

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE**

**FACULTE DES SCIENCES**

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE**

N° d'ordre :

Série :

**MEMOIRE**

PRESENTÉE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE MAGISTER

SPECIALITE : Physique théorique

Titre :

Résolution d'équations de Fokker Planck à  
coefficients dépendants de l'espace-temps

**PAR**

Saidi Sief Nadia

Soutenu le :2006

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Quelques rappels sur les diffusions normale et anormale</b>	<b>6</b>
2.1	Introduction . . . . .	6
2.2	Processus Markovien et équation de Fokker-Planck . . . . .	6
2.3	Exemples simples . . . . .	8
2.3.1	Processus de <i>Wiener</i> et diffusion <i>normale</i> . . . . .	8
2.3.2	Processus d' <i>Ornstein-Uhlenbeck</i> . . . . .	8
2.4	Processus non Markoviens et équation de Fokker-Planck fractionnaire . . . . .	10
2.4.1	Diffusion <i>anormale</i> . . . . .	10
2.4.2	Equation de diffusion anormale . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Résolution d'une équation de Fokker-Planck standard à coefficients dépendants de l'espace-temps</b>	<b>12</b>
3.1	Introduction . . . . .	12
3.2	Solution par l'approche du groupe de Lie $SU(1,1)$ . . . . .	13
3.2.1	Choix des générateurs . . . . .	13
3.2.2	Forme algébrique de l'équation . . . . .	14
3.2.3	Elimination de l'opérateur $J_0$ et réduction de l'équation à une forme plus simple . . . . .	15
3.2.4	Recherche du propagateur de la solution sous forme formelle . . . . .	16
3.2.5	Ecriture du propagateur sous forme explicite . . . . .	18
3.3	Solution par l'approche de séparation des variables . . . . .	22

3.4	Discussion des résultats obtenues . . . . .	28
3.4.1	Domaines de variation des paramètres $\pm\mu$ . . . . .	28
3.4.2	Comportement des solutions vis-à-vis de la réflexion ou de l'absorption aux points extrêmes . . . . .	28
3.4.3	Etude de certains cas particuliers . . . . .	30
3.5	Conclusion . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Résolution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire</b>	<b>33</b>
4.1	Solution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire par l'ansatz de la transfor- mation intégrale . . . . .	33
4.1.1	Rappels sur la Transformation de Laplace . . . . .	34
4.1.2	Résolution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire par la transfor- mation de Laplace . . . . .	35
4.1.3	Solution sous forme de série . . . . .	38
4.2	Solution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire par la méthode de sépara- tion des variables . . . . .	40
4.2.1	Critiques sur la méthode de la transformation intégrale . . . . .	40
4.2.2	Séparation des variables de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire . . .	41
4.3	Conclusion . . . . .	43
<b>A</b>	<b>Fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur de Fokker-Planck à co- efficients dépendants de l'espace</b>	<b>44</b>
A.1	Equation aux valeurs propres de l'opérateur de Fokker-Planck . . . . .	44
A.2	Conditions aux limites . . . . .	45
A.3	Hermiticité de l'opérateur de Fokker-Planck . . . . .	46
A.4	Solution de l'équation aux valeurs propres . . . . .	48

# Chapitre 1

## Introduction

Les processus stochastiques sont des phénomènes qui sont rencontrés quotidiennement dans notre vie courante et pour cela leur étude quantitative n'a cessé de focaliser l'intérêt des scientifiques de différentes disciplines.

De nos jours, l'étude théorique des processus stochastiques fait partie intégrante de la statistique mathématique qui est à son tour la frontière de plusieurs disciplines comme la physique, la chimie, la biologie etc... Le but principal des études théoriques des processus stochastiques est la modélisation du phénomène à partir des observations expérimentales ou des résultats numériques. On cherche donc à décrire la loi d'évolution du processus à travers la fonction de distribution exprimant la densité de probabilité de l'évènement à un instant  $t$ .

Les premières études théoriques des lois d'évolution des distributions avaient été menées à partir de l'équation de Fokker-Planck [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Cette équation est obtenue de l'équation maîtresse dans le cas où l'évolution dans le temps de la fonction de distribution peut être modélée par une équation de Langevin [8, 9, 10, 11, 12]. Autrement dit, le processus peut être vu comme une diffusion normale en présence éventuellement de forces extérieures.

Depuis quelques temps, l'étude expérimentale de certains phénomènes stochastiques a révélée une anomalie dans leurs densités de probabilité qui se manifeste surtout dans le comportement de l'écart quadratique moyen, qui n'est plus une fonction linéaire du temps [13, 14, 15, 16, 17]. Cette observation a suscité la curiosité des scientifiques et notamment des théoriciens dans le but d'établir l'équation d'évolution correspondante et obtenir sa solution [16, 18, 19, 20, 21, 22].

Les travaux sont diversifiés dans ce domaine mais les plus intéressants, à notre avis, sont ceux

qui essaient d'obtenir cette nouvelle équation toujours à partir de l'équation maîtresse, mais avec des hypothèses nouvelles notamment en affectant une mémoire au processus [23, 24, 25, 26]. L'équation obtenue est aussi du type Fokker-Planck dont la dérivée partielle par rapport au temps est remplacée par une dérivée fractionnaire et est appelée équation de Fokker-Planck fractionnaire.

Les techniques de résolution de cette nouvelle équation sont aussi diversifiées et nécessitent parfois l'introduction de nouveaux ansatz et procédés bien adaptés, qui ne s'appliquent pas dans la résolution de l'équation de Fokker-Planck standard [18, 19, 20, 21, 22].

Le travail de ce mémoire rentre dans le cadre de la résolution des équations de Fokker-Planck standard et fractionnaire. Nous visons par cette contribution deux objectifs essentiels. Le premier objectif est d'enrichir la littérature existante par la présentation de deux techniques de résolution d'une équation de Fokker-Planck standard dont les coefficients sont des fonctions non familières de l'espace et du temps. Le deuxième est de discuter surtout les défauts mathématiques d'un ansatz formulé dans la littérature pour résoudre une équation de Fokker-Planck fractionnaire et de présenter parallèlement une nouvelle méthode plus simple, mathématiquement rigoureuse.

Les travaux originaux, présentés dans ce mémoire, sont donc regroupés dans les chapitres 3 et 4.

Dans le chapitre 3, nous présentons deux méthodes pour résoudre une équation de Fokker-Planck standard très intéressante puisqu'elle contient comme cas particuliers les processus de *Wiener* et d'*Ornstein-Uhlenbeck*. La première méthode consiste à utiliser les techniques du groupe de Lie  $SU(1,1)$  directement à partir de l'opérateur de Fokker-Planck de départ. Les différentes étapes de calcul sont alors soigneusement présentées et discutées. L'autre méthode alternative que nous présentons consiste tout d'abord à effectuer quelques transformations sur l'équation de départ pour la ramener à une nouvelle équation équivalente mais dont l'opérateur de Fokker-Planck ne dépend pas explicitement du temps. A partir de là, nous procédons par la méthode de séparation des variables et nous montrons que nous obtenons le même résultat. Nous discutons enfin, d'un point de vu physique, les différentes solutions obtenus et montrons comment nous pouvons obtenir les résultats des processus de *Wiener* et d'*Ornstein-Uhlenbeck* comme de simples cas particuliers.

Dans le chapitre 4, nous présentons tout d'abord la méthode de résolution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire basée sur l'ansatz de la transformation intégrale. L'originalité dans cette présentation est qu'elle est faite dans un cadre général, applicable à tout les opérateurs de Fokker-Planck sans exception. Notons que dans la littérature on ne trouve que la présentation qui s'occupe de la résolution, par cette technique, de l'opérateur de Fokker-Planck relatif au processus particulier d'*Ornstein-Uhlenbeck* [27]. Nous discutons surtout quelques défauts mathématiques de cette méthode qui la rende mathématiquement non rigoureuse. Nous présentons ensuite, toujours dans un cadre général, une méthode alternative basée sur la séparation des variables et nous montrons comment obtenir la solution précédente par une approche plus simple et rigoureuse.

Le travail contient aussi une présentation pas trop exhaustive sur les diffusions normale et anormale, qui est présentée dans le chapitre 2, et un appendice sur les fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur de Fokker-Planck dans un cadre général.

## Chapitre 2

# Quelques rappels sur les diffusions normale et anormale

### 2.1 Introduction

Les phénomènes stochastiques en général et la diffusion en particulier ont été largement étudiés autant sur le plan expérimental que théorique [1]. Les premières études de la diffusion ont commencé avec le mouvement brownien sur la base du modèle probabiliste de la marche aléatoire, proposé par *A. Einstein*. Cependant, le premier modèle théorique basé sur des considérations purement statistiques fut introduit par *P. Langevin* [3], qui a introduit une équation différentielle du premier ordre pour la vitesse de la particule Brownienne contenant un terme stochastique. Il s'est avéré plus tard que cette équation est à la base de tous les processus stochastiques sans mémoires, dits aussi Markoviens [1, 2].

### 2.2 Processus Markovien et équation de Fokker-Planck

Une des caractéristiques fondamentales des processus Markoviens est que leur densité de probabilité,  $P(x, t)$ , satisfait la fameuse équation maîtresse, qui est donnée dans le cas simple d'une variable aléatoire, par

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \int dy [W_t(y, x)P(y, t) - W_t(x, y)P(x, t)], \quad (2.1)$$

où  $W_t(y, x)$  est le taux de transition entre  $x$  et  $y$ . On établit que, de façon générale, cette équation intégrale se réduit à l'équation différentielle de Kramers-Moyal, donnée par

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \mathcal{K}P(x, t), \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{K}$  désigne l'opérateur de Kramers-Moyal, donné par

$$\mathcal{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x, t), \quad (2.3)$$

et  $D^{(n)}(x, t)$  désigne le moment d'ordre  $n$ .

Cependant, dans la majorité des phénomènes stochastiques et notamment dans les phénomènes de diffusion, les moments d'ordre  $m \geq 3$  s'annulent identiquement sinon ils peuvent être négligés de sorte que l'équation de Kramers-Moyal se réduit à la fameuse équation de Fokker-Planck, donnée par

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}P(x, t), \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{L}_{FP}$  désigne l'opérateur de Fokker-Planck

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x}D^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{(2)}(x, t). \quad (2.5)$$

Les coefficients  $D^{(1)}(x, t)$  et  $D^{(2)}(x, t)$  sont des fonctions de l'espace et du temps. Le moment d'ordre un caractérise l'effet des forces extérieures et il est appelé coefficient du mouvement, "drift". Il peut prendre des valeurs positives ou négatives en fonction de  $x$  et  $t$  selon la nature des forces extérieures. Par contre, le moment d'ordre deux ne peut prendre que des valeurs positives quand il n'est pas nul. Il caractérise la diffusivité du milieu et il est appelé coefficient de diffusion. On dit dans la littérature que les processus Markoviens sont des processus de diffusion normale.



## 2.3 Exemples simples

### 2.3.1 Processus de *Wiener* et diffusion *normale*

Le cas le plus simple est celui où  $D^{(1)}(x, t) = 0$  et  $D^{(2)}(x, t) = D$ , une constante. Ce processus est connu sous le nom de processus de *Wiener*. Il décrit une diffusion simple (sans influence de l'extérieur), dite *normale*. L'équation correspondante est facilement résolue pour donner la densité de probabilité sous la forme [1]

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}\right), \quad (2.6)$$

où  $x_0$  est la valeur de  $x$  à l'instant initial  $t = 0$ , correspondant à  $P(x, t) = \delta(x - x_0)$ . Cette distribution ne possède pas d'état stationnaire. En effet,  $P(x, \infty) = 0$  et par conséquent on n'a aucune information sur la valeur de la variable aléatoire car toutes les valeurs ont la même probabilité nulle. Par ailleurs, un calcul simple donne la valeur moyenne de  $x$  et l'écart quadratique moyen sous les formes

$$\langle x \rangle (t) = x_0, \quad (2.7)$$

et

$$\langle (x - x_0)^2 \rangle (t) = 2Dt. \quad (2.8)$$

Cette dernière relation est souvent considérée comme une caractéristique fondamentale de la diffusion *normale*, qui montre que la variance croît linéairement avec le temps, en concordance avec les observations expérimentales dans la plupart des diffusions.

