

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre :

Série :

THESE

PRESENTE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCE
SPECIALITE PHYSIQUE THEORIQUE
THEME

**LA PHENOMENOLOGIE AU DELA DU
MODELE STANDARD**

Par : **Essma REDOUANE-SALAH**

SOUTENU LE :10/06/2009

Devant le Jury :

Président : **H.AISSAOUI** M.C. Univ. Mentouri Constantine.

Rapporteur : **N.MEBARKI** Prof. Univ. Mentouri Constantine.

Examineurs : **M,MERAD** Prof. Univ.Larbi Ben M'Hidi Oum-El-Bouaghi

K.BENHIZIA M.C. Univ. Mentouri Constantine.

A.BOUDINE M.C. Univ.Larbi Ben M'Hidi Oum-El-Bouaghi

N.BOUCEREDJ M.C. Univ. Baji Moukhtar Annaba.

Liste des Figures

Figure 1.4 : Exemples des fonctions PDF et leur évolution.....	67
Figure 2.4 : Le couplage électromagnétique à très haute énergie ; $R = \alpha(Q^2)/\alpha_s(Q^2)$ en fonction du paramètre d'évolution Q^2	69
Figure 3.4 : La contribution de la NCG sur la contribution CG, Non commutativité espace-espace, Symétrie.....	82
Figure 4.4 : La contribution de la NCG sur la contribution CG, Non commutativité espace-temps, Symétrie.....	82
Figure 5.4 : La contribution de la NCG sur la contribution CG, Non commutativité espace-temps, dissymétrie.....	83
Figure 6.4 : La contribution de la NCG sur la contribution CG, Non commutativité espace-espace, dissymétrie.....	83

Introduction

Les efforts pour obtenir une théorie décrivant la nature aux très petites-échelles, a conduit à la naissance de ce qu'on appelle la physique moderne, Le début de ce siècle a vu l'émergence de deux nouvelles théories qui ont complètement bouleversé le monde de la physique : la théorie de la relativité générale et la mécanique quantique, il y a quatre-vingt ans, on peut dire qu'elles sont responsables de la majorité des développements de la physique théorique de notre siècle, y compris les avancées les plus récentes. Depuis lors, il est devenu clair que la physique à la plus petites distances est décrite par la théorie quantique.

La mécanique quantique est une théorie de l'infiniment petit qui cherche à décrire des systèmes physiques, dont l'action est une quantité de même ordre de grandeur que la constante de Planck $\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34}$ Js. Aujourd'hui cette théorie a provoqué une révolution en ce qui concerne de mieux en mieux comprendre les interactions fondamentales de la nature au niveau microscopique, en basant sur l'hypothèse de Planck, qui dit que l'action ne peut varier que par multiples entiers de \hbar , La mécanique quantique est appliqué à des systèmes physiques très variés, le point de départ de cette théorie est le principe d'incertitude de Heisenberg, qui peut être formulé comme suit : Il n'est pas possible de mesurer simultanément la position et l'impulsion d'une particule car l'incertitude Δx sur la mesure de sa position et l'incertitude Δp sur son impulsion doivent satisfaire à la relation $\Delta x \cdot \Delta p \simeq \hbar$.

La position x et l'impulsion p d'une particule sont remplacées, en mécanique quantique, par des opérateurs \hat{x} et \hat{p} agissant sur un certain espace de Hilbert, les opérateurs \hat{x} et \hat{p} sont définis par

$$\hat{x}\Psi(x) = x\Psi(x) \quad \text{et} \quad \hat{p}\Psi(x) = i\hbar \frac{d}{dx}\Psi(x)$$

Il est remarquable que le commutateur de ces deux opérateurs soit non nul,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

\hat{x} et \hat{p} engendrent l'algèbre des observables quantiques, cette algèbre non commutative doit remplacer l'algèbre des fonctions sur l'espace des phases classique. Par conséquent, la géométrie de l'espace des phases quantique fait appel aux coordonnées non commutatives \hat{x} et \hat{p} .

Cela implique qu'il doit exister des relations d'incertitude pour les coordonnées de l'espace-temps. En suivant l'analogie avec l'espace des phases et la mécanique quantique, cela nous amène à supposer que les coordonnées de l'espace-temps sont elles aussi des éléments d'une algèbre non commutative, cette structure non commutative de l'algèbre des coordonnées n'est importante qu'à l'échelle de la longueur de Planck, elle ne peut pas être appliquée à l'échelle macroscopique [1] – [5].

Les théories qui décrivent les interactions fondamentales, comme les théories de Yang-Mills ou les théories de Jauges en général, sont des théories de nature géométrique, par conséquent, si nous voulons construire une théorie prête à décrire la physique à l'échelle de Planck, nous devons étendre ces concepts géométriques à des espaces dont les coordonnées ne forment pas une algèbre commutative. Cette nouvelle géométrie, qui se base sur une algèbre de coordonnées noncommutative prend le nom de géométrie non commutative ou NCG.

Cependant ; le plus difficile des problèmes en physique théorique aujourd'hui, c'est la construction d'une théorie qui englobe toutes les interactions fondamentales de la nature au sein d'une théorie de la mécanique quantique, et qui soit capable de produire des données expérimentalement possibles, prenant en considération que le facteur commun de toutes les interactions fondamentales connues est qu'elles sont tous décrites avec succès par les théories de jauge. En fait, la symétrie de jauge semble être une propriété intrinsèque de notre univers, Il est tout à fait clair que les interactions et les théories de jauge sont intimement liées : théories de jauge donnent lieu à des interactions[6].

Une théorie de jauge par définition est une théorie des champs qui est invariante sous certain groupe de symétrie locale appelé le groupe de jauge, par exemple, le modèle standard des interactions électrofaible[7], [8] est une théorie de jauge, leur succès en décrivant les interactions fondamentales de la nature est indiscutable, il est invariant par les transformations du groupe compact de Lie semi-simple $SU(2) \otimes U(1)$, cette invariance donne lieu à la parution des interactions faibles et électromagnétiques, respectivement, Un autre exemple très connu est la Chromodynamique Quantique QCD, c'est une théorie de jauge ayant comme groupe de jauge $SU(3)$ qui a été introduit pour décrire les interactions fortes[9].

Du point de vue mathématique, l'invariance de jauge d'une théorie implique toujours l'existence des contraintes dans l'action fonctionnelle, en particulier cela ne signifie pas que tous les degrés de liberté utilisés dans la formulation de la théorie sont des degrés physiques, parce que en général leur réduction viole la covariance de la théorie, et cela n'est pas souhaitable tant qu'il rend les calculs beaucoup plus difficiles. Alors, une théorie quantique est nécessaire pour une description adéquate à des processus physiques. Maintenant on peut se demander comment peut-on construire une théorie quantique ?

Ce que l'on peut faire aujourd'hui est de démarrer à partir d'une théorie classique dont on a une bonne compréhension et on la reconstruire en une théorie quantique. Ceci nous amène à la notion de la Quantification. La quantification est donc sensée de transformer une théorie classique en une Théorie quantique. De notre précédente discussion sur la relation entre les théories de jauge et les interactions nous nous rendons compte que la quantification des théories de jauge est particulièrement intéressante : tel est le but de la première partie de ce travail.

La quantification d'une théorie peut être formulée en utilisant deux formalismes classiques différents : l'intégral des chemins et le formalisme des operateurs, Néanmoins il existe encore une approche géométrique très puissante pour quantifier les théories de jauge, cette approche est la géométrie non commutative introduite si dessus.

Notons cependant qu'il existe autant de géométries non commutative [10], [11]. De

plus, pour une algèbre donnée, il y a en général plusieurs généralisations possibles à des concepts géométriques. Avant d'étudier plus en détail notre sujet, citons à titre d'exemple quelques approches fameuses de la géométrie non commutative

- L'exemple le plus connu de la communauté des physiciens des particules est certainement l'approche de A. Connes dite aussi Connes-Lotte [12] – [15].

- Un autre exemple de géométrie non commutative est formé par A.H. Chamseddine [16] – [18].

- L'approche de A. Sitarz en utilisant le formalisme des espaces discrets. [19] – [23].

- L'approche canonique de l'espace-temps non commutative, dite à la Seiberg-Witten [24].

Toutes ces approches de la géométrie non commutative ont un point commun, on peut dire plus précisément, qu'ils emploient la même démarche suivante :

- Ils partent d'un ensemble muni d'une structure géométrique c.à.d. une structure d'espace topologique, ou de variété différentiable, ils constituent la théorie sous-jacente chacun à leur façon à l'aide des sous-algèbres adéquates de l'algèbre des fonctions à valeurs complexes définies sur l'ensemble de départ.

- Ils étendent ensuite tous les résultats de la théorie précédente qui ne font pas usage de la commutativité de l'algèbre.

Cette démarche est illustrée par le lien entre topologie générale et les C^* -algèbres [25].

L'objet de cette thèse est représenté en un travail de deux parties, Dans la première partie, nous étudierons essentiellement l'approche développée par A. Sitarz dans [19] ainsi que dans [20], on l'applique pour obtenir la quantification du lagrangien du modèle standard des interactions électrofaibles, alors que l'autre partie est consacrée à utiliser l'approche de Seiberg-Witten de l'espace-temps non commutative dans une étude phénoménologique appliquée sur la chromodynamique quantique.

Ce travail comprend Cinq chapitres, il est organisé de la façon suivante.

Dans le premier chapitre nous représentons les théories de jauge dans le cas classique, nous rappelons les méthodes de leur quantification, nous introduisons les termes de la fixation de jauge, de Fadeev-Popov, et les transformations $BRST$, ensuite nous exposons

le modèle Standard des interactions électrofaibles, nous le traitons comme une théorie de jauge classique non quantifiée générée par la brisure spontanée de la symétrie de jauge local $SU(2) \otimes U(1)$, ça nous aidera ultérieurement dans notre étude à reformuler la quantification du Modèle Standard dans le cadre de la géométrie non commutative, en utilisant l'approche des groupes discrets de Sitarz.

Le chapitre deux est consacré à une exposition détaillée du formalisme Différentiel des Espaces Discrets, qui doit être utilisé et appliqué dans notre calcul à reformuler la quantification du modèle Standard électrofaible.

Au troisième chapitre en utilisant le formalisme différentiel des espaces discrets de la géométrie non commutative, nous introduisons les variables de Grassman θ , les variables x_μ de l'espace-temps de Minkowski M_4 et l'élément g de l'espace discret Z_2 pour construire un super espace à l'aide des super champs, nous définissons et calculons le produit scalaire généralisé et le champ de Yang-Mills, les calculs résultants seront appliqués pour obtenir le lagrangien quantique du Modèle Standard Electrofaible, avec les termes de la Fixation de jauge, Fadeev-Popove et les transformations BRST correspondantes.

En suite dans le quatrième chapitre nous effectuons une étude phénoménologique sur la théorie de la chromodynamique quantique, en utilisant l'approche de Seiberg-Witten de l'espace-temps non commutative appliquée sur quelque processus, et nous donnons les règles de Feynman associées.

Finalement dans le dernier chapitre nous tirons notre conclusion sur les résultats obtenus de ce travail.

Chapitre 1

Le Modèle Standard des Interactions Electrofaibles comme une théorie de jauge classique

1.1 Introduction

Les interactions fondamentales dans la nature sont décrites en termes de théories de jauge. Ceci a conduit les physiciens à postuler un principe de jauge, englobant toutes les interactions de la nature.

La théorie de jauge est une théorie invariante sous un groupe de transformation local, on dit un groupe de jauge G , cela signifie que le lagrangien L de notre théorie est invariant, sous les transformations du groupe G . En exigeant qu'un Lagrangien doive posséder un certain groupe de symétrie qui laisse un peu d'arbitraire dans les formes possibles d'interaction qui sont autorisées par la théorie. Dans ce chapitre, nous allons présenter d'abord les notions des théories de jauge.

1.2 Théorie de jauge

Dans cette section on explore les notions de la théorie de jauge afin de les appliquer ultérieurement sur le Modèle Standard des interactions électrofaibles.

1.2.1 L'invariance de jauge

Soit la densité lagrangienne $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi]$ invariante sous un groupe de transformation continue noté par G et de dimension d

$$\phi' = U(\theta^a) \phi \quad , \quad (a = 1, 2, \dots, d) \quad (1.1)$$

On peut écrire la transformation $U(\theta^a)$ En fonction des paramètres infinitésimaux θ^a

$$U(\theta^a) = 1 + ig \sum_{a=1}^D \theta^a T_a \quad (1.2)$$

Où T_a sont les générateurs infinitésimaux du groupe G . Généralement on peut représenter ces générateurs en utilisant la représentation réductible pour chaque T_a ça correspond à t^a matrice normalisée par la relation

$$\text{tr}(t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{a,b} \quad (1.3)$$

Les générateurs satisfont la relation suivante

$$[T_a, T_b] = i C_{ab}^c T_c \quad (1.4)$$

C_{ab}^c sont des constants de structures

Lorsque les paramètres θ^a dépendent de l'espace temps x^μ , Les transformations correspondantes sont locales (Lorsque θ^a sont indépendantes de x^μ les transformations sont globales), Si la transformation est locale, on dit que le Lagrangien $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi]$ n'est pas

invariant à l'addition du terme qui contient la dérivée $\partial_\mu \phi$

$$\partial_\mu \{U [\theta^a (x)] \phi\} = U [\theta^a (x)] \partial_\mu \phi \quad (1.5)$$

Pour résoudre ce problème, on introduit ce qu'on appelle la dérivée covariante D_μ définie par

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu \quad , \quad A_\mu = \sum_{a=1}^d T_a A_\mu^a \quad (1.6)$$

A_μ^a Sont des champs de jauge qui se transforment de la manière suivante

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{1}{ig} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (1.7)$$

Pour préserver l'invariance sous le groupe G

$$(D_\mu \phi)' = U [\theta^a (x)] D_\mu \phi = D_\mu \{U [\theta^a (x)] \phi\} \quad (1.8)$$

Si on remplace toutes les dérivées ∂_μ par des dérivées covariantes D_μ où $(\mathcal{L} [\phi, \partial_\mu \phi] \rightarrow \mathcal{L} [\phi, D_\mu \phi])$, on obtient le lagrangien invariant sous les transformations du groupe G . Mais les champs de jauge introduits A_μ^a ne sont pas des champs physiques, car il n'existe pas un terme cinétique qui peut décrire le propagateur de ces champs dans le lagrangien $\mathcal{L} [\phi, D_\mu \phi]$, Il faut donc construire un terme cinétique pour les champs A_μ^a dans le lagrangien, le terme cinétique invariant le plus général est

$$[D_\mu, D_\nu] \phi = ig (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig [A_\mu, A_\nu]) \equiv ig F_{\mu\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = T_a F_{\mu\nu}^a \quad , \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g C_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c \quad (1.9)$$

C'est le terme de Yang-Mills qui se transforment sous la forme d'un tenseur

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1} \quad (1.10)$$

En outre, on obtient le lagrangien de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^d F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \mathcal{L}[\phi, D_\mu\phi] \quad (1.11)$$

On peut appliquer la procédure ci-dessus pour construire des théories de jauge variées. Si on prend par exemple : $G = U(1)$, On obtient l'électrodynamique quantique QED , mais si on prend $G = SU(3)$ on obtiendra la chromodynamique quantique QCD . [6], [26], [27].

1.3 La quantification des théories de jauge

Pour quantifier la théorie de jauge, il faut ajouter à (1-11) le terme de Fixation de la jauge et le terme correspondant Fadeev-Popov. Le premier terme brise la symétrie de jauge et de cette façon, on élimine la divergence de l'intégrale fonctionnelle. Le second terme améliore la mesure d'intégration pour fournir des prévisions correctes pour un observables invariant par la transformation de jauge.

1.3.1 Terme de la fixation de jauge

Maintenant on expose la façon dont la procédure de la quantification de la théorie de jauge a été faite,

On prend comme exemple la théorie électromagnétique, c'est l'exemple le plus simple.

La théorie électromagnétique se caractérise par le Lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

Où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.13)$$

L'équation du champ est

$$\square A_\nu - \partial_\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0$$

Pour garder la covariance de la théorie utilisons la jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

Nous avons comme variables A_μ qui correspond aux variables canoniques conjugués

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x)$$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu}$$

Soit

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\mu)}$$

Avec

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = \frac{\partial (-\frac{1}{4} F^2)}{\partial (\partial_\alpha A_\beta)} = -F^{\alpha\beta} \Pi^\mu = -F^{0\alpha} \quad (1.14)$$

Le tenseur antisymétrique $F^{\mu\nu}$ provoque l'apparition de la contrainte

$$\Pi^0 = 0$$

Alors le Hamiltonien total s'écrit comme suit

$$\mathcal{H} = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \Pi^k \partial^k A_0 + \Lambda \Pi^0$$

Prenons en considération les contraintes suivantes

$$\Pi^0 = 0 \implies \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$$

Si

$$\beta = 0 \implies \partial_\alpha F^{\alpha 0} = 0$$

Où

$$\partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} = 0$$

Donc

$$\partial_i F^{i0} = 0$$

$$\partial_i F^{0i} = 0$$

On obtient

$$\partial_i \pi^i = \nabla \vec{\pi} = 0 \tag{1.15}$$

Ce qui représente la deuxième contrainte

La relation de commutation canonique sera définie par :

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), A_\nu(y)]_{x_0=y_0} &= [\Pi^\mu(x), \Pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} = 0 \\ [A_\mu(x), \Pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} &= i\delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

Il est clair que ces relations sont incompatibles si le variable Π^0 est nul, où la méthode de la quantification canonique sera modifiée car il existe une relation entre ces variables canoniques, ce genre de relations est appelées contraintes[26], [27].

La réponse évidente est de fixer une jauge particulière. Maintenant, la quantification peut être formulée en utilisant deux différents formalismes : l'intégrale de chemin et le formalisme des opérateurs, de sorte que l'intégrale sur A_μ ne s'étende pas sur des valeurs liées par une transformation de jauge définie.

Imposons la condition de la jauge de Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ cela donne le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A^\mu g_{\mu\nu} \square A^\nu \tag{1.16}$$

L'opérateur $g_{\mu\nu}\square$ a un operateur inverse connu par le propagateur de Feynman

$$\begin{aligned} D_F(x, y)_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu}\Delta_F \\ (x, y, m &= 0) \end{aligned}$$

Alors Le lagrangien est écrit de la façon suivante

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{GF}$$

Où

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (1.18)$$

Est connue par le terme de la fixation de jauge[28] , [29] .

1.3.2 Le terme de Faddeev - Popov

La construction d'une théorie de Yang-Mills (dans lequel le groupe de jauge est un groupe de Lie) définie par le Lagrangien \mathcal{L} qui dépends de certains champs A, la densité lagrangienne \mathcal{L} représente une théorie de jauge ceci signifie qu'il y a des degrés de liberté redondants

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{GF} \quad (1.19)$$

\mathcal{L}_{GF} est une modification du lagrangien original, il est noté par l'index GF (Gauge Fixing) il brise l'invariance de jauge de \mathcal{L} par la fixation de la jauge, L.D. Faddeev et V.N. Popov ont résolu ce problème de sorte que le lagrangien total est

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG} \quad (1.20)$$

Avec

$$\mathcal{L}_{FPG} = -\bar{c}^a \partial^\mu D_\mu c^b \quad (1.21)$$

\mathcal{L}_{FPG} est le terme de "Faddeev - Popov." (on dit aussi le terme des ghosts), c, \bar{c} sont des champs de Grassmann étant les champs des ghosts et des antighosts respectivement, ce sont des champs scalaires avec des statistiques de Fermi. Dans le cas du lagrangien de Yang-Mills, il existe un couplage entre les ghosts et le champ de jauge. Alors, les ghosts ne peuvent pas être intégrés ils survient dans les diagrammes de Feynman, mais seulement dans les boucles internes, et non comme des particule extérieurs [26], [27], [29].

1.3.3 Les transformations de Becchi-Rouet-Stora

Il existe une puissante approche à la quantification des théories de jauge, appelée la quantification *BRS*, qui met en vedette une manifeste covariance avec l'unitarité, dans le cadre des transformations *BRS* la symétrie de jauge du modèle original est remplacé par une symétrie exacte appelée la symétrie *BRS* générée par une charge conservée Q , appelée la charge *BRS*.

Comme décrit dans la section précédente, on a impliqué le terme de Faddeev-Popov (les champs des ghost et l'antighost), notés par c^a et \bar{c}^a respectivement, où le lagrangien classique est modifié par des termes supplémentaires qui dépendent du choix spécifique de la condition de la fixation de jauge.

Si on prend le choix $f^a[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu^a$ (Correspondant à l'état de la jauge de Lorentz $\partial^\mu A_\mu^a = 0$) le lagrangien effectif est

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{YM} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG} \quad (1.22)$$

\mathcal{L}_{eff} est invariant sous les transformations *BRS* données par

$$\delta A_\mu^a = D_\mu c^a \quad (1.23)$$

$$\delta c^a = -\frac{1}{2} f_{bc}^a c^b c^c \quad (1.24)$$

$$\delta \bar{c}^a = -\frac{1}{\xi} \partial^\mu A_\mu^a \quad (1.25)$$

$$\delta \psi_i = -c^a (T_a)_i^j \psi_j \quad (1.26)$$

$\delta \mathcal{L} = 0$, et le lagrangien \mathcal{L} sont invariants sous les transformations *BRS* (1-25), (1-26), on note que (1-25) implique

$$\delta^2 (A_\mu^a) = 0 \quad (1.27)$$

Puisque

$$\delta^2 = 0 \quad (1.28)$$

En d'autres termes, on dit que la variation de A_μ^a est nilpotente.

Une observation importante à faire à partir de ces équations c'est que les transformations *BRS* ci-dessus sont nilpotentes sur chacun des champs $A_\mu^a, \psi_i, \bar{c}^a, c^a$. Toute théorie quantique basée sur certaines théories de jauge devrait posséder la symétrie *BRS* et les états physiques en cette théorie sont annihilés par la nilpotence de la charge *BRS* [26] [27] [29].

1.3.4 L'utilité des transformations *BRS*

Toute réduction de degrés de liberté ne sert pas à la réalisation de la symétrie. Alors, Il n'est donc pas souhaitable de fixer la jauge du système avant de faire la quantification.

La raison en est que l'on doit ensuite explicitement vérifier qu'aucun des anomalies se produit dans les calculs de la théorie quantique, qui peuvent être très difficile à accomplir, par contre, s'il n'y a pas une fixation de jauge il y aura des variables non physiques dans la théorie qui pourraient gâcher l'unitarité, l'avantage de la méthode de la quantification

BRS c'est qu'elle garde tous les variables dans l'espace des phases original, ce qui garantie la covariance. En outre, elle ajoute des degrés de liberté, c'est-à-dire les ghosts et les antighosts qui éliminent les degrés de libertés non physiques originales, lorsqu'on impose l'invariance BRS des états physiques dans la théorie de sorte que la théorie résultante sera unitaire. C'est là que réside l'avantage principal de la quantification par la méthode BRS.

1.4 Le Modèle Standard des Interactions Electro-faibles

Le Modèle Standard des interactions électrofaibles est une théorie de champ quantique invariante par les transformations de jauge du groupe de la symétrie $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ spontanément brisée par le mécanisme de Higgs. Où l'indice L Signifie la gauche (left) et Y représente L'hypercharge. Il contient trois paramètres libres pour décrire les bosons de jauge γ, W, Z et leurs interactions avec les fermions[7], [8].

