left|\sum_{k=1}^{n}\vartheta_k\ x_k\right|_X^p\right]^{\frac{1}{p}} ; \vartheta \in (\vartheta_1\ldots.\vartheta_n)$$

Définition 1.11 *($L'ingalit\acute{e}\ de\ Khintchine - Kahane$) :Pour $p;q$ telle que $0 \prec p;q \prec \infty$,il existe une constante $K_{p;q}$ telle que dans chaque espace vectoriel normé on a:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_{L^P(\Omega,X)} \leq K_{p;q}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_{L^q(\Omega,X)}.$$

Pour toute $x_k \in X$ et fonction de Radmacher ξ_k, $k = 1\ldots\ldots n$.

Remarque 1.4 *Si X un espace de Banach ,et la série $\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k$ converge dans l'un des espaces $L^P(\Omega, X)$, alors elle est converge dans chcun de ces espaces, et L'inégalité précédante est vrair por $n = \infty$.*

Remarque 1.5 *L'inégalité de $Khintchine - Kahaneresulte$que si on prend $X\prime$ l'ensemble des familles finies de X munit de la norme aléatoire, Alors obtient un espace normé dont les normés aléatoires sont équivalentespour tout p,$0 < p < \infty$.*

1-4 La décompositionde shauder

Définition 1.12 *Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ une suite dans l'espace normé X, On dit que* *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *est :*

(i) converge vers x*, si* $\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n - x\right| = 0$*, et on note :* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x.$

(ii) inconditionnellement convergente si la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *converge pour chaque permutation des entiers natrurel* $\sigma \in S_{\mathbb{Z}_+}$.

(iii) sommable vers $x \in X$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *ilexiste un* $F_0 \subset \mathbb{Z}$ *,*$cardF_0 < \infty$ *telle que pour tout* $F_0 \subset F$*,* $cardF < \infty$ *ona :*

$$\left|\sum_{n\in F} x_n - x\right|_X < \varepsilon.$$

(iiii) Absolument convergente, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|_X$ *est convergente.*

Dans le cas générale , c'est -à-dire dans un espace normé quelconque il n'existe aucune relation entre ces type de convergence , mais il'ya uniqement quelques implications, si X *un espace de Banach on résumée les relations entre ces types de convergences dans le lemme suivant :*

Lemme 1.7 *Soit* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ *une suite dans l'espace de Banach* X *, les assertions suivantes sont equivalentes :*

1- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *est inconditionnellement convergente .*

2- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *est sommable.*

3- $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *satisfait les conditions de* $Cauchy$ $(Schrinking)$.

4- $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ *est convergente pour chaque suite bornée* $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+)$.

5- $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ *est convergente pour chaque suite bornée* $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \in \{-1;1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

6- $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n x_n$ *est convergente pour chaque suite bornée* $(\delta_n)_{n=1}^{\infty} \in \{0;1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

Définition 1.13 *Une décomposition de Shauder est suite de projecteurs* $D = (D_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(X)$ *telle que :*

(i) $D_k D_l = 0; k \neq l.$

(ii) $x = \sum_{n=1}^{\infty} D_n x,$ *pour tout* $x \in X.$

Les opérateures $P_k = \sum_{n=1}^{k} D_n$ *sont dits sommes partielles des projecteurs correspondants à* D.

Exemple 1.5 *Soient* (Ω, F, P)*un space de probabilité,* X *un espace de Banach,et* $(F_k)_{k=1}^{\infty} \subset F$ *une suite croissante de sous -*$\sigma-$*algébres de* F *telle que* $F_k \nearrow F$ *.Alors* $f = (f_k)_{k=0}^{\infty}$ *définie par:* $(f_k)_{k=1}^{\infty} = (\delta E(./F_k))_{k=1}^{\infty}$ *et* $f_0 = 0$ *est une décomposition de Shauder de* $L^p\ (F;X)$*,*$p \in [1;\infty[$.

Définition 1.14 *Une décomposition de Shauder est dite inconditionnelle si la série dans la définition correspondante est inconditionnellement convergente pour chaque* $x \in X$.

Lemme 1.8 *Si* $(X_k)_{k=1}^{\infty}$*est une famille de sous espaces vectoriels fermés d'un espace de Banach* X*,si chaque* $x \in X$ *admet une unique représentation* $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k,\ X_k \subset X\ (X = \oplus X_k,$ *est la somme directe de* $X_k)$ *.Alors* $D = (D_k)_{k=1}^{\infty}$ *définie par:* $D_k x = x_k$ *est une décomposition de Shauder de* X.

Lemme 1.9 *Soit* $D = (D_k)_{k=1}^{\infty}$*décomposition de Shauder d'un espace de Banach*

X .Alors la nouvelle norme :

$$\|x\|_X = \sup_{n\,\in\,\mathbb{Z}_+}\left|\sum_{k=1}^{\infty} D_k x\right|_X .$$

est equivalente à $|.|_X$.

1-5 R-Bornitude

Définition 1.14 *Une famille d'opérateurs* $M \subset B(X;Y)$ *,ou* X *et* Y *sont duex espaces vectoriels normes est dite borée aléatoirement* ($R-$ *bornée*) *si pour un certain* $p \in [1;\infty)$*; il existe une constante* C *finie telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $T_K \in M$*,* $x \in X$*,* ξ_k *des fonctions de Radmacher,* $k = 1; 2.....n$ *ona :*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k T_k x_k\right|_{L^P(\Omega,Y)} \leq C \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k\right|_{L^P(\Omega,X)} \tag{1.5.1}$$

Remarque 1.6 *1- Le minorant de constante* C *noté par* $R_p(M)$ *est dite* $R-$ *bornitude de* M *d'ordrs* p.

2- La définition de $R-$ *bornitude est indépendante de 'lordre* p *,d'aprés l'inégalité de* $Khintchine-Kahane$*, mais* $R_p(M)$ *dépend de cet ordre* p*,c'est -à-dire si* M *non* $R-$ *bornée pour une seul* $p \in [1;\infty)$ *donc elle est non* $R-$ *bornée pour tout les* $p \in [1;\infty)$.

3- Soient M_1 *et* $M_2 \subset B(X;Y)$ *duex famille* $R-$*bornées, soient* $T_K^1 \in M_1$ *et*

$T_k^2 \in M_2$.*Alors on a :*

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(T_K^1+T_k^2\right)x_k\right|_{L^P(\Omega,Y)} &\leq \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k T_K^1 x_k\right|_{L^P(\Omega,Y)}+\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k T_k^2 x_k\right|_{L^P(\Omega,Y)}. \\ &\leq \left(R_p\left(M_1\right)+R_p\left(M_2\right)\right)\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k x_k\right|_{L^P(\Omega,X)}\end{aligned}$$

D'ou

$$R_p\left(M_1+M_2\right)\leq R_p\left(M_1\right)+R_p\left(M_2\right).$$

De meme maniere on puet facilement vérifier que:

$$R_p\left(\lambda M\right)\leq |\lambda|\, R_p\left(M\right).$$

4- Chaque ensemble contenant une suel opérateur linéaire bornée $T\in B\left(X;Y\right)$*est* $R-$ *bornée,de plus ona :*

$$R_p\left(\{T\}\right)= |T|_{B(X\ ;Y)}.$$

5- Chaque sous famille $R-$ *bornée est* $R-$ *bornée.*

6- Toute famille finie d'operateurs linéaire bornées est $R-$ *bornée.*

7- D ans l'espace de Hilbert opérateur positive est $R-$ *bornée.*

8- Soient $M,S\subset B\left(X;Y\right)$ *deux familles* $R-$ *bornées, Si* $0\in M\cap S$*, Alors* $M\cup S$ *est une famille* $R-$ *bornée.*

Lemme 1.10 *Soiten* X *et* Y *sont duex espaces vectoriels normes. Alors pour chaque famille d'opérateurs* $M\subset B\left(X;Y\right)$ $R-$*bornée ona:* $R_p\left(M\cup\{0\}\right) = R_p\left(M\right)$

- Maintenant on va donner des quelque condition nécéssaire et suffsantes pour montrer qu'une famille est $R-$ bornée.