### 2.3.2 Processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*

Un autre processus important est celui où le coefficient de diffusion est une constante;  $D^{(2)}(x, t) = D$ , et le coefficient de mouvement varie linéairement avec  $x$ ;  $D^{(1)}(x, t) = -\gamma x$ , avec  $\gamma > 0$ . Ce processus décrit aussi une diffusion *normale* mais avec influence de l'environnement extérieur. Il est connu sous le nom de processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* [27]. Son importance réside dans le fait que la densité de probabilité correspondante est Gaussienne aussi et en plus

elle possède un état stationnaire. En effet, elle est donnée par [1]

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1 - e^{-2\gamma t})}} \exp \left[ -\frac{\gamma(x - e^{-\gamma t}x_0)^2}{2D(1 - e^{-2\gamma t})} \right]. \quad (2.9)$$

La solution stationnaire  $P_{\text{stat}}(x)$  est obtenue dans la limite  $t \rightarrow \infty$ . On obtient

$$P_{\text{stat}}(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} \exp \left( -\frac{\gamma x^2}{2D} \right), \quad (2.10)$$

qui est indépendante de la position initiale. Par ailleurs, la valeur moyenne et l'écart quadratique sont donnés par

$$\langle x \rangle (t) = e^{-\gamma t} x_0, \quad (2.11)$$

et

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{D}{\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}). \quad (2.12)$$

Dans ce cas, l'influence de l'extérieur se manifeste par un changement drastique de l'évolution dans le temps de la valeur moyenne et de la variance comparativement avec ceux du processus de *Wiener*. Par exemple, la variance est une fonction décroissante dans le temps et tend vers une constante dans l'état stationnaire. Ceci peut être interprété en disant que l'effet de la force extérieure, qui est une force de rappel dans ce cas, réduit l'effet de la diffusion.

En général, les coefficients de mouvement et de diffusion sont des fonctions de l'espace et du temps, ce qui rend la résolution de l'équation de Fokker-Planck relativement difficile dans la plupart des processus connus en physique, en chimie ou même en biologie et en finance. Dans des cas pareils, on se contente souvent de chercher des solutions approchées en adoptant certaines considérations simplificatrices. Néanmoins il existe aussi des modèles plus ou moins généraux qui sont exactement solubles.

## 2.4 Processus non Markoviens et équation de Fokker-Planck fractionnaire

### 2.4.1 Diffusion *anormale*

Il est maintenant bien établi expérimentalement qu'il existe certains phénomènes de diffusion simple (sans influence de l'environnement extérieur) qui présentent des anomalies [13, 14, 15, 16, 17, 18] et la diffusion dans ce cas là est dite *anormale*. La caractéristique fondamentale de ce type de diffusions est que la variance n'évolue plus linéairement dans le temps. En effet, l'expérience montre que [14]

$$\langle (x - x_0)^2 \rangle (t) = D_\gamma t^\gamma, \quad (2.13)$$

avec  $\gamma \neq 1$ , et  $D_\gamma$  est le coefficient de diffusion généralisé qui a une dimension  $\text{cm}^2 \text{sec}^{-\gamma}$ .

Lorsque  $\gamma > 1$ , on parle de super-diffusion ou diffusion renforcée et pour  $\gamma < 1$ , on a ce qu'on appelle une sous-diffusion ou diffusion réduite. Ces processus sont aussi souvent non Gaussiens, c'est-à-dire que la densité de probabilité correspondante n'est pas Gaussienne.

Il est bien établi que ces processus sont non Markoviens, c'est-à-dire qu'ils sont décrits par une équation maîtresse généralisée dont le noyau possède un effet de mémoire

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \int dy \int_0^t dt' W(y, x; t - t') P(y, t'). \quad (2.14)$$

### 2.4.2 Equation de diffusion anormale

Jusqu'à maintenant, on n'a pas encore dérivé d'une manière claire une équation différentielle du type Kramers-Moyal généralisée qui soit équivalente à l'équation maîtresse généralisée (2.14). Cependant, sous certaines conditions, on a suggéré que la diffusion simple anormale peut être décrite par une équation généralisée de la forme [23, 24, 25, 26]

$$\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} P(x, t) = D_{\nu, \mu} \frac{\partial^{2\mu}}{\partial x^{2\mu}} P(x, t), \quad (2.15)$$

où  $\nu$  et  $\mu$  sont des nombres réels,  $D_{\nu, \mu}$  est le coefficient de diffusion généralisé et les opérateurs différentiels dans les membres de gauche et de droite de l'équation sont les opérateurs de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville. Dans la limite  $\nu = \mu = 1$ , on est sensé retrouver la

diffusion normale. Ainsi, dans cette approche, les dérivations ordinaires sur le temps et l'espace dans l'équation de diffusion usuelle sont remplacées par des dérivations fractionnaires. Cependant, il n'existe pas encore de techniques analytiques simples pour la résolution de l'équation (2.15) dans le cas général avec  $\nu \neq 1$  et  $\mu \neq 1$  simultanément [28]. Néanmoins, dans le cas où  $\nu \neq 1$  et  $\mu = 1$ , il est possible de donner la solution de (2.15) sous forme compacte en utilisant la représentation intégrale de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville. En fait, on peut même résoudre des équations plus compliquées comme nous le verrons dans le chapitre 4.

L'interprétation microscopique de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire a été donnée pour la première fois dans les travaux de Scher-Montroll [13] et ceux de Scher-Lax [29]. L'idée est de considérer le modèle de la marche en admettant que le temps d'arrêt entre les sauts est lui-même aléatoire et distribué suivant une loi continue "continuum time random walk" (CTRW) [30].

## Chapitre 3

# Résolution d'une équation de Fokker-Planck standard à coefficients dépendants de l'espace-temps

### 3.1 Introduction

Le but du travail de ce chapitre est de présenter deux techniques pour résoudre l'équation de Fokker-Planck usuelle à une dimension lorsque les coefficients de mouvement et de diffusion sont des fonctions de l'espace et du temps. Nous nous intéressons spécialement au cas où le coefficient de diffusion est une fonction de la forme  $D^{(2)}(x, t) = a(t) \exp(-\alpha x)$  et le coefficient de mouvement dépend de l'espace et du temps par l'intermédiaire de deux termes ;  $D^{(1)}(x, t) = b(t) + \delta a(t) \exp(-\alpha x)$ , avec  $a(t) > 0$ ,  $b(t)$  est une fonction arbitraire du temps et  $\alpha$  et  $\delta$  sont des constantes à priori arbitraires. Par ailleurs nous admettons que la variable aléatoire  $x$  peut prendre toutes les valeurs de l'axe réel.

A notre connaissance, une telle équation n'a jamais été étudiée dans la littérature. Cependant nous estimons que sa solution aura certainement un intérêt dans l'étude de certains phénomènes stochastiques, que ce soit en physique, en chimie ou même en biologie. Par ailleurs, le fait que

$D^{(1)}(x, t)$  et  $D^{(2)}(x, t)$  dépendent de plusieurs paramètres, il sera possible d'en déduire les solutions de certaines équations de Fokker-Planck particulières dans des cas limites, ou à défaut leurs solutions approchées.

L'équation s'écrit donc

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \left[ a(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\alpha x} - \frac{\partial}{\partial x} (b(t) + \delta a(t) e^{-\alpha x}) \right] P(x, t), \text{ pour } x \in ]-\infty, +\infty[. \quad (3.1)$$

Nous allons suivre deux démarches différentes afin de donner toutes les solutions exactes de cette équation. La première est basée sur la technique de l'algèbre de Lie  $su(1, 1)$  [31, 32]. L'autre méthode consiste à transformer l'équation (3.1) en une équation séparable au moyen d'une succession de transformations similaires et ponctuelles [31, 32]. L'équation finale sera donc résolue par la technique de séparation des variables d'espace et du temps. Nous discutons enfin le comportement des différentes solutions, vis-à-vis de la diffusion avec réflexion ou diffusion avec absorption aux points extrêmes.

## 3.2 Solution par l'approche du groupe de Lie $SU(1, 1)$

### 3.2.1 Choix des générateurs

Dans l'approche du groupe de Lie  $SU(1, 1)$ , appliqué à la résolution des équations de Fokker-Planck [31, 32, 33, 34, 35, 36], la première étape est le choix de l'ensemble des générateurs  $J_+$ ,  $J_-$  et  $J_0$  du groupe tel que l'opérateur de Fokker-Planck s'écrive comme une combinaison linéaire. Une fois ceux-ci sont identifiés la procédure est connue et s'applique de la même manière dans tous les problèmes [31, 32]. Cependant la détermination des générateurs du groupe, qui forment l'opérateur de Fokker-Planck, est l'étape la plus délicate car il n'existe à priori aucune recette à suivre mais il faut procéder le plus souvent par tâtonnement. En outre, comme il peut y exister une infinité d'ensembles de générateurs correspondant à chaque opérateur de Fokker-Planck, on est aussi confronté au problème du choix d'un ensemble adéquat.

En ce qui concerne notre problème, nous avons opté pour le choix suivant :

$$J_+ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\alpha x} - \delta \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha x},$$

$$J_- = \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x}, \quad (3.2)$$

et

$$J_0 = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\delta}{\alpha} \right). \quad (3.3)$$

Il est aisé de vérifier que ces opérateurs satisfont les relations de l'algèbre de Lie  $su(1, 1)$ , données par

$$[J_+, J_-] = -2J_0, \quad [J_0, J_+] = J_+ \quad \text{et} \quad [J_0, J_-] = -J_-. \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Forme algébrique de l'équation

L'équation de Fokker-Planck proposée s'écrit en fonction de ces opérateurs sous la forme

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP}(x, t) P(x, t), \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{L}_{FP}(x, t)$  est l'opérateur de Fokker-Planck, donné par

$$\mathcal{L}_{FP}(x, t) = a(t) J_+ + \alpha b(t) J_0 - \frac{b(t)}{2} (\alpha + \delta), \quad (3.6)$$

qui dépend seulement de  $J_+$  et  $J_0$ .

Le but est alors de chercher le propagateur correspondant à l'opérateur de Fokker-Planck. Autrement dit, on voudrait écrire la solution de l'équation sous la forme intégrale suivante :

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy G(x, t; y, 0) P(y, 0), \quad (3.7)$$

où le propagateur  $G(x, t; y, 0)$  est une fonction explicite des variables  $x, y$  et  $t$ .

### 3.2.3 Elimination de l'opérateur $J_0$ et réduction de l'équation à une forme plus simple

La résolution exacte des équations du type Fokker-Planck, telle que l'équation (3.5) avec l'opérateur de Fokker-Planck (3.6), passe souvent par une succession de transformations pour la réduire enfin à une équation plus simple, relative à une nouvelle fonction. Dans la démarche que nous voulons suivre dans cette section, les transformations adéquates sont souvent des transformations similaires, c'est-à-dire des transformations pour lesquelles la nouvelle fonction garde à priori les mêmes propriétés. Ici la propriété fondamentale de la fonction  $P(x, t)$  est qu'elle doit représenter une distribution. Ceci veut dire qu'elle doit être strictement positive et dont l'intégrale par rapport à  $x$  sur tout intervalle du domaine de définition est nécessairement une fonction du temps bornée. Autrement dit

$$0 \leq \int_a^b dx P(x, t) \leq 1, \quad \forall [a, b] \in ]-\infty, +\infty[. \quad (3.8)$$

Commençons tout d'abord par une transformation similaire définie par

$$P(x, t) = e^{-\frac{\bar{b}}{2}(\alpha+\delta)} e^{\alpha\bar{b}J_0} Q(x, t), \quad (3.9)$$

avec

$$\bar{b}(t) = \int_0^t d\tau b(\tau), \quad (3.10)$$

qui garantit que les deux fonctions  $P(x, t)$  et  $Q(x, t)$  coïncident à l'instant initial,

$$P(x, 0) = Q(x, 0). \quad (3.11)$$

En insérant (3.9) dans (3.5), il vient que la nouvelle fonction  $Q(x, t)$  satisfait l'équation donnée par

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = a(t) e^{-\alpha\bar{b}J_0} J_+ e^{\alpha\bar{b}J_0} Q(x, t). \quad (3.12)$$

En utilisant les propriétés de l'algèbre, données par (3.4), cette équation se réduit à

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = c(t) J_+ Q(x, t), \quad (3.13)$$



avec

$$c(t) = a(t) \exp(-\alpha \bar{b}(t)), \quad (3.14)$$

qui est une fonction strictement positive.

Cette nouvelle équation (3.13), dont l'opérateur de Fokker-Planck est réduit à un seul générateur du groupe, en l'occurrence  $J_+$ , est évidemment plus simple à résoudre. Une fois la résolution est achevée, on procédera par la transformation similaire inverse pour obtenir la solution de l'équation de départ.