La base de la construction du Modèle Standard est donnée par les relations empiriques suivantes

1. – $SU(2) \otimes U(1)$ la structure de la famille des fermions

Les fermions apparaissent comme des familles avec des Doublets gauchers et des Singlets droitiers

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R \quad (1.29)$$

Elles sont caractérisées par les nombres quantiques de l'isospin faible T, T_3 , et l'hypercharge Y .

- La relation de Gell-Mann-Nishijima : entre les nombres quantiques : on classe les fermions à l'égard du groupe $SU(2) \otimes U(1)$ et sa charge électrique Q donnée par

la relation

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.30)$$

- Ils existent 4 bosons vectorielles jouent le rôle des porteurs de la force électrofaible

$$\gamma, \quad W^+, \quad W^-, \quad Z$$

Où le photon est sans masse alors que les bosons W^\pm, Z ont des masses $M_W \neq 0, M_Z \neq 0$.

- Cette structure empirique peut être intégrée dans une théorie de champ des interactions unifiées électromagnétiques et faibles invariante par les transformations de jauge, en interprétant $SU(2) \otimes U(1)$ comme un groupe des transformations de jauge sous lesquelles le lagrangien du Modèle Standard est invariant.

Cette symétrie complète doit être brisée par le mécanisme de Higgs, pour avoir une symétrie de jauge aux interactions électromagnétiques, sinon les bosons W^\pm, Z sont également sans masse. Le Modèle Standard ne nécessite qu'un seul champ scalaire (champ de Higgs), sous la forme d'un doublet $SU(2)$.

Selon les principes générales de la construction d'une théorie de champ invariante par les transformations de jauge avec une symétrie brisée spontanément, les secteurs de Jauge, Higgs, Fermions, et le couplage de Yukawa font tous partie du Lagrangien Electrofaibles [30] donné par

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Gauge} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Fermion} + \mathcal{L}_{Yukawa}. \quad (1.31)$$

1.4.1 La construction d'un Modèle Standard covariant par les transformation de jauge : le secteur de jauge

Le groupe $SU(2) \otimes U(1)$ est un groupe non-abélien généré par les opérateurs d'isospin T_1, T_2, T_3 et l'hypercharge Y (des éléments correspondants de l'algèbre de Lie). Chacune de ces charges généralisées est associées à des champs vectoriels : triplet du champ vec-

toriel $A_\mu^{1,2,3}$ avec l'isospin $T_{1,2,3}$ et d'un champ singlet B_μ avec l'hypercharge Y .

Dans la théorie des interactions faibles, les leptons sont divisés en isodoublets gauchers (lefthanded) ($T = \frac{1}{2}, T_3 = \pm\frac{1}{2}$)

$$L_l = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{pmatrix}_L, \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

Et des isosinglets droitiers $T = 0$

$$R_l = (\psi_l)_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi_l \quad (1.33)$$

Où l est un indice qui signifie toutes les générations e, μ, τ , on peut exiger l'invariance de la théorie sous les transformations de jauge

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{pmatrix}_L &\longrightarrow \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{pmatrix}'_L = \exp\left(ia(x)\hat{T}\right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{pmatrix}_L \\ &= \exp\left(ia(x)\cdot\frac{\hat{\tau}}{2}\right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_l \end{pmatrix}_L \equiv \hat{U}_2 L_l \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$(\psi_l)_R \rightarrow (\psi_l)'_R = \exp\left(ia(x)\hat{Y}\right) (\psi_l)_R \equiv \hat{U}_2 R_l$$

Ici $\hat{Y} = Y$ est le générateur (constant) du groupe $U(1)$ en faisant une simple jauge (Ansatz)

$$\bar{L}_l \gamma^\mu i \partial_\mu L_l + \bar{R}_l \gamma^\mu i \partial_\mu R_l.$$

En ce qui concerne le terme cinétique de la densité lagrangienne, ce dernier est invariant par les transformations de jauge à l'égard de (1-6) si nous remplaçons la dérivée ∂_μ par une dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\hat{T}\cdot A_\mu - i\frac{g'}{2}\hat{Y}B_\mu. \quad (1.35)$$

$\hat{T} = (\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3)$ Sont les trois générateurs du groupe $SU(2)$, \hat{Y} est le générateur du groupe $U(1)$, les premiers réalisent les relations de commutation suivantes

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{T}_k \quad (1.36)$$

Alors que \hat{Y} ce n'est qu'un nombre. Il est évident que

$$[\hat{T}_i, \hat{Y}] = 0 \quad (1.37)$$

Parce que les générateurs s'appartiennent à des groupes différents.

En (1-7) on été obligé d'introduire les champs de jauge A_μ (isovecteur) et B_μ (isocalaire), avec les transformations de jauge

$$\begin{aligned} A_\mu \cdot \hat{T} &\rightarrow A'_\mu \cdot \hat{T} = \hat{U}_2 A_\mu \cdot \hat{T} \hat{U}_2^{-1} + \frac{i}{g} \hat{U}_2 (\partial_\mu \hat{U}_2^{-1}) . \\ B_\mu &\rightarrow B'_\mu = B_\mu + \frac{2i}{g'} U_1 (\partial_\mu U_1)^{-1} . \end{aligned} \quad (1.38)$$

Afin d'assurer l'invariance de jauge. U_1 et \hat{U}_2 sont les transformations de $U(1)$ et $SU(2)$, respectivement. Les nouveaux degrés de liberté reliés aux champs de jauge A_μ et B_μ doivent être ajoutés par un terme cinétique invariant par les transformations de jauge dans la densité Lagrangienne. Cela peut être fait en électrodynamique en utilisant le tenseur de la force

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu} &\equiv F_{\mu\nu} \cdot \hat{T} = D_\mu (A_\nu \cdot \hat{T}) - D_\nu (A_\mu \cdot \hat{T}) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \end{aligned} \quad (1.39)$$

Et

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.40)$$

Avec les propriétés de transformation de jauge

$$\hat{F}_{\mu\nu} \rightarrow \hat{F}'_{\mu\nu} = \hat{U}_2 \hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}_2^{-1} = \hat{U}_2 \left(F_{\mu\nu} \cdot \hat{T} \right) \hat{U}_2^{-1}$$

Et

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} \quad (1.41)$$

Les termes cinétiques invariants des champs de jauge A_μ et B_μ sont donnés par

$$\begin{aligned} L'_A &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \right\} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left(F_{\mu\nu} \cdot \hat{T} \right) \left(F^{\mu\nu} \cdot \hat{T} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Et

$$L'_B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu} \quad (1.43)$$

Résumons les résultats

$$\begin{aligned} L'_{int} &= \bar{L}_l \gamma^\mu i D_\mu L_l + \bar{R}_l \gamma^\mu i D_\mu R_l \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Où explicitement

$$\begin{aligned} L'_{int} &= i \bar{L}_l \gamma^\mu \left[\partial_\mu - i g \hat{T} \cdot A_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu \right] L_l \\ &\quad + i \bar{R}_l \gamma^\mu \left[\partial_\mu - i g \hat{T} \cdot A_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu \right] R_l \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

A ce stade les champs de jauge sont encore sans masse, cependant, certains d'entre eux acquièrent une masse, et lorsque nous connaissons que les bosons vectoriels doivent être massifs, nous allons réaliser ça dans la section suivante en appliquant le mécanisme

de Higgs [31], [32].

1.4.2 La brisure spontanée de la symétrie : Le secteur de Higgs

Les bosons vectoriels W_μ^+ , W_μ^- , et Z_μ ont été traités comme s'ils étaient sans masse.

Afin de leur donner une masse, nous appliquons le mécanisme de Higgs, nous avons besoin d'un champ scalaire qui se couple avec les bosons de jauge.

Lorsque les leptons gauchers forment un isodoublet et les champs de jauge A_μ forment un isovecteur, nous avons maintenant besoin d'un isodoublet du champ de Higgs

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{(+)} \\ \phi^{(0)} \end{pmatrix}, \quad |\Phi|^2 = |\phi^{(+)}|^2 + |\phi^{(0)}|^2 \quad (1.46)$$

A l'aide de la relation de Gellman-Nishijima on trouve que l'isospin T et l'hypercharge Y des champs de Higgs sont fixés par le choix spéciale

$$T = \frac{1}{2}, \quad Y = 1 \quad (1.47)$$

Pour obtenir une valeur non-nulle d'expectation du vide du champ de Higgs, nous ajoutons un terme de potentiel au lagrangien de Higgs

$$U(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + h |\Phi|^4 \quad (1.48)$$

Par une jauge appropriée nous supposons que la composante supérieure $\phi^{(+)}$ égal à zéro (rotation dans l'espace d'isospin), par conséquent nous écrivons

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \chi(x)) \exp\left(\frac{i}{\lambda} \Theta(x) \cdot T\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Avec l'iso-vecteur $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$, les quatre champs $\Theta(x)$ et $\chi(x)$ ont des valeurs

réelles, $\lambda = \sqrt{\frac{\mu^2}{h}}$ décrivent la valeur moyenne du vide du champ de Higgs.

Nous pouvons écrire

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \chi(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

La valeur moyenne d'expectation du vide du champ de Higgs est fixée par la condition que $U(\Phi)$ atteint son minimum. En ce point, nous fixons $\chi(x) = 0$, pour obtenir la valeur moyenne d'expectation du vide.

$$\langle 0 | \hat{\Phi} | 0 \rangle = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\langle 0 | \hat{\Phi} | 0 \rangle|^2 = \frac{\lambda^2}{2} \quad (1.51)$$

Le potentiel de Higgs résultant a la forme

$$\langle 0 | \hat{\Phi} | 0 \rangle = -\frac{\mu^2}{2} \lambda^2 + \frac{h}{4} \lambda^4 \equiv V(\lambda) \quad (1.52)$$

Supposons que

$$dV/d\lambda = 0$$

Nous obtenons

$$\lambda^2 = \frac{\mu^2}{h} \quad (1.53)$$

La valeur moyenne d'expectation du vide du champ de Higgs

$$\langle 0 | \hat{\Phi} | 0 \rangle = \frac{\mu^2}{\sqrt{2h}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

On mentionne que la composante inférieure du champ de Higgs ne se couple pas avec le champ électromagnétique, par conséquent, la valeur moyenne d'expectation du vide n'influe pas sur le champ du photon, en d'autre terme, en dépit de la brisure de la symétrie les photons demeurent sans masse.

Maintenant, nous allons faire la collection de toutes les parties de la densité lagran-

gienne,

Le champ de Yang-Mills

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.55)$$

Le champ vectoriel neutre B_μ

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (1.56)$$

Le terme d'interaction

$$L_{int}^{(e)} \equiv \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(J_-^{(e)\alpha} W_\alpha^{(-)} + J_+^{(e)\alpha} W_\alpha^{(+)} + J_0^{(e)\alpha} Z_\alpha \right) - e J_{EM}^{(e)\alpha} A_\alpha. \quad (1.57)$$

Et la contribution du champ de Higgs

$$U(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + h |\Phi|^4$$

Afin de donner aux leptons chargés les masses $m_l = f_l \lambda A$, nous ajoutons le terme suivant

$$\sqrt{2} f_l (\bar{R}_l \Phi^\dagger L_l + \bar{L}_l \Phi R_l) = -f_l (\lambda + \chi) \bar{\psi}_l \psi_l \quad (1.58)$$

Avec ($l = e, \mu, \tau$) pour chaque génération des Leptons, $\Phi^\dagger = (\Phi^{(+)*}, \Phi^{(0)*})$ signifie l'Hermitien conjugué de l'isodoublet vectoriel.

Néanmoins les combinaisons

$$\Phi^\dagger L_l \quad \text{et} \quad \bar{L}_l \Phi \quad (1.59)$$

Sont des isoscalaires et des spineurs ou des spineurs adjoint, respectivement, dans l'espace-temps et peuvent être combinés par R_l ainsi qu'avec des spineurs isoscalaires adjoints \bar{R}_l , respectivement, en formant les invariants

$$\bar{R}_l \Phi^\dagger L_l \quad \text{et} \quad \bar{L}_l \Phi R_l \quad (1.60)$$

Qui sont reliés entre eux par

$$(\bar{R}\Phi^\dagger L)^\dagger = (\bar{L}\Phi R) \quad (1.61)$$

D'où la forme de l'interaction choisie est hermitienne, chacun de ces termes est également invariant à l'égard des transformations de jauge, on peut le constater en utilisant la notation des transformations de jauge $\hat{U} = \hat{U}_1\hat{U}_2 = \hat{U}_2\hat{U}_1$

\hat{U} est le groupe $U(1)$ de la transformation de jauge, alors que \hat{U}_2 désigne le groupe $SU(2)$ de la transformation de jauge, de toute évidence les deux commutent, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \bar{R}_l\Phi^\dagger L_l &= \bar{R}_l\hat{U}^{-1}\hat{U}\Phi^\dagger\hat{U}^{-1}\hat{U}L_l \\ &= \bar{R}_l\hat{U}_1^{-1}\hat{U}_1\Phi^\dagger\hat{U}_1^{-1}\hat{U}_2^{-1}\hat{U}_2L_l \\ &= \bar{R}'_l\Phi'^\dagger L'_l. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Avec

$$R'_l = \hat{U}_1 R_l, \quad L'_l = \hat{U}_1\hat{U}_2 L_l, \quad \Phi' = \hat{U}_1\hat{U}_2\Phi\hat{U}_1^{-1} \quad (1.63)$$

On note les composantes de neutrinos par ψ_{ν_l} ($l = e, \mu, \tau$), les leptons massif par ψ_l .

Le lagrangien des interactions faibles est donné par la relation

$$\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}\cdot B^{\mu\nu} + e \left(\sum_l \bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l \right) A_\mu \\
& + \sum_l i \left(\bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \partial_\mu \psi_{\nu_l} + i \bar{\psi}_l \gamma^\mu \partial_\mu \psi_l - f_l \bar{\psi}_l \psi_l (\lambda + \chi) \right) \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_l \left[\bar{\psi}_l \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_l} W_\mu^- + \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_l W_\mu^+ \right] \\
& + \frac{g}{4 \cos \theta} \sum_l \left[\bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_l} - \bar{\psi}_l \gamma^\mu (g'v - \gamma^5) \psi_l \right] Z_\mu \\
& + \frac{h\lambda^4}{4} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - h\lambda^2 \chi^2 - h\chi^2 \left(\lambda\chi + \frac{1}{4}\chi^2 \right) \\
& + \frac{g^2}{8} \left(2W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{Z_\mu Z^\mu}{\cos^2 \theta} \right) (\lambda + \chi)^2. \tag{1.64}
\end{aligned}$$

Le quatrième et le troisième terme décrivent les termes cinétique des neutrinos gaucher (left-handed) et les leptons massifs, le dernier terme représente le couplage des bosons W et Z avec le champ de Higgs, qui génère les masses des bosons W et Z . En outre, nous voyons que les masses des bosons W et Z se résultent sous la forme

$$M_W = \frac{g\lambda}{2} \quad , \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta} \tag{1.65}$$

Finalement, nous réécrivons les trois parties du champ libre $F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu}$ et $B_{\mu\nu}\cdot B^{\mu\nu}$ en termes des champs physiques A_μ , Z_μ et W_μ^\pm , nous trouvons

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\cdot F^{\mu\nu} &= \sum_i (\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon_{ikl} A_\mu^k A_\nu^l) (\partial^\mu A^{i\nu} - \partial^\nu A^{i\mu} + g\varepsilon_{ikl} A^{k\mu} A^{l\nu}) \\
&= 2 [\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig \cos \theta (W_\mu Z_\nu - W_\nu Z_\mu) - ie (W_\mu A_\nu - W_\nu A_\mu)] \\
&\quad \times [\partial^\mu W^{*\nu} - \partial^\nu W^{*\mu} - ig \cos \theta (W^{*\mu} Z^\nu - W^{*\nu} Z^\mu) - ie (W^{*\mu} A^\nu - W^{*\nu} A^\mu)] \\
&\quad + [\cos \theta (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + \sin \theta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + ig (W_\mu W_\nu^* - W_\nu W_\mu^*)] \\
&\quad \times [\cos \theta (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \sin \theta (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + ig (W^\mu W^{*\nu} - W^{*\mu} W^\nu)] \tag{1.66}
\end{aligned}$$

Avec

$$e = g \sin \theta = g' \cos \theta \quad (1.67)$$

La partie libre du champ des isosinglets

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu} &= (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \\ &= \cos^2 \theta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &\quad + \sin^2 \theta (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) \\ &\quad - 2 \sin \theta \cos \theta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu). \end{aligned} \quad (1.68)$$

En ajoutant les contributions précédente, on trouve que les termes qui mélangent les photons A_μ et les bosons neutres intermédiaires Z_μ se disparaissent[31], [32].

1.5 Lagrangien du Modèle Standard des Interactions Electrofaibles

Nous avons déterminé certains termes dans le Modèle Standard des interactions électrofaibles décrivant les lagrangiens électromagnétique et faible (électrofaible) et l'interaction des leptons, maintenant, nous écrivons tous les termes du lagrangien du modèle standard minimal de Salam-Weinberg

$$L_{SW} = L_{SW}^{(2)} + \sum_l L_{SW,l}^{(3L)} + L_{SW}^{(3B)} + L_{SW}^{(4B)} + L_{SW}^{(H)}. \quad (1.69)$$

$L_{SW}^{(2)}$ décrit la partie du champ libre des bosons et des leptons.

$L_{SW,l}^{(3L)}$ représente le couplage entre les leptons de la génération $l = (e, \mu, \tau)$ et les bosons intermédiaires.

$L_{SW}^{(3B)}$ et $L_{SW}^{(4B)}$ sont des termes du troisième et quatrième ordre des champs bosoniques en décrivant leurs auto-couplage.

$L_{SW}^{(H)}$ contient tous les termes de champ de Higgs qui ne sont pas contenues dans le terme de masse. En détail, le lagrangien complet se compose des parties suivantes :

- Champs libres (bosons vectoriels massifs, les photons, leptons)

$$\begin{aligned}
L_{SW}^{(2)} = & -\frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^* - \partial_\nu W_\mu^*) (\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu) + M_w^2 W_\mu^* W^\mu \\
& -\frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\
& -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
& + \sum_{l=e,\mu,\tau} \left[\bar{\psi}_{\nu_l} i\gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \partial_\mu \psi_{\nu_l} + i\bar{\psi}_l (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_l) \psi_l \right]. \quad (1.70)
\end{aligned}$$

- Interaction lepton-boson

$$\begin{aligned}
L_{SW,l}^{(3L)} = & \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\psi}_l \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_{\nu_l} W_\mu + \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_l W_\mu^*] \\
& + \frac{g}{4\cos\theta} \sum_l \left[\bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_{\nu_l} - \bar{\psi}_l \gamma^\mu \left(\underbrace{1 - 4\sin^2\theta}_{=g_l^2} - \gamma^5 \right) \psi_l \right] Z_\mu \\
& e\bar{\psi}_l \gamma^\mu \psi_l A_\mu. \quad (1.71)
\end{aligned}$$

- Interactions du troisième ordre des bosons vectoriels

$$\begin{aligned}
L_{SW}^{(3B)} = & ig \cos\theta [(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu*} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^* - \partial_\nu W_\mu^*) W^\mu Z^\nu] \\
& -ie (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) W^{\mu*} A^\nu + ie (\partial_\mu W_\nu^* - \partial_\nu W_\mu^*) W^\mu A^\nu \\
& +ig \cos\theta (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) W^{\mu*} W^\nu \\
& ie (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) W^{\mu*} W^\nu. \quad (1.72)
\end{aligned}$$

– Interactions du quatrième-order des bosons vectoriels

$$\begin{aligned}
L_{SW}^{(AB)} &= -g^2 \cos^2 \theta (W_\mu^* W^\mu Z_\nu Z^\nu - W_\mu^* W_\nu Z^\mu Z^\nu) \\
&\quad -e^2 (W_\mu^* W^\mu A_\nu A^\nu - W_\mu^* W_\nu A^\mu A^\nu) \\
&\quad +eg \cos \theta (2W_\mu^* W^\mu Z_\nu A^\nu - W_\mu^* W_\nu Z^\mu A^\nu - W_\mu^* W_\nu Z^\nu A^\mu) \\
&\quad +g^2 (W_\mu^* W^\mu W_\nu^* W^\nu - W_\mu W^\mu W_\nu^* W^{\nu*}).
\end{aligned} \tag{1.73}$$

– Le secteur de Higgs

$$\begin{aligned}
L_{SW}^{(H)} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) (\partial^\mu \chi) - h\lambda^2 \chi^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} g^2 [W_\mu^{(+)} W^{(-)\mu} + (2 \cos \theta)^{-1} Z_\nu Z^\nu] (2\lambda\chi + \chi^2) \\
&\quad - h\chi^2 \left(\lambda\chi + \frac{1}{4} \chi^2 \right) - \sum f_i \bar{\psi}_i \psi_i \chi.
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Rappelons-que $W^* \equiv W^{(+)}$ et $W \equiv W^{(-)}$.

1.5.1 Paramètres physiques du Modèle Standard

Les relations suivantes sont valables pour les masses

$$M_W = \frac{g\lambda}{2} = \frac{e}{\sqrt{G}\sqrt{2.2} \sin \theta}, \quad M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta}, \quad m_l = f_l \lambda \tag{1.75}$$

Et pour les constantes de couplage

$$e = g \sin \theta, \quad \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{g^2}{8M_W^2} \tag{1.76}$$

Termes de mélange à l'angle de Weinberg

$$\begin{aligned}
A_\mu &= \cos \theta B_\mu - \sin \theta A_\mu^3 \\
Z_\mu &= \cos \theta A_\mu^3 + \sin \theta B_\mu
\end{aligned}$$

L'inverses

$$\begin{aligned} B_\mu &= \sin \theta Z_\mu + \cos \theta A_\mu \\ A_\mu^3 &= \cos \theta Z_\mu - \sin \theta A_\mu \end{aligned}$$

Aussi, la densité lagrangienne contient un assez grand nombre de termes, sa simplicité conceptuelle est originaire du principe de jauge sous-jacent du groupe $SU(2) \otimes U(1)$.

1.6 Quantification du Modèle Standard

Les champs de jauge du modèle Standard contiennent des degrés de liberté non physiques ne peuvent pas être quantifiés, comme conséquences nous devrions :

- Fixer la jauge par $\delta (F^a [A_\mu^a] - C^a)$ en utilisant L'intégrale de chemin ($C^a = \text{const.}$)
- En utilisant les C^a , la fixation de jauge peut être exprimée en terme d'un lagrangien de fixation de la jauge \mathcal{L}_{gf}

1.6.1 Lagrangien de la fixation de jauge : la jauge général \mathbf{R}_ξ

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{\xi_W} F^+ F^- - \frac{1}{2\xi_Z} (F^Z)^2 - \frac{1}{2\xi_\gamma} (F^\gamma)^2.$$

Avec la fixation de la jauge fonctionnelle F^a (ξ_V des paramètres arbitraires)

$$F^\pm = \partial W^\pm \pm i\xi_W M_W \phi^\pm, \quad F^Z = \partial Z - \xi_Z M_Z \chi, \quad F^\gamma = \partial A \quad (1.77)$$

Caractéristiques de la fixation de jauge \mathbf{R}_ξ

- Élimination des termes de mélange $(W_\mu^\pm \partial^\mu \phi^\pm), (Z_\mu \partial^\mu \chi)$ dans le Lagrangien \rightarrow découplage des champs de jauge et de Goldstone.

