

*République Algérienne Démocratique et Populaire*

*Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique*

*Université les Frères Mentouri*

*Faculté des Sciences Exactes*

*Département de Mathématiques*

*N° d'ordre : .....*

*N° de série : .....*

*Thèse présentée pour l'obtention du*  
**Diplôme de Doctorat 3<sup>ème</sup> cycle L.M.D. de Mathématiques**  
*Option : Statistique Appliquée*

---

# **Utilisation des méthodes algébriques et combinatoires pour la construction des plans d'expérience**

---

*Par*

**Imane REZGUI**

*Devant le jury :*

Président	<i>M. F.L Rahmani</i>	Professeur	Université les Frères Mentouri
Rapporteur	<i>M<sup>me</sup> Z. Gheribi-Aoulmi</i>	MCA	Université les Frères Mentouri
Examinatrice	<i>M<sup>me</sup> N. Abada</i>	MCA	ENS de Constantine
Examineur	<i>M. H. Monod</i>	Professeur	INRA, UR MaIAGE. France
Examineur	<i>M. N. Hamri</i>	Professeur	Centre Universitaire Mila

*Année académique 2014 - 2015*

To those who are the reason for my existence, who are responsible for my education, who are the source of my power, whose existence makes me feel safe, whose doors are always open for me, who I am proud, to my father Meziane REZGUI and my mother Ouarda REZGUI :

I say thank you and I love you, May Allah protect you for me and my brothers and sisters.

To the part of my heart, my son Yahya : I say I love you very much.

To my supervisor Mrs. Zebida GHERIBI-AOULMI, my soul-mother, who helped me in many ways, who shared with me the difficulties and the good news during these four years, who taught me mathematics and very many life lessons :

I say Thank you, may Allah protect your children and their children.

To my sisters : Sara, Houda, Hiba and my brothers Abd-el-Wadoud and Taha, who I shared with a home and name and who spent nights laughing loud with me, who stood next to me during my hard experiences :

I say Thank you, May Allah protect you and give you a happy life.

To my friends with who I spent good times and who supported me and in particular Rima Soudousse and Mohamed Laïb :

I say Thank you.

To my extended and large family and in particular my aunt Nasira and my uncles Zakaria and Saleh :

I say thank you .

To my new friends who have other cultures, other religions and other languages, and with who I have shared new experiences :

I say thank you.

To who has helped me and makes me happy : I say thank you.

To my supervisor's family, I say thank you.

To my teachers in primary school who taught me to read and write :

I say Thank you.

To my teachers from middle school and in particular Mr. Mounir Benbelkasem :

I say thank you.

To my teachers from secondary school and in particular Mrs Fadhila Dambri :

I say thank you.

To my teachers from university and un particular Prof. N. Benkafadar :

I say thank you.

To the whole team at INRA unite who opened the door and gave me a place in between them, for their help, their kindness, and in particular Mr. Herve MONOD for his help and for his suggestions :

I say thank you.

To the member of the jury who have read my thesis : I say thank you for your time and valuable suggestions.

Imane REZGUI

## Abstract

We use algebraic and combinatorial methods to construct various plans of conventional and digital experience.

Concerning the classical designs, we construct new rectangular right angles ( $m$ ) design with more than 3 associated classes [23], little studied in the literature, based on a new series of association schemes with  $v = 2nl$  treatments and  $m = 4, 5$  and  $7$  associated classes, accommodated by the Combinatory method ( $s$ ) [24] which we have previously developed to obtain rectangular designs. Then, we generalize these results for  $v = wnl$  treatments. [25]. Furthermore, we describe another construction method of other types of block designs called resolvable pairwise partially balanced block designs from the general concept of the association schemes. [26,27].

Finally, we apply, on the one hand, the Fang algorithm [10] on our resolvable generalized rectangular right angles ( $m$ ) design to built a series of U-type designs [25]. On the other hand, we develop a Construction algorithm of space-filling designs from association schemes. [27].

For users, we program our construction methods as two package by the R language [17] : ' CombinS ' [18] and ' RPPairwiseDesign ' [19].

**Key-words :** Association scheme, Generalized rectangular right angular association scheme ( $m$ ), Partially balanced incomplete block design, Resolvable generalized rectangular right angular ( $m$ ) design, Combinatory Method ( $s$ ), Resolvable pairwise partially balanced block design, Space-filling design, U-type design.

## Résumé :

Nous utilisons des méthodes algébriques et combinatoires pour construire divers plans d'expérience classiques et numériques. Concernant les plans classiques, nous construisons de nouveaux plans en blocs rectangulaire à angle droit ( $m$ ) à plus de 3 classes associées [23], peu étudiés dans la littérature, en se basant sur une nouvelle série de schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ) à  $v=2nl$  traitements et  $m=4, 5$  et  $7$  classes associées [23] accommodée de la Méthode Combinatoire ( $s$ ) [24] que nous avons préalablement développée pour obtenir des plans en blocs rectangulaires. Puis, nous généralisons tous ces résultats pour  $v=wnl$  traitements [25]. Par ailleurs, nous décrivons une autre méthode de construction d'autres types de plans en blocs dits plans "pairwise" partiellement équilibrés résolubles à partir du concept général de schémas d'association. [26, 27]. Enfin, nous appliquons d'une part, l'algorithme de Fang [10] à nos plans en blocs incomplets équilibrés rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés résolubles pour générer une série de plans numériques "U-type" [25]. D'autre part, nous développons un algorithme de construction de plans numériques "space-filling" à partir des schémas d'association [27]. Pour les utilisateurs, nous programmons toutes nos méthodes de construction sous forme de deux "package" avec le langage R [17] : 'CombinS' [18] et 'RPPairwiseDesign' [19].

**Mots-clés :** Schéma d'association, Schéma d'association rectangulaire à angles droits ( $m$ ) généralisé, Plan en blocs incomplets partiellement équilibré, Plan en blocs rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisé résoluble, La Méthode Combinatoire ( $s$ ), Plan "pairwise" partiellement équilibré résoluble, Plan "space-filling", Plan "U-type".

## ملخص :

نستعمل طرق جبرية وتوفيقية من اجل تكوين عدة تصاميم تجارب تقليدية ورقمية.

فيما يتعلق بتصاميم التجارب التقليدية ، نحن نشكل تصاميم تجارب جديدة مستطيلة بزاوية قائمة ( $m$ ) ذات أكثر من 3 أقسام تجمع [23]، انطلاقا من سلسلة أنماط تجمع جديدة ذات  $v=2n!$  و  $m=5$  ، 4 و 7 أقسام تجمع، المحكمة بالطريقة التوفيقية ( $s$ ) [24] التي وضعت سابقا للحصول على تصاميم تجارب جديدة مستطيلة. ثم نعمم هذه النتائج من اجل  $v=1/n!$  [25] . علاوة على ذلك نحن نصف طريقة اخرى لتشكيل أنواع أخرى من تصاميم التجارب المسماة تصاميم التجارب بالأزواج المتوازنة جزئيا انطلاقا من المفهوم العام لأنماط التجمع [26,27].

وأخيرا نحن نطبق من جهة، خوارزمية فانغ [10] على تصاميم تجارب المستطيلة بزاوية قائمة ( $m$ ) المعممة خاصتنا من اجل توليد سلسلة من تصاميم تجارب الرقمية "U-نوع" [25]. من جهة أخرى نحن نطور خوارزمية لتشكيل تصاميم تجارب الرقمية "ملء الفضاء" انطلاقا من أنماط التجمع [27]

بالنسبة للمستخدمين نحن نبرمج كل طرق التشكيل خاصتنا بلغة R[17]:حزمة CombiS [18] و حزمة RPPairwiseDesign [19].

**الكلمات الدلالية:** أنماط التجمع، أنماط التجمع مستطيلة بزاوية قائمة ( $m$ ) معممة ، تصاميم تجارب ناقصة متوازنة جزئيا ، تصاميم تجارب المستطيلة بزاوية قائمة ( $m$ ) ، المعممة الطريقة التوفيقية ( $s$ ) ، تصاميم التجارب بالأزواج المتوازنة جزئيا ، تصاميم تجارب الرقمية "U-نوع" ، تصاميم تجارب الرقمية "ملء الفضاء" .

# Vocabulaire et abréviations

## Vocabulaire

Un plan d'expérience en blocs peut-être défini comme une fonction d'un ensemble fini  $V$  dans un ensemble fini  $B$ , tels que :

$|V| = v, B = \{b_1, \dots, b_b\}$  ;

Les éléments  $\alpha$  de  $V$  sont dits traitements  $\forall \alpha \in V = \{1, \dots, v\}$  ;

Les éléments  $b_i$  de  $B$  sont dits blocs  $\forall b_i \in B = \{b_1, \dots, b_b\}$  ;

$k_i = |b_i|$  dit la taille du bloc  $b_i, \forall i \in \{1, \dots, b\}$  ( $k_i \geq 2$ ) ;

$r_\alpha = |\{b_i \in B / \alpha \in b_i\}|$ , dit la répétition du  $\alpha$  dans les  $b$  blocs,  $\forall \alpha \in V$  ;

$\lambda_{\alpha\beta} = |\{b_i \in B / \{\alpha, \beta\} \subset b_i\}|$ , est le nombre d'apparition d'un couple dans les  $b$  blocs,  $\forall \{\alpha, \beta\} \subset V$ .

- Si  $k_i = v \forall i \in \{1, \dots, b\}$ , le plan en blocs est dit plan complet ;
- Si  $k_i < v$ , alors le plan en blocs est dit plan en blocs incomplets ;
- Si  $k_i = k, \forall i \in \{1, \dots, b\}$ , alors le plan en blocs est dit plan en blocs propre ;
- Si  $r_\alpha = r, \forall \alpha \in V = \{1, \dots, v\}$ , alors le plan en blocs est dit plan en blocs équirépété ;
- Si  $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda \forall \{\alpha, \beta\} \subset V$ , alors le plan en blocs équirépété est dit plan en blocs équilibré ;
- Si  $\lambda_{\alpha\beta}$  sont distincts, alors le plan en blocs équirépété est dit plan en blocs partiellement équilibré ;
- Si  $k_i$  sont distincts, alors le plan en blocs équirépété est dit plan en blocs "pairwise".

## Abréviation

*PBIE* : Plan en Blocs Incomplets Equilibré ;

*PBIER* : Plan en Blocs Incomplets Equilibré Résolvable ;

*PBIPE* : Plan en Blocs Incomplets Partiellement Equilibré ;

*PBIPER* : Plan en Blocs Incomplets Partiellement Equilibré Résolvable ;

*PBPPE* : Plan en Blocs "Pairwise" Partiellement Equilibré ;

*PBIPE<sub>m</sub>* : Plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) à  $m = 4, 5$  et  $7$  classes associées ;

*PBIPEG<sub>m</sub>* : Plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés à  $m = 4, 5$  et  $7$  classes associées ;

*PBIPEGR<sub>m</sub>* : Plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés résolubles à  $m = 4, 5$  et  $7$  classes associées ;

*PBPPER* : Plan en Blocs "Pairwise" Partiellement Equilibré Résolvable ;

*RBIBD - UD* : L'algorithme de Fang pour la construction des plans numériques "U-type" à partir d'un plan en blocs incomplets équilibré ;

*SCH - PBPPER* : La méthode de construction des plans en blocs "Pairwise" partiellement équilibrés résolubles à partir des schémas d'association ;

"SCH-SF" : Algorithme de construction des plans "space-filling" à partir des schémas d'association.

# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>I Schémas d'association rectangulaires à angles droits (<math>m</math>) et leurs généralisation, <math>m= 4, 5</math> et <math>7</math></b>	<b>6</b>
<b>1 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (<math>m</math>), <math>m= 4, 5</math> et <math>7</math></b>	<b>7</b>
1.1 Introduction	7
1.2 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (4)	9
1.2.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4)	9
1.2.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4)	9
1.3 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (5)	10
1.3.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5)	10
1.3.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5)	11
1.4 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (7)	12
1.4.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7)	12
1.4.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7)	12
1.5 Conclusion	14
<b>2 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (<math>m</math>) généralisés <math>m=4, 5, 7</math></b>	<b>15</b>
2.1 Introduction	15
2.2 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (4) généralisés	15
2.2.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) généralisé	15
2.2.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) généralisé	16
2.3 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (5) généralisés	17
2.3.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) généralisé	17
2.3.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) généralisé	17
2.4 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (7) généralisés	18
2.4.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) généralisé	18
2.4.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) généralisé	19
2.5 Conclusion	20
<b>II Construction de Plans e blocs à partir des schémas d'association</b>	<b>22</b>
<b>3 La Méthode Combinatoire (s)</b>	<b>23</b>
3.1 Introduction	23

3.2	La méthode de Vartak pour la construction des plans rectangulaires . . . . .	24
3.3	La Méthode Combinatoire ( $s$ ) . . . . .	25
3.3.1	Description de la Méthode Combinatoire ( $s$ ) . . . . .	25
3.3.2	Algorithme de construction de plans rectangulaires . . . . .	27
3.3.3	La Méthode Combinatoire ( $s$ ) pour les plans divisibles en groupes singuliers . . . . .	27
3.3.4	Algorithme de construction de plans divisibles en groupes singuliers . . . . .	27
3.4	Conclusion . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Plans en blocs rectangulaires à angles droits (<math>m</math>) (<math>PBIP E_m</math>), <math>m=4, 5, 7</math></b>	<b>29</b>
4.1	Introduction . . . . .	29
4.2	Construction des plans rectangulaires à angles droits (4) ( $PBIP E_m$ ) . . . . .	29
4.2.1	Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits (4) ( $PBIP E_4$ ) . . . . .	30
4.2.2	Méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (5) ( $PBIP E_5$ ) . . . . .	36
4.2.3	Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits (7) ( $PBIP E_7$ ) . . . . .	39
4.3	Conclusion . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Plans rectangulaires à angles droits (<math>m</math>) généralisés, <math>m=4, 5, 7</math></b>	<b>43</b>
5.1	Introduction . . . . .	43
5.2	Construction des plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés . . . . .	43
5.2.1	Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits (4) généralisés . . . . .	43
5.2.2	Méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (5) généralisés . . . . .	58
5.2.3	Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits généralisés . . . . .	63
5.3	Conclusion . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Construction des plans en blocs “ pairwise ” partiellement équilibrés résolubles via des schémas d’associations</b>	<b>68</b>
6.1	Introduction . . . . .	68
6.2	Méthode de “ dualizing with respect to pairs ” . . . . .	68
6.2.1	Description de la méthode de “ dualizing with respect to pairs ” . . . . .	69
6.3	Méthode de Construction des plans en blocs “ pairwise ” partiellement équilibrés résolubles via des schémas d’associations ‘ $SCH - PBPPER$ ’ . . . . .	69
6.4	Conclusion . . . . .	71
<b>III</b>	<b>Construction de plans numériques</b>	<b>72</b>
<b>7</b>	<b>Plans “ U-type ” associés aux plans en blocs rectangulaires à angles droits (<math>m</math>) généralisés résolubles (<math>m=4, 5, 7</math>)</b>	<b>73</b>
7.1	Introduction . . . . .	73
7.2	Construction des plans numériques “ U-type ” à partir des $PBIER$ . . . . .	73
7.2.1	L’algorithme ‘ $RBIBD - UD$ ’ . . . . .	73
7.3	Construction des plans “U-type” via les plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés ( $PBIPEG_m$ ) résolubles ( $m=4, 5, 7$ ) . . . . .	74
7.4	Conclusion . . . . .	76
<b>8</b>	<b>Construction des plans numériques “ space-filling ”</b>	<b>78</b>
8.1	Introduction . . . . .	78
8.2	Construction des plans numériques “ space-filling ” à partir des plans “ pairwise ” partiellement équilibrés . . . . .	78
8.3	Construction des plans numériques “ space-filling ” à partir des schémas d’association . . . . .	79
8.3.1	L’algorithme ‘ $SCH - SF$ ’ . . . . .	79
8.4	Conclusion . . . . .	80
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>81</b>

<b>A</b>	<b>Le R-package Combins</b>	<b>83</b>
A.1	Introduction . . . . .	83
A.2	CombS . . . . .	83
A.3	PBIB4 . . . . .	84
	A.3.1 PBIB4( <i>n,l,s,ty="a"</i> ) . . . . .	84
	A.3.2 PBIB4( <i>n,l,s,ty="b"</i> ) . . . . .	85
A.4	PBIB5 . . . . .	86
A.5	PBIB7 . . . . .	87
	A.5.1 PBIB7( <i>n,l,s,ty="a"</i> ) . . . . .	87
	A.5.2 PBIB7( <i>n,l,s,ty="b"</i> ) . . . . .	87
A.6	Conclusion . . . . .	88
<b>B</b>	<b>R- package RPPairwiseDesign</b>	<b>89</b>
B.1	Introduction . . . . .	89
B.2	Les fonction de R- Package <i>RPPairwiseDesign</i> . . . . .	89
	B.2.1 La fonction <i>PPdiv</i> . . . . .	89
	B.2.2 La fonction <i>PPGrectRightAng4</i> . . . . .	90
	B.2.3 La fonction <i>PPGrectRightAng5</i> . . . . .	92
	B.2.4 La fonction <i>PPGrectRightAng7</i> . . . . .	93
	B.2.5 La fonction <i>PPNestdiv</i> . . . . .	95
	B.2.6 La fonction <i>PPrect</i> . . . . .	97
	B.2.7 La fonction <i>PPrightAng</i> . . . . .	98
	B.2.8 La fonction <i>SaceFilling</i> . . . . .	100
B.3	Conclusion . . . . .	101

# Introduction

Afin d'étudier ou de comprendre un phénomène quelconque, les chercheurs ont recours à la réalisation de certaines expériences réelles ou simulées. Bon nombre de phénomènes étudiés dépendent d'un très grand nombre de variables difficiles à gérer intuitivement. Si ces expériences sont réalisées sans planification au préalable, les résultats peuvent conduire à des impasses ou encore à des incohérences ; d'où l'intérêt de réaliser ces expériences suivant une méthodologie rigoureuse. Ronald Fisher (1920-1962) proposa, face à l'impossibilité de réaliser la totalité des expériences, des configurations expérimentales basées sur des modèles statistiques. Ceci constitue le point de départ de la méthode théorique des plans d'expérience. Yates (1936-1940) a introduit le concept de plans en blocs incomplets dans lesquels les différents objets ne sont pas tous présents dans un même bloc. Ces blocs incomplets étant plus proches de la réalité.

Ainsi donc, depuis que le concept de plans en blocs incomplets est introduit, plusieurs problèmes concernant l'existence, la construction et les propriétés combinatoires de ces blocs ont été posés. En particulier, diverses techniques de construction numériques, algorithmiques et algébriques de ces dispositifs furent dès lors développées. L'aspect construction algébrique de plans en blocs particuliers, fera l'objet de notre étude.

En effet, dans la littérature des plans en blocs incomplets, deux approches de construction algébriques sont considérées : l'une directe, c'est-à-dire, à partir de structures algébriques, tels les groupes cycliques [29], les carrés latins [21] et les configurations géométriques [5]. La deuxième s'effectue à partir des plans en blocs déjà existants, tels les plans en blocs équilibrés [33, 11, 12], et les plans en blocs partiellement équilibrés [22].

Dans ce travail, la première approche est considérée et plus exactement, celle utilisant les schémas d'association à  $m \geq 2$  classes associées. Les schémas à deux ou trois classes associées ont été et continuent à être largement étudiés (Voir par exemple [4, 6, 14]), ce n'est pas le cas de ceux à plus de trois classes associées. Ces derniers, sont particulièrement visés et sont développés au long de cette thèse. Toutefois, quelques schémas à quatre classes associées ont été considérés (par exemple [30, 32]) ou à cinq classes associées (Par exemple [2, 13]). Par ailleurs, Bailey [1] a proposé une méthode d'obtention de nouveaux schémas d'association par croisement et emboîtement d'autres schémas d'association. Les paramètres des ces schémas ont été obtenus en utilisant les "character tables" et les "strates" des schémas initiaux.

Ainsi, la première partie de la thèse (Chapitres 1 et 2), est consacrée au développement d'une nouvelle série de schémas d'association à 4, 5 et 7 classes associées, par combinaison de schémas d'association rectangulaires et de schémas d'association à angles droits. Ils sont dénommés, par convenance, schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ),  $m=4, 5$  et 7. [23].

Une généralisation de ces schémas est effectuée dans le Chapitre 2. [25].

La construction (algébrique et combinatoire) des plans en blocs à plus de deux classes constitue une des principales motivations de ce travail. Les Chapitres 4, 5 et 6 de la Partie (II) lui sont consacrés. Ils englobent de nouvelles méthodes de construction basées sur des schémas d'association. Plus précisément et préalablement, une méthode de construction (Chapitre 3) originale et accessible, dite 'La méthode Combinatoire ( $s$ )'

est développée [24]. Celle-ci permet de fournir aisément la configuration de plans en blocs rectangulaires. Ces plans constituent une sous-classe importante de Plans en Blocs Partiellement Équilibrés (*PBIPE*) et furent introduits pour la première fois par Vartak [33], puis d'autres, comme par exemple [11] et [12]. Tous, utilisent les matrices d'incidence de Plans en Blocs Incomplets Équilibrés (*PBIE*), supposés existants, ou bien utilisant des opérations sur ces dernières pour en déduire de nouvelles matrices d'incidence de plans rectangulaires. La Méthode Combinatoire (*s*) ainsi proposée se caractérise par le fait qu'elle ne soit soumise à aucune supposition ; elle n'exige que le concept de schémas d'association rectangulaires. [24].

Diverses méthodes de construction de *PBIPE* basées sur ces schémas d'association rectangulaires à angles droits (*m*), accommodées de la Méthode Combinatoire (*s*) appelés par convenance Plans en Blocs Incomplets Partiellement équilibrés rectangulaires à angles droits (*m*) (*PBIPE<sub>m</sub>*) (*m*=4, 5 et 7) sont décrites dans le Chapitre 4. [23].

Similairement, le Chapitre 5 décrit une série de méthodes de construction de *PBIPE* basée sur les schémas d'association rectangulaires à angles droits (*m*) généralisés. Par convenance, ils sont dits Plans en Blocs Incomplets Partiellement équilibrés rectangulaires à angles droits (*m*) généralisés (*PBIPEG<sub>m</sub>*) (*m*=4, 5 et 7). [25]

Dans le Chapitre 6, une autre méthode de construction est proposée et décrite, 'SCH - PBPPER'. Elle permet de générer d'autres types de plans en Blocs dits, Plans en Blocs "Pairwise" Partiellement Équilibrés Résolvables (*PBPPER*). Ces plans sont plus souples que les *PBIPE* car la taille des blocs est variable et donc moins contraignante. Dans la littérature, ils existent plusieurs méthodes de construction des plans en blocs "pairwise", la plupart de ces méthodes sont basées sur d'autres plans en blocs (par exemple : [22],[28], [20]). Notre méthode est décrite uniquement à partir du concept général de schémas d'association. [26, 27].

Une autre motivation ou visée de cette thèse, est la construction algébrique de plans d'expérience numériques. Rappelons que ceux-ci continuent toujours à susciter la curiosité des scientifiques dans divers domaines [15, 16]. Or, il est connu que les plans d'expérience classiques possédant certaines propriétés combinatoires, (voir par exemple [8, 9]), et en particulier comme ceux développés au long de ce travail, peuvent-être considérés comme outils de base pour obtenir des plans numériques. Ainsi donc, la Partie III (Chapitres 7 et 8) est consacrée à l'application de l'algorithme de Fang [10] aux *PBIBEG<sub>m</sub>* resolvables du Chapitre 5 pour proposer une série de plans numériques "U-type".

Dans le Chapitre 8, par application du même algorithme aux *PBPPER* décrit au Chapitre 6, une série de plans numériques "space-filling" est obtenue. [26].

Enfin, nous nous sommes inspirés de l'algorithme de Fang, pour concevoir un autre algorithme de construction de plans numériques "space-filling", dit par convenance 'SCH-SF', celui-ci permet de fournir une série de plans "space-filling" à partir, purement, des schémas d'association. [27].

Comme l'utilisation des plans d'expériences n'est pas exclusivement réservée aux statisticiens, alors pour rendre nos méthodes de construction (décrites dans les chapitre 3, 4 et 5) utiles et accessibles à tout utilisateur, elles ont été reformulées sous forme de fonctions de "R- package" 'CombinS' (Annexe A). [18].

De même, un autre "R- package" 'PPairwiseDesign' est proposé, reformulant la méthode 'SCH- PBPPER' (Chapitre 6) qui permet d'obtenir les configurations de plans "pairwise" partiellement équilibrés résolubles (*PBPPER*).

L'algorithme 'SCH- SF' du Chapitre 8 permet d'obtenir les configurations des plans numériques associés (Annexe B). [19].

## Première partie

# Schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ) et leurs généralisation, $m= 4, 5$ et $7$

# Schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ), $m = 4, 5$ et $7$

## 1.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous combinons les schémas d'association rectangulaires et les schémas d'association à angles droits pour construire de nouveaux schémas d'association, que nous appelons schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ),  $m = 4, 5$  et  $7$ , en commençant par les représentations géométriques afin de rendre leurs définitions plus intuitives, ensuite nous développons leurs paramètres et nous donnons leurs expressions exactes.

Nous commençons d'abord par rappeler quelques définitions classiques des schémas d'association :

### Définition 1. [9]

Un schéma d'association à  $m$  classes associées ( $m \geq 2$ ) est une relation entre  $n$  traitements satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) Deux traitements sont soit 1<sup>ers</sup>, 2<sup>emes</sup>, ..., ou  $m^{emes}$  associés, la relation d'association étant symétrique ie si le traitement  $\alpha$  est  $i^{eme}$  associé au traitement  $\beta$  alors le traitement  $\beta$  est  $i^{eme}$  associé au traitement  $\alpha$ .
- (ii) Chaque traitement  $\alpha$  a  $n_i$  traitements  $i^{emes}$  associés, Le nombre  $n_i$  est indépendant de  $\alpha$ .
- (iii) Si deux traitements  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $i^{emes}$  associés, alors le nombre de traitements qui sont  $j^{emes}$  associés à  $\alpha$  et  $k^{emes}$  associés à  $\beta$  est noté  $p_{jk}^i$  et est indépendant du couple de traitements  $i^{emes}$  associés.

Les paramètres  $p_{jk}^i$  pour  $i, j, k = \{1, \dots, m\}$  du schéma d'association sont donné sous forme de matrices carrés d'ordre  $m$ ,  $P_i = (p_{jk}^i)_{m \times m}$ .

Les paramètres du schéma d'association  $v, n_i, p_{jk}^i$  pour  $i, j, k = \{1, \dots, m\}$  vérifient les équations suivantes :

$$\sum_{k=1}^m p_{jk}^i = \begin{cases} n_j & \text{if } i \neq j \\ n_j - 1 & \text{if } i = j \end{cases} \quad (1.1)$$

$$n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k. \quad (1.2)$$

Bailey [1] donne trois autres définitions équivalentes des schémas d'association (Définitions 2, 3 et 14), chaque définition a des avantages et des inconvénients, dépendant de contexte utilisé :

**Définition 2.** Un schéma d'association à  $m$  classes associées sur  $V$ , est une partition de  $V \times V$  en ensembles  $\{R_i\}_{i=1, \dots, m}$  (appelées classes d'associations) vérifiant les conditions suivantes :

$$- V \times V = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m \cup \{(\alpha, \alpha), \alpha \in V\}, \text{ tel que } R_i \cap R_j = \emptyset, R_i \text{ symétrique } \forall i \neq j \in \overline{1, m}$$

- $\forall \alpha \in V, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad n_i = |R_i(\alpha)|$  est une constante qui ne dépend pas de  $\alpha$  (où  $n_i$  est le nombre des éléments  $i^{èmes}$  associés à  $\alpha$ ).
- $\forall (\alpha, \beta) \in R_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad P_{jk}^i = |R_j(\alpha) \cap R_k(\beta)|$  est une constante qui ne dépend pas du couple  $(\alpha, \beta)$  (où  $P_{jk}^i$  est le nombre des éléments  $j^{èmes}$  associés à  $\alpha$  et  $k^{èmes}$  associés à  $\beta$ ).

Cette Définition est utile dans un contexte des ensembles et partition.

**Définition 3.** Un schéma d'association à  $m$  classes associées sur un ensemble fini  $V$  est une coloration des arêtes d'un graphe non orienté complet constituée de l'ensemble de  $V$  sommets et  $m$  couleurs sachant que :

1. Pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$ , il existe un entier  $p_{ij}^k$  telle que, pour chaque arête  $\{\alpha, \beta\}$  de couleur  $k$  alors :  
 $|\{\gamma \in V : \{\alpha, \gamma\} \text{ a la couleur } i \text{ et } \{\gamma, \beta\} \text{ a la couleur } j\}| = p_{ij}^k$
2. Chaque couleur est utilisée au moins une fois.
3. il existe des entiers  $n_i$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) sachant que, chaque sommet est contenu exactement dans  $n_i$  arêtes de couleur  $i$ .

Cette définition est utile dans le contexte de graphes.

**Définition 4.** Un schéma d'association à  $m$  classes associées sur un ensemble  $V$ , est un ensemble de matrices  $\{A_0, A_1, \dots, A_s\}$  dans  $\mathbb{R}^{(V \times V)}$ , toutes ses entrées sont égales à 0 ou 1, tels que :

1.  $A_0 = I_V$  ( $I_V$  la matrice d'identité d'ordre  $V$ ).
2.  $A_i$  est symétrique pour  $i = 1, \dots, m$ .
3.  $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$ , le produit  $A_i A_j$  est une combinaison linéaire de  $A_0, A_1, \dots, A_s$ .
4. Aucune des matrices n'est égale à la matrice nulle  $O_V$ , et  $\sum_{i=1}^m A_i = J_V$ .

Cette Définition est utile dans le contexte des matrices.

**Définition 5.** [33]

Un schéma d'association rectangulaire est un arrangement de  $v = nl$  traitements dans un tableau de  $n$  lignes et  $l$  colonnes. Pour un traitement  $\alpha$  :

- (i) Les traitements  $1^{ers}$  associés à  $\alpha$  sont les traitements de la même ligne.
- (ii) Les traitements  $2^{èmes}$  associés à  $\alpha$  sont les traitements de la même colonne.
- (iii) Les traitements  $3^{èmes}$  associés à  $\alpha$  sont les traitements restants.

**Définition 6.** [32]

Un schéma d'association à angles droits est un arrangement de  $v = wnl$  ( $w \geq 2, l \geq 2, n \geq 2$ ) traitements dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :

- (i) Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.
- (ii) Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.
- (iii) Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  associés sont les traitements de la même ligne que  $\alpha$  des autres tableaux.
- (iv) Les traitements quatrièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants des autres tableaux.