Avant de procéder à la résolution de (3.13), vérifions que la nouvelle fonction  $Q(x, t)$  est aussi une fonction de distribution. En effet, en explicitant  $J_0$  dans (3.9) cette dernière s'écrit

$$P(x, t) = e^{-\bar{b} \frac{\partial}{\partial x}} Q(x, t) = Q(x - \bar{b}, t), \quad (3.15)$$

où l'on a utilisé les propriétés de l'opérateur de translation  $e^{-\bar{b} \frac{\partial}{\partial x}}$ . Puisqu'à tout instant la fonction  $Q(x, t)$  est obtenue à partir de  $P(x, t)$  par une simple translation, alors les deux fonctions ont la même allure et par conséquent la propriété (3.8) sera aussi vérifiée pour la fonction  $Q(x, t)$ . Par conséquent cette dernière est elle aussi une fonction de distribution.

### 3.2.4 Recherche du propagateur de la solution sous forme formelle

Afin de déterminer la densité de probabilité  $Q(x, t)$ , solution de l'équation (3.13), on a besoin de connaître les conditions initiales, c'est-à-dire la solution à l'instant initial  $Q(y, 0)$ . Cependant, il est plus élégant de déterminer plutôt le propagateur de la solution, dénoté  $G(x, t; y, 0)$ , qui exprime la densité de probabilité de transition du point  $y$  à l'instant initial  $t = 0$  au point  $x$  à l'instant  $t$ . A partir de ce propagateur on peut obtenir la solution  $Q(x, t)$  conditionnée par  $Q(y, 0)$ .

La solution de (3.13) peut être écrite de façon formelle sous la forme

$$Q(x, t) = e^{\bar{c} J_+} Q(x, 0), \quad (3.16)$$

avec

$$\bar{c}(t) = \int_0^t d\tau c(\tau). \quad (3.17)$$

En reportant (3.16) dans (3.9) et tenant compte de (3.11), on obtient la solution formelle de l'équation (3.5) sous la forme

$$P(x, t) = e^{-\frac{\bar{b}}{2}(\alpha+\delta)} e^{\alpha\bar{b}J_0} e^{\bar{c}J_+} P(x, 0). \quad (3.18)$$

En se servant de la fonction de distribution de Dirac, on peut mettre le membre droite dans (3.5) sous une forme intégrale équivalent comme :

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{\bar{b}}{2}(\alpha+\delta)} e^{\alpha\bar{b}J_0} e^{\bar{c}J_+} \delta(x-y) P(y, 0). \quad (3.19)$$

En identifiant le membre de droite de (3.19) avec celui de (3.7), on obtient le propagateur sous la forme formelle suivante :

$$G(x, t; y, 0) = e^{-\frac{\bar{b}}{2}(\alpha+\delta)} e^{\alpha\bar{b}J_0} e^{\bar{c}J_+} \delta(x-y). \quad (3.20)$$

En utilisant la propriété, bien connue, de la fonction de Dirac,

$$\delta(x-y)g(x) = \delta(x-y)g(y), \quad (3.21)$$

valide pour toute fonction régulière  $g$ , on peut récrire (3.20) sous une forme plus commode pour la suite des calculs [31, 32],

$$G(x, t; y, 0) = e^{-\frac{\bar{b}}{2}(\alpha+\delta)} e^{\alpha\bar{b}J_0} e^{\bar{c}J_+} \delta(x-y) \frac{g(x)}{g(y)}. \quad (3.22)$$

En fait, la commodité de l'introduction de la fonction  $g$  dans le membre de droite de (3.22) a, comme on va le voir, un double avantage. Du point de vue mathématique, il se trouve qu'avec un choix judicieux de cette fonction, on peut rendre l'évaluation du membre de droite de (3.22) plus simple. Physiquement, les différents choix de  $g$  correspondent à des conditions aux limites différentes.

### 3.2.5 Ecriture du propagateur sous forme explicite

Afin d'expliciter le membre de droite de (3.22) nous allons suivre une démarche, désormais connue [31, 32], qui consiste à écrire la fonction de Dirac  $\delta(x - y)$  comme une superposition de fonctionnelles de la valeur de l'opérateur  $J_-$  au point  $x$ . Pour ce faire, nous utilisons la relation bien connue

$$\delta(F(x)) = \sum_i \frac{1}{|F'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (3.23)$$

où les  $x_i$  désignent les zéros de la fonction  $F(x)$ , et  $F'(x_i)$  désigne sa dérivée au point  $x_i$ .

En ce qui nous concerne, nous choisissons la fonction  $F(x)$  coïncidant avec la différence de la valeur de l'opérateur  $J_-$  aux points  $x$  et  $y$ . Autrement dit, on prend

$$F(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} - \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}. \quad (3.24)$$

Puisque  $F(x)$  s'annule pour la seule valeur  $x = y$  et  $|F'(y)| = \frac{1}{|\alpha|} e^{\alpha y}$ , on obtient après réarrangement des termes

$$\delta(x - y) = \frac{1}{|\alpha|} e^{\alpha y} \delta\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} - \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right). \quad (3.25)$$

En utilisant la décomposition spectrale de la fonction de Dirac, on peut écrire (3.25) comme

$$\delta(x - y) = \frac{1}{2\pi |\alpha|} e^{\alpha y} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left[ik \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} - \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right)\right]. \quad (3.26)$$

En reportant (3.26) dans (3.22), le propagateur sera donné par

$$G(x, t; y, 0) = \frac{e^{-\frac{\bar{t}}{2}(\alpha+\delta)}}{2\pi |\alpha|} \frac{e^{\alpha y}}{g(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-ik \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right) e^{\alpha \bar{b} J_0} e^{\bar{c} J_+} e^{ik J_-} g(x), \quad (3.27)$$

où l'on a remplacé la valeur de l'opérateur  $J_-$  au point  $x$  par l'opérateur lui-même car  $g(x)$  peut être considéré comme une fonction propre.

Dans cette dernière expression, l'opérateur  $e^{\bar{c} J_+}$  n'agit pas directement sur la fonction  $g(x)$ , mais plutôt sur le produit  $e^{ik J_-} g(x)$  dont l'évaluation s'avère très compliquée quel que soit le choix de la fonction  $g(x)$ . L'astuce est de réarranger l'ordre des fonctionnelles des générateurs

du groupe de Lie pour amener la fonctionnelle de  $J_+$  à droite, de telle sorte qu'elle agisse directement sur  $g(x)$ . Une fois ceci est réalisé, il suffit ensuite de choisir  $g(x)$  comme une fonction propre de  $J_+$  et, par conséquent, remplacer ce dernier par la valeur propre correspondante. Pour ce faire, on utilise la relation suivante [31] :

$$e^{\bar{c}J_+}e^{ikJ_-} \equiv e^{AJ_-}e^{BJ_0}e^{CJ_+} \quad (3.28)$$

avec

$$A = \frac{ik}{1 - ik\bar{c}} \quad \text{et} \quad B = \ln(1 - ik\bar{c})^2 \quad \text{et} \quad C = \bar{c} \left( 1 - \frac{k^2\bar{c}^2}{3} + ik\bar{c} \right). \quad (3.29)$$

En ce qui concerne la fonction  $g(x)$ , en principe n'importe quelle fonction propre peut être utilisée et on devrait arriver au même résultat. Cependant, pour rendre les choses encore plus simples, on choisira la fonction propre correspondante à la valeur propre nulle. Celle-ci devra donc satisfaire l'équation

$$J_+g(x) = 0, \quad (3.30)$$

dont les solutions sont

$$g_\nu(x) = e^{(\alpha+\nu)x} \quad \text{avec} \quad \nu = 0 \quad \text{ou} \quad \nu = \delta. \quad (3.31)$$

En reportant (3.28), (3.29) et (3.31) dans (3.22), et indexant le propagateur par le paramètre  $\nu$ , on obtient

$$\begin{aligned} G_\nu(x, t; y, 0) &= \frac{e^{-\frac{\bar{b}}{2}(\alpha+\delta)}}{2\pi|\alpha|} \frac{e^{\alpha y}}{g_\nu(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-ik \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right) e^{\alpha\bar{b}J_0} e^{AJ_-} e^{BJ_0} g_\nu(x) \\ &= \frac{e^{-\frac{\bar{b}}{2}(\alpha+\delta)} e^{-\nu y}}{2\pi|\alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-ik \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right) e^{\alpha\bar{b}J_0} e^{AJ_-} \frac{e^{(\alpha+\nu)x}}{(1 - ik\bar{c})^{1 + \frac{2\nu-\delta}{\alpha}}} \\ &= \frac{e^{-\nu y} e^{(\alpha+\nu)(x-\bar{b})}}{2\pi|\alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-ik \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right) \frac{\exp\left(\frac{ik}{1-ik\bar{c}} \frac{e^{\alpha(x-\bar{b})}}{\alpha^2}\right)}{(1 - ik\bar{c})^{1 + \frac{2\nu-\delta}{\alpha}}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où l'on a explicité  $J_0$  et  $g_\nu(x)$ , et utilisé la propriété de l'opérateur de translation  $e^{\rho \frac{\partial}{\partial x}}$ ,

$$e^{\rho \frac{\partial}{\partial x}} \phi(x) = \phi(x + \rho), \quad (3.33)$$

qui est valide pour toute fonction infiniment dérivable, ce qui est le cas pour  $e^{ikJ_-} g_\nu(x)$ .

A ce stade, il semblerait que nous allons obtenir deux propagateurs distincts pour le même opérateur de Fokker-Planck, ce qui est évidemment absurde. Nous allons voir en fait qu'il n'en est rien de ça puisque chaque propagateur correspondra à une certaine contrainte sur les paramètres du problème et par conséquent à des conditions aux limites différentes. Autrement dit, les deux propagateurs décriront deux situations physiques distinctes.

En utilisant l'identité

$$\frac{ik}{1 - ik\bar{c}} \equiv \frac{1}{\bar{c}} \left( \frac{1}{1 - ik\bar{c}} - 1 \right), \quad (3.34)$$

et le développement en série de la fonction exponentielle, (3.32) devient

$$\begin{aligned} G_\nu(x, t; y, 0) &= \frac{e^{-\nu y} e^{(\alpha+\nu)(x-\bar{b})}}{2\pi |\alpha|} \exp\left(-\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-ik \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right) \frac{\exp\left(\frac{1}{1-ik\bar{c}} \frac{e^{\alpha(x-\bar{b})}}{\bar{c}\alpha^2}\right)}{(1-ik\bar{c})^{1+\frac{2\nu-\delta}{\alpha}}} \\ &= \frac{e^{-\nu y} e^{(\alpha+\nu)(x-\bar{b})}}{2\pi |\alpha|} \exp\left(-\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^n \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp\left(-ik \frac{e^{\alpha y}}{\alpha^2}\right) \frac{1}{(1-ik\bar{c})^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n+1}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

où l'on a admis la commutativité entre l'intégration par rapport à  $k$  et la sommation sur  $n$ .

En effectuant le changement de variable

$$1 - ik\bar{c} = Z, \quad (3.36)$$

l'intégrale sur  $k$  dans (3.35), qui sera dénoté par  $I$ , s'écrit

$$I = \frac{2\pi}{\bar{c}} \exp\left(-\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} dZ \exp\left(\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2} Z\right) \frac{1}{Z^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n+1}}, \quad (3.37)$$

où l'intégrale sur  $Z$  n'est autre que la transformée inverse de Laplace relative à la fonction

$$\frac{1}{Z^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n+1}}, \text{ dont l'argument est } \frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}.$$

En utilisant la définition de la fonction  $\Gamma$  d'Euler

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{Z^\gamma} = \int_0^\infty dt e^{-Zt} t^{\gamma-1}, \quad (3.38)$$

pour  $\text{Re } Z > 0$  et  $\text{Re } \gamma > 0$ , on obtient

$$I = \frac{2\pi}{\bar{c}} \exp\left(-\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \frac{\left(\frac{e^{\alpha y}}{2\bar{c}\alpha^2}\right)^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n}}{\Gamma\left(\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n+1\right)}, \quad \text{pour } \frac{2\nu-\delta}{\alpha} > -1. \quad (3.39)$$

On obtient donc deux solutions distinctes pour chacune des deux valeurs de  $\nu$ , données par (3.31). Autrement dit, on obtient les solutions de l'équation de Fokker-Planck (3.5) dans les deux cas de figure correspondants aux contraintes  $\frac{\delta}{\alpha} < 1$  et  $\frac{\delta}{\alpha} > -1$ .