Cas particuliers importants

- **La jauge de T’Hooft-Feynman** $\xi_V = 1$: Dans le cas de la jauge de T’Hooft-Feynman, les termes de la fixation de jauge sont

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} (\partial^\mu Z_\mu + M_Z Z_f)^2 - |\partial^\mu W_\mu^+ + M_W W_f^+|^2. \quad (1.78)$$

Les divergences en carré des champs transforment la partie quadratique du lagrangien des bosons vectoriels en une forme diagonale, le carré des termes des champs de Goldstone donne la masse aux particules de Goldstone égal à la masse des champs des bosons vectoriels correspondants.

- **La jauge unitaire** $\xi_W, \xi_Z \rightarrow \infty$: Le cas de la jauge unitaire peut être considéré comme une limite de $\xi \rightarrow \infty$ du Lagrangien de la fixation de jauge suivante.

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{M_Z^2}{2\xi} (Z_f)^2 - \frac{M_W^2}{\xi} (W_f^+ W_f^-). \quad (1.79)$$

Dans la jauge unitaire tous les ghosts et les champs de Goldstone peuvent être négligeables.

1.6.2 Les Ghosts de Faddeev-Popov

Le correspondant au terme de Faddeev-Popov est

$$\mathcal{L}_{FP}(x) = -\bar{c}^a(x) M^{ab}(x) c^b(x) \quad (1.80)$$

Où

$$M^{VV'}(x) = \delta^{VV'} (\square_x + \xi_V M_V^2) + \text{termes linéaires des champs scalaires et vectoriels} \quad (1.81)$$

$c^b(x)$ et $\bar{c}^a(x)$ sont des champs auxiliaires anti-commutatifs, ils sont appelés les ghosts de

Faddeev-Popov.

Caractéristiques des champs des Ghosts de Faddeev-Popove

- Les ghosts ne correspondent pas à des états physiques, ils apparaissent uniquement à l'intérieur des boucles dans les diagrammes de processus physiques.
- Les champs des ghosts ont le spin 0, mais ils anticommulent(ils violent le théorème de la statistiques de spin comme étant des états physiques), en tant que des fermions dans les règles de Feynmans
- Les champs des ghosts se couplent avec les champs de Jauge et les champs scalaires (mais pas avec les fermions) [33] [34].

Chapitre 2

Théorie de jauge dans le formalisme différentiel des espaces discrets

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons une des approches de la géométrie noncommutative développée et mise au point par A. Sitarz, cette approche est basée sur Le formalisme des groupes discrets, ce formalisme a été construit pour traiter les symétries discrètes dites aussi les symétries de jauge, il a été employé essentiellement dans cette étude pour construire une théorie de jauge noncommutative ce qui donne une origine géométrique au potentiel de Higgs dans un terme du potentiel de jauge [19] – [23], toute au long de cette analyse, nous utilisons les théories de jauge dans sa formulation classique, nous exposons aussi les bases sur lesquelles le formalisme des espaces discrets a été développé [10] – [21], [35], [36], ce formalisme sera utilisé dans le chapitre suivant pour reformuler la quantification du lagrangien du Modèle Standard des interactions électrofaibles.

2.2 Théorie de jauge sur les groupes discrets

Formalisme différentiel

Sois G un groupe fini et \mathcal{A} l'algèbre des fonctions à valeurs complexes sur G . On désigne la multiplication sur le groupe par \odot et la dimension du groupe par N_G . La multiplication à droite et à gauche sur G implique un automorphisme naturelles de \mathcal{A} , R_g et L_g , respectivement

$$(R_h f)(g) = f(g \odot h) \quad (2.1)$$

avec une définition similaire pour L_g

$$(L_h f)(g) = f(h \odot g)$$

Maintenant, pour construire l'extension de \mathcal{A} à l'algèbre différentielle graduée, on va suivre la procédure standard du calcul différentiel sur les variétés, en particulier sur les groupes de Lie.

Tout d'abord, on identifie les champs vectoriels sur \mathcal{A} avec les opérateurs linéaires sur \mathcal{A} , lesquelles leur noyau égal à l'espace des fonctions constantes. Ils forment un sous algèbre de $GL(N_G, \mathbb{C})$, avec une structure supplémentaire du module gauche projectif d'une dimension finie sur \mathcal{A} . On peut définir l'espace vectoriel \mathcal{F} des champs vectoriels invariants sous l'action gauche comme le prouve l'identité suivante

$$\partial \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{A} L_h \partial(f) = \partial(L_h f). \quad (2.2)$$

Avant de discuter la structure algébrique de \mathcal{F} nous observons que cet espace vectoriel est de dimension $N_G - 1$, il génère le module des champs vectoriels. Cela signifie que pour une base donnée de $\mathcal{F}, \partial_i, i = 1 \dots N_G$, chaque champ vectoriel peut être exprimé comme une combinaison linéaire $f_i \partial_i$, avec les coefficients f_i de l'algèbre \mathcal{A} .

\mathcal{F} constitue une algèbre, on trouve que ses relations des générateurs sont du second ordre, elles vérifient l'identité

$$\partial_i \partial_j = \sum_k C_{ij}^k \partial_k \quad (2.3)$$

Où C_{ij}^k sont des constants de structure, en raison de l'associativité de l'algèbre, ils

doivent obéir à l'ensemble des relations suivantes

$$\sum_l C_{ij}^l C_{lk}^m = \sum_l C_{il}^m C_{jk}^l \quad (2.4)$$

On choisit une base spécifique de \mathcal{F} pour calculer les relations (2-4) dans ce cas particulier. On introduit la base de \mathcal{F} donnée par les éléments de $G' = G \setminus \{e\}$, où e est l'élément neutre de G' .

$$\partial_g f = f - R_g f, \quad g \in G', f \in \mathcal{A} \quad (2.5)$$

Les relations de structure (2-4) deviendront plus simples dans la base choisie

$$\partial_g \partial_h = \partial_g + \partial_h - \partial_{(h \circ g)}, \quad g, h \in G' \quad (2.6)$$

Avec

$$C_{ph}^g = \delta_p^g + \delta_h^g - \delta_{(h \circ p)}^g \quad (2.7)$$

On introduit l'intégrale de Haar, qui est une fonctionnelle linéaire de valeur complexe sur \mathcal{A} qui reste invariante sous l'action de la multiplication à droite R_g

$$\int f = \frac{1}{N_G} \sum_{g \in G} f(g) \quad (2.8)$$

Elle est normalisée à 1, de sorte que $\int 1 = 1$.

Bien que les éléments de \mathcal{F} ne satisfont pas les règles de Leibniz, $(\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b))$, Ils représentent l'inverse pour l'intégration. En effet, on remarque que pour tout $f \in \mathcal{A}$ et pour tous les $v \in \mathcal{F}$ l'intégrale (2-9) de $v(f)$ est nulle. Pour cette raison, on peut les considérer comme correspondant aux dérivations sur l'algèbre \mathcal{A} .

On définit l'espace des 1-formes Ω^1 comme un module à gauche avec une définition appropriée de l'action sur \mathcal{A} , qui est dual à l'espace des champs vectoriels cela, cependant, est une simple conséquence de la structure différentielle.

On peut introduire la notion des formes invariantes sous action à gauche, qui, en

agissant sur les éléments de \mathcal{F} , donnent des fonctions constantes. En choisissant la base de \mathcal{F} on obtient automatiquement la base duale de \mathcal{F}^* composée par des formes χ^g , $g \in G'$, satisfont

$$\chi^g(\partial_h) = \delta_h^g. \quad (2.9)$$

Pour construire une algèbre différentielle graduée, on a besoin de construire des n-formes et leurs produits pour un nombre entier positif arbitraire n . Evidemment, on identifie les zéro-formes Ω^0 avec l'algèbre \mathcal{A} elle-même et ses produit ainsi que le produit dans l'algèbre. La définition des formes de degré supérieure Ω^n est directe, elle s'effectue grâce au produit tensoriel de n copies de Ω^1 ,

$$\Omega^n = \underbrace{\Omega^1 \otimes \dots \otimes \Omega^1}_{n \text{ fois}} \quad (2.10)$$

Pour compléter la construction de l'algèbres différentielle on a besoin de définir une dérivée extérieure d pour passer de Ω^n à Ω^{n+1} , c'est l'objet du lemme suivant :

Lemma 1 *Il existe un opérateur linéaire unique $d, d : \Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}$ qui est nilpotent, $d^2 = 0$, vérifie $(d(ab) = (da)b + a(db))$, la règle de Leibniz graduée pour chaque $f \in \mathcal{A}$ et chaque champs vectoriel ν $df(\nu) = \nu(f)$, à condition que l'action à droite et à gauche de \mathcal{A} sur \mathcal{F}^* est liée comme suit,*

$$\chi^g f = (R_g f) \chi^g, \quad g \in G', \quad f \in \mathcal{A}, \quad (2.11)$$

Et que les relations de structures tenir la condition suivante ;

$$d\chi^g = -\sum_{h,k} C_{hk}^g \chi^h \otimes \chi^k, \quad g \in G'. \quad (2.12)$$

Nous observons qu'en raison des propriétés du produit tensoriel la condition (2-12) pourrait être étendue à l'espace de toutes les 1-formes. Par conséquence, ça va donner à Ω^1 la structure d'un module à droit, déjà mentionné si dessus. La condition suivante

(2-13) est équivalente aux relations de structure de Maurer-Cartan pour les groupes de Lie.

La démonstration de ce lemme peut être consultée dans [19].

On termine cette section par la définition de l'involution sur l'algèbre différentielle, celle-ci doit être compatible avec la conjugaison complexe sur l'algèbre \mathcal{A} et commute (de façon graduée) avec d , c'est-à-dire $d(\omega^*) = (-1)^{\deg \omega} (d\omega)^*$. Encore une fois, il suffit de définir l'involution pour les 1-formes

$$(\chi^g)^* = -\chi^{g^{-1}} \quad (2.13)$$

2.3 Théorie de jauge

Formalisme général

Dans cette section, on va construire la théorie de jauge sur les groupes discrets en utilisant le calcul différentiel, qu'on a juste mis en place. Tout d'abord, on va expliquer quelques idées de base. Le point de départ est l'algèbre différentielle enveloppante $\tilde{\otimes}^* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes^n$ avec sa sous algèbre de zéro-formes $\tilde{\mathcal{A}} \subset \tilde{\otimes}^*$. Le groupe des transformations de jauge est pris comme n'importe quel sous-groupe propre $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{A}}$, qui génère $\tilde{\mathcal{A}}$. En particulier, on prend \mathcal{H} pour qu'il soit un groupe des éléments unitaires sur $\tilde{\mathcal{A}}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{U}(\tilde{\mathcal{A}}) = \left\{ a \in \tilde{\mathcal{A}} : aa^* = a^*a = 1 \right\}$$

On suit les mêmes étapes utilisées dans la construction d'une théorie de jauge traditionnelle (le premier chapitre). La dérivée extérieure d n'est pas covariante à l'égard des transformations de jauge. Par conséquent, on doit remplacer la dérivée d par la dérivée covariante $d + \Phi$ qui contient un champ de jauge (compensateur), où Φ est une 1-forme. En imposant que $d + \Phi$ est covariante sous les transformations de jauge

$$d + \Phi \rightarrow H^{-1} (d + \Phi) H, \quad H \in \mathcal{H} \quad (2.14)$$

On obtient les règles de transformation de Φ suivante

$$\Phi \rightarrow H^{-1}\Phi H + H^{-1}dH \quad (2.15)$$

Φ est le potentiel de jauge, il s'appelle également une connexion. Si le groupe de jauge est unitaire, on exige aussi que la dérivée covariante soit Hermétique, c'est à dire

$$(d + \Phi)(a^*b) = a^*(d + \Phi)b + (b^*(d + \Phi)a)^*, \quad a, b \in \tilde{\mathcal{A}} \quad (2.16)$$

Ce qui aboutit à la condition que la connexion est anti-self adjointe, $\Phi = -\Phi^*$. Finalement, on a la courbure de 2-forme définie par $F = d\Phi + \Phi\Phi$, considérée comme une covariance de jauge.

Afin de procéder à la construction et de l'analyse de la théorie de Yang-Mills, on a besoin d'introduire une métrique.

Définissons la métrique η comme une forme sur le module gauche des 1-formes, à valeurs dans l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ et qui est bilinéaire sur l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$

$$\eta : \tilde{\Omega}^1 \times \tilde{\Omega}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \quad (2.17)$$

$$\eta(av, ub) = a\eta(v, u)b, \quad a, b \in \tilde{\mathcal{A}}, \quad u, v \in \tilde{\Omega}^1$$

On note que η n'est pas forcément symétrique, on peut considérer cependant, le \mathbb{C} -fonctionnelle bilinéaire à valeur sur $\tilde{\Omega}^1$, elle compose la métrique η et l'intégrale sur $\tilde{\mathcal{A}}$.

2.4 Transformations de jauge, connexion et courbure sur les groupes discrets

Prenons l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}}$ comme un produit tensoriel de l'algèbre \mathcal{A} des fonctions évaluées et complexes sur G qu'on a déjà introduit dans la section précédente, avec une algèbre

A , qui pourrait être l'algèbre complexe des matrices M_n ($n \times n$), Dans ce cas, l'algèbre différentielle de $\tilde{\Omega}^*$ est le produit tensoriel de Ω^* par A . Le groupe des transformations de jauge, tel qui est défini ci-dessus, peut être identifié par le groupe des fonctions sur G en prenant une valeur dans un groupe $H \subset A$. De même, les potentiels de jauge sont interprétés comme des 1-formes évalués.

On va désigner l'involution sur A par \dagger .

Grâce à cette structure simplifiée, il suffit de construire la métrique pour l'algèbre différentielle de Ω^* , tel que décrit dans la section précédente, car elle pourrait être étendue pour tout l'ensemble de l'algèbre. L'interprétation directe de cette propriété est que la métrique dépend uniquement de l'espace de base de la théorie de jauge, caractérisée par \mathcal{A} , et non pas sur l'espace des objets, caractérisée par A . On prend l'intégrale pour qu'il soit la combinaison de l'intégrale de Haar, tel que défini à (2-9) et l'opération de trace sur l'algèbre A .

Avant de présenter la métrique, on montre les règles de la transformation de jauge (2-16) pour la connexion et la courbure dans une base convenable, qu'on a choisi (2-10). Si on écrit $\Phi = \sum_g \Phi_g \chi^g$, la transformation de Φ_g sous les transformations de jauge $H \in \mathcal{H}$ est

$$\Phi_g \rightarrow H^{-1} \Phi_g (R_g H) + H^{-1} \partial_g H \quad (2.18)$$

La condition $\Phi = -\Phi^*$ exige la relation suivante de leurs coefficients

$$\Phi_g^\dagger = R_g (\Phi_{g^{-1}}) \quad (2.19)$$

Si on introduit un nouveau champ $\Psi = 1 - \Phi$, $\Psi_g = 1 - \Phi_g$, on peut voir que (2-19) est équivalent à

$$\Psi_g \rightarrow H^{-1} \Psi_g (R_g H) \quad (2.20)$$

L'introduction de Ψ est convenable pour les calculs car il simplifie les formules.

Alors la courbure

$$F = \sum_{g,h} F_{gh} \chi^g \otimes \chi^h \quad (2.21)$$

En utilisant Φ et Ψ dans la définition de F et les règles du calcul différentiel ainsi que la forme exacte des constants de structures, on obtient

$$F_{gh} = \Phi_{(h \odot g)} - \Phi_g - R_g(\Phi_g) + \Phi_g R_g(\Phi_h) \quad (2.22)$$

On peut écrire la même formule en utilisant Ψ

$$F_{gh} = \Psi_g R_g(\Psi_h) - \Psi_{(h \odot g)} \quad (2.23)$$

Les règles de transformation pour F_{gh} se résultent de la covariance de jauge de F .

2.4.1 Théorie de jauge sur $M_4 \times Z_2$

Dans cette section on examine les méthodes de base de la construction d'une théorie de jauge sur un produit d'un espace de Minkowski continu M_4 et un espace discret à deux points Z . Le travail est consacré seulement au secteur bosonique (Plus de détail dans l'annexe B).

Soit x^μ représente les coordonnées de M_4 et soit Z_2 un groupe abélien cyclique à deux éléments e et r , avec $r^2 = e$. On désigne les éléments du groupe de Z_2 par $+$ et $-$. On prend le groupe H comme $U(N)$ et l'algèbre A des matrices $(n \times n)$ à des éléments complexes $M_n(\mathbb{C})$. Puisque le groupe de structure H est unitaire, les connexions doivent être antihermétiques, on obtient alors la relation suivante

$$\Phi_-(+) = \Phi_-^\dagger(-) \quad (2.24)$$

La même relation s'applique sur $\Psi_- = 1 - \Phi_-$, ce qui veut dire qu'on a effectivement un seul degré de liberté représenté par une matrice complexe arbitraire. Qu'on prend

comme $\hat{\Psi} = \Psi_- (+)$

On remarque que, pour $n \geq 1$ tout les Ω^n sont unidimensionnels. Par conséquent, la courbure 2-forme $F = F_{--}\chi^- \otimes \chi^-$ est complètement déterminée par une fonction de coefficient F_{--} , en utilisant l'équation $F_{gh} = \Psi_g R_g(\Psi_h) - \Psi_{(h \odot g)}$, l'équation (2-25) peut être mise sous la forme

$$F_{--} (+) = \hat{\Psi}\hat{\Psi}^\dagger - 1 \quad (2.25)$$

$$F_{--} (-) = \hat{\Psi}^\dagger\hat{\Psi} - 1 \quad (2.26)$$

Dans ce cas, la métrique est triviale, pour des raisons de simplicité, Elle est représentée par un seul nombre $\eta^{--} = 1$

Maintenant, on peut facilement voir que toutes les possibilités de l'action de Yang-Mills sont réduites à

$$S_{YM} = Tr \left(\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} - 1 \right)^2 \quad (2.27)$$

Après l'intégration de Haar

Cela a exactement la forme du potentiel du modèle de Higgs [20]. Notons enfin que l'on peut rajouter un terme à cette action qui est linéaire en F et qui est proportionnel à $Tr \left(\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} - 1 \right)$. Dans ce cas, on obtient l'action totale équivalente à $S_{YM} = Tr \left(\hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} - 1 \right)^2$, avec le champ Ψ reparamétrisé.

2.4.2 Produits des géométries discrète et continue

Dans cette section, on discute la façon (proposée par A. Sitarz) de combiner les symétries discrètes avec les symétries continues. Supposons deux algèbres différentielles et graduées, Ω_1, Ω_2 , dotées d'opérateurs de dérivées extérieures d_1 et d_2 respectivement. Alors, on peut construire leur produit tensoriel, qui peut créer une nouvelle algèbre différentielle graduée à partir de Ω_1 et Ω_2 en supposant que

$$d(\omega_1 \tilde{\otimes} \omega_2) = (d_1 \omega_1) \tilde{\otimes} \omega_2 + (-1)^{\deg \omega_2} \omega_1 \otimes (d_2 \omega_2) \quad (2.28)$$

Prenons comme première composante l'algèbre des formes différentielles usuelles sur une variété. La deuxième sera prise comme l'algèbre des formes différentielles sur un groupe discret.

Le produit tensoriel de ces deux algèbres est la base de la description des modèles combinant à la fois la géométrie continue et discrète, sachant que nous avons distingué entre le produit tensoriel de ces algèbres, noté par $\tilde{\otimes}$ et le produit dans l'algèbres Ω_2 , indiqué de nouveau par \otimes et le produit dans Ω_1 , généralement indiqué par \wedge .

Comme un exemple très illustratif on calcule ici, la théorie de jauge unitaire sur $M \times \mathbb{Z}_2$.

Dans cet exemple, supposons que l'algèbre des 1-formes est constituée par des fonctions complexes, avec leurs arguments de $M \times \mathbb{Z}_2$. Le groupe de jauge est alors $U(1)$. On a l'action de la dérivée extérieure sur chaque algèbre, ainsi que la règle (2-29), la connexion de jauge totale \mathbf{A} est une 1-forme, comprenant la géométrie différentielle des formes discrètes et continues, elle se divise en deux parties : discrète Φ et continue A_μ

$$\mathbf{A} = \sum_{\mu} A_{\mu} dx^{\mu} + \Phi \chi^{-} \quad (2.29)$$

A_{μ} et Φ_{-} sont des fonctions sur l'espace produit, c'est à dire que la fonction a deux arguments $(x, g) \in M \times \mathbb{Z}_2$; $A_{\mu} = A_{\mu}(x, g)$ et $\Phi = \Phi(x, g) = R_{-}(\Phi(x, g))^*$. Calculons la courbure totale qui va contenir la courbure continue $F^{\mu\nu} dx_{\mu} \wedge dx_{\nu}$ et discrète $(\Psi\Psi^* - 1) \chi^{-} \otimes \chi^{-}$, plus un termes mixte.

Notons que lorsque $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ et ∂_{-} commutent, le produit de leurs formes dual anticommulent : $dx^{\mu} \tilde{\otimes} \chi^{-} = -\chi^{-} \tilde{\otimes} dx^{\mu}$. Après quelques calculs simplifiant, on obtient finalement

$$\begin{aligned} F &= \sum_{\mu, \nu} \left(\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} + (\Psi\Psi^* - 1) \chi^{-} \otimes \chi^{-} \\ &+ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} - A_{\mu} \Psi + R_{-}(A_{\mu}) \Psi \right) dx^{\mu} \tilde{\otimes} \chi^{-} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Chapitre 3

Reformulation quantique du Modèle Standard

3.1 Introduction

La géométrie différentielle noncommutative est une nouvelle approche de la géométrie, qui prépare le terrain pour une nouvelle direction dans le développement des mathématiques et de la physique [10]-[23]. Ces dernières années La géométrie différentielle noncommutative est devenue très importante, spécialement lorsque les espaces noncommutatifs maintiennent une topologie et une géométrie riches exprimées tous d'abord dans la K-théorie. Ce sujet a été traité d'un côté plus algébrique avec les groupes quantiques et leurs espaces quantiques homogènes, il est relié également aux développements dans plusieurs domaines des mathématiques pures et de la physique mathématique.

L'espace discret est une méthode parmi les nombreuses tentatives de la reconstruction du modèle standard classique dans la géométrie noncommutative (NCG) [35] – [48], où le lagrangien est invariant par les transformations de jauge, les secteurs bosonique et fermionique ont été obtenus avec succès. Cependant, la manière de construire la version quantique du modèle standard dans ce formalisme reste imprécise et non claire en dépit de certaines approches. Dans ce chapitre, nous appliquons une nouvelle méthode algébrique

où le formalisme ordinaire de l'espace discret est étendu à un superespace. Nous avons présenté les One et les Two superforms (2-superform, 1-superform). La propriété de la nilpotence de la dérivée extérieure généralisée impose quelques contraintes, l'identité de Jacobi pour les constantes de structure de l'espace discret est dérivée. Nous avons défini un produit scalaire modifié, les termes de Fadeev-Popov et de la fixation de jauge, de même les transformations BRS liées aux champs appropriés sont obtenues dans la deuxième section, nous présentons le formalisme et dérivons les termes de Fadeev-Popov et de la fixation de jauge correspondantes dans la troisième section, aussi bien que les transformations de BRS des champs différents dans la quatrième section.

3.2 Formalisme

3.2.1 Superspace discret et superformes généralisées

La description géométrique des interactions électrofaibles quantiques en terme de produit des géométries continue, discrète et grassmannienne est un pas très important vers l'amélioration de notre compréhension des interactions physique.

