

Tome 2

OK

524

IN U BRÉVETEMENT
au C.N.R.S.

Phy

physique

TOU/524

THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie
- Paris 6 -

Par Monsieur Philippe TOURENC

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la Thèse :

RECHERCHES THEORIQUES SUR LA MISE EN EVIDENCE D'EFFETS GRAVITATIONNELS.

- Tome XI -

soutenu le 26 octobre 1976

devant le jury composé de :

Madame M.A. TONNELAT

Monsieur A. LICHNEROVICZ

Monsieur R. NATAF

Monsieur A. PAPAPETROU

Monsieur G. PETIAU

Monsieur S. BONAZZOLA

THESE de DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

ST4/4009/II

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie
- Paris 6 -

Par Monsieur Philippe TOURRENC
pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES
Sujet de la Thèse :

RECHERCHES THEORIQUES SUR LA MISE EN EVIDENCE D'EFFETS GRAVITATIONNELS.

- Tome II -

soutenue le 26 octobre 1976

devant le jury composé de :

Madame M.A. TONNELAT

Monsieur A. LICHTNEROVICZ

Monsieur R. NATAF

Monsieur A. PAPAPETROU

Monsieur G. PETIAU

Monsieur S. BONAZZOLA

SOMMAIRE

<u>INTRODUCTION</u>	p. 1
---------------------------	------

PARTIE I

LE CADRE THEORIQUE

Sommaire.....	p. 12
Introduction.....	p. 13
Chapitre 1 : Généralités.....	p. 14
Chapitre 2 : Equation de Dirac.....	p. 23
Chapitre 3 : Les Effets de type Aharonov-Bohm.....	p. 33
Conclusion.....	p. 47
Bibliographie.....	p. 48

PARTIE II

DEPLACEMENTS SPECTRAUX DES ATOMES D'HYDROGENE DANS UN CHAMP DE GRAVITATION

Sommaire.....	p. 50
Introduction.....	p. 52
Chapitre 1 : Généralités.....	p. 54
Chapitre 2 : Spectre de l'Atome d'hydrogène : Espace-Temps statique à symétrie sphérique.....	p. 72
Chapitre 3 : Spectre de l'Atome d'hydrogène : Espace-Temps conformément plat.....	p. 86
Chapitre 4 : Spectre de l'Atome d'hydrogène : Modèle d'effondrement gravitationnel.....	p. 92
Conclusion.....	p. 102
Bibliographie.....	p. 103

PARTIE III

**EFFET D'UNE RADIATION GRAVITATIONNELLE SUR DES
SYSTEMES QUANTIQUES ET ONDULATOIRES**

Sommaire.....	p.105
Introduction.....	p.106
Chapitre 1 : Particule chargée dans un champ magnétique uniforme.	p.109
Chapitre 2 : Interaction entre une Onde gravitationnelle et une onde plane scalaire.....	p.133
Conclusion.....	p.158
Bibliographie.....	p.161

PARTIE IV

CAVITES ELECTROMAGNETIQUES RESONANTES

Sommaire.....	p.163
Introduction.....	p.165
Chapitre 1 : Modèles de cavités.....	p.169
Chapitre 2 : Couplage aux limites.....	p.190
Chapitre 3 : Couplage intrinsèque.....	p.205
Chapitre 4 : Etude particulière d'un couplage intrinsèque.....	p.219
Conclusion.....	p.238
Bibliographie.....	p.240

<u>CONCLUSION</u>	p. 242
Bibliographie : Classement alphabétique.....	p. 243

P A R T I E I I I

EFFET D'UNE RADIATION GRAVITATIONNELLE SUR DES SYSTEMES QUANTIQUES ET ONDULATOIRES.

Introduction

Chapitre 1 : Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

- III-1-A : Introduction
- III-1-B : Lemme préliminaire
- III-1-C : Règles de sélections
- III-1-D : Probabilités de transition
- III-1-E : Calcul de $\bar{P}_{m\gamma \rightarrow n\alpha}$
- III-1-F : Discussion physique
- III-1-G : Particules scalaires - Etats collectifs
- III-1-H : Conclusion.

Chapitre 2 : Interaction entre une onde gravitationnelle et une onde plane scalaire : Etude des phases et des fréquences.

- III-2-A : Introduction
- III-2-B : Onde scalaire soumise à un rayonnement gravitationnel
- III-2-C : Expression des phases et des fréquences
- III-2-D : Discussion physique : Etude des phases
- III-2-E : Discussion physique : Etude des fréquences
- III-2-F : Résonance d'ordre élevé
- III-2-G : Conclusion.

Conclusion.

I N T R O D U C T I O N

La théorie de la Relativité Générale, prévoit la possibilité d'un rayonnement gravitationnel [1]. Depuis 1960, diverses tentatives ont été entreprises pour mettre en évidence ce rayonnement. Plusieurs axes de recherche se sont dégagés [2]. En 1971, une proposition de détecteur était suggérée [3]. Le principe en est l'utilisation particulière d'un phénomène de résonance. Des photons piégés dans une cavité torique, considérés comme des particules de masse nulle, tournent avec une vitesse angulaire égale à la moitié de la pulsation ω_g , d'une onde gravitationnelle se propageant perpendiculairement au plan du tore. Dans ces conditions, les composantes monochromatiques de pulsation ω_e , de l'onde associée à ces photons subiraient des déphasages d'origine gravitationnelle croissant avec le carré du temps d'expérience.

Cette proposition contient tous les éléments importants d'un principe de détecteur :

- Présence d'un moment quadrupolaire liée à la nature quadrupolaire du rayonnement gravitationnel
- Nécessité de mesures précises (phases)
- Nécessité d'exploiter des phénomènes de résonance
- Indépendance entre la fréquence ω_e du phénomène ondulatoire étudiée et la fréquence de résonance ($\frac{1}{2} \omega_g$)
- Présence (?) de résonances d'ordre 2. Il est en effet possible de montrer par des considérations de dimensions, l'intérêt des résonances d'ordre élevé conduisant à un effet proportionnel à une puissance aussi grande que possible, du temps d'expérience [4].

Guidé par ces réflexions, nous étudions dans cette partie, deux systèmes physique particuliers.

Dans le premier chapitre nous considérons un système quantifié constitué par des électrons soumis à un champ magnétique constant.

Dans le second chapitre nous considérons une onde plane, onde électromagnétique, onde de matière, soumise à des réflexions multiples. Nous étudions plus particulièrement les possibilités de résonance et nous décrivons un principe d'expérience susceptible de conduire à la détection d'ondes gravitationnelles de basses fréquences au moyen d'ondes électromagnétiques de fréquences élevées.

Dans toute cette partie nous utiliserons le cadre théorique introduit précédemment et nous limiterons notre étude à l'approximation des champs de gravitation faibles.

Avec cette approximation, il est possible de choisir un système de coordonnées isotherme dont le repère naturel est quasi galiléen. Le tenseur métrique se met sous la forme :

$$(III-0-1) \quad g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon \phi_{\mu\nu}$$

Nous considérons une onde de gravitation plane, se propageant suivant l'axe oz de ce repère, caractérisée par les relations :

$$\phi_{11} = -\phi_{22} = f(t-z)$$

(III-0-2)

$$\phi_{12} = \phi_{21} = g(t-z)$$

Les quadripotentiels électromagnétiques peuvent être développés sous la forme

$$(III-0-3) \quad A_{\mu} = \tilde{A}_{\mu} + \varepsilon \bar{A}_{\mu}$$

La quantité \tilde{A}_μ est solution des équations de Maxwell dans un espace plat et représente la partie non perturbée du champ. La grandeur $\varepsilon \bar{A}_\mu$ est la perturbation due à l'onde de gravitation.

Les équations (II-1-1'), satisfaites par le champ électromagnétique prennent, au premier ordre en ε , la forme :

$$\square \tilde{A}_\mu - \partial_\mu \partial_\rho \tilde{A}^\rho = 0$$

(III-0-4)

$$\square \varepsilon \bar{A}_\mu + \hat{\sigma} \tilde{A}_\mu + \varepsilon \phi^{\nu\rho} \partial_{\mu\rho} \tilde{A}_\nu - \phi_{\mu\alpha, \rho} \tilde{F}^{\alpha\rho} - \eta^{\nu\rho} \partial_{\mu\rho} \varepsilon \bar{A}_\nu = 0$$

Avec les notations

$$\square = \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} \quad ; \quad \hat{\sigma} = -\varepsilon \phi^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} = (\phi^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}) \partial_{\mu\nu}$$

$$A^\rho = \eta^{\rho\alpha} A_\alpha \quad ; \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu} \quad ; \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$

De façon générale les indices seront élevés (abaissés) au moyen du tenseur

$$\eta^{\mu\nu} \quad (\eta_{\mu\nu})$$

CHAPITRE I

PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE UNIFORME

III-1-A : Introduction

Considérons un système caractérisé par la donnée d'une induction magnétique constante et permanente B que nous supposons dirigée suivant l'axe oz de propagation de l'onde de gravitation. Des corpuscules de charge q sont soumis à cette induction magnétique : si on emploie le langage de l'ancienne théorie des quanta, ces corpuscules décrivent des trajectoires quantifiées.

Une analyse dimensionnelle permet d'estimer la probabilité de transition par unité de temps sous la forme :

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \sim \frac{G}{c^3} J(\omega) \cdot f(n)$$

- où $J(\omega)$ est la densité spectrale de flux gravitationnel
 ω est l'ordre de grandeur de la fréquence cyclotron
 n est un nombre quantique associé au niveau d'énergie initial.
 f est une fonction inconnue dont on peut penser qu'elle est polynomiale.
 N est le nombre de corpuscule du niveau n .

On peut réaliser des expériences précises avec des valeurs élevées de N ($n \sim 10^{10}$) [5]. Il est donc permis d'espérer a priori que $f(n)$ soit assez grand pour que les transitions induites par l'onde de gravitation soient détectables.

En l'absence d'onde de gravitation, le champ magnétique uniforme est décrit par le quadri-potentiel :

$$(III-1-1) \quad \tilde{A}_0 = 0 ; \quad \tilde{A}_1 = -A y ; \quad \tilde{A}_2 = A x ; \quad \tilde{A}_3 = 0$$

On vérifie aisément, dans la jauge de Lorentz ($\nabla_\nu A^\nu = 0$), que les équations (III-0-4) conduisent à une perturbation nulle : dans ce chapitre, le quadri-potentiel A_ν sera pris sous la forme (III-1-1). Suivant la remarque effectuée précédemment (Fin du paragraphe (I-2-B)) nous confondrons le quadri-potentiel et les coefficients de connexion affine correspondants.

Après avoir établi sous forme de ~~lemme~~ une propriété utile des opérateurs observables, nous montrerons que les transitions induites par une onde de gravitation non quantifiée sont compatibles avec l'existence d'un graviton de spin 2. Nous étudierons alors plus particulièrement les probabilités de transition par unité de temps, induite par des trains d'ondes gravitationnels incohérents et nous discuterons les résultats physiques obtenus. Dans un dernier paragraphe, nous montrerons que les résultats ne sont pas modifiés si on remplace les électrons spinoriels par des particules scalaires chargées indépendantes. Nous montrerons également que la prise en considération d'états collectifs de bosons est susceptible d'améliorer considérablement les ordres de grandeur des effets étudiés.

III-1-B : Lemme Préliminaire

Afin d'alléger les calculs ultérieurs nous allons démontrer une propriété des opérateurs à spectre discret que nous utiliserons par la suite.

Nous emploierons le formalisme de la Mécanique Quantique et plus particulièrement le formalisme de Dirac.

Enoncé

Soit A une observable à spectre discret et V un opérateur agissant sur l'espace de Hilbert, \mathfrak{H} , de la mécanique quantique. Les deux propositions suivantes sont équivalentes

$$\mathcal{P}_1 : \langle a' | V | a \rangle = \langle a' | V | a \rangle \{ \delta_{a', a+k} + \delta_{a', a-k} \}$$

$$\mathcal{P}_2 : [A, [A, V]] = k^2 V$$

pour $k \neq -k$.

k est un nombre réel non nécessairement entier.

On a utilisé la notation $|a\rangle$ pour représenter une base de \mathfrak{H} , formée de vecteurs propre de A :

$$(III-1-2) \quad A |a\rangle = a |a\rangle$$

$\{a\}$ est une suite de valeurs discrètes.

Démonstration

a) $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$

Définissons les opérateurs V_+ et V_- :

$$\langle \alpha' \alpha' | V_+ | \alpha \alpha \rangle = \langle \alpha' \alpha' | V | \alpha \alpha \rangle \delta_{\alpha', \alpha+k}$$

$$\langle \alpha' \alpha' | V_- | \alpha \alpha \rangle = \langle \alpha' \alpha' | V | \alpha \alpha \rangle \delta_{\alpha', \alpha-k}$$

D'après \mathcal{P}_1 on a $V = V_+ + V_-$

Un calcul des commutateurs $[A, V_{\pm}]$ donne :

$$[A, V_{\pm}] = \pm K V_{\pm}$$

il vient alors

$$[A, V] = K (V_+ - V_-)$$

et

$$[A, [A, V]] = K^2 V$$

b) $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$

D'après \mathcal{P}_2 on a

$$V = \frac{1}{K^2} [A, [A, V]]$$

En utilisant la relation (III-1-2), il vient :

$$\langle a'a' | V | a a \rangle = \frac{(a' - a)^2}{k^2} \langle a'a' | V | a a \rangle$$

Soit encore

$$\langle a'a' | V | a a \rangle = \langle a'a' | V | a a \rangle \{ \delta_{a', a+k} + \delta_{a', a-k} \}$$

Généralisations

Ce lemme se généralise sans difficulté sous la forme suivante :

Soit A une observable à spectre discret et k_1, \dots, k_m une suite de nombres distincts.

soit β_n défini par l'identité

$$\sum_0^m \beta_n x^n \equiv \prod_{i=1}^m (x - k_i)$$

soit $X^{(n)}$ la suite d'opérateur obtenu par récurrence :

$$X^{(0)} = V \quad ; \quad X^{(n)} = [A, X^{(n-1)}]$$

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{P}_1 : \langle a'a' | V | a a \rangle = \langle a'a' | V | a a \rangle \{ \delta_{a', a+k_1} + \dots + \delta_{a', a+k_m} \}$$

$$\mathcal{P}_2 : \sum_0^m \beta_n X^{(n)} = 0$$

cette dernière forme n'étant pas utilisée par la suite nous n'en donnerons aucune démonstration. Remarquons seulement que la relation \mathcal{P}_1 implique pour la suite K_1, \dots, K_m d'être constituée par une suite de nombres K_{i_1}, \dots, K_{i_p} et de leurs opposés $-K_{i_1}, \dots, -K_{i_p}$, quand V est hermitique.

Il est également possible de généraliser formellement, au spectre continu le lemme démontré ci-dessus.

Soit K un nombre non nul et A une observable de valeur propre a .

Soit V un opérateur de l'espace de Hilbert.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$\mathcal{P}_1: \begin{cases} \langle a'a' | V | a a \rangle = f_+(a'a'd) \delta(a' - (a+K)) + f_-(a'a'd) \delta(a' - (a-K)) \\ f_+ \text{ et } f_- \text{ sont des fonctions intégrables de } a \text{ et } a' \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_2: [A, [A, V]] = K^2 V$$

Pour démontrer l'implication $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$ on introduit les opérateurs V_+ et V_- :

$$\langle a'a' | V_{\pm} | a a \rangle = f_{\pm} \delta(a' - (a \pm K))$$

La démonstration se poursuit alors comme ci-dessus.

Pour démontrer l'implication $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$ on démontre comme précédemment la relation

$$\langle a'a' | V | a a \rangle ((a'-a)^2 - K^2) = 0$$

ce qui implique au sens des distributions, la relation \mathcal{P}_1 .

III-1-C : Règles de sélections

A l'approximation des champs faibles, l'équation de Dirac prend la forme (I-2-10) :

$$i \gamma^{\mu} \left(\delta_{\mu}^{\nu} - \frac{\varepsilon}{2} \phi_{\mu}^{\nu} \right) \left(\partial_{\nu} + i A_{\nu} - \frac{\varepsilon}{8} \phi_{\mu\nu} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \right) \psi = m \psi$$

Remplaçons le quadri-potentiel par son expression (III-1-1) et la grandeur ϕ par sa valeur (III-0-2). L'équation de Dirac se met sous la forme (II-1-15) :

$$(III-1-3) \quad i \partial_0 \psi = (H_0 + V) \psi$$

$$H_0 = -i \gamma^0 \gamma^{\bar{\nu}} \partial_{\bar{\nu}} + \gamma^0 \gamma^{\bar{\nu}} A_{\bar{\nu}} + \gamma^0 m$$

$$(III-1-4) \quad V = \varepsilon \left\{ -\frac{i}{2} f(t-z) (\gamma^0 \gamma^1 \partial_1 - \gamma^0 \gamma^2 \partial_2) \right. \\ \left. - \frac{i}{2} g(t-z) (\gamma^0 \gamma^1 \partial_2 + \gamma^0 \gamma^2 \partial_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f(t-z) (\gamma^0 \gamma^1 A_1 - \gamma^0 \gamma^2 A_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g(t-z) (\gamma^0 \gamma^1 A_2 + \gamma^0 \gamma^2 A_1) \right\}$$

Nous utiliserons par la suite les notations de Dirac avec les conventions définies ci-dessus (II-1-D) et nous utiliserons des méthodes perturbatives limitées, pour des raisons de cohérence, au premier ordre en ε .

Soit $|n \alpha t\rangle$ une base des solutions de l'équation non perturbée ($V=0$) :

$$i \partial_t |n \alpha t\rangle = H_0 |n \alpha t\rangle = E_n |n \alpha t\rangle$$

cherchons $|\Psi\rangle$ sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n\alpha} C_{n\alpha}(t) |n \alpha t\rangle$$

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on ait les conditions initiales

$$C_{n\alpha}(0) = \delta_{nm} \delta_{\alpha\gamma}$$

Il vient

$$(III-1-5) \quad C_{n\alpha}(t) = \delta_{nm} \delta_{\alpha\gamma} - i \int_0^t \langle n \alpha t' | V | m \gamma t' \rangle dt'$$

Les seules transitions possibles se produisent donc entre des états couplés par l'opérateur V .

Considérons l'opérateur J_z :

$$J_z = L_z + \Sigma_z$$

Avec

$$L_z = x p_y - y p_x = -i x \partial_y + i y \partial_x$$

$$\Sigma_z = \frac{i}{2} [Y^1, Y^2]$$

Si l'onde de gravitation a une extension limitée et que l'électron considéré est enfermé dans une boîte, l'opérateur J_z peut être interprété comme opérateur de moment cinétique avant et après le passage du paquet d'ondes gravitationnelles.

Un calcul direct conduit aux relations de commutation :

$$(III-1-6) \quad [J_z, H_0] = 0$$

$$(III-1-7) \quad [J_z, [J_z, V]] = 4V$$

Supposons que $|\Psi\rangle$ soit initialement un état propre de J_z . La relation (III-1-6) implique qu'en absence de gravitation $|\Psi\rangle$ reste un état propre de J_z .

La relation (III-1-7) implique, compte tenu du lemme (III-1-3), que les seules transitions possibles induites par la gravitation sont soumises aux règles de sélection

$$(III-1-8) \quad \Delta J_z = \begin{cases} -2 \\ 0 \\ +2 \end{cases}$$

De même on peut vérifier les relations

$$(III-1-9) \quad [P_z, H_0] = 0 \quad ; \quad [P_z, V] = i\dot{V}$$

avec $P_z = -i \frac{\partial}{\partial z} \quad ; \quad \dot{V} = \frac{dV}{dt}$

Si on considère une onde sinusoïdale ($\ddot{V} = -\Omega^2 V$) il vient

$$(III-1-10) \quad [P_z, [P_z, V]] = \Omega^2 V$$

ce qui implique la quantification des échanges d'impulsion :

$$(III-1-11) \quad \Delta P_z = \begin{cases} -\Omega \\ 0 \\ +\Omega \end{cases}$$

On peut également montrer la quantification des échanges d'énergie.

Soit $|n, p, a\rangle$ une base de l'espace des états telle que :

$$H_0 |n, p, a\rangle = E_n |n, p, a\rangle$$

$$P_z |n, p, a\rangle = p |n, p, a\rangle$$

Les relations (III-1-9) impliquent

$$\langle n, p, a | V(t) | m, k, a \rangle = e^{i(k-p)t} \langle n, p, a | V(0) | m, k, a \rangle$$

La théorie des perturbations conduit alors à l'expression

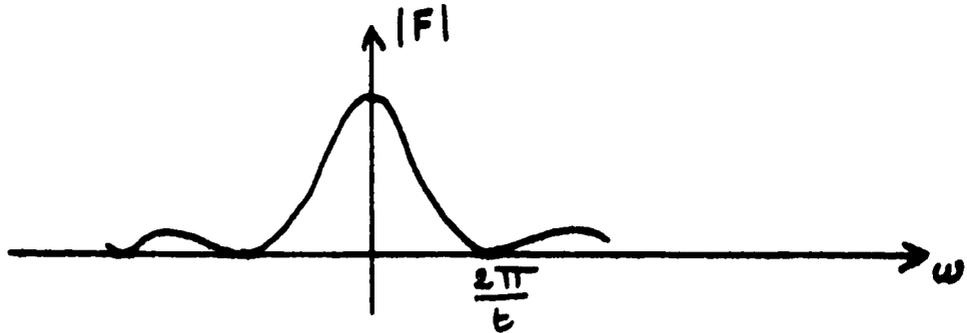
$$C_{n, p, a}(t) = C_{n, p, a}(0) - \sum_{m, k, a} \langle n, p, a | V(0) | m, k, a \rangle C_{m, k, a}(0) F_{n, p, m, k}(t)$$

Avec

$$F = \frac{e^{i\omega t} - 1}{i\omega}$$

$$\omega = E_n - E_m + k - p$$

La fonction F est bien connue en théorie de la diffraction. Nous représentons son module



Seules les transitions satisfaisant à la relation

$$|\omega| < \frac{2\pi}{t}$$

donnent des effets notables. Pour t assez grand ($t\Omega \gg 1$) il vient

$$(III-1-12) \quad E_n - E_m = (P - K) \left(1 + O\left(\frac{1}{t\Omega}\right) \right)$$

L'impulsion totale transférée au système est donc égale à l'énergie gagnée par le système.

Les relations (III-1-8), (III-1-11) et (III-1-12) sont compatibles avec la notion de graviton d'énergie $\hbar\Omega$, d'impulsion $\hbar\Omega/c$ et de moment cinétique $2\hbar$.

Cette situation très voisine de celle rencontrée en électromagnétisme est un argument puissant en faveur de la quantification du champ de gravitation.

III-1-D : Probabilités de transition

Considérons un train d'ondes gravitationnel et décomposons V (cf III-1-4) en intégrales de Fourier :

$$V = \int e^{i\omega(t-z)} V(\omega) d\omega$$

L'expression (III-1-5) devient

$$C_{nd}^{(t)} = \delta_{nm} \delta_{d\gamma} - \int d\omega \frac{e^{i(\omega+\omega_{nm})t} - 1}{\omega + \omega_{nm}} \langle nd | e^{-i\omega z} V(\omega) | m\gamma \rangle$$

Avec les notations

$$|ndt\rangle = e^{-iE_n t} |nd\rangle$$

$$\omega_{nm} = E_n - E_m$$

Ainsi pour une onde sinusoïdale de pulsation ω on obtient la probabilité de transition

$$(III-1-13) \quad \mathcal{P}_{m\gamma \rightarrow nd}(\omega) = \left| \langle nd | e^{-i\omega z} V(\omega) | m\gamma \rangle \right|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega + \omega_{nm}}{2} t\right)}{\left(\frac{\omega + \omega_{nm}}{2}\right)^2}$$

Afin de dégager l'ordre de grandeur des effets concernant les transitions induites, nous allons poursuivre le calcul sous les trois hypothèses suivantes

1) L'onde de gravitation est polarisée de telle sorte que l'on ait

$$g = 0$$

2) Les longueurs d'ondes des rayonnements sinusoïdaux qui constituent le train d'ondes gravitationnelles sont beaucoup plus grandes que l'extension du

système suivant l'axe oz :

$$e^{-i\omega z} \approx 1$$

3) Les différentes ondes sinusoïdales qui constituent le rayonnement gravitationnel sont incohérentes, de telle sorte que la probabilité de transition, $\overline{\mathcal{P}}$, s'obtient en sommant les probabilités de transition associées à chacune des ondes sinusoïdales.