Dans notre travail de thèse, nous considérons essentiellement les Définitions 1, 5 et 6 des schémas d'association pour passer au concept du plan d'expérience en blocs.

## 1.2 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (4)

### 1.2.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4)

Soit  $V$  un ensemble de  $v = 2nl$  traitements, ( $n \geq 2, l \geq 2$ ), auquel on associe une représentation géométrique de la manière suivante :

A chaque traitement  $\alpha$  de  $V$ , on fait correspondre un unique triplet de l'ensemble  $B^1 \cup B^2$  où :

$$B^g = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq n, z = g\} \quad g = 1, 2$$

Soit un traitement  $\alpha$  de coordonnées  $(x, y, z) \in B^g$  ( $g = 1, 2$ )

-  $B_1^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements **1<sup>ers</sup>** associés à  $\alpha$ .

-  $B_2^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **2<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

-  $B_3^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **3<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

-  $B_4^g = \{(x', y', z') \in B^{g'}, g' \neq g\}$  correspond aux traitements **4<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

Cette représentation géométrique décrit un nouveau schéma d'association, que nous appelons par convenue, schéma d'association rectangulaire à angles droits à 4 classes associées, dont nous donnons la définition équivalente suivante :

### 1.2.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4)

**Définition 7.** Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) est un arrangement de  $v = 2nl$  ( $l \geq 2, n \geq 2$ ) traitements dans deux tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :

(i) Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.

(ii) Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même colonne que  $\alpha$  du même tableau.

(iii) Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.

(iv) Les traitements quatrièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements de l'autre tableau.

**Proposition 1.** Les paramètres d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) sont :

$$v = 2nl, \quad n_1 = l - 1, \quad n_2 = n - 1, \quad n_3 = (n - 1)(l - 1), \quad n_4 = nl$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} l-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & n-1 & (l-2)(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ln \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l-1 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ln \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & l-2 & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & 0 \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ln \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l-1 \\ 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & (l-1)(n-1) \\ l-1 & n-1 & (l-1)(n-1) & 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Les paramètres du schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) vérifient les deux équations (1.1) et (1.2), par exemple :

$$\sum_{k=1}^4 p_{1k}^1 = l-2 = (l-1) - 1 = n_1 - 1 \quad i = j = 1$$

$$\sum_{k=1}^4 p_{2k}^2 = n-2 = (n-1) - 1 = n_2 - 1 \quad i = j = 2$$

$$\sum_{k=1}^4 p_{3k}^3 = nl - n - l = (n-1)(l-1) - 1 = n_3 - 1 \quad i = j = 3$$

$$\sum_{k=1}^4 p_{4k}^4 = nl - 1 = n_4 - 1 \quad i = j = 4$$

$$n_1 p_{23}^1 = n_2 p_{13}^2 = n_3 p_{12}^3 = (n-1)(l-1).$$

Idem pour les autres matrices  $P_2, P_3, P_4$ . □

### 1.3 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (5)

#### 1.3.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5)

Soit  $V$  un ensemble de  $v = 2nl$  traitements, ( $n \geq 2, l \geq 2$ ), auquel on associe une représentation géométrique de la manière suivante :

A chaque traitement  $\alpha$  de  $V$ , on fait correspondre un unique triplet de l'ensemble  $B^1 \cup B^2$  où :

$$B^g = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq n, z = g\} \quad g = 1, 2$$

Soit un traitement  $\alpha$  de coordonnées  $(x, y, z) \in B^g$  ( $g = 1, 2$ )

$B_1^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements **1<sup>eres</sup>** associés à  $\alpha$ .

-  $B_2^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **2<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

-  $B_3^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **3<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

-  $B_4^g = \{(x', y', z') \in B^g, g' \neq g / z' = y\}$  correspond aux traitements **4<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

-  $B_5^g = \{(x', y', z') \in B^g, g' \neq g / z' \neq y\}$  correspond aux traitements **5<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

Cette représentation géométrique décrit un nouveau schéma d'association, que nous appelons par convenance, schéma d'association rectangulaire à angles droits à 5 classes associées, dont nous donnons la définition équivalente suivante :

### 1.3.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5)

**Définition 8.** Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) est un arrangement de  $v = 2nl$  ( $l \geq 2, n \geq 2$ ) traitements dans deux tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :

- (i) Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.
- (ii) Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même colonne que  $\alpha$  du même tableau.
- (iii) Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.
- (iv) Les traitements quatrièmes associés à  $\alpha$  associés sont les traitements de la même ligne que  $\alpha$  de l'autre tableau.
- (v) Les traitements cinquièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants de l'autre tableau.

**Proposition 2.** Les paramètres d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) sont :

$$v = 2nl, \quad n_1 = l - 1, \quad n_2 = n - 1, \quad n_3 = (n - 1)(l - 1), \\ n_4 = l, \quad n_5 = (n - 1)l$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} l-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & (l-2)(n-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (n-1)l \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & l & (n-2)l \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & 0 & 0 \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & l & (n-2)l \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (l-1)(n-1) \\ l-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & (l-1)(n-1) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & l-1 & (l-1)(n-2) \\ 0 & 1 & l-1 & 0 & 0 \\ l-1 & n-2 & (l-1)(n-2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Les paramètres du schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) vérifient les deux équations (1.1) et (1.2). (Similaire à la démonstration de la Proposition 1).  $\square$

## 1.4 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (7)

### 1.4.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7)

Soit  $V$  un ensemble de  $v = 2nl$  traitements, ( $n \geq 2, l \geq 2$ ), auquel on associe une représentation géométrique de la manière suivante :

A chaque traitement  $\alpha$  de  $V$ , on fait correspondre un unique triplet de l'ensemble  $B^1 \cup B^2$  où :

$$B^g = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq n, z = g\} \quad g = 1, 2$$

Soit un traitement  $\alpha$  de coordonnées  $(x, y, z) \in A^g$  ( $g = 1, 2$ )

- $B_1^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements **1<sup>ers</sup>** associés à  $\alpha$ .
- $B_2^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **2<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .
- $B_3^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **3<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .
- $B_4^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' = x, y' = y\}$  correspond à le traitement **4<sup>eme</sup>** associé à  $\alpha$ .
- $B_5^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements **5<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .
- $B_6^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **6<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .
- $B_7^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements **7<sup>emes</sup>** associés à  $\alpha$ .

Cette représentation géométrique décrit un nouveau schéma d'association, que nous appelons par convenance, schéma d'association rectangulaire à angles droits à 7 classes associées, dont nous donnons la définition équivalente suivante :

### 1.4.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7)

**Définition 9.** *Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) est un arrangement de  $v = 2nl$  ( $l \geq 2, n \geq 2$ ) traitements dans deux tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :*

- (i) *Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.*
- (ii) *Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même colonne que  $\alpha$  du même tableau.*
- (iii) *Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.*
- (iv) *Le traitement quatrième associé à  $\alpha$  est l'unique traitement qui se trouve à la même ligne et la même colonne de  $\alpha$  de l'autre tableau.*
- (v) *Les traitements cinquièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements de la même ligne que  $\alpha$  de l'autre tableau et qui sont différents du traitement quatrième associé de  $\alpha$ .*
- (vi) *Les traitements sixièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements de la même colonne que  $\alpha$  de l'autre tableau et qui sont différents du traitement quatrième associé de  $\alpha$ .*
- (vii) *Les traitements septièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants de l'autre tableau.*

**Proposition 3.** *Les paramètres d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) sont :*

$$v = 2nl, \quad n_1 = l - 1, \quad n_2 = n - 1, \quad n_3 = (n - 1)(l - 1), \quad n_4 = 1, \\ n_5 = l - 1, \quad n_6 = n - 1, \quad n_7 = (n - 1)(l - 1)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} l-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & (l-2)(n-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & (l-2)(n-1) \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 & 0 & (l-1)(n-2) \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (l-1)(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (l-1)(n-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & (l-2)(n-1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & (l-2)(n-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 & 0 & (l-1)(n-2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Les paramètres du schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) vérifient les deux équations (1.1) et (1.2). (Similaire à la démonstration de la Proposition 1).  $\square$

## 1.5 Conclusion

Nous avons défini une nouvelle série de schémas d'association à plus de 3 classes associées. Nous les avons appelé schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ) à  $m = 4, 5$  et 7 classes associées.

Ces résultats constituent une partie du papier :

**Rezgui, I., Gheribi-Aoulmi, Z. & H. Monod (2013).** New association schemes with 4, 5 and 7 associated classes and their associated partially balanced incomplete block designs. **Advances and Applications in Discrete Mathematics**, 12 (179 - 206).  
<http://www.pphmj.com/journals/contents/aadm.htm>

C'est dans le Chapitre 4, que nous proposons les méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits  $PBIP E_m$ , à partir de ces schémas rectangulaires à angles droits ( $m$ ) accommodés de la Méthode Combinatoire ( $s$ ) décrite dans le Chapitre 3.

Le Chapitre 2 qui suit, généralise ces nouveaux concepts de schémas d'association.

# Schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés $m=4, 5, 7$

## 2.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous généralisons les schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ) à  $m = 4, 5$  et  $7$  classes associées (Voir le Chapitre 1), en commençant par les représentations géométriques de ces nouveaux schémas, ensuite nous développons leurs paramètres et nous donnons leurs expressions.

## 2.2 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (4) généralisés

### 2.2.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) généralisé

Soit  $V$  un ensemble de  $v = wnl$  traitements, ( $w \geq 2, n \geq 2, l \geq 2$ ), auquel on associe une représentation géométrique de la manière suivante :

A chaque traitement  $\alpha$  de  $V$ , on fait correspondre un unique triplet de l'ensemble  $B^1 \cup B^2 \dots \cup B^g$  où :

$$B^g = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq n, z = g\} \quad g = 1, 2, \dots, w$$

Soit un traitement  $\alpha$  de coordonnées  $(x, y, z) \in B^g$  ( $g = 1, 2, \dots, w$ )

- $B_1^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements  $1^{ers}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_2^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $2^{emes}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_3^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $3^{emes}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_4^g = \{(x', y', z') \in B^g, g' \neq g\}$  correspond aux traitements  $4^{emes}$  associés à  $\alpha$ .

Cette représentation géométrique décrit une généralisation du schéma d'association rectangulaire à angles droits à 4 classes associées, dont nous donnons la définition équivalente suivante :

## 2.2.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) généralisé

**Définition 10.** Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) généralisé est un arrangement de  $v = wnl$  ( $w \geq 2, n \geq 2, l \geq 2$ ) traitements dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :

- (i) Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.
- (ii) Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même colonne que  $\alpha$  du même tableau.
- (iii) Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.
- (iv) Les traitements quatrièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements des autres tableaux.

**Proposition 4.** Les paramètres d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) généralisé sont :

$$v = wnl, \quad n_1 = l - 1, \quad n_2 = n - 1, \quad n_3 = (n - 1)(l - 1), \quad n_4 = (w - 1)nl$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} l-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & n-1 & (l-2)(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (w-1)ln \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l-1 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (w-1)ln \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & l-2 & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & 0 \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (w-1)ln \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l-1 \\ 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & (l-1)(n-1) \\ l-1 & n-1 & (l-1)(n-1) & (w-2)ln \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Les paramètres du schéma d'association rectangulaire à angles droits (4) généralisé vérifient les deux équations (1.1) et (1.2), par exemple :

$$\sum_{k=1}^4 p_{1k}^1 = l - 2 = (l - 1) - 1 = n_1 - 1 \quad i = j = 1$$

$$\sum_{k=1}^4 p_{2k}^2 = n - 2 = (n - 1) - 1 = n_2 - 1 \quad i = j = 2$$

$$\sum_{k=1}^4 p_{3k}^3 = nl - n - l = (n - 1)(l - 1) - 1 = n_3 - 1 \quad i = j = 3$$

$$\sum_{k=1}^4 p_{4k}^4 = wnl - 1 = n_4 - 1 \quad i = j = 4$$

$$n_1 p_{23}^1 = n_2 p_{13}^2 = n_3 p_{12}^3 = (n - 1)(l - 1).$$

Idem pour les autres matrices  $P_2, P_3, P_4$ . □

## 2.3 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (5) généralisés

### 2.3.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) généralisé

Soit  $V$  un ensemble de  $v = wnl$  traitements, ( $w \geq 2, n \geq 2, l \geq 2$ ), auquel on associe une représentation géométrique de la manière suivante :

A chaque traitement  $\alpha$  de  $V$ , on fait correspondre un unique triplet de l'ensemble  $B^1 \cup B^2 \cdots \cup B^g$  où :

$$B^g = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq n, z = g\} \quad g = 1, 2, \dots, w$$

Soit un traitement  $\alpha$  de coordonnées  $(x, y, z) \in B^g$  ( $g = 1, 2, \dots, w$ )

–  $B_1^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements  $1^{eres}$  associés à  $\alpha$ .

$B_2^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $2^{emes}$  associés à  $\alpha$ .

–  $B_3^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $3^{emes}$  associés à  $\alpha$ .

–  $B_4^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / z' = y\}$  correspond aux traitements  $4^{emes}$  associés à  $\alpha$ .

–  $B_5^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / z' \neq y\}$  correspond aux traitements  $5^{emes}$  associés à  $\alpha$ .

Cette représentation géométrique décrit une généralisation du schéma d'association rectangulaire à angles droits à 5 classes associées, dont nous donnons la définition équivalente suivante :

### 2.3.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) généralisé

**Définition 11.** *Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) généralisé est un arrangement de  $v = wnl$  ( $w \geq 2, n \geq 2, l \geq 2$ ) traitements dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :*

- (i) *Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.*
- (ii) *Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même colonne que  $\alpha$  du même tableau.*
- (iii) *Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.*
- (iv) *Les traitements quatrièmes associés à  $\alpha$  associés sont les traitements de la même ligne que  $\alpha$  des autres tableaux.*
- (v) *Les traitements cinquièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants des autres tableaux.*

**Proposition 5.** *Les paramètres d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) généralisé sont :*

$$v = wnl, \quad n_1 = l - 1, \quad n_2 = n - 1, \quad n_3 = (n - 1)(l - 1), \quad n_4 = (w - 1)l,$$

$$n_5 = (w - 1)(n - 1)l$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} l - 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n - 1 & 0 & 0 \\ 0 & n - 1 & (l - 2)(n - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (w - 1)(n - 1)l \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
P_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & l & (w-1)(n-2)l \end{pmatrix}, \\
P_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & 0 & 0 \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & l & (w-1)(n-2)l \end{pmatrix}, \\
P_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (l-1)(n-1) \\ l-1 & 0 & 0 & (w-2)l & 0 \\ 0 & n-1 & (l-1)(n-1) & 0 & (w-2)(l-1)(n-1) \end{pmatrix}, \\
P_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & l-1 & (l-1)(n-2) \\ 0 & 1 & l-1 & 0 & (w-2)l \\ l-1 & n-2 & (l-1)(n-2) & (w-2)l & (w-2)(n-2)l \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Les paramètres du schéma d'association rectangulaire à angles droits (5) généralisé vérifient les deux équations (1.1) et (1.2). (Similaire à la démonstration de la Proposition 4).  $\square$

## 2.4 Schémas d'association rectangulaires à angles droits (7) généralisés

### 2.4.1 Représentation géométrique d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) généralisé

Soit  $V$  un ensemble de  $v = wnl$  traitements, ( $w \geq 2, n \geq 2, l \geq 2$ ), auquel on associe une représentation géométrique de la manière suivante :

A chaque traitement  $\alpha$  de  $V$ , on fait correspondre un unique triplet de l'ensemble  $B^1 \cup B^2 \dots \cup B^g$  où :

$$B^g = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 / 1 \leq x \leq l, 1 \leq y \leq n, z = g\} \quad g = 1, 2, \dots, w$$

Soit un traitement  $\alpha$  de coordonnées  $(x, y, z) \in B^g$  ( $g = 1, 2, \dots, w$ )

- $B_1^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements  $1^{ers}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_2^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $2^{emes}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_3^g = \{(x', y', z') \in B^g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $3^{emes}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_4^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' = x, y' = y\}$  correspond aux traitements  $4^{eme}$  associé à  $\alpha$ .
- $B_5^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' \neq x, y' = y\}$  correspond aux traitements  $5^{emes}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_6^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' = x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $6^{emes}$  associés à  $\alpha$ .
- $B_7^g = \{(x', y', z') \in B^{g'} / g' \neq g / x' \neq x, y' \neq y\}$  correspond aux traitements  $7^{emes}$  associés à  $\alpha$ .

Cette représentation géométrique décrit une généralisation du schéma d'association rectangulaire à angles droits à 7 classes associées, dont nous donnons la définition équivalente suivante :

## 2.4.2 Définition d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) généralisé

**Définition 12.** *Un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) généralisé est un arrangement de  $v = wnl$  ( $w \geq 2, n \geq 2, l \geq 2$ ) traitements dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :*

- (i) *Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.*
- (ii) *Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même colonne que  $\alpha$  du même tableau.*
- (iii) *Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.*
- (iv) *Les traitements quatrièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements qui se trouvent à la même ligne et la même colonne de  $\alpha$  des autres tableaux.*
- (v) *Les traitements cinquièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements de la même ligne que  $\alpha$  des autres tableaux et qui sont différents des traitements quatrièmes associés de  $\alpha$ .*
- (vi) *Les traitements sixièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements de la même colonne que  $\alpha$  des autres tableaux et qui sont différents des traitements quatrièmes associés de  $\alpha$ .*
- (vii) *Les traitements septièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants des autres tableaux.*

**Proposition 6.** *Les paramètres d'un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) généralisé sont :*

$$v = wnl, \quad n_1 = l - 1, \quad n_2 = n - 1, \quad n_3 = (n - 1)(l - 1), \quad n_4 = w - 1, \quad n_5 = (w - 1)(l - 1), \\ n_6 = (w - 1)(n - 1), \quad n_7 = (w - 1)(n - 1)(l - 1)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} l-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & (l-2)(n-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w-1 & (w-1)(l-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (w-1)(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (w-1)(n-1) & (w-1)(n-1)(l-2) \end{pmatrix},$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (w-1)(l-1) \\ 0 & 0 & 0 & w-1 & 0 & (w-1)(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (w-1)(l-1) & 0 & (w-1)(l-1)(n-2) \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w-1 & (w-1)(l-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w-1 & 0 & (w-1)(n-2) \\ 0 & 0 & 0 & w-1 & (w-1)(l-2) & (w-1)(n-2) & (w-1)(l-2)(n-2) \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (l-1)(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & w-2 & 0 & 0 & 0 \\ l-1 & 0 & 0 & 0 & (w-2)(l-1) & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & (w-2)(n-1) & 0 \\ 0 & 0 & (l-1)(n-1) & 0 & 0 & 0 & (w-2)(l-1)(n-1) \end{pmatrix},$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & (l-2)(n-1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & w-2 & 0 & 0 \\ l-2 & 0 & 0 & w-2 & (w-2)(l-2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & (w-2)(n-1) \\ 0 & n-1 & (l-2)(n-1) & 0 & 0 & (w-2)(n-1) & (w-2)(l-2)(n-1) \end{pmatrix},$$

$$P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & n-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l-1 & 0 & (l-1)(n-2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w-2 & 0 \\ 0 & 0 & l-1 & 0 & 0 & 0 & (w-2)(l-1) \\ 0 & n-2 & 0 & w-2 & 0 & (w-2)(n-2) & 0 \\ l-1 & 0 & (l-1)(n-2) & 0 & (w-2)(l-1) & 0 & (w-2)(l-1)(n-2) \end{pmatrix},$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w-2 \\ 0 & 1 & l-2 & 0 & 0 & w-2 & (w-2)(l-2) \\ 1 & 0 & n-2 & 0 & w-2 & 0 & (w-2)(n-2) \\ l-2 & n-2 & (l-2)(n-2) & w-2 & (w-2)(l-2) & (w-2)(n-2) & (w-2)(n-2)(l-2) \end{pmatrix}$$

**Démonstration.** Les paramètres du schéma d'association rectangulaire à angles droits (7) généralisé vérifient les deux équations (1.1) et (1.2). (Similaire à la démonstration de la Proposition 4).  $\square$

## 2.5 Conclusion

Nous avons généralisé la notion de schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ) au cas où les traitements sont rangés dans plus de deux tableaux ( $w > 2$ ) de  $n$  lignes et  $l$  colonnes et nous avons exhibé les expressions des paramètres de ces nouveaux schémas d'association.

Ces résultats constituent une partie du papier :

**Rezgui, I., Gheribi-Aoulmi, Z. & H. Monod (2015).** U-type Designs via New Partially Balanced Incomplete Block Designs with  $m = 4, 5$  and  $7$  Associated Classes. **Applied Mathematics**, 6 (242-264).

Les méthodes de construction de *PBIPE* basées sur ces schémas généralisés, accommodées de la Méthode Combinatoire (*s*) décrite dans le Chapitre 3, seront développées dans le Chapitre 5.

## **Deuxième partie**

# **Construction de Plans e blocs à partir des schémas d'association**

# La Méthode Combinatoire (s)

## 3.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous allons rappeler, entre autres méthodes, celle développée par Vartak [33], ensuite, nous proposons et décrivons une nouvelle méthode de construction de plans rectangulaires, cette fois, à partir de schémas d'association rectangulaires à trois classes. Les plans obtenus sont, par construction de taille  $k = 2s$  et  $2 \leq s < l$ , les autres paramètres sont déduits simplement. Le cas particulier  $s = l$ , fournit des plans en groupes divisibles singuliers.  $l$  est le nombre de colonnes d'une matrice rectangulaire contenant  $v = n \times l$  traitements.

Nous allons commencer d'abord par rappeler quelques définitions classiques :

**Définition 13. [9]**

*Un Plan en Blocs Incomplet Partiellement Equilibré (PBIPE) est un arrangement de  $v$  traitements dans  $b$  blocs tel que :*

- (i) *Chaque traitement est contenu dans  $r$  blocs.*
- (ii) *Chaque bloc contient  $k$  traitements distincts.*
- (iii) *Chaque couple de traitements apparaît  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  fois ensemble. Les traitements qui apparaissent ensemble  $\lambda_1$  fois sont dits  $1^{ers}$  associés, ceux qui apparaissent ensemble  $\lambda_2$  fois sont dits  $2^{emes}$  associés et ainsi de suite ...*

*Un PBIPE est dit résolvable si  $v=rq$  ( $q \in N$ ).*

*Si tous le  $\lambda_i$  sont égaux, alors le PBIPE sera dit un Plan en Blocs Incomplet Equilibré (PBIE)*

*Les paramètres  $v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  vérifient les deux équations d'existences suivantes :*

$$rv = bk \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^m n_i \lambda_i = r(k - 1) \tag{3.2}$$

La répartition des traitements du plan dans les blocs peut être décrite par la matrice d'incidence :

**Définition 14. [33]**

*Une matrice d'incidence  $M$  à  $v$  lignes et  $b$  colonnes d'un plan en blocs, est une matrice dont l'élément  $a_{ij}$  de la  $i^{eme}$  ligne et  $j^{eme}$  colonne est défini par :*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le traitement } i \text{ a lieu dans le bloc } j. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Définition 15. [33]**

Le produit de Kronecker  $A \otimes B$  de deux matrices  $A$  and  $B$  est défini par :  $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$  Où  $a_{ij}B$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) est elle même est une matrice.

**Définition 16. [7]**

Un schéma d'association divisible en groupes est un arrangement de  $v = nl$  traitements dans un tableau de  $n$  lignes et  $l$  colonnes. Pour un traitement  $\alpha$  :

(i) Les traitements  $1^{ers}$  associés à  $\alpha$  sont les traitements de la même ligne distincts de  $\alpha$ .

(ii) Les traitements  $2^{mes}$  associés à  $\alpha$  sont les traitements des autres lignes distincts de  $\alpha$ .

Un plan en blocs partiellement équilibré basé sur un schéma d'association divisible en groupes est dit un plan divisible en groupes.

**Définition 17.** Un plan en blocs partiellement équilibré basé sur un schéma d'association rectangulaire est dit un plan rectangulaire.

**Définition 18.** Un plan en blocs partiellement équilibré basé sur un schéma d'association à angles droits est dit un plan à angles droits.

### 3.2 La méthode de Vartak pour la construction des plans rectangulaires

Soient deux Plans en Blocs Incomplets Équilibrés (PBIE) de paramètres  $v', b', r', k', \lambda'$  et  $v'', b'', r'', k'', \lambda''$  et de matrices d'incidence  $M'$  et  $M''$ .

$M' \otimes M''$  est la matrice d' incidence d'un plan rectangulaire de paramètres :  $v = v'v'', b = b'b'', r = r'r'', k = k'k'', \lambda_1 = r'\lambda'', \lambda_2 = r''\lambda', \lambda_3 = \lambda'\lambda''$  [33], et où  $\otimes$  est le produit de Kronecker.

**Exemple 1.** Considérons deux plans en blocs incomplets équilibrés de paramètres :  $v' = 3 = b', r' = 2 = k', \lambda' = 1$  et  $v'' = 4, b'' = 6, r'' = 3, k'' = 2, \lambda'' = 1$  respectivement :

1	2	4	5
1	3	4	6
2	3	4	7
		5	6
		5	7
		6	7

et de matrices d'incidence respectivement :  $M' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  et

$$M'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le plan rectangulaire de matrice d'incidence  $M = M' \otimes M''$  et de paramètres :  $v = 12, b = 18, r = 6, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$ , a la configuration suivante :

1	2	5	6
1	3	5	7
1	4	5	8
2	3	6	7
2	4	6	8
3	4	7	8
1	2	9	10
1	3	9	11
1	4	9	12
2	3	10	11
2	4	10	12
3	4	11	12
5	6	9	10
5	7	9	11
5	8	9	12
6	7	10	11
6	8	10	12
7	8	11	12

### 3.3 La Méthode Combinatoire ( $s$ )

#### 3.3.1 Description de la Méthode Combinatoire ( $s$ )

Soit  $v = nl$  traitements rangés dans un tableau de  $n$  lignes et  $l$  colonnes comme suit :

$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1l}$
$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2l}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{il}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{nj}$	...	$a_{nl}$

Considérons  $s$  traitements différents de la même ligne  $i$  ( $2 \leq s \leq l$ ) et associons les aux  $s$  autres traitements d'une autre ligne  $i'$  ( $i \neq i'$ ), en respectant la correspondance entre les traitements  $a_{ij}$  et  $a_{i'j}$ . Juxtaposons les  $2s$  traitements dans un même bloc et faisons toutes les combinaisons possibles, nous obtenons alors un plan en *PBIPE* de taille  $k = 2s$ .

**Théorème 1.** *La Méthode Combinatoire ( $s$ ) pour  $2 \leq s < l$  associée à un schéma d'association rectangulaire, permet d'obtenir un plan rectangulaire à trois classes associés de paramètres :*

$$v = nl, \quad b = n(n-1)C_s^{l-1}/2, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2},$$

$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}$$

**Démonstration.** – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

- $r$  : pour chaque traitement  $a_{ij}$ , on applique la procédure avec les  $(l-1)$  autres éléments de la même ligne, il y a  $C_{s-1}^{l-1}$  possibilités, chacune est répétée  $(n-1)$  fois. Donc le traitement  $a_{ij}$  est répété  $(n-1)C_{s-1}^{l-1}$  fois dans les  $b$  blocs du plan, ainsi  $r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}$ .
- $\lambda_1$  : Un couple de traitements  $a_{ij}$  et  $a_{i'j}$  ( $j \neq j'$ ) de la même ligne  $i$  apparaît  $(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois. Alors,  $\lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}$ .
- $\lambda_2$  : Un couple de traitements  $a_{ij}$  et  $a_{i'j}$  ( $i \neq i'$ ) de la même colonne  $j$  apparaît avec les  $C_{s-1}^{l-1}$  autres traitements. Ainsi,  $\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}$ .
- $\lambda_3$  : Un couple de traitements  $a_{ij}$  et  $a_{i'j'}$  ( $j \neq j'$  et  $i \neq i'$ ) apparaît ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois. D'où,  $\lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}$ .

- Enfin le nombre de blocs  $b = n(n-1)C_s^l/2$ . En effet :  
Pour chaque ligne, il y a  $C_s^l$  possibilités. En appliquant la procédure aux  $(n-1)$  autres lignes, d'une part, et en considérant l'ensemble des  $n$  lignes, d'autre part, on obtient  $n(n-1)C_s^l/2$  blocs (la division par 2 est pour éviter la répétition).

□

**Remarque 1.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées. En effet :

$$\begin{aligned} rv &= (n-1)C_{s-1}^{l-1} \times nl \\ &= (n-1)nC_l^s = bk \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \lambda_i n_i &= (n-1)C_{l-1}^{s-1}(s-1) + (n-1)C_{l-1}^{s-1} + C_{l-1}^{s-1}(s-1) \\ &= (n-1)C_{l-1}^{s-1}(2s-1) = r(k-1) \end{aligned}$$

**Remarque 2.** Plus la valeur  $s$  ( $s < l$ ) augmente, plus le nombre de blocs diminue.

**Exemple 2.** Soit  $v = 12 = 3.4$ , ( $n = 3$  et  $l = 4$ ) traitements rangés dans le tableau suivant :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Le plan rectangulaire obtenu à partir de la Méthode Combinatoire ( $s = 2$ ) a pour paramètres :

$$v = 12, b = 18, r = 6, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$$

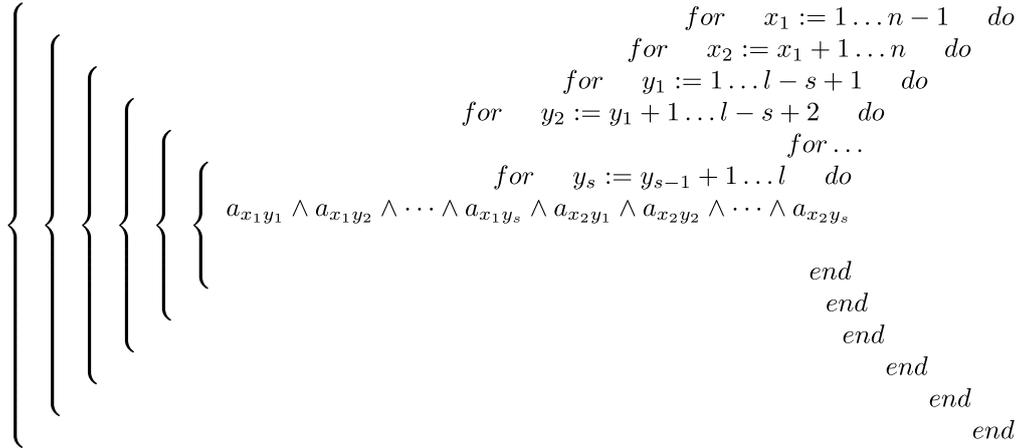
Et pour configuration :

1	2	5	6
1	3	5	7
1	4	5	8
1	2	9	10
1	3	9	11
1	4	9	12
2	3	6	7
2	4	6	8
2	3	10	11
2	4	10	12
3	4	7	8
3	4	11	12
5	6	9	10
5	7	9	11
5	8	9	12
6	7	10	11
6	8	10	12
7	8	11	12

**Remarque 3.** Notons que le plan obtenu par la méthode de Vartak (Exemple 1) est identique au plan rectangulaire obtenu par la Méthode Combinatoire ( $s$ ) (Exemple 2).