En tous ce qui suit on utilise le formalisme des B-champs en introduisant le superspace discret $M_4 \otimes Z_2 \otimes S^1$ où M_4 est l'espace de Minkowski, Z_2 l'espace Discret et S^1 est l'espace de Grassmann.

On défini le 1-superforme \mathcal{A} généralisé

$$\mathcal{A} = V_\mu dx^\mu + A_\theta d\theta + A_h \chi^h \quad (3.1)$$

Où dx^μ , $d\theta$ et χ^h sont les super bases des 1-superformes du superspace discret avec

$$(dx^\mu)^* = dx^\mu \quad , \quad d^2 x^\mu = 0 \quad (3.2)$$

$$(d\theta)^* = d\theta \quad , \quad d^2 \theta = 0 \quad (3.3)$$

$$(\chi^h)^* = -\chi^h \quad , \quad d\chi^{h-1} \neq 0 \quad (3.4)$$

h^{-1} est l'élément inverse de h dans les groupes discrets Z_N

Les fonctions superévaluées V_μ , A_h et A_θ sont données en forme de six composantes

$$V_\mu(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} A_\mu \\ \theta \delta_{BRS} A_\mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$A_h(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} \phi_h \\ 0 \\ \theta \delta_{BRS} \phi_h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$A_\theta(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{C} \\ \theta \delta_{BRS} \bar{C} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Où θ est un variable de Grassman, $dx^\mu, d\theta$ et χ^g sont des 1-formes, les bases de l'espace-temps de Minkowski, noncommutatives et l'espace discret respectivement (μ est un indice de Lorentz et $h \in Z_N$).

δ_{BRS} sont les transformations BRS seront déterminées ultérieurement par la condition de like horizontalité

Les matrices des fonctions évaluées (à valeur complexe) A_μ, φ_h et \bar{C} sont

$$A_\mu = A_\mu(x, \theta, h) = A_\mu^a T^a \quad a = \overline{0, 3} \quad (3.8)$$

$$\phi_h = \phi_h(x, \theta, h), \quad g, h \in Z_2 \quad (3.9)$$

Et

$$\bar{C} = \bar{C}(x, h) = \bar{C}^a T^a \quad (3.10)$$

Notons que le choix de la forme de six composantes des fonctions super évaluées V_μ, A_θ et A_h n'est pas unique, on associe à chaque fonction super évaluée V_μ, A_θ et A_h les caractères suivants ξ_μ, ξ_θ et ξ_h respectivement définies par

$$\xi_\mu = \sum_{j=1}^6 (V_\mu)_j \quad (3.11)$$

$$\xi_\theta = \sum_{j=1}^6 (C_{FP} A_\theta)_j \quad (3.12)$$

Et

$$\xi_h = \sum_{j=1}^6 (A_h)_j \quad (3.13)$$

L'opérateur de Fadeev-Popov C_{FP} est donné par la matrice suivante

$$C_{FP} A_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C \\ \theta \delta_{BRS} C \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Maintenant on peut construire les champs de force (Field Strength) associés $\varpi_{\mu\theta}, \varpi_{g\theta}$

et $\varpi_{\theta\theta}$

$$\varpi_{\mu\theta} = \partial_\mu \xi_\theta - \partial_\theta \xi_\mu + [\xi_\mu, \xi_\theta] \quad (3.15)$$

$$\varpi_{g\theta} = \partial_g \xi_\theta - \partial_\theta \xi_g - \frac{i}{2} \{\xi_g, \xi_\theta\} \quad (3.16)$$

Et

$$\varpi_{\theta\theta} = \partial_\theta \xi_\theta + \{\xi_\theta, \xi_\theta\} \quad (3.17)$$

Par similitude on définit à partir des transformations BRS d'autres matrices à des fonctions évaluées C et B comme suit

$$C = C(x, h) = C^a T^a \quad (3.18)$$

Et

$$B = B(x, h) = B^a T^a \quad (3.19)$$

Sachant que T^0 est la matrice Unitaire, T^a ($a = \overline{0, 3}$) sont les matrices de Pauli et les générateurs du groupe $SU(2)$ dans la représentation fondamentale.

Les quantités A_μ^a , ϕ_h , \overline{C}^a , C^a et B^a représentent respectivement les bosons de jauge, le champ scalaire, anti-ghosts, ghosts et les champs auxiliaires.

3.2.2 Dérivée extérieure $d\mathcal{A}$

On définit la super dérivée extérieure df d'une fonction arbitraire $f(x, h)$ par

$$df = \partial_\mu f dx^\mu + \partial_\theta f d\theta + \hat{\partial}_h f \chi^h \quad (3.20)$$

Où les propriétés du produit extérieur des 1-superformes sont données par les relations suivantes

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu \quad (3.21)$$

$$\chi^g \Lambda \chi^h = -\chi^h \Lambda \chi^g \quad (3.22)$$

$$dx^\mu \wedge \chi^g = -\chi^g \wedge dx^\mu \quad (3.23)$$

$$dx^\mu \wedge d\theta = -d\theta \wedge dx^\mu \quad (3.24)$$

$$d\theta \wedge \chi^g = -\chi^g \wedge d\theta \quad (3.25)$$

Et

$$d\theta \wedge d\theta = 0 \quad (3.26)$$

Les dérivées extérieures des 1-superformes vérifient ces équations

$$ddx^\mu = 0 \quad (3.27)$$

$$dd\theta = 0 \quad (3.28)$$

Et

$$d\chi^g = -C_{p,h}^g \chi^p \wedge \chi^h \quad (3.29)$$

Les quantités $C_{p,h}^g$ sont des constantes des structures de l'espace discret. Sachant que les bases χ^g des 1-formes de l'espace discret vérifient la relation

$$\chi^g f(x, h) = [R_g f(x, h)] \chi^g \quad (3.30)$$

Où l'action de l'opérateur R_g est

$$R_g f(x, h) = f(x, g \bullet h), \quad g, h \in Z_2 \quad (3.31)$$

" \bullet " est une opération interne du groupe discret Z_2 , bien que les fonctions super évaluées V_μ , A_h et A_θ sont supposées d'avoir les propriétés suivantes

$$(V_\mu)^* = -V_\mu \quad (3.32)$$

$$A_h^+ = R_g A_{h-1} \quad (3.33)$$

Et

$$(A_\theta)^* = A_\theta \quad (3.34)$$

Il faut rappeler qu'on doit rassurer l'élimination des termes non physiques dans le Lagrangien quantique final et pour cela on introduit une dérivée discrète généralisée $\hat{\partial}_g$ définie par

$$\hat{\partial}_g A_h = \partial_g A_h \quad (3.35)$$

$$\hat{\partial}_g A_\mu = \partial_g A_\mu \quad (3.36)$$

$$\hat{\partial}_g A_\theta = \partial_g \hat{A}_\theta \quad (3.37)$$

∂_g est la dérivée discrète ordinaire

$$\partial_g f(x, h) = f(x, h) - R_g f(x, h) \quad (3.38)$$

Et

$$\hat{A}_\theta = \hat{A}_\theta(x, \theta, g) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{C} \\ 0 \\ \theta \delta_{BRS} \bar{C} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

En utilisant les considérations précédentes et après des simplifications de calcul on peut écrire $d\mathcal{A}$ la dérivée de 1-superforme, pour calculer le 2-superforme généralisé

$$d\mathcal{A} = \Omega_{\nu\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu + \Omega_{h\mu} \chi^h \wedge dx^\mu + \Omega_{\theta\mu} d\theta \wedge dx^\mu + \Omega_{\theta g} d\theta \wedge \chi^g + \Omega_{hg} \chi^h \wedge \chi^g \quad (3.40)$$

Avec

$$\Omega_{\nu\mu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu V_\mu - \partial_\mu V_\nu) \quad (3.41)$$

$$\Omega_{h\mu} = \hat{\partial}_h V_\mu - \partial_\mu A_h \quad (3.42)$$

$$\Omega_{\theta\mu} = \partial_\theta V_\mu - \partial_\mu A_\theta \quad (3.43)$$

$$\Omega_{\theta g} = \partial_\theta A_g - \hat{\partial}_g A_\theta \quad (3.44)$$

$$\Omega_{hg} = \hat{\partial}_h A_g - C_{h,g}^p R_{h\bullet g} A_p \quad (3.45)$$

En utilisant la propriété de la nilpotence du produit extérieur généralisé ($dd\mathcal{A} = 0$), on aura les propriétés suivantes

$$C_{h,g}^p R_{h\bullet g} \hat{\partial}_p V_\mu = 0 \quad (3.46)$$

$$R_{h\bullet g} C_{h,g}^p \hat{\partial}_p A_\theta = 0 \quad (3.47)$$

De même pour le Jacobi-like identité est valide pour les groupes discrets Z_N avec $N \geq 3$

$$\begin{aligned} & -C_{h,g}^p [\delta^{h\bullet g\bullet p;i} - \delta^{s\bullet h\bullet g\bullet p;i}] + C_{s,h}^p [\delta^{s\bullet h\bullet g;i} - \delta^{p\bullet s\bullet h\bullet g;i}] \\ & + C_{s,g}^t [\delta^{s\bullet g\bullet t;i} - \delta^{h\bullet s\bullet g\bullet t;i}] - C_{s,h}^t C_{t,g}^p \delta^{h;i} - C_{s,g}^t C_{h,t}^p \delta^{s\bullet g\bullet h;i} = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Où $g \bullet h$ signifie le produit des deux éléments g et h de Z_N des groupes discrets, en respectant l'opération interne " \bullet " et $\delta^{h;i}$ est le symbole de Kronecker.

Dans notre cas nous avons $N = 2$, à cause de l'annihilation du produit trivial, on ne peut pas avoir une identité similaire à celle de la relation (3.48) pour les constants de structure discrets

L'équation (3.46) implique

$$\hat{\partial}_p V_\mu = 0 \quad (3.49)$$

Ou bien

$$\hat{\partial}_p V_\mu = V_\mu \quad (3.50)$$

De même l'équation (3.47) implique

$$\hat{\partial}_p A_\theta = 0 \quad (3.51)$$

Ou

$$\hat{\partial}_p \hat{A}_\theta = \hat{A}_\theta \quad (3.52a)$$

Ainsi que la condition

$$\partial_p \xi_\theta = 0 \quad (3.52b)$$

En tous ce qui suit on prendra les choix (3.49) et (3.52) ensemble pour calculer la densité lagrangienne quantifiée finale ainsi que les termes de Fadeev-Popov, le terme de la fixation de jauge et les transformations BRS.

Par conséquent la charge C_{FP} de Fadeev-Popov et la dérivée discrète ∂_p ne se commutent pas, par contre les transformations δ_{BRS} commutent avec ∂_p .

3.2.3 Produit extérieur généralisé

Introduisant maintenant la définition du produit star *

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \\ a_4 b_4 \\ a_5 b_5 \\ a_6 b_6 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Alors

$$[V_\mu, V_\nu]_* = V_\mu * V_\nu - V_\nu * V_\mu \quad (3.54)$$

Pour calculer les 2-superformes on a besoin de définir le produit extérieur généralisé \wedge^*

par la relation suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \wedge^* \mathcal{A} &= \Lambda_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + \Lambda_{\mu\theta} dx^\mu \wedge d\theta \\ &+ \Lambda_{\mu g} dx^\mu \wedge \chi^g + \Lambda_{\theta g} d\theta \wedge \chi^g + \Lambda_{gh} \chi^g \wedge \chi^h \end{aligned} \quad (3.55)$$

Avec

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [V_\mu, V_\nu]_* \quad (3.56)$$

$$\Lambda_{\mu\theta} = V_\mu * A_\theta \quad (3.57)$$

$$\Lambda_{\mu g} = V_\mu * A_g \quad (3.58)$$

$$\Lambda_{\theta g} = A_\theta * A_g \quad (3.59)$$

Et

$$\Lambda_{gh} = A_g * A_{h'} \quad (3.60)$$

Il faut mentionner que si A et B sont des 1-superformes, la dérivée extérieure généralisée et le produit généralisé vérifient la règle graduée de Leibniz

$$d(A \wedge^* B) = dA \wedge^* B + (-1)^{\deg A} A \wedge^* dB \quad (3.61)$$

Où $\deg A$ est le nombre de ghost de A .

En utilisant les définitions précédentes de la dérivée extérieure généralisée et le produit généralisé on introduit le 2-superforme qui représente le champ de force \mathcal{F} (field strength) généralisé donné par

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge^* \mathcal{A} \quad (3.62)$$

Après la simplification du terme de \mathcal{F} il peut avoir la forme suivante

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\nu\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu + \mathcal{F}_{\mu g} dx^\mu \wedge \chi^g + \mathcal{F}_{hg} \chi^h \wedge \chi^g + \mathcal{F}_{\mu\theta} dx^\mu \wedge d\theta + \mathcal{F}_{\theta g} d\theta \wedge \chi^g \quad (3.63)$$

\mathcal{F} peut être réécrit comme suit

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_C + \mathcal{F}_Q \quad (3.64)$$

Où \mathcal{F}_C et \mathcal{F}_Q sont les composantes classiques et quantiques du champ de force respectivement ils ont les expressions suivantes

$$\mathcal{F}_C = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\nu\mu} dx^\nu \wedge dx^\mu + \mathcal{F}_{\mu g} dx^\mu \wedge \chi^g + \mathcal{F}_{hg} \chi^h \wedge \chi^g \quad (3.65)$$

Et

$$\mathcal{F}_Q = \Omega_{\mu\theta} dx^\mu \wedge d\theta + \Omega_{\theta g} d\theta \wedge \chi^g \quad (3.66)$$

Où

$$\mathcal{F}_{\nu\mu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + [V_\mu, V_\nu]_* \quad (3.67)$$

$$\mathcal{F}_{\mu g} = \partial_\mu A_g + V_\mu * A_g \quad (3.68)$$

$$\mathcal{F}_{hg} = \partial_h A_g - A_h * A_g - C_{hg}^p A_{h \bullet g \bullet p} \quad (3.69)$$

Et

$$\mathcal{F}_{\mu\theta} = \partial_\mu A_\theta - \partial_\theta V_\mu + [V_\mu, A_\theta]_* \quad (3.70)$$

$$\mathcal{F}_{\theta g} = \partial_\theta A_g - \hat{A}_\theta + A_\theta * A_g \quad (3.71)$$

3.2.4 Produit scalaire généralisé et l'action quantique

Pour rassurer la quantification de la théorie il est nécessaire de reconstruire les termes de la fixation de jauge et des ghosts dans la géométrie noncommutative. Dans le calcul qui suit on traite seulement la partie quantique \mathcal{F}_Q du champ de force, la partie classique \mathcal{F}_C est déjà obtenu [19], [20] (voir annexe B).

On défini l'action quantique I_Q par

$$I_Q = \int d^4x \int d\theta \text{Tr} \langle \mathcal{F}_Q \cdot \mathcal{F}_Q \rangle_{\otimes} \quad (3.72)$$

Où Tr est la trace à travers les matrices de Dirac γ

On défini le produit scalaire généralisé par

$$\langle \mathcal{F}_Q \cdot \mathcal{F}_Q \rangle_{\otimes} = \langle \mathcal{F}_Q^+, M \tilde{\mathcal{F}}_Q \rangle \quad (3.73)$$

Où M est une matrice 6×6

$$M_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

Et

$$\tilde{\mathcal{F}}_Q = \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\theta} dx^\mu \wedge d\theta + \tilde{\mathcal{F}}_{\theta h} d\theta \wedge \chi^h \quad (3.75)$$

Avec

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\theta} = \partial_\mu \tilde{A}_\theta - \partial_\theta \tilde{V}_\mu + [\tilde{V}_\mu, \tilde{A}_\theta]_* \quad (3.76)$$

Et

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\theta h} = [\partial_\theta \tilde{A}_h - \tilde{\tilde{A}}_\theta + \tilde{A}_\theta * \tilde{A}_h] \quad (3.77)$$

Le choix de la matrice M n'est pas arbitraire ; il dépend aux choix des six composantes des superchamps différents, il nous permet d'éliminer les termes non physiques dans le Lagrangien quantique final.

Les nouvelles composantes introduites \tilde{V}_μ , \tilde{A}_h , \tilde{A}_θ et $\tilde{\tilde{A}}_\theta$ ont les expressions suivantes

$$\tilde{V}_\mu(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} \delta_{BRS} A_\mu \\ \theta A_\mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

$$\tilde{A}_h(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} \delta_{BRS} \phi_h \\ 0 \\ \theta \phi_h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

$$\tilde{A}_\theta(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_{BRS} \bar{C} \\ \theta \bar{C} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.80)$$

$$\tilde{\tilde{A}}_\theta(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta_{BRS} \bar{C} \\ 0 \\ \theta \bar{C} \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

En utilisant les équations précédentes et après un simple calcul on trouve

$$\mathcal{F}_{\mu\theta}(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta_{BRS}A_\mu \\ 0 \\ \partial_\mu\bar{C} \\ \theta\partial_\mu\delta_{BRS}\bar{C} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\theta}(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} 0 \\ -A^\mu \\ 0 \\ \partial^\mu\delta_{BRS}\bar{C} \\ \theta\partial^\mu\bar{C} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

De même

$$\mathcal{F}_{\theta g}(x, \theta, h) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{BRS}\phi_h \\ -\bar{C} \\ 0 \\ -\theta\delta_{BRS}\bar{C} \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\theta g}(x, \theta, g) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi^g \\ -\delta_{BRS}\bar{C} \\ 0 \\ -\theta\bar{C} \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

On introduit les propriétés

$$(dx^\mu)^* = dx^\mu \quad , \quad (\chi^g)^* = -\chi^{g^{-1}} \quad , \quad (d\theta)^* = d\theta \quad (3.86)$$

En employant les relations suivantes du produit scalaire

$$\langle dx^\mu \wedge d\theta, dx^\nu \wedge d\theta \rangle = g^{\mu\nu} \quad (3.87)$$

$$\langle d\theta \wedge \chi^g, d\theta \wedge \chi^h \rangle = \eta^{gh} \quad (3.88)$$

Où

$$\langle d\theta, d\theta \rangle = g^{\theta\theta} = 1 \quad (3.89)$$

L'intégration de Grassman

$$\int \theta d\theta = 1 \quad , \quad \int d\theta = 0 \quad (3.90)$$

L'action quantique I_Q prendra la forme suivante

$$I_Q = \int d^4x \mathcal{L}_Q \quad (3.91)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Qantique} = & \delta_{BRS} A_\mu \partial^\mu \bar{C} - \partial^\mu \delta_{BRS} \bar{C} A_\mu + \delta_{BRS} \phi^g \bar{C} \\ & + \delta_{BRS} \bar{C} \phi^g - \delta_{BRS} \bar{C} \cdot \delta_{BRS} \bar{C} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Les matrices $g^{\mu\nu}$ et η^{gh} ont été postulées d'être diagonale ce sont des fonctionnelles de l'espace des 1-formes à l'algèbre des fonctions, leurs structures sont définies à partir

des produits scalaires suivants

$$\langle dx^\mu, dx^\nu \rangle = g^{\mu\nu} \quad (3.93a)$$

Et

$$\langle \chi^g, \chi^h \rangle = \eta^{gh} \quad (3.93b)$$

La matrice η^{gh} est proportionnelle à $\delta^{g,h^{-1}}$ et $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Dans notre formalisme on n'a pas introduit les champs des ghosts dans la définition des superconnexions, parce qu'on peut avoir le terme cinétique des ghosts à partir des transformations BRS des champs de jauge.

3.3 Le lagrangien quantique du Modèle Standard

Afin de reproduire une quantification du Lagrangien du Modèle Standard des interactions électrofaibles, qui soit compatible avec le formalisme précédent on doit faire les simplifications suivantes

$$A_\mu(x, e) = T^a A_\mu^a(x) \quad (3.94a)$$

$$A_\mu(x, h) = 0 \quad (3.94b)$$

$$\phi_h(x, e) = \phi_h^+(x, h) = \phi \quad (3.94c)$$

Et

$$\phi_e(x, e) = \phi_e(x, h) = 0 \quad (3.94d)$$

Les éléments $\{e, h\}$ (e est l'élément neutre, $h \neq e$ et $h = h^{-1}$) sont les éléments du groupe discret Z_2 .

3.3.1 La condition de l'horizontalité et les transformations BRS

Pour obtenir les transformations BRS des différents champs on impose la condition

de l'horizontalité suivante, appropriée à l'approche qu'on est entrainé d'appliquer

$$\varpi_{\mu\theta} |_{\theta=0} = \varpi_{g\theta} |_{\theta=0} = \varpi_{\theta\theta} |_{\theta=0} = 0 \quad (3.95)$$

Des simplifications directes de l'éq(3.95) donnent

$$\delta_{BRS} A_\mu^a = D_\mu C^a = \partial_\mu C^a + f^{abd} A_\mu^b C^a \quad (3.96)$$

$$\delta_{BRS} \phi_h = -i C^a T^a \phi_h \quad (3.97)$$

Et

$$\delta_{BRS} C^a = -f^{abd} C^b C^a \quad (3.98)$$

Avec la définition des anti-ghosts et les champs auxiliaires \overline{C}^a et B^a les transformations BRS dans le B -champ formalisme

$$\delta_{BRS} \overline{C}^a = i B^a \quad (3.99)$$

Et

$$\delta_{BRS} B^a = 0 \quad (3.100)$$

f^{abd} sont les constants de structures des groupes de jauge

$$f^{0bd} = 0, \quad \forall b, d = \overline{0, 3} \quad (3.101)$$

Et

$$f^{0bd} = 2i\varepsilon^{abd}, \quad \forall b, d = \overline{1, 3} \quad (3.102)$$

ε^{abd} est un tenseur purement antisymétrique.

3.3.2 Les termes de Fadeev-Popov et la fixation de jauge

Dans le but d'appliquer notre formalisme mathématique et pour reformuler la quantification du Modèle Standard des interactions électrofaibles, il est préférable d'utiliser les composantes transverses, alors le produit scalaire de deux vecteurs E, D peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned} ED &= E^0 D^0 + E^1 D^1 + E^2 D^2 + E^3 D^3 \\ &= E^0 D^0 + E^3 D^3 + E^+ D^- + E^- D^+. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Les composantes transverses E^+ et E^- (similairement pour D^+ et D^-) sont définies par

$$E^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (E^1 \pm iE^2) \quad (3.104)$$

Pour des raisons de calcul on fait une rotation d'angle θ_w pour réécrire les composantes E^A et E^Z (on fait la même chose pour D^A et D^Z)

$$E^A = E^0 \cos \theta_w - E^3 \sin \theta_w \quad (3.105)$$

Et

$$E^Z = E^0 \sin \theta_w + E^3 \cos \theta_w \quad (3.106)$$

Par conséquent le produit scalaire de l'équation (3.103) deviendra

$$ED = E^A D^A + E^Z D^Z + E^2 D^2 + E^3 D^3 \quad (3.107)$$

Pour des raisons physiques et pour la simplification on utilise les redéfinitions suivantes

$$\begin{aligned} \phi^\pm &\rightarrow 2M_w \phi^\pm, & \phi_z &\rightarrow -iM_z \phi_z \\ W_\mu^\pm &= A_\mu^\pm \rightarrow 2i\xi W_\mu^\pm, & Z_\mu &= A_\mu^z \rightarrow i\eta Z_\mu \end{aligned} \quad (3.108a)$$

Et

$$\begin{aligned}
A_\mu &= A_\mu^A \rightarrow i\xi' A_\mu, & B^A &\rightarrow \sqrt{\frac{\xi'}{2}} B^A \\
B^z &\rightarrow \frac{B^z}{\sqrt{2}}, & B^\pm &\rightarrow B^\pm
\end{aligned} \tag{3.108b}$$

Où ξ , η et ξ' sont des paramètres de la fixation de jauge, θ_w est l'angle de Weinberg.