Lemme 1.11 *Pour montrer la $R-$bornitude d'une famille $M \subset B\,(X;Y)$,il suffit montrerl'inégalité (1.5.1) pour touts siutes d'elements distincts $T_K \in M$.Les bonnes constantes sont les memes.*

Corollaire 1.5 *Pour montrer la $R-$bornitude d'une famille dénombrable d'opérateurs $M = (T_k)_{k=1}^{\infty} \subset B\,(X;Y)$, ilsuffit montrer l'inégalité (1.5.1) pour toutes suitse de troncatures $(T_k)_{k=1}^{n}$.*

Définition 1.15 *Une suite $(M_k)_{k=1}^{\infty}$ de famille d'opérateurs $M_k \subset B\,(X;Y)$ est dite relativement $R-$bornée par rapport à une suite d'espaces fermés $(X_k)_{k=1}^{\infty}$de X si*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k T_k x_k\right|_{L^P(\Omega,Y)} \leq C \left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k\right|_{L^P(\Omega,X)}.$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_+$, ξ_k des fonctions de Radmacher; $T_k \subset M_k, x_k \in X_k$ et $K = 1; 2; ....n.$

Remarque 1.7 On remarque qu'une famille M est $R-$ *bornée* si et seulement si toutes suites $(M_k)_{k=1}^{\infty}$; $M\ _k \subset M$, sont relativement $R-$ *bornée* pour toutse les espaces $(X_k)_{k=1}^{\infty}$, $X_k \subset X$.

1-6 Multiplicateur de Foureir

Definition 7 ***Remark 8 Definition 9***

1.6.1 La transformation de Foureir

Définition 1.16 *Soit X un espace de Banach et $U \in L^1(\Omega; X)$, la transformation :*

$$F[U(\lambda)] = \hat{U}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} U(t) \exp(-i\lambda t)\, dt \quad ; \lambda \in \mathbb{R}$$

est dite transformation de Fourier.

Définition 1.17 *L'inverse de la transformation de Fourier est définit par*

$$F^{-1}(\lambda) = U(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{U}(t) \exp(i\lambda t)\, d\lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.6.2 Quelque notion

▶ *On note par $D(\mathbb{R}; X)$ l'espace de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment différentiables et support compact*

$$D(\mathbb{R}; X) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}; X) ;\ supp(f) = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}} \right\}.$$

et on note $D(\mathbb{R}; X) = L(D(\mathbb{R}; X); X)$ l espace de distributions .

▶ *On définit l'espace de Shwartz $S(\mathbb{R}; X)$par:*

$$S(\mathbb{R}; X) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}; X) ; t^\alpha D^\beta f \in L^\infty(\mathbb{R}; X) ; \alpha, \beta \in \mathbb{N} \right\}.$$

et on note par $S^/(\mathbb{R}; X) = L(S(\mathbb{R}; X) \ ; X)$ est l'espace de distributions tempérées

▶ *Soit* $F^{-1}D(\mathbb{R}; X) = \left\{ f \in S(\mathbb{R}; X) ;\ \hat{f} \in D(\mathbb{R}; X) \right\}.$

1.6.3 Multiplicateur de Foureir

Définition 1.17 *soient X et Y deux espaces de Banach, $1 < p < \infty$, une fonction $M \in C^\infty(\mathbb{R}; L(X.; Y))$ est un Multiplicateur de Fourier $L^p(\mathbb{R}.; X) - L^p(\mathbb{R}; Y)$ s'il existe un opérateur:*

$$T \ : \ (\mathbb{R}.; X) \ \to \ L^p(\mathbb{R}; Y)$$

Telle que pour tout $f \in F^{-1}D(\mathbb{R}; X)$ ona:

$$Tf \in S(\mathbb{R};X) \text{ et } T\hat{f}(s) = M(s)\hat{f}(s) \quad ; s \in \mathbb{R}.$$

Théoreme 1.1 (Théoreme de Weiss) *: soient X et Y deux espaces de $Banach$, une fonction $M \in C^1(\mathbb{R};\mathcal{L}(X.;Y))$ telle que:*$\{M(s)$ *;* $s \in \mathbb{R}-\{0\}\}$ *et* $\{sM^{/}(s)$ *;* $s \in \mathbb{R}-\{0$ *sont* $R-$*bornées dans* $\mathcal{L}(X.;Y)$ *.Alors;*M *est unMultiplicateur* $L^p(\mathbb{R}.;X)-L^p(\mathbb{R};Y)$ *pour:* $1 < p < \infty$.

Remarque 1.8 *(i) Tout les espaces de $Hilbert$ satisfait les conditions de Multiplicateur de $Fourier$.*

(ii) Il existe des espaces de $Banach$ qui sont pas des espaces de $Hilbert$, mais satisfait les conditions de Multiplicateur de $Fourier$;par exemple les espaces $U.M.D\cdot$

Remark 10

CHAPITRE 2

Espace U.M.D

Dans ce chapitre on va etudier les espaces $U.M.D$ .On donne des définition équivalent de ces espaces et leurs principales propriétés .

Soient X un espace de $Banach$ et (Ω, F, P) espace de probabilité .

2-1 La propiété des matingales diférences inconditionnelles

Définition 2.1 On dit que l'espace de $Banach$ X admet la propiété des matingales diférences inconditionnelles dans L^p, $p \in (1;\infty)$ ou bien $U.M.D - p$ si l'inégalité:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k \delta f_k\right|_{L^P(\Omega,X)} \leq M_p \left|\sum_{k=1}^{n}\delta f_k\right|_{L^P(\Omega,X)} = M_p \left|f_n\right|_{L^P(\Omega,X)} . \tag{2.1}$$

est satisfaite pour certain M_p par chaque martingale $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega; X)$ et chaque $\xi \in \{-1;1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

Remarque 2.1 La condition (2.1) est équivalent à la condition :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\delta g_k\right|_{L^P(\Omega,X)} \leq M_p\left|\tilde{g}\right|_{L^P(\Omega,X)} \quad \text{, pour } g_k = E\left(\tilde{g}/F_k\right) \tag{2.2}$$

Preuve. 1)(2.1)⇒(2.2): comme $(2;1)$ est satisfait pour chque martingale $f = (f_k)_{k=1}^{\infty} \in L^p(\Omega; X)$,et $g = (g_k)_{k=1}^{\infty} = (E(\tilde{g}/F_k))_{k=1}^{\infty}$ est une martingale; alors (2.1) est satisfait pour $g = (g_k)_{k=1}^{\infty}$.

donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\delta g_k\right|_{L^P(\Omega,X)} &\leq M_p\left|\sum_{k=1}^{n}\delta g_k\right|_{L^P(\Omega,X)} \\ &= M_p\left|g_n\right|_{L^P(\Omega,X)} \\ &= M_p\left|E\left(\tilde{g}/F_n\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} \\ &\leq M_p\left|\tilde{g}_n\right|_{L^P(\Omega,X)}.\end{aligned}$$

-On trouve la derniére inégalité d'aprés la contractive de L'espérance conditionnelle.

2) (2.2)⇒(2.1): on prend $\tilde{g} = f_n$ et on substitant dans (2.2):

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\delta g_k\right|_{L^P(\Omega,X)} &= \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(g_k - g_{k-1}\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(E\left(\tilde{g}/F_k\right) - E\left(\tilde{g}/F_{k-1}\right)\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(E\left(f_n/F_k\right) - E\left(f_n/F_{k-1}\right)\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} \\ &\leq M_p\left|\tilde{g}_n\right|_{L^P(\Omega,X)}.\end{aligned}$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(E\left(f_n/F_k\right) - E\left(f_n/F_{k-1}\right)\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} \leq M_p\left|f_n\right|_{L^P(\Omega,X)} \tag{2.3}$$

Remarque 2.2 Or $f = (f_k)_{k=1}^{\infty}$ est une martingale,Alors

$$E\left(f_n/F_k\right) \quad = f_k$$

pour chaque $k \leq n$.Ainsi l'inégalité (2.1) est prouver.

Lemme 2.1 1- Le plus petite constante M_p dans (2.1) pour un p donné, et un espace de $Banach$ notée par $M_p\left(X\right)$.

2- Si X ne posséde pas la propriété $U.M.D-p$, Alors; $M_p\left(X\right) = \infty$.

3- $M_p\left(X\right)$ est indépendante de n, c'est -à-dire la propriété $U.M.D-p$ est vrais si l'inégalité (2.1) satisfaite pour tout n.

4- le plus petite constante pour que (2.1) soit vrais pour n fixé est notée par $M_p^n\left(X\right)$, alors on a:$M_p^n\left(X\right) \nearrow M_p$,lorsque $n \to \infty$.