L'hypothèse 1) n'est pas restrictive compte tenu de l'hypothèse 3) ; en effet l'onde possède deux polarisations distinctes :

la polarisation f pour laquelle on a $g = 0$
 la polarisation g pour laquelle on a $f = 0$

Quand on fait l'hypothèse d'une onde aléatoire (hypothèse 3) on suppose l'absence de cohérence de phase entre les deux polarisations ce qui conduit dans le calcul de $\overline{\mathcal{P}}$ à additionner les effets correspondants à chacune des polarisations, calculés indépendamment l'un de l'autre.

Pour déterminer l'effet d'une onde de polarisation g , on peut effectuer le changement de coordonnées

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

il vient alors les expressions

$$d_1^2 = dt^2 - \{ (1 + \varepsilon g) dx'^2 + (1 - \varepsilon g) dy'^2 + dz^2 \}$$

$$A_1' = -A y' \quad A_2' = A x'$$

Dans ce système de coordonnées le problème posé satisfait l'hypothèse 1) ce qui implique l'identité des effets produits par les deux types d'ondes en ce qui concerne les transitions de moment cinétique et d'énergie, ainsi que le même ordre de grandeur pour l'expression de $\overline{\mathcal{P}}$ si les flux d'énergie gravitationnelle sont comparables.

Considérons une onde de gravitation sinusoïdale :

$$f(t-z) = 2 f(\omega) \sin \omega(t-z) = -i f(\omega) \left\{ e^{i\omega(t-z)} - e^{-i\omega(t-z)} \right\}$$

L'expression (III-1-13) devient

$$\mathcal{P}_{mr=nd} = \frac{\varepsilon^2}{4} f^2(\omega) \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\omega + \omega_{nm})t}{\left[\frac{1}{2}(\omega + \omega_{nm}) \right]^2} |\langle nd | W | mr \rangle|^2$$

avec

$$\omega = \pm \Omega$$

$$W = Y^0 Y^e (A_y + P_y) - Y^0 Y^1 (A_z + P_z)$$

$$P_z = -i \frac{\partial}{\partial z} \quad P_y = -i \frac{\partial}{\partial y}$$

$$A_z = A_1 = -A_y \quad A_y = A_2 = A_x$$

En utilisant le pseudo tenseur impulsion énergie [6] on peut exprimer

$\varepsilon^2 f^2(\omega)$ en fonction du flux d'énergie incident par unité de surface I :

$$\varepsilon^2 f^2(\omega) = \frac{8 \pi G I}{c^3 \omega^2}$$

Soit $\mathcal{J}(\omega) d\omega$ le flux d'énergie gravitationnelle incident par unité de surface dans l'intervalle de fréquence $\omega, \omega + d\omega$. On obtient $\overline{\mathcal{P}}$ en

remplaçant $\varepsilon^2 f^2(\omega)$ par l'expression $\frac{8 \pi G \mathcal{J}(\omega) d\omega}{c^3 \omega^2}$ et en intégrant sur $\omega^{(*)}$.

(*) Le modèle étudié est en fait celui d'un signal, f , aléatoire. $\mathcal{J}(\omega)$ représente la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal. Celui-ci étant réel, la fonction $\mathcal{J}(\omega)$ est paire.

Soit $\Delta \omega$ la largeur du spectre de fréquences pour l'impulsion gravitationnelle incidente. Supposons satisfaite la relation

$$t \Delta \omega \gg 1$$

Nous obtenons alors la probabilité de transition par unité de temps sous la forme

$$(III-1-14) \quad \overline{P}_{m\gamma \rightarrow n\alpha} = \frac{4\pi^2 G}{c^3} |\langle n\alpha | W | m\gamma \rangle|^2 \frac{J(\omega_{nm})}{(\omega_{nm})^2}$$

III-1-E : Calcul de $\overline{P}_{m\gamma \rightarrow n\alpha}$

On vérifie aisément la relation

$$(III-1-15) \quad W = i [x P_x, H_0] - i [y P_y, H_0]$$

ce qui conduit à l'expression

$$(III-1-16) \quad |\langle n\alpha | W | m\gamma \rangle|^2 = \omega_{nm}^2 |\langle n\alpha | x P_x - y P_y | m\gamma \rangle|^2$$

L'expression (III-1-15) n'est pas modifiée si on introduit explicitement la célérité C de la lumière par des considérations de dimensions. L'expression de (III-1-16), développée à l'ordre le plus bas en $1/C$, s'obtient donc en remplaçant le spineur $|m\gamma\rangle$ par le spineur ψ à deux composantes, solution de l'équation de Dirac non perturbée à l'approximation non relativiste, (encore appelée équation de Pauli):

$$i \partial_0 \psi = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A})^2 \psi + \frac{\sigma^3 A}{m} \psi$$

avec

$$(\vec{A})_z = -A_z$$

Par la suite nous conservons la notation $|m\rangle$ pour les spineurs ψ , à deux composantes.

Introduisons les opérateurs a_x et a_y :

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta x + i \frac{p_x}{\beta \hbar} \right) \quad \beta = \left(\frac{m \omega_0}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \omega_0 = \frac{A}{m}$$

$$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta y + i \frac{p_y}{\beta \hbar} \right)$$

Définissons les opérateurs d'annihilation de quanta circulaires :

$$a_d = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y)$$

$$a_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + i a_y)$$

Considérons l'ensemble complet d'observables qui commutent :

$$P_z, S_z, N_d, N_g$$

$$\text{Avec } P_z = -i \frac{\partial}{\partial z} ; S_z = \frac{1}{2} \sigma^3 ; N_d = a_d^+ a_d ; N_g = a_g^+ a_g$$

Il est aisé de se rendre compte que P_z et S_z sont conservés dans les transitions induites : nous n'écrirons pas les valeurs propres correspondantes dans la base associée aux observables ci-dessus.

Un calcul sans difficulté conduit à l'expression :

$$\langle n_d n_g | x P_x - y P_y | m_d m_g \rangle = \frac{i}{2} \left\{ (m_d+1)(m_d+2)^{\frac{1}{2}} \delta_{n_g, m_g} \delta_{m_d, m_d+2} \right.$$

$$(III-1-17) \quad + (m_g+1)(m_g+2)^{\frac{1}{2}} \delta_{n_d, m_d} \delta_{n_g, m_g+2}$$

$$- (m_d(m_d-1))^{\frac{1}{2}} \delta_{n_g, m_g} \delta_{m_d, m_d-2}$$

$$\left. - (m_g(m_g-1))^{\frac{1}{2}} \delta_{n_d, m_d} \delta_{n_g, m_g-2} \right\}$$

Nous distinguons quatre phénomènes caractérisés par leurs probabilités dans l'unité de temps obtenues à partir des expressions (III-1-14), (III-1-16) et (III-1-17) :

$$1) \quad \overline{P}_{m_d, m_q \rightarrow m_d, m_q+2} = \frac{\pi^2 G}{c^3} J(0) (m_q+1)(m_q+2)$$

$$2) \quad \overline{P}_{m_d, m_q \rightarrow m_d, m_q-2} = \frac{\pi^2 G}{c^3} J(0) m_q (m_q-1)$$

$$3) \quad \overline{P}_{m_d, m_q \rightarrow m_d+2, m_q} = \frac{\pi^2 G}{c^3} J(4\omega_0) (m_d+1)(m_d+2)$$

$$4) \quad \overline{P}_{m_d, m_q \rightarrow m_d-2, m_q} = \frac{\pi^2 G}{c^3} J(4\omega_0) m_d (m_d-1)$$

L'hamiltonien, H , non perturbé et la composante L_z du moment cinétique orbital s'écrivent sous la forme :

$$H = 2(N_d + \frac{1}{2})\omega_0 + \frac{P_z^2}{2m} + \omega_0 \sigma^3$$

$$L_z = x P_y - y P_x = N_d - N_q$$

Il est donc possible d'interpréter les phénomènes 1) et 2) de la façon suivante : les ondes de gravitation de fréquence, Ω , assez petites conduisent à des transitions de moment cinétique dans la largeur de raie des niveaux. Si T est la température thermodynamique du système on peut penser que ce phénomène apparaît pour

$$\hbar \Omega \lesssim k T$$

où K est la constante de Boltzmann

Le phénomène 3) concerne l'absorption d'énergie gravitationnelle par le système, le phénomène 4) concerne l'émission stimulée.

Les résultats obtenus sont compatibles avec l'existence d'un graviton de spin 2. Ils sont comparables avec ceux obtenus en électromagnétisme. Remarquons que l'équidistance des niveaux d'énergie exclue la possibilité d'amplification du rayonnement gravitationnel par un tel système : le Bilan des phénomènes 3) - 4) se traduit toujours par une absorption d'énergie gravitationnelle.

III-1-F : Discussion physique

Pour mettre en évidence les ordres de grandeurs concernant le phénomène étudié, nous considérons le dispositif suivant.

Des électrons de masse m dont la vitesse v a une faible composante sur l'axe Oz décrivent une hélice à pas serré, d'axe Oz , constituant ainsi un courant d'intensité i . Soit L la longueur utile le long de l'axe Oz et T le temps de transit dans l'appareil. Nous supposons que l'énergie cinétique due au mouvement de translation suivant Oz est négligeable devant l'énergie, E , des électrons :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{L}{T} \right)^2 \ll E$$

La fréquence cyclotron vaut ici

$$\omega_c = 2 \omega_0 = \frac{eB}{m}$$

Il vient pour ordre de grandeur

$$m_d \approx \frac{E m}{\pi e B}$$

Le nombre d'électrons soumis en permanence à l'effet étudié est

$$N = \frac{iT}{e}$$

En utilisant les résultats du paragraphe précédent on peut trouver l'ordre de grandeur du nombre des transitions induites par unité de temps à partir d'un niveau initial supposé unique :

$$(III-1-18) \quad \frac{dN}{dt} \sim \frac{\pi^2 G}{c^3} \mathcal{J}(2\omega_c) \cdot \frac{iT}{e} \left(\frac{mE}{\hbar Be} \right)^2$$

Sans préjuger des possibilités de réalisations expérimentales nous pouvons évaluer l'ordre de grandeur des flux théoriques maximaux.

Dans un but heuristique prenons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(2\omega_c) &= 10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \\ i &= 10^{-3} \text{ A} \\ T &= 2 \cdot 10^{-3} \text{ s} \\ E &= 5 \cdot 10^4 \text{ e-v} \\ B &= 10^{-3} \text{ T} \end{aligned}$$

on trouve alors

$$\frac{dN}{dt} \approx 5 \cdot 10^4 \quad \text{électrons/seconde}$$

$$\omega_c \approx 1,8 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Sur le plan théorique, le système étudié met en évidence des effets intéressants. Sur le plan pratique il est douteux que les phénomènes considérés puissent conduire à des manifestations observables. En effet nous avons supposé les électrons définis parfaitement en énergie et nous avons négligé les transitions de nature thermique. En outre rien ne permet de supposer qu'il existe un rayonnement gravitationnel de fréquence élevé (10^8 Hz) dont la densité spectrale atteigne la valeur choisie ici ($10^3 \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$).

La relation (III-1-18) montre clairement que l'effet étudié, est, pour une densité spectrale donnée, d'autant plus important que le quantum $(\hbar \omega_c)^2$ est petit. Pour les faibles valeurs de $\hbar \omega_c$ et les grandes valeurs de m_d nous pouvons nous contenter de l'approximation non quantique. Nous décrirons alors le mouvement des électrons par l'équation de Jacobi que nous interpréterons le cas échéant comme l'équation satisfaite par la phase de l'onde électronique suivant la méthode B.K.W.

III-1-G : Particules scalaires - Etats collectifs

Dans les paragraphes III-1-C à III-1-F nous avons essentiellement considéré des particules spinorielles (électron). Nous allons montrer que l'ensemble des résultats n'est pas modifié si on prend en considération des particules scalaires.

Dans le cadre théorique introduit dans la première partie, l'opérateur de D'Alembert se généralise ainsi :

$$D^\nu D_\nu \Psi = g^{\mu\nu} \{ (\partial_\mu + iA_\mu) (\partial_\nu + iA_\nu) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (\partial_\alpha + iA_\alpha) \} \Psi$$

Avec les conditions (III-0-2) pour le tenseur métrique et (III-1-1) pour le quadri-potential, on obtient l'équation d'onde associée à des particules de masse M sous la forme

$$\begin{aligned} & \{ \eta^{\mu\nu} (\partial_\mu + iA_\mu) (\partial_\nu + iA_\nu) - \epsilon f (\partial_1 + iA_1) (\partial_1 + iA_1) \\ & \quad + \epsilon f (\partial_2 + iA_2) (\partial_2 + iA_2) \\ & \quad - \epsilon g (\partial_1 + iA_1) (\partial_2 + iA_2) \\ & \quad - \epsilon g (\partial_2 + iA_2) (\partial_1 + iA_1) + M^2 \} \Psi = 0 \end{aligned}$$

(III-1-19)

Nous nous limitons comme précédemment au cas $\psi = \psi$;
 L'approximation non relativiste de l'équation (III-1-19) s'écrit :

$$i \partial_0 \psi = H_0 \psi + V \psi$$

$$H_0 = \frac{1}{2M} (\vec{P} - \vec{A})^2 ; (\vec{P})_{(p)} = -i \vec{\partial}_p$$

$$V = \frac{e f}{2M} \left\{ (\vec{P} - \vec{A})_{(1)}^2 - (\vec{P} - \vec{A})_{(2)}^2 \right\}$$

$$\psi = e^{i M t} \psi$$

Nous maintenons les hypothèses faites en (III-1-10) sur la structure du rayonnement gravitationnel. On montre alors directement la relation

$$V = \frac{e f}{2i} \left\{ [z P_z, H_0] - [y P_y, H_0] \right\}$$

Cette relation est à rapprocher de (III-1-15). Un calcul identique à celui effectué au paragraphe (III-1-B) conduit aux mêmes résultats.

La discussion des ordres de grandeurs reste la même et la discussion du paragraphe précédent est inchangée. Néanmoins le fait que les particules étudiées soient des bosons peut conduire à un accroissement de l'effet si on prend en considération des états collectifs de particules et non des particules individuelles. A titre d'exemple nous le montrerons dans un cas particulier.

Considérons un ensemble de N bosons qui se distinguent par leur seul nombre m_i . L'état du système est décrit par l'état symétrisé.

$$|i\rangle = S |1; m_{i1}\rangle |2; m_{i2}\rangle \dots |N; m_{iN}\rangle$$

S est ici l'opérateur de symétrisation.

L'opérateur W introduit en (III-1-15) se met sous la forme

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_N$$

où W_k agit sur le ket $|k; m\rangle$

Considérons l'état propre de l'énergie, normalisé, $|i\rangle$:

$$|i\rangle = S |i_1; m_1\rangle |i_2; m_2\rangle \dots |i_k; m_k\rangle |i_{k+1}; m_{k+1}\rangle \dots |i_N; m_{N+1}\rangle$$

Le ket $|i\rangle$ est un état propre d'énergie E_i :

$$E_i = \hbar \omega_c (m + \frac{1}{2}) K + \hbar \omega_c (m + s + \frac{1}{2}) (N - K)$$

$W|i\rangle$ se décompose sur les états propres de l'énergie, soit $|i\rangle$ et ses conjugués sur le sous espace d'énergie $E_i + 2 \hbar \omega_c$

Compte tenu de (III-1-15) et (III-1-17) on a relation

$$W_k |k; m\rangle = \omega_c \sqrt{(m+1)(m+2)} |k; m+2\rangle + \dots + |k; m\rangle + \dots + |k; m-2\rangle$$

Soit pour $m \gg 1$

$$W_k |k; m\rangle \approx \omega_c m |k; m+2\rangle + \dots + |k; m\rangle + \dots + |k; m-2\rangle$$

Le ket $|i\rangle$ apparaît comme une somme de C_N^k vecteurs orthogonaux

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_N^k}} \sum_{(C_N^k)} |i_1; m_1\rangle \dots |i_k; m_k\rangle |i_{k+1}; m_{k+1}\rangle \dots |i_N; m_{N+1}\rangle$$

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Il est possible d'étudier l'action de W sur le ket $|k\rangle$. On obtient alors la relation

$$\langle k | W | k \rangle = \omega_c^2 m^2 \{ N + K(N-K) \}$$

La probabilité d'absorption d'un quantum d'énergie gravitationnelle est donc ici (cf III-1-14) :

$$\bar{P}_{\text{coll}} = \frac{\pi^2 G}{c^3} m^2 \{ N + K(N-K) \} \mathcal{J}(2\omega_c)$$

Pour N corpuscules considérés isolément on aurait eu

$$(III-1-20) \quad \bar{P} = \frac{\pi^2 G}{c^3} m^2 N \mathcal{J}(2\omega_c)$$

Si on prend $K \approx \frac{N}{2} \gg 1$ il vient

$$(III-1-21) \quad \bar{P}_{\text{coll}} \approx \frac{N}{4} \bar{P}$$

Remarquons que les résultats obtenus tiennent essentiellement au fait que le principe d'exclusion de Pauli ne joue pas pour des Bosons. Pour des états collectifs de fermions le résultat obtenu aurait été de type III-1-20 .

III-1-H : Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié un système particulier présentant un moment quadrupolaire et susceptible de "répondre" à une sollicitation gravitationnelle. Nous avons souligné par des arguments simples l'intérêt théorique d'une quantification du champ de gravitation.

En étudiant les ordres de grandeur des effets induits par le rayonnement gravitationnel nous avons souligné la nécessité de minimiser le bruit thermique et l'intérêt d'utiliser des bosons susceptibles de conduire à des états collectifs.

Il semble donc que les paires de Cooper dans les supraconducteurs puissent être de bons candidats ($q = 2e$, $2m = M$). On peut en effet évaluer à 10^6 [7-8] le nombre de paires recouvertes par la fonction d'onde de l'une d'entre elles. Ce nombre peut être considéré comme une indication sur la valeur de N et conduit sans doute à un gain de plusieurs ordres de grandeurs par rapport à la situation évoquée ci-dessus au paragraphe (III-1-F), concernant N corpuscules indépendants.

Il convient de souligner que notre propos n'est pas de présenter un principe de mesure, mais seulement de mettre en évidence la nature d'un phénomène physique et les conditions optimales de sa production. Dans ce sens nous pensons que l'état supraconducteur présente un grand intérêt pour l'étude des champs gravitationnels ondulatoires faibles.

CHAPITRE II

INTERACTION ENTRE UNE ONDE GRAVITATIONNELLE ET UNE ONDE PLANE SCALAIRE

ETUDE DES PHASES ET DES FREQUENCES

III-2-A : Introduction

Nous avons vu, dans un cas particulier, l'intérêt de considérer des états collectifs de bosons. De tels états peuvent être décrits par une onde satisfaisant l'équation de D'Alembert généralisée :

$$(III-2-1) \quad D^\nu D_\nu \psi + M^2 \psi = 0$$

Dans le vide, l'équation (III-2-1) est susceptible de décrire une onde électromagnétique ; ψ est alors le quadri-potential, A_ν , et M est pris nul. Il est possible de décomposer ψ sous la forme

$$(III-2-2) \quad \psi = A e^{iS}$$

où S est un scalaire : la phase. Les grandeurs A et S sont réels. Pour des états collectifs, la phase est susceptible d'une bonne définition physique et l'expression (III-2-2) fournit une description convenable de la réalité.

En portant l'expression (III-2-2) dans l'équation (III-2-1) il vient :

$$(III-2-3) \quad D^\nu D_\nu A - A D^\nu S D_\nu S + M^2 A = 0$$

$$(III-2-4) \quad 2 D^\nu A D_\nu S + A D^\nu D_\nu S = 0$$

Cette dernière équation conduit à la relation de conservation

$$D_\nu (A^2 D^\nu S) = 0$$

Cette relation est compatible avec l'interprétation suivante :

$$\sqrt{g} A^2 \quad = \text{densité de corpuscules élémentaires du champ considéré}$$
$$\partial_\nu S \quad = \text{quadri impulsion d'un élément du champ.}$$

Il est possible de simplifier l'équation (III-2-3), dans les conditions de l'optique géométrique (Approximation eikonale)

$$(III-2-5) \quad D^\nu S D_\nu S = M^2$$

Cette équation est analogue à l'équation de Jacobi associée à des particules classiques de masse M . Elle implique que la trajectoire des particules classique soit une géodésique.

L'équation (III-2-5) est acceptable lorsque les longueurs d'ondes, λ , associées aux corpuscules sont petites devant les longueurs caractérisant les variations du tenseur métrique. Pour une onde de gravitation de longueur d'onde λ_g il vient la condition

$$\lambda \ll \lambda_g$$

Nous envisagerons par la suite des systèmes physiques pour lesquels l'onde ψ est réfléchi sur des "miroirs". Nous supposons les réflexions parfaites :

- S est continue
- $u^\nu \partial_\nu S$ est continu

Le quadrivecteur u^ν est ici le quadrivecteur tangent à la ligne d'univers associée au miroir. L'équation (III-2-5) est alors acceptable si la distance entre les miroirs est grande devant la longueur d'onde λ .

Nous supposerons satisfaites les conditions de validité de l'équation (III-2-5). Nous étudierons alors le comportement des phases et des fréquences dans un champ de gravitation décrit à l'approximation linéaire (III-0-1) et nous particulariserons notre étude au cas d'une onde de gravitation sinusoïdale (III 02) :

$$(III-2-6) \quad \phi_{11} = -\phi_{22} = f(t-z) = f \sin(\Omega(t-z) + d) ; \quad g(t-z) = 0$$

Dans ce dernier cas nous supposerons que l'extension suivant l'axe $0z$, du système physique considéré est très inférieure à la longueur d'onde du rayonnement gravitationnel ce qui permet de poser

$$f(t-z) \approx f(t)$$

Il est possible d'aborder l'étude de l'équation (III-2-5) en privilégiant soit la vitesse de phase, soit la vitesse de groupe. Dans le travail qui suit, nous donnerons des exemples correspondant à chacune des démarches mais nous développerons plus particulièrement la seconde.

III-2-B : Onde scalaire soumise à un rayonnement gravitationnel

Pour un champ scalaire, Ψ , de masse M , l'équation de D'Alembert s'écrit, compte tenu de la forme (III-2-6) de la métrique :

$$\square \Psi - \varepsilon f(t) \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) + M^2 \Psi = 0$$

Décomposons Ψ sous la forme (*):

$$\Psi = \int C_{\vec{k}}(t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k} \quad ; \quad \vec{k} \cdot \vec{x} = k_1 x + k_2 y + k_3 z$$

on obtient l'équation

$$\ddot{C}_{\vec{k}} + (M^2 + \vec{k}^2) C_{\vec{k}} + \varepsilon f(t) (k_1^2 - k_2^2) C_{\vec{k}} = 0$$

Le symbole ($\dot{}$) désigne une dérivation par rapport au temps, t .

Lorsqu'aucune confusion n'est possible nous n'écrirons pas l'indice \vec{k} .