W_μ^\pm , Z_μ (respectivement A_μ) sont les bosons de jauge des interactions faibles (respectivement électromagnétiques) générés par le groupe de Lie SU(2) (respectivement U(1)), M_w et M_z leurs masses, B^A , B^z et B^\pm les composantes transverses des champs auxiliaires.

L'équation (3.92) peut être écrite sous la forme

$$\mathcal{L}_Q = \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} \tag{3.109}$$

Alors les termes exacts de la Fixation de jauge et de Fadeev-Popove sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{GF} &= -\xi' (\partial^\mu A_\mu) B^A - \frac{1}{2} B^A . B^A - \xi B^- \left(\partial^\mu W_\mu^+ - i \frac{M_w \phi^+}{\xi} \right) + B^- B^+ \\
&\quad - \xi B^+ \left(\partial^\mu W_\mu^- - i \frac{M_w \phi^-}{\xi} \right) - \eta B^z \left(\partial^\mu Z_\mu - \frac{M_z \phi_z}{\eta} \right) + \frac{1}{2} B^z . B^z \tag{3.110}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FP} &= i\xi' \bar{C}^A \partial^\mu \left[-\partial_\mu C^A - \frac{ie}{2} [W_\mu^+ C^- - W_\mu^- C^+] \right] \\
&\quad + i\eta \bar{C}^z \left[\partial^\mu \left[\partial_\mu C^A + \frac{ie}{2} [W_\mu^+ C^- - W_\mu^- C^+] \cos \theta_w \right] - i \frac{M_z}{\eta} \left[\frac{g}{2\sqrt{2}} (C^- \phi^+ - C^+ \phi^-) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} g [C^A + C^z t g \theta_w] \cos 2\theta_w (\nu + H) \right] \right] \\
&\quad + \left\{ i\xi \bar{C}^- \left[\partial^\mu [-ie W_\mu^+ (C^z \cot g \theta_w - C^A) + \partial^\mu \partial_\mu C^+ + ie C^+ (Z_\mu \cot g \theta_w - A_\mu)] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g M_w}{2\xi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} C^+ (\nu + H + i\phi_z) \right] + (C^A + C^z t g \theta_w) \phi^+ \right] + c.c \right\} \tag{3.111}
\end{aligned}$$

c.c étant le complexe conjugué.

On a substitué par les constants de couplage g et g' correspondants aux nombres quantiques du faible Isospin et de l'Hypercharge, on a employé la relation de la charge unifiée

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w \quad (3.112)$$

On a utilisé aussi le doublet du champ scalaire complexe après la brisure de la symétrie et le mécanisme de Higgs

$$\phi = \phi_g = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{a=0}^3 T^a \phi^a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

On introduit le symbole $\langle \rangle$ qui désigne la valeur moyenne de l'expectation du vide

$$\langle \phi \rangle = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

Les composantes ϕ^3, ϕ^0 et ϕ^\pm sont définies par

$$\phi^3 = \phi_z \quad (3.115)$$

$$\phi^0 = -i(\nu + H) \quad (3.116)$$

Et

$$\phi^\pm = \frac{\nu}{\sqrt{2}} (\phi^1 \pm i\phi^2) \quad (3.117)$$

D'après l'équation d'Euler Lagrange l'élimination des B-champs auxiliaires conduit à

$$\mathcal{L}_{GF} = -\xi' (\partial^\mu A_\mu)^2 - \xi \left| \partial^\mu W_\mu^+ - i \frac{M_w \phi^+}{\xi} \right|^2 - \frac{\eta}{2} \left(\partial^\mu Z_\mu - \frac{M_z}{\eta} \phi_z \right)^2 \quad (3.118)$$

3.4 Les transformations BRS

En utilisant les transformations BRS des champs physiques dans l'eq. (3.96) – (3.100), les transformations BRS généralisées correspondantes sont

$$\delta_{BRS}W_\mu^\pm = \partial_\mu C^\pm \mp igW_\mu^\pm (C^z \cos \theta_w - C^A \sin \theta_w) \pm igC^\pm (Z_\mu \cos \theta_w - A_\mu \sin \theta_w) \quad (3.119)$$

$$\delta_{BRS}Z_\mu = \partial_\mu C^z + i\frac{g}{2} [W_\mu^+ C^- - W_\mu^- C^+] \cos \theta_w \quad (3.120)$$

$$\delta_{BRS}A_\mu = \partial_\mu C^A + i\frac{g}{2} [W_\mu^- C^+ - W_\mu^+ C^-] \sin \theta_w \quad (3.121)$$

$$\delta_{BRS}\phi^\pm = \frac{g}{2} \left[\pm i (C^z - C^A tg\theta_w) \phi^\pm \pm \frac{i}{\sqrt{2}} C^\pm (\nu + H + i\phi^z) \right] \quad (3.122)$$

$$\delta_{BRS}\phi^z = \frac{g}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (C^- \phi^+ - C^+ \phi^-) - (C^A + C^z tg\theta_w) (\nu + H) \cos 2\theta_w \right] \quad (3.123)$$

$$\delta_{BRS}H = \frac{g}{2} (C^A + C^z tg\theta_w) \phi^z \cos 2\theta_w \quad (3.124)$$

$$\delta_{BRS}C^z = 4igC^+C^- \cos \theta_w \quad (3.125)$$

$$\delta_{BRS}C^\pm = \pm 4ie (C^z \cot \theta_w - C^A) C^\pm \quad (3.126)$$

Et

$$\delta_{BRS}C^A = -4igC^+C^- \sin \theta_w \quad (3.127)$$

Chapitre 4

Phénoménologie au delà du Modèle Standard

4.1 Introduction

La géométrie noncommutative est une nouvelle approche à la géométrie, capable d'atteindre l'échelle de Planck et de déchiffrer la structure fine de l'espace-temps. Elle unifie en un même langage mathématique les symétries continues de l'espace-temps, responsable de la structure macroscopique de la matière, et les symétries de jauge (dites discrète) des particules élémentaires, responsables de la structure microscopique (quantique) de la matière. La géométrie noncommutative nous permet de travailler avec une base générale des théories physiques. Une approche à la géométrie noncommutative (NCG) est celle basée sur la déformation de l'espace-temps. Dans ce contexte, une théorie de jauge avec le produit star et le mapping de Seiberg-Witten maps ont été introduits. Ce formalisme nous permet de calculer les différentes observables physiques d'une manière systématique pour une physique probable au delà du modèle standard et fournir une signature de la structure non commutative de l'espace-temps [49] – [53].

Dans ce chapitre, nous représentons quelques études phénoménologiques de la physique au delà du modèle standard, dans le contexte de la géométrie noncommutative de

l'espace-temps et montrerons les aspects les plus importants caractérisant cette nouvelle physique.

4.2 Importance de la fonction de distribution du Gluon à l'intérieur du Proton

Nous allons montrer pour quelques processus physiques hadroniques que certains sous processus, qui sont interdits dans le cadre du Modèle Standard commutatif, sont permis dans le cadre noncommutatif. En outre, ils deviennent très compétitifs par rapport aux autres contributions qui proviennent des corrections radiatives. Ceci est dû au fait qu'ils contiennent des fonctions de distributions du gluon, qui sont importantes aux très hautes énergies ou à petite fraction du moment x . La figure 1 montre les différentes évolutions et dépendance des fonctions de distribution des quarks de valence, sea et gluon en fonction de x à l'échelle d'énergie Q . Notons l'importance de la fonction de distribution aux petites valeurs de x et quand Q augmente elle devient plus importante encore.

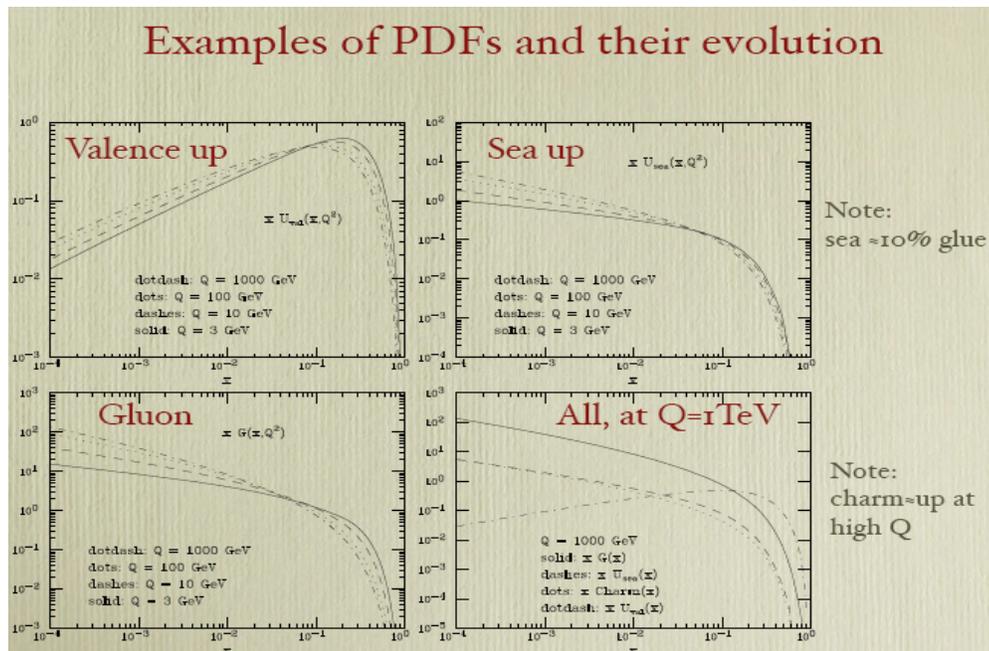


Fig.1 : Exemples des fonctions PDF et leur évolution

4.3 Evolution du couplage electromagnétique avec l'énergie

Une des points les plus importants à les préciser est l'évolution du couplage électromagnétique avec l'énergie. Puisque l'électrodynamique quantique et contrairement à la chromodynamique quantique, est une théorie non asymptotiquement libre. Si on augmente l'énergie le couplage, $\alpha(Q^2)$ augmente. En fait, on peut montrer en utilisant le groupe de renormalisation que l'expression de $\alpha(Q^2)$ a la forme suivante

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha} \quad (4.1)$$

Où $\alpha = 1/137$ et

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_{leptons} + \Delta\alpha_{hadrons} \quad (4.2)$$

$$\Delta\alpha_{hadrons} = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_q \ln(Q^2 / (Am_q^2)) \quad (4.3)$$

$$\Delta\alpha_{leptons} = \frac{\alpha}{3\pi} \sum_l \ln(Q^2 / (Am_l^2)) \quad (4.4)$$

$$A = e^{5/3} \quad (4.5)$$

m_q et m_l désignent les masses des quarks et des leptons respectivement. Pour bien montrer la comparaison de ce couplage avec le couplage fort $\alpha_s(Q^2)$ des interactions fortes tel que son évolution est donnée par

$$\alpha_s(Q^2) = \alpha_s(\mu^2) / \left(1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} (33 - 2N_f) \ln(Q^2/\mu^2) \right) \quad (4.6)$$

Où μ et N_f représentent l'échelle de renormalisation et le nombre des saveurs respectivement. En fait, on a considéré le rapport $R = \alpha(Q^2)/\alpha_s(Q^2)$ en fonction du paramètre d'évolution Q^2 .

On remarque que dans la figure2, lorsque l'énergie augmente ce rapport augmente ce

qui montre l'importance du couplage électromagnétique à très haute énergie.

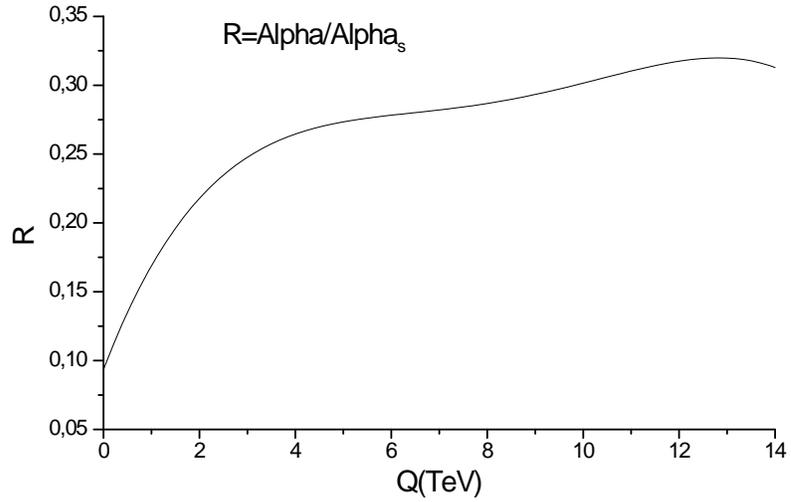


Fig.2 : $R = \alpha(Q^2)/\alpha_s(Q^2)$ en fonction du paramètre d'évolution Q^2 .

4.3.1 Quel est l'ordre de grandeur du paramètre de la noncommutativité ?

Pour estimer l'ordre de grandeur du paramètre de la noncommutativité de l'espace-temps, on a considéré la largeur de désintégration Γ_Z . Tout calcul fait, on peut montrer que

$$\Gamma_Z = 2\Gamma(Z \rightarrow \mu\bar{\mu}) + 3\Gamma(Z \rightarrow d\bar{d}) + 3\Gamma(Z \rightarrow l^+l^-) + N_\nu\Gamma(Z \rightarrow \nu\bar{\nu}) \quad (4.7)$$

Avec

$$\Gamma_Z(Z \rightarrow f\bar{f}) = \frac{4G_F}{3\pi\sqrt{2}} M_Z^2 (\alpha_L^2 + \alpha_R^2) N_c \quad (4.8)$$

Et

$$channel \dots \alpha_L^2 + \alpha_R^2 \quad (4.9)$$

$$\nu\bar{\nu} \dots \frac{1}{16} \quad (4.10)$$

$$\bar{l}l \dots \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \sin^2 \theta_W + 2 \sin^4 \theta_W \right) \quad (4.11)$$

$$\mu\bar{\mu} \dots \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{8}{9} \sin^4 \theta_W \right) \quad (4.12)$$

$$d\bar{d} \dots \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin^2 \theta_W + \frac{2}{9} \sin^4 \theta_W \right) \quad (4.13)$$

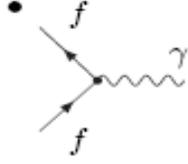
Maintenant si on considère la contribution NCG, on obtient Γ_{NCG} telle que

$$\Gamma_{NCG} \approx \Gamma_{CG} \left(1 + \frac{1}{4} \theta^2 M_Z^4 \right) \approx \Gamma_{\text{exp}} \approx 2.4952 \implies \Lambda_{NCG} \approx O(1TeV), \dots \theta = \frac{1}{\Lambda_{NCG}^2} \quad (4.14)$$

Donc, l'estimation du paramètre de la noncommutativité de l'espace-temps dénoté par Λ_{NCG} de l'ordre de TeV , c'est à dire de l'ordre des énergie du LHC.

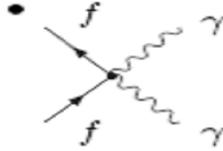
4.3.2 Les lois et diagrammes de Feynman dans la NCG

Pour mieux comprendre les résultats du calcul théorique que nous allons présenter pour certains processus physiques importants pour le LHC, nous présentons dans ce qui suit les nouvelles lois et diagrammes de Feynman du Modèle Standard noncommutatif



$$\begin{aligned}
& ieQ_f \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} p_{\text{in}}^\rho - \theta_{\mu\nu} m_f) \right] \\
&= ieQ_f \gamma_\mu \\
&\quad + \frac{1}{2} eQ_f [(p_{\text{out}}\theta p_{\text{in}})\gamma_\mu - (p_{\text{out}}\theta)_\mu(\not{p}_{\text{in}} - m_f) - (\not{p}_{\text{out}} - m_f)(\theta p_{\text{in}})_\mu] ,
\end{aligned}$$

(4.15)



$$\frac{-e^2 Q_f^2}{2} \theta_{\mu\nu\rho} (k_1^\rho - k_2^\rho)$$

(4.16)



$$2e \sin 2\theta_W K_{\gamma\gamma\gamma} \theta_3((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3))$$

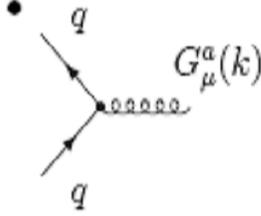
(4.17)

$$\begin{aligned}
\theta_3((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3)) &= -(k_1\theta k_2) [(k_1 - k_2)^\rho g^{\mu\nu} + (k_2 - k_3)^\mu g^{\nu\rho} + (k_3 - k_1)^\nu g^{\rho\mu}] \\
&\quad - \theta^{\mu\nu} [k_1^\rho (k_2 k_3) - k_2^\rho (k_1 k_3)] \\
&\quad - \theta^{\nu\rho} [k_2^\mu (k_3 k_1) - k_3^\mu (k_2 k_1)] \\
&\quad - \theta^{\rho\mu} [k_3^\nu (k_1 k_2) - k_1^\nu (k_3 k_2)] \\
&\quad + (\theta k_2)^\mu [g^{\nu\rho} k_3^2 - k_3^\nu k_2^\rho] + (\theta k_3)^\mu [g^{\nu\rho} k_2^2 - k_2^\nu k_2^\rho] \\
&\quad + (\theta k_3)^\nu [g^{\mu\rho} k_1^2 - k_1^\mu k_1^\rho] + (\theta k_1)^\nu [g^{\mu\rho} k_3^2 - k_3^\mu k_3^\rho] \\
&\quad + (\theta k_1)^\rho [g^{\mu\nu} k_2^2 - k_2^\mu k_2^\nu] + (\theta k_2)^\rho [g^{\mu\nu} k_1^2 - k_1^\mu k_1^\nu]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

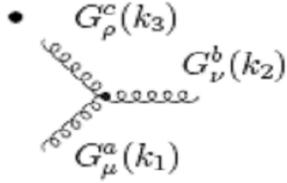
$$(\theta k)^\mu \equiv \theta^{\mu\nu} k_\nu = -k_\nu \theta^{\nu\mu} \equiv -(k\theta)^\mu \quad (4.19)$$

$$(k\theta p) \equiv k_\mu \theta^{\mu\nu} p_\nu \quad (4.20)$$

$$\theta^{\mu\nu\rho} = \theta^{\mu\nu} \gamma^\rho + \theta^{\nu\rho} \gamma^\mu + \theta^{\rho\mu} \gamma^\nu \quad (4.21)$$

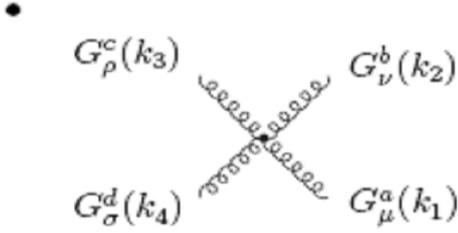


$$\begin{aligned} & ig_s \left[\gamma_\mu - \frac{i}{2} k^\nu (\theta_{\mu\nu\rho} p_{in}^\rho - \theta_{\mu\nu\rho} m_q) \right] T_s^a \\ = & ig_s \gamma_\mu T_s^a \\ & + \frac{1}{2} g_s \left[(p_{out} \theta p_{in}) \gamma_\mu - (p_{out} \theta)_\mu (p_{in} - m_q) - (p_{out} - m_q) (\theta p_{in})_\mu \right] T_s^a \quad (4.22) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & ig_s f^{abc} \left[g_{\mu\nu} (k_1 - k_2)_\rho + g_{\nu\rho} (k_2 - k_3)_\mu + g_{\rho\mu} (k_3 - k_1)_\nu \right] \\ & + \frac{1}{2} g_s d^{abc} \theta_3((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3)). \quad (4.23) \end{aligned}$$

La correction θ du vertex $gggg$ prend la forme suivante



$$\begin{aligned}
& i g_s^2 \{ f^{abx} f^{cdx} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) + f^{acx} f^{bdx} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) + f^{adx} f^{bcx} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) \} \\
& + \frac{i}{2} g_s^2 \{ f^{abx} f^{cdx} \theta_4((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3), (\sigma, k_4)) \\
& + [(\mu, k_1, a) \longleftrightarrow (\rho, k_3, c)] + [(\mu, k_1, a) \longleftrightarrow (\sigma, k_4, d)] \\
& + [(\nu, k_2, b) \longleftrightarrow (\rho, k_3, c)] + [(\nu, k_2, b) \longleftrightarrow (\sigma, k_4, d)] \\
& + [(\mu, k_1, a) \longleftrightarrow (\rho, k_3, c)] + [(\nu, k_2, b) \longleftrightarrow (\sigma, k_4, d)] \} \quad (4.24)
\end{aligned}$$

•

$$- \frac{g_s^2}{2} \{ \theta_{\mu\nu\rho} (k_1^\rho - k_2^\rho) T_S^a T_S^b + i [\theta_{\mu\nu\rho} (p_{in}^\rho + k_2^\rho) - \theta_{\mu\nu} m_q] f^{abc} T_S^c \} \quad (4.25)$$

•

$$- \frac{1}{2} g_s e Q_q \theta_{\mu\nu\rho} (k_1^\rho - k_2^\rho) T_S^a \quad (4.26)$$

•

$$- 2e \sin 2\theta_W K_{\gamma gg} \theta_3((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3)) \delta^{ab} \quad (4.27)$$

$$- 2e \sin 2\theta_W K_{Zgg} \theta_3 ((\mu, k_1), (\nu, k_2), (\rho, k_3)) \delta^{ab} \quad (4.28)$$

4.3.3 Les fonctions splitting modifiées pour des Partons non polarisés dans le cadre de la NCG

Au LHC, on a besoin d'un contrôle théorique du comportement et des erreurs sur les fonctions de distribution des partons (PDFs), et de rechercher des moyens et techniques de la nouvelle physique.

La géométrie noncommutative comme une alternative possible, ouvre des nouvelles fenêtres et propose des scénarios et des signatures spécifiques (missing énergie, corrélations de spin etc...)

Dans ce qui suit, on utilise le Modèle Standard noncommutatif non minimal où les interactions fortes sont aussi incluses. Il est important de mentionner que dans cette approche, en plus des corrections noncommutatives, plusieurs nouvelles interactions apparaissent. Les plus intéressantes sont les interactions gluoniques dans le secteur électrofaible. Concernant les limites actuelles sur Λ_{NCG} , (si on suppose une violation de Lorentz), elles dépendent fortement du modèle s'étalant entre $141 GeV$ dans les expériences des collisionneurs des particules et $2.5 TeV$ pour la production des dileptons en collisions et jusqu'à $1014 GeV$ dans les tests en physique atomique et astrophysique.