Lemme 2.1. Les constantes $M_p^n\left(X\right)$ sont finies de plus on a:

$$M_p^n\left(X\right) \quad \leq 2n.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k \delta f_k\right|_{L^P(\Omega,X)} &= \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\left(f_k - f_{k-1}\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} \\
&\leq \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k f_k\right|_{L^P(\Omega,X)} + \left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k f_{k-1}\right|_{L^P(\Omega,X)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|f_k\right|_{L^P(\Omega,X)} + \sum_{k=1}^{n}\left|f_{k-1}\right|_{L^P(\Omega,X)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left|E\left(f_n/F_k\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} + \sum_{k=1}^{n}\left|E\left(f_n/F_{k-1}\right)\right|_{L^P(\Omega,X)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|f_n\right|_{L^P(\Omega,X)} + \sum_{k=1}^{n}\left|f_n\right|_{L^P(\Omega,X)} \\
&= 2n\left|f_n\right|_{L^P(\Omega,X)}
\end{aligned}$$

Remark 11 ***Proof.***

D'ou

$$M_p^n(X) \quad \leq 2n.$$

Exemple 2.1 *Chaque espace de Hilbert admet la propriété* $U.M.D-p$, *pour* $p=2$. *Soit* H *un espace de Hilbert donc tout les martingales différences sont orthogonales. Alors; d 'apés le théoreme de phythagor on a:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\delta f_k\right|_{L^2(\Omega,H)} \qquad \sum_{k=1}^{n}|\delta f_k|_H^2$$
$$= \left|\sum_{k=1}^{n}\delta f_k\right|_{L^2(\Omega,H)}.$$

- *D'ou* H *posséde la propriété* $U.M.D-p$ *de plus on a :*

$$M_2(X) \quad = 1.$$

2-2 La Transformation Martingale

Définition 2.2 *Soit* $f=(f_k)_{k=1}^{\infty}\in L^1(\Omega;X)^{\mathbb{Z}_+}$ *une martingale adaptée à* $(F_k)_{k=1}^{\infty}$. *Une suite:* $\vartheta=(\vartheta_k)_{k=1}^{\infty}\in\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+;L^{\infty}(\Omega))$, *est dite* $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ *-prédictable si chaque* ϑ_k *est* F_{k-1} *mesurable* (*et* ϑ_1*est* F_1*mesurable*). *Pour de tels* f *et* ϑ, *on définit la transformation martingale* $(f*\vartheta)_{k=1}^{\infty}\in L^1(\Omega;X)^{\mathbb{Z}_+}$ *par:*

$$(f*\vartheta)_k = \quad \sum_{\imath=1}^{k}\vartheta_\imath\delta f_\imath.$$

$\surd$ *On dit que la transformation martingale est uniformement bornée, si:*

$$|(f*\vartheta)_k|_{L^p(\Omega;X)} \quad \leq M \quad |\vartheta|_{\ell^{\infty}(\mathbb{Z}_+;L^{\infty}(\Omega))} \quad |f_k|_{L^p(\Omega;X)}$$

■

Remarque 2.3 La tansformation martingale $f * \vartheta = (f * \vartheta)_{k\,=\,1}^{\infty} \in L^1(\Omega; X)^{\mathbb{Z}_+}$ définit aussi une martingale adaptée à $(F_k)_{k=1}^{\infty}$.

En effet

$$\begin{aligned} E\left(\delta\left(f*\vartheta\right)_k/F_{k-1}\right) = & \; E\left(\left(\sum_{\imath=1}^{k}\vartheta_\imath\delta f_\imath - \sum_{\imath=1}^{k-1}\vartheta_\imath\delta f_\imath\right)/F_{k-1}\right) \\ = & \; E\left(\vartheta_k\delta f_k/F_{k-1}\right) \\ = & \; \vartheta_k E\left(\delta f_k/F_{k-1}\right) \\ = & \; 0. \end{aligned}$$

-Pour tout $\vartheta \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_+; L^\infty(\Omega))$, cette condition est appelée la proprieté $MT-p$; ou la transformation martingale d'ordre p.

Remarque 2.4 La proprieté $U.M.D-p$ est une cas spéciale de la proprieté $MT-p$;avec $\vartheta = \xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \{-1; 1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

$\checkmark$ Les conditions dans les définitions de base $U.M.D-p$, et $MT-p$ sont satisfaites pour des martingales quelconques sur des espaces de probabilités arbitraires.

Dans la siute on va étudier la relation entre la propriété $U.M.D-p$ ou $MT-p$ et la siute de sous -$\sigma-$algèbre qui adaptée à la martingale, pour cela on rappeller qu 'une algèbre finie est une $\sigma-$algèbre.

Lemme 2.2 la propriété $U.M.D-p$ ou $MT-p$ est satisfait si elle vrais pour tout martingale adaptée à une sous algèbre finie.

Pour continuer l'étude on va donner quelque notions concernant les algèbres finies.

Définition 2.3 Une base d'une algèbre finie $F \subset \Omega$ sur Ω est une partition de Ω en des ensembles disjionts $F_\imath \in F$; $\imath = 1, ..., m$ telle que chaque $\mathcal{F} \in F$ est de la forme: $\mathcal{F} = \underset{\imath \in I}{\cup} F_\imath$ pour certain $I \subset \{1.....n\}$. et on note par bsF: les éléments de la base $F_\imath \in F$ sont dite les atomes de F.

Remark 12 ***Remark 13***

Remarque 2.5 *Il facile de voir que la base d'une algèbre est finié est unique.*

Définition 2.4 *Une siute croissante d'algèbre finies $(\eta_k)_{k=1}^n$ est dite systeme de $Haar$ si η_k admet une base constitué de $(k+1)$ ensemble de probabilité strictement positive.*

Lemme 2.3 *Dans la définition des espaces $U.M.D-p$ ou $M\ T-p$ il suffit de considérer chaque martingale adaptée à un systeme de $Haar$.*

Maintenant on s'intéresse à la relation entre la propriété $U.M.D-p$ et $M\ T-p$; plus on va démonttrer l équivalente entre les propriétés $U.M.D-p$ et $MT-p$.

Proposition 2.1 les propriétés $U.M.D-p$ et $MT-p$ sont equivalentes avec le meme constante.

Preuve. d'aprés le lemme précédent il suffit démontrer le lemme pour les martingales adaptées par des systemes de $Haar$.

On a deja voire que La proprieté $U.M.D-p$ est une cas spéciale de la proprieté $MT-p$; donc ilsuffit démontrer que La proprieté $U.M.D-p$ implique la proprieté $MT-p$.

Soit $f=(f_k)_{k=1}^n \in L^p(\Omega;X)$ une martingale adapteé à un ysteme de $Haar$ $(\eta_k)_{k=1}^n$, et soit $\vartheta=(\vartheta_k)_{k=1}^n$ une siute prédictable, alors $\vartheta_k\delta f_k=\lambda_k\delta f_k$, pour un certain $\lambda_k\in\mathbb{R}$; telque: $|\lambda_k|\leq|\vartheta_k|_{L^\infty(\Omega)}\leq 1$,

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^n \vartheta_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} &= \left|\sum_{k=1}^n \lambda_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq \max_{\xi\in\{-1;1\}^n}\left|\sum_{k=1}^n \xi_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)} \\
&\leq M_p(X)\left|\sum_{k=1}^n \vartheta_k\delta f_k\right|_{L^p(\Omega;X)}.
\end{aligned}$$

D'ou les propriétés $U.M.D-p$ et $M\ T-p$ sont equivalentes.

2-3 La propriété faible U.M.D-p

-On peut utiliser la notion de transformée martingale qui peut e^tre donnée par la formule siuvante:

$$|(\xi*f)_n|_{L^p(\Omega;X)} \leq M_p(X)\,|f_n|_{L^p(\Omega;X)}.$$

ce qui implique que

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}|(\xi*f)_n|_{L^p(\Omega;X)} \leq M_p(X)\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|f_n|_{L^p(\Omega;X)}.$$

D' ou

$$|\xi * f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+;L^p(\Omega))} \leq M_p(X)\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+;L^p(\Omega))}$$

Inversement, si la derniere inégalité est vraie pour chaque martingale $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, alors elle est vraie en particulier pour $(f_k)_{k=1}^{n}$.

Et comme

$$|f_k|_{L^p(\Omega;X)} = |E(f_n/F_k)|_{L^p(\Omega;X)} \leq |f_n|_{L^p(\Omega;X)} \quad , k \leq n$$

Alors d'ici résulte la premiére inégalité.

Maintenant on va donner une formulation du type faible dans L^1.

Définition 2.5 On dit qu'un espace de *Banach* X possède la propriété $faible - U.M.D$ si l'inégalité siuvante:

$$\lambda P\left((\xi * f)^* > \lambda\right) \leq M_j\,|f|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_+;L^1(\Omega))}$$

est satisfait pour une certaine constante M_j, pour toute martingale $f \in L^1(\Omega;X)^{\mathbb{Z}_+}$, et toute siute $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}_+} \in \{-1;1\}^{\mathbb{Z}_+}$.

De meme maniére similaire on définit la propriété $faible - MT$; au lieu de ξ on prend la siute prédictable $\vartheta = (\vartheta_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$.