Posons

$$C = A e^{i\varphi}$$

avec A et φ réels. Dans le cadre physique défini précédemment (III-2-A), il vient

$$(III-2-7) \quad \dot{A}^2 \dot{\varphi} = cte$$

$$(III-2-8) \quad \dot{\varphi}^2 = (\vec{k}^2 + M^2) + \varepsilon f(t) (k_1^2 - k_2^2)$$

Au premier ordre en ε on obtient

$$(III-2-9) \quad \dot{\varphi} = \tilde{\omega} \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon f(t) \frac{k_1^2 - k_2^2}{\tilde{\omega}^2} \right)$$

avec
$$\tilde{\omega} = \pm (\vec{k}^2 + M^2)^{\frac{1}{2}}$$

(*) Il est clair qu'une telle décomposition implique une résolution parfaite de l'appareil de mesure. Dans certains cas une décomposition en porteuse + modulation est plus pertinente.

La phase, $S_{\vec{k}}$, associée à chacune des ondes planes composant le paquet, ψ , s'écrit

$$S_{\vec{k}} = \varphi_{\vec{k}}(t) + \vec{k} \cdot \vec{x}$$

Ainsi pour une onde plane on peut considérer que, seule, la pulsation, ω , est modifiée ($\omega = \dot{\varphi}$). La direction de propagation reste inchangée.

Il est possible de déterminer la vitesse de phase \vec{v} : celle-ci est colinéaire à \vec{k} et satisfait la relation :

$$\partial_0 S + v^{\bar{p}} \partial_{\bar{p}} S = 0$$

Soit V le module de \vec{v} et \tilde{v} l'expression correspondante pour $\epsilon = 0$ il vient :

$$\tilde{v} = \frac{|\tilde{\omega}|}{|\vec{k}|}$$

$$(III-2-10) \quad V = \tilde{v} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \epsilon f(t) \frac{k_1^e - k_2^e}{\tilde{\omega}^2} \right\}$$

Dans le cas de l'optique ($M = 0$) on peut interpréter la présence du terme en ϵ dans l'expression (III-2-10), comme une variation de l'indice η du milieu

$$\eta = 1 - \frac{1}{2} \epsilon f(t) (n_1^2 - n_2^e)$$

avec \vec{h} , vecteur unitaire parallèle à \vec{k} .

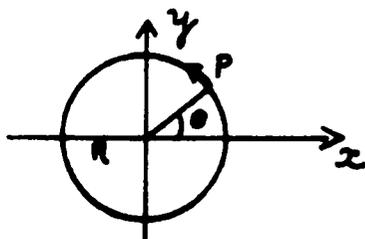
Cette dernière expression est susceptible de se généraliser dans le cadre de la théorie linéaire, sous la forme

$$(III-2-11) \quad \eta = 1 - \frac{1}{2} \epsilon \phi_{\bar{p}\bar{j}} n^{\bar{p}} n^{\bar{j}} \quad \text{pour} \quad \phi_{0\bar{p}} = 0$$

Sur la base de cette interprétation diverses expériences ont été proposées [9 ; 10] . Nous ne développerons pas cet aspect davantage ici.

Il est possible d'utiliser l'expression (III-2-10) de la vitesse de phase pour mettre en évidence un phénomène de résonance.

Supposons que, par de multiples réflexions, les particules soient assujetties à décrire un cercle dans le plan xoy . Soit R le rayon du cercle. On considère le point géométrique P qui se déplace avec la vitesse de phase V , sur le cercle.



Nous posons

$$K^1 = -K \sin \theta$$

$$K^2 = K \cos \theta$$

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{\omega}}{K}$$

Il vient alors

$$V = \tilde{V} - \frac{\epsilon}{2} f(t) \cos 2\theta \frac{1}{\tilde{V}}$$

Supposons qu'à l'instant t_0 , le point P ait l'abscisse angulaire θ_0 , il est possible de déterminer l'abscisse angulaire de P à l'instant $t=0$; θ satisfait en effet l'équation différentielle

$$(III-2-12) \quad R \frac{d\theta}{dt} = \tilde{V} - \frac{\epsilon}{2} f(t) \cos 2\theta \cdot \frac{1}{\tilde{V}}$$

En résolvant (III-2-12) par itération, il vient, au premier ordre en ϵ

$$R \frac{d\theta}{dt} = \tilde{V} - \frac{\epsilon}{2\tilde{V}} f(t) \cos 2 \left[\frac{\tilde{V}}{R} (t-t_0) + \theta_0 \right]$$

En remplaçant $f(t)$ par sa valeur (cf III-2-6) on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\tilde{V}}{R} - \frac{\epsilon}{2\tilde{V}} f \cdot \sin(\Omega t + \alpha) \cos 2 \left(\frac{\tilde{V}}{R} (t-t_0) + \theta_0 \right)$$

Un phénomène de résonance apparaît pour

$$\Omega = 2 \frac{\tilde{V}}{R}$$

Dans ce cas on obtient

$$\theta = \frac{\tilde{V}}{R} t + \frac{\epsilon}{4\tilde{V}R} f \left\{ \frac{1}{2\Omega} \cos 2(\Omega t + \beta) + t \sin \gamma \right\} + \delta$$

avec

$$2\beta = \alpha + 2\theta_0 - 2 \frac{\tilde{V}}{R} t_0$$

$$\gamma = \alpha - 2\theta_0 + 2 \frac{\tilde{V}}{R} t_0$$

La constante δ est déterminée par la condition que θ ait l'abscisse angulaire θ_0 à l'instant $t = t_0$.

$$\delta = \theta_0 - \frac{\tilde{V}}{R} t_0 - \frac{\epsilon}{4\tilde{V}R} f \left\{ \frac{1}{2\Omega} \cos(\Omega t_0 + \alpha + 2\theta_0) + t_0 \sin(\Omega t_0 + \alpha - 2\theta_0) \right\}$$

A l'instant $t = 0$ il vient donc

$$\theta(0) = \theta_0 - \frac{\tilde{V}}{R} t_0 + \frac{\epsilon f}{4\tilde{V}R} \frac{\cos(2\theta_0 + \alpha) \cos \Omega t_0}{\Omega} - \frac{\epsilon}{4\tilde{V}R} f t_0 \sin(\Omega t_0 + \alpha - 2\theta_0)$$

Donnons nous les conditions initiales :

$$S(\theta, 0) = K R \theta$$

Il vient alors

$$S(\theta_0, t_0) = K R \theta(0)$$

Le déphasage entre les points d'abscisse angulaire θ_0 et θ_1 est alors, à l'instant t , donné par l'expression

$$\begin{aligned} \Delta S = & K R (\theta_0 - \theta_1) + \frac{K}{R} \frac{\epsilon f}{4\tilde{v}} \cos \Omega t \{ \cos(2\theta_0 + d) - \cos(2\theta_1 + d) \} \\ & + \frac{\epsilon K t f}{2\tilde{v}} \sin(\theta_0 - \theta_1) \cos(\Omega t + d - \theta_0 - \theta_1) \end{aligned}$$

Il apparaît donc un déphasage sous l'effet de l'onde de gravitation, celui-ci contient un terme, $\Delta \bar{S}$, dont l'amplitude croît linéairement avec le temps. La quantité $\Delta \bar{S}$ est maximale pour $\theta_0 - \theta_1 = \pi/2$. On peut retenir l'ordre de grandeur

$$\Delta \bar{S} \sim \frac{\epsilon K f}{2\tilde{v}} t$$

De même les pulsations ω_0 et ω_1 aux points d'abscisse angulaire θ_0 et θ_1 présentent une différence fonction du temps. Cette différence contient un terme résonant $\Delta \bar{\omega}$:

$$\Delta \bar{\omega} \sim \frac{\epsilon K f}{2\tilde{v}} \Omega t = \frac{\epsilon K f}{R} t$$

Introduisons la célérité de la lumière, c , par des considérations de dimension et exprimons f en fonction du flux d'énergie gravitationnel, I , il vient

$$(III-2-13) \quad \Delta \bar{\omega} \sim 2\pi \frac{c^2 t}{R \lambda \Omega} \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^3}}$$

où λ est la longueur d'onde de l'onde matérielle considérée.

Dans le domaine optique ou le proche infrarouge les fréquences peuvent être stabilisées avec une précision relative de 10^{-12} pendant des durées longues. Pour fixer les idées, prenons $t = 10^3$ s, la relation (III-2-13) conduit alors aux ordres de grandeurs

$$\frac{\Delta \bar{\omega}}{\omega} \sim \frac{t}{2} \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^3}} \sim 10^{-12}$$

$$I \sim 10^5 \text{ W/m}^2$$

Rien ne permet de penser qu'un flux gravitationnel permanent ($t \sim 10^3$ s) aussi intense atteigne la terre pour le domaine de fréquence considérées ($\Omega \sim \frac{2c}{R} \sim 10^9 \text{ s}^{-1}$; $R \sim 1 \text{ m}$) ni qu'il puisse être produit en laboratoire dans un proche avenir. Si on prend pour t , l'ordre de grandeur de la durée de vie actuelle des gyromètres optiques^(*) ($t = 1000$ heures) on trouve $I \sim 10^{-3} \text{ W/m}^2$. Il semble donc que de telles configurations présentent un intérêt certain dans un proche avenir pour l'observation des ondes gravitationnelles permanentes.

L'étude effectuée ici peut être étendue [17, 16] à un système quelconque satisfaisant l'équation d'eikonale dans le cadre général de la théorie linéarisée à l'approximation des champs de gravitation faibles. Nous poursuivons l'étude dans ce cadre élargi.

(*) La géométrie du système étudié ici est la même que celle des gyromètres optiques [21]

III-2-C : Expressions des phases et des fréquences : approximation eikonale

Considérons un phénomène ondulatoire caractérisé par sa phase S , satisfaisant l'équation (III-2-5) :

$$(III-2-5) \quad g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = M^2$$

Le tenseur métrique est donné sous la forme (III-0-1) :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon \phi_{\mu\nu}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon \phi^{\mu\nu}$$

Donnons, de S , le développement perturbatif :

$$S = \tilde{S} + \varepsilon \bar{S}$$

Posons encore

$$\tilde{K}_\mu = \partial_\mu \tilde{S}$$

En utilisant un développement de l'équation (III-2-5), limité au premier ordre en ε , on obtient les équations

$$(III-2-14) \quad \tilde{K}_\mu \tilde{K}^\mu = M^2$$

$$(III-2-15) \quad \tilde{K}^\mu \partial_\mu \bar{S} = \frac{1}{2} \phi_{\mu\nu} \tilde{K}^\mu \tilde{K}^\nu$$

Considérons une courbe, de paramètre u , satisfaisant les équations

$$(III-2-16) \quad \frac{dz^\mu}{du} = \tilde{K}^\mu$$

Cette courbe est la trajectoire d'espace temps non perturbée, associée à une particule classique. Le long d'une telle trajectoire S et \bar{S} peuvent

être considérés comme des fonctions de u . L'équation (III-2-15) s'écrit alors

$$(III-2-17) \quad \frac{d\bar{S}}{du} = \frac{1}{2} \phi_{\mu\nu} \tilde{K}^{\mu} \tilde{K}^{\nu}$$

Compte tenu de (III-2-14) on trouve pour la phase totale, l'équation

$$\frac{dS}{du} = M^2 + \frac{\epsilon}{2} \phi_{\mu\nu} \tilde{K}^{\mu} \tilde{K}^{\nu}$$

Il est possible d'intégrer les équations (III-2-16) sous la forme

$$\begin{aligned} x^0 &= \tilde{K}^0 u + x_0^0 \\ x^{\bar{\nu}} &= \tilde{K}^{\bar{\nu}} u + c^{\bar{\nu}} \end{aligned}$$

L'équation (III-2-17) est alors une équation différentielle du premier ordre.

Nous pouvons imposer à la particule une trajectoire quelconque grâce à plusieurs réflexions. Nous supposons que celles-ci sont parfaites (cf III-2-A) et nous imposerons la condition de stationnarité

$$\partial_0 \tilde{K}^{\mu} = 0$$

Dans ces conditions la formule (III-2-17) reste valable entre deux réflexions successives et les équations (III-2-16) s'intègrent sous la forme

$$(III-2-18) \quad \begin{cases} x^0 = \tilde{K}^0 u + x_0^0 \\ x^{\bar{\nu}} = x^{\bar{\nu}}(u, c^{\bar{\nu}}) \end{cases}$$

L'équation (III-2-17) s'explique ainsi :

$$\frac{d\bar{S}}{du} = \frac{1}{2} \phi_{\mu\nu}(x^{\alpha}(u, c^{\bar{\nu}})) \tilde{K}^{\mu}(x^{\alpha}(u, c^{\bar{\nu}})) \tilde{K}^{\nu}(x^{\alpha}(u, c^{\bar{\nu}}))$$

Nous voulons déterminer \bar{S} au point d'espace temps $(x_0^0, x_1^{\bar{p}})$ connaissant \bar{S} à l'instant x_0^0 pour tout $x_1^{\bar{p}}$.

Les équations (III-2-18) permettent de trouver $C^{\bar{r}}$ et u_1 comme fonction de $x_1^{\bar{p}}$. Il est également possible de déterminer les coordonnées $x_0^{\bar{p}}$ du point d'intersection de la trajectoire avec l'hyperplan $x^0 = x_0^0$ en fonction de $x_1^{\bar{p}}$. Il vient alors

$$(III-2-19) \quad \bar{S}(x_1^0, x_1^{\bar{p}}) = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} \phi_{\mu\nu} \tilde{K}^{\mu} \tilde{K}^{\nu} d\mu + \bar{S}(x_0^0, x_0^{\bar{p}})$$

Il est possible d'obtenir la perturbation du premier ordre pour les pulsations coordonnées, sous la forme :

$$(III-2-20) \quad \bar{\omega} = \partial_0 \bar{S}$$

Remarquons que l'intégration dans (III-2-19) s'effectue avec $C^{\bar{r}}$ constant alors que la dérivation (III-2-20) prend en considération le fait que $C^{\bar{r}}$, $x_0^{\bar{p}}$ et u_1 dépendent de $x_1^{\bar{p}}$.

Il est possible d'obtenir pour la pulsation coordonnée une équation de même type que (III-2-19). En effet, compte tenu de la condition de stationnarité, (III-2-15) implique

$$\tilde{K}^{\mu} \partial_{\mu} \partial_0 \bar{S} = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi_{\mu\nu}) \tilde{K}^{\mu} \tilde{K}^{\nu}$$

soit encore

$$\frac{d\bar{\omega}}{d\mu} = \frac{1}{2} (\partial_0 \phi_{\mu\nu}) \tilde{K}^{\mu} \tilde{K}^{\nu}$$

et

$$(III-2-21) \quad \bar{\omega}(x_1^0, x_1^{\bar{p}}) = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} (\partial_0 \phi_{\mu\nu}) \tilde{K}^{\mu} \tilde{K}^{\nu} d\mu + \bar{\omega}(x_0^0, x_0^{\bar{p}})$$

Les expressions (III-2-19) et (III-2-21) permettent d'obtenir des résultats très généraux [20] concernant la mesure des phases ou des fréquences.

Il est toujours possible de supposer $\bar{S}(x_0^\alpha, x_0^\beta)$ nulle et de modifier $\tilde{S}(x_0^\alpha, x_0^\beta)$ en conséquence. Les déphasages d'origine gravitationnels mesurables qui apparaissent après l'instant x_0^α , seront donc donnés par l'expression

$$(III-2-22) \quad \bar{S} = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} \phi_{\mu\nu} \tilde{K}^\mu \tilde{K}^\nu du \quad (*)$$

De même les pulsations coordonnées conduisant à des effets mesurables sont obtenues par l'expression

$$(III-2-23) \quad \bar{\omega} = \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} (\partial_0 \phi_{\mu\nu}) \tilde{K}^\mu \tilde{K}^\nu du$$

Nous allons étudier les conditions dans lesquelles \bar{S} et $\bar{\omega}$ peuvent être "grand" et l'ordre de grandeur de ces perturbations.

(*) En introduisant la vitesse de groupe \vec{V} des corpuscules sur la trajectoire non perturbée, leur énergie E et le temps coordonnées t on obtient l'expression plus facilement interprétable :

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{E}{2\hbar} \left\{ \phi_{00} + 2\phi_{0\bar{\mu}} \frac{V^{\bar{\mu}}}{c} + \phi_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \frac{V^{\bar{\mu}}}{c} \frac{V^{\bar{\nu}}}{c} \right\}; \quad |\vec{V}| = c \left(1 - \frac{M^2 c^4}{E^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

III-2-D : Discussion physique : Etude des phases

Introduisons la vitesse $V^{\bar{v}}$ des corpuscules et leur énergie E

$$V^{\bar{v}} = \frac{\tilde{K}^{\bar{v}}}{K_0} \quad ; \quad E = \tilde{K}_0 = \tilde{K}^0$$

L'expression (III-2-22) s'écrit encore

$$\bar{S} = \frac{E}{2} \int_{t_0}^{t_1} \{ \phi_{00} + 2 V^{\bar{v}} \phi_{0\bar{v}} + V^{\bar{v}} V^{\bar{v}} \phi_{\bar{v}\bar{v}} \} dt$$

cette expression se décompose

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$$

avec

$$(III-2-24) \quad \bar{S}_1 = \frac{E}{2} \int_{t_0}^{t_1} \phi_{00} dt$$

$$(III-2-25) \quad \bar{S}_2 = E \int_{t_0}^{t_1} V^{\bar{v}} \phi_{0\bar{v}} dt$$

$$(III-2-26) \quad \bar{S}_3 = \frac{E}{2} \int_{t_0}^{t_1} V^{\bar{v}} V^{\bar{v}} \phi_{\bar{v}\bar{v}} dt$$

Les divers termes de cette décomposition peuvent avoir des origines physiques différentes et conduisent à des ordres de grandeur différents. Nous les étudierons successivement.

Deux types d'expériences peuvent être envisagées

a) celles pour lesquelles la durée, $\Delta t = t_1 - t_0$, est donnée et est aussi grande que possible (Expérience de gyrométrie optique ou référence [3] par exemple).

b) celles pour lesquelles la longueur $\Delta l \approx v \Delta t$ du trajet parcouru est donnée ([9, 10] par exemple) .

Nous envisagerons pour chaque terme de la décomposition les deux types d'expériences.

D-1) Etude de \bar{S}_1

Soit ϕ_1 un majorant de ϕ_{∞} :

$$|\phi_{\infty}| < \phi_1$$

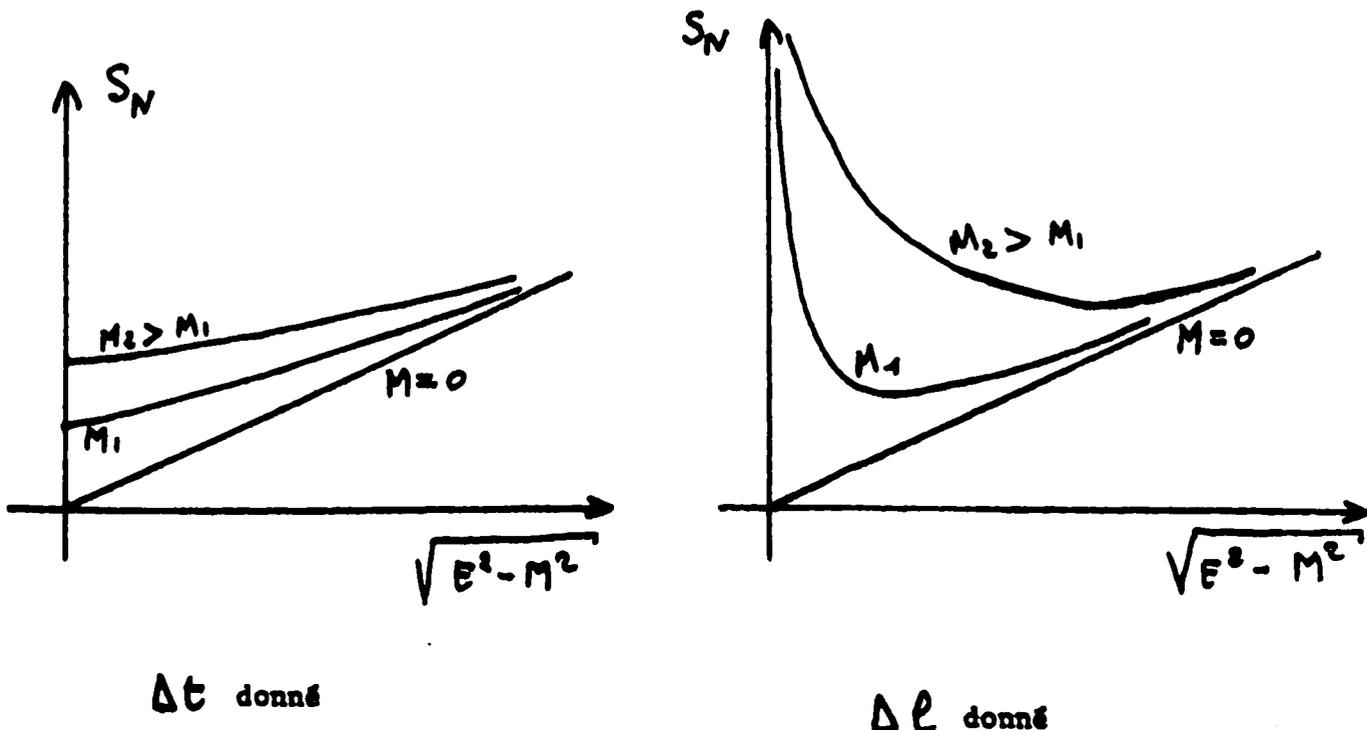
La relation (III-2-24) implique :

$$\bar{S}_1 \leq \frac{E}{2} \phi_1 \Delta t = \frac{E}{2} \phi_1 \frac{\Delta l}{v} \equiv S_N$$

avec

$$v = \left(1 - \frac{M^2}{E^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous donnons ci-dessous une représentation graphique des résultats pour divers types d'ondes dans les deux cas d'expériences envisagées :



Il apparaît qu'une expérience interférométrique, est facilitée par l'emploi de particules massiques lourdes non relativistes. De telles conditions sont remplies par exemple dans l'expérience d'interférométrie à neutron [18] mettant en évidence l'effet du champ terrestre pour lequel on a

$$\varepsilon \phi_{00} = \frac{2g^2 z}{c^2} \quad g = 10 \text{ m/s}^2$$

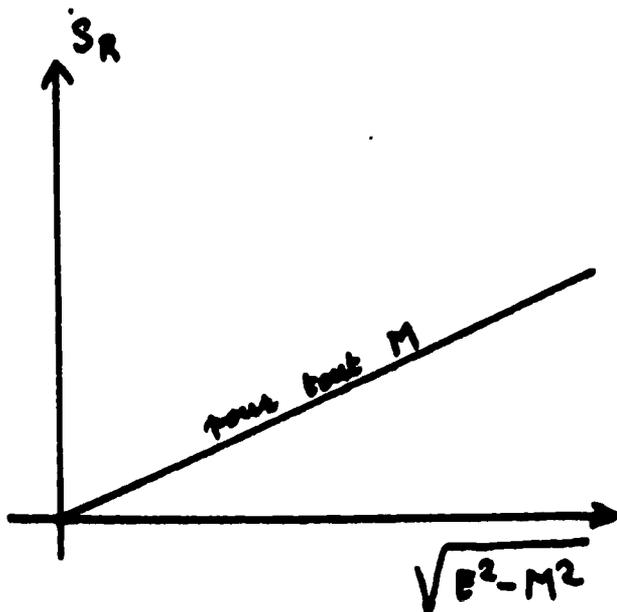
D-2) Etude de \bar{S}_2

Soit ϕ_2 un majorant de ϕ_{0p} :

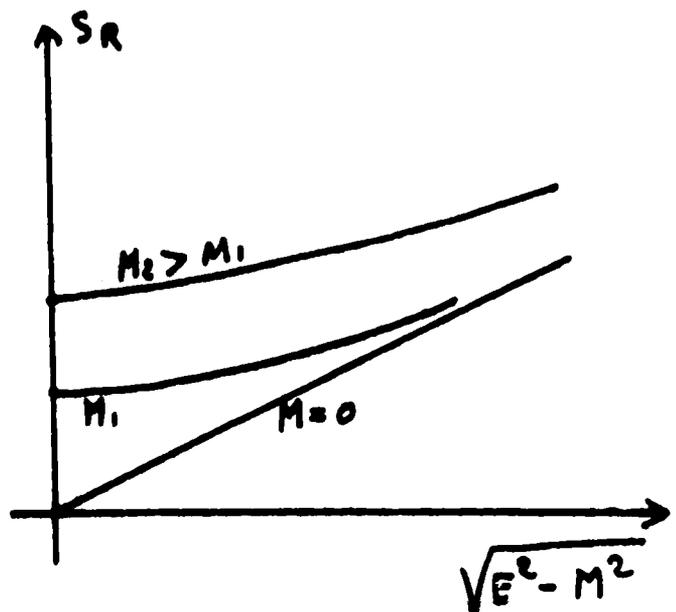
$$|\phi_{0p}| \leq \phi_2$$

La composante V^F de la vitesse est majorée par V . L'expression (III-2-25) donne alors

$$\bar{S}_2 \leq 3\varepsilon \phi_2 V \Delta t = 3\varepsilon \phi_2 \Delta l = \bar{S}_R$$



Δt donné



Δl donné

Quel que soit le type d'expérience imaginé il convient d'utiliser de préférence des particules à haute énergie.