D'où

$$\begin{aligned} G_\nu(x, t; y, 0) &= \frac{e^{-\nu y} e^{(\alpha+\nu)(x-\bar{b})}}{|\alpha| \bar{c}} \exp\left(-\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})} + e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \\ &\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n+1\right)} \left(\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^n \left(\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Cette dernière expression peut être mise sous une forme plus compacte en remarquant que la série qui y figure peut être arrangée pour l'identifier avec celle de la fonction de Bessel modifiée. En effet, la fonction de Bessel d'argument imaginaire et d'indice  $\nu$  s'écrit sous forme de série comme [37, 38, 39]

$$\begin{aligned} I_\nu(X) &= e^{-i\pi\frac{\nu}{2}} J_\nu(iX) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{X}{2}\right)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n+\nu+1)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Avec cette remarque, on peut donc récrire la série figurant dans (3.40) comme

$$\left(\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^n \left(\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+n} = e^{-\frac{1}{2}(2\nu-\delta)(x-\bar{b})} e^{\frac{1}{2}(2\nu-\delta)y} \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}(x-\bar{b})} e^{\frac{\alpha}{2}y}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+2n}. \quad (3.42)$$

En reportant cette dernière relation dans (3.40), on obtient pour  $\frac{2\nu-\delta}{\alpha} > -1$

$$\begin{aligned}
G_\nu(x, t; y, 0) &= \frac{e^{(\alpha+\frac{\delta}{2})(x-\bar{b})}e^{-\frac{\delta}{2}y}}{|\alpha|\bar{c}} \exp\left(-\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})} + e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \\
&\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\nu-\delta}{\alpha} + n + 1\right)} \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{2}(x-\bar{b})}e^{\frac{\alpha}{2}y}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}+2n} \\
&= \frac{e^{(\alpha+\frac{\delta}{2})(x-\bar{b})}e^{-\frac{\delta}{2}y}}{|\alpha|\bar{c}} \exp\left(-\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})} + e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) I_{\frac{2\nu-\delta}{\alpha}}\left(2\frac{e^{-\frac{\alpha\bar{b}}{2}}}{\bar{c}\alpha^2}e^{\frac{\alpha}{2}x}e^{\frac{\alpha}{2}y}\right). \quad (3.43)
\end{aligned}$$

En posant

$$\mu = \frac{\delta}{\alpha}, \quad (3.44)$$

on peut récrire les propagateurs (3.43) en fonction de  $\mu$  sous la forme équivalente suivante :

$$G_{\pm\mu}(x, t; y, 0) = \frac{e^{\alpha(1+\frac{\mu}{2})(x-\bar{b})}e^{-\frac{\alpha\mu}{2}y}}{|\alpha|\bar{c}} \exp\left(-\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})} + e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) I_{\pm\mu}\left(2\frac{e^{-\frac{\alpha\bar{b}}{2}}}{\bar{c}\alpha^2}e^{\frac{\alpha}{2}x}e^{\frac{\alpha}{2}y}\right), \quad (3.45)$$

pour  $\pm\mu > -1$ .

Ceci donc achève la résolution de l'équation de Fokker-Planck proposée par la méthode de l'algèbre de Lie. Nous obtenons deux solutions ;  $G_\mu(x, t; y, 0)$  valide pour  $\mu > -1$  et  $G_{-\mu}(x, t; y, 0)$  valide pour  $\mu < 1$ . Il est évident que les deux solutions ne coïncident que pour le cas particulier  $\mu = 0$ .

### 3.3 Solution par l'approche de séparation des variables

Nous allons maintenant chercher la solution de l'équation (3.13) en utilisant l'ansatz de séparation des variables du temps et de l'espace A. En effet, dans cette équation

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = c(t) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\alpha x} - \delta \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha x} \right\} Q(x, t), \quad (3.46)$$

on constate que le nouveau opérateur de Fokker-Planck

$$\mathcal{L}_{\text{FP}}(x, t) = c(t) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\alpha x} - \delta \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha x} \right\}, \quad (3.47)$$

est le produit d'une fonction du temps et d'un opérateur dépendant uniquement de la variable d'espace. Nous allons ainsi chercher la solution sous la forme d'un produit d'une fonction du temps  $h(t)$  seulement et d'une autre fonction de la variable  $x$  seulement  $\psi(x)$

$$Q(x, t) = h(t)\psi(x). \quad (3.48)$$

En reportant (3.48) dans (3.46) et divisant les deux membres de l'équation par  $h(t)\psi(x)$ , on obtient

$$\frac{1}{c(t)} \frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{1}{\psi(x)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-\alpha x} - \delta \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha x} \right) \psi(x). \quad (3.49)$$

Comme le membre de gauche dépend de  $t$  seulement et celui de droite ne dépend que de  $x$ , et puisque les deux variables sont indépendantes, l'égalité sera satisfaite si chaque membre est égal à la même constante. En posant cette constante égale  $-\lambda$ , on obtient deux équations différentielles :

$$h'(t) = -\lambda c(t)h(t), \quad (3.50)$$

et

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} e^{-\alpha x} - \delta \frac{d}{dx} e^{-\alpha x} \right) \psi(x) = -\lambda \psi(x). \quad (3.51)$$

Avant d'embarquer dans la résolution des équations (3.50) et (3.51), signalons que la solution que nous trouverons sera une solution particulière dépendante du paramètre  $\lambda$ . Pour plus de commodité, nous admettrons que  $\lambda$  prendra des valeurs continues et nous allons donc l'expliciter  $\lambda$  comme paramètre dans la solution, tel que

$$Q(x, t; \lambda) = h(t)\psi(x). \quad (3.52)$$

La solution générale sera donnée par une superposition des  $Q(x, t; \lambda)$ , sous la forme

$$Q(x, t) = \int d\lambda \rho(\lambda) Q(x, t; \lambda), \quad (3.53)$$

où  $\rho(\lambda)$  est une fonction poids qui sera sélectionnée en fonction des conditions aux limites qu'on impose à la solution physique recherchée et le domaine d'intégration est étendu à toutes les valeurs permises de  $\lambda$ .



En intégrant (3.50), on obtient aisément

$$h(t) = e^{-\lambda \bar{c}}, \quad (3.54)$$

où  $\bar{c}$  est le même que celui donné par (3.17) et l'on a choisit la constante d'intégration égale à un.

Puisque  $\bar{c}(t)$  est une fonction strictement positive, les seules valeurs permises pour le paramètre  $\lambda$  sont donc les valeurs positives, ( $\lambda \geq 0$ ). Cette restriction garantira que  $h(t)$  demeure une fonction finie pour toute valeur de  $t$ , ce qui est nécessaire pour que  $Q(x, t; \lambda)$  soit une fonction de distribution (voir 3.2.3 et A).

Afin de résoudre l'équation différentielle (3.51), nous allons procéder d'abord par des transformations ponctuelles pour la transformer en l'une des équations connues de la physique mathématique. Par ailleurs, connaissant déjà le résultat de la section précédente, on peut être guidé dans le choix des paramètres de la transformation en essayant d'obtenir une équation du type Bessel.

Pour ce faire considérons tout d'abord un simple changement de variable, défini par

$$y = e^{\frac{\alpha}{2}x} \geq 0 \text{ et } \psi(x) = \varphi(y). \quad (3.55)$$

Les relations entre les opérateurs de dérivation par rapport à l'ancienne variable et la nouvelle sont facilement déduites sous la forme

$$\frac{d}{dx} = \frac{\alpha}{2}y \frac{d}{dy} \text{ et } \frac{d^2}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left(y \frac{d}{dy} + y^2 \frac{d^2}{dy^2}\right). \quad (3.56)$$

L'équation (3.51) conduit donc à la nouvelle équation pour la fonction  $\varphi(y)$ , qui s'écrit

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \left(1 - \frac{2\delta}{\alpha}\right) \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \lambda \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\right) \frac{1}{y^2} \varphi(y) = 0. \quad (3.57)$$

Cette nouvelle équation, qui est complètement équivalente à la précédente, semble être plus familière puisqu'elle se rapproche de l'équation de Bessel. En effet, elle coïncide avec l'équation de Bessel d'argument nul pour le cas particulier avec  $\delta = 0$ . Pour achever le travail dans le cas

général, considérons maintenant la transformation définie par

$$\varphi(y) = y^{\mu+2}\phi(y), \quad (3.58)$$

où  $\mu$  est un paramètre qui sera identifié par la suite.

L'équation satisfaite par la nouvelle fonction  $\phi(y)$  sera facilement mise sous la forme

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} + \left( 1 + 2\mu - \frac{2\delta}{\alpha} \right) \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \lambda \left( \frac{2}{\alpha} \right)^2 + \frac{\mu \left( \mu - \frac{2\delta}{\alpha} \right)}{y^2} \right) \phi(y) = 0. \quad (3.59)$$

En choisissant

$$\mu = \frac{\delta}{\alpha}, \quad (3.60)$$

et posant

$$y = \frac{|\alpha|}{2\sqrt{\lambda}}z \text{ et } \phi(y) = \chi(z), \quad (3.61)$$

on obtient finalement

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + 1 - \frac{\mu^2}{z^2} \right) \chi(z) = 0, \quad (3.62)$$

qui est bien l'équation de Bessel d'indice  $\mu$  et  $> 0$ . Comme il est connu, cette équation possède deux solutions linéairement indépendantes, qui sont les fonctions de Bessel d'indices  $\mu$  et  $-\mu$ ,

$$\chi(z) = J_{\pm\mu}(z). \quad (3.63)$$

En combinant les relations (3.55), (3.58) et (3.61), on obtient la solution de l'équation (3.51) sous la forme

$$\psi(x) = e^{\frac{\alpha}{2}(\mu+2)x} J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right). \quad (3.64)$$

Par conséquent, pour chaque valeur du paramètre  $\lambda$ , il existe deux solutions particulières pour l'équation (3.46), qui seront dénotées  $Q_{\pm\mu}(x, t; \lambda)$  et données par

$$Q_{\pm\mu}(x, t; \lambda) = e^{-\lambda\bar{c}} e^{\frac{\alpha}{2}(\mu+2)x} J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right). \quad (3.65)$$

Pour chacune de ces solutions particulières correspondra une solution générale qu'on dénotera

aussi  $Q_{\pm\mu}(x, t)$  et qui sera donnée, d'après (3.53), par

$$Q_{\pm\mu}(x, t) = \int_0^\infty d\lambda \rho_{\pm\mu}(\lambda) e^{-\lambda\bar{c}} e^{\frac{\alpha}{2}(\mu+2)x} J_{\pm\mu}\left(\frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x}}{|\alpha|}\sqrt{\lambda}\right), \quad (3.66)$$

où  $\rho_{\pm\mu}(\lambda)$  est une certaine fonction régulière qui doit être choisie de telle sorte que  $Q_{\pm\mu}(x, t)$  satisfasse aux conditions aux limites. Cependant, si on s'intéresse plutôt au propagateur et non pas à la solution, on n'a pas besoin de déterminer explicitement  $\rho_{\pm\mu}(\lambda)$  mais il suffit de l'exprimer en fonction de  $Q_{\pm\mu}(x, 0)$ . Pour ce faire, considérons donc la solution (3.66) à l'instant initial  $t = 0$ , qui s'écrit

$$Q_{\pm\mu}(x, 0) = e^{\frac{\alpha}{2}(\mu+2)x} \int_0^\infty d\lambda \rho_{\pm\mu}(\lambda) J_{\pm\mu}\left(\frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x}}{|\alpha|}\sqrt{\lambda}\right). \quad (3.67)$$

On remarque bien que l'intégrale du membre de droite ressemble à la transformation de Fourier-Bessel [37, 38, 39] sauf que l'argument de la fonction de Bessel dépend de  $\sqrt{\lambda}$  et non pas de  $\lambda$ . Pour y remédier, il suffit de poser

$$\rho_{\pm\mu}(\lambda) = \tilde{\rho}_{\pm\mu}(\sqrt{\lambda}), \quad (3.68)$$

et écrire la différentielle sous la forme  $d\lambda = 2\sqrt{\lambda}d\sqrt{\lambda}$ . Il vient donc que

$$\frac{1}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}(\mu+2)x}Q_{\pm\mu}(x, 0) = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\tilde{\rho}_{\pm\mu}(\sqrt{\lambda}) J_{\pm\mu}\left(\frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x}}{|\alpha|}\sqrt{\lambda}\right) d\sqrt{\lambda}. \quad (3.69)$$