Proposition 2.2 Pour toute $p \in (1;\infty)$ la a propriété $MT - p$ implique la propriété $faible - MT$.

Théoreme 2.1 (*Burkholder* 1981) Dans un espace de *Banach* X les propriétés siuvates sont equivalentes:

1- X posséde la propriété $U.M.D-p$ pour toute $p\in(1;\infty)$.

2- X posséde la propriété $MT-p$ pour toute $p\in(1;\infty)$.

3- X posséde la propriété $U.M.D-p$ pour tcertaine $p\in(1;\infty)$.

4- X posséde la propriété $MT-p$ pour tcertaine $p\in(1;\infty)$.

5- X posséde la propriété $faible-U.M.D$.

6- X posséde la propriété $faible-MT$.

Preuve. d'apres la proposition 1, les propriété (1) et (2) sont equivalente

$(1)\iff(2)$.

$(1)\Longrightarrow(3)$.

Proof. $(2)\Longrightarrow(4)$.

$(2)\Longrightarrow(6)$ (d' apres la proposiition 2). ■

$(5)\Longrightarrow(1)$ (voir la siute).

Définition 2.6 un espace X possédant une ou toutes les propriétés du théoreme précedant est appelé espace $U.M.D$.

Proposition 2.3 Si un espace X posséde la propriétés $faible-U.M.D$ .Alors, il posséde la propriété $U.M.D-p$ pour toute $p\in(1;\infty)$.

Exemple 2.2 Chaque espce de $Hilbert$ est un espace $U.M.D$; par exemple $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ sont des espaces $U.M.D$

CHAPITRE 3

Régularité Maximale

Dans ce chapitre on prend l'étude d'une équation différentielle opérationnnelle sur $[0;1]$à coéffint opératoriele non borné dans un espace de Banach du type U.M.D.

La méthode détude basée sur le thoéréme de Weiss sur les multiplicateurs.

3-1 Position de Probleme :

On concéderer la probleme no locale à valeur sur $[0;1]$ pour équation différentielle opérationnnelle dégénèrer sur un espac+e de Banach E :

$$L_{\lambda}u = -a(x)u^{[2]}(x) + A_{\lambda}(x)\,u(x) + B_1(x)\,u^{[1]}(x) + B_2(x)\,u(x) = f. \tag{3.1}$$

$$L_k u = \alpha_k u^{[m_k]}(0) + \beta_k u^{[m_k]}(1) + \sum_{j=1}^{N_k} \delta_{kj} u^{[m_k]}(x_{kj}) = 0. \tag{3.2}$$

Telle que :

- ► $u^{[i]}(x) = \left(x^{\gamma}\frac{d}{dx}\right)^i u(x)\,;\; 0 \leq \gamma < 1.$
- ► $m_k \in \{0;1\}\,, \alpha_k, \beta_k, \delta_{kj}$ sont des nombres complexe et $x_{kj} \in [0;1]\,.$
- ► A etB_k généralement sont des opérateurs non bornée on E et $A_{\lambda} = A + \lambda I.$

Définition 3-1 Soit u une fonction a partir de l'espace:

$$W_{p;\gamma}^{[2]} = W_{p;\gamma}^{[2]}\left(0,1;E\left(A\right),E\right) = \left\{u; u \in L_p\left(0,1;E\left(A\right)\right), u^{[2]} \in L_p\left(0,1;E\right)\right\}$$

muni de la norme

$$|u|_{W_{p;\gamma}^{[2]}} = |Au|_{L_{p;\gamma}(0,1;E)} + \left|u^{[2]}\right|_{L_p(0,1;E)} < \infty.$$

$\lozenge$On dit que cette fonction u est une solution de l'équation $(3;1)$ c'est il satisfais l'équation (3.1) sur $[0,1]$.

Soit l'espace $W_{p;\gamma}^{2} = W_{p;\gamma}^{2}\left(0,1;E\left(A\right),E\right)$ qui définit par:

$$W_{p;\gamma}^{2} = \left\{u; u \in L_p\left(0,1;E\left(A\right)\right), u^{(2)} \in L_p\left(0,1;E\right)\right\}$$

de la norme:

$$|u|_{W_{p;\gamma}^{2}} = |Au|_{L_{p;\gamma}(0,1;E)} + \left|u^{(2)}\right|_{L_p(0,1;E)} < \infty.$$

Remarque :3-1 On pose le changement siuvante :

$$y = \left(1-\gamma\right)^{-1} x^{1-\gamma}. \tag{3.3}$$

Résultat :3-1 D'aprés le changement précedent on a:

(i) L'espace $L_p\left(0,1;E\right)$est isomorphisme avec l'espace$L_{p;\gamma_1}\left(0,1;E\right)$.

(ii) L'espace $W_p^{[2]}\left(0,1;E\left(A\right),E\right)$est isomorphisme avec l'espace$W_{p;\gamma_1}^{2}\left(0,1;E\left(A\right),E\right)$.

Preuve. Pour montrer les résultats précedent on va calculer premiérement

: x et dx.

on a:$y = (1-\gamma)^{-1} x^{1-\gamma}$

$$\Rightarrow (1-\gamma) y = x^{1-\gamma}.$$

$$\log (1-\gamma) y = (1-\gamma) \log x$$

$$(1-\gamma)^{-1} \log (1-\gamma) y = \log x$$

$$\log [(1-\gamma) y]^{(1-\gamma)^{-1}} = \log x$$

D'ou

$$x = [(1-\gamma) y]^{(1-\gamma)^{-1}}$$

Donc

$$dx = (1-\gamma)^{-1} (1-\gamma)^{(1-\gamma)^{-1}} y^{(1-\gamma)^{-1}-1} dy.$$

$$dx = [(1-\gamma) y]^{(1-\gamma)^{-1}-1} dy.$$

$$dx = [(1-\gamma) y]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} dy.$$

Ainsi

$$dx = x^{\gamma} dy.$$

Alaide de la changement (3.3)on a:

$$\begin{cases} y = 0 & ; si \ x = 0 \\ y = (1-\gamma)^{-1} = b & ; si \ x = 1 \end{cases} \text{;et on prend } \gamma_1 (y) = x^{\gamma}.$$

(i) Soit$f \in L_p (0, 1; E)$

donc

$$\|f\|_{L_p(0,1;E)} = \left(\int_0^1 \|f(x)\|_E^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$$\|f\|_{L_p(0,1;E)} = \left(\int_0^b \|f(y)\|_E^p \gamma_1(y) \, dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$= \|f\|_{L_{p;\gamma_1}(0,1;E)} .$$

$\Longrightarrow \; f \in L_{p;\gamma_1}(0,1;E)$

Ainsi $L_p(0,1;E) \subset L_{p;\gamma_1}(0,1;E)$.

Inversement:soit $f \in L_{p;\gamma_1}(0,1;E)$

donc

$$\|f\|_{L_{p;\gamma_1}(0,1;E)} = \left(\int_0^b \|f(y)\|_E^p \gamma_1(y) \, dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$\|f\|_{L_{p;\gamma_1}(0,1;E)} = \left(\int_0^1 \|f(x)\|_E^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$$= \|f\|_{L_p(0,1;E)}$$

D'ou $f \in L_p(0,1;E)$

Ainsi $L_{p;\gamma_1}(0,1;E) \subset L_p(0,1;E)$.

Ce qui impàlique $L_{p;\gamma_1}(0,1;E) = L_p(0,1;E)$.

(ii) Pour montrer que l'espace $W_p^{[2]}(0,1;E(A),E)$ est isomorphisme avec l'espace$W_{p;\gamma_1}^2(0,1;E(A),E)$, on va calculer: $u^{[2]}(x)$.

On a $u^{[2]}(x) = \left(x^{\gamma}\frac{d}{dx}\right)^2 u(x) = \left(x^{\gamma}\frac{d}{x^{\gamma}dy}\right)^2 u(y) = \left(\frac{d}{dy}\right)^2 u(y)$.

Dou

$$u^{[2]}(x) = u^{(2)}(y)$$

Maintenent soit $u \in W_p^{[2]}(0,1;E(A),E)$

Donc

$$\begin{cases} u^{[2]} \in L_p(0,1;E) \\ u \in L_p(0,1;E(A)) \\ |u|_{W_p^{[2]}} = |Au|_{L_p(0,1;E)} + \left|u^{[2]}\right|_{L_p(0,1;E)} < \infty \end{cases}$$

Comme l'espace$L_p(0,1;E)$est isomorphisme avec l'espace$L_{p;\gamma_1}(0,1;E)$;on trouve:

$$\begin{cases} u^{[2]}(x) = u^{(2)}(y) \in L_{p;\gamma_1}(0,b;E) \\ u \in L_{p;\gamma_1}(0,b;E(A)) \\ |u|_{W_p^{[2]}} = |Au(y)|_{L_{p;\gamma_1}(0,b;E)} + \left|u^{[2]}(y)\right|_{L_{p;\gamma_1}(0,b;E)} = |u|_{W^2_{p;\gamma_1}} < \infty \end{cases}$$

Ce qui implique $u \in W^2_{p;\gamma_1}(0,b;E(A),E)$.