Remarquons que le formalisme utilisé n'implique pas nécessairement la présence d'un champ de gravitation : des termes $\phi_{0\bar{\nu}}$ apparaissent dans l'expérience de Haess-Sagnac-Pogany [II] :

$$\varepsilon \phi_{01} = \frac{\Omega y}{c} \quad \varepsilon \phi_{02} = -\frac{\Omega x}{c}$$

La grandeur Ω représente la vitesse de rotation du disque tournant autour de l'axe Oz . Dans l'expérience citée les corpuscules utilisés sont des photons.

Un formalisme identique à celui présenté ici, permet de décrire les expériences de Aharonov-Bohm-Chambers [12 - 13 - 14 - 15]. Il convient alors de remplacer $\varepsilon \phi_{0\bar{\nu}}$ par les composantes $\frac{e}{mc} A_{\bar{\nu}}$ du quadri-potiel. Les corpuscules utilisés sont alors des électrons.

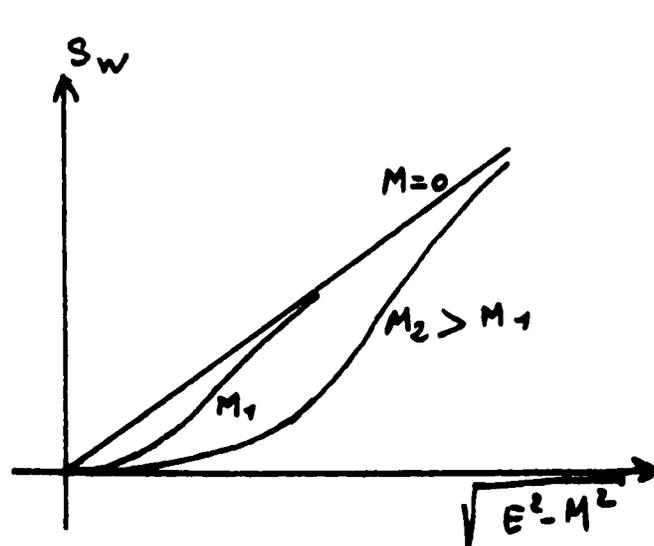
D-3) Etude de \bar{S}_3

Soit ϕ_3 un majorant de $\phi_{\bar{\nu}}$:

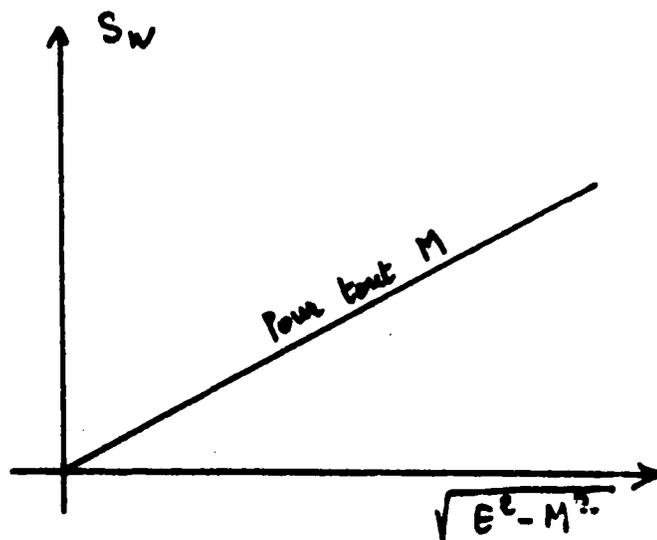
$$|\phi_{\bar{\nu}}| \leq \phi_3$$

La relation (III-2-26) implique alors

$$\bar{S}_3 \leq \frac{g}{2} E v^2 \phi_3 \Delta t = \frac{g}{2} E v \phi_3 \Delta l = S_w$$



Δt donné



Δl donné

Il apparaît clairement que, quel que soit le type d'expérience, l'utilisation de photons ne minimise pas l'effet théorique maximal étudié.

Considérons le cas d'une onde de gravitation de type (III-2-6). Les déphasages ΔS d'origine gravitationnelle, produit sur des photons sont majorés de la façon suivante :

$$\Delta S \leq 2 \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^3}} \frac{\omega_e}{\Omega} \Delta t = 2 \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^5}} \frac{\omega_e}{\Omega} \Delta \ell \quad (*)$$

Cette relation suggère que l'on essaie de détecter des ondes de gravitation basse fréquence au moyen d'un rayonnement électromagnétique haute fréquence ($\frac{\omega_e}{\Omega} \gg 1$).

Considérons une expérience pour laquelle $\Delta \ell$ est donné. Il semble raisonnable de prendre $\Delta \ell \sim 1 \text{ m}$; pour $I \sim 10^3 \text{ W/m}^2$ et $\Omega = 10^3 \text{ s}^{-1}$ on trouve, avec $\omega_e \leq 10^{19} \text{ s}^{-1}$,

$$\Delta S \leq 3 \cdot 10^{-8} \text{ rd}$$

Une telle précision semble difficile à obtenir aujourd'hui dans les conditions optimales étudiées

Considérons une expérience pour laquelle Δt est donné. La durée Δt qui doit être prise en considération est la plus petite des trois grandeurs Δt_1 , Δt_2 et Δt_3 :

Δt_1 : durée du phénomène gravitationnel étudié

Δt_2 : durée d'accumulation du signal

Δt_3 : durée de cohérence des ondes électromagnétiques utilisées

Pour Δt de l'ordre de la seconde et ω_e de l'ordre de 10^{15} s^{-1} on obtient

$$\Delta S \leq 10^{-3} \text{ rd}$$

Il semble que dans le cadre de notre étude seul ce dernier type d'expérience soit susceptible de conduire à des manifestations observables.

(*) ω_e est la pulsation des ondes électromagnétiques considérées.

III-2-E : Discussion physique : Etude des fréquences

Nous limiterons l'étude des fréquences au cas de l'onde de gravitation (III-2-6). Les composantes g_{00} et $g_{0\bar{\nu}}$ du tenseur métrique sont nulles, la pulsation coordonnée est alors égale à la pulsation observable.

L'identité formelle entre les expressions (III-2-22) et (III-2-23) conduit à la relation

$$\varepsilon \bar{\omega} \leq 2 \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^3}} \omega_e \Delta t = 2 \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^5}} \omega_e \Delta l$$

Sur une longue durée ($\Delta t \sim 10^3 \text{ s}$) les sources optiques ($\omega_e \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$) peuvent être stabilisées avec une précision relative de l'ordre de 10^{-12} . Il est possible de déterminer l'intensité, I , minimale détectable par une expérience de battements:

$$(III-2-27) \quad I \geq \left(\frac{\varepsilon \bar{\omega}}{\omega_e} \right)^2 \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{c^3}{128 \pi G} \approx 10^3 \text{ W/m}^2$$

Il semble donc possible d'atteindre la sensibilité des détecteurs mécaniques si on parvient à réaliser un système résonant. Remarquons en outre que la sensibilité théorique déduite de (III-2-27) ne dépend pas de la fréquence des ondes de gravitation.

Nous allons proposer un principe d'expérience permettant d'atteindre les ordres de grandeur optimum donnés.

Considérons un plateau d'axe Oz , tournant avec la vitesse angulaire ω_R . Sur ce plateau deux cavités munies d'un amplificateur de lumière sont montées perpendiculairement. Les fréquences sont supposées stabilisées.

Sur l'axe, on effectue une mesure du battement entre les faisceaux issus de chaque cavité.

Les deux cavités se comportent de façon dissymétrique sous l'effet de gravitation seulement. Nous ne tiendrons pas compte des effets d'inertie dues à la rotation du plateau.

La trajectoire non perturbée d'un photon est caractérisé par les relations

$$k^0 = \omega_e$$

$$k^1 = \pm \omega_e \cos(\omega_R t + \theta_0)$$

$$k^2 = \pm \omega_e \sin(\omega_R t + \theta_0)$$

Il vient alors

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{2} f \Omega \cos(\Omega t + \alpha) \omega_e \cos 2(\omega_R t + \theta_0)$$

Un phénomène de résonance apparaît pour

$$\Omega = 2 \omega_R$$

Dans ces conditions la pulsation du faisceau lumineux subit une variation due à l'onde de gravitation $\varepsilon \bar{\omega}$:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{8} f \omega_e \sin(2 \Omega t + \alpha + \theta_0) + \frac{1}{4} f \omega_e \Omega t \cos(\alpha - 2\theta_0) + \text{cte}$$

La fréquence de battement des deux faisceaux contient donc un terme résonant $\Delta \bar{\omega}$:

$$\Delta \bar{\omega} = \frac{1}{2} f \omega_e \Omega t \cos(\alpha - 2\theta_0)$$

En montant sur deux plateaux identiques les cavités de telle sorte qu'elles forment entre elles un angle de $\pi/4$ on obtient pour l'un des deux dispositifs la relation :

$$\Delta \bar{\omega} \geq \frac{\sqrt{2}}{4} f \omega_e \Omega t$$

avec $f = \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^3}}$

Nous pouvons donc par un tel dispositif atteindre l'ordre de grandeur optimal^(*) donné ci-dessus (III-2-27) que nous avons déduit d'une étude générale, indépendamment de l'existence des systèmes résonants correspondants.

L'ordre de grandeur des flux gravitationnels détectables est le même dans le dispositif étudié au paragraphe (III-2-B) et dans le dispositif étudié ci-dessus. La condition de résonance introduite en (III-2-B)

$(\Omega = \frac{2\tilde{V}}{R})$ implique que les ondes de gravitation ont une fréquence élevée : pour R de l'ordre du mètre on a Ω de l'ordre de 10^9 s^{-1} . Le dispositif étudié ici concerne, au contraire, des ondes de gravitation basses fréquences.

III-2-F : Résonance d'ordre élevé

Il est possible de montrer [16] qu'à l'approximation eikonale, dans le vide, aucune résonance d'ordre 2 ou supérieur à 2 ne saurait exister. Ceci découle des majorations effectuées ci-dessus (III-2-D).

En reprenant les raisonnements déjà utilisés (III-2-B), nous nous proposons d'étudier sous quelles conditions, des résonances d'ordre élevé sont possibles.

Dans un grand nombre de systèmes physiques, l'effet de l'onde gravitationnelle sur les phases peut être décrit en terme de variation de la vitesse de phase, sans modification de la trajectoire des corpuscules associés aux ondes considérés. Les systèmes étudiés ci-dessus entrent dans cette catégorie, il en va de même pour certains systèmes mécaniques où les ondes élastiques sont considérées [19]. Nous nous limiterons ici à l'étude de ces cas remarquablement simples.

(*) Il est clair que le système étudié présente une sensibilité théorique accrue par rapport aux systèmes non résonants (cf [9] par exemple).

Considérons les trajectoires d'espace des corpuscules classiques associés aux ondes étudiées. Soit u l'abscisse curviligne le long de ces trajectoires. Nous supposerons, pour simplifier, que la vitesse de phase ne dépend que de u et de t :

$$v = \tilde{v} + \varepsilon \bar{v}(u, t)$$

Nous supposons connue la phase S , à l'instant $t = 0$. Il vient la relation

$$S(u, t) = S(u_0, 0)$$

où u_0 est l'abscisse curviligne, à l'instant $t = 0$, du point p qui se déplace avec la vitesse de phase et est en u , à l'instant t :

$$u - u_0 = \tilde{v}t + \varepsilon \int_0^t \bar{v}(u(\tau), \tau) d\tau$$

Au premier ordre en ε il vient

$$u_0 = u - \tilde{v}t - \varepsilon \int_0^t \bar{v}(u - \tilde{v}\tau + \tilde{v}\tau, \tau) d\tau$$

Introduisons le nombre d'onde k :

$$k = \left. \frac{\partial S}{\partial u} \right|_{t=0}$$

on obtient l'expression de $S(u, t)$ sous la forme :

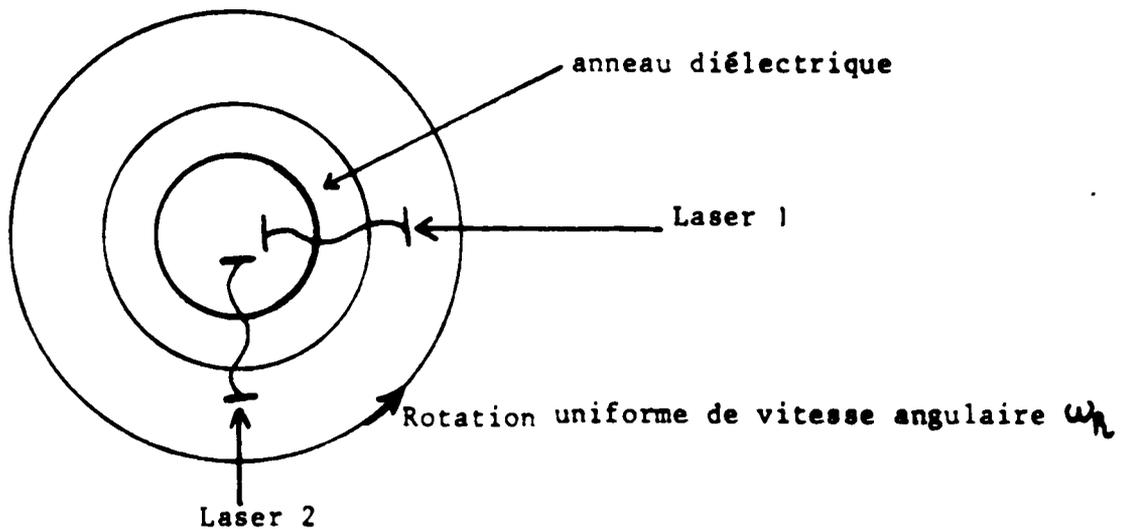
$$S(u, t) = S(u - \tilde{v}t) - \varepsilon k \int_0^t \bar{v}(u - \tilde{v}\tau + \tilde{v}\tau, \tau) d\tau$$

Il apparaît donc, dans l'expression de S , une perturbation du premier ordre $\varepsilon \bar{S}$:

$$(III-2-30) \quad \bar{S} = -k \int_0^t \bar{v}(u - \tilde{v}\tau + \tilde{v}\tau, \tau) d\tau$$

L'expression (III-2-30) montre clairement que les phénomènes de résonance d'ordre 2 ne peuvent apparaître que si la vitesse de phase contient une perturbation linéaire en t ce qu'exclut la forme (III-2-11) donnée ci-dessus pour l'indice du vide.

Afin de fixer les idées, considérons le dispositif expérimental théorique décrit au paragraphe précédent. Introduisons un anneau diélectrique fixe, d'indice η , que traverse les faisceaux lumineux.



Supposons l'existence d'un phénomène de résonance mécanique entre l'onde de gravitation et l'anneau de telle sorte que la vitesse de phase dépende de l'angle polaire Θ et du temps sous la forme

$$V = \tilde{V} + \varepsilon a t \sin(\Omega t + \gamma) \sin 2\Theta$$

Entre les deux faisceaux lumineux, il apparaît alors un déphasage du premier ordre en ε , croissant avec le temps. Si la relation de résonance ($2\omega_R = \Omega$) est satisfaite, ce déphasage contient un terme quadratique en t .

$$(III-2-31) \quad \varepsilon \Delta \bar{S} = 2\varepsilon K a t^2 \cos(2\Theta_0 + \gamma) + \varepsilon t (\dots) + \varepsilon (\dots)$$

Θ_0 étant ici l'angle polaire initial ($t = 0$) de l'un des deux lasers.

Ces phénomènes de résonance d'ordre élevé, présentent un intérêt expérimental accru par rapport au système étudié en (III-2-B), dans la mesure où est

satisfaite la relation

$$(III-2-32) \quad at \gg \tilde{v} f$$

Des considérations de dimensions suggèrent l'expression

$$at \sim Q_M f \tilde{v}$$

il vient alors

$$(III-2-33) \quad Q_M \gg 1$$

La grandeur Q_M représente dans (III-2-32) le facteur de qualité du milieu pour les ondes élastiques considérées.

Il est vraisemblable que les facteurs considérés ici ne sont pas les seuls à intervenir. L'étude qualitative qui précède suggère néanmoins les résultats suivants :

1) Un double phénomène de résonance peut conduire à des résonances d'ordre 2.

2) Une résonance d'ordre 2 sur la phase n'implique pas nécessairement une résonance du même ordre sur la fréquence. En effet de (III-2-31) on déduit la fréquence des battements $\varepsilon \bar{\omega}$:

$$\varepsilon \bar{\omega} = \varepsilon \frac{\partial \Delta \bar{S}}{\partial \tau} = 4\varepsilon k a t \cos(-2\theta_0 + \gamma) + \dots$$

3) En utilisant un double phénomène de résonance, la sensibilité est accrue d'un facteur de l'ordre de Q_M , susceptible d'être très élevé.

4) Les diverses fréquences de résonance doivent être adaptées et stabilisées, ce qui ne va pas sans difficultés si on utilise des systèmes de natures physiques différentes.

Ainsi, si les résonances d'ordre 2 ne sont pas totalement exclues [19] elles sont pas d'un intérêt certain a priori sur le plan expérimental.

III-2-G : Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode générale (*) permettant l'étude des déphasages et des déplacements de fréquence sous l'effet d'une perturbation gravitationnelle lorsque l'approximation eikonale est justifiée. Cette méthode, développée au paragraphe (III-2-C), permet de déterminer au premier ordre, l'expression de la phase, il est dès lors possible de déduire l'expression de la quadri-impulsion au même ordre d'approximation et d'obtenir ainsi les déviations des trajectoires classiques sous l'effet d'un champ de gravitation.

Nous avons également étudié les possibilités de détection d'ondes de gravitation en utilisant des phénomènes de résonance du premier ordre. Il apparaît clairement que les dispositifs imaginables ont une sensibilité étroitement liée à la stabilité des fréquences ou à la précision des mesures de phases. Il nous semble raisonnable d'avancer les ordres de grandeurs suivants pour le flux minimal permanent détectable par les procédés étudiés :

- ondes de gravitation basses fréquences : $I \sim 10^3 \text{ w/m}^2$
- ondes de gravitation hautes fréquences : $I \sim 10^5 \text{ w/m}^2$

Il semble donc que les procédés de détection des ondes de gravitation par des mesures de battement ou de déphasage ne conduisent pas à une sensibilité supérieure à celle obtenue par les antennes mécaniques.

L'étude qualitative développée au paragraphe (III-2-F), suggère que les phénomènes de double résonance peuvent conduire à des gains de plusieurs ordres de grandeurs par rapport aux systèmes résonants d'ordre 1 .

La forme, (III-2-6), de la métrique utilisée implique l'emploi d'un système de coordonnées isothermes. Pour un observateur animé d'un mouvement dans ce système de coordonnées, il apparaît une composante $\epsilon \phi_{00}$ dans la perturbation du tenseur métrique. Il n'est pas impossible d'envisager une mesure de cette grandeur ; ceci nécessite néanmoins d'importants progrès dans l'observation des interférences entre ondes de matière associées à des particules massives, lourdes et lentes.

(*) Cette méthode, pratiquement très intéressante, permet l'étude de multiples configurations et d'appareils. On trouvera des développements généraux et de nombreux exemples en [20] .

C O N C L U S I O N

Les résultats présentés dans cette partie ne doivent pas être considérés comme une tentative d'étude exhaustive sur les systèmes de particules soumises à une onde de gravitation. Néanmoins quelques principes généraux semblent pouvoir être dégagés.

Nous avons, après divers auteurs [2], souligné l'intérêt des basses températures : l'utilisation de celles-ci évite que les phénomènes ne soient masqués par le bruit thermique.

Dans un cas particulier, nous avons montré l'intérêt que présente l'étude des états collectifs de bosons et dans le second chapitre, nous avons étudié les possibilités de résonance entre de tels états, décrit à l'approximation eikonale, et une onde de gravitation, décrite à l'approximation linéaire. Il est possible, dans le cadre du formalisme introduit, de prendre en considération des paquets d'ondes : il semble néanmoins douteux que de tels systèmes soient utilisables. Considérons en effet une mesure de fréquence.

Soit δE la variation d'énergie d'un photon, par exemple, sous l'effet gravitationnel à mettre en évidence. Soit Δt la durée maximale possible pour la mesure et ΔE , l'incertitude sur l'énergie du paquet d'ondes considéré :

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

Soit L un ordre de grandeur des dimensions de l'appareil et l un ordre de grandeur pour les dimensions du paquet d'ondes

$$\Delta t \sim \frac{l}{c}$$

Le paquet d'ondes se comporte comme un corpuscule libre de masse nulle sous la condition

$$L \gg \ell$$

Il vient alors la condition nécessaire d'observation

$$\frac{\delta E}{E} \gg \Delta E \quad L \gg \ell \gg \frac{hc}{\delta E}$$

Supposons que la longueur d'onde λ , du phénomène électromagnétique étudié soit de l'ordre du micron et L de l'ordre du mètre, on obtient

$$\frac{\delta E}{E} \gg \frac{\lambda}{2\pi L} \sim 10^{-7}$$

Aucune estimation actuelle ne permet d'envisager des effets relatifs aussi importants. C'est donc dans le cadre d'une théorie ondulatoire complète que doivent se développer les calculs classiques et, en particulier, les conditions aux limites des cavités utilisées doivent, nécessairement, être prises en considération. Dans ce dernier cas un raisonnement qualitatif de même nature conduit à la relation

$$\frac{\delta E}{E} > \frac{1}{Q}$$

où Q est le facteur de qualité de la cavité considérée. Il semble donc actuellement que la limite de sensibilité soit caractérisée par la relation

$$\frac{\delta E}{E} \sim 10^{-12}$$

Nous avons en outre montré au paragraphe (III-2-F) qu'un phénomène de double résonance était possible. En introduisant les facteurs de qualité Q_1 et Q_2 associés à chaque système résonant, il est possible de montrer la relation

$$\frac{\delta E}{E} \sim \frac{\alpha}{Q_1 Q_2}$$

où α est un coefficient sans dimension dépendant de la nature des résonances mises en oeuvre. Il semble donc qu'un tel procédé permette d'accroître la sensibilité des détecteurs dans des proportions considérables.

Nous pouvons également utiliser le lemme démontré en (III-1-B) pour mettre en évidence des conditions suffisantes pour la détection des ondes de gravitation.