Pour  $n$  et  $l$  assez grands et une utilisation pratique, nous proposons un algorithme décrivant la méthode de construction des plans par la Méthode Combinatoire ( $s$ ).

### 3.3.2 Algorithme de construction de plans rectangulaires



La Méthode Combinatoire ( $s$ ) peut aussi être utilisée pour la construction des plans en blocs divisibles en groupes.

### 3.3.3 La Méthode Combinatoire ( $s$ ) pour les plans divisibles en groupes singuliers

**Lemme 1.** La méthode Combinatoire ( $s$ ) pour  $s = l$  associée à un schéma d'association divisible en groupes, permet d'obtenir un plan divisible en groupes (DG) singulier à deux classes associées de paramètres :

$$v = nl, \quad b = n(n-1)/2, \quad r = \lambda_1 = n-1, \quad k = 2l, \quad \lambda_2 = 1$$

*Démonstration.* est identique à la démonstration du Théorème 1, en posant  $s = l$ . □

**Exemple 3.** Plan divisible en groupes singulier.

Soit  $v = 9 = 3 \cdot 3$ , ( $n = 3$  et  $l = 3$ ) traitements rangés dans le tableau suivant :

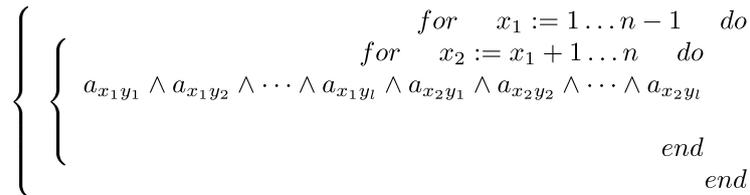
1	2	3
4	5	6
7	8	9

Appliquant la Méthode Combinatoire ( $s$ ),  $s = l = 3$ . Le plan divisible en groupes de paramètres :  $v = 9$ ,  $b = 3$ ,  $r = \lambda_1 = 2$ ,  $k = 6$ ,  $\lambda_2 = 1$ , a pour configuration :

1	2	3	4	5	6
1	2	3	7	8	9
4	5	6	7	8	9

Pour  $n$  et  $l$  assez grands et une utilisation pratique, nous proposons un algorithme décrivant la méthode de construction des plans divisibles en groupes par la Méthode Combinatoire ( $s$ ).

### 3.3.4 Algorithme de construction de plans divisibles en groupes singuliers



### 3.4 Conclusion

La méthode Combinatoire ( $s$ ) ( $2 \leq s < l$ ) proposée, a permis la construction de plans rectangulaires à partir seulement des schémas d'association de  $v = nl$  traitements, et leurs paramètres ne dépendent que des paramètres de ces de schémas d'association et de la valeur de  $s$ .

Par contre les méthodes de construction usuelles des plans rectangulaires exigent d'une part, l'existence des plans en blocs incomplets équilibrés (ces plans n'existent pas toujours) et d'autre part, les paramètres des plans rectangulaires construits à partir de ces dernières méthodes, dépendent nécessairement des paramètres des *PBIE* initiaux.

La Méthode Combinatoire ( $s$ ) fournit en plus des plans divisibles en groupes pour  $s = l$ .

Elle est accessible à tout utilisateur de plans d'expérience car elle a été reformulée comme une fonction ' ComS ' du " R-package " ' CombinS ' [18].

Ces résultats ont été concrétisés par le papier :

**Rezgui, I.** and Gheribi-Aoulmi, Z. (2014). New construction method of rectangular partially balanced incomplete block designs and singular group divisible designs. **Journal of Mathematics and Statistics**, 10 (45- 48). <http://dx.doi.org/10.3844/jmssp.2014.45.48>

Enfin, la Méthode Combinatoire ( $s$ ) peut être considérée comme un outil de base pour construire de nouveaux *PBIP* basés sur de nouveaux schémas d'association. Ces derniers sont développés dans le Chapitre 4 et le Chapitre 5.

# Plans en blocs rectangulaires à angles droits $(m)$ ( $PBIP E_m$ ), $m=4, 5, 7$

## 4.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous décrivons une méthode de construction de plan en blocs incomplets partiellement équilibrés basés sur les schémas d'association rectangulaires à angles droits  $(m)$  définis dans le Chapitre 1 et en utilisant la Méthode Combinatoire développée dans le Chapitre 3. Les plans obtenus sont appelés, Plans en Blocs rectangulaires à angles droits  $(m)$  ( $PBIP E_m$ ) à  $m=4, 5$  et  $7$  classes associées. Rappelons la définition d'un schéma d'association "nested" divisible en groupes :

**Définition 19.** [7]

Un schéma d'association "nested" divisible en groupes est un arrangement de  $v = wnl$  traitements dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun, tel que pour un traitement  $\alpha$  :

- (i) Les traitements premiers associés à  $\alpha$  sont les autres traitements de la même ligne que  $\alpha$  du même tableau.
- (ii) Les traitements deuxièmes associés à  $\alpha$  sont les traitements restants du même tableau.
- (iii) Les traitements troisièmes associés à  $\alpha$  associés sont les traitements des autres tableaux.

Un plan en blocs partiellement équilibré basé sur un schéma d'association "nested" divisible en groupes est dit un plan "nested" divisible en groupes.

## 4.2 Construction des plans rectangulaires à angles droits (4) ( $PBIP E_m$ )

Soit  $v = 2nl$  ( $n \geq 2, l \geq 2$ ) traitements rangés dans deux tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun  $A^{(1)}$  et  $A^{(2)}$  :

	$C_1^{(g)}$	$C_2^{(g)}$	...	$C_j^{(g)}$	...	$C_l^{(g)}$
$R_1^{(g)}$	$a_{11}^{(g)}$	$a_{12}^{(g)}$	...	$a_{1j}^{(g)}$	...	$a_{1l}^{(g)}$
$R_2^{(g)}$	$a_{21}^{(g)}$	$a_{22}^{(g)}$	...	$a_{2j}^{(g)}$	...	$a_{2l}^{(g)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R_i^{(g)}$	$a_{i1}^{(g)}$	$a_{i2}^{(g)}$	...	$a_{ij}^{(g)}$	...	$a_{il}^{(g)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R_n^{(g)}$	$a_{n1}^{(g)}$	$a_{n2}^{(g)}$	...	$a_{nj}^{(g)}$	...	$a_{nl}^{(g)}$

$$A^{(g)} \quad (g \in \{1, 2\})$$

## 4.2.1 Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits (4) ( $PBIP E_4$ )

### Première méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits $PBIP E_4$

Appliquons la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{2, \dots, l-1\}$  à chaque tableau. L'ensemble de tous les blocs donne un  $PBIP E$  à quatre classes associées.

**Théorème 2.** *Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres :*

$$v = 2nl, \quad b = n(n-1)C_s^l, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 0$$

*sont des plans rectangulaires à angles droits (4) ( $PBIP E_4$ ).*

*Démonstration.* Pour chaque tableau, on obtient un plan rectangulaire de paramètres :  $v^* = nl, b^* = n(n-1)C_s^l/2, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, k = 2s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}$ .

Il est clair qu'en considérant les deux tableaux à la fois, on obtient un  $PBIP E_4$  de paramètres :  $v = 2v^* = 2nl, b = 2b^* = 2n(n-1)C_s^l/2, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, k = 2s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}$ .

$\lambda_4 = 0$ , en effet :

Les deux traitements  $a_{ij}^{(1)}$  et  $a_{i'j'}^{(2)}$  des tableaux  $A^{(1)}$  et  $A^{(2)}$  respectivement n'apparaissent jamais ensemble dans le même bloc, ainsi  $\lambda_4 = 0$ . □

**Remarque 4.** *Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées. En effet :*

*Démonstration.*

$$rv = (n-1)C_{s-1}^{l-1} \times 2nl = n(n-1)C_s^l \times 2s = bk.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i n_i &= (n-1)C_{s-2}^{l-2}(l-1) + C_{s-1}^{l-1}(n-1) + C_{s-2}^{l-2}(l-1)(n-1) + 0 \times nl \\ &= (n-1)C_{s-1}^{l-1}[(2s) - 1] = r(k-1). \end{aligned}$$

□

**Exemple 4.** *Soit  $v = 2 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans deux tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :*

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

*Le plan rectangulaire à angles droits (4) obtenu à partir de la Méthode Combinatoire ( $s = 2$ ) a pour paramètres :*

$$v = 18, b = 18, r = 4, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$$

1	2	4	5
1	3	4	6
2	3	5	6
1	2	7	8
1	3	7	9
2	3	8	9
4	5	7	8
4	6	7	9
5	6	8	9
10	11	13	14
10	12	13	15
11	12	14	15
10	11	16	17
10	12	16	18
11	12	17	18
13	14	16	17
13	15	16	18
14	15	17	18

**Lemme 2.** Pour le cas particulier  $s = l$ , la méthode précédente peut servir à la construction de plans emboîtés divisibles en groupes de paramètres :

$$v = 2nl, \quad b = n(n-1), \quad r = (n-1), \quad k = 2l, \quad \lambda_1 = n-1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0$$

Dans le paragraphe qui suit, nous proposons une deuxième méthode de construction de  $PBIP E_4$  où  $\lambda_4 \neq 0$ .

#### Deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (4) ( $PBIP E_4$ )

Soit  $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)})'$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne du  $g^{\text{ème}}$  tableau  $g \in \{1, 2\}$ . On définit  $C_j^{(g)1} = C_j$  pour  $h = 1$  et  $C_j^{(g)h} = (a_{hj}^{(g)}, a_{(h+1)j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)}, a_{1j}^{(g)}, \dots, a_{(h-1)j}^{(g)})'$  pour  $h = 2, 3, \dots, n$  ( $g \in \{1, 2\}$ ). En appliquant la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l+1\}$  à chaque tableau de la forme  $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2\}$ ) pour  $j = 1, \dots, l$ ,  $h = 1, \dots, n$  et  $g \in \{1, 2\}$  et en considérant uniquement les combinaisons de  $s$  traitements contenant une composante de la colonne  $C_j^{(g)h}$ . L'ensemble de tous les blocs donne un  $PBIP E$  à quatre classes associées.

**Théorème 3.** Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres :

$$v = 2nl, \quad b = ln^2(n-1)C_{s-1}^l, \quad r = sn(n-1)C_{s-1}^l, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = ln(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$

$$\lambda_2 = snC_{s-1}^l, \quad \lambda_3 = nlC_{s-3}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$$

sont des plans rectangulaires à angles droits (4) ( $PBIP E_4$ ).

**Démonstration.** – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

- $r$  : pour chaque traitement  $a_{ij_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2\}$ ), nous avons :
  - Sur chaque tableau  $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), appliquant la procédure avec les autres éléments de la même ligne. Il y a  $C_{s-1}^l$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. En considérant les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), alors on a :  $n(n-1)C_{s-1}^l$  apparitions répétées elles mêmes  $n$  fois. Donc pour  $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), il en résulte  $n(n-1)C_{s-1}^l$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ .
  - Sur chaque tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$  et  $h = 1, \dots, n$ , appliquant la procédure avec les autres éléments de la même ligne. Il y a  $C_{s-2}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. En considérant les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), alors on a :  $n(n-1)C_{s-1}^l$  apparitions répétées elles mêmes  $n$  fois. Donc pour un tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$  on a,  $n(n-1)C_{s-1}^{l-1}$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ . Considérons tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$ ; il en résulte  $ln(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ .

- Ainsi :**  $r = n(n-1)[C_{s-1}^l + lC_{s-2}^{l-1}] = sn(n-1)C_{s-1}^l$ .
- $\lambda_1$  : Considérons deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$  et  $j_0 \neq j'_0$ ), ils apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois avec les autres  $l-2$  éléments de la même ligne  $i$  des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ), et ceci pour chaque tableau. En considérant les  $n$  permutations, alors on a :  $n(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois où les deux traitements apparaissent ensemble. Considérons tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  pour  $j = 1, \dots, l$ ; il en résulte,  $ln(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois où les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble.
  - $\lambda_2$  : Considérons deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$  et  $i \neq i'$ ), on a :
    - D'une part, dans un tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ) : les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois. En considérant les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), ils apparaissent ensemble  $nC_{s-2}^{l-1}$  fois. Considérons tous les tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ) pour  $j = 1, \dots, l$ , ils apparaissent ensemble  $lnC_{s-2}^{l-1}$  fois.
    - D'autre part, dans un tableau  $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ) : les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-1}^l$  fois. En considérant les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), ils apparaissent ensemble  $nC_{s-1}^l$  fois.
 Au total  $\lambda_2 = n[lC_{s-2}^{l-1} + C_{s-1}^l] = snC_{s-1}^l$ .
  - $\lambda_3$  : Considérons deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$ ,  $i \neq i'$  and  $j_0 \neq j'_0$ ), ils apparaissent ensemble  $C_{s-3}^{l-2}$  fois pour chacun des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ). En considérant les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), ils apparaissent ensemble  $nC_{s-3}^{l-2}$  fois. Considérons tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ) pour  $j = 1, \dots, l$ , alors les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble  $lnC_{s-3}^{l-2}$  fois.
  - $\lambda_4$  : Considérons deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')}$  des tableaux  $A^{(g)}$  et  $A^{(g')}$  respectivement ( $g, g' = 1, 2$ ) :
    - Si  $i = i'$ , d'une part, pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ) et  $h = 1$  les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. Et pour le tableau  $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ) et  $h = 1$  ils apparaissent aussi ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois, ainsi ils apparaissent ensemble  $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. D'autre part, pour  $h = 2, \dots, n$ , les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois pour le tableau de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g)h}$  et  $C_{s-2}^{l-1}$  fois pour le tableau de la forme  $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$ , donc ils apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-1}$  pour une même valeur de  $h$ . Considérons toutes les valeurs de  $h$  ( $h = 2, \dots, n$ ), on obtient  $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois où les deux traitements apparaissent ensemble.
    - Si  $i \neq i'$ , alors les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois pour un tableau de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g)h}$  ( $g' \neq g$ ) et apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois pour un tableau de la forme  $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ) pour  $h = 1$ , alors ils apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-1}$  fois. Pour  $h = 2, \dots, n$ , parmi les  $(n-1)$  permutations du vecteur  $C_j^{(g)h}$ , et pour une valeur donnée de  $h$ , le traitement  $a_{i'j'}^{(g')}$  sera à la même ligne que  $a_{ij}^{(g)}$ ; alors les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. Pour les valeurs restantes, les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois.
 Au total  $\lambda_4 = 2C_{s-2}^{l-1} + (n-1)C_{s-2}^{l-1} + (n-2)C_{s-2}^{l-1} + (n-1)C_{s-2}^{l-1} + (n-2)C_{s-2}^{l-1} = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ .
  - $b$  : En appliquant la méthode de construction sur chaque tableau de la forme :  $A^{(g)} \cup C_j^{(g)h}$  ( $g' \neq g$ ), on obtient  $n(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. Donc pour les  $l$  tableaux de la même forme  $A \cup C_j^{(g)h}$  et les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), on obtient  $n \times ln(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  pour  $g', g = 1, 2$ , il en résulte  $ln^2(n-1)C_{s-1}^l$  blocs. □

**Remarque 5.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées. En effet :

*Démonstration.*

$$rv = sn(n-1)C_{s-1}^l \times 2nl = ln^2(n-1)C_{s-1}^l \times 2s = bk.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i n_i &= ln(n-1)C_{s-3}^{l-2}(l-1) + snC_{s-1}^l(n-1) + nlC_{s-3}^{l-2}(l-1)(n-1) + 4(n-1)C_{s-2}^{l-1} \times nl \\ &= sn(n-1)C_{s-1}^l \times [(2s) - 1] = r(k-1). \end{aligned}$$

□

**Exemple 5.** Soit  $v = 2 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans deux tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

Appliquant la deuxième méthode de construction, le plan rectangulaire à angles droits (4) de paramètres :

$$v = 18, b = 162, r = 54, k = 6, \lambda_1 = 18, \lambda_2 = 27, \lambda_3 = 9, \lambda_4 = 16$$

à la configuration suivante :

<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>7</td></tr> </table>	1	4	7	∪	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> </table>	10	11	12	13	14	15	16	17	18	⇒	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>1</td><td>10</td><td>11</td><td>4</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>1</td><td>10</td><td>12</td><td>4</td><td>13</td><td>15</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>12</td><td>4</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>1</td><td>10</td><td>11</td><td>7</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>1</td><td>10</td><td>12</td><td>7</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>1</td><td>11</td><td>12</td><td>7</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>4</td><td>13</td><td>14</td><td>7</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>4</td><td>13</td><td>15</td><td>7</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>4</td><td>14</td><td>15</td><td>7</td><td>17</td><td>18</td></tr> </table>	1	10	11	4	13	14	1	10	12	4	13	15	1	11	12	4	14	15	1	10	11	7	16	17	1	10	12	7	16	18	1	11	12	7	17	18	4	13	14	7	16	17	4	13	15	7	16	18	4	14	15	7	17	18	,
1																																																																							
4																																																																							
7																																																																							
10	11	12																																																																					
13	14	15																																																																					
16	17	18																																																																					
1	10	11	4	13	14																																																																		
1	10	12	4	13	15																																																																		
1	11	12	4	14	15																																																																		
1	10	11	7	16	17																																																																		
1	10	12	7	16	18																																																																		
1	11	12	7	17	18																																																																		
4	13	14	7	16	17																																																																		
4	13	15	7	16	18																																																																		
4	14	15	7	17	18																																																																		
<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>4</td></tr> <tr><td>7</td></tr> <tr><td>1</td></tr> </table>	4	7	1	∪	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> </table>	10	11	12	13	14	15	16	17	18	⇒	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>4</td><td>10</td><td>11</td><td>7</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>12</td><td>7</td><td>13</td><td>15</td></tr> <tr><td>4</td><td>11</td><td>12</td><td>7</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>11</td><td>1</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>12</td><td>1</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>4</td><td>11</td><td>12</td><td>1</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>7</td><td>13</td><td>14</td><td>1</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>7</td><td>13</td><td>15</td><td>1</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>7</td><td>14</td><td>15</td><td>1</td><td>17</td><td>18</td></tr> </table>	4	10	11	7	13	14	4	10	12	7	13	15	4	11	12	7	14	15	4	10	11	1	16	17	4	10	12	1	16	18	4	11	12	1	17	18	7	13	14	1	16	17	7	13	15	1	16	18	7	14	15	1	17	18	,
4																																																																							
7																																																																							
1																																																																							
10	11	12																																																																					
13	14	15																																																																					
16	17	18																																																																					
4	10	11	7	13	14																																																																		
4	10	12	7	13	15																																																																		
4	11	12	7	14	15																																																																		
4	10	11	1	16	17																																																																		
4	10	12	1	16	18																																																																		
4	11	12	1	17	18																																																																		
7	13	14	1	16	17																																																																		
7	13	15	1	16	18																																																																		
7	14	15	1	17	18																																																																		
<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>7</td></tr> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>4</td></tr> </table>	7	1	4	∪	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td></tr> </table>	10	11	12	13	14	15	16	17	18	⇒	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 10px;"> <tr><td>7</td><td>10</td><td>11</td><td>1</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>7</td><td>10</td><td>12</td><td>1</td><td>13</td><td>15</td></tr> <tr><td>7</td><td>11</td><td>12</td><td>1</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>7</td><td>10</td><td>11</td><td>4</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>7</td><td>10</td><td>12</td><td>4</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>7</td><td>11</td><td>12</td><td>4</td><td>17</td><td>18</td></tr> <tr><td>1</td><td>13</td><td>14</td><td>4</td><td>16</td><td>17</td></tr> <tr><td>1</td><td>13</td><td>15</td><td>4</td><td>16</td><td>18</td></tr> <tr><td>1</td><td>14</td><td>15</td><td>4</td><td>17</td><td>18</td></tr> </table>	7	10	11	1	13	14	7	10	12	1	13	15	7	11	12	1	14	15	7	10	11	4	16	17	7	10	12	4	16	18	7	11	12	4	17	18	1	13	14	4	16	17	1	13	15	4	16	18	1	14	15	4	17	18	,
7																																																																							
1																																																																							
4																																																																							
10	11	12																																																																					
13	14	15																																																																					
16	17	18																																																																					
7	10	11	1	13	14																																																																		
7	10	12	1	13	15																																																																		
7	11	12	1	14	15																																																																		
7	10	11	4	16	17																																																																		
7	10	12	4	16	18																																																																		
7	11	12	4	17	18																																																																		
1	13	14	4	16	17																																																																		
1	13	15	4	16	18																																																																		
1	14	15	4	17	18																																																																		

2
5
8

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

2	10	11	5	13	14
2	10	12	5	13	15
2	11	12	5	14	15
2	10	11	8	16	17
2	10	12	8	16	18
2	11	12	8	17	18
5	13	14	8	16	17
5	13	15	8	16	18
5	14	15	8	17	18

 $,$ 

5
8
2

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

5	10	11	8	13	14
5	10	12	8	13	15
5	11	12	8	14	15
5	10	11	2	16	17
5	10	12	2	16	18
5	11	12	2	17	18
8	13	14	2	16	17
8	13	15	2	16	18
8	14	15	2	17	18

8
2
5

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

8	10	11	2	13	14
8	10	12	2	13	15
8	11	12	2	14	15
8	10	11	5	16	17
8	10	12	5	16	18
8	11	12	5	17	18
2	13	14	5	16	17
2	13	15	5	16	18
2	14	15	5	17	18

3
6
9

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

3	10	11	6	13	14
3	10	12	6	13	15
3	11	12	6	14	15
3	10	11	9	16	17
3	10	12	9	16	18
3	11	12	9	17	18
6	13	14	9	16	17
6	13	15	9	16	18
6	14	15	9	17	18

 $,$ 

6
9
3

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

6	10	11	9	13	14
6	10	12	9	13	15
6	11	12	9	14	15
6	10	11	9	16	17
6	10	12	3	16	18
6	11	12	3	17	18
9	13	14	3	16	17
9	13	15	3	16	18
9	14	15	3	17	18

9
3
6

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

9	10	11	3	13	14
9	10	12	3	13	15
9	11	12	3	14	15
9	10	11	6	16	17
9	10	12	6	16	18
9	11	12	6	17	18
3	13	14	6	16	17
3	13	15	6	16	18
3	14	15	6	17	18

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

10
13
16

 $\Rightarrow$ 

1	2	10	4	5	13
1	2	10	7	8	16
1	3	10	5	6	13
1	3	10	7	9	16
2	3	10	5	6	13
2	3	10	8	9	16
4	5	13	7	8	16
4	6	13	7	9	16
5	6	13	8	9	16

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

13
16
10

 $\Rightarrow$ 

1	2	13	4	5	16
1	2	13	7	8	10
1	3	13	5	6	16
1	3	13	7	9	10
2	3	13	5	6	16
2	3	13	8	9	10
4	5	16	7	8	10
4	6	16	7	9	10
5	6	16	8	9	10

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

16
10
13

 $\Rightarrow$ 

1	2	16	4	5	10
1	2	16	7	8	13
1	3	16	5	6	10
1	3	16	7	9	13
2	3	16	5	6	10
2	3	16	8	9	13
4	5	10	7	8	13
4	6	10	7	9	13
5	6	10	8	9	13

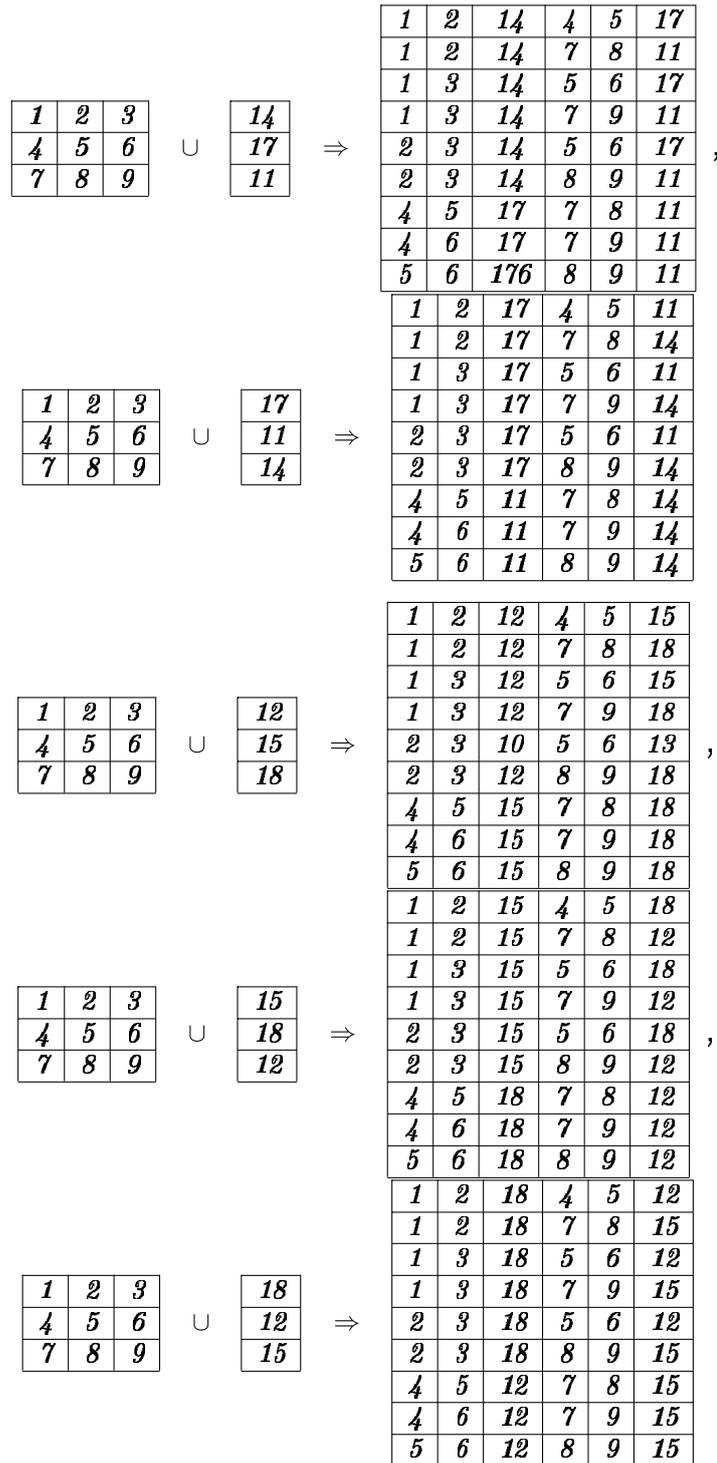
1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

11
14
17

 $\Rightarrow$ 

1	2	11	4	5	14
1	2	11	7	8	17
1	3	11	5	6	14
1	3	11	7	9	17
2	3	11	5	6	14
2	3	11	8	9	17
4	5	14	7	8	17
4	6	14	7	9	17
5	6	14	8	9	17



#### 4.2.2 Méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (5) ( $PBIPE_5$ )

Soient  $v = 2nl$  traitements rangés dans deux tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun. Soit  $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)})'$  la  $j^{eme}$  colonne du  $g^{eme}$  tableau  $g \in \{1, 2\}$ . En appliquant la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l+1\}$  à chaque tableau de la forme  $C_j^{(g)} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2\}$ ) pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g \in \{1, 2\}$ , et en considérant uniquement les combinaisons de  $s$  traitements contenant une composante de la colonne  $C_j^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2\}$ ); l'ensemble de tous les blocs donne un  $PBIPE$  à cinq classes associées.