Ainsi

$$W_p^{[2]}(0,1;E(A),E) \subset W^2_{p;\gamma_1}(0,b;E(A),E).$$

Inversement: soit $u \in W^2_{p;\gamma_1}(0,b;E(A),E)$

Donc

$$\begin{cases} u^{(2)} \in L_{p;\gamma_1}(0,b;E) \\ u \in L_{p;\gamma_1}(0,b;E) \\ |u|_{W^2_{p;\gamma_1}} = |Au|_{L_{p;\gamma_1}(0,b;E)} + \left|u^{(2)}\right|_{L_{p;\gamma_1}(0,b;E)} < \infty. \end{cases}$$

Comme l'espace$L_p(0,1;E)$est isomorphisme avec l'espace$L_{p;\gamma_1}(0,1;E)$;on trouve:

$$\begin{cases} u^{(2)}(y) = u^{[2]}(x) \in L_p(0,1;E) \\ u(y) = u(y) \in L_p(0,1;E(A)) \\ |u|_{W^2_{p;\gamma_1}} = |Au(x)|_{L_p(0,1;E)} + \left|u^{[2]}(x)\right|_{L_p(0,1;E)} = |u|_{W^{[2]}_p} < \infty. \end{cases}$$

Ce qui implique $u \in W^{[2]}_p(0,1;E(A),E)$.

D'ou

$$W^2_{p;\gamma_1}(0,b;E(A),E) \subset W^{[2]}_p(0,1;E(A),E).$$

Ainsi l'espace $W^{[2]}_p(0,1;E(A),E)$est isomorphisme avec l'espace$W^2_{p;\gamma_1}(0,1;E(A),E)$.

Le probleme (3.1) - (3.2) on peu transformé à la probleme siuvante :

$$L_\lambda u = -a(y)u^{(2)}(y) + A_\lambda(y)u(y) + B_1(y)u^{(1)}(y) + B_2(y)u(y) = f. \tag{3.4}$$

$$L_k u = \alpha_k u^{(m_k)}(0) + \beta_k u^{(m_k)}(b) + \sum_{j=1}^{N_k} \delta_{kj} u^{(m_k)}(y_{kj}) = 0 \quad , k = 1;2, y_{kj} \in [0;b]. \tag{3.5}$$

Pour montrer cette transformation il faut calculer :

$u^{[1]}(x); u^{[2]}(x); u^{[m_k]}(0); u^{[m_k]}(1)$.

On a: $u^{[i]}(x) = \left(x^\gamma \frac{d}{dx}\right)^i u(x)$

Donc

$$\blacktriangledown \quad u^{[1]}(x) = \left(x^{\gamma}\tfrac{d}{dx}\right)^{1} u(x) = \left(x^{\gamma}\tfrac{d}{x^{\gamma}dy}\right)^{1} u(y) = \left(\tfrac{d}{dy}\right)^{1} u(y).$$

$$u^{[1]}(x) = u^{(1)}(y).$$

$$\blacktriangledown \quad u^{[2]}(x) = \left(x^{\gamma}\tfrac{d}{dx}\right)^{2} u(x) = \left(x^{\gamma}\tfrac{d}{x^{\gamma}dy}\right)^{2} u(y) = \left(\tfrac{d}{dy}\right)^{2} u(y).$$

$$u^{[2]}(x) = u^{(2)}(y).$$

Alaide de ces resultats; on trouve:

$$u^{[m_k]}(0) = u^{(m_k)}(0)\,\text{et}\; u^{[m_k]}(1) = u^{(m_k)}(b).$$

Maintenent le probleme (3.1) - (3.2) :

$$L_{\lambda}u = -a(x)u^{[2]}(x) + A_{\lambda}(x)\,u(x) + B_1(x)\,u^{[1]}(x) + B_2(x)\,u(x) = f. \tag{3.1}$$

$$L_k u = \alpha_k u^{[m_k]}(0) + \beta_k u^{[m_k]}(1) + \sum_{j=1}^{N_k} \delta_{kj} u^{[m_k]}(x_{kj}) = 0. \tag{3.2}$$

Il devient

$$L_{\lambda}u = -a(y)u^{(2)}(y) + A_{\lambda}(y)\,u(y) + B_1(y)\,u^{(1)}(y) + B_2(y)\,u(y) = f. \tag{3.4}$$

$$L_k u = \alpha_k u^{(m_k)}(0) + \beta_k u^{(m_k)}(b) + \sum_{j=1}^{N_k} \delta_{kj} u^{(m_k)}(y_{kj}) = 0 \quad , k = 1; 2, y_{kj} \in [0; b]. \tag{3.5}$$

3-2 Equation Homogéne

On considére le probleme no locale avec des coéfficients constantes sur l'espace$L_{p;\gamma_1}(0,1;E)$:

$$\begin{aligned} L_0 u = & \quad -a u^{(2)}(y) + A_\lambda u(y) & = 0. \\ L_k u = & \quad \alpha_k u^{(m_k)}(0) + \beta_k u^{(m_k)}(b) + \sum_{j=1}^{N_k} \delta_{kj} u^{(m_k)}(y_{kj}) & = f_k. \end{aligned}$$

$$k = 1; 2, y_{kj} \in [0; b] \tag{3.6}$$

Telle que :

- ► a est un nombre réal, λ un nombre complexe.
- ► $f_k \in E_k = (E(A); E)_{\theta_k;p}$; ou $\theta_k = \frac{m_k}{2} + \frac{1}{2}$ et E_k sont des 'espaces d'interpolation.

Condition 3-1

(i) A un opérateur positife sur l'espace E de Banach pour$\varphi \in (0;\pi]$et $a > 0$.

(ii) $\alpha_k, \beta_k, \delta_{kj}$; sont des nombres complexes; $\theta_k = \frac{m_k}{2} + \frac{1}{p2}$.

(iii) $\theta = (-1)^{m_1} \alpha_1 \beta_2 - (-1)^{m_2} \alpha_2 \beta_1 \neq 0; p \in (1;\infty)$

Théoreme 3-1 Soit le condition (3.1) est satisfaite.Alors, pour $f_k \in E_k$et $|\arg\lambda| \leq \pi - \varphi$ et $|\lambda|$ grand suffisante le probleme (3.6) admet une solution unique $u \in W_p^2(0,b;E(A),E)$et on a:

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| u^{(i)} \right\|_p + \|Au\|_p \leq \quad M \sum_{k=1}^{2} \left[\|f_k\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_E \right]. \tag{3.7}$$

La démonstration de ce théoreme est basée sur les notions, et les resultats siuvants:

Définition 3-1 Soit$E$ un espace de Banach,une famille $T(t)$ d'opérateurs linéare bornée de E dans $E; 0 \leq t < \infty$; est dite semi groupe d'opérateurs linéare bornée si:

(i) $T(0) = I$ $(I$ est l'opérateur d'identité en $E)$.

(ii) $T(t+s) = T(t) + T(s)$.

$\surd$ Un semi groupe d'opérateurs linéare bornée $T(t)$;est uniformement continu si:

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

$\surd$ Un semi groupe d'opérateurs linéare bornée $T(t); 0 \leq t < \infty$, est fortement continu si:

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x; \forall x \in E.$$

Définition 3-2 Soit A un'opérateur linéare définit par:

$$D(A) = \left\{ x \in E; \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

et

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^{+}T(t)x}{dt} \quad \text{pour} x \in D(A).$$

On dit que A est un générateur infitésimale de la semi groupe $T(t)$.

Définition 3-3 Un opérateur linéare est dite opérateur positife sur un espace de Banach E,si :

(i) $D(A)$ dense en E c-à-d $\overline{D(A)} = E$.

(ii) $\left\| (A-\lambda I)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq M(1+|\lambda|)^{-1}$.

telle que $\lambda \in S_{\varphi} = \{\lambda, \lambda \in \mathbb{C} \text{ et } |\arg\lambda - \pi| \leq \pi - \varphi\} \cup \{0\}, \varphi \in (0;\pi]$ et M un constante positife

$\surd$ Il existe la piusanse fractionnele A^md'opérateur positife A;soit l'espace$D(A^m)$ noté par $E(A^m)$ avec la norme:

$$\|u\|_{E(A^m)} = (\|u\|^p + \|A^m u\|^p)^{\frac{1}{p}}; 1 \leq p < \infty; -\infty < m < \infty.$$

Remarque 3-1: Dans les espaces de Hilbert tout les opérateur positife sont R-bornée.