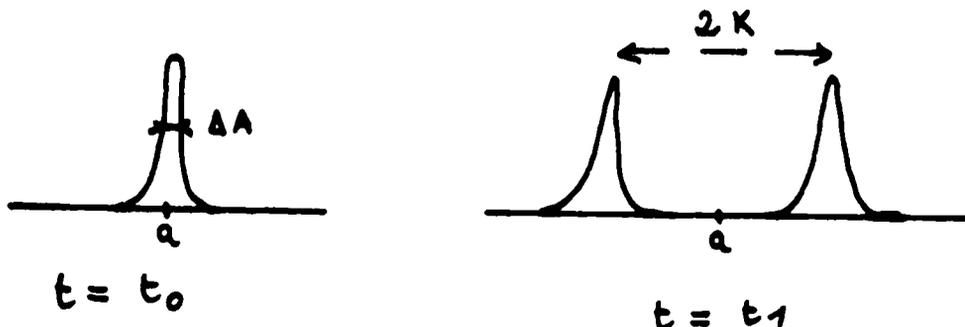
Considérons un phénomène gravitationnel limité dans le temps, pour une région de l'espace qui contient l'appareil de mesure. Avant et après l'action de la gravitation sur l'appareil, considéré comme passif, la mécanique quantique est utilisable dans sa forme actuelle.

Soit $S(t_1, t_0)$ l'opérateur d'évolution entre l'instant t_0 et l'instant t_1 respectivement antérieur et postérieur à l'action gravitationnelle.

Soit A une observable satisfaisant, par exemple, la relation

$$[A, [A, S]] = K^2 S$$

Nous schématisons ci-dessous l'évolution du spectre de A :



Pour $\Delta A < K$ et K observable, il est clair que la relation ci-dessus, implique la possibilité d'une observation. Dans ces conditions S ne peut pas être voisin de l'opérateur unité. Les théories de perturbation ne sont pas utilisables, le système physique étudié est en fait instable pour les sollicitations gravitationnelles.

Des développements précédents, il apparaît que deux voies de recherche semblent prometteuses : l'étude des résonances multiples et l'étude des systèmes instables pour les perturbations gravitationnelles.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] - V.D. ZAKHAROV : Gravitational wave in Einstein's Theory , Halsted Press , New York (1973).
- [2] - Proceedings of the International school of Physics "Enrico Fermi" - Experimental Gravitation - Academic Press , New York (1974).
- [3] - V.B. BRAGINSKII et M.B. MENSKII : J.E.T.P. Lett. 13 , 11 , p.417, (1971).
- [4] - P. TOURRENC et J.L. GROSSIORD : Nuov. Cimento 19 B 1, p.105, (1974).
- [5] - D.T. WILKINSON et H.R. CRANE : Phys. Rev. 130 , 3 , (1963).
- [6] - L. LANDAU et E. LIFSCHITZ : Théorie du Champ - Edition Mir Moscou (1966).
- [7] - C. KITTEL : Introduction à la physique de l'état solide - Dunot Paris (1972).
- [8] - T.N. NEE et Al. : Annals of Physics 77 , p.79 , (1973).
- [9] - G.E. MOSS et AL. : Applied optics 10 , p.2495 , (1971).
- [10] - M.E. GERTSENSHTEIN et V.I. PUSTVOIT : J.E.T.P. 16, 2 , p.433, (1963).

- [11] - M.A. TONNELAT : Les Vérifications expérimentales de la Relativité Générale , Masson et Cie Paris (1964).

- [12] - Y. AHARONOV et D. BOHM : Phys. Rev. 115 , 3 , p.485 , (1959).

- [13] - R.G. CHAMBERS : Phys. Rev. Lett. 5 , p.3 , (1960).

- [14] - G. PAPINI : Nuovo Cimento B 52 , 1 , p.136 , (1967).

- [15] - B.S. DE WITT : Phys. Rev. Lett. 16 , 24 , p.1092 , (1966).

- [16] - B. LIKET et P. TOURENC : Changement de phase dans un champ de gravitation : Possibilité de détection interférentielle - Can. J. Phys. 54, (1976) (à paraître)

- [17] - J. FLEBANSKI : Phys. Rev. 118 , 5 , p.1396 , (1966).

- [18] - R. COLLELA et Al. : Phys. Rev. 34 , 23 , p.1472 , (1975).

- [19] - V.E. LYAMOV et V.N. RUDENKO : J.E.T.P. 40 , 5 , p.787 , (1975).

- [20] - P. TOURENC : Etude des phases et des fréquences - Séminaire SERAF Paris (1976).

- [21] - E.J. POST : Rev. of Mod. Phys. 39 , 2 , (1967).

P A R T I E I V

CAVITES ELECTROMAGNETIQUES RESONANTES

Introduction

Chapitre 1 : Modèles de cavités

- IV-1-A : Introduction
- IV-1-B : Eléments d'élasticité
- IV-1-C : Le feuillet plan - Modèle visco-élastique
- IV-1-D : Modèle Basse Fréquence - $\partial F_{//}$
- IV-1-E : Modèle Basse Fréquence - ∂F_{\perp}
- IV-1-F : Conclusion.

Chapitre 2 : Couplage aux limites

- IV-2-A : Introduction
- IV-2-B : Conditions aux limites
- IV-2-C : Résonance électromagnétique des modèles ∂F
- IV-2-D : Conclusion.

Chapitre 3 : Couplage intrinsèque

- IV-3-A : Introduction
- IV-3-B : Le formalisme
- IV-3-C : Evolution des valeurs moyennes
- IV-3-D : Conclusion.

Chapitre 4 : Etude particulière d'un couplage intrinsèque

- IV-4-A : Introduction
- IV-4-B : Choix d'une base
- IV-4-C : Calcul des coefficients de la matrice S
- IV-4-D : Choix d'une transition
- IV-4-E : Modèle de rayonnement gravitationnel
- IV-4-F : Discussion physique
- IV-4-G : Conclusion.

Conclusion

INTRODUCTION

Considérons une impulsion gravitationnelle d'extension limitée ; pour des raisons évidentes , nous voulons profiter du temps de passage de l'onde de gravitation dans sa totalité. Si ce temps de passage est petit, l'effet étudié sera trop faible pour être observé^(*). Si ce temps de passage est, au contraire important, l'énergie électromagnétique se propageant sur une grande distance, il est nécessaire de la confiner dans une enceinte et les conditions aux limites de celle-ci jouent un rôle fondamental.

Nous distinguons deux types de couplage entre les ondes gravitationnelles et le rayonnement électromagnétique confiné : le couplage intrinsèque, et le couplage aux limites.

Le couplage intrinsèque a pour origine la présence d'une modification des équations de l'électromagnétisme en présence de gravitation (cf (II-1-1) par exemple). Un tel couplage est susceptible de produire des effets sur un rayonnement libre (voir références [2] par exemple).

Le couplage aux limites est beaucoup plus complexe. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous allons en donner les principales sources.

Nous distinguons deux types de couplage aux limites : le couplage local, le couplage global.

Le couplage aux limites a pour origine la modification des conditions aux limites des surfaces de l'enceinte. L'enceinte doit être considérée comme un corps matériel soumis à des contraintes gravitationnelles et subissant

(*) Si les impulsions sont brèves, le théorème des approximations soudaines conduit à la prévision d'effets négligeables. Dans certains conditions, néanmoins les perturbations brèves ne sont pas sans intérêt cf [1] .

de ce fait des déformations. Ces déformations peuvent être étudiées dans le cadre théorique de l'élasticité et perturbent le rayonnement électromagnétique confiné par l'intermédiaire des conditions aux limites. C'est ce type de couplage aux limites que nous appelons couplage global(*).

De façon directe, l'onde de gravitation agit localement sur le matériau ; si celui-ci est un métal, l'onde de gravitation agit sur les électrons de conduction et le réseau ionique. Ces mouvements modifient, dans l'épaisseur de peau, le comportement du métal et, par là même, les conditions aux limites de l'enceinte. Les relations entre réseau et électrons conduisent à la notion de conductivité, σ . Cette grandeur détermine les propriétés de réflexion des métaux pour les ondes électromagnétiques basses fréquences. La théorie de Drude-Lorentz par exemple donne

$$\sigma = \frac{n e^2 \tau}{m}$$

où n est le nombre d'électrons par unité de volume,

τ est du même ordre de grandeur que l'intervalle de temps séparant deux collision entre un électron et un ion du réseau,

e et m sont respectivement la charge et la masse de l'électron.

Il est naturel de penser que σ dépend de l'onde de gravitation à travers

n et τ . Cette dépendance peut induire des phénomènes de résonance paramétrique qui ne sont pas a priori négligeables. Il est bien connu, également, que des excitations du plasma (électron + ion) peuvent produire un phénomène de résonance. Avec le modèle des électrons libres dans un réseau ionique, on trouve la pulsation propre, ω , des oscillations pour les modes optiques longitudinaux par exemple :

$$\omega = \left(\frac{n e^2}{\epsilon_0 m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(*) Il n'est pas exclu que des conditions aux limites interviennent pour les électrons de conduction dans un métal ou le cas échéant, les supra-électrons. de telles conditions peuvent faire intervenir le champ de gravitation et constituer un autre type de couplage global.

L'énergie des plasmons correspondants pour les métaux est :

$$\hbar \omega \sim 10 \text{ e-v}$$

Pour les fréquences correspondantes ($\nu \sim 2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$), on peut donc s'attendre à un phénomène de résonance.

De tels effets, qui prennent en considération les propriétés du matériau dans son épaisseur de peau électromagnétique, constituent un couplage que nous appelons couplage aux limites local.

Les considérations générales développées précédemment voudraient que l'on recherche des situations résonantes pour un ensemble de phénomènes différents. Nous n'entreprenons pas cette étude ici. Notre travail portera uniquement sur un modèle de résonance aux limites globales et de résonance intrinsèque. Les mécanismes de réflexions seront décrits par une généralisation covariante des conditions aux limites pour un conducteur électrique parfait. Cette méthode, sans doute incomplète, permet d'obtenir les ordres de grandeurs qui caractérisent les effets étudiés.

Les phénomènes gravitationnels seront décrits par la forme (III-0-2) du tenseur métrique :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \epsilon \phi_{\mu\nu} \\ \text{(IV-0-1)} \quad \phi_{11} &= -\phi_{22} = f(t-z) \\ \phi_{12} &= \phi_{21} = g(t-z) \end{aligned}$$

Les champs électromagnétiques seront décrits par l'intermédiaire du quadri-potentiel \tilde{A}_μ qui satisfait les équations (III-0-4) :

$$\begin{aligned} \square \tilde{A}_\mu - \partial_{\mu\rho} \tilde{A}^\rho &= 0 \\ \text{(IV-0-2)} \quad \square \epsilon \tilde{A}_\mu + \tilde{\square} \tilde{A}_\mu + \epsilon \phi^{\nu\rho} \partial_{\mu\rho} \tilde{A}_\nu - \epsilon \phi_{\mu\alpha,\rho} \tilde{F}^{\alpha\rho} - \eta^{\nu\rho} \partial_{\mu\rho} \epsilon \tilde{A}_\nu &= 0 \end{aligned}$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \square &= \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} ; \quad \tilde{\square} = (g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}) \partial_{\mu\nu} = -\epsilon \phi^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} \\ A^\rho &= \eta^{\mu\alpha} A_\alpha ; \quad F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu} ; \quad F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Dans le premier chapitre, nous présenterons les modèles mécaniques de cavité utilisés : modèle visco-élastique, modèles $B F$, (basse fréquence).

Dans le second chapitre, nous étudierons, dans le cadre d'une théorie classique, un modèle de résonance aux limites.

Dans le troisième chapitre, nous introduirons une théorie semi-quantique du couplage intrinsèque.

Dans le dernier chapitre nous développerons un exemple afin de mettre en évidence les ordres de grandeurs des phénomènes attendus.

CHAPITRE I

MODELES DE CAVITES

IV-1-A : Introduction

Notre propos est de présenter divers types de modèles, capables de décrire le comportement des surfaces limites d'une cavité. Considérons une plaque carrée de côté L_{\perp} et d'épaisseur $2L$. L'onde de gravitation se propage parallèlement à l'un des côtés du carré. Soit λ_g la longueur d'onde du rayonnement gravitationnel et λ_M la longueur d'onde des ondes mécaniques excitées :

$$\lambda_M \sim 10^{-5} \lambda_g$$

Nous considérerons trois cas :

a) Le modèle visco-élastique

Dans ce modèle nous supposerons satisfaite la relation

$$L_{\perp} \gg \lambda_g$$

Nous montrerons alors, en étudiant dans un cas particulier le feuillet plan indéfini, qu'il est légitime de négliger en première approximation les déformations des surfaces limites quand on prend en considération les frottements internes pour les matériaux usuels.

b) Un modèle Basse fréquence : ∂F_{ij}

Dans ce modèle nous ne prenons pas en considération le caractère fini du facteur de qualité et nous supposons satisfaites les relations

$$L_{\perp} \gg \lambda_g \quad \text{et} \quad L \ll \lambda_M$$

Nous étudierons le cas du feuillet plan indéfini lorsque le tenseur de Viscosité est nul. Nous montrerons alors, sous certaines conditions particulières, que ce

modèle conduit à la notion de modèle rigide.

c) Un modèle Basse fréquence BF_{\perp}

Dans ce modèle nous supposons satisfaites les relations

$$L_{\perp} \ll \lambda_g$$

Afin de séparer l'effet des diverses composantes du tenseurs métrique, nous supposerons la nullité du coefficient de Poisson et de certaines composantes du tenseur de Viscosité. Nous retrouverons alors qualitativement les résultats concernant les antennes mécaniques [3].

IV-1-B : Eléments d'élasticité

Pour étudier le comportement d'un milieu élastique, soumis à une sollicitation gravitationnelle nous nous plaçons dans le cadre défini à la référence [4]. Nous présentons ce cadre théorique de façon un peu différente pour introduire la notion de frottement interne dans les matériaux. Nous supposons en particulier que ceux-ci sont parfaitement linéaires et que les déformations ne produisent pas d'effets électromagnétiques.

En mécanique classique, les déformations sont caractérisées par le tenseur $S_{\bar{\rho}\bar{\nu}}$, construit à partir des vecteurs $S^{\bar{\rho}}$ qui représentent le déplacement par rapport à l'état de repos:

$$S_{\bar{\rho}\bar{\nu}} = \frac{1}{2} (S^{\bar{\rho}}_{,\bar{\nu}} + S^{\bar{\nu}}_{,\bar{\rho}})$$

La distance de deux points voisins M et M' est obtenue par l'intermédiaire du tenseur fondamental $\gamma_{\bar{\rho}\bar{\nu}}$:

$$d\ell^2 = \gamma_{\bar{\rho}\bar{\nu}} dV^{\bar{\rho}} dV^{\bar{\nu}}$$

avec

$$\gamma_{\bar{\rho}\bar{\nu}} = -\eta_{\bar{\rho}\bar{\nu}} + 2S_{\bar{\rho}\bar{\nu}}$$

Les quantités $dV^{\bar{\rho}}$ représentent les composantes du vecteur $\vec{MM'}$ dans l'état de repos.

La théorie de l'élasticité s'introduit en postulant une relation linéaire entre le tenseur des contraintes $\sigma_{\bar{\rho}\bar{\nu}}$ et le tenseur des déformations $S_{\alpha\bar{\beta}}$:

$$(IV-1-1) \quad \sigma_{\bar{\rho}\bar{\nu}} = C_{\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\alpha\bar{\beta}} S_{\alpha\bar{\beta}}$$

La viscosité s'introduit par l'intermédiaire du tenseur des contraintes $\sigma'_{\bar{\rho}\bar{\nu}}$ [5] :

$$(IV-1-2) \quad \sigma'_{\bar{\rho}\bar{\nu}} = \eta_{\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\alpha\bar{\beta}} \frac{d}{dt} S_{\alpha\bar{\beta}}$$

Pour un milieu isotrope le tenseur d'élasticité et le tenseur de viscosité se mettent sous la forme

$$C_{\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\alpha\bar{\beta}} = \lambda \delta^{\alpha\bar{\beta}} \delta_{\bar{\rho}\bar{\nu}} + \mu (\delta_{\bar{\rho}}^{\alpha} \delta_{\bar{\nu}}^{\bar{\beta}} + \delta_{\bar{\nu}}^{\alpha} \delta_{\bar{\rho}}^{\bar{\beta}})$$

(IV-1-3)

$$\eta_{\bar{\rho}\bar{\nu}}^{\alpha\bar{\beta}} = \xi \delta^{\alpha\bar{\beta}} \delta_{\bar{\rho}\bar{\nu}} + \eta (\delta_{\bar{\rho}}^{\alpha} \delta_{\bar{\nu}}^{\bar{\beta}} + \delta_{\bar{\nu}}^{\alpha} \delta_{\bar{\rho}}^{\bar{\beta}})$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$(IV-1-4) \quad \rho \frac{d^2 s^{\alpha}}{dt^2} = \sum_{\bar{\rho}} \partial_{\bar{\rho}} (\sigma_{\bar{\rho}\alpha} + \sigma'_{\bar{\rho}\alpha})$$

ces équations sont valables dans le cadre de la théorie de l'élasticité lorsque les grandeurs du second ordre en $S^{\bar{F}}$ sont négligeables; ρ est alors la masse volumique du matériau, elle est considérée comme constante.

Considérons un matériau dont les lignes d'univers sont, en l'absence de gravitation, caractérisées par

$$\begin{aligned} x^{\bar{\rho}} &= y^{\bar{\rho}} \\ x^0 &= t \end{aligned}$$

Sous l'effet de la perturbation gravitationnelle (IV-0-1), les lignes d'univers ont pour équation

$$z^{\bar{\mu}} = \gamma^{\bar{\mu}} + \varepsilon^{\bar{\mu}}(v^{\bar{\mu}}, t)$$

$$z^0 = t$$

Les grandeurs $\varepsilon^{\bar{\mu}}$ sont des perturbations du premier ordre en ξ .

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$(IV-1-5) \quad T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

avec
$$T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu} - \Theta^{\mu\nu}$$

u^{ν} est le quadrivecteur vitesse des particules matérielles :

$$u^{\nu} = \frac{dz^{\nu}}{ds} \quad u^{\nu} u_{\nu} = 1$$

$\Theta^{\mu\nu}$ est le tenseur des contraintes et généralise $\sigma_{\rho\bar{\nu}}$.

L'équation (IV-1-5) est obtenue en supposant satisfaites les équations d'Einstein et en considérant le matériau comme passif.

Pour effectuer la généralisation des équation (IV-1-4) nous écrivons les lois de l'élasticité (IV-1-1) sous la forme

$$(IV-1-6) \quad \frac{d}{dt} \sigma_{\rho\bar{\nu}} = \frac{1}{2} c_{\rho\bar{\nu}}{}^{i\bar{\beta}} \frac{d}{dt} \gamma_{i\bar{\beta}}$$

De la même manière (IV-1-2) s'écrit

$$(IV-1-7) \quad \sigma'_{\rho\bar{\nu}} = \frac{1}{2} \eta_{\rho\bar{\nu}}{}^{i\bar{\beta}} \frac{d}{dt} \gamma_{i\bar{\beta}}$$

Dans le cadre des idées de la relativité générale, le tenseur $\gamma_{i\bar{\beta}}$ sera remplacé par le tenseur $g^{\mu\nu}$ qui représente l'opérateur de projection sur l'hypersurface orthogonale aux lignes d'univers des particules matérielles :

$$g^{\star\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u_{\mu} u_{\nu}$$

Afin de conserver la nature tridimensionnelle de la théorie, on généralise l'opérateur " $\frac{d}{dt}$ " sous la forme $\frac{d}{ds}$, où $\frac{d}{ds}$ représente la dérivée

de Lie par rapport au champ de quadrivites u^ν . Il vient alors les résultats suivants :

$$\frac{1}{2} \sum_u g_{\lambda\mu}^* = E_{\lambda\mu}$$

$$E_{\bar{\nu}\bar{\nu}} = -E_{\bar{\nu}\bar{\nu},0}$$

avec $E_{\bar{\nu}\bar{\nu}} = \frac{1}{2} (\epsilon^{\bar{\nu},\bar{\nu}} + \epsilon^{\bar{\nu},\bar{\nu}} - \epsilon \phi_{\bar{\nu},\bar{\nu}})$

$$(IV-1-6)' \sum_u \Theta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} c_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \sum_u g_{\alpha\beta}^*$$

$$\Theta_{\bar{\nu}\bar{\nu}} = 2\gamma E_{\bar{\nu}\bar{\nu}} + \lambda \delta_{\bar{\nu}\bar{\nu}} \sum_x \epsilon_{xx}$$

$$(IV-1-7)' \Theta'_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \sum_u g_{\alpha\beta}^*$$

$$\Theta'_{\bar{\nu}\bar{\nu}} = 2\eta E_{\bar{\nu}\bar{\nu},0} + \xi \delta_{\bar{\nu}\bar{\nu}} \sum_x \epsilon_{xx,0}$$

Pour prendre en considération les frottements internes, il est nécessaire de développer une étude thermodynamique et de décrire en particulier les phénomènes de thermoconduction. Pour atteindre le but que nous nous sommes fixés nous nous proposons plutôt de modifier l'équation (IV-1-5) sous la forme

$$T^{\mu\nu}_{; \nu} = F^\mu = \Theta'^{\mu\nu}_{; \nu}$$

il vient alors les équations du mouvement :

$$\rho (\partial_{00} \epsilon^{\bar{\nu}} + \frac{1}{2} \epsilon \phi_{00,\bar{\nu}} - \epsilon \phi_{0\bar{\nu},0}) =$$

(IV-1-8)

$$\sum_{\bar{\nu}} \left\{ 2\gamma E_{\bar{\nu}\bar{\nu}} + \lambda \delta_{\bar{\nu}\bar{\nu}} \sum_x \epsilon_{xx} + 2\eta E_{\bar{\nu}\bar{\nu},0} + \xi \delta_{\bar{\nu}\bar{\nu}} \sum_x \epsilon_{xx,0} \right\}_{,\bar{\nu}}$$

Dans le cas d'une onde de gravitation de la forme (IV-0-1) ($\phi_{0\gamma} = 0; \phi^{\nu\nu}_{,\nu} = 0$), les équations (IV-1-8), satisfaites par $\epsilon^{\bar{\nu}}$, sont identiques aux équations classiques satisfaites par $\mathfrak{S}^{\bar{\nu}}$ (IV-1-4). L'excitation gravitationnelle apparaît donc essentiellement dans les conditions aux limites [6].

Les équations aux limites classiques se généralisent :

$$(\sigma_{\rho\bar{\nu}} + \sigma'_{\rho\bar{\nu}}) \eta^{\bar{\nu}} = 0$$

devient

$$(\theta_{\mu\nu} + \theta'_{\mu\nu}) \eta^{\nu} = 0$$

Soit, pour une métrique du type (IV-0-1) :

$$(2\mu \tilde{E}_{\rho\bar{\nu}} + \lambda \delta_{\rho\bar{\nu}} \frac{\tilde{E}_{\alpha\alpha}}{2} + 2\eta \tilde{E}_{\rho\bar{\nu},0} + \nu \delta_{\rho\bar{\nu}} \frac{\tilde{E}_{\alpha\alpha,0}}{2}) \eta^{\bar{\nu}} =$$

(IV-1-9)

$$(\varepsilon \mu \phi_{\rho\bar{\nu}} + \varepsilon \eta \phi_{\rho\bar{\nu},0}) \eta^{\bar{\nu}}$$

où $\eta^{\bar{\nu}}$ est la normale sortante à la surface et $\tilde{E}_{\rho\bar{\nu}} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{\bar{\nu},\bar{\nu}} + \varepsilon_{,\bar{\nu}}^{\bar{\nu}})$.

Ce sont les équations (IV-1-9), valables pour les corps isotropes, que nous utiliserons par la suite.

Nous avons limité nos développements au cas des corps isotropes. Bien que restrictive, la condition d'isotropie conduit aux ordres de grandeur corrects dans de nombreux cas : les verres, dont l'anisotropie est toujours faible, les solides polycristallins lorsque les longueurs d'ondes acoustiques sont grandes devant la dimension des cristallites et certains monocristaux (cristaux cubiques par exemple).