**Théorème 4.** *Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres suivants :*

$$v = 2nl, \quad b = ln(n-1)C_{s-1}^l, \quad r = s(n-1)C_{s-1}^l, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = l(n-1)C_{s-3}^{l-2}, \quad \lambda_2 = sC_{s-1}^l,$$

$$\lambda_3 = lC_{s-3}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-1}, \quad \lambda_5 = 2C_{s-2}^{l-1}$$

*sont des plans rectangulaires à angles droits (5) (PBIPE<sub>5</sub>).*

**Démonstration.** – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

- $r$  : pour chaque traitement  $a_{ij_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2\}$ ), nous avons :
  - D'une part, sur chaque tableau  $C_{j_0}^{(g)} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), appliquant la procédure avec les autres éléments de la même ligne. Il y a  $C_{s-1}^l$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. Donc il en résulte  $(n-1)C_{s-1}^l$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ .
  - D'autre part, sur chaque tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$ , appliquant la procédure avec les autres éléments de la même ligne. Il y a  $C_{s-2}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), pour  $j = 1, \dots, l$ ; alors on a :  $l(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ .
- Ainsi :  $r = (n-1)[C_{s-1}^l + lC_{s-2}^{l-1}] = s(n-1)C_{s-1}^l$ .
- $\lambda_1$  : Deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{ij'_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$  et  $j_0 \neq j'_0$ ) apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois avec les autres  $l-2$  éléments de la même ligne  $i$  des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), pour chacun des deux tableaux. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  pour  $j = 1, \dots, l$ ; alors on a :  $l(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois où les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{ij'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble.
- $\lambda_2$  : Considérons deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$  et  $i \neq i'$ ), on a :
  - D'une part, dans un tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois. En considérant tous les tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ) pour  $j = 1, \dots, l$ , ils apparaissent ensemble  $lC_{s-2}^{l-1}$  fois.
  - D'autre part, dans le tableau  $C_{j_0}^{(g)} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-1}^l$  fois.
- Au total  $\lambda_2 = lC_{s-2}^{l-1} + C_{s-1}^l = sC_{s-1}^l$ .
- $\lambda_3$  : Deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  du tableau  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$ ,  $i \neq i'$  and  $j_0 \neq j'_0$ ) apparaissent ensemble  $C_{s-3}^{l-2}$  fois pour chacun des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ). En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ) pour  $j = 1, \dots, l$ , alors les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble  $lC_{s-3}^{l-2}$  fois.
- $\lambda_4$  : Soit deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{ij'}^{(g')}$  appartenant à  $A^{(g)}$  et  $A^{(g')}$  respectivement ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) : pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( respectivement  $C_j^{(g)} \cup A^{(g')}$ ) les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois (respectivement). Par conséquent, ils apparaissent ensemble  $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois.
- $\lambda_5$  : Soit deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')}$  ( $i \neq i'$ ) appartenant à  $A^{(g)}$  et  $A^{(g')}$  respectivement ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) : pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( respectivement  $C_j^{(g)} \cup A^{(g')}$ ) les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois (respectivement). Par conséquent, ils apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-1}$  fois.
- $b$  : En appliquant la méthode de construction sur chaque tableau de la forme :  $A^{(g)} \cup C_j^{(g)h}$  ( $g' \neq g$ ), on obtient  $n(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. Donc pour les  $l$  tableaux de la même forme  $A \cup C_j^{(g)h}$ , on obtient  $ln(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g)h}$  pour  $g', g = 1, 2$ , il en résulte  $ln^2(n-1)C_{s-1}^l$  blocs. □

**Remarque 6.** *Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées. En effet :*

**Démonstration.**

$$rv = s(n-1)C_{s-1}^l \times 2nl = ln(n-1)C_{s-1}^l \times 2s = bk.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \lambda_i n_i &= l(n-1)C_{s-3}^{l-2}(l-1) + sC_{s-1}^l(n-1) + lC_{s-3}^{l-2}(l-1)(n-1) + 2(n-1)C_{s-2}^{l-1}l + 2C_{s-2}^{l-1}(n-1)l \\ &= s(n-1)C_{s-1}^l \times [(2s) - 1] = r(k-1). \end{aligned}$$

□

**Exemple 6.** Soit  $v = 2 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans deux tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

Appliquons la méthode de construction avec  $s=3$ , l'ensemble de tous les blocs obtenus donne un plan rectangulaire à angles droits (5) de paramètres :

$$v = 18, b = 54, r = 18, k = 6, \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 4$$

1
4
7

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

1	10	11	4	13	14
1	10	12	4	13	15
1	11	12	4	14	15
1	10	11	7	16	17
1	10	12	7	16	18
1	11	12	7	17	18
4	13	14	7	16	17
4	13	15	7	16	18
4	14	15	7	17	18

2
5
8

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

2	10	11	5	13	14
2	10	12	5	13	15
2	11	12	5	14	15
2	10	11	8	16	17
2	10	12	8	16	18
2	11	12	8	17	18
5	13	14	8	16	17
5	13	15	8	16	18
5	14	15	8	17	18

3
6
9

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

3	10	11	6	13	14
3	10	12	6	13	15
3	11	12	6	14	15
3	10	11	9	16	17
3	10	12	9	16	18
3	11	12	9	17	18
6	13	14	9	16	17
6	13	15	9	16	18
6	14	15	9	17	18

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

10
13
16

 $\Rightarrow$ 

1	2	10	4	5	13
1	2	10	7	8	16
1	3	10	5	6	13
1	3	10	7	9	16
2	3	10	5	6	13
2	3	10	8	9	16
4	5	13	7	8	16
4	6	13	7	9	16
5	6	13	8	9	16

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

11
14
17

 $\Rightarrow$ 

1	2	11	4	5	14
1	2	11	7	8	17
1	3	11	5	6	14
1	3	11	7	9	17
2	3	11	5	6	14
2	3	11	8	9	17
4	5	14	7	8	17
4	6	14	7	9	17
5	6	14	8	9	17

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

12
15
18

 $\Rightarrow$ 

1	2	12	4	5	15
1	2	12	7	8	18
1	3	12	5	6	15
1	3	12	7	9	18
2	3	12	5	6	15
2	3	12	8	9	18
4	5	15	7	8	18
4	6	15	7	9	18
5	6	15	8	9	18

### 4.2.3 Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits (7) (PBIP<sub>E7</sub>)

#### Première méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (7) (PBIP<sub>E7</sub>)

Soient  $v = 2nl$  ( $n \geq 2, l \geq 2$  traitements rangés dans deux tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun. La Méthode Combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{2, \dots, l-1\}$  à chaque tableau, donne deux ensembles de blocs. En juxtaposant les blocs du premier ensemble avec ceux du second ensemble, de telle sorte que les blocs contenant le traitement  $a_{ij}$  et  $a_{i'j}$  sont placés côte à côte, on obtient un plan rectangulaire à angles droits PBIP<sub>E</sub> à sept classes associées.

**Théorème 5.** Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres suivants :

$$v = 2nl, \quad b = \frac{n(n-1)}{2}C_s^l, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1} = \lambda_4, \quad k = 4s, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2} = \lambda_5,$$

$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1} = \lambda_6, \quad \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2} = \lambda_7.$$

sont des plans rectangulaire à angles droits (7)(PBIP<sub>E7</sub>).

**Remarque 7.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées.

**Exemple 7.** Soit  $v = 2 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans deux tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

$$v = 18, b = 9, r = 4 = \lambda_4, k = 8, \lambda_1 = 2 = \lambda_5, \lambda_2 = 2 = \lambda_6, \lambda_3 = 1 = \lambda_7.$$

1	2	4	5	10	11	13	14
1	3	4	6	10	12	13	15
2	3	5	6	11	12	14	15
1	2	7	8	10	11	16	17
1	3	7	9	10	12	16	18
2	3	8	9	11	12	17	18
4	5	7	8	13	14	16	17
4	6	7	9	13	15	16	18
5	6	8	9	14	15	17	18

Dans le paragraphe qui suit, nous proposons une deuxième méthode de construction de  $PBIP E_7$  où les  $\lambda_i \neq \lambda_{i+4}$  ( $i=1,2,3$ ).

### Deuxième méthode de construction des plans rectangulaire à angles droits (7) ( $PBIP E_7$ )

Soient  $v = 2nl$  traitements rangés dans deux tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun. Soient  $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)})'$  la  $j^{\text{eme}}$  colonne du  $g^{\text{eme}}$  tableau et  $R_i^{(g)} = (a_{i1}^{(g)}, a_{i2}^{(g)}, \dots, a_{il}^{(g)})$  la  $i^{\text{eme}}$  ligne du  $g^{\text{eme}}$  tableau pour  $g \in \{1, 2\}$ . En appliquant la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l\}$ , d'une part, à chaque tableau de la forme  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $g' \neq g \in \{1, 2\}$ ) pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g \in \{1, 2\}$ , et d'autre part, à chaque tableau de la forme  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  ( $g' \neq g \in \{1, 2\}$ ) pour  $i = 1, \dots, l$  et  $g \in \{1, 2\}$ , et en ne considérant que les combinaisons de  $s$  traitements contenant une composante de la colonne  $C_j^{(g)}$  (respectivement de la ligne  $R_i^{(g)}$ ). L'ensemble de tous les blocs donne un  $PBIP E$  à sept classes associées.

**Théorème 6.** Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres suivants :

$$v = 2nl, \quad b = n(n-1)(s+2)C_s^l, \quad r = (n-1)(s+2)C_{s-1}^{l-1}, \quad k = 2s,$$

$$\lambda_1 = s(n-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_2 = sC_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_3 = (l-2)C_{s-3}^{l-3}, \quad \lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_5 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_6 = 2C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_7 = 4C_{s-2}^{l-2}.$$

sont des plans rectangulaires à angles droits (7) ( $PBIP E_7$ ).

**Démonstration.** – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

–  $r$  : Pour chaque traitement  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  de tableau  $A^{(g)}$  et pour  $g = 1, 2$ , nous avons :

- Dans le tableau  $C_{j_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_{j_0}^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ) et pour  $g, g' = 1, 2$ , en appliquant la procédure avec les  $l-1$  autres éléments de la même ligne, il y a  $C_{s-1}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. Alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  apparaît  $(n-1)C_{s-1}^{l-1}$  fois.
- Dans un tableau  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) avec  $j \neq j_0$  et  $j = 1, \dots, l$ , en appliquant la procédure avec les  $l-1$  autres traitements de la même ligne, il y a  $C_{s-2}^{l-2}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. Alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  apparaît  $(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois. En considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ )  $j \neq j_0$  et  $j = 1, \dots, l$ , alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  apparaît  $(l-1)(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
- Dans le tableau  $R_{i_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_{i_0}^{(g)}]$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ), en appliquant la procédure avec les  $l$  autres traitements de la même ligne. Il y a  $C_{s-1}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois, alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  apparaît  $(n-1)C_{s-1}^{l-1}$  fois.
- Dans un tableau  $[A^{(g)} \setminus R_i^{(g)}] \cup R_i^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ), avec  $i \neq i_0$  et  $i = 1, \dots, n$ , en appliquant la procédure avec les  $l-1$  autres traitements de la même ligne, alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  apparaît  $C_{s-1}^{l-1}$  fois. Enfin, en considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus R_i^{(g)}] \cup R_i^{(g')}$  avec  $i \neq i_0$  et  $i = 1, \dots, n$ , alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  est répété  $(n-1)C_{s-1}^{l-1}$  fois.

Par conséquent,  $r = (n-1)[C_{s-1}^{l-1} + (l-1)C_{s-2}^{l-2} + C_{s-1}^{l-1} + C_{s-1}^{l-1}] = (n-1)(s+2)C_{s-1}^{l-1}$ .

- $\lambda_1$  : Soit deux traitements  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  et  $a_{i_0' j_0'}^{(g)}$  appartenant à  $A^{(g)}$  avec  $j_0 \neq j_0'$  ( $g = 1, 2$ ) :
    - Dans un tableau de la forme  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) avec  $j \neq j_0, j \neq j_0'$  et  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent ensemble avec les  $l-3$  autres traitements. Il y a  $C_{s-3}^{l-3}$  possibilités chacune étant répétée  $(n-1)$  fois, ainsi ils apparaissent  $(n-1)C_{s-3}^{l-3}$  fois. En Considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) avec  $j \neq j_0, j \neq j_0'$  et  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent ensemble  $(l-2)(n-1)C_{s-3}^{l-3}$  fois.
    - Dans le tableau  $R_i^{(g)} i_0 \cup [A^{(g')} \setminus R_{i_0}^{(g')}]$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ), les deux traitements apparaissent ensemble avec les  $l-2$  autres traitements de la même ligne  $(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
    - Dans un tableau  $[A^{(g)} \setminus R_j^{(g)}] \cup R_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) avec  $i \neq i_0$  et  $i = 1, \dots, n$ , le couple de traitements apparait avec les  $l-2$  autres traitements de la même ligne  $C_{s-2}^{l-2}$  fois et en considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus R_j^{(g)}] \cup R_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) avec  $i \neq i_0$  et  $i = 1, \dots, n$ , alors les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.

Ainsi,  $\lambda_1 = (l-2)(n-1)C_{s-3}^{l-3} + (n-1)C_{s-2}^{l-2} + (n-1)C_{s-2}^{l-2} = s(n-1)C_{s-2}^{l-2}$ .
  - $\lambda_2$  : Considérons deux traitements  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  et  $a_{i_0' j_0'}^{(g)}$  de  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$ ), avec  $i_0 \neq i_0'$ , on a :
    - Dans  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) avec  $j \neq j_0$  et  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois pour chaque tableau. Considérons tous les tableaux de la forme  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) with  $j \neq j_0$  for  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent  $(l-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
    - Dans  $C_{j_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_{j_0}^{(g')}]$  ( $g = 1, 2$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-1}^{l-1}$  fois.

Ainsi  $\lambda_2 = (l-1)C_{s-2}^{l-2} + C_{s-1}^{l-1} = sC_{s-1}^{l-1}$ .
  - $\lambda_3$  : Considérons deux traitements  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  et  $a_{i_0' j_0'}^{(g)}$  de  $A^{(g)}$  ( $g = 1, 2$ ) avec  $i_0 \neq i_0'$  and  $j_0 \neq j_0'$ , dans chaque tableau de la forme  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ) avec  $j \neq j_0, j \neq j_0'$  et  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-3}^{l-3}$  fois. En Considérant tous les tableaux pour  $j = 1, \dots, l$ , alors les deux traitements  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  et  $a_{i_0' j_0'}^{(g)}$  ( $g = 1, 2$ ) apparaissent ensemble  $(l-2)C_{s-3}^{l-3}$  fois.
  - $\lambda_4$  : Considérons deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')}$  appartenant à  $A^{(g)}$  et  $A^{(g')}$  respectivement, ils n'apparaissent jamais ensemble, ainsi  $\lambda_4 = 0$ .
  - $\lambda_5$  : Considérons deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')}$  ( $j' \neq j$ ) appartenant à  $A^{(g)}$  ( respectivement  $A^{(g')}$ ) ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ).  
 Dans  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  (respectivement dans  $[A^{(g)} \setminus C_{j'}^{(g)}] \cup C_{j'}^{(g')}$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois. Ainsi, les deux traitements apparaissent ensemble  $2(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
  - $\lambda_6$  : Considérons deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')}$  ( $i' \neq i$ ) appartenant à  $A^{(g)}$  ( respectivement  $A^{(g')}$ ) ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ).  
 Dans  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  (respectivement dans  $[A^{(g)} \setminus R_{i'}^{(g)}] \cup R_{i'}^{(g')}$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois. Ainsi, les deux traitements apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-2}$  fois.
  - $\lambda_7$  : Considérons deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')}$  ( $i \neq i'$  et  $j' \neq j$ ) appartenant à  $A^{(g)}$  ( respectivement  $A^{(g')}$ ) ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2$ ).  
 Dans  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  (respectivement dans  $[A^{(g)} \setminus C_{j'}^{(g)}] \cup C_{j'}^{(g')}$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois. Ainsi, les deux traitements apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-2}$  fois.  
 Dans  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  (respectivement dans  $[A^{(g)} \setminus R_{i'}^{(g)}] \cup R_{i'}^{(g')}$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois. Ainsi, les deux traitements apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-2}$  fois.
- Par conséquent,  $\lambda_7 = 4C_{s-2}^{l-2}$ .
- $b$  : Par construction :
  - Le tableau  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ), génère  $n(n-1)C_{s-1}^{l-1}/2$  blocs. Ainsi les  $l$  tableaux  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  pour  $j = 1, \dots, l$ , donnent  $ln(n-1)C_{s-1}^{l-1}/2$  blocs. En Considérant tous les tableaux

$C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ) pour  $g', g = 1, 2$ , il en résulte  $ln(n-1)C_{s-1}^{l-1}$  blocs.

– Le tableau  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ), génère  $(n-1)C_s^l$  blocs. Ainsi les  $n$  tableaux  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  pour  $i = 1, \dots, n$ , donnent  $n(n-1)C_s^l$  blocs. En Considérant tous les tableaux  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ) pour  $g', g = 1, 2$ , il en résulte  $2n(n-1)C_s^l$  blocs.

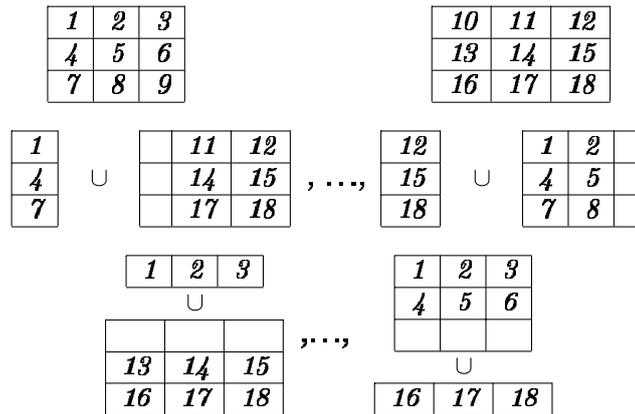
Enfinement le nombre de blocs vaut :

$$b = ln(n-1)C_{s-1}^{l-1} + 2n(n-1)C_s^l = n(n-1)(s+2)C_s^l.$$

□

**Remarque 8.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées.

**Exemple 8.** Soit  $v = 2 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans deux tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :



### 4.3 Conclusion

Nous avons développé une série de plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) ( $PBIP E_m$ ) à  $m = 4, 5$  et 7 classes associées et nous avons déterminé les expressions exactes de leurs paramètres.

Ces résultats constituent une partie du papier :

**Rezgui, I., Gheribi-Aoulmi, Z. & H. Monod (2013).** New association schemes with 4, 5 and 7 associated classes and their associated partially balanced incomplete block designs. **Advances and Applications in Discrete Mathematics**, 12 (179 - 206).  
<http://www.pphmj.com/journals/contents/aadm.htm>

Pour les utilisateurs, la configuration de ces plans peut être obtenue en appliquant le “package” “CombinS” que nous décrivons dans l’Annexe A.

Le Chapitre 5 généralise ces méthodes de construction. Les  $PBIP E$  construits par ces méthodes généralisées sont basés sur des schémas d’association généralisés (voir le Chapitre 2).

# Plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés, $m=4, 5, 7$

## 5.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous décrivons une méthode de construction de plans en blocs incomplets partiellement équilibrés basés sur les schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés, définis dans le Chapitre 2 et en utilisant la Méthode Combinatoire développée dans le Chapitre 3. Les plans obtenus sont appelés, plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés ( $PBIPEG_m$  à  $m=4, 5$  et  $7$  classes associées).

## 5.2 Construction des plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés

Soit  $v = wnl$  ( $n \geq 2, l \geq 2$ ) traitements rangés dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun :

	$C_1^{(g)}$	$C_2^{(g)}$	...	$C_j^{(g)}$	...	$C_l^{(g)}$
$R_1^{(g)}$	$a_{11}^{(g)}$	$a_{12}^{(g)}$	...	$a_{1j}^{(g)}$	...	$a_{1l}^{(g)}$
$R_2^{(g)}$	$a_{21}^{(g)}$	$a_{22}^{(g)}$	...	$a_{2j}^{(g)}$	...	$a_{2l}^{(g)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R_i^{(g)}$	$a_{i1}^{(g)}$	$a_{i2}^{(g)}$	...	$a_{ij}^{(g)}$	...	$a_{il}^{(g)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R_n^{(g)}$	$a_{n1}^{(g)}$	$a_{n2}^{(g)}$	...	$a_{nj}^{(g)}$	...	$a_{nl}^{(g)}$

$$A^{(g)} \quad (g \in \{1, 2, \dots, w\})$$

### 5.2.1 Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits (4) généralisés

#### Première méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (4) généralisés

Appliquons la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{2, \dots, l-1\}$  à chaque tableau. L'ensemble de tous les blocs donne un  $PBIPE$  à quatre classes associées.

**Théorème 7.** Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres :

$$v = wnl, \quad b = wn(n-1)C_s^l/2, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 0$$

sont des plans rectangulaires à angles droits (4) généralisés (PBIPEG<sub>4</sub>).

**Démonstration.** Pour chaque tableau, on obtient un plan rectangulaire de paramètres :

$$v^* = nl, b^* = n(n-1)C_s^l/2, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, k = 2s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}.$$

Il est clair qu'en considérant les  $w$  tableaux à la fois, on obtient un plan rectangulaire à angles droits (4) généralisé de paramètres :  $v = wv^* = wnl, b = wb^* = wn(n-1)C_s^l/2, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, k = 2s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}.$

$\lambda_4 = 0$ , en effet :

Les deux traitements  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')}$  des tableaux  $A^{(g)}$  et  $A^{(g')}$  ( $g \neq g' \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) respectivement n'apparaissent jamais ensemble dans le même bloc, ainsi  $\lambda_4 = 0$ .  $\square$

**Remarque 9.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées. En effet :

**Démonstration.**

$$rv = (n-1)C_{s-1}^{l-1} \times wnl = wn(n-1)C_s^l \times 2s = bk.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i n_i &= (n-1)C_{s-2}^{l-2}(l-1) + C_{s-1}^{l-1}(n-1) + C_{s-2}^{l-2}(l-1)(n-1) + 0 \times (w-1)nl \\ &= (n-1)C_{s-1}^{l-1}[(2s) - 1] = r(k-1). \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 7.** Soit un PBIPEG<sub>4</sub> de paramètres

$$v = wnl, b = wn(n-1)C_s^l/2, r = (n-1)C_{s-1}^{l-1}, k = 2s, \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2}, \lambda_2 = C_{s-1}^{l-1}, \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2}, \lambda_4 = 0$$

Pour  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $s$ , le PBIPEG<sub>4</sub> est un PBIPE résolvable à  $r$  classes parallèles. Chacune des classes contient  $q = w \frac{nl}{2s}$  blocs.

**Démonstration.**

$$q = b/r = \frac{wn(n-1)C_s^l}{2(n-1)C_{s-1}^{l-1}} = \frac{wn(n-1)lC_{s-1}^{l-1}}{2s(n-1)C_{s-1}^{l-1}} = w \frac{nl}{2s}.$$

$n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $n$ . Alors  $q \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Exemple 9.** Soit  $v = 3 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans trois tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

19	20	21
22	23	24
25	26	27

Le plan rectangulaire à angles droits (4) généralisé obtenu à partir de la Méthode Combinatoire ( $s = 2$ ) a pour paramètres :

$$v = 27, b = 27, r = 4, k = 4, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0$$

1	2	4	5
1	3	4	6
2	3	5	6
1	2	7	8
1	3	7	9
2	3	8	9
4	5	7	8
4	6	7	9
5	6	8	9
10	11	13	14
10	12	13	15
11	12	14	15
10	11	16	17
10	12	16	18
11	12	17	18
13	14	16	17
13	15	16	18
14	15	17	18
19	20	22	23
19	21	22	24
20	21	23	24
19	20	25	26
19	21	25	27
20	21	26	27
22	23	25	26
22	24	25	27
23	24	26	27

**Lemme 3.** Pour le cas particulier  $s = l$ , la méthode précédente peut servir à la construction de plans emboîtés divisibles en groupes de paramètres :

$$v = wnl, \quad b = wn(n-1)/2, \quad r = n-1, \quad k = 2l, \quad \lambda_1 = n-1, \quad \lambda_2 = 1 = \lambda_3, \quad \lambda_4 = 0$$

Dans le paragraphe qui suit, nous proposons une deuxième méthode de construction de  $PBIPEG_4$  où  $\lambda_4 \neq 0$ .

#### Deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (4) généralisés

Soit  $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)})'$  la  $j^{\text{ème}}$  colonne du  $g^{\text{ème}}$  tableau  $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ . On définit  $C_j^{(g)1} = C_j$  pour  $h = 1$  et  $C_j^{(g)h} = (a_{hj}^{(g)}, a_{(h+1)j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)}, a_{1j}^{(g)}, \dots, a_{(h-1)j}^{(g)})'$  pour  $h = 2, 3, \dots, n$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ). En appliquant la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l+1\}$  à chaque tableau de la forme  $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) pour  $j = 1, \dots, l$ ,  $h = 1, \dots, n$  et  $g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et en considérant uniquement les combinaisons de  $s$  traitements contenant une composante de la colonne  $C_j^{(g)h}$ . L'ensemble de tous les blocs donne un  $PBIPE$  à quatre classes associées.

**Théorème 8.** Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres :

$$v = wnl, \quad b = w(w-1)ln^2(n-1)C_{s-1}^l/2, \quad r = s(w-1)n(n-1)C_{s-1}^l, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = (w-1)ln(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$

$$\lambda_2 = s(w-1)nC_{s-1}^l, \quad \lambda_3 = (w-1)nlC_{s-3}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}.$$

sont des plans rectangulaires à angles droits (4) généralisés ( $PBIPEG_4$ ).

**Démonstration.** – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

–  $r$  : Soit  $a_{ij_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), nous avons :

- Sur chaque tableau  $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$ , appliquons la procédure avec les autres éléments de la même ligne; il y a  $C_{s-1}^l$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. En considérant les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), nous avons  $n(n-1)C_{s-1}^l$  apparitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ . Donc pour  $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), il en résulte  $(w-1)n(n-1)C_{s-1}^l$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ .
  - Sur chaque tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$  et  $h = 1, \dots, n$ , appliquons la procédure avec les autres éléments de la même ligne; il y a  $C_{s-2}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. En considérant les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), nous avons  $n(n-1)C_{s-1}^l$  apparitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ . Donc pour un tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$ ,  $a_{ij_0}^{(g)}$  est répété  $n(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$ ,  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $j = 1, \dots, l$ ; il en résulte  $(w-1)ln(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ .
- Ainsi :**  $r = n(n-1)(w-1)[C_{s-1}^l + lC_{s-2}^{l-1}] = s(w-1)n(n-1)C_{s-1}^l$ .
- $\lambda_1$  : Soient  $a_{ij_0}^{(g)}$ ,  $a_{i'j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $j_0 \neq j'_0$ ), ils apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois avec les autres  $l-2$  éléments de la même ligne  $i$  des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ). Pour les  $n$  permutations, les deux traitements apparaissent ensemble  $n(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ; il en résulte,  $(w-1)ln(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois où les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble.
  - $\lambda_2$  : Soient  $a_{ij_0}^{(g)}$ ,  $a_{i'j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $i \neq i'$ ), on a :
    - Dans un tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois. Pour les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), ils apparaissent ensemble  $nC_{s-2}^{l-1}$  fois. En considérons tous les tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , ils apparaissent ensemble  $(w-1)lnC_{s-2}^{l-1}$  fois.
    - Dans un tableau  $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-1}^l$  fois. Pour les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ) et tous les tableaux  $C_{j_0}^{(g)h} \cup A^{(g')}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , ils apparaissent ensemble  $(w-1)nC_{s-1}^l$  fois.
- Ainsi :**  $\lambda_2 = n(w-1)[lC_{s-2}^{l-1} + C_{s-1}^l] = s(w-1)nC_{s-1}^l$ .
- $\lambda_3$  : Soient  $a_{ij_0}^{(g)}$ ,  $a_{i'j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ),  $i \neq i'$  et  $j_0 \neq j'_0$ , ils apparaissent ensemble  $C_{s-3}^{l-2}$  fois pour chacun des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ). Pour les  $n$  permutations ( $h = 1, \dots, n$ ), ils apparaissent ensemble  $nC_{s-3}^{l-2}$  fois. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ) pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , alors les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble  $(w-1)lnC_{s-3}^{l-2}$  fois.
  - $\lambda_4$  : Soient  $a_{ij}^{(g)} \in A^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')} \in A^{(g')}$  ( $g \neq g' \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) :
    - Si  $i = i'$ ,
      - Pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_{j'}^{(g')1}$  (respectivement  $C_j^{(g)1} \cup A^{(g')}$ ) les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. Ainsi ils apparaissent ensemble  $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois.
      - Pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_{j'}^{(g)h}$  (respectivement  $C_j^{(g)h} \cup A^{(g')}$ ) ( $h = 2, \dots, n$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$ . Ainsi ils apparaissent  $2C_{s-2}^{l-1}$  pour une même valeur de  $h$ . En considérant toutes les valeurs de  $h$  ( $h = 2, \dots, n$ ), on obtient  $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois où les deux traitements apparaissent ensemble.  
Par conséquent  $\lambda_4 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-1} + 2(n-1)C_{s-2}^{l-1} = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ .
    - Si  $i \neq i'$  :
      - Pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_{j'}^{(g')1}$  (respectivement  $C_j^{(g)1} \cup A^{(g')}$ ) les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois. Ainsi ils apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-1}$  fois.
      - Pour  $h = 2, \dots, n$ , parmi les  $(n-1)$  permutations du vecteur  $C_{j'}^{(g)h}$ , et pour une valeur donnée de  $h$ ,

le traitement  $a_{i'j'}^{(g')}$  sera à la même ligne que  $a_{ij}^{(g)}$  ; alors les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. Pour les  $(n-2)$  valeurs restantes, les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois.

Par conséquent  $\lambda_4 = 2C_{s-2}^{l-1} + (n-1)C_{s-2}^{l-1} + (n-2)C_{s-2}^{l-1} + (n-1)C_{s-2}^{l-1} + (n-2)C_{s-2}^{l-1} = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$ .

–  $b$  : En appliquant la méthode de construction sur chaque tableau de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')^h}$ , on obtient  $n(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. Donc pour les  $l$  tableaux de la même forme  $A \cup C_j^{(g')^h}$  et les  $n$  permutations  $(h = 1, \dots, n)$ , on obtient  $n \times l \times n(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')^h}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , il en résulte  $w(w-1)ln^2(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs.  $\square$

**Remarque 10.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées. En effet :

*Démonstration.*

$$rv = s(w-1)n(n-1)C_{s-1}^l \times wnl = w(w-1)ln^2(n-1)C_{s-1}^l \times 2s = bk.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \lambda_i n_i &= (w-1)[ln(n-1)C_{s-3}^{l-2}(l-1) + snC_{s-1}^l(n-1) + nlC_{s-3}^{l-2}(l-1)(n-1) + 4(n-1)C_{s-2}^{l-1} \times nl] \\ &= s(w-1)n(n-1)C_{s-1}^l \times [(2s) - 1] = r(k-1). \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 8.** Soit un  $PBIPEG_4$  de paramètres

$$v = wnl, \quad b = w(w-1)ln^2(n-1)C_{s-1}^l/2, \quad r = s(w-1)n(n-1)C_{s-1}^l, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = (w-1)ln(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$

$$\lambda_2 = s(w-1)nC_{s-1}^l, \quad \lambda_3 = (w-1)nlC_{s-3}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 4(n-1)C_{s-2}^{l-1}$$

Pour  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $n$ , le  $PBIPEG_4$  est un  $PBIPE$  résoluble à  $r$  classes parallèles, dont chacune des classes contient  $q = w \frac{nl}{2s}$  blocs.