Définition 3-4 Un opérateur positife A est dite R-positife sur l'espace de Banach E si:

il existe $\varphi \in (0;\pi]$; telle que l'ensemble$\left\{(1+|\lambda|)(A-\lambda I)^{-1}; \lambda \in S_{\varphi}\right\}$est R-bornée.

Théoreme 3-2 Soit E un espace de Banach, A un opérateur positife sur l'espace E.soit$m \in \mathbb{R}^+, 1 \leq p < \infty; \frac{1}{2p} < \alpha < m + \frac{1}{2p}$et $0 \leq \gamma < 2p\alpha - 1$.

Alors, pour $\lambda \in S_{\varphi}$L'opérateur $-A_{\lambda}^{\frac{1}{2}}$ est un générateur de la semi groupe$e^{-xA_{\lambda}^{\frac{1}{2}}}$qu'est holomorphique pour $x > 0$, et fortement continu pour $x \geq 0$.De plus il existe un constante $C >$

0,telle que $\forall u \in (E, E(A^m))_{\frac{\alpha}{m}-\frac{1+\gamma}{2mp};p}$.

$$\int_0^\infty \left\| A_\lambda^\alpha e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}} u \right\|_E^p x^\gamma dx \leq \quad C\left(\|u\|^p_{(E,E(A^m))_{\frac{\alpha}{m}-\frac{1+\gamma}{2mp};p}} + |\lambda|^{-p\alpha+\frac{1+\gamma}{2}} \|u\|_E^p \right).$$

Démonstration du théoreme 3-1

On a: $L_0 u = -au^{(2)}(y) + A_\lambda u(y) = 0.$

Donc

$$au^{(2)}(y) = A_\lambda u(y).$$

$$\frac{u^{(2)}(y)}{u(y)} = \frac{A_\lambda}{a}.$$

Ce qui implique

$$u(y) = Ce^{-yA_\lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

mais

$$u(y) = [u(b) + u(0)]\, e^{-yA_\lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

on prend: $u(0) = g_1; u(b) = e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2;$ telle que $g_k \in E_k = (E; E(A))_{\frac{1}{2p(1+\gamma)};p}; k = 1; 2.$

Donc$u(y) = \left[g_1 + g_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} \right] e^{-yA_\lambda^{\frac{1}{2}}}$

D'ou $\quad u(y) = \quad e^{-yA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-(b-y)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2.$

Pour remplacer la solution$(3; 8)$au probleme $(3; 6)$;on doit calculer:

$u^{(m_k)}(y); u^{(m_k)}(0); u^{(m_k)}(b); u^{(m_k)}(y_{kj}).$

- $u^{(m_k)}(y) = (-1)^{m_k} A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-yA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-(b-y)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2.$
- $u^{(m_k)}(0) = (-1)^{m_k} A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} g_1 + A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2.$

► $u^{(m_k)}(b) = (-1)^{m_k} A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} g_2.$

► $u^{(m_k)}(y_{kj}) = (-1)^{m_k} A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-y_{kj}A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-\left(b-y_{kj}\right)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2.$

Maintenant on remplacer ces resultats au léquation sivante:

1. On trouve:

$$L_k u = \alpha_k \left[(-1)^{m_k} A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} g_1 + A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\right] + \beta_k \left[(-1)^{m_k} A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} g_2\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{N_k} \delta_{kj} \left[(-1)^{m_k} A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-y_{kj}A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + A_\lambda^{\frac{m_k}{2}} e^{-\left(b-y_{kj}\right)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\right] = f_k$$

$$k = 1; 2, y_{kj} \in [0; b]. \tag{3.9}$$

Ainsi $(3;9)$est un systeme des'équations linéare algébrique c-à-dire$(3;9)$est un matrice:

Pour: $k = 1; m_1 = 0$, on :

$$L_1 u = \alpha_1 \left[g_1 + e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\right] + \beta_1 \left[e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + g_2\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} \left[e^{-y_{1j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_1 + e^{-\left(b-y_{kj}\right)A_\lambda^{\frac{1}{2}}} g_2\right] = f_1$$

donc

$$L_1 u = \left[\alpha_1 + \beta_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-y_{1j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right] g_1 +$$

$$\left[\alpha_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_1 + \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-(b-y_{1j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right] g_2 = f_1$$

Pour: $k = 2; m_2 = 1$, on a:

$$L_2u = \alpha_2\left[-A_\lambda^{\frac{1}{2}}g_1 + A_\lambda^{\frac{1}{2}}e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}}g_2\right] + \beta_2\left[-A_\lambda^{\frac{1}{2}}e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}}g_1 + A_\lambda^{\frac{1}{2}}g_2\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}\left[-A_\lambda^{\frac{1}{2}}e^{-y_{2j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}g_1 + A_\lambda^{\frac{1}{2}}e^{-(b-y_{2j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}}g_2\right] = f_2$$

donc

$$L_2u = -\left[\alpha_2 + \beta_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}e^{-y_{2j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right]A_\lambda^{\frac{1}{2}}g_1 +$$
$$\left[\alpha_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_2 + \sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}e^{-(b-y_{2j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right]A_\lambda^{\frac{1}{2}}g_2 = f_2$$

Maintenant on peut écrit (3.9) comme siute:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N_1}\delta_{1j}e^{-y_{1j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}} & \alpha_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_1 + \sum_{j=1}^{N_1}\delta_{1j}e^{-(b-y_{1j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} \\ -\left[\alpha_2 + \beta_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}e^{-y_{2j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right] & \alpha_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_2 + \sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}e^{-(b-y_{2j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Soit $D(\lambda)$ le déterminant du système (3.9):

$$D(\lambda) = \left[\alpha_1 + \beta_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N_1}\delta_{1j}e^{-y_{1j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right]\left[\alpha_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_2 + \sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}e^{-(b-y_{2j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$+\left[\alpha_2 + \beta_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}e^{-y_{2j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right]\left[\alpha_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_1 + \sum_{j=1}^{N_1}\delta_{1j}e^{-(b-y_{1j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$D(\lambda) = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\alpha_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \alpha_1\sum_{j=1}^{N_2}\delta_{2j}e^{-(b-y_{2j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_1\alpha_2 e^{-2bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} +$$
$$\beta_1\beta_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\beta_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N_2} \delta_{2j} e^{-(b-y_{2j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \alpha_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-y_{1j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_2 \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-y_{1j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-y_{1j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N_2} \delta_{2j} e^{-(b-y_{2j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \alpha_2\alpha_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \alpha_2 \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-(b-y_{1j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} +$$

$$\beta_2\alpha_1 e^{-2bA_\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\beta_1\beta_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \beta_2 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-(b-y_{1j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \alpha_1 e^{-bA_\lambda^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N_2} \delta_{2j} e^{-y_{2j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\beta_1 \sum_{j=1}^{N_2} \delta_{2j} e^{-y_{2j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}} + \sum_{j=1}^{N_1} \delta_{1j} e^{-(b-y_{1j})A_\lambda^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=1}^{N_2} \delta_{2j} e^{-y_{2j}A_\lambda^{\frac{1}{2}}}.$$

D'aprés le condition (3-1) on a: $\theta = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \neq 0$.

Donc: $D(\lambda) = \theta + D_1(\lambda)$.

$D(\lambda) = \theta \left[I + \theta^{-1} D_1(\lambda) \right]$

On a$\|D_1(\lambda)\| \to 0$ l'orsque $|\lambda| \to \infty$.

Ainsi $\left\| \theta^{-1} D_1(\lambda) \right\| = \frac{\|D_1(\lambda)\|}{\theta}$ est plus petite pour$|\lambda| \to \infty$.

Ce qui implique $\left\| \theta^{-1} D_1(\lambda) \right\| \leq 1$.

D'ou $\|D(\lambda)\| = \left\| \theta \left[I + \theta^{-1} D_1(\lambda) \right] \right\| \leq \theta + 1$ pour$|\lambda| \to \infty$.

Alors par la condition $\theta = (-1)^{m_1} \alpha_1\beta_2 - (-1)^{m_2} \alpha_2\beta_1 \neq 0$et pour $|\lambda|$ grand suffisante $[D(\lambda)]^{-1} = [\theta + D_1(\lambda)]^{-1}$ existe et uniformement bornée.

Donc le système (3.9) admet un solution unique pour $|\lambda|$ grand suffisante et $|\arg\lambda| \leq \pi - \varphi$.