IV-1-C : Le feuillet plan : modèle visco-élastique

Considérons un matériau limité par les plans $x = \pm L$.
 Considérons une onde de gravitation (IV-0-1) pour laquelle g est nul.

Supposons une décomposition de f sous la forme

$$f(t-z) = \int_2 f(\omega) e^{i\omega(t-z)} d\omega$$

La présence de frottements internes conduit à chercher $\xi^{\bar{v}}$ sous la forme

$$\xi^{\bar{v}} = \int e^{\bar{v}(\omega, \vec{x})} e^{i\omega t} d\omega$$

Pour expliciter les équations du mouvement (IV-1-8) nous introduisons les grandeurs \vec{x} et \vec{y} telles que

$$e^{\bar{v}} = x^{\bar{v}} + y^{\bar{v}}$$

(IV-1-10) $\text{div } \vec{y} = 0$

$$\text{rot } \vec{x} = \vec{0}$$

Les opérateurs "div" et "rot" sont les opérateurs divergence et rotationnel correspondant à un espace euclidien tridimensionnel.

Les équations du mouvement (IV-1-8) s'écrivent alors

$$\Delta \vec{x} = \Omega^2 \vec{x} \quad \Omega^2 = - \frac{\omega^2 \rho}{(2\nu + \lambda) + i\omega(2\eta + \xi)}$$

(IV-1-11)

$$\Delta \vec{y} = \Gamma^2 \vec{y} \quad \Gamma^2 = - \frac{\omega^2 \rho}{\nu + i\eta\omega}$$

Les conditions aux limites satisfaites en $x = \pm L$ (IV-1-9) se mettent sous la forme

$$X'_{,1} + Y'_{,1} + Z \operatorname{div} \vec{x} = \varepsilon f(\omega) e^{-i\omega z}$$

(IV-1-12) $X''_{,1} + X'_{,2} + Y''_{,1} + Y'_{,2} = 0$

$$X''_{,1} + X'_{,3} + Y''_{,1} + Y'_{,3} = 0$$

avec
$$Z = \frac{\lambda + i\omega \xi}{2(\mu + i\omega \eta)}$$

En considérant les symétries du problème, on est conduit à chercher une solution particulière satisfaisant les relations

$$\begin{aligned} \partial_2 \vec{x} &= \vec{0} & \partial_2 \vec{y} &= \vec{0} \\ x^2 &= 0 & y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Les relations (IV-1-10) permettent alors d'introduire deux fonctions F et G telles que

(IV-1-13)
$$\begin{aligned} x^1 &= \partial_1 F & x^3 &= \partial_3 F \\ y^1 &= \partial_3 G & y^3 &= -\partial_1 G \end{aligned}$$

Les fonctions F et G sont cherchées sous la forme

$$F = F_0(x) e^{-i\omega z} \quad G = G_0(x) e^{-i\omega z}$$

Les équations du mouvement (IV-1-11) donnent :

(IV-1-14)
$$\begin{aligned} \text{a) } F &= (F_1 e^{-\alpha x} + F_2 e^{\alpha x}) e^{-i\omega z} \\ \text{b) } G &= (G_1 e^{-\beta x} + G_2 e^{\beta x}) e^{-i\omega z} \end{aligned}$$

avec

$$(IV-1-14) \quad c) \quad \alpha^2 = \Omega^2 + \omega^2 \quad ; \quad \beta^2 = \Gamma^2 + \omega^2$$

Les conditions aux limites deviennent alors pour $x = \pm L$:

$$(IV-1-15) \quad \begin{aligned} a) \quad & F_1 e^{-\alpha x} (\alpha^2 + \Omega^2) + F_2 e^{\alpha x} (\alpha^2 + \Omega^2) \\ & + G_1 e^{-\beta x} i\omega\beta - G_2 e^{\beta x} i\omega\beta = \varepsilon f(\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & F_1 e^{-\alpha x} 2i\omega\alpha - F_2 e^{\alpha x} 2i\omega\alpha \\ & - G_1 e^{-\beta x} (\beta^2 + \omega^2) - G_2 e^{\beta x} (\beta^2 + \omega^2) = 0 \end{aligned}$$

Supposons une faible viscosité du solide :

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{\omega(2\eta + \xi)}{2\mu + \lambda} \ll 1$$

(IV-1-16)

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{\eta\omega}{\mu} \ll 1$$

Supposons en outre que dans l'épaisseur du feuillet, l'amortissement soit faible :

$$(IV-1-17) \quad \varepsilon_1 \frac{\omega L}{c_l} \ll 1 \quad \varepsilon_2 \frac{\omega L}{c_t} \ll 1$$

avec $c_p = \left(\frac{2\mu + \lambda}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$: célérité des ondes mécaniques longitudinales

$c_t = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$: célérité des ondes mécaniques transversales.

Les conditions (IV-1-16) et (IV-1-17) décrivent la seule situation susceptible de conduire à un phénomène de résonance aiguë. Nous allons montrer que, malgré ces conditions, les déplacements peuvent le plus souvent être négligés.

Effectuons un développement limité au premier ordre en ε_1 , et ε_2 :

$$\Omega^2 = - \frac{\omega^2}{c_p^2} (1 - i \varepsilon_1)$$

$$\Gamma^2 = - \frac{\omega^2}{c_t^2} (1 - i \varepsilon_2)$$

$$\alpha^2 = - \frac{\omega^2}{c_p^2} \left(1 - i \varepsilon_1 - \frac{c_p^2}{c_t^2}\right)$$

$$\beta^2 = - \frac{\omega^2}{c_t^2} \left(1 - i \varepsilon_2 - \frac{c_t^2}{c_p^2}\right)$$

$$z = \frac{c_p^2}{2 c_t^2} (1 + i \varepsilon_1 - i \varepsilon_2) - 1$$

La célérité, C , de la gravitation dans le vide, a été introduite par des considérations de dimension. Soit ν un ordre de grandeur commun à c_p et c_t par exemple :

$$\nu = \frac{c_p + c_t}{2}$$

On peut chercher un développement des inconnues F_i et G_i sous la forme

$$F_i = \tilde{F}_i + \frac{\nu}{c} \bar{F}_i + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \dots$$

$$G_i = \tilde{G}_i + \frac{\nu}{c} \bar{G}_i + \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \dots$$

avec $i = 1, 2$

La condition (IV-1-15 b) s'écrit alors pour $x = \pm L$:

$$\begin{aligned} & \tilde{F}_1 e^{-\alpha x} \left\{ -\frac{2\omega^2}{c_p c} \left(1 - i \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \right\} + \tilde{F}_2 e^{\alpha x} \left\{ \frac{2\omega^2}{c_p c} \left(1 - i \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \right\} \\ & + \tilde{G}_1 e^{-\beta x} \left\{ \frac{\omega^2}{c_t^2} (1 - i \varepsilon_2) \right\} - \tilde{G}_2 e^{\beta x} \left\{ \frac{\omega^2}{c_t^2} (1 - i \varepsilon_2) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions (IV-1-16) et (IV-1-17) il est clair que G_i est du premier ordre en V/C .

Les ondes transversales engendrées sont donc d'amplitude négligeable devant celle des ondes longitudinales, dans le modèle étudié ($q=0, x=\pm L$).

La relation (IV-1-15 b) permet donc de déterminer les coefficients \bar{G}_i en fonction des \tilde{F}_i . La relation (IV-1-15 a) permet de déterminer les coefficients \tilde{F}_i puis, compte tenu de la valeur correspondante de \bar{G}_i , les coefficients \bar{F}_i . Il vient à l'ordre zéro en V/C :

$$\frac{\omega^2}{c_e^2} \left\{ -1 + i\epsilon_1 - (1 - i\epsilon_1) \left(\frac{c_e^2}{2c_l^2} [1 + i\epsilon_1 - i\epsilon_2] - 1 \right) \right\} \left\{ \tilde{F}_1 e^{-ix} + \tilde{F}_2 e^{ix} \right\} = \epsilon f(\omega)$$

pour $x = \pm L$

Ces relations impliquent

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2$$

On déduit alors de (VI-1-13) et (IV-1-14), l'immobilité du plan médian pour le feuillet.

Compte tenu de (IV-1-16) et (IV-1-17) on trouve

$$|\tilde{F}_1| \leq \frac{\epsilon \epsilon f(\omega) c_l^2 c_e}{\omega^3 L \epsilon_1}$$

il vient alors

$$|X_1| \leq \frac{4 \epsilon f(\omega) c_l^2}{\omega^3 L \epsilon_1}$$

(IV-1-18)

$$|X_2| \leq \frac{\epsilon f(\omega) c_l^2}{\omega^3 L \epsilon_1} \frac{c_l}{c_e}$$

L'égalité est obtenue lorsque les conditions de résonance sont satisfaites :

$$(IV-1-19) \quad L\omega \left(\frac{1}{c_e} - \frac{1}{c_l} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 + 2\eta)$$

avec n entier non négatif.

Représentons l'onde de gravitation par un signal carré :

$$f(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega - \omega_0| > \frac{\Delta\omega}{2} \\ f_0 & |\omega - \omega_0| < \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$$

supposons la relation

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

On obtient aisément l'ordre de grandeur des déplacements, d , de la surface :

$$d \ll \frac{4 E f_0 \Delta\omega c^2}{\omega_0^2 L E_1}$$

Pour une onde de gravitation sinusoïdale permanente on a :

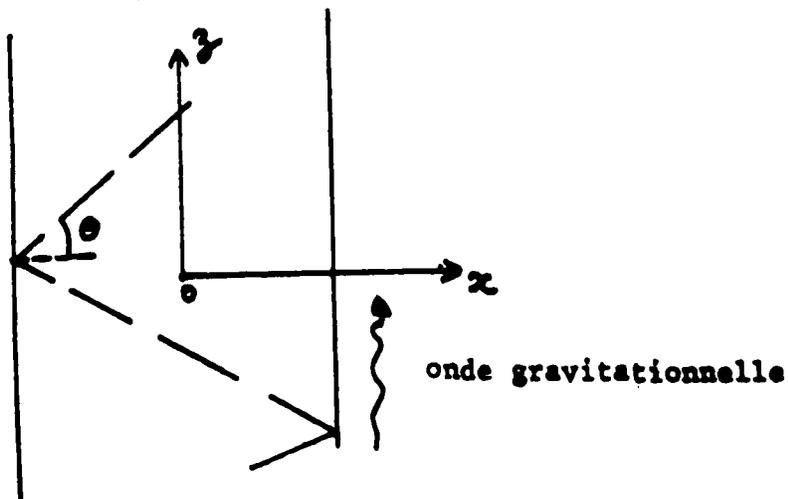
$$f(t-z) = f \sin \omega_0(t-z)$$

(IV-1-20)

$$d \ll \frac{4 E f c^2}{\omega_0^2 L E_1}$$

Il est possible de donner une représentation physique concrète de la solution étudiée.

Négligeant les ondes transversales (cf ci-dessus), on considère l'état mécanique du feuillet comme superposition d'ondes longitudinales progressives, dont les vecteurs d'ondes sont légèrement inclinés sur la normale au feuillet



L'angle est déterminé par la condition que la célérité apparente sur l'axe oz soit égale à la célérité des ondes de gravitation :

$$c = \frac{c_p}{\sin \theta}$$

Ainsi la déformation de la surface accompagne la sollicitation gravitationnelle.

L'angle θ , très petit, est sensiblement égal au rapport des déplacements suivant les axes oz et ox :

$$(IV-1-21) \quad \theta \approx \sin \theta = \frac{c_p}{c} = \frac{\chi^3}{\chi^1} \approx 10^{-5} \quad (\text{cf IV-1-18})$$

La célérité apparente suivant l'axe ox est

$$(IV-1-22) \quad c_x = \frac{c_p}{\cos \theta}$$

La relation (IV-1-14 a) donne

$$c_x = \frac{\omega_0}{i \alpha}$$

En éliminant θ entre (IV-1-21) et (IV-1-22) on obtient la relation (IV-1-14 c) à la limite $\varepsilon_1 = 0$:

$$\alpha^2 = \omega_0^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_p^2} \right)$$

Les conditions de résonance (IV-1-19) s'obtiennent en écrivant la relation

$$2L = \frac{\lambda_x}{2} (2n + 1)$$

où λ_x est la longueur d'onde apparente sur l'axe ox :

$$\lambda_x = c_x \cdot \frac{2\pi}{\omega_0} \approx c_p \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Dans le problème considéré par la suite, les limites du feuillet constituent des plans de réflexion pour des ondes électromagnétiques de pulsation ω_e . Les parois peuvent être considérées comme immobiles pour les réflexions si on a :

$$(IV-1-23) \quad d \ll \frac{2\pi c}{\omega_e} \quad \text{et} \quad \omega_e d \ll c$$

Introduisons le facteur de qualité Q_M pour les ondes mécaniques longitudinales à basse température :

$$Q_M = \frac{1}{\epsilon_1}$$

Soit λ_M les longueurs d'onde mécaniques et v un ordre de grandeur commun à c_e et c_t :

$$\lambda_M \sim \frac{2\pi v}{\omega_0}$$

A partir de (IV-1-23) on obtient :

$$\frac{\epsilon f}{\pi e} \frac{v}{c} \frac{\omega_e}{\omega_0} \frac{\lambda_M}{L} Q \ll 1$$

(IV-1-23)'

$$\frac{2\epsilon f}{\pi} \frac{v}{c} \frac{\lambda_M}{L} Q \ll 1$$

Les conditions de résonance impliquent :

$$\frac{\lambda_M}{L} \ll 4$$

Considérons un matériau à haut facteur de qualité (monocristal de quartz, par exemple, dont les faces sont métallisées). On peut prendre alors $Q \sim 10^8$ [7],

$\frac{v}{c} \sim 10^{-5}$; en posant $\epsilon f \omega_0 = K$ avec $K = (32\pi G I / c^3)^{\frac{1}{2}}$,

il vient :

$$\frac{K}{\omega_0} \frac{\omega_e}{\omega_0} \cdot 10^8 \ll 1$$

(IV-1-23)''

$$\frac{K}{\omega_0} 10^4 \ll 1$$

Pour $K \sim 5 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$, ce qui correspond à un flux gravitationnel $I \sim 10^3 \text{ W/m}^2$, il apparaît clairement que les relations (IV-1-23) sont toujours satisfaites pour des épaisseurs raisonnables du feuillet ($L \leq 1 \text{ m}$) même si la fréquence des ondes électromagnétiques est élevée ($\omega_e \leq 10^{17} \text{ s}^{-1}$)

Lorsqu'on utilise des métaux, les facteurs Q sont très inférieurs à l'ordre de grandeur donné ici et il apparaît que nous pouvons négliger les déformations du feuillet lorsque nous considérons la réflexion des ondes électromagnétiques.

Un argument pragmatique consiste à remarquer que malgré les efforts effectués pour améliorer la sensibilité des antennes mécaniques, les déplacements sont inférieurs à l'Angström pour une fréquence de l'ordre de 10^8 Hz

Dans ces conditions, les relations (IV-1-23) sont satisfaites pour les ondes électromagnétiques visibles ($\omega_e \leq 10^{16} \text{ s}^{-1}$) et des flux d'énergie gravitationnels, I , inférieurs à 10^6 W/m^2 .

Les considérations développés ici sur un cas particulier conduisent à la notion de modèle visco élastique ; en effet, en prenant en considération les forces de frottements et le caractère fini du facteur de qualité mécanique, nous avons montré que les surfaces limites subissaient des déplacements négligeables lorsqu'on considère les réflexions des ondes électromagnétiques. Ce modèle sera utilisé par la suite dans l'étude du couplage intrinsèque. Et nous négligerons alors le couplage aux limites ce qui est justifié en première approximation.

IV-1-D : Modèle basse fréquence : $BF_{//}$

En étudiant le feuillet plan au paragraphe précédent, nous avons vu que seuls les déplacements perpendiculaires au feuillet, associés aux ondes longitudinales sont ^{non} négligeables, à l'approximation $v/c \sim 0$, pour la géométrie étudiée ($\theta = 0$; $x = \pm L$).

Considérons un matériau caractérisé par la nullité des coefficients ϵ_1 et ϵ_2 . Les conditions aux limites (IV-1-15 a) s'écrivent :

$$\left(\tilde{F}_1 e^{-\alpha x} + \tilde{F}_2 e^{\alpha x} \right) \cdot \frac{\omega^2}{c_p^2} \cdot \frac{c_t^2}{2c_t^2} = -\epsilon f(\omega)$$

pour $x = \pm L$, avec $\alpha = i\omega/c_p$

on trouve alors

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 = F = -\epsilon f(\omega) \cdot \frac{2c_t^2}{c_p^2} \cdot \frac{c_p^2}{2\omega^2 \cos \frac{\omega L}{c_t}}$$

La relation (IV-1-13) donne

$$\begin{aligned} \chi^1 &= \alpha F (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) e^{-i\omega z} \\ &= \epsilon f(\omega) \frac{2c_t^2}{c_p^2} \cdot \frac{c_p}{\omega} \cdot \frac{\sin \frac{\omega x}{c_p}}{\cos \frac{\omega L}{c_t}} e^{-i\omega z} \end{aligned}$$

Supposons que les longueurs d'ondes des ondes mécaniques soient très supérieures aux dimensions transversales du feuillet ;

$$(IV-1-24) \quad \frac{\omega L}{c_t} \ll 1$$

L'expression χ^1 se met sous la forme

$$\chi^1 = \epsilon f(\omega) \frac{2c_t^2}{c_p^2} x e^{-i\omega z}$$

Il vient alors

$$\varepsilon^{\bar{v}} = \delta_{\bar{v}}^{\bar{v}} x \cdot \frac{2c_t^2}{c_p^2} \varepsilon \int f(\omega) e^{-i\omega(t-z)} d\omega$$

soit

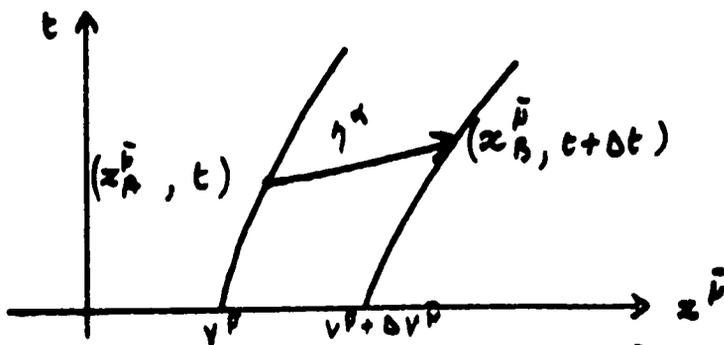
$$(IV-1-25) \quad \varepsilon^{\bar{v}} = \frac{2c_t^2}{c_p^2} \cdot \frac{x}{2} f(t-z)$$

On peut, sans référence à l'élasticité, décrire dans un but heuristique, le feuillet plan en supposant que les droites, D , perpendiculaires aux faces forment un système rigide au sens où nous le définissons ci-dessous.

Considérons les lignes d'univers décrites par deux points voisins A et B, elles sont repérées respectivement par $v^{\bar{p}}$ et $v^{\bar{p}} + \Delta v^{\bar{p}}$ et paramétrées par t :

$$x_A^{\bar{v}} = v^{\bar{p}} + \varepsilon^{\bar{v}}(v^{\bar{p}}, t)$$

$$x_B^{\bar{v}} = v^{\bar{p}} + \Delta v^{\bar{p}} + \varepsilon^{\bar{v}}(v^{\bar{p}} + \Delta v^{\bar{p}}, t)$$



Soit $\eta^{\bar{a}}$ le quadrivecteur joignant $(x_A^{\bar{v}}, t)$ à $(x_B^{\bar{v}}, t + \Delta t)$:

$$(IV-1-26) \quad \eta^{\bar{a}} = \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial v^{\bar{p}}} \Delta v^{\bar{p}}$$

On généralise la notion de rigidité classique en supposant qu'il existe un quadrivecteur $\eta^{\bar{a}}$ qui se déduise par transport parallèle :

$$\frac{d\eta^{\bar{a}}}{ds} + \Gamma_{\bar{p}\bar{p}}^{\bar{a}} \cdot \frac{dx^{\bar{p}}}{ds} \cdot \eta^{\bar{p}} = 0$$

En utilisant la métrique (IV-0-1), pour $g = 0$, il vient au premier ordre :

$$\frac{d\eta^0}{dt} = 0 \quad \frac{d\eta^3}{dt} = 0$$

$$(IV-1-27) \quad \frac{d\eta^1}{dt} - \frac{1}{2} \varepsilon \dot{f}(t-z) \eta^1 = 0$$

$$\frac{d\eta^2}{dt} + \frac{1}{2} \varepsilon \dot{f}(t-z) \eta^2 = 0$$

Le symbole ($\dot{}$) représente ici une dérivée partielle par rapport au temps.

Avant l'arrivée de la perturbation gravitationnelle, à l'instant $t = 0$ par exemple, donnons nous η^i sous la forme

$$\eta^0 = 0 \quad \eta^i = \Delta V^i \quad \text{pour} \quad \Delta V^2 = \Delta V^3 = 0$$

Les équations (IV-1-27) s'intègrent alors :

$$\eta^1 = \Delta V^1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} f(t-z) \right)$$

$$\eta^2 = \eta^3 = \eta^0 = 0$$

on obtient également

$$\varepsilon^1 = \frac{1}{2} V^1 \varepsilon f(t-z) + f_1(t, v_2, v_3)$$

$$(IV-1-28) \quad \varepsilon^2 = f_2(t, v_2, v_3)$$

$$\varepsilon^3 = f_3(t, v_2, v_3)$$

La solution (IV-1-25) est un cas particulier de (IV-1-28) lorsque l'on a

$$(IV-1-29) \quad 2c_t^2 = c_e^2$$

La relation (IV-1-29) implique la nullité du coefficient de Poisson et du coefficient de Lamé, λ , pour le matériau considéré.

Le modèle BF // peut donc sous certaine hypothèse conduire à la notion de modèle rigide.

Par la suite nous utiliserons le modèle BF_{\parallel} du feuillet plan pour étudier un phénomène de résonance aux limites.

IV-1-E : Le modèle basse fréquence BF_{\perp}

Considérons un cylindre de section négligeable devant la longueur d'onde de gravitation et d'axe Ox . Nous supposons que les coefficients ξ et λ de l'équation (IV-1-9) sont nuls.

Les composantes ϕ_{11} et ϕ_{22} du champ de gravitation provoquent alors des déplacements longitudinaux et transversaux indépendants. Pour étudier le déplacement des extrémités suivant l'axe Ox , nous considérons la composante ϕ_{11} seule et nous cherchons une solution de (IV-1-9) sous la forme

$$\varepsilon^{\bar{\nu}} = \delta_1^{\bar{\nu}} \varepsilon^{\bar{\nu}}(x, t)$$

L'équation (IV-1-8) s'écrit alors

$$(IV-1-30) \quad \rho \frac{\partial^2 \varepsilon^1}{\partial t^2} = 2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon^1}{\partial x^2} + 2\eta \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varepsilon^1}{\partial x^2} \quad (*)$$

Les conditions aux limites, déduites (IV-1-9) sont

$$(IV-1-31) \quad 2\mu \varepsilon^1_{,1} + 2\eta \varepsilon^1_{,10} = \varepsilon \mu f(t) + \varepsilon \eta \frac{df}{dt}$$

Dans l'expression (IV-1-31) nous avons posé

$$f(t-z) \approx f(t)$$

(*) Remarquons une différence entre l'équation (IV-1-30) et l'équation obtenue en référence [3].