*Démonstration.* Identique au Démonstration 5.2.1.  $\square$

**Exemple 10.** Soit  $v = 3 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans trois tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

19	20	21
22	23	24
25	26	27

Appliquons la deuxième méthode de construction, le plan rectangulaire à angles droits (4) généralisé de paramètres :

$$v = 27, b = 486, r = 108, k = 6, \lambda_1 = 36, \lambda_2 = 54, \lambda_3 = 18, \lambda_4 = 16$$

à la configuration suivante :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 4 & \\ \hline 7 & \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 10 & 11 & 4 & 13 & 14 \\ \hline 1 & 10 & 12 & 4 & 13 & 15 \\ \hline 1 & 11 & 12 & 4 & 14 & 15 \\ \hline 1 & 10 & 11 & 7 & 16 & 17 \\ \hline 1 & 10 & 12 & 7 & 16 & 18 \\ \hline 1 & 11 & 12 & 7 & 17 & 18 \\ \hline 4 & 13 & 14 & 7 & 16 & 17 \\ \hline 4 & 13 & 15 & 7 & 16 & 18 \\ \hline 4 & 14 & 15 & 7 & 17 & 18 \\ \hline \end{array},$$

4
7
1

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

4	10	11	7	13	14
4	10	12	7	13	15
4	11	12	7	14	15
4	10	11	1	16	17
4	10	12	1	16	18
4	11	12	1	17	18
7	13	14	1	16	17
7	13	15	1	16	18
7	14	15	1	17	18

7
1
4

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

7	10	11	1	13	14
7	10	12	1	13	15
7	11	12	1	14	15
7	10	11	4	16	17
7	10	12	4	16	18
7	11	12	4	17	18
1	13	14	4	16	17
1	13	15	4	16	18
1	14	15	4	17	18

1
4
7

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

1	19	20	4	22	23
1	19	21	4	22	24
1	20	21	4	23	24
1	19	20	7	25	26
1	19	21	7	25	27
1	20	21	7	26	27
4	22	23	7	25	26
4	22	24	7	25	27
4	23	24	7	26	27

4
7
1

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

4	19	20	7	22	23
4	19	21	7	22	24
4	20	21	7	23	24
4	19	20	1	25	26
4	19	21	1	25	27
4	20	21	1	26	27
7	22	23	1	25	26
7	22	24	1	25	27
7	23	24	1	26	27

7
1
4

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

7	19	20	1	22	23
7	19	21	1	22	24
7	20	21	1	23	24
7	19	20	4	25	26
7	19	21	4	25	27
7	20	21	4	26	27
1	22	23	4	25	26
1	22	24	4	25	27
1	23	24	4	26	27



8
2
5

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

8	19	20	2	22	23
8	19	21	2	22	24
8	20	21	2	23	24
8	19	20	5	25	26
8	19	21	5	25	27
8	20	21	5	26	27
2	22	23	5	25	26
2	22	24	5	25	27
2	23	24	5	26	27

3
6
9

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

3	10	11	6	13	14
3	10	12	6	13	15
3	11	12	6	14	15
3	10	11	9	16	17
3	10	12	9	16	18
3	11	12	9	17	18
6	13	14	9	16	17
6	13	15	9	16	18
6	14	15	9	17	18

6
9
3

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

6	10	11	9	13	14
6	10	12	9	13	15
6	11	12	9	14	15
6	10	11	9	16	17
6	10	12	3	16	18
6	11	12	3	17	18
9	13	14	3	16	17
9	13	15	3	16	18
9	14	15	3	17	18

9
3
6

 $\cup$ 

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\Rightarrow$ 

9	10	11	3	13	14
9	10	12	3	13	15
9	11	12	3	14	15
9	10	11	6	16	17
9	10	12	6	16	18
9	11	12	6	17	18
3	13	14	6	16	17
3	13	15	6	16	18
3	14	15	6	17	18

3
6
9

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

3	19	20	6	22	23
3	19	21	6	22	24
3	20	21	6	23	24
3	19	20	9	25	26
3	19	21	9	25	27
3	20	21	9	26	27
6	22	23	9	25	26
6	22	24	9	25	27
6	23	24	9	26	27

6
9
3

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

6	19	20	9	22	23
6	19	21	9	22	24
6	20	21	9	23	24
6	19	20	3	25	26
6	19	21	3	25	27
6	20	21	3	26	27
9	22	23	3	25	26
9	22	24	3	25	27
9	23	24	3	26	27
9	19	20	3	22	23
9	19	21	3	22	24
9	20	21	3	23	24
9	19	20	6	25	26
9	19	21	6	25	27
9	20	21	6	26	27
3	22	23	6	25	26
3	22	24	6	25	27
3	23	24	6	26	27

9
3
6

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

1	2	3	10	13	16
4	5	6	13	16	10
7	8	9	16	10	13

 $\cup$ 

10
13
16

 $\Rightarrow$ 

1	2	10	4	5	13
1	2	10	7	8	16
1	3	10	5	6	13
1	3	10	7	9	16
2	3	10	5	6	13
2	3	10	8	9	16
4	5	13	7	8	16
4	6	13	7	9	16
5	6	13	8	9	16
1	2	13	4	5	16
1	2	13	7	8	10
1	3	13	5	6	16
1	3	13	7	9	10
2	3	13	5	6	16
2	3	13	8	9	10
4	5	16	7	8	10
4	6	16	7	9	10
5	6	16	8	9	10
1	2	16	4	5	10
1	2	16	7	8	13
1	3	16	5	6	10
1	3	16	7	9	13
2	3	16	5	6	10
2	3	16	8	9	13
4	5	10	7	8	13
4	6	10	7	9	13
5	6	10	8	9	13

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

13
16
10

 $\Rightarrow$ 

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

16
10
13

 $\Rightarrow$

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

10
13
16

⇒

19	20	10	22	23	13
19	20	10	25	26	16
19	21	10	22	24	13
19	21	10	25	27	16
20	21	10	23	24	13
20	21	10	26	27	16
22	23	13	25	26	16
22	24	13	25	27	16
23	24	13	26	27	16

,

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

13
16
10

⇒

19	20	13	22	23	16
19	20	13	25	26	10
19	21	13	22	24	16
19	21	13	25	27	10
20	21	13	23	24	16
20	21	13	26	27	10
22	23	16	25	26	10
22	24	16	25	27	10
23	24	16	26	27	10

,

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

16
10
13

⇒

19	20	16	22	23	10
19	20	16	25	26	13
19	21	16	22	24	10
19	21	16	25	27	13
20	21	16	23	24	10
20	21	16	26	27	13
22	23	10	25	26	13
22	24	10	25	27	13
23	24	10	26	27	13

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

11
14
17

⇒

1	2	11	4	5	14
1	2	11	7	8	17
1	3	11	5	6	14
1	3	11	7	9	17
2	3	11	5	6	14
2	3	11	8	9	17
4	5	14	7	8	17
4	6	14	7	9	17
5	6	14	8	9	17

,

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

14
17
11

⇒

1	2	14	4	5	17
1	2	14	7	8	11
1	3	14	5	6	17
1	3	14	7	9	11
2	3	14	5	6	17
2	3	14	8	9	11
4	5	17	7	8	11
4	6	17	7	9	11
5	6	17	8	9	11

,

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

17
11
14

⇒

1	2	17	4	5	11
1	2	17	7	8	14
1	3	17	5	6	11
1	3	17	7	9	14
2	3	17	5	6	11
2	3	17	8	9	14
4	5	11	7	8	14
4	6	11	7	9	14
5	6	11	8	9	14

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

11
14
17

⇒

19	20	11	22	23	14
19	20	11	25	26	17
19	21	11	22	24	14
19	21	11	25	27	17
20	21	11	23	24	14
20	21	11	26	27	17
22	23	14	25	26	17
22	24	14	25	27	17
23	24	14	26	27	17

,

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

14
17
11

⇒

19	20	14	22	23	17
19	20	14	25	26	11
19	21	14	22	24	17
19	21	14	25	27	11
20	21	14	23	24	17
20	21	14	26	27	11
22	23	17	25	26	11
22	24	17	25	27	11
23	24	17	26	27	11

,

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

17
11
14

⇒

19	20	17	22	23	11
19	20	17	25	26	14
19	21	17	22	24	11
19	21	17	25	27	14
20	21	17	23	24	11
20	21	17	26	27	14
22	23	11	25	26	14
22	24	11	25	27	14
23	24	11	26	27	14

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

12
15
18

⇒

1	2	12	4	5	15
1	2	12	7	8	18
1	3	12	5	6	15
1	3	12	7	9	18
2	3	10	5	6	15
2	3	12	8	9	18
4	5	15	7	8	18
4	6	15	7	9	18
5	6	15	8	9	18

,

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

15
18
12

⇒

1	2	15	4	5	18
1	2	15	7	8	12
1	3	15	5	6	18
1	3	15	7	9	12
2	3	15	5	6	18
2	3	15	8	9	12
4	5	18	7	8	12
4	6	18	7	9	12
5	6	18	8	9	12

,

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

18
12
15

⇒

1	2	18	4	5	12
1	2	18	7	8	15
1	3	18	5	6	12
1	3	18	7	9	15
2	3	18	5	6	12
2	3	18	8	9	15
4	5	12	7	8	15
4	6	12	7	9	15
5	6	12	8	9	15

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

12
15
18

⇒

19	20	12	22	23	15
19	20	12	25	26	18
19	21	12	22	24	15
19	21	12	25	27	18
20	21	12	23	24	15
20	21	12	26	27	18
22	23	15	25	26	18
22	24	15	25	27	18
23	24	15	26	27	18

,

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

15
18
12

⇒

19	20	15	22	23	18
19	20	15	25	26	12
19	21	15	22	24	18
19	21	15	25	27	12
20	21	15	23	24	18
20	21	15	26	27	12
22	23	18	25	26	12
22	24	18	25	27	12
23	24	18	26	27	12

,

19	20	21
22	23	24
25	26	27

∪

18
12
15

⇒

19	20	18	22	23	12
19	20	18	25	26	15
19	21	18	22	24	12
19	21	18	25	27	15
20	21	18	23	24	12
20	21	18	26	27	15
22	23	12	25	26	15
22	24	12	25	27	15
23	24	12	26	27	15

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

19
22
25

 $\Rightarrow$ 

1	2	19	4	5	22
1	2	19	7	8	25
1	3	19	5	6	22
1	3	19	7	9	25
2	3	19	5	6	22
2	3	19	8	9	25
4	5	22	7	8	25
4	6	22	7	9	25
5	6	22	8	9	25

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

22
25
19

 $\Rightarrow$ 

1	2	22	4	5	25
1	2	22	7	8	19
1	3	22	5	6	25
1	3	22	7	9	19
2	3	22	5	6	25
2	3	22	8	9	19
4	5	25	7	8	19
4	6	25	7	9	19
5	6	25	8	9	19

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

25
19
22

 $\Rightarrow$ 

1	2	25	4	5	19
1	2	25	7	8	22
1	3	25	5	6	19
1	3	25	7	9	22
2	3	25	5	6	19
2	3	25	8	9	22
4	5	19	7	8	22
4	6	19	7	9	22
5	6	19	8	9	22

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\cup$ 

19
22
25

 $\Rightarrow$ 

19	10	11	22	13	14
19	10	12	22	13	15
19	11	12	22	14	15
19	10	11	25	16	17
19	10	12	25	16	18
19	11	12	25	17	18
22	13	14	25	16	17
22	13	15	25	16	18
22	14	15	25	17	18

10	11	12
13	14	15
16	17	18

 $\cup$ 

22
25
19

 $\Rightarrow$ 

22	10	11	25	13	14
22	10	12	25	13	15
22	11	12	25	14	15
22	10	11	19	16	17
22	10	12	19	16	18
22	11	12	19	17	18
25	13	14	19	16	17
25	13	15	19	16	18
25	14	15	19	17	18

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|} \hline 25 \\ \hline 19 \\ \hline 22 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 25 & 10 & 11 & 19 & 13 & 14 \\ \hline 25 & 10 & 12 & 19 & 13 & 15 \\ \hline 25 & 11 & 12 & 19 & 14 & 15 \\ \hline 25 & 10 & 11 & 22 & 16 & 17 \\ \hline 25 & 10 & 12 & 22 & 16 & 18 \\ \hline 25 & 11 & 12 & 22 & 17 & 18 \\ \hline 19 & 13 & 14 & 22 & 16 & 17 \\ \hline 19 & 13 & 15 & 22 & 16 & 18 \\ \hline 19 & 14 & 15 & 22 & 17 & 18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline 23 \\ \hline 26 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 20 & 4 & 5 & 23 \\ \hline 1 & 2 & 20 & 7 & 8 & 26 \\ \hline 1 & 3 & 20 & 5 & 6 & 23 \\ \hline 1 & 3 & 20 & 7 & 9 & 26 \\ \hline 2 & 3 & 20 & 5 & 6 & 23 \\ \hline 2 & 3 & 20 & 8 & 9 & 26 \\ \hline 4 & 5 & 23 & 7 & 8 & 26 \\ \hline 4 & 6 & 23 & 7 & 9 & 26 \\ \hline 5 & 6 & 23 & 8 & 9 & 26 \\ \hline \end{array} ,$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|} \hline 23 \\ \hline 26 \\ \hline 20 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 23 & 4 & 5 & 26 \\ \hline 1 & 2 & 23 & 7 & 8 & 20 \\ \hline 1 & 3 & 23 & 5 & 6 & 26 \\ \hline 1 & 3 & 23 & 7 & 9 & 20 \\ \hline 2 & 3 & 23 & 5 & 6 & 26 \\ \hline 2 & 3 & 23 & 8 & 9 & 20 \\ \hline 4 & 5 & 26 & 7 & 8 & 20 \\ \hline 4 & 6 & 26 & 7 & 9 & 20 \\ \hline 5 & 6 & 26 & 8 & 9 & 20 \\ \hline \end{array} ,$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|} \hline 26 \\ \hline 20 \\ \hline 23 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 26 & 4 & 5 & 20 \\ \hline 1 & 2 & 26 & 7 & 8 & 23 \\ \hline 1 & 3 & 26 & 5 & 6 & 20 \\ \hline 1 & 3 & 26 & 7 & 9 & 23 \\ \hline 2 & 3 & 26 & 5 & 6 & 20 \\ \hline 2 & 3 & 26 & 8 & 9 & 23 \\ \hline 4 & 5 & 20 & 7 & 8 & 23 \\ \hline 4 & 6 & 20 & 7 & 9 & 23 \\ \hline 5 & 6 & 20 & 8 & 9 & 23 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 10 & 11 & 12 \\ \hline 13 & 14 & 15 \\ \hline 16 & 17 & 18 \\ \hline \end{array} \cup \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline 23 \\ \hline 26 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 20 & 10 & 11 & 23 & 13 & 14 \\ \hline 20 & 10 & 12 & 23 & 13 & 15 \\ \hline 20 & 11 & 12 & 23 & 14 & 15 \\ \hline 20 & 10 & 11 & 26 & 16 & 17 \\ \hline 20 & 10 & 12 & 26 & 16 & 18 \\ \hline 20 & 11 & 12 & 26 & 17 & 18 \\ \hline 23 & 13 & 14 & 26 & 16 & 17 \\ \hline 23 & 13 & 15 & 26 & 16 & 18 \\ \hline 23 & 14 & 15 & 26 & 17 & 18 \\ \hline \end{array}$$

10	11	12
13	14	15
16	17	18

∪

23
26
20

⇒

23	10	11	25	13	14
23	10	12	25	13	15
23	11	12	25	14	15
23	10	11	20	16	17
23	10	12	20	16	18
23	11	12	20	17	18
26	13	14	20	16	17
26	13	15	20	16	18
26	14	15	20	17	18

10	11	12
13	14	15
16	17	18

∪

26
20
23

⇒

26	10	11	20	13	14
26	10	12	20	13	15
26	11	12	20	14	15
26	10	11	23	16	17
26	10	12	23	16	18
26	11	12	23	17	18
19	13	14	23	16	17
19	13	15	23	16	18
19	14	15	23	17	18

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

21
24
27

⇒

1	2	21	4	5	24
1	2	21	7	8	27
1	3	21	5	6	24
1	3	21	7	9	27
2	3	21	5	6	24
2	3	21	8	9	27
4	5	24	7	8	27
4	6	24	7	9	27
5	6	24	8	9	27

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

24
27
21

⇒

1	2	24	4	5	27
1	2	24	7	8	21
1	3	24	5	6	27
1	3	24	7	9	21
2	3	24	5	6	27
2	3	24	8	9	21
4	5	27	7	8	21
4	6	27	7	9	21
5	6	27	8	9	21

1	2	3
4	5	6
7	8	9

∪

27
21
24

⇒

1	2	27	4	5	21
1	2	27	7	8	24
1	3	27	5	6	21
1	3	27	7	9	24
2	3	27	5	6	21
2	3	27	8	9	24
4	5	21	7	8	24
4	6	21	7	9	24
5	6	21	8	9	24

10	11	12	∪	21	⇒	21	10	11	24	13	14
13	14	15		24		21	10	12	24	13	15
16	17	18		27		27	11	12	27	14	15

10	11	12	∪	24	⇒	24	10	11	27	13	14
13	14	15		27		21	10	12	27	13	15
16	17	18		21		27	11	12	21	14	15

10	11	12	∪	27	⇒	27	10	11	21	13	14
13	14	15		21		24	10	12	21	13	15
16	17	18		24		27	11	12	24	14	15

### 5.2.2 Méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (5) généralisés

Soient  $v = wnl$  traitements rangés dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun. Soit  $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)})'$  la  $j^{\text{eme}}$  colonne du  $g^{\text{eme}}$  tableau  $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ . En appliquant la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l+1\}$  à chaque tableau de la forme  $C_j^{(g)} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , et en considérant uniquement les combinaisons de  $s$  traitements contenant une composante de la colonne  $C_j^{(g)}$   $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ; l'ensemble de tous les blocs donne un PBIPE à cinq classes associées.

**Théorème 9.** Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres :

$$v = wnl, \quad b = w(w-1)ln(n-1)C_{s-1}^l/2, \quad r = s(w-1)(n-1)C_{s-1}^l, \quad k = 2s, \quad \lambda_1 = (w-1)l(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$

$$\lambda_2 = (w-1)sC_{s-1}^l, \quad \lambda_3 = (w-1)lC_{s-3}^{l-2}, \quad \lambda_4 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-1}, \quad \lambda_5 = 2C_{s-2}^{l-1}.$$

sont des plans rectangulaires à angles droits (5) généralisés (PBIPEG<sub>5</sub>).

**Démonstration.** – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

–  $r$  : Soit  $a_{ij_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), nous avons :

- Sur chaque tableau  $C_{j_0}^{(g)} \cup A^{(g')}$ , appliquons la procédure avec les  $l$  autres éléments de la même ligne ; il y a  $C_{s-1}^l$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. Donc pour  $C_{j_0}^{(g)} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), il en résulte  $(w-1)(n-1)C_{s-1}^l$  répétitions de  $a_{ij_0}^{(g)}$ .
- Sur chaque tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$ , appliquons la procédure avec les  $(l-1)$  autres éléments de la même ligne ; il y a  $C_{s-2}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. Donc pour un tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ),  $j = 1, \dots, l$ ,  $a_{ij_0}^{(g)}$  est répété  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. En Considérant tous

les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$ ,  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $j = 1, \dots, l$ ; il en résulte  $(w-1)l(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  répétitions de  $a_{ij_0}$ .

Ainsi :  $r = (n-1)(w-1)[C_{s-1}^l + lC_{s-2}^{l-1}] = s(w-1)(n-1)C_{s-1}^l$ .

- $\lambda_1$  : Soient  $a_{ij_0}^{(g)}, a_{i'j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $j_0 \neq j'_0$ ), ils apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois avec les autres  $l-2$  éléments de la même ligne  $i$  des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ). En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ; il en résulte,  $(w-1) \times l \times (n-1)C_{s-3}^{l-2}$  fois où les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble.
- $\lambda_2$  : Soient  $a_{ij_0}^{(g)}, a_{i'j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $i \neq i'$ ), on a :
  - Dans un tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$  fois. En considérant tous les tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , ils apparaissent ensemble  $(w-1)lC_{s-2}^{l-1}$  fois.
  - Dans un tableau  $C_{j_0}^{(g)} \cup A^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-1}^l$  fois. Pour tous les tableaux  $C_{j_0}^{(g)} \cup A^{(g')}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , ils apparaissent ensemble  $(w-1)C_{s-1}^l$  fois. Ainsi :  $\lambda_2 = (w-1)[lC_{s-2}^{l-1} + C_{s-1}^l] = s(w-1)C_{s-1}^l$ .
- $\lambda_3$  : Soient  $a_{ij_0}^{(g)}, a_{i'j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ),  $i \neq i'$  et  $j_0 \neq j'_0$ , ils apparaissent ensemble  $C_{s-3}^{l-2}$  fois pour chacun des tableaux de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$ ). En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  ( $g' \neq g$ ) pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , alors les deux traitements  $a_{ij_0}^{(g)}$  et  $a_{i'j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble  $(w-1) \times l \times C_{s-3}^{l-2}$  fois.
- $\lambda_4$  : Soient  $a_{ij}^{(g)} \in A^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')} \in A^{(g')}$  ( $g \neq g' \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $j' \neq j$ ), nous avons :  
Pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  (respectivement  $C_j^{(g)} \cup A^{(g')}$ ) les deux traitements apparaissent ensemble  $(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois. Ainsi ils apparaissent ensemble  $2(n-1)C_{s-2}^{l-1}$  fois.
- $\lambda_5$  : Soient  $a_{ij}^{(g)} \in A^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')} \in A^{(g')}$  ( $g \neq g' \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), nous avons :  
Pour le tableau  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$  (respectivement  $C_j^{(g)} \cup A^{(g')}$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-1}$ . Ainsi ils apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-1}$  fois.
- $b$  : En appliquant la méthode de construction sur chaque tableau de la forme  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')}$ , nous obtenons  $n(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. Donc pour les  $l$  tableaux de la même forme  $A \cup C_j^{(g')}$ , il y a  $l \times n(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs. En considérant tous les tableaux  $A^{(g)} \cup C_j^{(g')h}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , il en résulte  $w(w-1)ln(n-1)C_{s-1}^l/2$  blocs.

□

**Remarque 11.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées. En effet :

*Démonstration.*

$$rv = s(w-1)(n-1)C_{s-1}^l \times wnl = w(w-1)ln(n-1)C_{s-1}^l/2 \times 2s = bk$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \lambda_i n_i &= (w-1)[l(n-1)C_{s-3}^{l-2}(l-1) + sC_{s-1}^l(n-1) + lC_{s-3}^{l-2}(l-1)(n-1) + 2(n-1)C_{s-2}^{l-1}l + 2C_{s-2}^{l-1}(n-1)l] \\ &= (w-1)s(n-1)C_{s-1}^l \times [(2s) - 1] = r(k-1). \end{aligned}$$

□

**Proposition 9.** Soit un PBIPEG<sub>5</sub> de paramètres :

$$v = wnl, \quad b = w(w-1)ln(n-1)C_{s-1}^l/2, r = s(w-1)(n-1)C_{s-1}^l, k = 2s, \lambda_1 = (w-1)l(n-1)C_{s-3}^{l-2},$$

$$\lambda_2 = (w-1)sC_{s-1}^l, \lambda_3 = (w-1)lC_{s-3}^{l-2}, \lambda_4 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-1}, \lambda_5 = 2C_{s-2}^{l-1}.$$

Pour  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $n$ , le  $PBIP EG_5$  est un  $PBIP E$  résolvable à  $r$  classes parallèles. Chacune des classes contient  $q = w \frac{nl}{2s}$  blocs.

*Démonstration.* Identique à la démonstration 5.2.1. □

**Exemple 11.** Soit  $v = 3 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans 3 tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

19	20	21
22	23	24
25	26	27

Appliquons la méthode de construction avec  $s=3$ , l'ensemble de tous les blocs obtenus donne un plan rectangulaire à angles droits (5) généralisé de paramètres :

$$v = 27, b = 162, r = 36, k = 6, \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 18, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = 8, \lambda_5 = 4.$$

1	∪	10	11	12	⇒	1	10	11	4	13	14	,
4		13	14	15		1	10	12	4	13	15	
7		16	17	18		1	11	12	7	14	15	
						1	10	11	7	16	17	
						1	10	12	7	16	18	
						1	11	12	7	17	18	
						4	13	14	7	16	17	
						4	13	15	7	16	18	
						4	14	15	7	17	18	

2	∪	10	11	12	⇒	2	10	11	5	13	14	,
5		13	14	15		2	10	12	5	13	15	
8		16	17	18		2	11	12	5	14	15	
						2	10	11	8	16	17	
						2	10	12	8	16	18	
						2	11	12	8	17	18	
						5	13	14	8	16	17	
						5	13	15	8	16	18	
						5	14	15	8	17	18	

3	∪	10	11	12	⇒	3	10	11	6	13	14	,
6		13	14	15		3	10	12	6	13	15	
9		16	17	18		3	11	12	6	14	15	
						3	10	11	9	16	17	
						3	10	12	9	16	18	
						3	11	12	9	17	18	
						6	13	14	9	16	17	
						6	13	15	9	16	18	
						6	14	15	9	17	18	

1	∪	19	20	21	⇒	1	19	20	4	22	23	,
4		22	23	24		1	19	21	4	22	24	
7		25	26	27		1	20	21	4	23	24	
						1	19	20	7	25	26	
						1	19	21	7	25	27	
						1	20	21	7	26	27	
						4	22	23	7	25	26	
						4	22	24	7	25	27	
						4	23	24	7	26	27	

2
5
8

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

2	19	20	5	22	23
2	19	21	5	22	24
2	20	21	5	23	24
2	19	20	8	25	26
2	19	21	8	25	27
2	20	21	8	26	27
5	22	23	8	25	26
5	22	24	8	25	27
5	23	24	8	26	27

3
6
9

 $\cup$ 

19	20	21
22	23	24
25	26	27

 $\Rightarrow$ 

3	19	20	6	22	23
3	19	21	6	22	24
3	20	21	6	23	24
3	19	20	9	25	26
3	19	21	9	25	27
3	20	21	9	26	27
6	22	23	9	25	26
6	22	24	9	25	27
6	23	24	9	26	27

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

10
13
16

 $\Rightarrow$ 

1	2	10	4	5	13
1	2	10	7	8	16
1	3	10	5	6	13
1	3	10	7	9	16
2	3	10	5	6	13
2	3	10	8	9	16
4	5	13	7	8	16
4	6	13	7	9	16
5	6	13	8	9	16

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

11
14
17

 $\Rightarrow$ 

1	2	11	4	5	14
1	2	11	7	8	17
1	3	11	5	6	14
1	3	11	7	9	17
2	3	11	5	6	14
2	3	11	8	9	17
4	5	14	7	8	17
4	6	14	7	9	17
5	6	14	8	9	17

1	2	3
4	5	6
7	8	9

 $\cup$ 

12
15
18

 $\Rightarrow$ 

1	2	12	4	5	15
1	2	12	7	8	18
1	3	12	5	6	15
1	3	12	7	9	18
2	3	10	5	6	13
2	3	12	8	9	18
4	5	15	7	8	18
4	6	15	7	9	18
5	6	15	8	9	18

19	20	21
22	23	24
25	26	27

U

10
13
16

⇒

19	20	10	22	23	13
19	20	10	25	26	16
19	21	10	22	24	13
19	21	10	25	27	16
20	21	10	23	24	13
20	21	10	26	27	16
22	23	13	25	26	16
22	24	13	25	27	16
23	24	13	26	27	16

19	20	21
22	23	24
25	26	27

U

11
14
17

⇒

19	20	11	22	23	14
19	20	11	25	26	17
19	21	11	22	24	14
19	21	11	25	27	17
20	21	11	23	24	14
20	21	11	26	27	17
22	23	14	25	26	17
22	24	14	25	27	17
23	24	14	26	27	17

19	20	21
22	23	24
25	26	27

U

12
15
18

⇒

19	20	12	22	23	15
19	20	12	25	26	18
19	21	12	22	24	15
19	21	12	25	27	18
20	21	12	23	24	15
20	21	12	26	27	18
22	23	15	25	26	18
22	24	15	25	27	18
23	24	15	26	27	18

1	2	3
4	5	6
7	8	9

U

19
22
25

⇒

1	2	19	4	5	22
1	2	19	7	8	25
1	3	19	5	6	22
1	3	19	7	9	25
2	3	19	5	6	22
2	3	19	8	9	25
4	5	22	7	8	25
4	6	22	7	9	25
5	6	22	8	9	25

1	2	3
4	5	6
7	8	9

U

20
23
26

⇒

1	2	20	4	5	23
1	2	20	7	8	26
1	3	20	5	6	23
1	3	20	7	9	26
2	3	20	5	6	23
2	3	20	8	9	26
4	5	23	7	8	26
4	6	23	7	9	26
5	6	23	8	9	26

1	2	3
4	5	6
7	8	9

U

21
24
27

⇒

1	2	21	4	5	24
1	2	21	7	8	27
1	3	21	5	6	24
1	3	21	7	9	27
2	3	21	5	6	24
2	3	21	8	9	27
4	5	24	7	8	27
4	6	24	7	9	27
5	6	24	8	9	27

10	11	12	∪	19	⇒	19	10	11	22	13	14
13	14	15		22		19	10	12	22	13	15
16	17	18		25		19	11	12	22	14	15

10	11	12	∪	20	⇒	20	10	11	23	13	14
13	14	15		23		20	10	12	23	13	15
16	17	18		26		20	11	12	23	14	15

10	11	12	∪	21	⇒	21	10	11	24	13	14
13	14	15		24		21	10	12	24	13	15
16	17	18		27		21	11	12	24	14	15

### 5.2.3 Méthodes de construction de plans rectangulaires à angles droits généralisés

#### Première méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (7) généralisés

Soient  $v = wnl$  ( $n \geq 2, l \geq 2$  traitements rangés dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun. La Méthode Combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{2, \dots, l-1\}$  appliquée à chaque tableau, donne  $w$  ensembles de blocs. En juxtaposant les blocs des  $w$  ensembles de telle sorte que les blocs contenant le traitement  $a_{ij}^{(g)}$  et  $a_{ij}^{(g')}$  ( $g \neq g' \in \{1, \dots, w\}$ ) sont placés côte à côte; nous obtenons un *PBIPE* à sept classes associées.