Le membre de droite de (3.69) est maintenant une parfaite intégrale de Fourier-Bessel. Si on ne considère que les problèmes avec

$$\pm\mu \geq -\frac{1}{2}, \quad (3.70)$$

l'intégrale de Fourier-Bessel dans (3.69) peut être inversée pour donner  $\tilde{\rho}_{\pm\mu}(\sqrt{\lambda})$  comme une

fonctionnelle de  $Q_{\pm\mu}(x, 0)$ [37, 38]. On obtient donc

$$\begin{aligned}\rho_{\pm\mu}(\lambda) &= \frac{1}{|\alpha|} \int_{e^{\frac{\alpha}{2}y=0}}^{e^{\frac{\alpha}{2}y}=\infty} e^{\frac{\alpha}{2}y} e^{-\frac{\alpha}{2}(\mu+2)y} Q_{\pm\mu}(y, 0) J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}y}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right) d \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}y}}{|\alpha|} \right) \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}\mu y} J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}y}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right) Q_{\pm\mu}(y, 0) dy.\end{aligned}\quad (3.71)$$

En reportant (3.70) dans (3.66), on obtient

$$Q_{\pm\mu}(x, t) = \frac{1}{|\alpha|} e^{\frac{\alpha}{2}(\mu+2)x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}\mu y} \left[ \int_0^{\infty} d\lambda e^{-\lambda\bar{c}} J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right) J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}y}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right) \right] Q_{\pm\mu}(y, 0) dy.\quad (3.72)$$

L'intégration sur la variable  $\lambda$  peut être évaluée en utilisant le résultat suivant (Eq. 6.615 dans [37, 38]) :

$$\int_0^{\infty} e^{-az} J_{\xi}(2b\sqrt{z}) J_{\xi}(2c\sqrt{z}) dz = \frac{1}{a} I_{\xi} \left( \frac{2bc}{a} \right) \exp \left( -\frac{b^2 + c^2}{a} \right) \text{ pour } \text{Re } \xi > -1.\quad (3.73)$$

Par identification on peut écrire, pour  $\pm\mu > -1$  (correspondant à  $\frac{\delta}{\alpha} < 1$  et  $\frac{\delta}{\alpha} > -1$ )

$$\int_0^{\infty} d\lambda e^{-\lambda\bar{c}} J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right) J_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}y}}{|\alpha|} \sqrt{\lambda} \right) = \frac{1}{\bar{c}} I_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{\alpha}{2}y}}{\bar{c}\alpha^2} \right) \exp \left( -\frac{e^{\alpha x} + e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2} \right),\quad (3.74)$$

de sorte que

$$Q_{\pm\mu}(x, t) = \frac{1}{|\alpha|\bar{c}} e^{\frac{\alpha}{2}(\mu+2)x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}\mu y} \exp \left( -\frac{e^{\alpha x} + e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2} \right) I_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{\alpha}{2}y}}{\bar{c}\alpha^2} \right) Q_{\pm\mu}(y, 0) dy.$$

Enfin, en utilisant la relation entre  $Q_{\pm\mu}(x, t)$  et  $P_{\pm\mu}(x, t)$ , donnée par (3.15), on peut en déduire l'expression du propagateur de notre équation de départ qui sera donnée, pour  $\pm\mu \geq -\frac{1}{2}$ , par

$$G_{\pm\mu}(x, t; y, 0) = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(\mu+2)(x-\bar{b})} e^{-\frac{\alpha}{2}\mu y}}{|\alpha|\bar{c}} \exp \left( -\frac{e^{\alpha(x-\bar{b})} + e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2} \right) I_{\pm\mu} \left( \frac{2e^{-\frac{\alpha\bar{b}}{2}} e^{\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{\alpha}{2}y}}{\bar{c}\alpha^2} \right).\quad (3.75)$$

Cette relation coïncide exactement avec (3.45), ce qui confirme l'exactitude de notre résultat.

## 3.4 Discussion des résultats obtenues

### 3.4.1 Domaines de variation des paramètres $\pm\mu$

Tout d'abord nous remarquons que les solutions obtenues par les deux méthodes coïncident parfaitement sauf pour les domaines de variation des paramètres  $\pm\mu$ . La méthode de l'algèbre de Lie donne  $\pm\mu > -1$  mais celle de séparation des variables exige que  $\pm\mu > -\frac{1}{2}$ . A notre avis cette petite différence pourrait être liée à l'inversion de l'ordre de l'intégration et la sommation dans le membre de droite de (3.35). Il se pourrait que la permutation n'est possible que si  $\frac{2\nu-\delta}{\alpha} \geq -\frac{1}{2}$ . Par conséquent, nous considérerons que  $\pm\mu > -\frac{1}{2}$ .

### 3.4.2 Comportement des solutions vis-à-vis de la réflexion ou de l'absorption aux points extrêmes

Nous avons donc obtenu l'expression du propagateur de l'équation de Fokker-Planck (3.1) pour un vaste choix des paramètres  $\alpha$  et  $\delta$ . La question qu'on devrait se poser maintenant et de connaître la nature de chacune des solutions en fonction de ces paramètres.

Un point extrême est dit absorbant ou point de capture si, partant de ce point à l'instant initial, la probabilité d'atteindre n'importe quel autre point à un instant ultérieur est nulle. On dit aussi qu'un point extrême est un point de réflexion, si, partant de n'importe quel autre point à l'instant initial, la probabilité de l'atteindre à un instant ultérieur est nulle[40].

Par ailleurs, on montre que les solutions normées correspondent à des diffusions sans point d'absorption alors que les solutions non normées représentent des diffusions où au moins un des points limites est un point d'absorption [1, 40].

Pour distinguer les solutions que nous avons trouvées par rapport à ceci nous allons alors calculer pour chacune d'elles la valeur de l'intégrale sur tout le domaine de définition.

## Normalisation des solutions obtenues

En effet, calculons

$$\begin{aligned} N_{\pm\mu} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx P_{\pm\mu}(x, t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy G_{\pm\mu}(x, t; y, 0) P_{\pm\mu}(y, 0), \end{aligned} \quad (3.76)$$

pour  $\pm\mu > -\frac{1}{2}$ , qui est éventuellement une fonction du temps.

En faisant le changement de variable  $z = \exp(\alpha x)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} N_{\pm\mu} &= \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}(\mu+2)\bar{b}}}{\bar{c}\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{\alpha}{2}\mu y} \exp\left(-\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) P_{\pm\mu}(y, 0) \\ &\quad \int_0^{\infty} dz z^{\frac{\mu}{2}} \exp\left(-\frac{e^{-\alpha\bar{b}}}{\bar{c}\alpha^2} z\right) I_{\pm\mu}\left(\frac{2e^{-\frac{\alpha\bar{b}}{2}}}{\bar{c}\alpha^2} e^{\frac{\alpha}{2}y} \sqrt{z}\right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Pour calculer l'intégrale sur la variable  $z$ , on utilise la formule de la transformée de Laplace [37, 38]

$$\int_0^{\infty} dz e^{-pz} z^{\varrho-\frac{1}{2}} I_{2\nu}(2a\sqrt{z}) = \frac{\Gamma(\varrho + \nu + \frac{1}{2}) e^{\frac{a^2}{2p}}}{\Gamma(2\nu + 1) ap^{\varrho}} M_{-\varrho, \nu}\left(\frac{a^2}{p}\right), \quad (3.78)$$

vérifiée pour

$$\operatorname{Re}(\varrho + \nu) > -\frac{1}{2}, \quad (3.79)$$

et  $M_{-\varrho, \nu}\left(\frac{a^2}{p}\right)$  est la fonction définie par [37, 38]

$$M_{\gamma, \lambda}(x) = x^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \lambda - \gamma; 2\lambda + 1; x\right). \quad (3.80)$$

Par identification, on a

$$\nu = \pm\frac{\mu}{2}, \quad (3.81)$$

$$\varrho = \frac{\mu + 1}{2}, \quad (3.82)$$

$$p = \frac{e^{-\alpha\bar{b}}}{\bar{c}\alpha^2}, \quad (3.83)$$

$$a = \frac{e^{-\frac{\alpha\bar{b}}{2}}}{\bar{c}\alpha^2} e^{\frac{\alpha}{2}y}. \quad (3.84)$$

Sachant que  $\pm\mu > -\frac{1}{2}$ , la contrainte (3.79) est donc toujours satisfaite quelle que soit la valeur de  $\mu$ .

obtient donc

$$\begin{aligned}
N_{\pm\mu} &= \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}(\mu+2)\bar{b}} \Gamma(1 + \frac{\mu \pm \mu}{2})}{\bar{c}\alpha^2 \Gamma(1 \pm \mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{\alpha}{2}\mu y} \exp\left(-\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \frac{e^{\frac{a^2}{2p}}}{ap^q} M_{-\rho, \nu}\left(\frac{a^2}{p}\right) P_{\pm\mu}(y, 0) \\
&= (\bar{c}\alpha^2)^{\frac{\mu \mp \mu}{2}} \frac{\Gamma(1 + \frac{\mu \pm \mu}{2})}{\Gamma(1 \pm \mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-\frac{\alpha}{2}(\mu \mp \mu)y} \exp\left(-\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \times \\
&\quad {}_1F_1\left(1 + \frac{\mu \pm \mu}{2}; 1 \pm \mu; \frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) P_{\pm\mu}(y, 0).
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Sachant que

$${}_1F_1\left(1 + \frac{\mu \pm \mu}{2}; 1 \pm \mu; \frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) = \frac{\Gamma(1 \pm \mu)}{\Gamma(1 + \frac{\mu \pm \mu}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1 + \frac{\mu \pm \mu}{2} + k)}{\Gamma(1 \pm \mu + k)} \left(\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^k. \tag{3.86}$$

On obtient finalement

$$N_{\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy P_{\mu}(y, 0), \tag{3.87}$$

et

$$N_{-\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^{-\mu} \exp\left(-\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1-\mu+k)} \left(\frac{e^{\alpha y}}{\bar{c}\alpha^2}\right)^k P_{-\mu}(y, 0). \tag{3.88}$$

On peut affirmer que si la fonction de distribution  $P_{\mu}$  est choisie normalisée à l'instant initial, elle le sera à tout instant ultérieur. Par contre, la norme de  $P_{-\mu}$  est une fonction du temps.

En conclusion, on peut dire que la solution  $P_{\mu}(x, t)$  correspond à des processus de diffusion sans absorption, alors que  $P_{-\mu}(x, t)$  décrit les processus de diffusion avec absorption.

### 3.4.3 Etude de certains cas particuliers

Comme nous l'avons dit, l'avantage de l'équation (3.1) est qu'elle possède plusieurs paramètres qu'on peut ajuster afin d'obtenir les solutions de certains processus connus. Par exemple, les processus de *Wiener* et d'*Ornstein-Uhlenbeck* peuvent être retrouvés comme cas particuliers.

Dans le cas du processus de *Wiener*, nous devons choisir les paramètres de telle sorte à avoir  $D_1 \equiv 0$  et  $D_2 = D$ . Pour ce faire, il existe deux choix possibles :

- $\alpha = 0, \delta = 0, a(t) = D$  et  $b(t) = 0$ ;
- $\alpha = 0, a(t) = D$  et  $b(t) = -\delta D$ .

Les limites  $\alpha \rightarrow 0$  et  $\delta \rightarrow 0$  doivent être prises à la fin des calculs.

En ce qui concerne le processus d'*Ornstein-Uhlenbeck*, on doit avoir  $D_1 = -\gamma x$  et  $D_2 = D$ . Dans ce cas, le choix des paramètres est un peu subtil. Pour avoir  $D_2 = D$ , il faut absolument avoir  $\alpha = 0$  et  $a(t) = D$ . Cependant, pour satisfaire l'autre contrainte il faut procéder par le développement en série de  $e^{-\alpha x}$ . En exigeant que les termes du développement soient nuls sauf le terme proportionnel à  $x$ , on obtient un seul choix caractérisé par

- $\alpha = 0, a(t) = D, \delta = \frac{\gamma}{\alpha D}$  et  $b(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}$ .

La limite  $\alpha \rightarrow 0$  doit être prise aussi à la fin des calculs.