Dans le cas d'une onde sinusoïdale nous posons

$$f(t) = f e^{i\omega t}$$

Il vient alors la solution permanente

$$\varepsilon^1 = (A e^{i\alpha x} + B e^{-i\alpha x}) e^{i\omega t}$$

avec
$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \rho}{2(\mu + i\omega\eta)}$$

Les coefficients A et B sont déterminés par les conditions (IV-1-31) satisfaites en $x = \pm L$, on trouve

$$A = -B = \frac{\varepsilon f}{2i\alpha} \frac{1}{e^{i\alpha L} + e^{-i\alpha L}}$$

Supposons que le facteur de qualité Q_M , soit élevé et le cylindre pas trop long :

$$Q_M = \frac{\nu}{\omega\eta} \gg 1$$

$$\frac{2\pi L}{Q_M \lambda_M} \ll 1 \quad \lambda_M = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2\nu}{\rho}}$$

on trouve

$$\varepsilon^1(L,t) = \varepsilon f \frac{\lambda_M}{2\pi} \frac{\left\{ \sin \frac{2\pi L}{\lambda_M} + i \frac{2\pi L}{\lambda_M} \frac{1}{2Q_M} \cos \frac{2\pi L}{\lambda_M} \right\} e^{i\omega t}}{2 \left\{ \cos \frac{2\pi L}{\lambda_M} + i \left(\frac{2\pi L}{\lambda_M} \frac{1}{2Q_M} \sin \frac{2\pi L}{\lambda_M} - \frac{1}{2Q_M} \cos \frac{2\pi L}{\lambda_M} \right) \right\}}$$

Un phénomène de résonance apparaît pour

$$(IV-1-32) \quad \cos \frac{2\pi L}{\lambda_M} \approx 0 \quad \text{soit} \quad 2L = \frac{\lambda_M}{2} (1 + 2K); \quad (K \text{ entier})$$

Pour $\frac{2L}{\lambda_M} = \frac{1}{2}$ il vient

$$(IV-1-33) \quad \mathcal{E}^1(L, t) = \varepsilon f \frac{2L Q M}{i \pi^2} e^{i \omega t}$$

Il est clair que, compte tenu de la relation (IV-1-19), l'expression (IV-1-20) conduit aux mêmes ordres de grandeurs que (IV-1-32), ceci justifie l'approximation que nous ferons en étudiant le couplage intrinsèque avec des surfaces limites immobiles.

IV-1-F : Conclusion

Après avoir rappelé les éléments d'élasticité nécessaires à l'étude du feuillet plan, nous avons étudié celui-ci dans un cas particulier : l'effet de l'onde gravitationnelle considérée peut être décrit dans le cadre d'une théorie non relativiste des milieux continus ; les contraintes correspondantes apparaissent sur les surfaces et sont normales à celles-ci. Nous avons montré que, compte tenu du caractère fini du facteur de qualité mécanique, les déformations pouvaient être négligées même en présence d'un phénomène de résonance. Cette étude particulière justifie l'hypothèse communément admise [2] qui consiste à supposer les parois des cavités immobiles quand on considère l'interaction entre un rayonnement électromagnétique confiné et une onde de gravitation.

Un deuxième type de modèle a été étudié, le feuillet plan pour des ondes gravitationnelles basses fréquences lorsqu'on néglige les facteurs d'amortissement mécanique. Pour un matériau dont le coefficient de Poisson est nul, ce modèle généralise la notion de rigidité classique.

Le dernier type de modèle étudié est celui d'une antenne gravitationnelle pour laquelle certaines hypothèses heuristiques ont été posées. Les résultats qualitatifs habituels sont retrouvés.^(*)

Nous utiliserons par la suite les résultats obtenus ici pour étudier à titre d'exemple un phénomène de résonance aux limites.

(*) Une étude récemment publiée confirme les résultats obtenus dans l'étude de ce modèle ainsi que l'équation (IV-1-9) ci-dessus [8] .

CHAPITRE II

COUPLAGES AUX LIMITES

IV-2-A : Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons une généralisation des conditions aux limites satisfaites par un conducteur électrique parfait. L'utilisation de ces conditions implique que nous considérons des ondes électromagnétiques de fréquences inférieures à celle de l'ultra-violet et que nous négligeons le couplage local entre le miroir et l'onde gravitation.

Dans le cadre d'une théorie classique, nous considérerons un exemple de résonance aux limites en utilisant les modèles $B F$ introduits ci-dessus et nous étudierons plus particulièrement les phénomènes de double résonance mécanique et électromagnétique .

IV-2-B : Conditions aux limites

Considérons un conducteur parfait dont les éléments matériels décrivent les lignes d'univers

$$(IV-2-1) \quad x^\mu = x^\mu(v^{\vec{a}}, t)$$

Le paramètre t peut être identifié à la coordonnée temporelle x^0 et les grandeurs $v^{\vec{a}}$ peuvent représenter l'abscisse des points matériels avant l'apparition d'une perturbation gravitationnelle.

Dans ces conditions, l'intérieur du conducteur est caractérisé par la relation

$$H(V^{\bar{p}}) < 0$$

En inversant (*) (VI-2-1), il vient

$$H(V^{\bar{p}}(x^{\mu})) \equiv F(x^{\mu}) < 0$$

La surface du conducteur satisfait l'équation

$$(IV-2-2) \quad F(x^{\mu}) = 0$$

On obtient la normale à la surface sous la forme

$$(IV-2-3) \quad N_{\mu} = \partial_{\mu} F = \nabla_{\mu} F$$

Considérons un système de coordonnées comouvant avec les éléments matériels du conducteur. Pour les repères propres associés le champ électrique est le vecteur E_{ν} .

$$(IV-2-4) \quad E_{\nu} = u^{\rho} F_{\rho\nu} \quad (\text{cf II-1-A})$$

$$\text{avec } u^{\rho} = \frac{dx^{\rho}}{ds}$$

Nous généralisons les conditions aux limites d'un conducteur parfait en supposant l'orthogonalité du vecteur E_{ν} et de la surface limite $F(x^{\mu}) = 0$

$$(IV-2-5) \quad E_{\mu} N_{\rho} = E_{\rho} N_{\mu}$$

En introduisant le quadri-potentiel A_{μ} (cf II-1-A), les équations (IV-2-3), (IV-2-4) et (IV-2-5) donnent

(*) La fonction H ainsi que les fonctions $x^{\mu}(V^{\bar{p}}, t)$ sont supposées ici de classe C^1 .

$$(IV-2-6) \quad u^\rho (\nabla_\rho A_\mu - \nabla_\mu A_\rho) \nabla_\nu F = u^\rho (\nabla_\rho A_\nu - \nabla_\nu A_\rho) \nabla_\mu F$$

Nous supposons par la suite que l'équation (IV-2-6) est la condition aux limites satisfaite par le quadri-potentiel électromagnétique.

En se limitant à des développements du premier ordre, la relation (IV-2-1) se met sous la forme

$$x^{\bar{\mu}} = v^{\bar{\mu}} + \varepsilon \bar{F}(v^{\bar{\mu}}, t)$$

$$x^0 = t$$

La fonction H étant donnée, il vient

$$(IV-2-7) \quad F(x^\rho) = H(x^{\bar{\mu}}) - \varepsilon \bar{F}(x^{\bar{\mu}}, t) \partial_{\bar{\mu}} H(x^{\bar{\mu}})$$

En développant le quadri-potentiel A_μ on obtient

$$(IV-2-8) \quad A_\mu = \tilde{A}_\mu + \varepsilon \bar{A}_\mu$$

En effectuant un développement au premier ordre il vient, avec $\phi_\infty = 0$:

$$ds = dt$$

Ceci suppose que les vitesses des particules matérielles, dans le repère quasi-galiléen utilisé, restent négligeables devant la célérité de la lumière. Le quadrivecteur vitesse s'exprime alors

$$(IV-2-9) \quad u^{\bar{\mu}} = \frac{\partial \varepsilon^{\bar{\mu}}(x^{\bar{\mu}}, t)}{\partial t}$$

$$u^0 = 1 ;$$

ces relations permettent d'expliciter les conditions (IV-2-6).

Posons

$$X_{\mu\nu} \equiv u^\rho (\nabla_\rho A_\mu - \nabla_\mu A_\rho) \nabla_\nu F$$

Compte tenu de (IV-2-7), (IV-2-8) et (IV-2-9) il vient

$$\chi_{\mu\nu} = \tilde{\chi}_{\mu\nu} + \varepsilon \bar{\chi}_{\mu\nu}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{\mu\nu} &= (\partial_0 \tilde{A}_\mu - \partial_\mu \tilde{A}_0) \partial_0 H(x^2) \\ \text{(IV-2-10)} \quad \varepsilon \bar{\chi}_{\mu\nu} &= \frac{\partial \varepsilon^{\bar{P}}}{\partial t} (\partial_{\bar{P}} \tilde{A}_\mu - \partial_\mu \tilde{A}_{\bar{P}}) \partial_0 H + \varepsilon (\partial_0 \bar{A}_\mu - \partial_\mu \bar{A}_0) \partial_0 H \\ &\quad - (\partial_0 \tilde{A}_\mu - \partial_\mu \tilde{A}_0) (\varepsilon^{\bar{P}} \partial_{\bar{P}} H),_0 \end{aligned}$$

Les conditions aux limites (IV-2-6) s'écrivent :

$$\chi_{\mu\nu}(x^2) = \chi_{0\mu}(x^2) \quad \text{pour} \quad F(x^2) = 0$$

Il est possible, au premier ordre, d'introduire des conditions aux limites fixes. Un développement de $\chi_{\mu\nu}$ donne :

$$\chi_{\mu\nu}(x^2) = \chi_{\mu\nu}(v^2) + \varepsilon^{\bar{t}}(v^{\bar{t}}, t) \partial_{\bar{t}} \chi_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu}(v^2, t)$$

Les conditions aux limites s'écriront alors

$$\gamma_{\mu\nu}(v^2, t) = \gamma_{0\mu}(v^2, t) \quad \text{pour} \quad H(v^2) = 0$$

Posons

$$\gamma_{\mu\nu} = \tilde{\gamma}_{\mu\nu} + \varepsilon \bar{\gamma}_{\mu\nu}$$

il vient

$$\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \tilde{\chi}_{\mu\nu}(v^2, t)$$

(IV-2-11)

$$\varepsilon \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \varepsilon^{\bar{t}}(v^{\bar{t}}, t) \partial_{\bar{t}} \tilde{\chi}_{\mu\nu}(v^{\bar{t}}, t) + \varepsilon \bar{\chi}_{\mu\nu}(v^{\bar{t}}, t)$$

Les conditions aux limites s'expriment alors sous la forme :

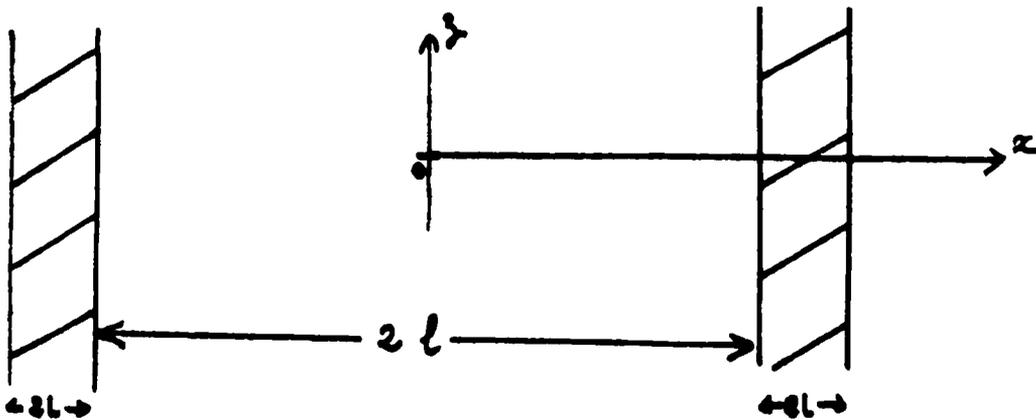
$$(IV-2-12) \quad \tilde{Y}_{\mu\nu}(v^i, t) = \tilde{Y}_{\nu\mu}(v^{\bar{i}}, t)$$

$$\bar{Y}_{\mu\nu}(v^{\bar{i}}, t) = \bar{Y}_{\nu\mu}(v^i, t) \quad \text{pour} \quad H(v^{\bar{i}}) = 0$$

ce sont les équations (IV-2-12) que nous utiliserons par la suite.

IV-2-C : Résonance électromagnétique des modèles BF

Considérons un modèle de cavité électromagnétique formé de deux feuillets plans :



Supposons que le rayonnement électromagnétique initial soit caractérisé par le quadri-potentiel

$$\tilde{A}_{\mu} = a_{\mu} \sin(\omega t + d) \sin(\omega x + \omega l)$$

avec $2\omega l = n\pi$ (n entier) et a_2 seul non nul.

La perturbation \bar{A}_μ , du quadri-potentiel, satisfait les équations (IV-0-2) ; pour $g(t-z) = 0$, dans la jauge de Lorentz ($\nabla_\nu A^\nu = 0$) il vient :

$$\square \bar{A}_1 = 0 \quad \square \bar{A}_3 = 0$$

$$(IV-2-13) \quad \square \bar{A}_2 = f(t-z) \partial_{11} \tilde{A}_2 + \partial_0 f(t-z) \partial_0 \tilde{A}_2$$

$$\square \bar{A}_0 = 0$$

$$\partial_0 \bar{A}_0 - \partial_1 \bar{A}_1 - \partial_2 \bar{A}_2 - \partial_3 \bar{A}_3 = 0$$

Nous recherchons une solution particulière, satisfaisant les conditions

$$\bar{A}_0 = \bar{A}_1 = \bar{A}_3 = 0$$

Soumis à la sollicitation gravitationnelle, les feuilletts plans qui constituent les parois de la cavité, subissent des déformations.

Soient \mathcal{E}_\pm^1 les déplacements des points matériels constituant les surfaces limites d'équations initiales $x = \pm \ell$

Les conditions aux limites (IV-2-15) conduisent aux seules relations

$$\partial_0 \{ \mathcal{E}_\pm^1 \partial_1 \tilde{A}_2 + \mathcal{E} \bar{A}_2 \} = 0 \quad \text{pour } x = \pm \ell$$

L'équation (IV-2-13) admet une solution de la forme

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{2} \partial_0 \{ \mathcal{F}(t-z) \tilde{A}_2 \} + G$$

avec

$$\partial_0 \mathcal{F}(t-z) = f(t-z)$$

$$(IV-2-14) \quad \square G = 0$$

La fonction G satisfait les conditions aux limites

$$-\mathcal{E} \partial_0 G = \partial_0 (\mathcal{E}_\pm^1 \partial_1 \tilde{A}_2) \quad \text{pour } x = \pm \ell$$

Considérons une onde de gravitation, sinusoïdale, permanente de pulsation Ω (*) et d'amplitude f .

Les expressions (IV-1-25) et (IV-1-33) correspondant aux valeurs de ε^1 pour les modèles $BF_{//}$, et BF_{\perp} se mettent sous une forme unique :

$$\varepsilon^1_{\pm} = \pm \varepsilon a \sin \Omega \left(t - \frac{z}{\lambda} \right)$$

Pour le modèle $BF_{//}$ il vient

$$a = \frac{2c_t^2}{c_l^2} \cdot \frac{L}{2} f \quad \text{et} \quad \lambda = 1$$

Pour le modèle BF_{\perp} il vient, dans le cas de la résonance fondamentale par exemple

$$a = \frac{2LQM}{\pi l} f \quad \text{et} \quad \lambda = \infty$$

En supposant la relation $\omega \neq \Omega$ on trouve G :

$$G = q(x) \cos \left\{ (\omega - \Omega)t + \frac{\Omega z}{\lambda} + d \right\} + Q(x) \cos \left\{ (\omega + \Omega)t - \frac{\Omega z}{\lambda} + d \right\}$$

avec

$$-q(\pm l) = \pm a \cos \omega(l \pm l) \cdot \frac{\omega a_2}{2}$$

(IV-2-15)

$$-Q(\pm l) = \mp a \cos \omega(l \pm l) \cdot \frac{\omega a_2}{2}$$

(*) Aucune confusion n'est possible avec la notation Ω introduite au chapitre précédent, cette grandeur n'intervenant pas dans la présente étude.

Nous posons

$$\omega_{(-)}^2 = (\omega - \Omega)^2 - \frac{\Omega^2}{\lambda^2}$$

$$\omega_{(+)}^2 = (\omega + \Omega)^2 - \frac{\Omega^2}{\lambda^2}$$

Il vient

$$q(x) = A \sin \omega_{(-)} x + B \cos \omega_{(-)} x$$

$$Q(x) = A' \sin \omega_{(+)} x + B' \cos \omega_{(+)} x$$

Les relations (IV-2-15) déterminent les coefficients A, B, A', B' sauf dans l'un des cinq cas suivants pour lesquels apparaît un phénomène de résonance

a) $\omega = \Omega$

b) $\cos 2\omega l = -1$ et $\cos \omega_{(+)} l = 0$

c) $\cos 2\omega l = -1$ et $\cos \omega_{(-)} l = 0$

d) $\cos 2\omega l = 1$ et $\sin \omega_{(+)} l = 0$

e) $\cos 2\omega l = 1$ et $\sin \omega_{(-)} l = 0$

A titre d'exempl. étudions le cas e) pour $\omega_{(-)} \neq 0$

$\cos 2\omega l = 1$ soit $\omega l = n\pi$ avec n entier

$\sin \omega_{(+)} l = 0$ soit $\omega_{(+)} l = m\pi$ avec m entier

Posons

$$u = (\omega - \Omega) t + \frac{z}{\lambda} + d$$

On trouve la solutions résonante de G sous la forme

$$G = G_R = q(u - \omega_{(r)} x) - q(u + \omega_{(r)} x)$$

avec

$$(-1)^{m+1} q(u) = \frac{a_2 \omega G}{4 \omega_{(r)} \ell} u \cos u$$

Les composantes du champ électromagnétique perturbé, proportionnelles au temps s'obtiennent sous la forme

$$\bar{E}_y = \varepsilon \bar{A}_{2,0} = -\varepsilon \frac{a_2 \omega G}{2 \omega_{(r)} \ell} \cdot (\omega - \Omega)^2 t \cdot \sin \omega_{(r)} x \cdot \cos \left\{ (\omega - \Omega)t + \frac{\Omega z}{\lambda} + \alpha \right\}$$

$$\bar{B}_x = \varepsilon \bar{A}_{2,3} = -\varepsilon \frac{a_2 \omega G}{2 \omega_{(r)} \ell} \cdot (\omega - \Omega) \frac{\Omega}{\lambda} t \sin \omega_{(r)} x \cdot \cos \left\{ (\omega - \Omega)t + \frac{\Omega z}{\lambda} + \alpha \right\}$$

$$\bar{B}_y = -\varepsilon \bar{A}_{2,1} = \varepsilon \frac{a_2 \omega G}{2 \omega_{(r)} \ell} (\omega - \Omega) \omega_{(r)} t \cos \omega_{(r)} x \cdot \sin \left\{ (\omega - \Omega)t + \frac{\Omega z}{\lambda} + \alpha \right\}$$

On peut caractériser l'importance de l'effet par le rapport M de l'amplitude du champ perturbé au champ initial :

$$M = \varepsilon \frac{G (\omega - \Omega)^2 t}{2 \omega_{(r)} \ell}$$

En utilisant cette expression de M nous allons discuter succinctement le cas des modèles **BF** introduits précédemment.

a) Le modèle **BF_⊥**

Dans ce cas le paramètre λ est infini il vient alors

$$\omega_{(r)} = |\omega - \Omega|$$

$$\bar{B}_x = 0$$

$$M = \varepsilon \frac{G}{2 \ell} |\omega - \Omega| t$$

La solution résonante étudiée est une onde électromagnétique dont l'amplitude croît avec le temps et qui a même direction et même polarisation que l'onde initiale. Sa pulsation est ω_r :

$$\omega_r = |\omega - \Omega|$$

Les conditions $\omega \ell = n\pi$ et $\omega_r \ell = m\pi$ impliquent la condition de résonance électromagnétique :

$$(IV-2-16) \quad \Omega = \frac{N\pi c}{\ell} ; \quad N \text{ entier}$$

Afin que \mathcal{G} soit aussi important que possible, il faut que la condition de résonance mécanique (IV-1-32) soit satisfaite pour les feuillets plans :

$$\Omega = \frac{\pi C_e}{2L} (1 + 2K)$$

En utilisant (IV-2-16) on trouve alors

$$\frac{L}{\ell} = \frac{C_e}{c} \cdot \frac{1+2K}{N}$$

En admettant que L et ℓ sont de même ordre de grandeur il vient $K \gg 10^5$: seules les harmoniques mécaniques d'ordre élevé peuvent conduire à un phénomène de double résonance dans ces conditions.

De (IV-1-E) on tire :

$$\mathcal{G} = f \left(\frac{\lambda_M}{2\pi} \right)^2 \frac{Q_M}{L} = f \left(\frac{c_e}{\Omega} \right)^2 \frac{Q_M}{L}$$

On exprime f en fonction du flux d'énergie gravitationnelle I :

$$ef = \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^3}} \frac{1}{\Omega}$$

Dans l'expression de M , le temps t doit être remplacé par le temps maximal pendant lequel le signal peut être accumulé. En introduisant le facteur

de qualité Q_E de la cavité électromagnétique on trouve

$$\omega_n t \sim Q_E$$

il vient alors l'expression de M :

$$M = \sqrt{\frac{32 \pi G I}{c^3}} \frac{1}{\Omega} \frac{c_1}{c} \frac{Q_M Q_E}{\pi^2 N (1+2K)}$$

L'intérêt d'utiliser les premiers harmoniques (N et K petits) apparaît clairement.

Pour $2l \sim 1m$ et $N=1$ il vient

$$\Omega \approx 2 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$$

Avec $c_1/c \sim 10^{-5}$, on trouve

$$L \sim (1+2K) 10^{-5} \text{ m}$$

pour $K \sim 10^2$ on obtient une épaisseur raisonnable $L \sim 1mm$.

Avec ces ordres de grandeurs, pour $I \sim 10^3 \text{ w/m}^2$ et $Q_E \sim 10^{10}$ il vient :

$$M \sim 2 \cdot 10^{-24} Q_M$$

Cette situation peu favorable à une observation, tient au fait que les cavités électromagnétiques ont des fréquences propres élevées. Les milieux

matériels de mêmes fréquences propres ont des dimensions très petites ($c_1/c \sim 10^{-5}$)

Si on leur donne une dimension raisonnable, seuls les harmoniques de rang élevés ont les fréquences convenables. L'étude faite précédemment (IV-1-E) montre en outre que les déformations d'origine gravitationnelle ont une amplitude diminuant rapidement lorsque l'ordre d'harmonicité croît.

b) Le modèle BF_{||}

Dans ce cas, λ est égal à l'unité, la grandeur Q est déduite de (IV - 1 - 25), elle s'exprime en fonction du flux d'énergie gravitationnelle et de la pulsation de l'onde :

$$Q = \frac{2 C_e^2}{C_e^2} \frac{L}{2} \sqrt{\frac{32 \pi G I}{C^3}} \frac{1}{\Omega}$$

Les conditions de résonance s'écrivent

$$\ell \omega = n \pi c ; \quad \ell^2 \omega (\omega - 2 \Omega) = m^2 \pi^2 c^2$$

il vient alors

$$\Omega = \frac{\omega}{2} \left(1 - \frac{m^2}{n^2} \right)$$

$$M = \frac{2 C_e^2}{C_e^2} \frac{L}{2 C} \sqrt{\frac{32 \pi G I}{C^3}} \frac{Q \Omega}{2 m \pi} \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}$$

La condition (IV-1-24) de validité du modèle BF_{||} s'écrit ici

$$(IV-2-17) \quad \Omega L \ll c \ell$$

Pour une longueur de cavité, ℓ , donnée la valeur minimale de Ω est obtenue avec $n = 2$ et $m = 1$. Pour ℓ et n donnés la valeur minimale de Ω est

$$\Omega_{mi} = (2 - 1/n) \cdot \pi c / 2 \ell$$

Dans tous les cas, la condition (IV-2-17) implique

$$L \ll \ell \cdot \frac{4 c \ell}{3 \pi c} \sim 10^{-6} \ell$$

La condition de validité du modèle BF_{||}, pour des cavités qui ne sont pas exagérément grandes, implique que les parois soient très minces.