**Théorème 10.** *Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres :*

$$v = wnl, \quad b = \frac{n(n-1)C_s^l}{2}, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1} = \lambda_4, \quad k = 2sw, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2} = \lambda_5,$$

$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1} = \lambda_6, \quad \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2} = \lambda_7$$

*sont des plans rectangulaires à angles droits (7) généralisés (PBIPEG<sub>7</sub>).*

**Remarque 12.** *Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1 et 3.2) sont vérifiées.*

**Proposition 10.** *Soit un PBIPEG<sub>7</sub> de paramètres :*

$$v = wnl, \quad b = \frac{n(n-1)C_s^l}{2}, \quad r = (n-1)C_{s-1}^{l-1} = \lambda_4, \quad k = 2sw, \quad \lambda_1 = (n-1)C_{s-2}^{l-2} = \lambda_5,$$

$$\lambda_2 = C_{s-1}^{l-1} = \lambda_6, \quad \lambda_3 = C_{s-2}^{l-2} = \lambda_7$$

*Pour  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $n$ , le PBIPEG<sub>7</sub> est un PBIPE résoluble à  $r$  classes parallèles. Chacune des classes contient  $q = \frac{nl}{2s}$  blocs.*

*Démonstration.* Identique au Démonstration 5.2.1. □

**Exemple 12.** Soit  $v = 3 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans deux tableaux de 3 lignes et 9 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

19	20	21
22	23	24
25	26	27

$$v = 27, b = 9, r = 4 = \lambda_4, k = 12, \lambda_1 = 2 = \lambda_5, \lambda_2 = 2 = \lambda_6, \lambda_3 = 1 = \lambda_7.$$

1	2	4	5	10	11	13	14	19	20	22	23
1	3	4	6	10	12	13	15	19	21	22	24
2	3	5	6	11	12	14	15	20	21	23	24
1	2	7	8	10	11	16	17	19	20	25	26
1	3	7	9	10	12	16	18	19	21	25	27
2	3	8	9	11	12	17	18	20	21	26	27
4	5	7	8	13	14	16	17	22	23	25	26
4	6	7	9	13	15	16	18	22	24	25	27
5	6	8	9	14	15	17	18	23	24	26	27

Dans le paragraphe qui suit, nous proposons une deuxième méthode de construction de  $PBIPEG_7$  où les  $\lambda_i \neq \lambda_{i+4}$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

### Deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits (7) généralisés

Soient  $v = wnl$  traitements rangés dans  $w$  tableaux de  $n$  lignes et  $l$  colonnes chacun. Soient  $C_j^{(g)} = (a_{1j}^{(g)}, a_{2j}^{(g)}, \dots, a_{nj}^{(g)})'$  la  $j^{\text{eme}}$  colonne du  $g^{\text{eme}}$  tableau et  $R_i^{(g)} = (a_{i1}^{(g)}, a_{i2}^{(g)}, \dots, a_{il}^{(g)})$  la  $i^{\text{eme}}$  ligne du  $g^{\text{eme}}$  tableau pour  $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ . En appliquant la méthode combinatoire ( $s$ ) avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l\}$ , d'une part, à chaque tableau de la forme  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , et d'autre part, à chaque tableau de la forme  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) pour  $i = 1, \dots, l$  et  $g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , et en ne considérant que les combinaisons de  $s$  traitements contenant une composante de la colonne  $C_j^{(g)}$  (respectivement de la ligne  $R_i^{(g)}$ ). L'ensemble de tous les blocs donne un  $PBIPE$  à sept classes associées.

**Théorème 11.** Les plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de paramètres :

$$v = wnl, \quad b = w(w-1)n(n-1)(s+2)C_s^l/2, \quad r = (w-1)(n-1)C_{s-1}^{l-1}(s+2), \quad k = 2s,$$

$$\lambda_1 = s(n-1)(w-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_2 = s(w-1)C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_3 = (w-1)(l-2)C_{s-3}^{l-3}, \quad \lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_5 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_6 = 2C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_7 = 4C_{s-2}^{l-2}$$

sont des plans rectangulaires à angles droits (7) généralisés ( $PBIPEG_7$ ).

*Démonstration.* – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

–  $r$  : Soit  $a_{i_0j_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g = 1, 2, \dots, w$ ), nous avons :

- Dans un tableau  $C_{j_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_{j_0}^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ) et pour  $g, g' = 1, 2, \dots, w$ , en appliquant la procédure avec les  $l-1$  autres éléments de la même ligne, il y a  $C_{s-1}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. Alors pour tous les tableaux  $C_{j_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_{j_0}^{(g')}]$  avec  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ,  $a_{i_0j_0}^{(g)}$  apparaît  $(w-1)(n-1)C_{s-1}^{l-1}$  fois.
- Dans un tableau  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2, \dots, w$ ) avec  $j \neq j_0$  et  $j = 1, \dots, l$ , en appliquant la procédure avec les  $l-1$  autres traitements de la même ligne, il y a  $C_{s-2}^{l-2}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n-1)$  fois. Alors  $a_{i_0j_0}^{(g)}$  apparaît  $(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois. En considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $j \neq j_0 \in \{1, \dots, l\}$ , alors  $a_{i_0j_0}^{(g)}$  apparaît  $(w-1)(l-1)(n-1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.

- Dans un tableau  $R_{i_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_{i_0}^{(g')}]$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2, \dots, w$ ), en appliquant la procédure avec les  $l - 1$  autres traitements de la même ligne, il y a  $C_{s-1}^{l-1}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n - 1)$  fois. Considérons tous les tableaux  $R_{i_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_{i_0}^{(g')}]$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$  alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  apparaît  $(w - 1)(n - 1)C_{s-1}^{l-1}$  fois.
  - Dans un tableau  $[A^{(g)} \setminus R_i^{(g)}] \cup R_i^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), avec  $i \neq i_0$  et  $i = 1, \dots, n$ , en appliquant la procédure avec les  $l - 1$  autres traitements de la même ligne, alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  apparaît  $C_{s-1}^{l-1}$  fois. Enfin, en considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus R_i^{(g)}] \cup R_i^{(g')}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$  et  $i \neq i_0 \in \{1, \dots, n\}$ , alors  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  est répété  $(w - 1)(n - 1)C_{s-1}^{l-1}$  fois.
- Par conséquent :  $r = (w - 1)(n - 1)[C_{s-1}^{l-1} + (w - 1)(l - 1)C_{s-2}^{l-2} + C_{s-1}^{l-1} + (w - 1)C_{s-1}^{l-1}] = (w - 1)(n - 1)(s + 2)C_{s-1}^{l-1}$ .
- $\lambda_1$  : Soient  $a_{i_0 j_0}^{(g)}, a_{i_0 j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  avec  $j_0 \neq j'_0$  ( $g = 1, 2, \dots, w$ ) :
    - Dans un tableau de la forme  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) avec  $j \neq j_0, j \neq j'_0$  et  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent ensemble avec les  $l - 3$  autres traitements, il y a  $C_{s-3}^{l-3}$  possibilités, chacune étant répétée  $(n - 1)$  fois. Alors, ils apparaissent  $(n - 1)C_{s-3}^{l-3}$  fois. En Considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g$  et  $g, g' = 1, 2, \dots, w$ ) avec  $j \neq j_0, j \neq j'_0, j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , les deux traitement apparaissent ensemble  $(w - 1)(l - 2)(n - 1)C_{s-3}^{l-3}$  fois.
    - Dans un tableau  $R^{(g)}_{i_0} \cup [A^{(g')} \setminus R_{i_0}^{(g')}]$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), les deux traitements apparaissent ensemble avec les  $l - 2$  autres traitements de la même ligne  $(n - 1)C_{s-2}^{l-2}$  fois. En Considérant tous les tableaux  $R^{(g)}_{i_0} \cup [A^{(g')} \setminus R_{i_0}^{(g')}]$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , alors les deux traitements apparaissent ensemble  $(w - 1)(n - 1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
    - Dans un tableau  $[A^{(g)} \setminus R_j^{(g)}] \cup R_j^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) avec  $i \neq i_0$  et  $i = 1, \dots, n$ , le couple de traitements apparaît avec les  $l - 2$  autres traitements de la même ligne  $C_{s-2}^{l-2}$  fois et en considérant tous les tableaux  $[A^{(g)} \setminus R_j^{(g)}] \cup R_j^{(g')}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$  avec  $i \neq i_0$  et  $i = 1, \dots, n$ , alors il apparaît  $(w - 1)(n - 1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
- Ainsi  $\lambda_1 = (w - 1)(l - 2)(n - 1)C_{s-3}^{l-3} + (w - 1)(n - 1)C_{s-2}^{l-2} + (w - 1)(n - 1)C_{s-2}^{l-2} = s(w - 1)(n - 1)C_{s-2}^{l-2}$ .
- $\lambda_2$  : Soient  $a_{i_0 j_0}^{(g)}, a_{i'_0 j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g = 1, 2, \dots, w$ ) : avec  $i_0 \neq i'_0$ , on a :
    - Dans le tableau  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) avec  $j \neq j_0$  et  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois pour chacun des tableaux. Considérons tous les tableaux de la forme  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , avec  $j \neq j'_0$  for  $j = 1, \dots, l$ , ils apparaissent ensemble  $(w - 1)(l - 1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
    - Dans un tableau  $C_{j_0}^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_{j_0}^{(g')}]$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), les deux traitements apparaissent ensemble  $(w - 1)C_{s-1}^{l-1}$  fois.
- Ainsi  $\lambda_2 = (w - 1)(l - 1)C_{s-2}^{l-2} + (w - 1)C_{s-1}^{l-1} = s(w - 1)C_{s-1}^{l-1}$ .
- $\lambda_3$  : Soient  $a_{i_0 j_0}^{(g)}, a_{i'_0 j'_0}^{(g)} \in A^{(g)}$  ( $g = 1, 2, \dots, w$ ) avec  $i_0 \neq i'_0$  et  $j_0 \neq j'_0$ , dans chaque tableau de la forme  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) avec  $j \neq j_0, j \neq j'_0$  et  $j = 1, \dots, l$ , les deux traitements apparaissent ensemble  $C_{s-3}^{l-3}$  fois. Considérons tous les tableaux pour  $j = 1, \dots, l$  et  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , alors les deux traitements  $a_{i_0 j_0}^{(g)}$  et  $a_{i'_0 j'_0}^{(g)}$  apparaissent ensemble  $(w - 1)(l - 2)C_{s-3}^{l-3}$  fois.
  - $\lambda_4$  : Soient  $a_{ij}^{(g)} \in A^{(g)}$  et  $a_{ij}^{(g')} \in A^{(g')}$  ( $g \neq g'$ ), ils n'apparaissent jamais ensemble, ainsi  $\lambda_4 = 0$ .
  - $\lambda_5$  : Soient  $a_{ij}^{(g)} \in A^{(g)}$  et  $a_{ij'}^{(g')} \in A^{(g')}$  ( $j' \neq j$ ) ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), dans le tableau  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  (respectivement  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$ ), ils apparaissent ensemble  $(n - 1)C_{s-2}^{l-2}$  fois. Au total, ils apparaissent ensemble  $2(n - 1)C_{s-2}^{l-2}$  fois.
  - $\lambda_6$  : Soient  $a_{ij}^{(g)} \in A^{(g)}$  et  $a_{i'j}^{(g')} \in A^{(g')}$  ( $i' \neq i$ ) ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), dans le tableau  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  (respectivement  $[A^{(g)} \setminus R_i^{(g)}] \cup R_i^{(g')}$ ), ils apparaissent ensemble  $C_{s-1}^{l-1}$  fois. Au total, ils apparaissent

ensemble  $2C_{s-1}^{l-1}$  fois.

- $\lambda_7$  : Considérons deux traitements  $a_{ij}^{(g)} \in A^{(g)}$  et  $a_{i'j'}^{(g')} \in A^{(g')}$  ( $i' \neq i$  et  $j' \neq j$ ) ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ) :
  - Dans le tableau  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  (respectivement  $[A^{(g)} \setminus C_j^{(g)}] \cup C_j^{(g')}$ ), ils apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois. Au total, ils apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-2}$  fois.
  - Dans le tableau  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  (respectivement  $[A^{(g)} \setminus R_i^{(g)}] \cup R_i^{(g')}$ ), ils apparaissent ensemble  $C_{s-2}^{l-2}$  fois. Au total, ils apparaissent ensemble  $2C_{s-2}^{l-2}$  fois.

Finalement,  $\lambda_7 = 4C_{s-2}^{l-2}$ .

-  $b$  : Par construction, nous avons :

- Pour un tableau de la forme  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ), il y a  $n(n-1)C_{s-1}^{l-1}/2$  blocs. Pour les  $l$  tableaux de la forme  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $j = 1, \dots, l$ ), nous obtenons  $ln(n-1)C_{s-1}^{l-1}/2$  blocs. En considérant tous les tableaux de la forme  $C_j^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus C_j^{(g')}]$  ( $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ ), il en résulte  $w(w-1)ln(n-1)C_{s-1}^{l-1}/2$  blocs.
- Pour un tableau de la forme  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  ( $g' \neq g$ ), il y a  $(n-1)C_s^l$  blocs. Pour les  $n$  tableaux de la forme  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  ( $i = 1, \dots, n$ ), nous obtenons  $n(n-1)C_s^l$  blocs. En considérant tous les tableaux de la forme  $R_i^{(g)} \cup [A^{(g')} \setminus R_i^{(g')}]$  pour  $g' \neq g \in \{1, 2, \dots, w\}$ , il en résulte  $w(w-1)n(n-1)C_s^l$  blocs.

Ainsi, le nombre total de blocs vaut :

$$b = w(w-1)ln(n-1)C_{s-1}^{l-1}/2 + w(w-1)n(n-1)C_s^l = w(w-1)n(n-1)C_s^l(s+1)/2.$$

□

**Remarque 13.** Les relations d'existence des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés (3.1) et (3.2) sont vérifiées.

**Proposition 11.** Soit un PBIPEG<sub>7</sub> de paramètres :

$$v = wnl, \quad b = w(w-1)n(n-1)(s+2)C_s^l/2, \quad r = (w-1)(n-1)C_{s-1}^{l-1}(s+2), \quad k = 2s,$$

$$\lambda_1 = s(n-1)(w-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_2 = s(w-1)C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_3 = (w-1)(l-2)C_{s-3}^{l-3}, \quad \lambda_4 = 0,$$

$$\lambda_5 = 2(n-1)C_{s-2}^{l-2}, \quad \lambda_6 = 2C_{s-1}^{l-1}, \quad \lambda_7 = 4C_{s-2}^{l-2}$$

Pour  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $n$ , le plan PBIPEG<sub>7</sub> est un PBIPE résoluble à  $r$  classes parallèles. Chacune des classes contient  $q = w\frac{nl}{2s}$  blocs.

*Démonstration.* Identique au Démonstration 5.2.1.

□

**Exemple 13.** Soit  $v = 3 \times 3 \times 3$  traitements rangés dans deux tableaux de 3 lignes et 3 colonnes :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

10	11	12
13	14	15
16	17	18

19	20	21
22	23	24
25	26	27

1	∪	11	12	, ... ,	21	∪	1	2
4		14	15		24		4	5
7		17	18		27		7	8

1	2	3	∪				, ... ,	1	2	3
				4	5	6				
				13	14	15	, ... ,			
				16	17	18				
								25	26	27

### 5.3 Conclusion

Nous avons décrit des méthodes de construction pour obtenir des plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés ( $m=4, 5$  et  $7$ ) et nous avons déterminé l'expression exacte de leurs paramètres.

Pour les utilisateurs, la configuration de ces plans peut être obtenue en appliquant le "package" 'CombinS' que nous décrivons dans l'Annexe A.

Ces résultats constituent une partie du papier :

**Rezgui, I. & Gheribi-Aoulmi, Z.** (2015). U-type Designs via New Partially Balanced Incomplete Block Designs with  $m = 4, 5$  and  $7$  Associated Classes. **Applied Mathematics**, 6 (242-264).

Dans le Chapitre 7, nous appliquons l'algorithme de Fang (voir [10]) sur nos plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés résolubles pour obtenir des plans numériques 'U-type'.

# Construction des plans en blocs “ pairwise ” partiellement équilibrés résolubles via des schémas d’associations

## 6.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous développons une méthode de construction de Plans en Blocs “ Pairwise ” Partiellement Équilibrés Résolvables *PBPPER* à partir uniquement des schémas d’association que nous appelons ‘ *SCH – PBPPER* ’. Pour le cas particulier  $v=nm$  ( $n \geq 2$ ), les plans construits sont des Plans en Blocs Incomplets Partiellement Équilibrés Résolvables (*PBIPER*).

**Définition 20.** Soit  $K$  un ensemble d’entiers positifs et  $I$  un ensemble d’entiers non négatifs. Un *PBPPE* est une paire  $(V; B)$  qui satisfait les propriétés suivantes :

1.  $V$  est un ensemble de  $v$  traitements appelés points.
2.  $B$  est une famille de sous ensembles de  $V$  appelés blocs.
3. Chaque bloc est de taille  $k \in K$ .
4. Chaque couple de points est contenu dans  $\lambda$  blocs ( $\lambda \in I$ ).

**Définition 21.** Soit  $(V; B)$  un *PBPPE*. Une classe parallèle dans  $(V; B)$  est une collection de blocs disjoints dont l’union est  $V$ .

Une partition de  $B$  en classes parallèles est appelée une résolution.

$(V, B)$  est dit résoluble, noté (*PBPPER*), si  $B$  admet au moins une résolution.

**Définition 22.** Un *PBIPER* est dit *PBIPER affine*, si deux blocs appartenant à la même classe parallèle ont  $q_1$  traitement en commun, et deux blocs de classes parallèle différentes ont  $q_2$  traitement en commun.

## 6.2 Méthode de “ dualizing with respect to pairs ”

Mohan et Kageyama [22] donne une méthode de construction des *PBPPE* à partir des *PBIPER affine* comme suit :

### 6.2.1 Description de la méthode de “ dualizing with respect to pairs ”

Soit un *PBIE* de paramètres :  $v, b, r, k, \lambda$ , dont le nombre de traitements communs entre deux blocs quelconque est égal à une constante  $u \geq 2$ .

- Numérotions les  $b$  blocs du plan initial par  $1, \dots, b$ .
- Considérons une paire quelconque de traitements  $(\alpha, \beta)$  du plan initial à laquelle nous associons l'ensemble des numéros des blocs la contenant. Cet ensemble constitue un bloc du nouveau plan.
- L'ensemble de tous les blocs constitue alors un autre *PBIE* de paramètres :  $v' = b, b' = C_2^v, r' = C_2^k, k_1 = \lambda, \lambda' = C_2^u$

**Théorème 12.** Soit un *PBIPER* affine de paramètres  $v = nk, b = nr, r, k, \lambda_1, \lambda_2 (\geq 2), q_1=0, q_2=k/n$ . Il existe un *PBPPE*, basé sur un schéma divisible en groupes, de paramètres :

$$v' = b, b' = C_2^v, r' = C_2^k, k_1 = \lambda_1, k_2 \leq \lambda_2, \lambda'_1 = 0, \lambda'_2 = C_2^{k/n}$$

*Démonstration.* Voir la démonstration du Théorème 2.2 du [22]. □

**Exemple 14.** Soit un plan divisible en groupe de paramètres :  $v=16, b=14, r=7, k=8, \lambda_1=7, \lambda_2=3$ .

1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	3	4	9	10	11	12
3	1	2	3	4	13	14	15	16
4	1	2	5	6	9	10	13	14
5	1	2	5	6	11	12	15	16
6	1	2	7	8	9	10	15	16
7	1	2	7	8	11	12	13	14
8	3	4	5	6	9	10	15	16
9	3	4	5	6	11	12	13	14
10	3	4	7	8	9	10	15	16
11	3	4	7	8	11	12	13	14
12	5	6	7	8	9	10	15	16
13	5	6	7	8	11	12	13	14
14	9	10	11	12	13	14	15	16

Par application de la méthode précédente, on obtient le *PBPPE* de paramètres :

$$v=14, b=120, r=28, k_1=3, k_2=7, \lambda'_1=0, \lambda'_2=6.$$

Nous illustrons la méthode pour la paire  $\{1,2\}$ , :

$$\{1,2\} \Rightarrow \boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7}$$

Dans le Paragraphe suivant, nous décrivons une méthode de construction de “*PBPPER*”, que nous appelons ‘*SCH – PBPPER*’.

### 6.3 Méthode de Construction des plans en blocs “ pairwise ” partiellement équilibrés résolubles via des schémas d’associations ‘*SCH – PBPPER*’

Soit  $V$  un schéma d’association de paramètres  $v, n_i (n_i \geq 2, i = 1, 2, \dots, m)$  et  $p_{jk}^i (i, j, k = 0, 2, \dots, m)$ . Pour l’obtention des blocs du *PBPPER*, nous procédons comme suit :

Pour chaque traitement  $\alpha$  :

- Le traitement  $\alpha$  et ses premiers associés constituent un bloc.
- Les  $n_i$  traitements  $i^{emes}$  associés à  $\alpha (i = 2, \dots, m)$  constituent chacun un bloc.

L’union de ces  $m$  blocs constitue la Classe Parallèle  $CP_\alpha$  associée à  $\alpha$ . Ainsi  $\bigcup_{\alpha \in V} CP_\alpha$  donne un *PBPPER*.

**Théorème 13.** Les plans en blocs obtenus à partir de la méthode de construction ‘SCH – PBPPER’ sont des plans en blocs “pairwise” partiellement équilibrés résolubles (PEPPER) de paramètres :

$$v, b = mv, r = v, K = \{n_1 + 1, n_2, \dots, n_m\},$$

$$I = \left\{ \sum_{j=1}^m p_{jj}^1 + 2, \sum_{j=1}^m p_{jj}^2, \dots, \sum_{j=1}^m p_{jj}^m \right\}$$

*Démonstration.* – Les valeurs de  $v$  et  $k$  sont évidentes.

–  $r$  : pour chaque traitement  $\alpha$  nous avons  $m$  blocs. Pour les  $v$  traitements nous avons  $vm$  blocs.

–  $I$  :

–  $\lambda_i$  ( $i=2, \dots, m$ ) : Un couple de traitements  $\alpha$  et  $\beta$   $i^{emes}$  associés apparaît ensemble dans un bloc si les deux sont  $j^{emes}$  associés au même traitement  $\gamma$  ( $\gamma \neq \alpha$  et  $\gamma \neq \beta$ ) i.e., il apparaissent  $p_{jj}^i$  fois. En considérant toutes les valeurs de  $j=2, \dots, m$ ; alors ils apparaissent  $\sum_{j=1}^m p_{jj}^i$  ( $i=2, \dots, m$ ).

–  $\lambda_1$  : Le même raisonnement est valable pour  $\lambda_1$ , mais en plus, si le traitement  $\alpha$  est  $1^{er}$  associé à  $\beta$ , alors  $\alpha$  apparaît avec ses  $1^{ers}$  associés ( $\beta$  est parmi eux) et  $\beta$  apparaît avec ses  $1^{ers}$  associés ( $\alpha$  est parmi eux).

$$\text{Alors : } \lambda_1 = \sum_{j=1}^m p_{jj}^1 + 2.$$

□

**Exemple 15.** Soit  $v=12=3.4$ , ( $n = 3$  et  $l = 4$ ) traitements rangés dans le tableau suivant :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Le PBPPER rectangulaire obtenu à partir de la méthode ‘SCH – PBPPER’ et le schéma d’association rectangulaire précédent a pour paramètres :

$$v = 12, b = 36, r = 12, K = \{2, 4, 6\}, I = \{2, 4, 8\}$$

Et pour configuration :

{1,2,3,4}	{5,9}	{6,7,8,10,11,12}
{1,2,3,4}	{6,10}	{5,7,8,9,11,12}
{1,2,3,4}	{7,11}	{5,6,8,9,10,12}
{1,2,3,4}	{8,12}	{5,6,7,9,10,11}
{5,6,7,8}	{1,9}	{2,3,4,10,11,12}
{5,6,7,8}	{2,10}	{1,3,4,9,11,12}
{5,6,7,8}	{3,11}	{1,2,4,9,10,12}
{5,6,7,8}	{4,12}	{1,2,3,9,10,11}
{9,10,11,12}	{1,5}	{2,3,4,6,7,8}
{9,10,11,12}	{2,6}	{1,3,4,5,7,8}
{9,10,11,12}	{3,7}	{1,2,4,5,6,8}
{9,10,11,12}	{4,8}	{1,2,3,5,6,7}

**Lemme 4.** Les plans en blocs obtenus à partir de l’application de la méthode de construction ‘SCH – PBPPER’ sur un schéma d’association de paramètres  $v=mn$ ,  $n_1=n-1$ ,  $n_i = n \geq 2$  ( $i=2, \dots, m$ ), sont des plans en blocs incomplets partiellement équilibrés résolubles (PEIPER) de paramètres :

$$v = mn, b = mv, r = v, K = n, I = \left\{ \sum_{j=1}^m p_{jj}^1 + 2, \sum_{j=1}^m p_{jj}^2, \dots, \sum_{j=1}^m p_{jj}^m \right\}$$

*Démonstration.* Les paramètres du PEIPER se déduisent facilement de ceux du Théorème 13, en posant  $n_1 + 1 = n_2 = \dots = n_m = n$ . □

## 6.4 Conclusion

Notre méthode de construction ‘*SCH – PBPPER*’ est peu exigeante et permet de construire une série de *PBPPER* via seulement les schémas d’association. Les expressions des paramètres sont données. Le cas particulier  $v=mn$ ,  $n_1 = n - 1$ ,  $n_i = n \geq 2$  ( $i=2, \dots, m$ ) donne une configuration des *PEIPER*.

Ces résultats constituent une partie d’un proceeding “accepté” :

**Rezgui, I., Laib, M. & Gheribi-Aoulmi, Z (2015).** New series of resolvable partially pairwise balanced designs and their associated space filling designs. **Afrika Statistika.**

Les résultats de ce proceeding, ont été revus et enrichis par la proposition d’un nouvel algorithme et des Corolaires, et ont été rédigés dans un article soumis :

**Rezgui, I.& Gheribi-Aoulmi, Z (2015).** New series of resolvable partially pairwise balanced and space filling designs via association schemes.

Notre méthode de construction ‘*SCH – PBPPER*’ est programmée pour quelques schémas d’associations sous forme d’un “ R-package ” appelé ‘ RPPairwiseDesigns ’ que nous décrivons dans Chapitre B.

**Troisième partie**

**Construction de plans numériques**

# Plans “ U-type ” associés aux plans en blocs rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés résolubles ( $m=4, 5, 7$ )

## 7.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous appliquons l’algorithme de Fang ‘ *RBIBD-UD* ’ [10] sur nos plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés résolubles (Voir Chapitre 5) pour obtenir une série de plans numériques “ U-type ”.

### Définition 23. [8]

Soit  $U(v; q_1, \dots, q_r)$  un plan de  $v$  essais et  $r$  facteurs à  $q_1; \dots; q_r$  niveaux respectivement. Ce plan correspondant à une matrice d’ordre  $v \times r$   $X_{v \times r} = (x^1, \dots, x^r)$  sachant que la  $i^{eme}$  colonne  $x^i$  prend les valeurs d’un ensemble de  $q_i$  éléments  $\{1, \dots, q_i\}$  le même nombre de fois. L’ensemble des plans de ce genre est dit plan “ U-type ” dans la littérature statistique, est noté  $U(v; q_1, \dots, q_r)$ . Il est noté  $U(v; q^r)$  si  $q_1 = \dots = q_r$ .  $v$  est un multiple de  $q_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ).

Les lignes de  $X$  sont identiques aux essais et les colonnes aux facteurs.

## 7.2 Construction des plans numériques “ U-type ” à partir des *PBIER*

Soit un plan en blocs incomplets équilibré résoluble de paramètres :  $v, b, r, k$  et  $q = b/r$  (voir la Définition 13 dans le Chapitre 3).

L’algorithme de Fang pour la construction de plans numériques “U-type ” via un *PBIE* est le suivant [10] :

### 7.2.1 L’algorithme ‘ *RBIBD-UD* ’

- étape.1 : Numéroté de 1 à  $q$  les  $q$  blocs dans chaque classe parallèle  $CP_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ .
- étape.2 : Pour chaque  $CP_j$ , construire une colonne  $x^j = (x_{\alpha j})$  à  $m$  niveaux comme suit :  $x_{\alpha j} = u$ , si le traitement  $\alpha$  est contenu dans le  $u^{eme}$  bloc de  $CP_j$ ,  $u = 1, 2, \dots, q$ .

– étape.3 : Les  $r$  colonnes de  $q$  niveaux construites à partir des  $CP_j$ ,  $j = 1, \dots, r$  constituent un plan numérique "U-Type".

### 7.3 Construction des plans "U-type" via les plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés ( $PBIPEG_m$ ) résolubles ( $m=4, 5, 7$ )

En appliquant l'algorithme de Fang précédent sur nos plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés résolubles ( $m=4, 5, 7$ ) (Propositions 7, ..., 11 du Chapitre 5), nous obtenons une série de plans numériques "U-type"  $U(v; q^r)$ , avec  $r$  facteurs de  $q$  niveaux chacun.

**Proposition 12.** *Pour  $v = wnl$  essais ( $w \geq 2, n \geq 2, l \geq 2$ ), une série de plans numériques "U-type"  $U(v; q^r)$  existe :*

1.  $U(wnl; (\frac{wnl}{2^s})^{(n-1)C_{s-1}^{l-1}})$ ,  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $s$ .
2.  $U(wnl; (\frac{wnl}{2^s})^{s(w-1)n(n-1)C_{s-1}^l})$ ,  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $s$ .
3.  $U(wnl; (\frac{wnl}{2^s})^{s(w-1)(n-1)C_{s-1}^l})$ ,  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $s$ .
4.  $U(wnl; (\frac{nl}{2^s})^{(n-1)C_{s-1}^{l-1}})$ ,  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $s$ .
5.  $U(wnl; (\frac{wnl}{2^s})^{(s+2)(w-1)(n-1)C_{s-1}^{l-1}})$ ,  $n$  ou  $l$  pair et  $s$  diviseur de  $l$  ou  $s$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer l'algorithme 'RBIBD – UD' sur chaque plan rectangulaire à angles droits  $m$  généralisés résoluble des Propositions 7, ..., 11 du Chapitre 5. □

**Remarque 14.** *Remarquons les facteurs des plans 1, 2, 3 et 5 de la Proposition 12, ont les mêmes niveaux, alors que les plans 1 et 3 de la Proposition 12 ont le même nombre de facteurs mais les niveaux sont différents. Le choix revient à l'utilisateur.*

**Exemple 16.** *Soit  $v = 3 \times 4 \times 4$  traitements :*

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	32

33	34	35	36
37	38	39	40
41	42	43	44
45	46	47	48

Appliquons la Méthode Combinatoire ( $s=2$ ) à chaque tableau, nous obtenons le plan rectangulaire à angles droits (4) généralisé résoluble de paramètres :  $v=48, b= 108, r=9, k=4$ .