### Processus de *Wiener*

Nous allons ici nous intéresser seulement au processus de *Wiener* et montrer comment on peut l'obtenir à partir de la solution (3.75) en considérant le premier choix des paramètres, par exemple. En effet, pour ne pas trop compliquer les choses, on considère le cas où  $\delta = \alpha$  et on prendra  $\alpha = 0$  à la fin des calculs. Dans ce cas, la solution (3.75) s'écrit

$$G_{\pm 1}(x, t; y, 0) = \frac{e^{\frac{3\alpha}{2}x} e^{-\frac{\alpha}{2}y}}{Dt|\alpha|} \exp\left(-\frac{e^{\alpha x} + e^{\alpha y}}{Dt\alpha^2}\right) I_{\pm 1}\left(\frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{\alpha}{2}y}}{Dt\alpha^2}\right).$$

Dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$ , l'argument de la fonction de Bessel modifiée diverge. On utilise la relation du comportement asymptotique, donnée par

$$\lim_{z \rightarrow \infty} I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}},$$



pour obtenir

$$\begin{aligned}
G_{\pm 1}(x, t; y, 0)|_{\alpha \rightarrow 0} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{3\alpha}{2}x} e^{-\frac{\alpha}{2}y}}{Dt |\alpha|} \frac{1}{\sqrt{4\pi \frac{e^{\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{\alpha}{2}y}}{Dt\alpha^2}}} \exp\left(-\frac{e^{\alpha x} + e^{\alpha y}}{Dt\alpha^2}\right) \exp\left(\frac{2e^{\frac{\alpha}{2}x} e^{\frac{\alpha}{2}y}}{Dt\alpha^2}\right) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{\left(e^{\frac{\alpha}{2}x} - e^{\frac{\alpha}{2}y}\right)^2}{Dt\alpha^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4Dt}\right).
\end{aligned}$$

En considérant le cas particulier où la distribution à l'instant initial est donnée par la distribution de Dirac,  $P(y, 0) = \delta(y - x_0)$ , on retrouve donc, pour la fonction de distribution  $P(x, t)$ , exactement la même expression donnée par (2.6).

### 3.5 Conclusion

Nous avons obtenu la solution de l'équation de Fokker-Planck usuelle pour un processus particulier, décrit par des coefficients de mouvement et de diffusion dépendants de l'espace-temps. Dans la littérature on ne trouve que des modèles avec des coefficients qui sont linéaires ou non linéaires par rapport à la variable d'espace. Notre choix des coefficients avec une dépendance en exponentiel par rapport à la variable d'espace était motivé par la curiosité mathématique, mais par la suite on s'est rendu compte que plusieurs processus physiques peuvent en découler comme des cas particuliers. Nous avons juste explicité l'obtention du processus de *Wiener* comme exemple concret, mais toutefois la dérivation d'autres processus est dans nos perspectives futures.

## Chapitre 4

# Résolution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire

Dans ce chapitre, nous nous proposons de résoudre l'équation de Fokker-Planck fractionnaire à une dimension. Tout d'abord nous présentons brièvement la méthode basée sur la transformation intégrale, qui a été largement suivie dans la littérature [18, 19, 20, 21, 22] et nous montrons qu'elle est mathématiquement non rigoureuse puisqu'elle repose sur des hypothèses erronées et contient certains défauts algébriques. Ensuite nous présentons en détail une autre approche utilisant l'ansatz de séparation des variables d'espace et du temps. L'avantage de cette nouvelle méthode est qu'elle ne souffre d'aucune inconsistance et de plus elle est beaucoup plus simple.

### 4.1 Solution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire par l'ansatz de la transformation intégrale

L'équation de Fokker-Planck fractionnaire est donnée par

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} \mathcal{L}_{FP}(x)\psi(x, t), \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{L}_{FP}(x)$  est un opérateur de Fokker-Planck usuel dont les coefficients peuvent éventuellement dépendre de la variable d'espace  $x$ ,

$$\mathcal{L}_{FP}(x) = -\frac{\partial}{\partial x}D_1(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}D_2(x), \quad (4.2)$$

et  ${}_0D_t^{1-\alpha}$  symbolise la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville définie par son action sur une fonction régulière  $f(x, t)$  comme

$${}_0D_t^{1-\alpha}f(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t d\tau (t-\tau)^{\alpha-1}f(x, \tau) \text{ pour } 0 < \alpha < 1. \quad (4.3)$$

On voudrait donc résoudre l'équation (4.1) sur un intervalle donné, qui garanti la positivité de  $D_2(x)$ , avec la condition initiale

$$\psi(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad (4.4)$$

en utilisant un ansatz qui admet que  $\psi(x, t)$  peut être représenté comme une transformation intégrale [18, 19, 20, 21, 22]

$$\psi(x, t) = \int_0^\infty R(s, t)G(x, s)ds, \quad (4.5)$$

où  $G(x, s)$  satisfait l'équation de Fokker-Planck usuelle pour l'opérateur  $\mathcal{L}_{FP}(x)$

$$\frac{\partial}{\partial s}G(x, s) = \mathcal{L}_{FP}(x)G(x, s), \quad (4.6)$$

avec la condition initiale

$$G(x, 0) = \delta(x - x_0). \quad (4.7)$$

Ainsi, la fonction  $G(x, s)$  sera déterminée par la résolution de l'équation (4.6), qui est du type Fokker-Planck usuelle, et  $R(s, t)$  est la nouvelle fonction à déterminer à partir de (4.1).

#### 4.1.1 Rappels sur la Transformation de Laplace

Brièvement la transformation de Laplace par rapport à la variable  $t$  est définie pour toute fonction  $g(x, t)$  satisfaisant à certaines conditions requises [38] par

$$\widehat{g}(x, u) = \mathcal{L}_u g(x, t) = \int_0^\infty dt e^{-ut}g(x, t), \quad (4.8)$$

où  $u$  est un nombre complexe dont la partie réelle est strictement positive ; i.e  $\text{Re } u > 0$ .

Les transformées de la dérivée d'une fonction et du produit de convolution de deux fonctions sont données par

$$\mathcal{L}_u \left[ \frac{\partial}{\partial t} g(x, t) \right] = u \widehat{g}(x, u) - g(x, 0), \quad (4.9)$$

et

$$\mathcal{L}_u [g(x, t) * h(x, t)] = \widehat{g}(x, u) \widehat{h}(x, u), \quad (4.10)$$

où  $*$  symbolise le produit de convolution des fonctions  $g$  et  $h$ , défini par

$$g(x, t) * h(x, t) = \int_0^t g(x, t - \tau) h(x, \tau) d\tau. \quad (4.11)$$

Enfin, la transformation de Laplace est inversible. Autrement dit, à partir de toute fonction qui est une transformée de Laplace, on peut retrouver la fonction originale par la transformation inverse de Laplace qui est définie par

$$g(x, t) = \mathcal{L}_t^{-1} \widehat{g}(x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dz e^{zt} \widehat{g}(x, z). \quad (4.12)$$

#### 4.1.2 Résolution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire par la transformation de Laplace

La présence de l'opérateur (4.3) dans l'équation (4.1) rend sa résolution par les méthodes usuelles impossible directement. Pour y remédier on doit tout d'abord la transformer en une forme plus simple en utilisant l'astuce de la transformation de Laplace qui est bien connue dans la résolution des équations différentielles.

Ainsi, en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de (4.1), on peut écrire

$$\mathcal{L}_u \left[ \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right] = \mathcal{L}_{FP}(x) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}_u \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau (t - \tau)^{\alpha-1} \psi(x, \tau) \right]. \quad (4.13)$$

En utilisant la propriété (4.9) pour le membre de gauche et les deux propriétés (4.9) et (4.10) pour le membre de droite, on obtient

$$u \widehat{\psi}(x, u) - \psi(x, 0) = u^{1-\alpha} \mathcal{L}_{FP}(x) \widehat{\psi}(x, u). \quad (4.14)$$

En utilisant maintenant les relations (4.5) et (4.6), on peut écrire

$$\widehat{\psi}(x, u) = \int_0^\infty \widehat{R}(s, u)G(x, s)ds, \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP}(x)\widehat{\psi}(x, u) &= \int_0^\infty \widehat{R}(s, u)\mathcal{L}_{FP}(x)G(x, s)ds \\ &= \int_0^\infty \widehat{R}(s, u)\frac{\partial}{\partial s}G(x, s)ds \\ &= \widehat{R}(s, u)G(x, s)\Big|_{s=0}^{s=\infty} - \int_0^\infty G(x, s)\frac{\partial}{\partial s}\widehat{R}(s, u)ds. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En reportant (4.15) et (4.16) dans (4.14) et tenant compte de (4.4) (4.5) et (4.7), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( u\widehat{R}(s, u) + u^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{R}(s, u) \right) G(x, s)ds &= \left( 1 - u^{1-\alpha}\widehat{R}(0, u) \right) \delta(x - x_0) \\ &\quad + u^{1-\alpha}\widehat{R}(\infty, u)G(x, \infty). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Le problème maintenant est de résoudre l'équation (4.17) pour obtenir la fonction  $\widehat{R}(s, u)$  et ensuite procéder par la transformation de Laplace inverse pour obtenir la fonction  $R(s, t)$  et en déduire finalement la fonction de distribution de départ  $\psi(x, t)$ .

L'approche qui a été utilisée dans la littérature pour résoudre (4.17) par rapport à la fonction  $\widehat{R}(s, u)$  est basée sur plusieurs hypothèses. Tout d'abord on a admis que chacun des termes de l'équation est identiquement nul, c'est-à-dire

$$\widehat{R}(\infty, u)G(x, \infty) = 0, \quad (4.18)$$

$$\left( 1 - u^{1-\alpha}\widehat{R}(0, u) \right) \delta(x - x_0) = 0, \quad (4.19)$$

et

$$\int_0^\infty \left( u\widehat{R}(s, u) + u^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{R}(s, u) \right) G(x, s)ds = 0. \quad (4.20)$$

La condition (4.18) conduit directement à poser

$$\widehat{R}(\infty, u) \equiv 0, \quad (4.21)$$

car  $G(x, \infty)$  et en général non nul puisqu'elle peut correspondre à la distribution stationnaire du processus décrit par  $\mathcal{L}_{FP}$ . La relation (4.19), qui doit être satisfaite quel que soit  $x$ , implique qu'on doit avoir

$$\widehat{R}(0, u) = u^{\alpha-1}. \quad (4.22)$$

En ce qui concerne la relation (4.20), il a été admis qu'elle sera satisfaite en posant

$$u\widehat{R}(s, u) + u^{1-\alpha}\frac{\partial}{\partial s}\widehat{R}(s, u) = 0. \quad (4.23)$$

Pour déterminer  $\widehat{R}(s, u)$ , on doit donc résoudre l'équation (4.23) avec la condition initiale (4.22). Ceci est facilement réalisé pour obtenir

$$\widehat{R}(s, u) = u^{\alpha-1} \exp(-su^\alpha). \quad (4.24)$$

On constate alors que cette solution fait que la contrainte (4.21) est automatiquement satisfaite et par conséquent elle peut être ignorée.

Pour obtenir  $R(s, t)$ , il faut en principe appliquer la transformation inverse de Laplace sur les deux membres de (4.24), ce qui est à priori relativement compliqué. Pour éviter cette complication, il suffit de remarquer qu'on peut écrire (4.24) comme

$$\begin{aligned} \widehat{R}(s, u) &= -\frac{1}{s\alpha} \frac{d}{du} \exp(-su^\alpha) = \int_0^\infty e^{-ut} R(s, t) dt \\ &= -\frac{d}{du} \int_0^\infty e^{-ut} t^{-1} R(s, t) dt. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En comparant les deux termes, il vient que  $t^{-1}R(s, t)$  est la fonction dont la transformée de Laplace est égale à  $\frac{1}{s\alpha} \exp(-su^\alpha)$ . Autrement dit, on peut écrire  $R(s, t)$  comme

$$R(s, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{t}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}} l_\alpha \left( \frac{t}{s^{\frac{1}{\alpha}}} \right), \quad (4.26)$$

où  $l_\alpha(z)$  est connue sous le nom de fonction de Levy et est définie par sa transformée de Laplace, tel que

$$\widehat{l}_\alpha(u) = \exp(-u^\alpha). \quad (4.27)$$

Donc, pour expliciter la solution  $\psi(x, t)$  il faudra déterminer  $G(x, s)$  et ensuite calculer l'intégrale

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{t}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}} l_\alpha \left( \frac{t}{s^\alpha} \right) G(x, s) ds. \quad (4.28)$$

### 4.1.3 Solution sous forme de série

Généralement, le calcul de cette intégrale directement est une tâche très compliquée même pour les processus les plus simples. Pour surmonter cette difficulté, on utilise souvent le développement en série de  $G(x, s)$  sur la base des fonctions propres de l'opérateur de Fokker-Planck et on détermine  $\psi(x, t)$  sous forme d'une série entière.