Equation d'Altarelli-Parisi

Dans le Modèle Standard ordinaire (commutatif), l'évolution des fonctions de distributions des quarks et des gluons sont contrôlées par les équations intégral-différentielles

d'Altarelli-Parisi suivantes

$$\frac{dq_i(x, Q^2)}{d \log(Q^2)} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \left(q_i(z, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) + g(z, Q^2) P_{qg}\left(\frac{x}{z}\right) \right) \frac{dz}{z} \quad (4.29)$$

$$\frac{dg(x, Q^2)}{d \log(Q^2)} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \left(\sum_i q_i(z, Q^2) P_{gq}\left(\frac{x}{z}\right) + g(z, Q^2) P_{gg}\left(\frac{x}{z}\right) \right) \frac{dz}{z} \quad (4.30)$$

Où $q_i(x, Q^2)$ et $g(x, Q^2)$ représentent les fonctions de distribution des quarks de saveur et des gluons respectivement, les probabilités P_{qg}, P_{gq}, P_{qq} et P_{gg} sont les fonctions de splitting. Dans ce qui suit nous présenteront le calcul des fonctions P_{qg}, P_{gq}, P_{qq} et P_{gg} dans le cadre du Modèle Standard noncommutatif et avec les nouveaux diagrammes et lois de Feynman. Tout calcul fait on obtient

$$\int_0^1 dz P_{qq}(z) = 0 \quad (4.31)$$

$$\downarrow$$

$$P_{qq}(z) = C_2(R) \left(\frac{1+z^2+x_T^2/2}{2z(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) + \frac{1}{2} x_T^2 \left(\frac{1}{z_+} + \frac{1}{(z^2)_{++}} \right) \right) \quad (4.32)$$

La première équation nous indique que le nombre des quarks et antiquarks est conservé.

De même

$$\int_0^1 dz z (2N_f P_{qG}(z) + P_{GG}(z)) = 0 \quad (4.33)$$

$$\downarrow$$

$$P_{GG}(z) = 2G_2(G) \left(\frac{1-z}{z} (1+z^2) + \frac{z}{(1-z)_+} \right) \quad (4.34)$$

$$+ \left(\frac{11}{6} - \frac{2T(R)}{3G_2(G)} \right) \delta(1-z) + x_T^2 f_{GG} \quad (4.35)$$

$$P_{qG}(z) = \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2 + x_T^2 f_{qG}) \quad (4.36)$$

$$f_{GG} = \frac{(1+z^2+(1-z)^2)^2}{z} \left(\frac{1+z}{(z^2)_{++}} + \frac{2}{(1-z)_+} + \frac{1}{((1-z)^3)_{+++}} + \frac{A}{4} \delta(1-z) \right) \quad (4.37)$$

$$f_{qG} = \frac{(2z-1)^2}{z} \left(\frac{z}{((1-z)^2)_{++}} + \frac{1}{(z)_+} + 8B\delta(1-z) \right) \quad (4.38)$$

$$\int_0^1 dz z (P_{qq}(z) + P_{Gq}(z)) = 0 \quad (4.39)$$

↓

$$P_{Gq}(z) = \left(\frac{1+(1-z)^2}{z} \left(1 + \frac{x_T^2}{2z((1-z)^2)_{++}} \right) - \frac{x_T^2}{2} \delta(1-z) \right) \quad (4.40)$$

Avec

$$B + 2 \frac{G_2(G)}{N_f} A = \frac{13}{6} + \frac{46G_2(G)}{N_f} \quad (4.41)$$

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{(1-z)} \quad (4.42)$$

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{((1-z)^2)_{++}} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1) + (1-z)f'(1)}{(1-z)^2} \quad (4.43)$$

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{((1-z)^3)_{+++}} = \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1) + (1-z)f'(1) - \frac{(1-z)^2 f''(1)}{2}}{(1-z)^3} \quad (4.44)$$

$$x_T = \frac{\alpha p_T^2}{Q^2}, \theta^{01} = \frac{\alpha}{Q^2}, \quad \alpha \in [0.1, 1] \quad (4.45)$$

$$P_T^2 = \beta Q^2, \beta \in [0.01, 0.1] \quad (4.46)$$

$$C_2(R) = \frac{N_c^2 - 1}{N_c}, C_2(G) = N_c, T(R) = \frac{N_f}{2} \quad (4.47)$$

On remarque que la contribution de la NCG avec des nouvelles distributions qui présentent plus de singularités, peut être comparable aux corrections d'ordres supérieurs (next to leading order NLO). Cette contribution importante peut affecter l'évolution des distributions partoniques. On remarque aussi que la noncommutativité de l'espace-temps introduit des corrections similaires aux effets K_T (important à des petites x) et l'équation d'évolution généralisée d'Altarelli-Parisi.

4.3.4 Les fonctions de splitting modifiées des Partons polarisés dans NCG

Similairement, on présente ici les résultats du calcul des fonctions splitting dans NCG mais avec des partons polarisés. Nous obtenons les résultats suivants

$$\text{La conservation de la parité dans le QCD} \implies P_{A_+B_+}(z) = P_{A_-B_+}(z) \quad (4.48)$$

$$q = q_+ + q_-, G = G_+ + G_-, \Delta q = q_+ - q_-, \Delta G = G_+ - G_- \quad (4.49)$$

$$P_{AB}(z) = P_{A_+B_+}(z) + P_{A_-B_+}(z) = P_{A_+B_-}(z) + P_{A_-B_-}(z) \quad (4.50)$$

$$\Delta P_{AB}(z) = P_{A_+B_+}(z) - P_{A_-B_+}(z) \quad (4.51)$$

$$\text{Vecteur du couplage quark-gluon conserve l'hélicité} \implies P_{q_-q_+}(z) = P_{q_+q_-}(z) \quad (4.52)$$

$$P_{q_-G_+}(z) = \frac{1}{4} \left((1-z)^2 + x_T^2 f_{q_-G_+} \right) \quad (4.53)$$

$$f_{q_-G_+} = \frac{(2z-1)^2}{zz_+} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} P_{G_+G_+}(z) &= C_2(G) \left((1+z^4) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{(1-z)_+} \right) \right) \\ &+ \left(\frac{11}{6} - \frac{2T(R)}{3C_2(G)} \right) \delta(1-z) + x_T^2 f_{G_+G_+} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$f_{G_+G_+} = \frac{(1+z^2+(1-z)^2)^2}{z} \left(\frac{g_1}{(z^2)_{++}} + \frac{2}{(1-z)_+} + \frac{1}{((1-z)^3)_{+++}} + \frac{A}{4} \delta(1-z) \right) \quad (4.56)$$

$$P_{G_-G_+}(z) = C_2(G) \left(\frac{(1-z)^3}{z} + x_T^2 f_{G_-G_+} \right) \quad (4.57)$$

$$f_{G_-G_+} = \frac{(1+z^2+(1-z)^2)^2}{z} \left(\frac{g_2}{(z^2)_{++}} \right) \quad (4.58)$$

$$B + 2 \frac{C_2(G)}{N_f} A = \frac{13}{6} + \frac{46}{3} \frac{C_2(G)}{N_f} \quad (4.59)$$

$$g_1 + g_2 = 1 + z \quad (4.60)$$

Ici les notations '+' et '-' signifie parallèle et antiparallèle. Les nouvelles contributions de la NCG aux fonctions de splitting des partons polarisés, vont affecter l'évolution en énergie des fonctions de distribution et la physique du spin γ .

4.3.5 Les fonctions splitting modifiées à l'intérieur du Photon pour des Partons non polarisés dans le cadre de la NCG

Equation de l'évolution d'Altarelli-Parisi

On a considéré le calcul des fonctions de splitting à l'intérieur du photon dans le cadre de la NCG et pour des partons non polarisés. Après des calculs simples, nous avons obtenu les résultats suivants

$$\frac{d}{d \ln Q^2} \begin{bmatrix} f^{\gamma/\gamma}(x, Q^2) \\ f^{q/\gamma}(x, Q^2) \\ f^{g/\gamma}(x, Q^2) \end{bmatrix} = \int \frac{dy}{y} \begin{bmatrix} \tilde{P}_{\gamma\gamma} \dots \tilde{P}_{\gamma q} \dots \tilde{P}_{\gamma g} \\ \tilde{P}_{q\gamma} \dots \tilde{P}_{\gamma q} \dots \tilde{P}_{qg} \\ \tilde{P}_{g\gamma} \dots \tilde{P}_{gq} \dots \tilde{P}_{gg} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f^{\gamma/\gamma}(y, Q^2) \\ f^{q/\gamma}(y, Q^2) \\ f^{g/\gamma}(y, Q^2) \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\tilde{P}_{\gamma\gamma}(z) = \frac{4\alpha K_{\gamma\gamma}^2 \sin^2(2\theta_w)}{2\pi} P_{\gamma\gamma}^\gamma(z), \dots, \tilde{P}_{q\gamma}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} P_{q\gamma}^\gamma(z), \dots, \tilde{P}_{qg}(z) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qg}^g(z) \quad (4.62)$$

$$\tilde{P}_{\gamma q}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} P_{\gamma q}^\gamma(z), \dots, \tilde{P}_{\gamma g}(z) = \frac{4\alpha K_{\gamma gg}^2 \sin^2(2\theta_w)}{2\pi} P_{\gamma g}^\gamma(z), \dots, \tilde{P}_{qg}(z) = \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qg}^g(z) + \frac{\alpha}{2\pi} P_{q\gamma}^\gamma(z) \right) \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{g\gamma}(z) &= \frac{4\alpha K_{\gamma gg}^2 \sin^2(2\theta_w)}{2\pi} P_{g\gamma}^\gamma(z), \dots, \tilde{P}_{gq}(z) = \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{gq}^g(z), \dots, \tilde{P}_{gg}(z) \\ &= \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} P_{gq}^g(z) + \frac{4\alpha K_{\gamma gg}^2 \sin^2(2\theta_w)}{2\pi} P_{gg}^\gamma(z) \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\int_0^1 dz z (P_{qq}^\gamma(z) + P_{\gamma q}^\gamma(z)) = 0, \dots, \int_0^1 dz z (P_{g\gamma}^\gamma(z) + 2N_f P_{q\gamma}^\gamma(z) + P_{q\gamma}^\gamma(z)) = 0 \quad (4.65)$$

$$\int_0^1 dz z P_{qq}^\gamma(z) = 0, \dots, \int_0^1 dz z (P_{\gamma g}^\gamma(z) + P_{gg}^\gamma(z)) = 0 \quad (4.66)$$

$$P_{qq}^\gamma(z) = \left(\frac{(1+z^2+x_T^2)}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z) + \frac{x_T^2}{2} \left(\frac{1}{z_+} + \frac{1}{(z^2)_{++}} \right) \right) \quad (4.67)$$

$$P_{\gamma q}^\gamma(z) = \left(\frac{1+(1-z)^2}{z} - \frac{x_T^2}{2}\delta(1-z) + x_T^2 \left(\frac{1+(1-z)^2}{2z((1-z)^2)_{++}} \right) \right) \quad (4.68)$$

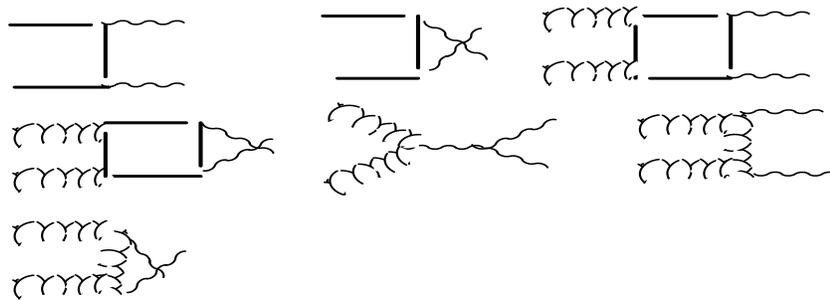
$$\begin{aligned} P_{gg}^\gamma(z) &= P_{\gamma g}^\gamma(z) = P_{\gamma\gamma}^\gamma(z) = P_{g\gamma}^\gamma(z) \\ &= 2x_T^2 \frac{(1+z^2+(1-z)^2)^2}{z} \left(\frac{1+z}{(z^2)_{++}} + \frac{2}{(1-z)_+} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{((1-z)^3)_{+++}} - \frac{19}{2}\delta(1-z) \right) \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}
P_{q\gamma}^\gamma(z) &= \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2) \\
&+ \frac{x_T^2 (2z-1)^2}{16z} \left(\frac{z}{((1-z)^2)_{++}} + \frac{1}{z_+} + 2\delta(1-z) \right)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Ici $f^{i/\gamma}$ représente la fonction de distribution du photon ou parton à l'intérieur du photon.

4.4 La production du Diphoton dans les collisions Proton-Proton au LHC

La production du Diphoton dans les collisions proton-proton au LHC est importante aux grandes valeurs du moment transverse P_T , et fourni des tests sur la charge du quark, le couplage de QCD etc... La contribution perturbative au premier ordre est dominée par le sous processus d'annihilation du quark et antiquark. L'autre processus qui donne aussi une contribution importante est le processus gluonique d'annihilation. Il est à noter que malgré ce processus se manifeste à travers un diagramme box fermionique, il génère une contribution conséquente et ceci est dû essentiellement à l'importance de la fonction de distribution du gluon à l'intérieur du proton. (Large gluon luminosity at the LHC). Dans la NCG, et en plus de la contribution noncommutative, on a des nouveaux diagrammes de Feynman, qui sont aussi importants à cause de la luminosité des gluons.



(4.71)

Pour avoir une idée sur la contribution de la noncommutativité de l'espace-temps, on a obtenu les résultats suivants

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \infty \left(|\overline{M}|_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}^2 \right)_{NCG} &\approx \begin{array}{l} \text{espace-temps...}\theta^{\mu\nu} \\ \left(1 + \eta^2 \frac{s^2}{2} \sin^2 \theta \right) \left(|\overline{M}|_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}^2 \right)_{CG} \\ - \eta^2 \frac{s^2}{9 \sin^2 \theta} \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{2} \cos^2 \theta + \cos \theta \right) \end{array} \quad (4.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \infty \left(|\overline{M}|_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}^2 \right)_{NCG} &\approx \begin{array}{l} \text{espace-espace...}\theta^{\mu\nu} \\ \left(1 + \eta^2 s^2 (1 - \cos \theta) \right) \left(|\overline{M}|_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}^2 \right)_{CG} \\ + \eta^2 \frac{s^2}{9 \sin^2 \theta} \left(-5 - \frac{7}{2} \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \right) \end{array} \quad (4.73) \end{aligned}$$

(η est la valeur de $\theta^{\mu\nu}$ selon la nature de ce dernier qui est espace-temps ou espace-espace). Pour tester la dépendance des résultats sur la nature du paramètre de la noncommutativité, on a considéré le rapport R de la contribution de la NCG sur la contribution sans NCG dénoté par CG. On plus, la dissymétrie gauche droite $A_{L,R}$ a été aussi déterminée et calculée (voire fig.3,4,5,6).

$$R = \frac{\left(|\overline{M}|_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}^2 \right)_{NCG}}{\left(|\overline{M}|_{q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma}^2 \right)_{CG}} = f(\eta, \cos \theta) \quad (4.74)$$

$$A_{LR} = \frac{R(\eta, \cos \theta) - R(\eta, -\cos \theta)}{R(\eta, \cos \theta) + R(\eta, -\cos \theta)} = g(\eta, \cos \theta) \quad (4.75)$$

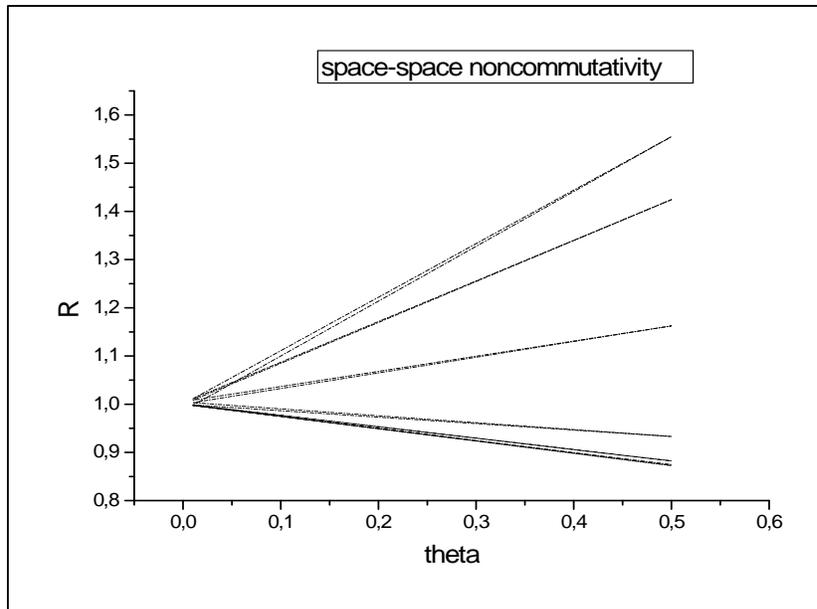


Fig.3 : la contribution de la NCG sur la contribution CG

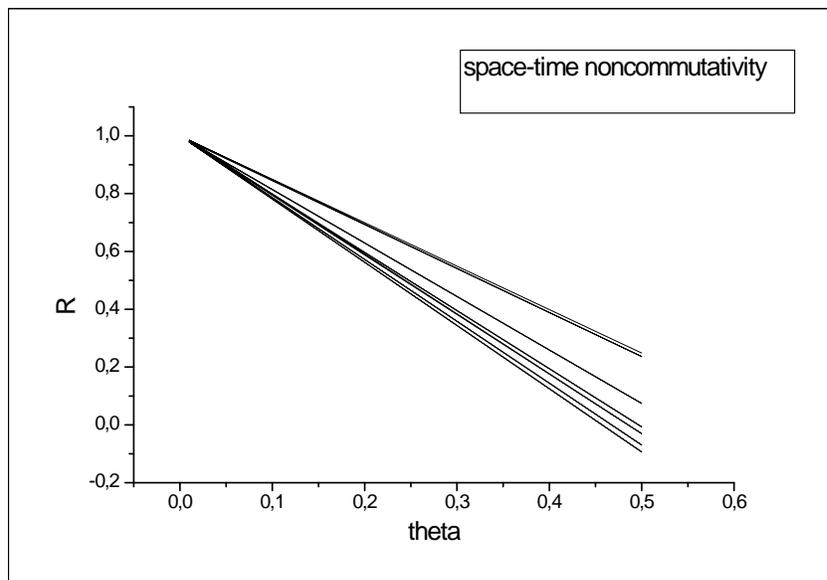


Fig.4 : la contribution de la NCG sur la contribution CG

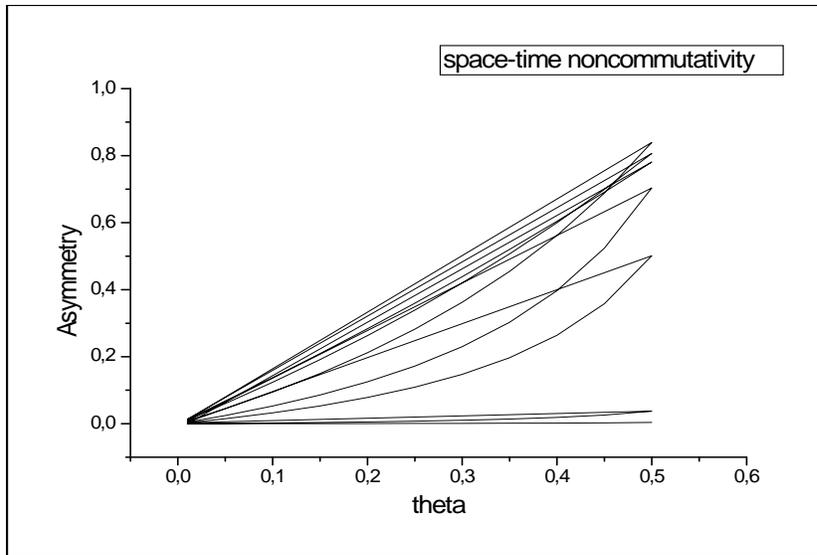


Fig.5 : la dissymétrie gauche droite $A_{L,R}$

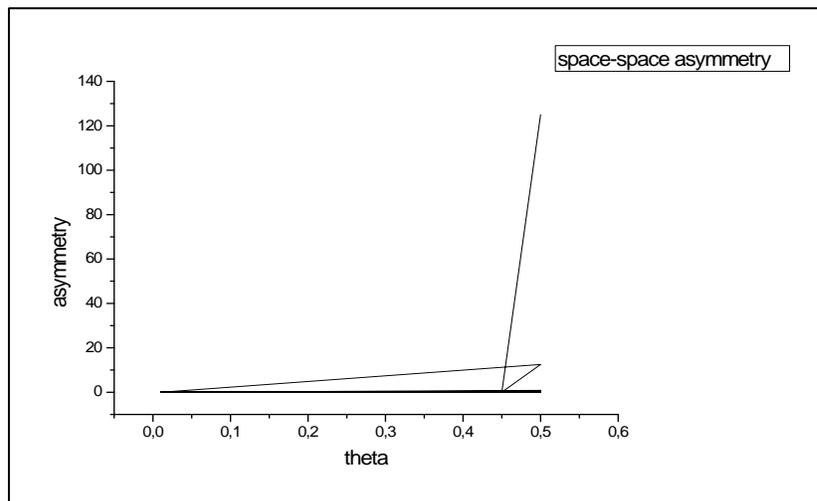
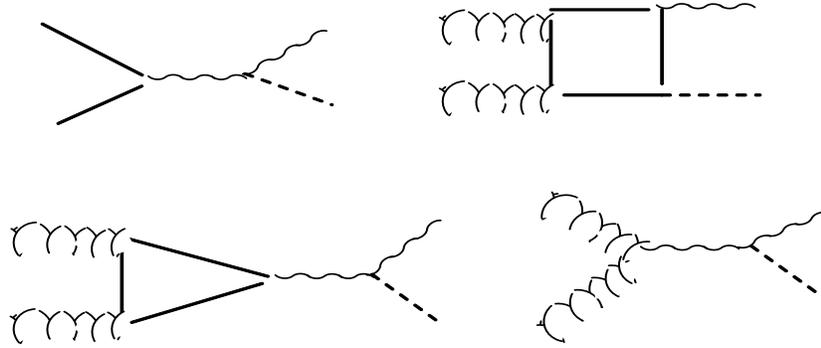


Fig.6 : la dissymétrie gauche droite $A_{L,R}$

4.5 La production associée du Higgs et Z boson dans la collision du Proton-Proton

Parmi les diagrammes importants de Feynman dans le cadre de la NCG (au delà du terme de Born) et à cause de la luminosité du gluon on a



(4.76)