Pour trouver l'estimation (3.7)

$|\lambda| \|u\|_p + |\lambda|^{\frac{1}{2}} \left\| u^{(1)} \right\|_p + \left\| u^{(2)} \right\|_p + \|Au\|_p \leq$

$$M\left[\|f_1\|_{E_1}+|\lambda|^{1-\theta_1}\|f_1\|_E+\|f_2\|_{E_2}+|\lambda|^{1-\theta_2}\|f_2\|_E\right]$$

on appliquer le théoreme (3.2).

On a:

$$\int_0^\infty \left\|A_\lambda^\alpha e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}}u\right\|_E^p x^\gamma dx \leq \;\; C\left(\|u\|^p_{(E,E(A^m))_{\frac{\alpha}{m}-\frac{1+\gamma}{2mp};p}}+|\lambda|^{-p\alpha+\frac{1+\gamma}{2}}\|u\|_E^p\right).$$

On prend $m=1;\gamma=0$,donc la relation présedente deviént:

$$\int_0^\infty \left\|A_\lambda^\alpha e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}}u\right\|_E^p dx \leq \;\; C\left(\|u\|^p_{(E,E(A))_{\alpha-\frac{1}{2p};p}}+|\lambda|^{-p\alpha+\frac{1}{2}}\|u\|_E^p\right).$$

$\Rightarrow$

$$\left(\int_0^\infty \left\|A_\lambda^\alpha e^{-xA_\lambda^{\frac{1}{2}}}u\right\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} dx \leq \;\; C\left(\|u\|^p_{(E,E(A))_{\alpha-\frac{1}{2p};p}}+|\lambda|^{-p\alpha+\frac{1}{2}}\|u\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'ou

$$\|f\|_p \leq C\left(\|f\|^p_{(E,E(A))_{\alpha-\frac{1}{2p};p}}+|\lambda|^{-p\alpha+\frac{1}{2}}\|f\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$C\left(\|f\|_{(E,E(A))_{\alpha-\frac{1}{2p};p}}+|\lambda|^{-\alpha+\frac{1}{2p}}\|f\|_E\right)$$

Soit $f_1\in E_1=E_{\theta_1}$=$(E,E\left(A\right))_{\alpha_1-\frac{1}{2p};p}$et $f_2\in E_2=E_{\theta_2}=(E,E\left(A\right))_{\alpha_2-\frac{1}{2p};p}$.

Donc

$$\|f_1\|_p \leq \;\; C\left(\|f_1\|_{(E,E(A))_{\alpha_1-\frac{1}{2p};p}}+|\lambda|^{-\alpha_1+\frac{1}{2p}}\|f_1\|_E\right)$$

et

$$\|f_2\|_p \leq \;\; C\left(\|f_2\|_{(E,E(A))_{\alpha_2-\frac{1}{2p};p}}+|\lambda|^{-\alpha_2+\frac{1}{2p}}\|f_2\|_E\right)$$

On doit chercher $\alpha_1;\alpha_2$

On a déja: $\theta_k=\frac{m_k}{2}+\frac{1}{2}$

ainsi

$$\left\{\begin{array}{llll}\theta_1 = & \frac{1}{2p} = & \alpha_1 - \frac{1}{2p} \\ \theta_2 = & \frac{1}{2}+\frac{1}{2p} = & \alpha_2 - \frac{1}{2p}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\alpha_1 = & \frac{1}{p} \\ \alpha_2 = & \frac{1}{2}+\frac{1}{p}\end{array}\right.$$

D'ou $\|u\|_p \leq C\|f_1\|_p \leq C\left(\|f_1\|_{E_1} + |\lambda|^{-\alpha_1+\frac{1}{2p}}\|f_1\|_E\right)$

$\|u\|_p \leq C\left(\|f_1\|_{E_1} + |\lambda|^{-\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}}\|f_1\|_E\right) = C\left(\|f_1\|_{E_1} + |\lambda|^{-\frac{1}{2p}}\|f_1\|_E\right)$

$\Rightarrow$

$$|\lambda|\,\|u\|_p \leq \ C_1\left(\|f_1\|_{E_1} + |\lambda|^{1-\frac{1}{2p}}\|f_1\|_E\right)$$

Et$\left\|u^{(1)}\right\|_p \leq C\|f_2\|_p \leq C\left(\|f_2\|_{(E,E(A))_{\alpha_2-\frac{1}{2p};p}} + |\lambda|^{-\alpha_2+\frac{1}{2p}}\|f_2\|_E\right)$

$\left\|u^{(1)}\right\|_p \leq C\left(\|f_2\|_{E_2} + |\lambda|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}}\|f_2\|_E\right) = C\left(\|f_2\|_{E_2} + |\lambda|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_2\|_E\right)$

$|\lambda|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{(1)}\right\|_p \leq C_2\left(\|f_2\|_{E_2} + |\lambda|^{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_2\|_E\right)$

$\Rightarrow$

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{(1)}\right\|_p \leq \ C_2\left(\|f_2\|_{E_2} + |\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_2\|_E\right).$$

Ainsi

$$|\lambda|\,\|u\|_p + |\lambda|^{\frac{1}{2}}\left\|u^{(1)}\right\|_p + \|Au\|_p + \|u\|_p \leq C_1\left(\|f_1\|_{E_1} + |\lambda|^{1-\frac{1}{2p}}\|f_1\|_E\right) + C_2\left(\|f_2\|_{E_2} + |\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|f_2\|_E\right)$$

D′ou l'istimation. $(3;7)$

$$\sum_{i=0}^{2}|\lambda|^{1-\frac{i}{2}}\left\|u^{(i)}\right\|_p + \|Au\|_p \leq \ M\sum_{k=1}^{2}\left[\|f_k\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k}\|f_k\|_E\right].$$

3-3 Equation non Homogéne

On considerer dans$L_{p;\gamma_1}(0,b;E)$ le probleme siuvante:

$L_0u = -au^{(2)}(y) + A_\lambda u(y) = f.$

$L_ku = \alpha_k u^{(m_k)}(0) + \beta_k u^{(m_k)}(b) + \sum_{j=1}^{N_k}\delta_{kj}u^{(m_k)}(y_{kj}) = f_k.$

$$k = 1;2, y_{kj} \in [0;b]. \tag{3.10}$$

Théoreme 3-3: Soit le condition (3.1) satisfaite, E un espace de Banach saisfait la condition de multiplicateur avec $p \in (0;\infty)$et A un 'opérateur R-positife sur E; Alors, l'opérateur: $u \to Gu = \{L_0u, L_1u, L_2u\}$ pour $|\arg \lambda| \leq \pi - \varphi$ et $|\lambda|$ grand suffisante,est isomorphe de $W_p^2(0, b; E(A), E)$ dans $L_p(0, b; E) + E_1 + E_2$ et

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\|u^{(i)}\right\|_p + \|Au\|_p \leq M \left[\|f\|_p + \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_E\right)\right] \tag{3.11}$$

Preuve. On adéja preuver l'unicité de la solution de probleme (3.10) par le théoreme (3.1)

Soit $\widetilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{si } y \in [0, b] \\ 0 & \text{si } y \notin [0, b] \end{cases}$

La solution de(3.10) $u \in W_p^2(0, b; E(A), E)$; on peut écrit cette solution comme une somme $u = u_1 + u_2$ telle que u_1 est une restriction on $[0, b]$ de la solution u de l'équation :

$$L_0u = \widetilde{f}(y) \quad ; y \in \mathbb{R}. \tag{3.12}$$

Donc $\begin{cases} L_0u = & L_0u_1 + L_0u_2 & = f(y) \\ L_ku = & L_ku_1 + L_ku_2 & = f_k(y) \end{cases} ; y \in [0, b].$

$\Rightarrow \begin{cases} L_0u_2 = & f(y) - \widetilde{f}(y) = 0 \\ L_ku_2 = & f_k(y) - L_ku_1 \end{cases} ; y \in [0, b].$

Ainsi u_2 est la solution de probleme:

$$\begin{cases} L_0 u = & 0 \\ & & ; y \in [0,b] . \\ L_k u = & f_k(y) - L_k u_1 \end{cases} \tag{3.13}$$

On pose $L_0 u = -au^{(2)}(y) + A_\lambda u(y) = \widetilde{f}(y)\,; y \in [0,b]$.

Donc $L_0 u = \widetilde{f}(y)$, Par la transformation de Fourier on a:$u = F^{-1} L_0^{-1} F \widetilde{f}(y)$.