En effet, d'une manière générale,  $G(x, s)$ , qui est la solution de l'équation de Fokker-Planck usuelle (4.6), avec la condition aux limites (4.7), peut être obtenue par la méthode de séparations des variables. Le résultat est donné sous la forme intégrale (voir Appendice A)

$$G(x, s) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N_\lambda^2} e^{-\lambda s} e^{\Phi(x_0)} X_\lambda(x) X_\lambda(x_0), \quad (4.29)$$

où  $X_\lambda(x)$  est solution de l'équation aux valeurs propres

$$\mathcal{L}_{FP}(x) X_\lambda(x) = -\lambda X_\lambda(x), \quad (4.30)$$

$\Phi(z)$  est une fonction appelée potentiel, définie par

$$\Phi(z) = \ln D_2(z) - \int^z \frac{D_1(y)}{D_2(y)} dy, \quad (4.31)$$

et  $N_\lambda$  est une constante de normalisation,

$$N_\lambda^2 = \int dx e^{\Phi(x)} X_\lambda^2(x). \quad (4.32)$$

En reportant (4.29) dans (4.5) ou (4.28), on peut mettre la solution  $\psi(x, t)$  sous la forme

$$\psi(x, t) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N_\lambda^2} e^{\Phi(x_0)} X_\lambda(x) X_\lambda(x_0) \int_0^\infty R(s, t) e^{-\lambda s} ds, \quad (4.33)$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N_\lambda^2} e^{\Phi(x_0)} X_\lambda(x) X_\lambda(x_0) \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{t}{s^{1+\frac{1}{\alpha}}} l_\alpha \left( \frac{t}{s^\alpha} \right) e^{-\lambda s} ds. \quad (4.34)$$

L'intégration directe sur la variable  $s$  dans (4.34) s'avère très compliquée. Cependant, elle peut être contournée en utilisant encore une fois la technique de la transformation de Laplace sur la variable  $t$ .

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ut} \int_0^\infty R(s, t) e^{-\lambda s} ds dt &= \int_0^\infty \widehat{R}(s, u) e^{-\lambda s} ds \\
&= \int_0^\infty u^{\alpha-1} \exp(-su^\alpha) e^{-\lambda s} ds \\
&= \frac{1}{u(1 + \lambda u^{-\alpha})}.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

En remarquant, enfin, qu'on peut toujours choisir  $u$  tel que  $\lambda u^{-\alpha} < 1$ , on peut transformer le membre de droite en une série entière et ensuite effectuer la transformation de Laplace inverse.

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-ut} \int_0^\infty R(s, t) e^{-\lambda s} ds dt &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n u^{-(1+\alpha n)} \\
&= \int_0^\infty e^{-ut} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} dt,
\end{aligned} \tag{4.36}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty R(s, t) e^{-\lambda s} ds &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} \\
&= E_\alpha(-\lambda t^\alpha),
\end{aligned} \tag{4.37}$$

où  $E_\alpha$  est la fonction de Mittag-Leffler [41], qui se réduit à la fonction exponentielle pour  $\alpha = 1$ .

La solution de  $\psi(x, t)$  sous forme des séries entière s'écrit comme

$$\psi(x, t) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N_\lambda^2} e^{\Phi(x_0)} X_\lambda(x) X_\lambda(x_0) E_\alpha(-\lambda t^\alpha). \tag{4.38}$$



## 4.2 Solution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire par la méthode de séparation des variables

### 4.2.1 Critiques sur la méthode de la transformation intégrale

Nous avons vu que la méthode de la transformation intégrale repose sur plusieurs hypothèses. La première hypothèse concernant l'équation (4.17) où l'on a admis sans justification qu'elle serait satisfaite si chacun des termes est identiquement nul. Tout d'abord cette condition qui est seulement suffisante et non nécessaire, nous a conduit à écrire les contraintes (4.18), (4.19) et (4.20). La contrainte (4.21) qui découle de (4.18) n'est pas une condition nécessaire non plus. D'ailleurs, dans certains processus on pourrait même avoir  $G(x, \infty) = 0$ , comme c'est le cas du processus de *Wiener*. Donc, on peut dire déjà que la méthode s'applique uniquement aux processus dont la fonction de distribution ne s'annule pas pour des temps grands, en l'occurrence les processus stationnaires.

La relation (4.22) qui découle de (4.19) peut être admise sans problème car on peut toujours la considérer comme la condition initiale pour la fonction  $\widehat{R}(s, u)$ . Cependant, le grand problème provient de la relation (4.23), qui découle de (4.20). Cette dernière relation serait acceptable dans une seule condition seulement, si les  $G(x, s)$  forment une base orthonormée. Autrement dit, on devrait avoir nécessairement

$$\int_0^\infty ds G(x, s) G(y, s) = \delta(x - y),$$

et

$$\int dx G(x, s) G(x, s') = \delta(s - s').$$

Il est tout à fait clair que ces deux relations ne sont pas toujours satisfaites comme on peut le vérifier par exemple à partir des résultats des processus simples de *Wiener* et d'*Ornstein-Uhlenbecke*.

En conclusion, nous pouvons dire que cette méthode n'est rigoureuse.

## 4.2.2 Séparation des variables de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire

Nous allons chercher dans cette section la solution de (4.1) par la technique de séparation des variables d'espace et du temps. Cette méthode s'applique généralement dans la résolution d'équations aux dérivées partielles lorsqu'on peut transformer l'équation en question et l'écrire comme une égalité entre une partie où il ne figure que des dérivées temporelles et une autre qui dépend uniquement des dérivées spatiales (voir A).

Puisque les coefficients de l'opérateur de Fokker-Planck associée à l'équation (4.1) ne dépendent pas explicitement du temps, il est alors parfaitement possible de faire une séparation des variables. La technique a déjà été utilisé dans le travail de Metzler et al [42] pour le cas particulier où l'opérateur de Fokker-Planck  $\mathcal{L}_{FP}$  décrit le processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* conditionné par la valeur initiale (4.4). Ici, nous allons généraliser cette technique pour un opérateur de Fokker-Planck quelconque et pour une condition initiale arbitraire. Autrement dit, nous allons déterminer plutôt le propagateur de l'opérateur de Fokker-Planck fractionnaire. Posons alors

$$\psi(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.39)$$

et reportant dans (4.1). On peut donc écrire

$$X(x) \frac{\partial T(t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} T(t) \mathcal{L}_{FP}(x) X(x). \quad (4.40)$$

En divisant les deux membres par  $X(x) {}_0D_t^{1-\alpha} T(t)$ , on obtient

$$\frac{1}{{}_0D_t^{1-\alpha} T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \mathcal{L}_{FP}(x) X(x). \quad (4.41)$$

La solution est cherchée de telle sorte que chaque membre soit égal à une constante. On obtient donc deux équations différentielles indépendantes ; l'équation de la partie temporelle

$$\frac{dT_\lambda(t)}{dt} = -\lambda {}_0D_t^{1-\alpha} T_\lambda(t), \quad (4.42)$$

et l'équation aux valeurs propres pour l'opérateur de Fokker-Planck

$$\mathcal{L}_{FP}(x) X_\lambda(x) = -\lambda X_\lambda(x). \quad (4.43)$$

Notons que le paramètre  $\lambda$  doit être strictement positif pour garantir que la solution correspondante soit une distribution (voir section 3.2.3 et A).

L'équation (4.42) peut être résolue par la technique de la transformée de Laplace. En utilisant les résultats de la section précédente, on obtient

$$u\widehat{T}_\lambda(u) - 1 = -\lambda u^{1-\alpha}\widehat{T}_\lambda(u), \quad (4.44)$$

où l'on a supposé que  $T(0) = 1$ . Il vient donc que

$$\widehat{T}_\lambda(u) = \frac{1}{u(1 + \lambda u^{-\alpha})}. \quad (4.45)$$

Par une technique similaire à celle de la section précédente, on montre que  $T_\lambda(t)$  n'est autre que la fonction de Mittag-Leffler d'argument  $-\lambda t^\alpha$ ,

$$T_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} = E_\alpha(-\lambda t^\alpha), \quad (4.46)$$

Les solutions particulières s'écrivent donc comme

$$\psi(x, t; \lambda) = X_\lambda(x)E_\alpha(-\lambda t^\alpha). \quad (4.47)$$

La solution générale peut être donnée comme une combinaison linéaire de toutes les solutions particulières

$$\psi(x, t) = \int_0^\infty g(\lambda)\psi(x, t; \lambda)d\lambda, \quad (4.48)$$

où  $g(\lambda)$  est la fonction poids qui doit être déterminée à partir des conditions aux limites. Ici, nous allons chercher le propagateur et par conséquent on peut s'en passer de la détermination explicite de  $g(\lambda)$ .

Puisque  $E_\alpha(0) = 1$ , on peut écrire

$$\psi(x, 0) = \int_0^\infty g(\lambda)X_\lambda(x)d\lambda. \quad (4.49)$$

Or, sachant que les fonctions définies par

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{N_\lambda} e^{\frac{\Phi(x)}{2}} X_\lambda(x), \quad (4.50)$$

forment une base orthonormée (voir A), on obtient par un calcul simple

$$g(\lambda) = \frac{1}{N_\lambda^2} \int dy e^{\Phi(y)} X_\lambda(y) \psi(y, 0). \quad (4.51)$$

En combinant (4.47), (4.48) et (4.51), on obtient

$$\psi(x, t) = \int dy G(x, t; y, 0) \psi(y, 0), \quad (4.52)$$

où  $G(x, t; y, 0)$  est le propagateur de la solution, qui est donné par

$$G(x, t; y, 0) = e^{\Phi(y)} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N_\lambda^2} X_\lambda(x) X_\lambda(y) E_\alpha(-\lambda t^\alpha). \quad (4.53)$$

Dans le cas particulier où la solution initiale est donnée par (4.4), la solution générale (4.52) coïncide exactement avec le résultat (4.38) de la section précédente.

### 4.3 Conclusion

Nous avons obtenu la solution de l'équation de Fokker-Planck fractionnaire par deux approches différentes. Nous pouvons cependant affirmer que la méthode de la transformation intégrale n'est pas satisfaisante car elle manque de rigueur mathématique. Comme nous l'avons discuté, cette approche repose sur plusieurs hypothèses qui ne sont pas tout à fait réalisables pour tous les processus physiques. La question qu'on devrait se poser alors est de savoir pourquoi le résultat final est bon. A notre avis la réponse est que certainement les erreurs se compensent pour donner finalement un résultat correct.

La méthode de séparation des variables est par contre plus simple et plus générale car, d'une part elle ne dépend ni de la nature du processus ni de sa condition initiale et et d'autre part elle ne souffre à priori d'aucune inconsistance.

## Annexe A

# Fonctions propres et valeurs propres de l'opérateur de Fokker-Planck à coefficients dépendants de l'espace

### A.1 Equation aux valeurs propres de l'opérateur de Fokker-Planck

Soit l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = \mathcal{L}_{FP}P(x, t), \quad (\text{A.1})$$

où l'opérateur  $\mathcal{L}_{FP}$  ne dépend pas explicitement du temps et est donné par la forme générale

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x}D^{(1)}(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{(2)}(x). \quad (\text{A.2})$$

Dans ce cas, on peut chercher la solution de (A.1) par la méthode de séparation des variables en posant  $P(x, t) = \chi(t)\varphi(x)$ . L'équation est alors équivalente à

$$\frac{1}{\chi(t)} \frac{d}{dt}\chi(t) = \frac{1}{\varphi(x)} \mathcal{L}_{FP}\varphi(x). \quad (\text{A.3})$$

En égalant chacun des membres à une constante, qu'on prend  $-\lambda_n$ , on obtient deux équations indépendantes. La première concerne la partie temporelle

$$\frac{d}{dt} \ln \chi_n(t) = -\lambda_n, \quad (\text{A.4})$$

dont la solution est facilement obtenue comme

$$\chi_n(t) = \exp(-\lambda_n t), \quad (\text{A.5})$$

où l'on a choisi  $\chi_n(0) = 1$ .