Nous séparons les blocs du plan en classes parallèles  $CP_i$   $i=1, \dots, r = 9$  :

1	2	5	6
9	10	13	14
3	4	7	8
11	12	15	16
17	18	21	22
25	26	29	30
19	20	23	24
27	28	31	32
33	34	37	38
35	36	39	40
41	42	45	46
43	44	47	48

1	2	9	10
5	6	13	14
3	4	11	12
7	8	15	16
17	18	25	26
21	22	29	30
19	20	27	28
23	24	31	32
33	34	41	42
37	38	45	46
35	36	43	44
39	40	47	48

1	2	13	14
5	6	9	10
3	4	15	16
7	8	11	12
17	18	29	30
21	22	25	26
19	20	31	32
23	24	27	28
33	34	45	46
37	38	41	42
35	36	47	48
39	40	43	44

1	3	5	7
9	11	13	15
2	4	6	8
10	12	14	16
17	19	21	23
25	27	29	31
18	20	22	24
26	28	30	32
33	35	37	39
34	37	38	40
41	43	45	47
42	44	46	48

1	3	9	11
5	7	13	15
2	4	10	12
6	8	14	16
17	19	25	27
21	23	29	31
18	20	26	28
22	24	30	32
33	35	41	43
37	39	45	47
34	36	42	44
38	40	46	48

1	3	13	15
5	7	9	11
2	4	14	16
6	8	10	12
17	19	29	31
21	23	25	27
18	20	30	32
22	24	26	28
33	35	45	47
37	39	41	43
34	36	46	48
38	40	42	44

1	4	5	8
9	12	13	16
2	3	6	7
10	11	14	15
17	18	21	24
25	28	29	32
18	18	22	23
26	27	30	31
33	36	37	40
34	35	38	39
41	44	45	48
42	43	46	47

1	4	9	12
5	8	13	16
2	3	10	11
6	7	14	15
17	20	25	28
21	24	29	32
18	19	26	27
22	23	30	31
33	36	41	44
37	40	45	48
34	35	42	43
38	39	46	47

1	4	13	16
5	8	9	12
2	3	14	15
6	7	10	11
17	20	29	32
21	24	25	28
18	19	30	31
22	23	26	27
33	36	45	48
37	40	41	44
34	35	46	47
38	39	42	43

Appliquons l'algorithme '  $RBIBD - UD$  ' sur ce plan, nous obtenons un plan numérique " U-type "  $U(48, 12^9)$

Runs	Factor <sub>1</sub>	Factor <sub>2</sub>	Factor <sub>3</sub>	Factor <sub>4</sub>	Factor <sub>5</sub>	Factor <sub>6</sub>	Factor <sub>7</sub>	Factor <sub>8</sub>	Factor <sub>9</sub>
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	1	1	1	3	3	3
4	3	3	3	3	3	3	1	1	1
5	1	2	2	1	2	2	1	2	2
6	1	2	2	3	4	4	3	4	4
7	3	4	4	1	2	2	3	4	4
8	3	4	4	3	4	4	1	2	2
9	2	1	2	2	1	2	2	1	2
10	2	1	2	4	3	4	4	3	4
11	4	3	4	2	3	4	4	3	4
12	4	3	4	4	3	4	2	1	2
13	2	2	1	2	2	1	2	2	1
14	2	2	1	4	4	3	4	4	3
15	4	4	3	2	2	1	4	4	3
16	4	4	3	4	4	3	2	2	1
17	5	1	1	1	1	1	1	1	1
18	5	1	1	3	3	3	3	3	3
19	7	3	3	1	1	1	3	3	3
20	7	3	3	3	3	3	1	1	1
21	5	2	2	1	2	2	1	2	2
22	5	2	2	3	4	4	3	4	4
23	7	4	4	1	2	2	3	4	4
24	7	4	4	3	4	4	1	2	2
25	6	1	2	2	1	2	2	1	2
26	6	1	2	4	3	4	4	3	4
27	8	3	4	2	3	4	4	3	4
28	8	3	4	4	3	4	2	1	2
29	6	2	1	2	2	1	2	2	1
30	6	2	1	4	4	3	4	4	3
31	8	4	3	2	2	1	4	4	3
32	8	4	3	4	4	3	2	2	1
33	9	1	1	1	1	1	1	1	1
34	9	1	1	3	3	3	3	3	3
35	10	3	3	1	1	1	3	3	3
36	10	3	3	3	3	3	1	1	1
37	9	2	2	1	2	2	1	2	2
38	9	2	2	3	4	4	3	4	4
39	10	4	4	1	2	2	3	4	4
40	10	4	4	3	4	4	1	2	2
41	11	1	2	2	1	2	2	1	2
42	11	1	2	4	3	4	4	3	4
43	12	3	4	2	3	4	4	3	4
44	12	3	4	4	3	4	2	1	2
45	11	2	1	2	2	1	2	2	1
46	11	2	1	4	4	3	4	4	3
47	12	4	3	2	2	1	4	4	3
48	12	4	3	4	4	3	2	2	1

## 7.4 Conclusion

Nous avons appliqué l'algorithme de Fang sur nos plans rectangulaires à angles droits ( $m$ ) généralisés résolubles pour obtenir une série de plans numériques " U-type "  $U(v; q^r)$  associés.

Ces résultats constituent une partie du papier :

**Rezgui, I., Gheribi-Aoulmi, Z. & H. Monod (2015).** U-type Designs via New Partially Balanced Incomplete Block Designs with  $m = 4, 5$  and  $7$  Associated Classes. **Applied Mathematics**, 6 (242-264).

Pour les utilisateurs, la configuration de ces plans numériques peut être obtenue en appliquant le “ package ” ‘ CombinS ’ que nous décrivons dans l’Annexe A.

# Construction des plans numériques “ space-filling ”

## 8.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous développons une nouvelle série de plans numériques “ space-filling ”. Nous décrivons deux méthodes de construction de ces plans : la première méthode est celle utilisant l’algorithme de Fang (Voir Sous-section 7.2.1 du Chapitre 7) sur nos plans en blocs “ pairwise ” partiellement équilibrés résolubles développés dans le Chapitre 6. La deuxième méthode est celle utilisant un nouvel algorithme dit ‘ SCH – SF ’, que nous proposons et qui permet de fournir une série de plans numériques “ space-filling ” à partir seulement des schémas d’association.

**Définition 24.** Un plans numérique “ space filling ” est une matrice  $X_{v \times r} = (x^1, \dots, x^r)$  telle que la  $i^{eme}$  colonne  $x^i$  prend ses valeurs dans un ensemble de  $q_i$  éléments  $\{1, \dots, q_i\}$ . Les lignes et les colonnes de la matrice sont respectivement les essais et les facteurs du plan. l’ensemble  $\{1, \dots, q_i\}$  correspond aux niveaux du facteur  $j$  ( $j=1, \dots, r$ ).

## 8.2 Construction des plans numériques “ space-filling ” à partir des plans “ pairwise ” partiellement équilibrés

Soit un PBPPER de paramètres définis dans le Théorème 13 du Chapitre 6. En lui appliquant l’algorithme de Fang , nous obtenons un plan “ space-filling ”.

**Proposition 13.** Soit un plan en blocs “ pairwise ” partiellement équilibré résoluble à  $m$  classes associées de paramètres :

$$v, \quad b = mv, \quad r = v, \quad K = \{n_1 + 1, n_2, \dots, n_m\},$$

$$I = \left\{ \sum_{j=1}^m p_{jj}^1 + 2, \quad \sum_{j=1}^m p_{jj}^2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^m p_{jj}^m \right\}$$

Il génère un plan numérique “ space-filling ” de  $v$  essais et  $r = v$  facteurs à  $m$  niveaux chacun.

*Démonstration.* Il suffit d’appliquer l’algorithme de Fang (Voir 7.2.1 du Chapitre 7). □

**Exemple 17.** Soit un plan “ pairwise ” rectangulaire obtenu dans l’Exemple 15 du Chapitre 6 de paramètres :  $v = 12, b = 36, r = 12, k = \{2, 4, 6\}, I = \{2, 4, 8\}$  et de configuration :

{1,2,3,4}	{5,9}	{6,7,8,10,11,12}
{1,2,3,4}	{6,10}	{5,7,8,9,11,12}
{1,2,3,4}	{7,11}	{5,6,8,9,10,12}
{1,2,3,4}	{8,12}	{5,6,7,9,10,11}
{5,6,7,8}	{1,9}	{2,3,4,10,11,12}
{5,6,7,8}	{2,10}	{1,3,4,9,11,12}
{5,6,7,8}	{3,11}	{1,2,4,9,10,12}
{5,6,7,8}	{4,12}	{1,2,3,9,10,11}
{9,10,11,12}	{1,5}	{2,3,4,6,7,8}
{9,10,11,12}	{2,6}	{1,3,4,5,7,8}
{9,10,11,12}	{3,7}	{1,2,4,5,6,8}
{9,10,11,12}	{4,8}	{1,2,3,5,6,7}

Appliquons l'algorithme de Fang, nous obtenons le plan " space-filling " :

Essais \ Facteurs	Facteurs											
	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	F <sub>5</sub>	F <sub>6</sub>	F <sub>7</sub>	F <sub>8</sub>	F <sub>9</sub>	F <sub>10</sub>	F <sub>11</sub>	F <sub>12</sub>
1	1	1	1	1	2	3	3	3	2	3	3	3
2	1	1	1	1	3	2	3	3	3	2	3	3
3	1	1	1	1	3	3	2	3	3	3	2	3
4	1	1	1	1	3	3	3	2	3	3	3	2
5	2	3	3	3	1	1	1	1	2	3	3	3
6	3	2	3	3	1	1	1	1	3	2	3	3
7	3	3	2	3	1	1	1	1	3	3	2	3
8	3	3	3	2	1	1	1	1	2	3	3	2
9	2	3	3	3	2	3	3	3	1	1	1	1
10	3	2	3	3	3	2	3	3	1	1	1	1
11	3	3	2	3	3	3	2	3	1	1	1	1
12	3	3	3	2	3	3	3	2	1	1	1	1

## 8.3 Construction des plans numériques " space-filling " à partir des schémas d'association

### 8.3.1 L'algorithme ' SCH - SF '

Soit un schéma d'association de  $v$  traitements d'un ensemble  $V$ .

Pour obtenir un plan numérique " space-filling ", nous proposons l'algorithme " SCH-SF " suivant :

- Soit  $X=(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq v}$  une matrice carrée d'ordre  $v$ .
- Soit  $x_{ii}=1$  pour  $i=1, \dots, v$ .
- Soit  $x_{ij}=x_{ji}=k$  quant le traitement  $i$  et  $j$  sont  $k^{emes}$  associés pour  $i \neq j=1, \dots, v$ .

La matrice  $X$  est le plan numérique " space-filling ". Notons que les lignes et les colonnes sont identifiées respectivement à les essais et les facteurs. Les niveaux des facteurs prennent leurs valeurs dans  $\{1, \dots, m\}$

**Exemple 18.** Soit  $v=12=3.4$ , ( $n=3$  et  $l=4$ ) traitements rangés dans le tableau suivant :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Le plan numérique " space-filling " est obtenu à partir de l'application de l'algorithme ' SCH - SF ' sur un schéma d'association rectangulaire.

Essais	Facteurs											
	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_5$	$F_6$	$F_7$	$F_8$	$F_9$	$F_{10}$	$F_{11}$	$F_{12}$
1	1	1	1	1	2	3	3	3	2	3	3	3
2	1	1	1	1	3	2	3	3	3	2	3	3
3	1	1	1	1	3	3	2	3	3	3	2	3
4	1	1	1	1	3	3	3	2	3	3	3	2
5	2	3	3	3	1	1	1	1	2	3	3	3
6	3	2	3	3	1	1	1	1	3	2	3	3
7	3	3	2	3	1	1	1	1	3	3	2	3
8	3	3	3	2	1	1	1	1	2	3	3	2
9	2	3	3	3	2	3	3	3	1	1	1	1
10	3	2	3	3	3	2	3	3	1	1	1	1
11	3	3	2	3	3	3	2	3	1	1	1	1
12	3	3	3	2	3	3	3	2	1	1	1	1

**Corollaire 1.** *L'application de l'algorithme 'SCH-SF' sur un schéma d'association de paramètres  $v=mn$ ,  $n_1=n-1$ ,  $n_i = n \geq 2$  ( $i=2, \dots, m$ ), donne le plan numérique "U-type"  $U(v; m^v)$ .*

**Remarque 15.** *Remarquons que les plans obtenus à partir de l'application de l'algorithme de Fang sur nos PBPPER sont les mêmes que ceux obtenus à partir de la méthode 'SCH-SF'.*

## 8.4 Conclusion

Notre algorithme 'SCH-SF' est peu exigeant et permet de construire une série de plans numériques "space-filling" via seulement les schémas d'association. Les expressions des paramètres sont données. Le cas particulier  $v=mn$ ,  $n_1 = n - 1$ ,  $n_i = n \geq 2$  ( $i=2, \dots, m$ ) donne une configuration de plans numériques "U-type".

Ces résultats constituent une partie d'un proceeding accepté :

**Rezgui, I., Laib, M. & Gheribi-Aoulmi, Z (2015).** New series of resolvable partially pairwise balanced designs and their associated space filling designs. **Afrika Statistika.**

Les résultats de ce proceeding, ont été revus et enrichis par la proposition d'un nouvel algorithme et des Corollaires, et ont été rédigés dans un article soumis :

**Rezgui, I. & Gheribi-Aoulmi, Z (2015).** New series of resolvable partially pairwise balanced and space filling designs via association schemes.

Notre algorithme de construction 'SCH-SF' est programmé pour quelques schémas d'associations sous forme d'un "R-package" appelé 'RPPairwiseDesigns' que nous décrivons dans l'Annexe B.

# Conclusion et perspectives

Nous avons défini et décrit une nouvelle série de schémas d'association à plus de trois classes associées, schémas d'association rectangulaires à angles droits ( $m$ ),  $m=4, 5$  et  $7$  classes associées.

Nous avons procédé à leur généralisation au cas où les traitements sont rangés dans  $w$  ( $w \geq 2$ ) tableaux à  $n$  lignes et  $l$  colonnes et nous les avons appelés, schémas d'association rectangulaires à angles droits généralisés ( $m$ )  $m=4, 5$  et  $7$  classes associées. Aussi, nous les avons représentés géométriquement pour rendre leurs définitions plus intuitives. Par ailleurs, nous avons déterminé l'expression des paramètres de ces schémas.

Nous avons conçu la " Méthode combinatoire ( $s$ ) " ( $2 \leq s < l$ ) laquelle appliquée à ces nouveaux schémas, rend les constructions et donc l'existence d'une série de plans en blocs incomplets partiellement équilibrés de plus de trois classes associées, réalisables. Ces plans portent le nom des schémas d'association sur lesquels ils sont basés et leurs paramètres ne dépendent que de ceux des schémas d'association et de " $s$ ".

La Méthode combinatoire ( $s$ ) est rendue accessible à tout utilisateur de plans d'expérience car elle a été reformulée comme une fonction ' ComS ' du " R-package " " CombinS " disponible sur le site du CRAN.

Compte tenu de ces deux concepts (schémas d'association et la Méthode combinatoire ( $s$ )), nous avons défini et proposé une série de plans rectangulaires à angles droits ( $PBIPPE_m$ ) à  $m = 4, 5$  et  $7$  classes et une série de divers plans rectangulaires à angles droits généralisés à  $m = 4, 5$  et  $7$  classes. Le cas particulier  $s = l$  ( $l$  est le nombre de colonnes d'une matrice rectangulaire contenant  $v = nl$  traitements) fournit des plans en groupes divisibles singuliers. Nous avons précisé l'expression de leurs paramètres.

Pour les utilisateurs, la configuration de ces divers plans peut-être obtenue immédiatement en appliquant le " package " ' CombinS ' que nous avons proposé.

Par ailleurs, nous avons développé une autre méthode de construction de plans en blocs " Pairwise " partiellement équilibrés résolubles à partir uniquement du concept général de schémas d'association '  $SCH - PBPPER$  '. Pour le cas particulier  $v = nm$  ( $n \geq 2$ ), nous retrouvons les plans partiellement équilibrés résolubles. Pour chacun de ces plans, nous avons déterminé les paramètres les caractérisant.

Pour les utilisateurs, nous avons programmé la méthode '  $SCH - PBPPER$  ' sous forme d'un " R-package " ' RP-PairwiseDesigns '.

Notons que les plans que nous avons jusque là proposés, font partie de la classe des plans d'expérience dits classiques. En leur appliquant l'algorithme ' RBIBD-UD ' de Fang [10], nous soutirons une série de divers plans numériques "U-type"  $U(v; q^n)$ . Leur configuration s'obtient tout simplement par application du " package " ' CombinS '.

Enfin, nous avons décrit quelques plans numériques " space-filling " via seulement les schémas d'association dont la configuration peut-être obtenue aisément, en utilisant l'algorithme '  $SCH - SF$  ' que nous avons

conçu. Celui-ci fournit aussi les paramètres des plans associés.

Tous nos résultats développés dans cette thèse sont concrétisés par divers papiers ou “ R-packages “. (Cf [18, 19] et [23, 24, 25, 26, 27]).

### **Quelques perspectives :**

L’objectif de notre travail de thèse était la construction algébrique et combinatoire de plans d’expérience classiques et numériques.

Il serait intéressant d’étudier les propriétés de ces divers plans et l’optimalité des plans numériques soustrés.

Par ailleurs, il serait motivant de s’intéresser à l’approche directe de la construction des plans numériques.

# Le R-package Combins

## A.1 Introduction

Comme l'utilisation des plans d'expériences n'est pas exclusivement réservée aux statisticiens, alors pour rendre nos méthodes de construction décrites dans les chapitre 3 et 4 accessibles à tout utilisateur, nous avons reformulé ces méthodes sous forme de fonctions d'un "R- package" "Combins" [18].

Le "R-package" "Combins" est composé d'une série de fonctions suivantes :

- *CombS*
- PBIB4*
- *PBIB5*
- *PBIB7*

## A.2 CombS

Les arguments de la fonction *CombS* sont :

- *n* : nombre de lignes du tableau des traitements.
- *l* : nombre de colonnes du tableau des traitements.
- *s* : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.

La fonction *CombS* correspondant à la méthode combinatoire (*s*) décrite dans la Sous-section 3.3.1.

### CombS pour les plans rectangulaires

La fonction *CombS*, avec *s* choisi dans  $\{2, \dots, l-1\}$ , offre une configuration d'un plan rectangulaire et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) (Voir le Théorème 1 du Chapitre 3).

### CombS pour les plans divisibles en groupes

La fonction *CombS*, avec  $s = l$ , offre une configuration d'un plan divisible en groupes et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) (Voir le Lemme 1 du Chapitre 3).

**Exemple 19.** L'exécution de la fonction *CombS*(3, 3, 2)

```
> CombS(3,3,2)
$PBIB
  [,1] [,2] [,3] [,4]
init  1   2   4   5
```

1	2	7	8
4	5	7	8
1	3	4	6
1	3	7	9
4	6	7	9
2	3	5	6
2	3	8	9
5	6	8	9

**\$Type**

[1] "Rectangular PBIB design"

**\$V**

[1] 9

**\$B**

[1] 9

**\$R**

[1] 4

**\$K**

[1] 4

**\$lambda**

[1] 4 1

## A.3 PBIB4

Les arguments de la fonction *PBIB4* sont :

- (i)  $n$  : nombre de lignes du tableau des traitements.
- (ii)  $l$  : nombre de colonnes du tableau des traitements.
- (iii)  $s$  : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.
- (iv)  $ty$  : la méthode utilisée pour obtenir le plan.

### A.3.1 PBIB4( $n, l, s, ty = "a"$ )

La fonction *PBIB4*( $n, l, s, ty = "a"$ ) correspond à la méthode de construction de la méthode Combinatoire ( $s$ ) appliquée à chacun des deux tableaux ( $n \times l$ ) ( Voir la première méthode de la Sous-section 5.2.1 du Chapitre 4).

#### **PBIB4( $n, l, s, ty = "a"$ ) pour les plans divisibles en groupes emboîtés :**

La fonction *PBIB4*, avec  $s = l$  et  $ty = "a"$ , offre une configuration d'un plan divisible en groupes emboîtés et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) (Voir le Lemme 3 du Chapitre 4).

#### **PBIB4( $n, l, s, ty = "a"$ ) pour les plans rectangulaires à angles droits $PBIB_4$ :**

La fonction *PBIB4*, avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l-1\}$  et  $ty = "a"$ , offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits  $PBIB_4$  et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) (Voir le Théorème 7 du Chapitre 4).

**Exemple 20.** L'exécution de la fonction  $PBIB_4(3,3,2)$

```
> PBIB4(3,3,2,ty="a")
$PBIB
  [,1] [,2] [,3] [,4]
init  1   2   4   5
      1   2   7   8
      4   5   7   8
      1   3   4   6
      1   3   7   9
      4   6   7   9
      2   3   5   6
      2   3   8   9
      5   6   8   9
init  1   2   4   5
      1   2   7   8
      4   5   7   8
      1   3   4   6
      1   3   7   9
      4   6   7   9
      2   3   5   6
      2   3   8   9
      5   6   8   9

$Type
[1] "Rectangular right angular PBIB4 design"

$V
[1] 18

$B
[1] 18

$R
[1] 8

$K
[1] 4

$lambda
[1] 2 2 1 0
```

### A.3.2 $PBIB_4(n,l,s,ty="b")$

La fonction  $PBIB_4(n,l,s,ty="b")$  correspond à la deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits  $PBIB_4$  (Voir la Sous-section 5.2.1 du Chapitre 4).

La fonction  $PBIB_4$ , avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l+1\}$  et  $ty="b"$ , offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits  $PBIB_4$  et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, \dots, 4\}$ ) (Voir le Théorème 8 du Chapitre 4).

## A.4 PBIB5

Les arguments de la fonction *PBIB5* sont :

- (i)  $n$  : nombre de lignes du tableau des traitements.
- (ii)  $l$  : nombre de colonnes du tableau des traitements.
- (iii)  $s$  : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.

La fonction *PBIB5* correspond à la méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits  $PBIB_5$  (Voir la Sous-section 5.2.2 du Chapitre 4).

La fonction *PBIB5*, avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l+1\}$ , offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits  $PBIB_5$  et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, \dots, 5\}$ ) (Voir le Théorème 4 du Chapitre 4).

**Exemple 21.** L'exécution de la fonction *PBIB5*

```
> PBIB5(3,3,2)
$PBIB
  [,1] [,2] [,3] [,4]
init  1   2   4   5
      1   2   7   8
      4   5   7   8
      1   3   4   6
      1   3   7   9
      4   6   7   9
init  1   2   4   5
      1   2   7   8
      4   5   7   8
      1   3   4   6
      1   3   7   9
      4   6   7   9
      2   3   5   6
      2   3   8   9
      5   6   8   9
init  1   2   4   5
      1   2   7   8
      4   5   7   8
      1   3   4   6
      1   3   7   9
      4   6   7   9
      2   3   5   6
      2   3   8   9
      5   6   8   9
init  1   2   4   5
      1   2   7   8
      4   5   7   8
      1   3   4   6
```

	1	3	7	9
	4	6	7	9
	2	3	5	6
	2	3	8	9
	5	6	8	9
init	1	2	4	5
	1	2	7	8
	4	5	7	8
	1	3	4	6
	1	3	7	9
	4	6	7	9
	2	3	5	6
	2	3	8	9
	5	6	8	9

**\$Type**

[1] "Rectangular right angular PBIB5 design"

**\$V**

[1] 18

**\$B**

[1] 51

**\$R**

[1] 24

**\$K**

[1] 4

**\$lambda**

[1] 0 6 0 4 2

## A.5 PBIB7

Les arguments de la fonction *PBIB7* sont :

- (i)  $n$  : nombre de lignes du tableau des traitements.
- (ii)  $l$  : nombre de colonnes du tableau des traitements.
- (iii)  $s$  : le nombre de traitements pris de la même ligne du tableau des traitements.
- (iv)  $ty$  : la méthode utilisée pour obtenir le plan.

### A.5.1 PBIB7( $n,l,s,ty="a"$ )

La fonction *PBIB7*( $n, l, s, ty = "a"$ ) correspond à la première méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits *PBIB*<sub>7</sub> (Voir la première paragraphe de la Sous-section 5.2.3 du Chapitre 4). La fonction *PBIB7a*, avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l-1\}$ , offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits *PBIB*<sub>7</sub> et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, \dots, 7\}$ ) (Voir le Théorème 10 du chapitre 4).

### A.5.2 PBIB7( $n,l,s,ty="b"$ )

La fonction *PBIB7*( $n, l, s, ty = "b"$ ) correspond à la deuxième méthode de construction de plans rectangulaires à angles droits *PBIB*<sub>7</sub> (Voir la deuxième paragraphe de la Sous-section 5.2.3 du Chapitre 4).

La fonction  $PBIB_7$ , avec  $s$  choisi dans  $\{3, \dots, l-1\}$  et  $ty = "b"$ , offre une configuration d'un plan rectangulaire à angles droits  $PBIB_7$  et ses paramètres :  $v, b, r, k, \lambda_i$  ( $i \in \{1, \dots, 7\}$ ) (Voir le Théorème 11 du Chapitre 4).

## A.6 Conclusion

Notons l'accessibilité et la fonctionnalité des sorties de chacune des fonctions de notre "package" "CominS".

Le "package" "CominS" est disponible sur le site "Cran" :

M. Laib, I. Rezgui, Z. Gheribi-Aoulmi and H. Monod (2013). CominS : Construction method of rectangular PBIB and rectangular right angular PBIB(m) (m= 4,5 and 7) designs. R package version 1.0.  
<http://CRAN.R-project.org/package=CominS>

# R- package RPPairwiseDesign

## B.1 Introduction

Dans le “ R- Package ” ‘ *RPPairwiseDesign* ’ [19], nous appliquons la méthode ‘ *SCH – PBPPER* ’ (Voir Section 6.3 dans Chapitre 6 sur quelques schémas d’association pour obtenir les configurations de plans en “ pairwise ” partiellement équilibrés résolubles (*PBPPER*) associés. Nous appliquons aussi l’algorithme ‘ *SCH – SF* ’ (Voir Sous-section 8.3.1 dans Chapitre 8) sur les mêmes schémas d’association pour obtenir les configurations des plans numériques “ space-filling ” associés.

Les schémas d’association utilisés dans ce package sont :

Schéma d’association divisible en groupes (Voir Définition 16 dans Chapitre 3).

- Schéma d’association rectangulaire à angles droits (4) (Voir Définition 10 dans Chapitre 5).
- Schéma d’association rectangulaire à angles droits (5) (Voir Définition 11 dans Chapitre 5).
- Schéma d’association rectangulaire à angles droits (7) (Voir Définition 12 dans Chapitre 5).
- Schéma d’association nested divisible en groupes (Voir Définition 19 dans Chapitre 4).
- Schéma d’association rectangulaire (Voir Définition 5 dans Chapitre 1).
- Schéma d’association à angles droits (Voir Définition 6 dans Chapitre 1).

## B.2 Les fonction de R- Package *RPPairwiseDesign*

Le “R-package” ‘*RPPairwiseDesign*’ est composé d’une série de fonctions suivantes :

- *PPdiv*
- *PPGrectRightAng4*
- *PPGrectRightAng5*
- *PPGrectRightAng7*
- *PPNestdiv*
- *PPrect*
- *PPrightAng*
- *SaceFilling*

### B.2.1 La fonction *PPdiv*

**Les arguments de la fonction *PPdiv***

Les arguments de la fonction *PPdiv* sont :

- *n* : nombre de lignes du tableau des traitements.
- *l* : nombre de colonnes du tableau des traitements.

### La description de la fonction *PPdiv*

La fonction *PPdiv* donne la configuration de *PBPPER* divisible en groupes obtenu à partir de l'application de la méthode 'SCH – *PBPPER*' sur un schéma d'association divisible en groupes.

**Exemple 22.** L'exécution de la fonction *PPdiv*(3,3)

```
> PPdiv(3,3)
$RPPBD
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,] 1   2   3   ||  4   7   5   8   6   9
[2,] 1   2   3   ||  4   7   5   8   6   9
[3,] 1   2   3   ||  4   7   5   8   6   9
[4,] 4   5   6   ||  1   7   2   8   3   9
[5,] 4   5   6   ||  1   7   2   8   3   9
[6,] 4   5   6   ||  1   7   2   8   3   9
[7,] 7   8   9   ||  1   4   2   5   3   6
[8,] 7   8   9   ||  1   4   2   5   3   6
[9,] 7   8   9   ||  1   4   2   5   3   6

$v
[1] 9

$b
[1] 18

$r
[1] 9

$K
[1] 3 6

$lambda
[1] 9 3
```

### B.2.2 La fonction *PPGrectRightAng4*

Les arguments de la fonction *PPGrectRightAng4*

Les arguments de la fonction *PPGrectRightAng4* sont :

- *n* : nombre de lignes du tableau des traitements.
- *l* : nombre de colonnes du tableau des traitements.
- *w* : nombre de tableaux du schéma d'association.

La description de la fonction *PPGrectRightAng4*

La fonction *PPGrectRightAng4* donne la configuration de *PBPPER* rectangulaire à angles droits (4) obtenu à partir de l'application de la méthode 'SCH – *PBPPER*' sur un schéma d'association rectangulaire à angles droits (4).

**Exemple 23.** L'exécution de la fonction *PPGrectRightAng4*(3,3,2)

```
> PPGrectRightAng4(3,3,2)
$RPPBD
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14]
```

[1,]	1	2	3		4	7		5	6	8	9		10	11
[2,]	1	2	3		5	8		4	6	7	9		10	11
[3,]	1	2	3		6	9		4	5	7	8		10	11
[4,]	4	5	6		13	16		2	3	8	9		10	11
[5,]	4	5	6		14	17		1	3	7	9		10	11
[6,]	4	5	6		15	18		1	2	7	8		10	11
[7,]	7	8	9		1	7		2	3	5	6		10	11
[8,]	7	8	9		2	8		1	3	4	6		10	11
[9,]	7	8	9		3	9		1	2	4	5		10	11
[10,]	10	11	12		10	16		14	15	17	18		1	2
[11,]	10	11	12		11	17		13	15	16	18		1	2
[12,]	10	11	12		12	18		13	14	16	17		1	2
[13,]	13	14	15		1	4		11	12	17	18		1	2
[14,]	13	14	15		2	5		10	12	16	18		1	2
[15,]	13	14	15		3	6		10	11	16	17		1	2
[16,]	16	17	18		10	13		11	12	14	15		1	2
[17,]	16	17	18		11	14		10	12	13	15		1	2
[18,]	16	17	18		12	15		10	11	13	14		1	2

	[,15]	[,16]	[,17]	[,18]	[,19]	[,20]	[,21]
[1,]	12	13	14	15	16	17	18
[2,]	12	13	14	15	16	17	18
[3,]	12	13	14	15	16	17	18
[4,]	12	13	14	15	16	17	18
[5,]	12	13	14	15	16	17	18
[6,]	12	13	14	15	16	17	18
[7,]	12	13	14	15	16	17	18
[8,]	12	13	14	15	16	17	18
[9,]	12	13	14	15	16	17	18
[10,]	3	4	5	6	7	8	9
[11,]	3	4	5	6	7	8	9
[12,]	3	4	5	6	7	8	9
[13,]	3	4	5	6	7	8	9
[14,]	3	4	5	6	7	8	9
[15,]	3	4	5	6	7	8	9
[16,]	3	4	5	6	7	8	9
[17,]	3	4	5	6	7	8	9
[18,]	3	4	5	6	7	8	9

**\$v**  
[1] 9

**\$b**  
[1] 36

**\$r**  
[1] 9

**\$k**  
[1] 3 2 4 9

**\$lamda**  
[1] 14 12 10 0

### B.2.3 La fonction *PPGrectRightAng5*

#### Les arguments de la fonction *PPGrectRightAng5*

- Les arguments de la fonction *PPGrectRightAng5* sont :
- *n* : nombre de lignes du tableau des traitements.
  - *l* : nombre de colonnes du tableau des traitements.
  - *w* : nombre de tableaux du schéma d'association.