$L_0 u = -au^{(2)}(y) + A_\lambda u(y) = -a\left(\frac{d}{dy}\right)^2 u(y) + (A + \lambda I) u(y) = \left(-a\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + A + \lambda I\right) u(y)$

$L_0 u = \left[\left(-a\left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \lambda I\right) + A\right] u(y)$.

D'aprés cette formule en prend $L_0(\lambda, \xi) = \left(-a\xi^2 + \lambda I\right) + A$, telle que $\xi = \frac{d}{dy}$.

Ainsi la solution de probleme (3.10) donné par :

$$u = \quad F^{-1} L_0^{-1}(\lambda, \xi) F \widetilde{f}(y) \quad .$$

et

$$\begin{cases} u^{(i)} = & \xi^i F^{-1} L_0^{-1}(\lambda, \xi) F \widetilde{f}(y) . \\ Au = & F^{-1} A L_0^{-1}(\lambda, \xi) F \widetilde{f}(y) . \end{cases}$$

Alaide de ces expression on trouve :

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| u^{(i)} \right\|_p + \|Au\|_p = \sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| \xi^i F^{-1} L_0^{-1}(\lambda, \xi) F \widetilde{f} \right\|_p + \left\| F^{-1} A L_0^{-1}(\lambda, \xi) F \widetilde{f} \right\|_p . \tag{3.14}$$

Soit les fonctions

(i) $H(\lambda, \xi) = A L_0^{-1}(\lambda, \xi)$.

(ii) $H_i(\lambda,\xi) = |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \xi^i L_0^{-1}(\lambda,\xi)\,; i = 0,1,2.$

Comme A est R-bornée et $H_i(\lambda,\xi)$ sont des multiplicateur de Fourier sur l'espace $L_p(R,E)$ .Alors $H(\lambda,\xi)$ et $H_i(\lambda,\xi)\,; i = 0,1,2;$ sont des opérateurs bornées.

Donc

$$\left\| H(\lambda,\xi)\,\widetilde{f} \right\|_p = \left\| AL_0^{-1}(\lambda,\xi)\,\widetilde{f} \right\|_p = \left\| F^{-1}AL_0^{-1}(\lambda,\xi)\,F\widetilde{f} \right\|_p \leq M' \left\| \widetilde{f} \right\|_p .$$

$$\left\| H_i(\lambda,\xi)\,\widetilde{f} \right\|_p = \left\| |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \xi^i L_0^{-1}(\lambda,\xi)\,\widetilde{f} \right\|_p = |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| \xi^i F^{-1} L_0^{-1}(\lambda,\xi)\,F\widetilde{f} \right\|_p \leq M" \left\| \widetilde{f} \right\|_p .$$

Par conséquence on trouve:

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| u^{(i)} \right\|_p + \|Au\|_p \leq C \left\| \widetilde{f} \right\|_p . \tag{3.15}$$

D'ou l'équation (3.12) admet une solution $u_1 \in W_p^2(0,b;E(A),E)$.

Comme $W_p^2(0,b;E(A),E)$ isomorphisme avec $L_p(0,b;E) + E_1 + E_2$; et par le Théoreme du Trace donc $u_1^{(m_k)} \in E_k = (E(A),E)_{\theta_k;p}$.

D'aprés le théoreme (3.1) le probleme (3.13) admet une solution unique $u_2 \in W_p^2(0,b;E(A),E)$ pour $|\arg\lambda| \leq \pi - \varphi$ et $|\lambda|$ grand suffisante.

Ainsi $\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| u_2^{(i)} \right\|_p + \|Au_2\|_p \leq M \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k - L_k u_1\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k - L_k u_1\|_E \right).$

$$\leq M \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_E + |\lambda|^{1-\theta_k} \|L_k u_1\|_E + \|L_k u_1\|_{E_k} \right)$$

$$\leq M \sum_{k=1}^{2} \begin{pmatrix} \|f_k\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_E + |\lambda|^{1-\theta_k} \|L_k u_1\|_E + \\ \left\| u_1^{(m_k)} \right\|_{C([0,b];E_k)} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|L_k u_1\|_{C([0,b];E)} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

D'aprés (3.15) on a

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| u_1^{(i)} \right\|_p + \|Au_1\|_p \quad \leq C \|f\|_p . \tag{3.17}$$

Par l'application du théoreme de Trace et l'estimation (3.17) on a:

$$\left\| u_1^{(m_k)} \right\| + |\lambda|^{1-\theta_k} \|L_k u_1\| \quad \leq C \|f\|_p .$$

Ainsi avec (3.16) et (3.18) on a:

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| u_2^{(i)} \right\|_p + \|Au_2\|_p \leq \quad C \left[\|f\|_p + \sum_{k=1}^{2} \|f_k\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_E \right] . \tag{3.19}$$

Finalement (3.17) et (3.19) implique

$$\sum_{i=0}^{2} |\lambda|^{1-\frac{i}{2}} \left\| u^{(i)} \right\|_p + \|Au\|_p \leq M \left[\|f\|_p + \sum_{k=1}^{2} \left(\|f_k\|_{E_k} + |\lambda|^{1-\theta_k} \|f_k\|_E \right) \right] . \tag{3.11}$$

Bibliographie

[1] Albrecht Pietsch : Histor of Banach spaces And Linears. Birkhauser Boston (2007).

[2] Arendt W. and Duelli M : Maximal L^pregularity for parabolic and elliptic equations on line .J.evol.egu. (2006),773-790.

[3] Arendt W. and BU, S ,The operator- valued ;Marcinnkieziez multiplier theorem and maximal regularity .Math. Z 240(2002), 311-343.

[4] Claude Gasquet et Patrik Witamski ;Analyse de Fourier et Applications .Dunod , Paris (200) Masson ,Paris (1996).

[5] Clement, Ph . and Guere-Delabriere, S. on the regularity of abstract Cauchy problems and boundary value problems , Atti Accad. Naz. Lincei CI . Sci. nFis . Mat.Natur. Rend. Lincei 9(4) (1998),245-266.

[6] Clement, Ph . and Pruss,J. , An operator-valued transference principle and maximal regularity an vector-valued L^p –spaces. In : Evolution Equ . and their Appl .Physical and Life Sciences, G. Lumer, L. Weis(eds),Lect. Notes in Pure Appl .Math.vol.215,Marcel Dekker, New York, 2001;67-87.

[7] Clement, Ph . De Pagter, B., Sukochev, F.A. and Witvliet, M., Schauder decomposition and multiplier theorems, Studia Math., 138(2000), 135-163 .

[8] Daniel Revug : Mesure et intégration. Hermann(1997).

[9] Denk,R,Hieber,M.and Pruss, J. R-boundqdnessm Fourier Multipliers and Proble;s of Ellipticand Parabolic Type ;Mem.Amer. Amer. Math. Soc; vol 788 AMS, Providence, RI(2003).

[10] Gutierrez, J.A. and Lacey, H.E. On the Hilbert transform for Banach space valued functions, dans Martingale theory in harmonic analysis and spaces, Lecture Notes in Mathematics 939, Springer (1981).

[11] El Haj Laamri :Mesure, intégration, convolution et transformée de Fourier des fonctions. Dunod, Paris (2001).

[12] Herbert Aman : Linear and Quasilinear Parabolic Problems Birkh■user Verlag Basel (1995).

[13] Joram Lindenstrauss et Loir Tzafriri , Classical Banach Spaces I and II. Springer-Verlag; Heidelberg New York (1997).

[14] Kôsaku Yosida , Functional Analysis, Springer-Velag ,Berlin Heidelberg New York (1980).

[15] Tosio Kato ; Perturbation theory for linear operator. Springer-Velag ,Berlin Heidelberg New York (1980).

[16] Weis.L; Operator- valued Fourier multiplier theore;s and maximal L^p-regularity Math. Ann .319 (2001) 195-214.

Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude de la régularité maximal L^p pour une classe d'équations différentielles opérationnelles du premier ordre non locale sur l'intervalle [0;1] dans les espaces de Banach du type U.M.D.

Les mots clés : Régularité maximale ; Espace U.M.D ;R-borné ;opérateur non local ; espace de Banach.

Abstract

The present work is to study of L^p -maximal regularity for on class of first order operator differential equations on [0;1] no local in the U.M.D Banach spaces.

Key words : Regularity maximal ;space U.M.D ;R-borne ;operator no local ;space of Banach

ملخص

هذا العمل يتضمن دراسة التعديل الأعضمي L^p لصنف معين من المعادلات التفاضلية المؤثرية من الدرجة الأولى غير المحلية على المجال [0;1] في الفضاءات البناخية من النمط U.M.D

كلمات مفتاحية:التعديل الأعضمي ،فضاء U.M.D ، R- محدودية ،مؤثر غير محدود ،فضاء بناخ