L'autre équation concerne la partie spatiale et est donnée par l'équation aux valeurs propres de  $\mathcal{L}_{FP}$

$$\mathcal{L}_{FP}\varphi_n(x) = -\lambda\varphi_n(x), \quad (\text{A.6})$$

où  $\varphi_n(x)$  est défini sur l'intervalle de positivité de  $D^{(2)}(x)$ .

## A.2 Conditions aux limites

Pour obtenir les solutions physiques de (A.6) il faut connaître les conditions aux limites, c'est-à-dire le comportement de  $\varphi(x)$  aux points limites du domaine de définition, qui seront notés  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ . Pour ce faire, on définit la fonction potentiel par

$$\Phi(x) = \ln D_2(x) - \int^x \frac{D_1(y)}{D_2(y)} dy, \quad (\text{A.7})$$

et le courant de probabilité par

$$J(x, t) = -D_2(x)e^{-\Phi(x)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ e^{\Phi(x)} P(x, t) \right]. \quad (\text{A.8})$$

En effet, puisque  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$  sont les points limites où une probabilité non nulle peut avoir lieu, on doit toujours avoir

$$P(x, t) = 0 \text{ pour } x < x_{\min} \text{ et } x > x_{\max}. \quad (\text{A.9})$$

Au points  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ , deux cas de figure peuvent se présenter [1, 40]. Si la densité de probabilité en un point extrême est nulle, celui-ci ne peut jamais être atteint. On dit alors que le processus subit une réflexion en ce point. En revanche, si la densité de probabilité n'est pas nulle, ce point peut être atteint à un certain instant et par conséquent le processus subit une absorption en ce point. Dans les deux cas de figure on a

$$J(x, t) = 0 \text{ pour } x < x_{\min} \text{ et } x > x_{\max}. \quad (\text{A.10})$$

Une condition suffisante est obtenue en imposant que

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)} P(x, t) = 0 \implies e^{\Phi(x)} P(x, t) = Cte \text{ pour } x < x_{\min} \text{ et } x > x_{\max}. \quad (\text{A.11})$$

Cependant, puisque  $P(\pm\infty, t) = 0$ , la contrainte (A.11) est équivalente à

$$e^{\Phi(x)} P(x, t) = 0 \text{ pour } x < x_{\min} \text{ et } x > x_{\max} \quad (\text{A.12})$$

Si la condition (A.12) est satisfaite en un point extrême  $x_0 = x_{\min}$  ou  $x_0 = x_{\max}$ , ce dernier est un point d'absorption. Autrement dit, si le point extrême  $x_0$  est atteint à un instant donné, le processus s'arrête.

Si par contre cette condition n'est pas satisfaite, on dit qu'on a une barrière de potentielle impénétrable et le processus se comporte comme une réflexion en ce point. Ainsi, on doit avoir, dans ce cas,  $P(x_0, t) = 0$  indépendamment de la valeur de  $e^{\Phi(x_0)} P(x_0, t)$ . On dit alors qu'on a un vrai processus de diffusion. La condition de normalisation doit être satisfaite à tout instant si elle l'était à l'instant initial. Autrement dit, on doit avoir

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dx P(x, t) = 1. \quad (\text{A.13})$$

### A.3 Hermiticité de l'opérateur de Fokker-Planck

L'opérateur de Fokker-Planck peut s'écrire aussi sous la forme

$$\mathcal{L}_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x} D_2(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)}, \quad (\text{A.14})$$

qui est en général non Hermitien.

Cependant, on peut voir facilement que pour les conditions aux limites citées plus haut, le nouveau opérateur défini par

$$\mathcal{L} = e^{\Phi(x)} \mathcal{L}_{FP} \quad (\text{A.15})$$

$$= e^{\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} D_2(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)}, \quad (\text{A.16})$$

est Hermitien.

En effet, pour deux fonctions  $P_1$  et  $P_2$  satisfaisant aux conditions aux limites précédentes aux points limites  $x_{\min}$  et  $x_{\max}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_1 \mathcal{L} P_2 dx &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_1 e^{\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} D_2(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)} P_2 dx \\ &= - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} D_2(x) e^{-\Phi(x)} \left[ \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)} P_1 \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)} P_2 \right] dx \\ &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_2 e^{\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} D_2(x) e^{-\Phi(x)} \frac{\partial}{\partial x} e^{\Phi(x)} P_1 dx \\ &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} P_2 \mathcal{L} P_1 dx, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

où l'on a procédé par des intégrations par partie et utilisé les conditions aux limites aux points extrêmes.

Cette relation signifie donc que le nouveau opérateur  $\mathcal{L}$  est bien un opérateur Hermitien,

$$\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}, \quad (\text{A.18})$$

ou encore

$$\left( e^{\Phi(x)} \mathcal{L}_{FP} \right)^+ = \mathcal{L}_{FP}^+ e^{\Phi(x)} = e^{\Phi(x)} \mathcal{L}_{FP}^+. \quad (\text{A.19})$$

Dans la pratique, on considère plutôt l'opérateur

$$\tilde{\mathcal{L}} = e^{-\frac{1}{2}\Phi(x)} \mathcal{L} e^{-\frac{1}{2}\Phi(x)} = e^{\frac{1}{2}\Phi(x)} \mathcal{L}_{FP} e^{-\frac{1}{2}\Phi(x)}, \quad (\text{A.20})$$

qui est lui aussi Hermitien.



## A.4 Solution de l'équation aux valeurs propres

Ainsi, les fonctions propres associées à  $\tilde{\mathcal{L}}$  sont orthogonales et les valeurs propres correspondantes sont réelles. On écrit

$$\tilde{\mathcal{L}}\psi_n(x) = -\lambda_n\psi_n(x), \quad (\text{A.21})$$

où  $\psi_n(x)$  sont les fonctions propres de  $\tilde{\mathcal{L}}$  correspondant aux valeurs propres  $\lambda_n$ .

On peut récrire l'équation (A.21) comme

$$e^{\frac{1}{2}\Phi(x)}\mathcal{L}_{FP}e^{-\frac{1}{2}\Phi(x)}\psi_n(x) = -\lambda_n\psi_n(x), \quad (\text{A.22})$$

de sorte qu'en multipliant les deux membres à gauche par  $e^{-\frac{1}{2}\Phi(x)}$ , on obtient

$$\mathcal{L}_{FP}\varphi_n(x) = -\lambda_n\varphi_n(x), \quad (\text{A.23})$$

avec

$$\varphi_n(x) = e^{-\frac{1}{2}\Phi(x)}\psi_n(x). \quad (\text{A.24})$$

Ainsi  $\mathcal{L}_{FP}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$  ont le même spectre et leurs fonctions propres sont reliées par la relation (A.24).

En choisissant les fonctions propres  $\psi_n(x)$  normées, on peut écrire la condition d'orthonormalisation comme

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \psi_n(x)\psi_m(x)dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} e^{\Phi(x)}\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \delta_{nm}. \quad (\text{A.25})$$

On peut aussi montrer que les valeurs propres  $\lambda_n$  sont positives ou nulles. En effet, en choisissant par exemple  $P_1 = P_2 = \varphi_n(x)$ , on obtient à partir de (A.17), (A.23) et (A.25),

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \varphi_n(x)e^{\Phi(x)}\mathcal{L}_{FP}\varphi_n(x) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \psi_n(x)\tilde{\mathcal{L}}\psi_n(x)dx = -\lambda_n \quad (\text{A.26})$$

$$= - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{1}{2}\Phi(x)}\psi_n(x) \right)^2 D_2 e^{-\Phi(x)} dx \leq 0. \quad (\text{A.27})$$

La valeur 0 est atteinte seulement si l'un des termes de l'intégrand est nul. Il est évident que

ceci est possible seulement si  $e^{\frac{1}{2}\Phi(x)}\psi_n(x)$  est une constante, auquel cas  $\psi_n(x)$  est la fonction d'onde de l'état stationnaire.

On pose alors

$$\psi_0(x) = \sqrt{N}e^{-\frac{1}{2}\Phi(x)}; \text{ pour } \lambda_0 = 0, \tag{A.28}$$

et toutes les autres valeurs propres sont strictement positives.

# Bibliographie

- [1] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1989).
- [2] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press, Austin, (1991).
- [3] R. Kubo, M.Toda, N.Hashitsume, *Statistical Physics II : Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Springer Verlag (1991).
- [4] N. G. van Kampen, *Brazilian Journal of Physics* **28**, 90 (1998).
- [5] C. Ngo, H.Ngo, *Physique Statistique à l'équilibre et hors d'équilibre*, Masson (1995).
- [6] N. Pottier, *Physique statistique hors d'équilibre*, (Notes de cours,1997-1998).
- [7] C. Aslangul, *Physique Statistique de La Matière Molle(II)*, Cours de DEA de physique des liquides, (2002-2003).
- [8] A.Naert, R.Friedrich, J.Peinke, *Physical Review* **E 56**, 6719 (1997).
- [9] Sylvie Vaclair, *Elements de physique statistique*, Louis Jean (1993).
- [10] Remi Hakim, *Introduction à la mécanique statistique*, Masson (1996).
- [11] Radu Balescu, *Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics*, John Wiley & sons (1975).
- [12] R. K.Pathria, *Statistical mechanics*, University of Waterloo, Pergamon Press (1980).
- [13] H. Scher et E. Montroll, *Phys. Rev.* **B12**, 2455 (1975).
- [14] Yu. L. Klimontovich, *Statistical theory of open systems*, Kluwer, Dordresht 1995.
- [15] J. P. Bouchaud et A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 127 (1990).
- [16] J. Klafter, M. F. Shlesinger et G. Zumofen, *Phys. Today* **49**, 33 (1996).

- [17] R. Balescu, *Statistical Dynamics, Mater Out of Equilibrium*, Imperial college Press, Word Scientific, Singapore (1997).
- [18] E. Barkai et J. Klafter, Lecture Notes in Physics, S. Benkadda et G. M. Zaslavsky, Ed. Chaos, Kinetics and Non-linear Dynamics in Fluids and Plasmas (Springer-Verlag, Berlin 1998).
- [19] E. Barkai, R. Metzler and J. Klafter, Phys. Rev. E 61, 132 (1999)
- [20] E. Barkai and R. J. Silbey, J. Phys. Chem. B 104, 3875 (2000).
- [21] E. Barkai, Phys. Rev. E 63, 046118 (2001).
- [22] N. Suziki and M. Biyajima, arXiv : hep-ph/0009306 v4 (2001).
- [23] G. M. Zaslavski, M. Edelman and B. A. Niyazov, Chaos **7**, 159 (1997).
- [24] W. R. Schneider, W. Wyss, J. Math. Phys. **30**, 134, (1989).
- [25] P. Grigolini, A. Rocco and B. J. West, Phys. Rev. E. **59**, 2603 (1999).
- [26] K. M. Kolwandar et A. D. Gangal, Phys. Rev. Lett. **80**, 214 (1998).
- [27] G. E. Uhlenbeck, L .S. Ornestein Phys. Rev. **36**, 823 (1930).
- [28] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives, Theory and applications*, Gordon and Breach, New York, 1993.
- [29] H. Scher et M. Lax, Phys. Rev. **B7**, 4491 (1973) ; Phys. Rev. **B7**, 4502 (1973).
- [30] G. H. Weiss, *Aspects and Applications of the Random Walk*, North Holland (Amsterdam-New York-Oxford, 1994).
- [31] B. Neouioua, mémoire de Magister, *Résolution de l'équation de Fokker-Planck pour le processus de Rayleigh*, Université de Ouargla, 2004.
- [32] C. Soudani, mémoire de Magister, *Solution de l'équation de Fokker-Planck généralisée*, Université de Ouargla, 2004.
- [33] F. Benamira, L. Guechi, Europhys. Lett **56**, 8, (2001).
- [34] C. F. Lo, Europhys. Lett. **39** (1997) 263.
- [35] C. F. Lo, Nuovo Cimento, **113 B** (1998) 1533.
- [36] A. A. Donkov, A. D. Donkov and E. I. Grancharova, math-physics/9807009.

- [37] A. Nikiforov, V. Ouvarov, *Fonctions spéciales de la physique mathématique*, Edition Mir, (1983).
- [38] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals series and products*, Academic Orlando, (1980).
- [39] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Washington, (1964).
- [40] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, John Wiley and Sons, (1971).
- [41] *Table of integral transforms*, edited by Erdélyi, Bateman Manuscript Project, Vol 1 , Mac-Graw Hill, New York, 1954).
- [42] R. Metzler, E. Barkai and J. Klafter, Phys. Rev. Lett. 82, 3563, (1999).