#### La description de la fonction *PPGrectRightAng5*

La fonction *PPGrectRightAng5* donne la configuration de *PBPPER* rectangulaire à angles droits (5) obtenu à partir de l'application de la méthode '*SCH-PBPPER*' sur un schéma d'association rectangulaire à angles droits (5).

**Exemple 24.** L'exécution de la fonction *PPGrectRightAng5(3,3,2)*

```
> PPGrectRightAng5(3,3,2)
$RPPBD
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14]
[1,]  1    2    3   ||   4    7   ||   5    6    8    9   ||   10   11
[2,]  1    2    3   ||   5    8   ||   4    6    7    9   ||   10   11
[3,]  1    2    3   ||   6    9   ||   4    5    7    8   ||   10   11
[4,]  4    5    6   ||  13   16   ||   2    3    8    9   ||  13   14
[5,]  4    5    6   ||  14   17   ||   1    3    7    9   ||  13   14
[6,]  4    5    6   ||  15   18   ||   1    2    7    8   ||  13   14
[7,]  7    8    9   ||   1    7   ||   2    3    5    6   ||  16   17
[8,]  7    8    9   ||   2    8   ||   1    3    4    6   ||  16   17
[9,]  7    8    9   ||   3    9   ||   1    2    4    5   ||  16   17
[10,] 10   11   12   ||  10   16   ||  14   15   17   18   ||   1    2
[11,] 10   11   12   ||  11   17   ||  13   15   16   18   ||   1    2
[12,] 10   11   12   ||  12   18   ||  13   14   16   17   ||   1    2
[13,] 13   14   15   ||   1    4   ||  11   12   17   18   ||   4    5
[14,] 13   14   15   ||   2    5   ||  10   12   16   18   ||   4    5
[15,] 13   14   15   ||   3    6   ||  10   11   16   17   ||   4    5
[16,] 16   17   18   ||  10   13   ||  11   12   14   15   ||   7    8
[17,] 16   17   18   ||  11   14   ||  10   12   13   15   ||   7    8
[18,] 16   17   18   ||  12   15   ||  10   11   13   14   ||   7    8
      [,15] [,16] [,17] [,18] [,19] [,20] [,21] [,22]
[1,]  12   ||   13   14   15   16   17   18
[2,]  12   ||   13   14   15   16   17   18
[3,]  12   ||   13   14   15   16   17   18
[4,]  15   ||   10   11   12   16   17   18
[5,]  15   ||   10   11   12   16   17   18
[6,]  15   ||   10   11   12   16   17   18
[7,]  18   ||   10   11   12   13   14   15
[8,]  18   ||   10   11   12   13   14   15
[9,]  18   ||   10   11   12   13   14   15
[10,]  3   ||   4    5    6    7    8    9
[11,]  3   ||   4    5    6    7    8    9
[12,]  3   ||   4    5    6    7    8    9
[13,]  6   ||   1    2    3    7    8    9
[14,]  6   ||   1    2    3    7    8    9
[15,]  6   ||   1    2    3    7    8    9
[16,]  9   ||   1    2    3    4    5    6
[17,]  9   ||   1    2    3    4    5    6
```

```

[18,] 9    ||    1    2    3    4    5    6

$v
[1] 9

$b
[1] 45

$r
[1] 9

$k
[1] 3 2 4 3 6

$lamda
[1] 14 5 4 0 0

```

### B.2.4 La fonction *PPGrectRightAng7*

Les arguments de la fonction *PPGrectRightAng7*

- Les arguments de la fonction *PPGrectRightAng7* sont :
- *n* : nombre de lignes du tableau des traitements.
  - *l* : nombre de colonnes du tableau des traitements.
  - *w* : nombre de tableaux du schéma d'association.

La description de la fonction *PPGrectRightAng7*

La fonction *PPGrectRightAng7* donne la configuration de *PBPPER* rectangulaire à angles droits (7) obtenu à partir de l'application de la méthode 'SCH-PBPPER' sur un schéma d'association rectangulaire à angles droits (7).

**Exemple 25.** L'exécution de la fonction *PPGrectRightAng7(3,3,3)*

```

> PPGrectRightAng7(3,3,3)
$RPPBD
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14]
[1,]  1    2    3    ||    4    7    ||    5    6    8    9    ||    10   19
[2,]  1    2    3    ||    5    8    ||    4    6    7    9    ||    11   20
[3,]  1    2    3    ||    6    9    ||    4    5    7    8    ||    12   21
[4,]  4    5    6    ||   13   16   ||    2    3    8    9    ||   13   22
[5,]  4    5    6    ||   14   17   ||    1    3    7    9    ||   14   23
[6,]  4    5    6    ||   15   18   ||    1    2    7    8    ||   15   24
[7,]  7    8    9    ||   22   25   ||    2    3    5    6    ||   16   25
[8,]  7    8    9    ||   23   26   ||    1    3    4    6    ||   17   26
[9,]  7    8    9    ||   24   27   ||    1    2    4    5    ||   18   27
[10,] 10   11   12   ||    1    7    ||   14   15   17   18   ||    1    19
[11,] 10   11   12   ||    2    8    ||   13   15   16   18   ||    2    20
[12,] 10   11   12   ||    3    9    ||   13   14   16   17   ||    3    21
[13,] 13   14   15   ||   10   16   ||   11   12   17   18   ||    4    22
[14,] 13   14   15   ||   11   17   ||   10   12   16   18   ||    5    23
[15,] 13   14   15   ||   12   18   ||   10   11   16   17   ||    6    24
[16,] 16   17   18   ||   19   25   ||   11   12   14   15   ||    7    25
[17,] 16   17   18   ||   20   26   ||   10   12   13   15   ||    8    26

```

[18,]	16	17	18		21	27		10	11	13	14		9	27
[19,]	19	20	21		1	4		23	24	26	27		1	10
[20,]	19	20	21		2	5		22	24	25	27		2	11
[21,]	19	20	21		3	6		22	23	25	26		3	12
[22,]	22	23	24		10	13		20	21	26	27		4	13
[23,]	22	23	24		11	14		19	21	25	27		5	14
[24,]	22	23	24		12	15		19	20	25	26		6	15
[25,]	25	26	27		19	22		20	21	23	24		7	16
[26,]	25	26	27		20	23		19	21	22	24		8	17
[27,]	25	26	27		21	24		19	20	22	23		9	18
	[,15]	[,16]	[,17]	[,18]	[,19]	[,20]	[,21]	[,22]	[,23]	[,24]	[,25]	[,26]	[,27]	
[1,]		11	12	20	21		13	16	22	25		14	17	
[2,]		14	15	23	24		14	17	23	26		13	16	
[3,]		17	18	26	27		15	18	24	27		13	16	
[4,]		10	12	19	21		10	16	19	25		11	17	
[5,]		13	15	22	24		11	17	20	26		10	16	
[6,]		16	18	25	27		12	18	21	27		10	16	
[7,]		10	11	19	20		10	13	19	22		11	14	
[8,]		13	14	22	23		11	14	20	23		10	13	
[9,]		16	17	25	26		12	15	21	24		10	13	
[10,]		2	3	20	21		4	7	22	25		5	8	
[11,]		5	6	23	24		5	8	23	26		4	7	
[12,]		8	9	26	27		6	9	24	27		4	7	
[13,]		1	3	19	21		1	7	19	25		2	8	
[14,]		4	6	22	24		2	8	20	26		1	7	
[15,]		7	9	25	27		3	9	21	27		1	7	
[16,]		1	2	19	20		1	4	19	22		2	5	
[17,]		4	5	22	23		2	5	20	23		1	4	
[18,]		7	8	25	26		3	6	21	24		1	4	
[19,]		2	3	11	12		4	7	13	16		5	8	
[20,]		5	6	14	15		5	8	14	17		4	7	
[21,]		8	9	17	18		6	9	15	18		4	7	
[22,]		1	3	10	12		1	7	10	16		2	8	
[23,]		4	6	13	15		2	8	11	17		1	7	
[24,]		7	9	16	18		3	9	12	18		1	7	
[25,]		1	2	10	11		1	4	10	13		2	5	
[26,]		4	5	13	14		2	5	11	14		1	4	
[27,]		7	8	16	17		3	6	12	15		1	4	
	[,28]	[,29]	[,30]	[,31]	[,32]	[,33]								
[1,]	23	26	15	18	24	27								
[2,]	22	25	15	18	24	27								
[3,]	22	25	14	17	23	26								
[4,]	20	26	12	18	21	27								
[5,]	19	25	12	18	21	27								
[6,]	19	25	11	17	20	26								
[7,]	20	23	12	15	21	24								
[8,]	19	22	12	15	21	24								
[9,]	19	22	11	14	20	23								
[10,]	23	26	6	9	24	27								
[11,]	22	25	6	9	24	27								
[12,]	22	25	5	8	23	26								
[13,]	20	26	3	9	21	27								
[14,]	19	25	3	9	21	27								
[15,]	19	25	2	8	20	26								

```

[16,] 20  23  3   6   21  24
[17,] 19  22  3   6   21  24
[18,] 19  22  2   5   20  23
[19,] 14  17  6   9   15  18
[20,] 13  16  6   9   15  18
[21,] 13  16  5   8   14  17
[22,] 11  17  3   9   12  18
[23,] 10  16  3   9   12  18
[24,] 10  16  2   8   11  17
[25,] 11  14  3   6   12  15
[26,] 10  13  3   6   12  15
[27,] 10  13  2   5   11  14

```

```

$v
[1] 9

```

```

$b
[1] 18

```

```

$r
[1] 9

```

```

$k
[1] 3 2 4 2 4 4 8

```

```

$lamda
[1] 11 9 3 9 3 3 1

```

## B.2.5 La fonction *PPNestdiv*

### Les arguments de la fonction *PPNestdiv*

- Les arguments de la fonction *PPdiv* sont :
- *n* : nombre de lignes du tableau des traitements.
  - *l* : nombre de colonnes du tableau des traitements.
  - *w* : nombre de tableaux du schéma d'association.

### La description de la fonction *PPNestdiv*

La fonction *PPNestdiv* donne la configuration de *PBPPER* "nested" divisible en groupes obtenu à partir de l'application de la méthode '*SCH - PBPPER*' sur un schéma d'association "nested" divisible en groupes.

**Exemple 26.** L'exécution de la fonction *PPNestdiv(3,3,3)*

```

> PPNestdiv(3,3,3)
$RPPED
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14]
[1,]  1    2    3   ||   4    5    6    7    8    9    ||   10   11   12
[2,]  1    2    3   ||   4    5    6    7    8    9    ||   10   11   12
[3,]  1    2    3   ||   4    5    6    7    8    9    ||   10   11   12
[4,]  4    5    6   ||   1    2    3    7    8    9    ||   10   11   12
[5,]  4    5    6   ||   1    2    3    7    8    9    ||   10   11   12
[6,]  4    5    6   ||   1    2    3    7    8    9    ||   10   11   12

```

[7,]	7	8	9		1	2	3	4	5	6		10	11	12
[8,]	7	8	9		1	2	3	4	5	6		10	11	12
[9,]	7	8	9		1	2	3	4	5	6		10	11	12
[10,]	10	11	12		13	14	15	16	17	18		1	2	3
[11,]	10	11	12		13	14	15	16	17	18		1	2	3
[12,]	10	11	12		13	14	15	16	17	18		1	2	3
[13,]	13	14	15		10	11	12	16	17	18		1	2	3
[14,]	13	14	15		10	11	12	16	17	18		1	2	3
[15,]	13	14	15		10	11	12	16	17	18		1	2	3
[16,]	16	17	18		10	11	12	13	14	15		1	2	3
[17,]	16	17	18		10	11	12	13	14	15		1	2	3
[18,]	16	17	18		10	11	12	13	14	15		1	2	3
[19,]	19	20	21		22	23	24	25	26	27		1	2	3
[20,]	19	20	21		22	23	24	25	26	27		1	2	3
[21,]	19	20	21		22	23	24	25	26	27		1	2	3
[22,]	22	23	24		19	20	21	25	26	27		1	2	3
[23,]	22	23	24		19	20	21	25	26	27		1	2	3
[24,]	22	23	24		19	20	21	25	26	27		1	2	3
[25,]	25	26	27		19	20	21	22	23	24		1	2	3
[26,]	25	26	27		19	20	21	22	23	24		1	2	3
[27,]	25	26	27		19	20	21	22	23	24		1	2	3
	[,15]	[,16]	[,17]	[,18]	[,19]	[,20]	[,21]	[,22]	[,23]	[,24]	[,25]	[,26]	[,27]	
[1,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[2,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[3,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[4,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[5,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[6,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[7,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[8,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[9,]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
[10,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[11,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[12,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[13,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[14,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[15,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[16,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[17,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[18,]	4	5	6	7	8	9	19	20	21	22	23	24	25	
[19,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[20,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[21,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[22,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[23,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[24,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[25,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[26,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
[27,]	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
	[,28]	[,29]												
[1,]	26	27												
[2,]	26	27												
[3,]	26	27												
[4,]	26	27												

[5,] 26 27  
 [6,] 26 27  
 [7,] 26 27  
 [8,] 26 27  
 [9,] 26 27  
 [10,] 26 27  
 [11,] 26 27  
 [12,] 26 27  
 [13,] 26 27  
 [14,] 26 27  
 [15,] 26 27  
 [16,] 26 27  
 [17,] 26 27  
 [18,] 26 27  
 [19,] 17 18  
 [20,] 17 18  
 [21,] 17 18  
 [22,] 17 18  
 [23,] 17 18  
 [24,] 17 18  
 [25,] 17 18  
 [26,] 17 18  
 [27,] 17 18

**\$v**

[1] 9

**\$b**

[1] 27

**\$r**

[1] 9

**\$k**

[1] 3 6 18

**\$lamda**

[1] 27 21 9

## B.2.6 La fonction *PPrect*

### Les arguments de la fonction *PPrect*

Les arguments de la fonction *PPdiv* sont :

- $n$  : nombre de lignes du tableau des traitements.
- $l$  : nombre de colonnes du tableau des traitements.

### La description de la fonction *PPrect*

La fonction *PPrect* donne la configuration de *PBPPER* rectangulaire obtenu à partir de l'application de la méthode 'SCH - *PBPPER*' sur un schéma d'association rectangulaire.

**Exemple 27.** L'exécution de la fonction *PPrect(3, 3)*

```

> PPrect(3,3)
$RPPBD
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11]
[1,] 1  2  3  ||  4  7  ||  5  8  6  9
[2,] 1  2  3  ||  5  8  ||  4  7  6  9
[3,] 1  2  3  ||  6  9  ||  4  7  5  8
[4,] 4  5  6  ||  1  7  ||  2  8  3  9
[5,] 4  5  6  ||  2  8  ||  1  7  3  9
[6,] 4  5  6  ||  3  9  ||  1  7  2  8
[7,] 7  8  9  ||  1  4  ||  2  5  3  6
[8,] 7  8  9  ||  2  5  ||  1  4  3  6
[9,] 7  8  9  ||  3  6  ||  1  4  2  5

```

```

$v
[1] 9

```

```

$b
[1] 27

```

```

$r
[1] 9

```

```

$K
[1] 3 2 4

```

```

$lamda
[1] 5 3 1

```

## B.2.7 La fonction *PPrightAng*

### Les arguments de la fonction *PPrightAng*

Les arguments de la fonction *PPrightAng* sont :

- $n$  : nombre de lignes du tableau des traitements.
- $l$  : nombre de colonnes du tableau des traitements.
- $w$  : nombre de tableaux du schéma d'association.

### La description de la fonction *PPrightAng*

La fonction *PPrightAng* donne la configuration de *PBPPER* à angles droits obtenu à partir de l'application de la méthode '*SCH - PBPPER*' sur un schéma d'association à angles droits.

**Exemple 28.** L'exécution de la fonction *PPrightAng(3, 3, 3)*

```

> PPrightAng(3,3,3)
$RPPBD
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12] [,13] [,14]
[1,] 1  2  3  ||  4  5  6  7  8  9  || 10 11 12
[2,] 1  2  3  ||  4  5  6  7  8  9  || 10 11 12
[3,] 1  2  3  ||  4  5  6  7  8  9  || 10 11 12
[4,] 4  5  6  ||  1  2  3  7  8  9  || 13 14 15
[5,] 4  5  6  ||  1  2  3  7  8  9  || 13 14 15
[6,] 4  5  6  ||  1  2  3  7  8  9  || 13 14 15

```

[7,]	7	8	9		1	2	3	4	5	6		16	17	18
[8,]	7	8	9		1	2	3	4	5	6		16	17	18
[9,]	7	8	9		1	2	3	4	5	6		16	17	18
[10,]	10	11	12		13	14	15	16	17	18		1	2	3
[11,]	10	11	12		13	14	15	16	17	18		1	2	3
[12,]	10	11	12		13	14	15	16	17	18		1	2	3
[13,]	13	14	15		10	11	12	16	17	18		4	5	6
[14,]	13	14	15		10	11	12	16	17	18		4	5	6
[15,]	13	14	15		10	11	12	16	17	18		4	5	6
[16,]	16	17	18		10	11	12	13	14	15		7	8	9
[17,]	16	17	18		10	11	12	13	14	15		7	8	9
[18,]	16	17	18		10	11	12	13	14	15		7	8	9
[19,]	19	20	21		22	23	24	25	26	27		1	2	3
[20,]	19	20	21		22	23	24	25	26	27		1	2	3
[21,]	19	20	21		22	23	24	25	26	27		1	2	3
[22,]	22	23	24		19	20	21	25	26	27		4	5	6
[23,]	22	23	24		19	20	21	25	26	27		4	5	6
[24,]	22	23	24		19	20	21	25	26	27		4	5	6
[25,]	25	26	27		19	20	21	22	23	24		7	8	9
[26,]	25	26	27		19	20	21	22	23	24		7	8	9
[27,]	25	26	27		19	20	21	22	23	24		7	8	9
	[,15]	[,16]	[,17]	[,18]	[,19]	[,20]	[,21]	[,22]	[,23]	[,24]	[,25]	[,26]	[,27]	
[1,]	19	20	21		13	14	15	22	23	24	16	17	18	
[2,]	19	20	21		13	14	15	22	23	24	16	17	18	
[3,]	19	20	21		13	14	15	22	23	24	16	17	18	
[4,]	22	23	24		10	11	12	19	20	21	16	17	18	
[5,]	22	23	24		10	11	12	19	20	21	16	17	18	
[6,]	22	23	24		10	11	12	19	20	21	16	17	18	
[7,]	25	26	27		10	11	12	19	20	21	13	14	15	
[8,]	25	26	27		10	11	12	19	20	21	13	14	15	
[9,]	25	26	27		10	11	12	19	20	21	13	14	15	
[10,]	19	20	21		4	5	6	22	23	24	7	8	9	
[11,]	19	20	21		4	5	6	22	23	24	7	8	9	
[12,]	19	20	21		4	5	6	22	23	24	7	8	9	
[13,]	22	23	24		1	2	3	19	20	21	7	8	9	
[14,]	22	23	24		1	2	3	19	20	21	7	8	9	
[15,]	22	23	24		1	2	3	19	20	21	7	8	9	
[16,]	25	26	27		1	2	3	19	20	21	4	5	6	
[17,]	25	26	27		1	2	3	19	20	21	4	5	6	
[18,]	25	26	27		1	2	3	19	20	21	4	5	6	
[19,]	10	11	12		4	5	6	13	14	15	7	8	9	
[20,]	10	11	12		4	5	6	13	14	15	7	8	9	
[21,]	10	11	12		4	5	6	13	14	15	7	8	9	
[22,]	13	14	15		1	2	3	10	11	12	7	8	9	
[23,]	13	14	15		1	2	3	10	11	12	7	8	9	
[24,]	13	14	15		1	2	3	10	11	12	7	8	9	
[25,]	16	17	18		1	2	3	10	11	12	4	5	6	
[26,]	16	17	18		1	2	3	10	11	12	4	5	6	
[27,]	16	17	18		1	2	3	10	11	12	4	5	6	
	[,28]	[,29]	[,30]											
[1,]	25	26	27											
[2,]	25	26	27											
[3,]	25	26	27											
[4,]	25	26	27											

[5,]	25	26	27
[6,]	25	26	27
[7,]	22	23	24
[8,]	22	23	24
[9,]	22	23	24
[10,]	25	26	27
[11,]	25	26	27
[12,]	25	26	27
[13,]	25	26	27
[14,]	25	26	27
[15,]	25	26	27
[16,]	22	23	24
[17,]	22	23	24
[18,]	22	23	24
[19,]	16	17	18
[20,]	16	17	18
[21,]	16	17	18
[22,]	16	17	18
[23,]	16	17	18
[24,]	16	17	18
[25,]	13	14	15
[26,]	13	14	15
[27,]	13	14	15

**\$v**

[1] 9

**\$b**

[1] 36

**\$r**

[1] 9

**\$K**

[1] 3 6 6 12

**\$lamda**

[1] 27 9 9 1

## B.2.8 La fonction *SaceFilling*

### L'argument de la fonction *SaceFilling*

L'argument de la fonction '*SaceFilling*' est la chaîne de caractère " asch ", il identifie le type de schéma d'association utilisé pour obtenir le plan " space-filling " associé comme suit :

- "Div" pour le schéma d'association divisible en groupes.
- "GrectRightAng4" pour le schéma d'association rectangulaire à angles droits (4).
- "GrectRightAng5" pour le schéma d'association rectangulaire à angles droits (5).
- "GrectRightAng7" pour le schéma d'association rectangulaire à angles droits (7).
- "Nestdiv" pour le schéma d'association "nested" divisible en groupes.
- "Rect" pour le schéma d'association rectangulaire.
- "RightAng" pour le schéma d'association à angles droits.

### La description de la fonction *PPdiv*

La fonction ‘*SpaceFilling*’ donne la configuration de plan numérique “space-filling” obtenu à partir de l’application de l’algorithme ‘*SCH – SF*’ sur une série de schémas d’association.

**Exemple 29.** L’exécution de la fonction *SpaceFilling*(“Div”)

```
> SpaceFilling("Div")
Number of lines of association schemes array :
3
Number of columns of association schemes array :
3
$SFDesign
  [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
[1,]  1   1   1   2   2   2   2   2   2
[2,]  1   1   1   2   2   2   2   2   2
[3,]  1   1   1   2   2   2   2   2   2
[4,]  2   2   2   1   1   1   2   2   2
[5,]  2   2   2   1   1   1   2   2   2
[6,]  2   2   2   1   1   1   2   2   2
[7,]  2   2   2   2   2   2   1   1   1
[8,]  2   2   2   2   2   2   1   1   1
[9,]  2   2   2   2   2   2   1   1   1

$Runs
[1] 9

$Factors
[1] 9

$Levels
[1] 2
```

### B.3 Conclusion

Notons l’accessibilité et la fonctionnalité des sorties de chacune des fonctions de notre “package” ‘*RPPairwiseDesign*’.

M. Laib, I. Rezgui and Z. Gheribi-Aoulmi (2015). *RPPairwiseDesign* : Resolvable partially pairwise balanced design and Space-filling design via association scheme. R package version 1.0.  
<http://CRAN.R-project.org/package=RPPairwiseDesign>

# Bibliographie

- [1] Bailey, R. A. (2004) Association Schemes Designed Experiments, Algebra and Combinatorics. Cambridge University Press. [www.cambridge.org/9780521824460](http://www.cambridge.org/9780521824460)
- [2] Benmatti A. (1983). Un schéma d'association partiellement équilibré appliqué aux croisements dialléles. Thèse magister. [www.cca-paris-biblio.com](http://www.cca-paris-biblio.com).
- [3] Bose, R.C. and Nair, K. R. (1939) Partially balanced incomplete block designs. *Sankhya*, 4 (337-372).
- [4] Bose, R. C., Clatworthy W .H. and Shrikhande S. S. (1954). Tables of partially balanced designs with two associate classes. North Carolina Agricultural Experiment Station. Tech. Bull. N 107.
- [5] Clatworthy W. H. (1954). A geometrical configuration which is a partially balanced incomplete block design. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (47-55).
- [6] Clatworthy, W. H. (1973). Table of two-associate partially balanced designs. National Bureau of Standards. Applied Maths. Washington D. C. Series 63.
- [7] Dwivedi, L. Partially balanced Incomplete block designs. M.Sc. (Agricultural Statistics), Roll No. 4491, I.A.S.R.I., Library Avenue, New Delhi -110 012
- [8] Fang, K.T. , Ge, G. N. and Liu, M. (2004). Construction of uniform designs via super-simple resolvable t-designs. *Utilitas Mathematica*, 66 (15-32) : <http://www.math.nankai.edu.cn/mqliu/publications/2004-FangGeLiuQin-UM.pdf> J.X. (2005). Resolvable partially pairwise
- [9] Fang, K.T., Tang, Y. and Yin, balanced designs and their applications in computer experiments. *Utilitas Mathematica*, 70 (141-157) : <http://math.suda.edu.cn/tangy/research/file/umfty2005.pdf>
- [10] Fang, K. T. , Li, R. and Sudjianto, A. (2006) Design and Modeling for Computer Experiments, Taylor & Francis Group, LLC.
- [11] Hernant, Kr. Singh, J. S. Parihar, R. D. Singh and Vipul Kant Singh (2011). Construction of rectangular PBIB designs. *j. Scientific Research*, 55 (103-110).
- [12] Kageyama, S. and Sinha, K. (2003). Some new patterned construction of rectangular designs. *J. Japan Statistic. Soc.*, 33 (137-144).
- [13] Kishore, S. and Gupta, S. (1993). An EGD/3 scheme having 5 associate classes. *Statistics and Probability Letters.*, 17 (287-291).
- [14] Kishore, S. and Kageyama, S. (2006). Constructions of group divisible designs and related structures. *J. S. P. I.*, 136 (3281-3290).
- [15] Lee , A. W. M., Chan W. F., Yuen F. S.Y., Tse P. K., Liang Y. Z. and Fang K. T. (1997). An example of a sequential uniform design : application in capillary electrophoresis. *Chemometrics and intelligent laboratory Systems*, 39 (11-18).
- [16] Leung Y.W and Wang Y. (2000). Multiobjective Programming Using Uniform Design and Genetic Algorithm. *IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics- Part C : Application and Reviews*, 30 (293-304).
- [17] Manual, title = R : A Language and Environment for Statistical Computing, author = R Core Team, organization = R Foundation for Statistical Computing, address = Vienna, Austria, year = 2014, url = <http://www.R-project.org/>,

- [18] Manual, title = CombinS : Constructions method of rectangular PBIB and rectangular right angular PBIB(m) (m= 4,5 and 7) designs., author = Mohamed LAIB and Imane REZGUI and Zoubida Gheribi-Aoulmi and Herve Monod, year = 2013, note = R package version 1.0, url = <http://CRAN.R-project.org/package=CombinS>,
- [19] Manual, title = RPPairwiseDesign : Resolvable partially pairwise balanced design and Space-filling design via association scheme, author = Mohamed Laib and Imane Rezgui and Zebida Gheribi-Aoulmi, year = 2015, note = R package version 1.0, url = <http://CRAN.R-project.org/package=RPPairwiseDesign>,
- [20] Matsubara, K. and Kageyama, S. (2014). The Construction of Pairwise Additive Minimal BIB Designs with Asymptotic Results. *Applied Mathematics*, 5 ( 2130-2136). <http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.514207>
- [21] Mesner D. M. (1967). A new family of partially balanced incomplete block designs with some latin Square design propertie. Faculty Publication. Paper 5, (571- 581).
- [22] Mohan, R. N. and Kageyama, S. (1987). A note on pairwise balanced and partially balanced designs. *Indian J. pure appl. Math*, 18 (871-875).
- [23] Rezgui, I., Gheribi-Aoulmi, Z. & H. Monod (2013). New association schemes with 4, 5 and 7 associated classes and their associated partially balanced incomplete block designs. *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, 12 (179 - 206).
- [24] Rezgui, I. and Gheribi-Aoulmi, Z. (2014). New construction method of rectangular partially balanced incomplete block designs and singular group divisible designs. *Journal of Mathematics and Statistics*, 10 (45- 48).
- [25] Rezgui, I., Gheribi-Aoulmi, Z. & H. Monod (2015). U-type Designs via New Partially Balanced Incomplete Block Designs with m = 4, 5 and 7 Associated Classes. *Applied Mathematics*, 66 (242-264).
- [26] Rezgui, I., Laib, M. & Gheribi-Aoulmi, Z (2015). New series of resolvable partially pairwise balanced designs and their associated space filling designs. *Afrika Statistika*. *Accepté*
- [27] Rezgui, I., and Gheribi-Aoulmi, Z (2015). New series of resolvable partially pairwise balanced and space filling designs via association schemes. *Soumis*
- [28] Rodger, C.A., Sarvate, D. G. and Seberry, J. (1987). Colorued designs, new group divisible designs and pairwise balanced designs. *Journal of statistical planning and inference*, 15 (379-389) : [http://www.uow.edu.au/jennie/WEBPDF/109\\_1987.pdf](http://www.uow.edu.au/jennie/WEBPDF/109_1987.pdf)
- [29] Saha G. M. , Kulshreshtha A.C. and Dey A. (1973). On a new type of m-class cyclic association scheme and designs based on the scheme. *Ann. Math. Stat.*, 1 (985-990).
- [30] Saha, G. M., Dey, A. and Kulshreshtha, A. C. (1074). Circular designs-further results. *J. India Soc. Agric. Statist.*, 87-92.
- [31] Sharma, V. K. Incomplete block designs.Indian Agricultural Statistics Research Institute. Library Avenue, New Delhi-110012.
- [32] Tharthare, S. K. (1963). Right angular designs. *Ann. Math. Statist.*, 36 (1057-1067).
- [33] Vartak, M.N. (1955). On an application of Kronecker product of Matrices to Statistical designs. *Ann. Math. Stat.*, 26 (420-438).