Pour illustrer quelques résultats, on donne la contribution pure de la NCG du sous processus $gg \rightarrow ZH^0$

$$\sum |M|^2 = \frac{4e^4 M_z^2 K_{zgg}^2}{(s - M_z^2) + \Gamma_z^2 M_z^2} \Phi(t, u, s) \quad (4.77)$$

$$\Phi(t, u, s) = \Omega_1 \Delta_1 + \Omega_2 \Delta_2 + \Omega_3 \Delta_3 + \Omega_4 \Delta_4 + \Omega_5 \Delta_5 + \Omega_6 \Delta_6 + \Omega_7 \Delta_7 + \Omega_8 \Delta_8 \quad (4.78)$$

$$\Omega_1 = \Omega_1(s, t, u) = D_1 M_z^2 + A_1 + \frac{B_1}{M_z^2} + \frac{C_1}{M_z^4} + \frac{E_1}{M_z^6} \quad (4.79)$$

$$D_1 = \frac{9}{4}$$

$$A_1 = -\frac{10}{9}s + \frac{9}{4}(t + u)$$

$$B_1 = \frac{175}{144}s^2 + \frac{13}{9}tu - \frac{7}{36}su + \frac{1}{18}(t^2 + u^2) + \frac{7}{6}M_H^2$$

$$C_1 = \frac{25}{72}s^2(-s + M_H^2) + \frac{t + u}{36}(4t^2 + 4u^2 - 8tu + 3ts + 3us)$$

$$E_1 = -\frac{25}{144}s^2(s - M_H^2)^2$$

$$\Omega_2 = \Omega_2(s, t, u) = A_3 + \frac{B_3}{M_z^2} + \frac{C_3}{M_z^4} \quad (4.80)$$

$$A_3 = -\frac{1}{24}s$$

$$B_3 = \frac{s}{24}(12t - 11u + 8s)$$

$$C_3 = \frac{s(t + u)}{12}(3t - 3u + 2s)$$

$$\Omega_4 = \Omega_4(s, t, u) = A_4 + \frac{B_4}{M_z^2} + \frac{C_4}{M_z^4} \quad (4.81)$$

$$A_4 = \frac{s}{2}, B_4 = C_4 = 0$$

$$\Omega_5 = \Omega_5(s, t, u) = A_5 + \frac{B_5}{M_z^2} + \frac{C_5}{M_z^4} \quad (4.82)$$

$$A_5 = \frac{s}{8}(-4s + t - u)$$

$$B_5 = \frac{s}{8}(u^2 - ut - 4st + 4su)$$

$$C_5 = \frac{s^2}{4}(t^2 - u^2)$$

$$\Omega_6 = \Omega_6(s, t, u) = A_6 + \frac{B_6}{M_z^2} + \frac{C_6}{M_z^4} \quad (4.83)$$

$$A_6 = -\frac{s^2}{2} + \frac{s}{8}(-t + u)$$

$$B_6 = \frac{s}{8}(t^2 - ut - 4su + 4st)$$

$$C_6 = \frac{s^2}{4}(u^2 - t^2)$$

$$\Omega_7 = \Omega_7(s, t, u) = A_7 + \frac{B_7}{M_z^2} + \frac{C_7}{M_z^4} \quad (4.84)$$

$$A_7 = C_7 = 0, B_7 = \frac{3s^2}{8}(t - u)$$

$$\Omega_8 = \Omega_7 \quad (4.85)$$

Et

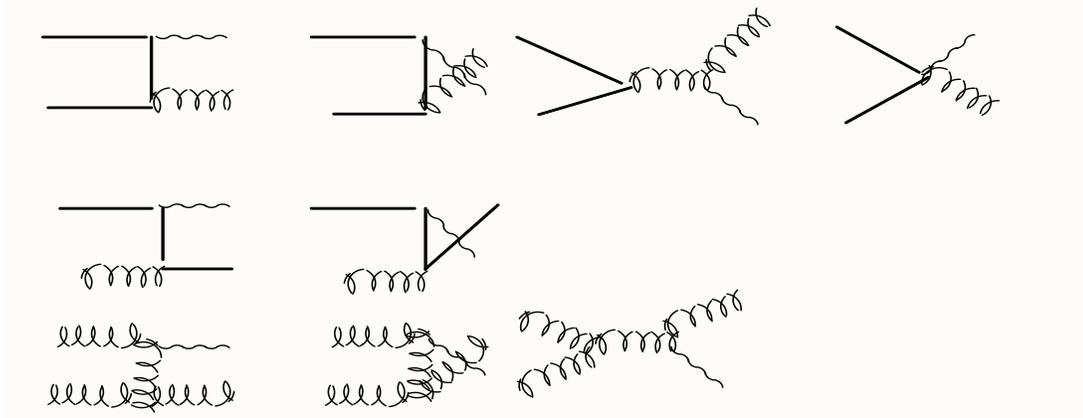
$$\Delta_1 = \eta^2 \frac{s^2}{4} = \Delta_4, \Delta_2 = \eta^2 \frac{s^{3/2}}{4} \chi(s, M_H, M_Z) \sin \theta = -\Delta_3, \quad (4.86)$$

$$\Delta_5 = \Delta_6 = 0, \Delta_7 = -\chi(s, M_H, M_Z) \cos \theta = -\Delta_8 \quad (4.87)$$

$$\chi(s, M_H, M_Z) = \sqrt{\frac{(M_H^2 - M_Z^2)^2}{s} + \frac{s}{4} M_H^2} \quad (4.88)$$

4.6 Production directe du Photon dans les collisions Proton-Proton inélastique

La production inélastique d'un photon dans les collisions hadroniques en général, est un processus propre où on n'a pas de fragmentation des partons ni le problème de reconstruction des jets. Les diagrammes de Feynman au niveau de l'approximation de borne qui vont contribuer sont



(4.89)

On s'attend un changement dans la distribution angulaire et dans la dissymétrie gauche-droite. En plus une augmentation appréciable de la section efficace comparable au calcul d'ordres supérieurs HOC. Nous remarquons aussi une forte dépendance sur la nature du paramètre de la noncommutativité de l'espace-temps et la polarisation, ainsi que le spin des particules projectiles. Une étude phénoménologique donne

$$\sigma_{PNCG} \propto \eta^2 \cos^2 \theta \implies \text{espace-temps} \quad (4.90)$$

$$\sigma_{PNCG} \propto \eta^2 \sin^2 \theta \implies \text{espace-espace} \quad (4.91)$$

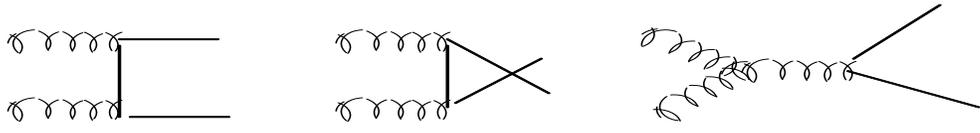
Notons aussi qu'on peut avoir une limite inférieure sur l'échelle de la NCG à 95% niveau de confiance ($C.L$) en considérant le χ^2 fit.

$$\begin{aligned} & \chi^2 \text{fit (assuming...Gaussian...Statistical...Errors...and...no...Systematic...Errors)} \\ & = L \frac{(\sigma_{NCG} - \sigma_{CG})^2}{\sigma_{CG}} \leq 4 \end{aligned} \quad (4.92)$$

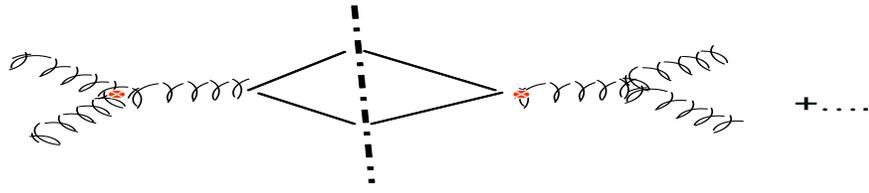
L est la luminosité intégrée.

4.7 La production d'un quark lourd

4.7.1 Quelques diagrammes de Feynman


(4.93)

4.7.2 Quelques diagrammes unitaires


(4.94)

On constate que les résultats numériques indiquent que la contribution de la NCG est aussi importante que le calcul d'ordres supérieurs. À titre d'illustration et phénoménologique, on a obtenu l'expression qualitative suivante du carré de l'amplitude de transition

$$|M_{gg \rightarrow Q\bar{Q}}|_{PNCG}^2 \approx \frac{\eta^2}{4} \left\{ (u-t)^2 + \frac{1}{4} (m_Q^2 + t - 2u)^2 \right. \quad (4.95)$$

$$\left. + \frac{1}{4} (m_Q^2 + u - 2t)^2 + \frac{3}{2} s (s - 2m_Q^2) \right\} \quad (4.96)$$

Et le comportement suivant de la section efficace différentielle comme fonction du

moment transverse

Comportement

$$\frac{d\sigma}{dP_r} \approx \eta^2 (\Omega_1 + \Omega_2 P_r^2) \quad (4.97)$$

$$P_r = \frac{\sqrt{s}}{2} \sin \theta \quad (4.98)$$

Nous prévoyons un changement du comportement de la section efficace comme fonction du moment transverse, la contribution de la NCG est aussi comparable au HOC et une très grande sensibilité aux valeurs et nature du paramètre de la noncommutativité.

Chapitre 5

Conclusion

À travers ce travail de recherche, on a construit un nouveau formalisme mathématique pour une reformulation du Modèle Standard quantique de Weinberg-Salam-Glashow minimal. En effet, en introduisant des variables anti-commutantes de Grassman, on a généralisé la notion de la connexion et de la courbure. C'est à dire les 1-formes et les 2-formes. On a aussi introduit un produit scalaire généralisé pour obtenir l'action quantique consistante. En appliquant ce formalisme du super-espace, on a obtenu tous les termes de l'action quantique avec tous les termes classiques (cinétiques, de masse, interaction, Yang-Mills) et les termes quantiques de la Fixation de jauge et de Fadeev-Popov. En outre, en appliquant une condition d'horizontalité, on a obtenu toutes les transformations BRST des différents champs dynamiques. Encouragé par le succès de ce formalisme mathématique, on aimera bien dans l'avenir l'appliquer à d'autres théories de grande unification.

Concernant la géométrie non commutative à la Seiberg-Witten, on a considéré le Modèle Standard noncommutatif avec les nouvelles lois et diagrammes de Feynman (nouvelles interactions). On a estimé l'ordre de grandeur du paramètre de la noncommutativité de l'espace-temps à travers la largeur de désintégration du boson Z. De plus, et vu l'importance des fonctions de splitting, qui contrôlent l'évolution des fonctions de distribution des différents partons et qui sont importantes dans les processus hadroniques,

nous avons calculé explicitement ces fonctions avec des partons polarisés et non polarisés et argumenté l'importance de la contribution de la NCG. Nous avons aussi calculé explicitement ces fonctions pour des partons à l'intérieur du photon. Pour les processus physiques importants pour le LHC, nous avons étudié d'une manière phénoménologique la production du : diphoton, association Higgs et Z boson, photon direct et quarks lourds et nous avons constaté que le comportement des différentes observables physiques sera affecté par la noncommutativité de l'espace-temps, distribution angulaire, dépendance en moment transverse, sensibilité à la nature espace-espace ou espace-temps du paramètre de la noncommutativité et sa valeur.

Nous envisageons de faire une étude quantitative dans le futur.

Chapitre 6

Annexes

Annexe A

Propriétés des espaces discrets

Cet appendice résume les concepts essentiels utilisés dans le formalisme des espaces discrets, dont nous avons besoin dans la première partie de cette thèse. Il est incomplet car il ne vise qu'à rappeler brièvement les notions indispensables à la compréhension du deuxième et troisième chapitre.

Le calcul discret extérieur

Il est nécessaire de définir les formes différentielles discrètes avec les champs vectoriels ainsi leurs opérateurs, une fois les formes discrètes et les champs vectoriels sont définis, le calcul peut être développé par la définition des dérivées extérieures discrètes (d), les codifférentielles (δ) et le Hodge star ($*$) pour calculer les 1-formes, le produit discret de wedge (\wedge) pour combiner entre les formes une fois ceci est fait on peut alors définir d'autres opérateurs utiles, l'opérateur discret de Laplace-Beltrami (Δ) peut être définie en utilisant la définition de $d\delta + \delta d$, lorsqu'il est appliqué aux fonctions, c'est la même chose que l'opérateur discret de Laplace-Beltrami (∇^2) qui est défini par $div \circ grad$.

Formes différentielles et formes discrètes

0- *Forme* : sont des fonctions scalaires.

1- *Forme* : A est une one-forme si $A = A_\rho X^\rho$

2- *Forme* : $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ où $F_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique, si $F_{\mu\nu}$ est un tenseur symétrique, les 2-formes F doivent être égaux à 0, $F = 0$

$$P\text{-Forme} : w^{(p)} = w_{[\mu_1 \dots \mu_p]} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p}$$

Théoriquement les 0-formes sont des fonctions, les 1-formes ce sont des différentielles et les 2-formes ou les formes à des degrés plus hautes (de même pour les 0 et 1-formes) sont des tenseurs antisymétriques, l'une des utilisations des formes est que les P-Formes peuvent être intégrées sur les P-variétés, par exemple, des nombreuses équations différentielles de la mécanique peuvent être formulées en termes de formes et de champs vectoriels [54].

Codifférentiel et l'opérateur de Laplace

Codifférentiel est un opérateur linéaire du premier ordre désigné par δ son rôle est de démanteler le degré de la forme différentielle par une unité

$$\delta : \Omega^p M \longmapsto \Omega^{p-1} M \quad (\text{A.1})$$

$$\varphi \longmapsto \delta\varphi$$

Avec

$$\delta\varphi = (-1)^{np+n+1+s} * d * \varphi \quad (\text{A.2})$$

Comme une conséquence immédiate de $d^2 = 0$, nous avons $\delta^2 = 0$

Un codifférentiel peut être définie, ce qui conduit alors à un opérateur comme l'opérateur de Laplace.

L'opérateur de Laplace, est noté par Δ , et définie par

$$\Delta = -(d\delta + \delta d) \quad (\text{A.3})$$

L'opérateur de Laplace est alors un opérateur différentiel linéaire du second ordre, où la métrique est indéterminée, l'opérateur de Laplace est conçu comme un opérateur de d'Alembert.

Les P-formes Harmoniques

$\omega_{(p)}$ est une forme harmonique si: $\Delta\omega_{(p)} = 0$ donc $d\delta\omega_{(p)} = -\delta d\omega_{(p)}$

La métrique sur l'espace discret

Nous allons exposer brièvement la construction générale et les propriétés de la métrique. Nous allons encore donner les définitions ainsi que l'image intuitive.

Nous définissons la métrique sur le module des 1-formes, comme un semi-linéaire, \mathcal{A} -fonctionnelle à valeur η

$$\eta(a\omega_1, \omega_2 b) = a\eta(\omega_1, \omega_2)b \quad (\text{A.4})$$

$$\eta(\omega_1 a, \omega_2) = \eta(\omega_1, a\omega_2) \quad (\text{A.5})$$

Cette définition est appropriée seulement pour le cas considéré, elle doit être modifiée pour d'autres algèbres. Les deux conditions sont tout simplement la généralisation de la linéarité pour le bi modules. Dans le cas de la géométrie discrète, avec le module des 1-formes créés par les formes χ^g , la métrique est entièrement déterminé par ses valeurs sur les générateurs, $\eta^{gh} = \eta(\chi^g, \chi^h)$. Maintenant, à cause des règles du calcul différentiel, on obtient que η^{gh} est nulle si et seulement si $g = h^{-1}$, cela signifie que notre métrique a seulement $N_G - 1$ composantes indépendantes, que nous désignons par E_g

$$\eta^{gh} = E_g \delta^{g(h^{-1})}, \quad E_g \in \mathcal{A}, g \in G' \quad (\text{A.6})$$

Si nous avons besoin de construire une métrique qui donne lieu à une semi-norme, nous devons nous limiter à ces métriques, qui sont définie positivement. Pour l'algèbre des fonctions à valeur sur \mathbb{C} sont équivalentes au choix du réel, non négatif E_g .

Le dernier point que nous voulons souligner, est la question de la dégénérescence [21]. On dit que la métrique est non dégénérée si la condition $\eta(a^*, a) = 0$ implique que $a = 0$.

Propriétés importantes de l'espace discret

Il y a d'autres règles du calcul différentiel définissent le produit des 1-formes

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu \quad (\text{A.7})$$

$$dx^\mu \Lambda \chi^g = -\chi^g \Lambda dx^\mu \quad (\text{A.8})$$

$$\chi^g \Lambda \chi^h = -\chi^h \Lambda \chi^g \quad (\text{A.9})$$

La multiplication des fonctions à gauche

$$f(x, gh)\chi^g = \chi^g f(x, h) = [R_g f(x, h)] \chi^g \quad (\text{A.10})$$

$$f(x, h)dx^\mu = dx^\mu f(x, h) \quad (\text{A.11})$$

Et l'action des dérivées extérieures d

$$ddx^\mu = 0 \text{ parce que } (d^2 = 0) \quad (\text{A.12})$$

$$d\chi^g = -C_{pn}^g \chi^p \Lambda \chi^h \quad (\text{A.13})$$

C_{pn}^g est une constante de structure de l'espace discret.

Dans le cas ordinaire

$$A = A_\mu dx^\mu; \quad A \text{ est un } 1\text{-form avec } A_\mu = A_\mu^a T^a$$

Dans le cas discret

$$A = A_\mu dx^\mu + \sum_g \phi_g \chi^g \quad (\text{A.14})$$

A_μ est un champ vectoriel

ϕ_g est un champ scalaire

L'opérateur d est la dérivée extérieure définie par

$$d = d + d\chi \quad (\text{A.15})$$

Où dx^μ est une base ordinaire des 1-formes, à été prise sans dimension, dans l'espace de Minkowski M_4 , alors que la base des 1-formes χ a été initialement présenté par A. Sitarz ; elle a été aussi supposée d'être sans dimension, dans l'espace discret Z_2 [20], [39], [40].

Maintenant on expose la nilpotence d qui est très importante pour obtenir le champ de force, d'après la définition de d

$$d^2 A(x, f) = (d^2 + d.d_\chi + d_\chi.d + d_\chi^2) A(x, f) \quad (\text{A.16})$$

$d^2 = 0$ Naturellement sont imposées dans les formes différentielles ordinaires ainsi que $dx^\mu \wedge \chi = -\chi \wedge dx^\mu$ est raisonnablement supposé

$$(d.d_\chi + d_\chi.d) A(x, f) = 0$$

Nous supposons que

$$d.d_\chi + d_\chi.d = 0 \quad (\text{A.17})$$

Alors

$$d^2 = d_\chi^2$$

Parce que :

$$d^2 = 0 \quad (\text{A.18})$$

Propriétés de la métrique sur l'espace discret $M_4 \otimes Z_2$

Il existe une autre méthode pour obtenir le terme du potentiel du champ de Higgs, A. Sitarz a défini une nouvelle métrique $g_{\mu\nu}$ avec $\forall \mu, \nu = \overline{0, 4}$

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -, -)$$

Le cinquième indice représente ici l'élément de l'espace discret Z_2 , alors

$$dx^\mu = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3, \chi)$$

En suite, Le champ de la force s'écrit comme

$$F(x, f) = F_{\mu\nu}(x, f)dx^\mu \wedge dx^\nu$$

La structure de la métrique des 1-formes est donnée par

$$\langle dx^\mu, dx^\nu \rangle = g^{\mu\nu}$$

$$\langle \chi_n, dx^\mu \rangle = 0$$

$$\langle \chi_n, \chi_k \rangle = \eta^{gg'}$$

Ce qui détermine le produit scalaire des 1-formes telle que

$$\langle dx^\mu \wedge dx^\nu, dx^\rho \wedge dx^\sigma \rangle = \frac{1}{2} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{A.19})$$

$$\langle dx^\mu \wedge \chi_g, dx^{\mu'} \wedge \chi_{g'} \rangle = g^{\mu\mu'} \eta^{gg'} \quad (\text{A.20})$$

$$\langle \chi_g \wedge \chi_h, \chi_{g'} \wedge \chi_{h'} \rangle = \frac{1}{2} \left(\eta^{gg'} \eta^{hh'} - \eta^{gh'} \eta^{hg'} \right) \quad (\text{A.21})$$

Tandis que d'autres produits scalaires parmi les bases des 2-formes sont nuls. On note que $\chi_m \wedge \chi_l$ est une base de 2-forme indépendante de $\chi_l \wedge \chi_m$ pour $m \neq l$, ce qui reflète la propriété de la noncommutativité de la géométrie sur l'espace discret.

Annexe B

Le Modèle Standard classique dans le formalisme différentiel de l'espace discret

Nous allons calculer la partie classique du Lagrangien de Yang-Mills invariant par les transformations de jauge, dans le formalisme mathématique des espaces discrets exposé dans le deuxième chapitre.

B.1 Champ de jauge

Le champ de jauge (connexion) $A(x, f)$ dans l'espace discret $M_4 \times Z_2$ est donné par le 1-forme suivant

$$A(x, f) = A_\mu(x, f) dx^\mu \tag{B.1}$$

f est un argument de Z_2 , nous pouvons écrire

$$A(x, f) = A(x, f) + \phi_g(x, f) \chi_g$$

$$A(x, f) = A_\mu(x, f) dx^\mu + \phi_g(x, f) \chi^g \quad (\text{B.2})$$

Le champ de jauge A se divise donc en deux parties, la partie vectorielle $A_\mu(x, f) dx^\mu$ et la partie scalaire $\phi_g(x, f) \chi^g$

$$dA(x, f) = d[A_\mu(x, f) dx^\mu] + d[\phi_g(x, f) \chi^g]$$

$$dA = d[A_\mu(x, f) dx^\mu] + d[\phi_g(x, f) \chi^g]$$

$$\begin{aligned} dA &= \partial_\nu A_\mu(x, f) dx^\nu \wedge dx^\mu + A_\mu d^2 x + \partial_h A_\mu(x, f) \chi^h \wedge dx^\mu + \partial_\mu \phi_g(x, f) dx^\mu \wedge \chi^g \\ &\quad + \partial_h \phi_g(x, f) \chi^h \wedge \chi^g + \phi_g(x, f) d\chi^g \end{aligned}$$

Selon la propriété de la nilpotence de d , nous pouvons écrire

$$A_\mu d^2 x = 0$$

Nous avons

$$d\chi^g = -C_{ph}^g \chi^p \wedge \chi^h \quad (\text{B.3})$$

Alors

$$\begin{aligned} dA &= \partial_\nu A_\mu(x, f) dx^\nu \wedge dx^\mu + \partial_h A_\mu(x, f) \chi^h \wedge dx^\mu + \partial_\mu \phi_g(x, f) dx^\mu \wedge \chi^g \\ &\quad + \partial_h \phi_g(x, f) \chi^h \wedge \chi^g - \phi_g(x, f) C_{ph}^g \chi^p \wedge \chi^h \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Le champ de force

De même on peut construire la covariance de jauge d'un champ de force (la courbure) présenté en 2-forme

$$F(x, f) = dA(x, f) + A(x, f)\Lambda A(x, f) \quad (\text{B.5})$$

Où

$$A\Lambda A = (A_\mu dx^\mu + \phi_g \chi^g) \Lambda (A_\nu dx^\nu + \phi_h \chi^h)$$

$$A\Lambda A = A_\mu A_\nu dx^\mu \Lambda dx^\nu + A_\mu \phi_h dx^\mu \Lambda \chi^h + \phi_g ((\chi^g A_\nu) \Lambda dx^\nu) + \phi_g ((\chi^g \phi_h) \Lambda \chi^h) \quad (\text{B.6})$$

Avec ces considérations, Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} F &= [\partial_\mu A_\nu + A_\mu A_\nu] dx^\mu \Lambda dx^\nu + [(\partial_\mu \phi_g - \partial_g A_\mu) + (A_\mu \phi_g - \phi_g R_g A_\mu)] dx^\mu \Lambda \chi^g \\ &\quad + [(C_{hg}^p \phi_p - \partial_h \phi_g) + \phi_g R_g \phi_h] \chi^g \Lambda \chi^h \end{aligned}$$

En utilisant les règles algébriques données par les équations (B-1)(B-2)(B-4) le champ de force 2-forme $F = dA + A\Lambda A$ se divise en trois termes

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \Lambda dx^\nu + F_{\mu g} dx^\mu \Lambda \chi^g + F_{gh} \chi^g \Lambda \chi^h \quad (\text{B.7})$$

Avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]] \\ F_{\mu\nu} &= [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]] \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur habituel de la courbure

Et

$$F_{\mu g} = [(\partial_\mu \phi_g - \partial_g A_\mu) + (A_\mu \phi_g - \phi_g R_g A_\mu)]$$

On a

$$\partial_g A_\mu = A_\mu - R_g A_\mu \text{ and } R_g A_\mu = A_\mu \quad (\text{B.9})$$

Alors

$$F_{\mu g} = \partial_\mu \phi_g + A_\mu \phi_g - \phi_g R_g A_\mu \quad (\text{B.10})$$

$F_{\mu g}$ est un terme mixte, qui comprend le gradient de ϕ et le couplage entre A_μ et ϕ .

Le dernier terme est

$$F_{gh} = (C_{hg}^p \phi_p - \partial_h \phi_g) + \phi_g R_g \phi_h$$

$$F_{gh} = \partial_g \phi_h + \phi_g R_g \phi_h - C_{gh}^k \phi_k \quad (\text{B.11})$$

B.3 Lagrangien de Yang-Mills

F_{gh} ne dépend que de ϕ , ce terme est responsable de l'apparition du potentiel quantique de Higgs dans l'action de Yang-Mills.

Le lagrangien \mathcal{L}_{YM} est obtenu par le produit scalaire suivant

$$\langle F, F \rangle = \langle \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu + F_{\mu g} dx^\mu \wedge \chi^g + F_{gh} \chi^g \wedge \chi^h, \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{1}{2} F_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} \wedge dx^{\nu'} + F_{\mu'g'} dx^{\mu'} \wedge \chi^{g'} + F_{g'h'} \chi^{g'} \wedge \chi^{h'} \rangle$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \langle F, F \rangle = \\
& \frac{1}{4} \langle F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, F_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} \wedge dx^{\nu'} \rangle \\
& + \frac{1}{2} \langle F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, F_{\mu'g'} dx^{\mu'} \wedge \chi^{g'} \rangle \\
& + \frac{1}{2} \langle F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, F_{g'h'} \chi^{g'} \wedge \chi^{h'} \rangle \\
& + \frac{1}{2} \langle F_{\mu g} dx^\mu \wedge \chi^g, F_{\mu'g'} dx^{\mu'} \wedge \chi^{g'} \rangle \\
& + \frac{1}{2} \langle F_{\mu g} dx^\mu \wedge \chi^g, F_{g'h'} \chi^{g'} \wedge \chi^{h'} \rangle \\
& + \frac{1}{2} \langle F_{gh} \chi^g \wedge \chi^h, F_{g'h'} \chi^{g'} \wedge \chi^{h'} \rangle
\end{aligned}$$

Afin d'obtenir l'expression explicite de \mathcal{L}_{YM} nous devons utiliser la structure de la métrique déterminée ci-dessus

$$\begin{aligned}
\langle dx^\mu \wedge dx^\nu, dx^\sigma \wedge dx^\rho \rangle &= \frac{1}{2} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \\
\langle \chi^g \wedge \chi^h, \chi^{g'} \wedge \chi^{h'} \rangle &= \frac{1}{2} (\eta^{gg'} \eta^{hh'} - \eta^{gh'} \eta^{hg'}) \\
\langle \chi^g, dx^\mu \rangle &= 0, \quad \langle dx^\mu, dx^\nu \rangle = g^{\mu\nu}, \quad \langle \chi^g, \chi^h \rangle = \eta^{gh} \\
g^{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Le lagrangien de Yang-Mills \mathcal{L}_{YM} peut être écrit de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\langle F, F \rangle &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \left[\frac{1}{2} (g^{\mu\mu'} g^{\nu\nu'} - g^{\mu\nu'} g^{\nu\mu'}) \right] \\
& + F_{\mu g} F_{\mu'g'} \left[g^{\mu\mu'} \eta^{gg'} \right] \\
& + F_{gh} F_{g'h'} \left[(\eta^{gg'} \eta^{hh'} - \eta^{gh'} \eta^{hg'}) \right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle F, F \rangle = & \frac{1}{8} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F_{\mu\nu} F^{\nu\mu}] + F_{\mu g} F_g^\mu \eta^{gg'} \\ & + \frac{1}{2} F_{gh} F_{g'h'} \left[\left(\eta^{gg'} \eta^{hh'} - \eta^{gh'} \eta^{hg'} \right) \right] \end{aligned}$$

Nous avons : $\eta^{gh} = \eta_g \delta^{gh^{-1}}$ et $\eta^{hg} = \eta_h \delta^{hg^{-1}}$

Le champ de la force F est un tenseur antisymétrique nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle F, F \rangle = & \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F_{\mu g} F_g^\mu \eta_g \delta^{gg'^{-1}} \\ & + \frac{1}{2} F_{gh} F_{g'h'} \left[\left(\eta_g \eta_h \delta^{gg'^{-1}} \delta^{hh'^{-1}} - \eta_g \eta_h \delta^{gh'^{-1}} \delta^{hg'^{-1}} \right) \right] \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \langle F, F \rangle = & \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \eta_g F_{\mu g} F_g^\mu \\ & + \eta_g \eta_h \frac{1}{2} [F_{gh} F_{g^{-1}h^{-1}} - F_{gh} F_{h^{-1}g^{-1}}] \end{aligned}$$

Alors

$$\langle F, F \rangle = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \eta_g F_{\mu g} F_g^\mu + \eta_g \eta_h F_{gh} F_{g^{-1}h^{-1}}$$

Nous obtenons finalement

$$\langle F, F \rangle = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \eta_g F_{\mu g} F_g^{\mu+} + \eta_g \eta_h F_{gh} F_{gh}^+$$

Avec

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + [A_\mu, A_\nu]] [(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + [A^\mu, A^\nu]] \quad (\text{B.14})$$

Pour obtenir la forme précise du lagrangien de Yang-Mills invariant par les transformations de jauge, nous calculons $F_{gh}F_{gh}^+$ et $F_{\mu g}F_g^{\mu+}$

$$\begin{aligned}
F_{\mu g}F_g^{\mu+} &= (\partial_\mu\phi_g + A_\mu\phi_g - \phi_g R_g A_\mu) (\partial^\mu\phi_g + A^\mu\phi_g - \phi_g R_g A^\mu)^+ \\
&= (\partial_\mu\phi_g) (\partial^\mu\phi_g)^+ + (\partial_\mu\phi_g) (A^\mu\phi_g)^+ - (\partial_\mu\phi_g) (\phi_g R_g A^\mu)^+ + \\
&\quad (A_\mu\phi_g) (\partial^\mu\phi_g)^+ + (A_\mu\phi_g) (A^\mu\phi_g)^+ - (A_\mu\phi_g) (\phi_g R_g A^\mu)^+ - \\
&\quad (\phi_g R_g A_\mu) (\partial^\mu\phi_g)^+ - (\phi_g R_g A_\mu) (A^\mu\phi_g)^+ + (\phi_g R_g A_\mu) (\phi_g R_g A^\mu)^+
\end{aligned}$$

Afin de simplifier ce rapport, nous utilisons les propriétés suivantes : (voir appendice A)

$$\chi^g f(x, h) = [R_g f(x, h)] \chi^g = f(x, gh) \chi^g$$

$$A_\mu^+ = A_\mu, \quad \phi_g^+ = R_g \phi_{g^{-1}}$$

On trouve que

$$\begin{aligned}
F_{\mu g}F_g^{\mu+} &= (\partial_\mu\phi_g) (\partial^\mu\phi_g)^+ + (\partial_\mu\phi_g) (\phi_g^+ A^\mu) - (\partial_\mu\phi_g) (A^\mu \phi_g^+) + \\
&\quad (A_\mu\phi_g) (\partial^\mu\phi_g)^+ + (A_\mu\phi_g) (\phi_g^+ A^\mu) - (A_\mu\phi_g) (\phi_g^+ A^\mu) - \\
&\quad (\phi_g A_\mu) (\partial^\mu\phi_g)^+ - (\phi_g A_\mu) (\phi_g^+ A^\mu) + (\phi_g A_\mu) (\phi_g^+ A^\mu)
\end{aligned}$$

La simplification de cette relation donne

$$\begin{aligned}
F_{\mu g}F_g^{\mu+} &= (\partial_\mu\phi_g) (\partial^\mu\phi_g)^+ + (\partial_\mu\phi_g) [A^\mu, \phi_g^+] + [A_\mu, \phi_g] (\partial^\mu\phi_g)^+ \\
&\quad + A_\mu\phi_g [A^\mu, \phi_g^+] + \phi_g A_\mu [\phi_g^+, A^\mu]
\end{aligned}$$

$$F_{\mu g}F_g^{\mu+} = (\partial_\mu\phi_g) \left[(\partial^\mu\phi_g)^+ + [A^\mu, \phi_g^+] \right] + [A_\mu, \phi_g] \left[(\partial^\mu\phi_g)^+ + [A^\mu, \phi_g^+] \right]$$

$$F_{\mu g} F_g^{\mu+} = [(\partial_\mu \phi_g) + [A_\mu, \phi_g]] + [(\partial^\mu \phi_g)^+ + [A^\mu, \phi_g^+]]$$

Nous avons

$$(\partial_\mu \phi_g) + [A_\mu, \phi_g] = D_\mu \phi_g$$

On substitue dans

$$F_{\mu g} F_g^{\mu+} = (D_\mu \phi_g) (D^\mu \phi_g)^+ \quad (\text{B.15})$$

Calculons $F_{gh} F_{gh}^+$

$$F_{gh} = \partial_g \phi_h + \phi_g R_g \phi_h - C_{gh}^k \phi_k \quad (\text{B.16})$$

En utilisant les propriétés suivantes de l'espace discret :

$$\partial_g \phi_h = \phi_h - R_g \phi_h$$

$$R_g \phi_h = \phi_{hg}$$

$$C_{gh}^k = \delta_g^k + \delta_h^k - \delta_{hg}^k$$

Par la substitution en (B-16) on trouve que

$$\begin{aligned} F_{gh} &= \phi_h - R_g \phi_h + \phi_g R_g \phi_h - C_{gh}^k \phi_k \\ &= \phi_h - R_g \phi_h (1 - \phi_g) - (\delta_g^k + \delta_h^k - \delta_{hg}^k) \phi_k \\ &= \phi_h - \phi_{hg} (1 - \phi_g) - \delta_g^k \phi_k - \delta_h^k \phi_k + \delta_{hg}^k \phi_k \\ &= \phi_h - \phi_{hg} (1 - \phi_g) - \phi_g - \phi_h + \phi_{hg} \end{aligned}$$

Pour simplifier ces formules, nous instaurons un nouveau champ (un changement de potentiel on dit aussi le potentiel shift)

$$\hat{\phi}_g = (1 - \phi_g) \quad (\text{B.17})$$

On obtient

$$F_{gh} = (\hat{\phi}_g - 1) \hat{\phi}_{hg} = \hat{\phi}_g R_g (\hat{\phi}_h) - \hat{\phi}_{hg} \quad (\text{B.18})$$

Alors

$$F_{gh}^+ = [(\hat{\phi}_g - 1) \hat{\phi}_{hg}]^+ = [\hat{\phi}_g R_g (\hat{\phi}_h) - \hat{\phi}_{hg}]^+$$

De la dernière définition, nous pouvons écrire

$$F_{gh} F_{gh}^+ = [\hat{\phi}_g R_g (\hat{\phi}_h) - \hat{\phi}_{hg}] [\hat{\phi}_g R_g (\hat{\phi}_h) - \hat{\phi}_{hg}]^+$$

Selon ces relations, nous pouvons obtenir la formule du Lagrangien de Yang-Mills invariant par les transformations de jauge

$$\begin{aligned} \langle F, F \rangle = & \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \eta_g (D_\mu \phi_g) (D^\mu \phi_g)^+ + \\ & \eta_g \eta_h [\hat{\phi}_g R_g (\hat{\phi}_h) - \hat{\phi}_{hg}] [\hat{\phi}_g R_g (\hat{\phi}_h) - \hat{\phi}_{hg}]^+ \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Le deuxième terme est le terme cinétique du lagrangien de Higgs, le troisième terme c'est le terme du potentiel de la particule de Higgs.

Annexe C

Propriétés des variables de Grassman

Soit θ_1 et θ_2 deux variables de Grassman

1. (a) **Le carré nul**

$$\theta_1^2 = \theta_2^2 = 0 \tag{C.1}$$

(b) **Anticommutativité**

$$\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1 = 0 \tag{C.2}$$

$$\theta_1\theta_2 = -\theta_2\theta_1 \tag{C.3}$$

-- **Conséquence**

1. **Dérivation**

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_a}, \theta_b \right\} &= \delta_{a,b} \\ \{d\theta_a, \theta_b\} &= 0 \\ \{d\theta_a, d\theta_b\} &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_a}, \frac{\partial}{\partial \theta_b} \right\} &= 0 \end{aligned} \tag{C.4}$$

2. Intégration

$$\begin{aligned}\int d\theta &= 0 \\ \int \theta d\theta &= 1\end{aligned}\tag{C.5}$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\int f(\theta) d\theta &= a \\ \int f(\theta) d\theta &= \frac{\partial f}{\partial \theta}\end{aligned}\tag{C.6}$$

Références

Bibliographie

- [1] N.Sandstrom, BRST and topological gauge theories, Thesis for degree of doctor of philosophy, Chalmers University of Technology and Goteborg University 2002.
- [2] Brian R.Greene, L'Univers Elégant, Edition Robert Laffont, 2000.
- [3] Brian R.Greene, La Magie du Cosmos, Edition Robert Laffont, 2005.
- [4] S.Doplicher, K.Fredenhagen and J.E. Roberts, The quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum Fields, *Comm. Math. Phys.* 172 (1995) 187-220.
- [5] M.Nakahara, Geometry topology and physics, Graduate student series in physics, Institute of Physics Publishing 1990.
- [6] TA-PEI Cheng and Ling-Fong Li, Gauge theory of elementary particle physics, Clarendon Press.Oxford 1986.
- [7] S.L.Glashow, *Nucl.phys.*22 (1961)579. S.Weinberg.*Phys.Rev.Lett.*19 (1967)1264. A.Salam, Elementary Particle physic. Proc. Nobel Symposium.N.8 (ed N. Svartholm, Almqvist & Wiksell, Stokholm1968).
- [8] S.L.Glashow and S.Weinberg, Natural conservation laws for neutral currents, *Phys.Rev D* 15(1977) 1958.
- [9] W.Marciano and H. Pagels, Quantum Chromodynamics, North-Holland Publishing Company, *Phys.Rep.section C of Phys.Lett* 36(1978) 137-276.
- [10] J. Madore, An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications, Cambridge University Press 1995.

- [11] G.Cammarata and R.Coquereaux, Comments about Higgs Fields, Non-commutative Geometry and the Standard Model, Lectures notes in Physics 469 Springer, 27-50 hep-th/9505192.
- [12] A.Connes, The action functional in noncommutative geometry, Commun.Math.Phys.117 (1988)673-683.
- [13] A.Connes, Noncommutative differential geometry, Publ. Math. IHES 62 (1985)257-360.
- [14] A.Connes, Noncommutative geometry and reality, Jour.Math.Phys. 36 (1995)6194-6231.
- [15] A.Connes and J. Lott, Particle models and noncommutative geometry, Nucl. Phys. B(Proc.Suppl.) 18 (1990)29- 47.
- [16] A.H.Chamseddine and A.Connes, the spectral action principal, commun. Math. Phys.186 (1997) 731-750. arXiv :hep-th/9606001.
- [17] A.H.Chamseddine and J. Frohlich, Constraints on the Higgs and top quark masses from effective potential and noncommutative geometry,Phys. Lett. B 314, (1993)308-314. arXiv :hep-ph/9307209
- [18] A.H.Chamseddine, G.Felder and J.Frohlich, Grand unification in noncommutative geometry, Nucl. Phys. B 395, (1993) 672-700. arXiv :hep-ph/9209224.
- [19] A.Sitarz, Noncommutative geometry and gauge theory on discrete groups, Jour. Geom. Phys. 15 (1995) 123-136.
- [20] A.Sitarz, Higgs mass and noncommutative geometry, Phys.lett B (1993)308-311.
- [21] A.Sitarz, Noncommutative geometry and the Ising Model, J. Phys. A 26 (1993)5302–5312.
- [22] A.Sitarz, Noncommutative Differential geometry with higher order Derivatives, Lett. Math. Phys. 32(1994),357-363.
- [23] K.Morita and Y.Okumura, Weinberg-Salam theory in noncommutative Geometry, Prog.Theor. Phys. 91 (1994), 959[IPAP].

- [24] N.Seiberg and E.Witten, String theory and noncommutative geometry, JHEP09 (1999)32.
- [25] A.Connes, C-algèbres et géométrie différentielle C.R. Acad. Sci. Paris Série A 290 (1980) 599-604.
- [26] I.J.R.Aitchison and A.J.G.Hey, Gauge theories in Particle Physics, Adam Hilger. LTD, Bristol 1983.
- [27] A.Burnel, Introduction aux Theories de Jauge, valable au site : <http://qcd.theo.phys.ulg.ac.be/burnel/jauge.htm>.
- [28] C.Itzykson et J.B.Zuber, Quantum field theory, McGraw.Hill 1980.
- [29] L.H.Ryder, Quantum field theory, Cambridge University press 1987.
- [30] W.Hollik, Precision Tests of the Electroweak Theory Part I, Lectures given at the CERN-JINR School of physics 1989 Egmond-aan-Zee, The Netherlands. CERN-TH.5661/90.
- [31] W.Greiner and B.Muller, Theory of Weak Interactions, Springer-Verlag.
- [32] J.L.Lopes, Gauge Field Theories an Introduction, PerGamon Press 1981.
- [33] S.Dittmaier, Electroweak Interaction, Lecture2 MPI Munich Linear Collider School, Ambleside, August 2003.
- [34] X.Calmet, A Duality as a theory for the Electroweak Interactions, Thesis for degree of Doctor-Dissertation der Facultat fur physic der Ludwig-Maximilians-Universitat. Munchen. arXiv :hep-ph/0206251v1.
- [35] A.Dimakis and F.M.Hoissen, Discrete Differential Calculus, Graphs, Topologies and Gauge Theory, J.Math.Phys 35 (1994) 6703.
- [36] A.Dimakis and F. Muller-Hoissen, Some aspects of noncommutative geometry and physics, arXiv :physics/9712004v1.
- [37] K.Morita and Y.Okumura, Noncommutative differential geometry and Standard model, Prog.TheorPhys 95(1996) 227-248.

- [38] Y.Okumura, An Estimation of the Higgs boson mass in the two loop approximation in a noncommutative differential geometry, *Eur.Phys.J.C.I* (1998) 711-715.
- [39] Y.Okumura, BRST invariant Lagrangian of spontaneously broken gauge theory in noncommutative differential geometry, *Phys.Rev.D54* (1996) 4114-4120.
- [40] Y.Okumura, BRST invariant formulation of spontaneously broken gauge theory in generalized differential geometry, *J.Math.Phys* 41(2000) 1788-1800.
- [41] H.Kase, K.Morita, Y.Okumura, A field theoretic approach to Connes gauge theory on $M(4)\times Z(2)$, *Int.Jour.Mod.Phys.A* 16 (2001) 3203-3216.
- [42] H.Kase, K.Morita, Y.Okumura, U.Eizou, Lorentz invariant noncommutative space-time based on DFR algebra, *Prog.Theo.Phys.* 109 (2003) 663-685.
- [43] V.Nazaryan and C.E.Carlson, Field theory in noncommutative Minkowski super-space, *Phys.Rev. D71* (2005) 025019
- [44] K.Morita and Y.Okumura, Gauge theory on discrete space $M(4)\times Z(N)$ and $SU(5)$ GUT in noncommutative geometry, *Prog.Theo. Phys.* 91(1994) 975-990.
- [45] Y.Okumura, Standard Model in differential geometry on discrete space $M(4)\times Z(3)$, *Prog.Theor. Phys.*92, (1994) 625-644.
- [46] Y.Okumura, Note on the $N=2$ super Yang-Mills Gauge Theory in a Noncommutative Differential Geometry, *Eur. Phys. J.C* 1, (1998) 735-738.
- [47] K.Morita and Y.Okumura, Reconstruction of Weinberg-Salam theory in noncommutative geometry on $M(4)\times Z(2)$, *Phys. Rev. D* 50, (1994) 1016-1025.
- [48] L.Bonora , P.Tonin, Superfield Formulation of Extended BRS Symmetry, *Phys.Lett.* 98B, (1981) 48-57.
- [49] J.Chyla, Quarks, Partons and Quantum Chromodynamics, A course in the phenomenology of the quark-parton model and Quantum Chromodynamics, valable au site : www-hep.fzu.cz/chyla/lectures/text.pdf.
- [50] A.Pich, Quantum Chromodynamics , Lectures at European School of High-Energy Physics, Sorrento, Italy, 29 August-11 September, 1994.

- [51] B.Melic, K.Passek-Kumericki, J.Trampetic, P.Schupp and M.Wohlgenannt, The Standard Model on noncommutative space-time : Electroweak currents and the Higgs sector, arXiv :hep-ph/0502249v2.
- [52] K.Hagiwara et al, Quantum Chromodynamics, Physical Review D66 (2002)010001.
- [53] G.Altarelli, Partons In Quantum Chromodynamics, North-Holland Publishing Company, Phys.Rep. Review section of Phys.Lett 81(1982) 1-129.
- [54] A.N.Hirani, Discrete Exterior Calculus, Partial Fulfilment of the requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, California Institute of Technology, 2003.

Résumés

Dans cette thèse, nous avons construit la quantification du modèle Standard, avec les champs des Ghost non massifs en utilisant un formalisme mathématique étendu sur l'espace discret des fonctions évalués de six éléments.

Conformément à cela, nous avons mis en place les 1-formes généralisée, les super champs, et nous avons appliqué ce formalisme à un superspace, pour éliminer certaines termes non physiques et pour obtenir les termes de Fadeev-Popov et la fixation de la Jauge, nous avons généralisé le produit scalaire.

Le lagrangien resultant contient une symétrie résiduelle (BRST), en raison du formalisme mathématique utilisé qui est acceptable du point de vue physique.

En utilisant l'approche de Seiberg-Witten dans le cadre de l'espace-temps non commutatif, nous avons étudié la phénoménologie au-delà du modèle standard, appliquée sur la chromodynamique quantique.

Mots clés

La Géométrie non commutative, la Géométrie Différentiel non commutative, la théorie de Jauge non commutative dans un espace discret, le Model Standard dans la Géométrie Différentiel non commutative, Chromodynamique quantique.

Abstract

In this thesis we have constructed the quantized Standard model, with massless ghost fields using an extended mathematical formalism of discrete space with six components valued functions.

According to this, we introduced the generalized 1-forms, super fields, and we applied this formalism to a superspace, moreover, to eliminate certain terms and to obtain the Fadeev-Popov and fixing terms, we generalized the scalar product.

The resulting Lagrangian has a residual symmetry (BRST), due to the mathematical formalism used and which is acceptable from the physical point of view.

Using Seiberg-Witten maps approach to non commutative space-time, we study the phenomenology beyond the standard model applied on the quantum chromodynamics.

Key words :

Non-Commutative differential geometry, Non-Commutative Gauge theory on discrete group, Standard model in Non-Commutative differential geometry, quantum chromodynamics, BRS quantification.