Quel que soient n et m on peut majorer M :

$$M < \frac{2C_0^2}{C_0^2} \frac{L}{2C} \sqrt{\frac{32\pi G E}{C^3}} \cdot \frac{3 Q_0}{2\pi}$$

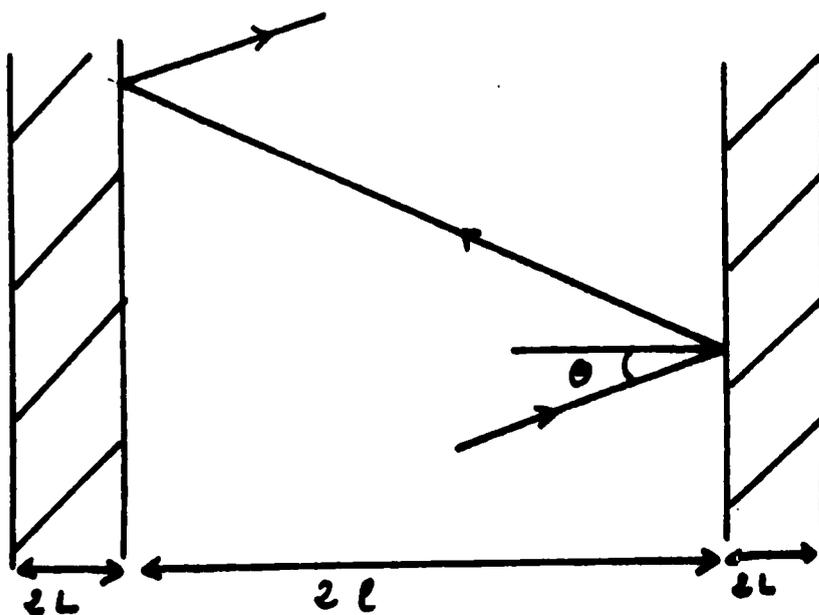
Pour $L = 10 \mu\text{m}$, $Q_0 = 10^{10}$ et $I \sim 10^3 \text{ W/m}^2$ on prouve

$$l \gg 10 \text{ m}$$

$$M \lesssim 10^{-19}$$

Dans tous les cas il apparait clairement que le modèle $B_{F_{||}}$ conduit à des effets négligeables.

La perturbation apparue dans l'étude du modèle $B_{F_{||}}$ s'interprète physiquement comme une onde électromagnétique dont l'amplitude croît linéairement avec le temps et dont le vecteur d'onde est incliné sur l'axe de la cavité d'un angle Θ :



$$\sin \Theta = \frac{\Omega}{|\omega - \Omega|}$$

Bien que ce modèle fournisse une séparation naturelle entre les directions de propagations du faisceau initial et du faisceau perturbé, la faiblesse de M semble néanmoins exclure son intérêt.

IV-2-D : Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une généralisation des conditions aux limites d'un conducteur électrique parfait. L'utilisation de ces conditions implique que l'on néglige les effets gravitationnels locaux susceptibles d'intervenir dans l'épaisseur de peau électromagnétique

En utilisant divers modèles introduits précédemment, nous avons étudié la possibilité de résonances dans des conditions particulières. Les perturbations électromagnétiques qui naissent du couplage aux limites on pu être interprétées physiquement d'une manière simple.

La petitesse du rapport C_e / C implique que les effets présentés sont généralement faibles même dans le cas de double résonance étudié (Modèle $BF\perp$).

De façon générale, nous négligerons les phénomènes de couplage aux limites dans l'étude du couplage intrinsèque.

CHAPITRE III

COUPLAGE INTRINSEQUE

IV-3-1 : Introduction

L'interaction d'une perturbation gravitationnelle et d'un rayonnement électromagnétique confiné dans une cavité a été étudié sous diverses approximations [2] . Nous proposons ici une approche semi quantique de la question : le rayonnement électromagnétique est quantifié et le champ de gravitation classique est considéré comme un champ sous jacent donné (cf 2e partie).

Nous supposerons ici que les effets de couplages aux limites sont négligeables et que les cavités ont pour parois des conducteurs électriques parfaits.

Nous utiliserons les développements habituels de la théorie des champs pour étudier l'action d'une perturbation gravitationnelle sur des états photoniques particuliers en nous intéressant essentiellement aux variations du nombre de photons dans les divers modes.

Avec l'intention d'étudier plus particulièrement le rayonnement gravitationnel sous la forme (IV-0-1), nous poserons plusieurs hypothèses.

- Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est de la forme

$$(IV-3-1) \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon \phi_{\mu\nu}$$

- Dans le passé et le futur lointain, $\phi_{\mu\nu}$ est nul dans le laboratoire.

- La trace de la perturbation est nulle . En utilisant les conventions définies ci-dessus (1ère partie), il vient :

$$(IV-3-2) \quad \phi_{\mu}^{\mu} = 0$$
$$g^{\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon^2 \dots$$

Dans le travail qui suit nous nous limitons le plus souvent au premier ordre d'une théorie de perturbation en ϵ mais une extension aux termes d'ordre supérieurs semble possible.

IV-3-B : Le formalisme

Les équations d'Einstein-Maxwell qui décrivent l'électromagnétisme dans le cadre des hypothèses posées, dérivent d'une densité lagrangienne $\mathcal{L}(x)$ [11] :

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} g^{\frac{1}{2}} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$

Développons $\mathcal{L}(x)$ suivant les puissances de ϵ .

$$\mathcal{L}(x) = \tilde{\mathcal{L}}(x) + \epsilon \bar{\mathcal{L}}(x) + \epsilon^2 \dots$$

Compte tenu de (IV-3-1) et (IV-3-2) il vient

$$\tilde{\mathcal{L}}(x) = -\frac{1}{4} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$

$$\bar{\mathcal{L}}(x) = \frac{1}{2} \phi^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$$

La densité lagrangienne $\tilde{\mathcal{L}} + \epsilon \bar{\mathcal{L}}$ conduit, aux termes du second ordre près, aux équations (IV-0-2).

Quand nous quantifions le champ électromagnétique, les quadri-potentiels deviennent les opérateurs du champ en représentation de Heisenberg.

L'utilisation des principes de causalité locale et d'unitarité [9] permet de déterminer la matrice diffusion (matrice S) en représentation interaction

$$(IV-3-3) \quad S = 1 + i \epsilon \int : \bar{\mathcal{L}}(x) : d^4x + \epsilon^2 \dots$$

Dans l'expression de $\bar{\mathcal{L}}$, le champ A_μ doit être remplacé par le champ non perturbé \tilde{A}_μ . Le symbole $::$ signifie que le produit ordonné doit être pris en considération.

Pour obtenir l'expression de \tilde{A}_μ nous utilisons une méthode habituelle en optique quantique [12] en choisissant une jauge particulière :

$$(IV-3-4) \quad \tilde{A}_0 = 0 \quad \partial_\mu \tilde{A}^\mu = 0$$

Comme précédemment, les indices $\mu \nu$ sont élevés et abaissés au moyen du tenseur de Minkowski.

Il est alors possible de développer \tilde{A}^μ sous la forme

$$\tilde{A}_\mu = \sum_k \frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} \cdot u_\mu^k(\vec{x}) e^{-i\omega_k t} + \frac{a_k^\dagger}{\sqrt{2\omega_k}} u_\mu^k(\vec{x}) e^{i\omega_k t},$$

les fonctions $u_\mu^k(\vec{x})$ satisfaisant les relations suivantes

$$\int_V u_\mu^k(\vec{x}) u_\alpha^p(\vec{x}) \eta^{\mu\alpha} d\vec{x} = -\delta^{kp} \quad (\delta^{kp} \text{ symbole de Kronecker})$$

$$(IV-3-5) \quad u_\mu^k(\vec{x}) = u_\mu^{k*}(\vec{x})$$

$$u_0^k(\vec{x}) = 0 \quad \partial_\mu \eta^{\mu\alpha} u_\alpha^k(\vec{x}) = 0.$$

on a en outre la relation $u_\mu^k \eta_\rho = u_\rho^k \eta_\mu$

sur les surfaces limites ; η_ρ est le vecteur orthogonal à ces surfaces.

Nous avons utilisé le symbole $\int_V d\vec{x}$ pour représenter l'intégration dans le volume de la cavité considérée et u^* pour représenter le conjugué complexe de u .

Les fonctions $u_\mu^k(\vec{x})$ satisfont en outre à l'équation

$$\Delta u_\mu^k(\vec{x}) = -\omega_k^2 u_\mu^k(\vec{x})$$

Dans le processus de quantification, les quantités a_k et a_k^\dagger deviennent respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de photon dans le mode k . Ils satisfont les relations de commutation

$$[a_k, a_p] = [a_k^\dagger, a_p^\dagger] = 0$$

$$[a_k, a_p^\dagger] = \delta_{kp}$$

Il est possible de déterminer explicitement la matrice S , en fonction des opérateurs de création et d'annihilation :

$$S = 1 + i \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \varepsilon^3 \dots$$

$$(IV-3-6) \quad S_1 = \sum_{k,p} A_{kp} a_k a_p + B_{kp} a_k^\dagger a_p + C_{kp} a_k^\dagger a_p^\dagger$$

Pour calculer A_{kp} , B_{kp} et C_{kp} nous posons

$$(IV-3-7) \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \tilde{A}_{\mu,\nu} - \tilde{A}_{\nu,\mu} \equiv \sum_k a_k F_{\mu\nu}^k + a_k^\dagger F_{\mu\nu}^{k*}$$

Il vient alors

$$A_{kp} = A_{pk} = \frac{1}{2} \iint_V \phi^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu}^k F_{\alpha\beta}^p d\vec{x} dt$$

$$B_{kp} = B_{pk}^* = \iint_V \phi^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} F_{\mu\nu}^{k*} F_{\alpha\beta}^p d\vec{x} dt$$

$$C_{kp} = A_{kp}^*$$

Les quantités $F_{\mu\nu}^k$ définies par (IV-3-7), s'explicitent sous la forme

$$F_{00}^k = 0 \quad F_{\bar{\mu}0}^k = -F_{0\bar{\mu}}^k = -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} e^{-i\omega_k t} u_{\bar{\mu}}^k(\vec{x})$$

$$F_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i\omega_k t} (u_{\bar{\mu},\bar{\nu}}^k - u_{\bar{\nu},\bar{\mu}}^k)$$

L'expression (IV-3-6) de la matrice S , implique que le vide des états photoniques ne reste pas nécessairement le vide au cours du temps : le champ gravitationnel sous jacent est susceptible de créer des paires de photons^(*). La situation doit être comparée par exemple à celle qui conduit à la création de paires électron-positon par un champ électromagnétique sous jacent [10]. Les divers processus possibles peuvent être représentés par des diagrammes de Feynmann.

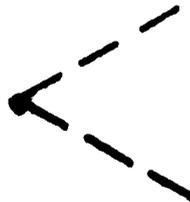


○ : champ de gravitation sous jacent

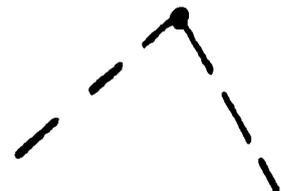
--- : photons



création d'une paire de photons



diffusion de photons



annihilation d'une paire de photons.

(*) Ce phénomène est susceptible de se produire également en présence d'un champ électromagnétique statique initial cf [13] par exemple.

IV-3-C : Evolution des valeurs moyennes

Soit $|i\rangle$, l'état quantique normalisé de la cavité électromagnétique dans le passé lointain. Soit \hat{R} une observable commutant avec l'hamiltonien non perturbé \hat{H} :

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k$$

$$0 = [\hat{H}, \hat{R}]$$

En utilisant le développement (IV-3-6) de la matrice S , on trouve aisément l'évolution de la valeur moyenne(*) de \hat{R} [14].

posons

$$|f\rangle = S |i\rangle$$

$$\delta \langle \hat{R} \rangle = \langle f | \hat{R} | f \rangle - \langle i | \hat{R} | i \rangle$$

il vient

$$\delta \langle \hat{R} \rangle = i \epsilon \langle i | [\hat{R}, S_1] | i \rangle + \epsilon^2 \langle i | S_1 \hat{R} S_1 | i \rangle$$

(IV-3-8)

$$+ \epsilon^2 \langle i | \hat{R} S_2 + S_2^\dagger \hat{R} | i \rangle + \epsilon^3 \dots$$

Supposons que $|i\rangle$ soit un état propre de \hat{R} pour la valeur propre λ :

$$\hat{R} |i\rangle = \lambda |i\rangle$$

La variation $\delta \langle \hat{R} \rangle$ est alors du second ordre en ϵ .

La condition d'unitarité de la matrice S permet de déterminer $\delta \langle \hat{R} \rangle$ sans calculer explicitement S_2 .

(*) La valeur moyenne de l'opérateur \hat{R} sera notée $\langle \hat{R} \rangle$.

Remplaçons S et S^\dagger par leur développement, dans la condition d'unitarité

$$S S^\dagger = 1$$

il vient

$$S_2 + S_2^\dagger = -S_1^2$$

Dans ces conditions on obtient

$$(IV-3-9) \quad \delta \langle \tilde{R} \rangle = \varepsilon^2 \langle i | S_1 (\tilde{R} - \langle \tilde{R} \rangle) S_1 | i \rangle$$

Si l'état initial n'est pas un état propre de l'observable \tilde{R} le spectre de celle-ci présente un écart quadratique moyen $\Delta \tilde{R}$:

$$(\Delta \tilde{R})^2 = \langle i | \tilde{R}^2 | i \rangle - (\langle i | \tilde{R} | i \rangle)^2$$

Dans ces conditions la valeur moyenne de \tilde{R} pourra subir des variations du premier ordre en ε :

$$(IV-3-10) \quad \delta \langle \tilde{R} \rangle = i \varepsilon \langle i | [\tilde{R}, S_1] | i \rangle$$

Il apparaît alors la condition nécessaire (*) pour qu'une mesure de soit possible :

$$(IV-3-11) \quad |\delta \langle \tilde{R} \rangle| \gtrsim \Delta \tilde{R}$$

(*) Compte tenu de la difficulté expérimentale du problème posé, l'étude des conditions nécessaires d'observation est une méthode commode pour distinguer, dans un premier temps, les diverses classes d'expériences envisageables.

Afin d'illustrer les résultats qui précèdent nous étudierons plus particulièrement l'opérateur N_q , nombre de photons dans le mode q :

$$\hat{R}_L = N_q = a_q^\dagger a_q$$

Nous considèrerons deux cas particuliers :

a) La cavité est dans un état initial monomode K ; la perturbation gravitationnelle stimule des transitions vers le mode q initialement vide ; le nombre moyen de photons créés dans le mode q est alors du second ordre en ξ .

b) L'état initial de la cavité est décrit par le produit tensoriel de deux états des modes K et q , la perturbation gravitationnelle induit des transitions vers le mode q ; la variation du nombre de photons dans le mode q est du premier ordre en ξ .

Pour mener le calcul à terme, nous considérons deux types d'états initiaux :

1) Les états cohérents

Ce sont des états propres pour l'opérateur a_p (p arbitraire)

$$(IV-3-12) \quad a_p |\alpha\rangle = f_{p\alpha} |\alpha\rangle$$

Pour de tels états les relations suivantes sont satisfaites :

$$(IV-3-13) \quad \langle N_p \rangle = |f_{p\alpha}|^2 = (\Delta N_p)^2$$

2) Un modèle particulier

Nous considérons un état $|i\rangle$ produit tensoriel de deux états des modes K et q .

$$|i\rangle = |K\rangle |q\rangle$$

Chacun de ces états est développé sur la base orthonormale $|k, m\rangle ; |q, n\rangle$

$$N_k |k, m\rangle = m |k, m\rangle ; a_k |k, m\rangle = \sqrt{m} |k, m-1\rangle$$

$$N_q |q, n\rangle = n |q, n\rangle ; a_q |q, n\rangle = \sqrt{n} |q, n-1\rangle$$

il vient les expressions

$$|k\rangle = \sum_m C_m |k, m\rangle$$

$$|q\rangle = \sum_n D_n |q, n\rangle$$

Pour développer les calculs, nous supposons que le nombre de photons dans les modes k et q est élevé. Les coefficients C_m et D_n seront considérés comme pratiquement constants et non négligeables pour m voisin de n_k et n voisin de n_q .

Avec ces approximations, il vient les relations suivantes :

$$\langle k | a_k^\dagger a_k^\dagger | k \rangle = \sum_m C_{m+2}^* C_m \sqrt{(m+1)(m+2)} \approx n_k$$

$$\langle k | N_k | k \rangle = \sum_m m |C_m|^2 \approx n_k$$

(IV-3-14)

$$\langle k | a_k a_k | k \rangle = \sum_m C_{m-2}^* C_m \sqrt{m(m-1)} \approx n_k$$

$$\langle k | a_k | k \rangle = \sum_m C_{m-1}^* C_m \sqrt{m} \approx \sqrt{n_k}$$

$$\langle k | a_k^\dagger | k \rangle = \sum_m C_{m+1}^* C_m \sqrt{m+1} \approx \sqrt{n_k}$$

a) Cavité monomode

Considérons un état initial $|i\rangle$, monomode :

$$|i\rangle = \sum_m C_m |k, m\rangle$$

La relation suivante est satisfaite :

$$(IV-2-15) \quad a_p |i\rangle = \delta_{kp} a_k |i\rangle$$

Considérons le mode q initialement vide :

$$N_q |i\rangle = 0$$

La relation (IV-3-9) donne

$$\delta \langle N_q \rangle = \varepsilon^2 \langle i | S_1 a_q^\dagger a_q S_1 | i \rangle = \langle V | V \rangle$$

avec

$$|V\rangle = \varepsilon a_q S_1 |i\rangle$$

Les relations (IV-3-15) et (IV-3-16), ainsi que les relations de commutation des opérateurs a et a^\dagger permettent de calculer $|V\rangle$:

$$|V\rangle = \varepsilon B_{qk} a_k |i\rangle + 2\varepsilon \sum_p C_{qp} a_p^\dagger |i\rangle$$

il vient alors

$$(IV-3-16) \quad \delta \langle N_q \rangle = \varepsilon^2 \left[4 \sum_p |C_{qp}|^2 + |B_{qk}|^2 \langle N_k \rangle + 4 |C_{qk}|^2 \langle N_k \rangle + 4 \mathcal{R}_e \{ C_{qk} B_{qk}^* \langle a_k^\dagger a_k \rangle \} \right]^{(*)}$$

(*) $\mathcal{R}_e \{a\}$ est la partie réelle de a : $\mathcal{R}_e \{a\} = \frac{1}{2} (a + a^*)$

Les valeurs moyennes dans l'expression (IV-3-16), sont prises sur l'état initial. Quand on annule ces quantités, on obtient le nombre moyen de photons créés par le champ gravitationnel sous jacent :

$$(IV-3-17) \quad \delta \langle N_q \rangle_s = 4 \varepsilon^2 \sum_p |c_{qp}|^2$$

Il est aisé d'expliciter la formule (IV-3-16) pour chacun des modèles introduits :

a₁) Etat cohérent

Compte tenu de (IV-3-12), (IC-3-13) et (IV-3-15), il vient

$$(IV-3-18) \quad \delta \langle N_q \rangle = \delta \langle N_q \rangle_s + \varepsilon^2 |f_k|^2 \{ 4 |c_{qk}|^2 + |B_{qk}|^2 \} \\ + 4 \varepsilon^2 \text{Re} \{ c_{qk} B_{qk}^* (f_k^*)^2 \}$$

a₂) Modèle particulier

Les relations (IV-3-14) donnent dans ce cas

$$(IV-3-19) \quad \delta \langle N_q \rangle = \delta \langle N_q \rangle_s + \varepsilon^2 |B_{qk} + 2c_{qk}|^2 \langle N_k \rangle$$

Dans ces deux cas, si G_{qk} est un majorant pour les coefficients $|c_{qk}|$ et $|B_{qk}|$, il vient la relation

$$(IV-3-20) \quad \delta \langle N_q \rangle < \delta \langle N_q \rangle_s + g \varepsilon^2 (G_{qk})^2 \langle N_k \rangle$$

b) Cavité bimode

En utilisant les règles de commutation des opérateurs a et a^\dagger on trouve la relation :

$$(IV-3-21) \quad [N_q, S_1] = \sum_p - 2 A_{pq} a_p a_q + 2 C_{pq} a_p^\dagger a_q^\dagger \\ + B_{qp} a_q^\dagger a_p - B_{pq} a_p^\dagger a_q$$

Décomposons l'état initial en combinaison linéaire d'états cohérents :

$$|i\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle$$

avec

$$a_{\kappa} |\alpha\rangle = f_{\kappa\alpha} |\alpha\rangle$$

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp \left\{ \sum_{\rho} f_{\rho\beta}^* f_{\rho\alpha} - \frac{1}{2} |f_{\rho\beta}|^2 - \frac{1}{2} |f_{\rho\alpha}|^2 \right\}$$

$$\langle i | i \rangle = \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha}^* c_{\beta} \langle \alpha | \beta \rangle = 1$$

En utilisant les relations (IV-3-8), (IV-3-21), compte tenu de (IV-3-12), on obtient

$$\begin{aligned} \delta \langle N_q \rangle = i \varepsilon \sum_{\alpha\beta\rho} \{ & -2 A_{\rho q} f_{\rho\alpha} f_{\rho\beta} + 2 C_{\rho q} f_{\rho\alpha}^* f_{\rho\beta}^* \\ & + B_{\rho q} f_{\rho\alpha}^* f_{\rho\beta} - B_{\rho q} f_{\rho\alpha} f_{\rho\beta} \} c_{\beta}^* c_{\alpha} \langle \beta | \alpha \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV-3-22})$$

A partir des relations (IV-3-21) et (IV-3-22) il est possible de particulariser la calcul aux divers modèles introduits

b₁) Etat cohérent

Supposons que l'état initial soit le produit tensoriel de deux états cohérents des seuls modes κ et q :

$$a_{\rho} |i\rangle = (f_{\kappa} \delta_{\kappa\rho} + f_q \delta_{q\rho}) |i\rangle$$

La relation (IV-3-22) s'écrit alors

$$(\text{IV-3-23}) \quad \delta \langle N_q \rangle = 2 \varepsilon \partial_m \{ 2 A_{qq} f_q^2 + 2 A_{\kappa q} f_{\kappa} f_q + B_{\kappa q} f_{\kappa}^* f_q \} \quad (*)$$

(*) $\partial_m \{ \alpha \}$ est la partie imaginaire de α : $\partial_m \{ \alpha \} = \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^*)$

b₂) Modèle particulier

En utilisant le modèle introduit ci-dessus, compte tenu des relations (IV-3-14), (IV-3-8) et de l'expression (IV-3-21), il vient

$$(IV-3-24) \quad \delta \langle N_q \rangle = 2 \varepsilon \partial_m \left\{ 2 A_{qq} n_q + (2 A_{kq} + B_{kq}) \sqrt{n_k n_q} \right\}$$

Introduisons, comme précédemment la grandeur G_{kq} majorant les quantités $|A_{qq}|$, $|A_{kq}|$ et $|B_{kq}|$.

Les expressions (IV-3-23) et (IV-3-24) conduisent à la relation

$$(IV-3-25) \quad |\delta \langle N_q \rangle| < 2 \varepsilon G_{kq} \left(2 \langle N_q \rangle + 3 \sqrt{\langle N_q \rangle \langle N_k \rangle} \right)$$

La condition d'observation (IV-3-11), conduit à la relation nécessaire

$$(IV-3-26) \quad \Delta N_q \lesssim 2 \varepsilon G_{kq} \left(2 \langle N_q \rangle + 3 \sqrt{\langle N_q \rangle \langle N_k \rangle} \right)$$

Dans le cas du modèle b₁ (état initial cohérent), cette relation s'explique, compte tenu de (IV-3-13), sous la forme

$$(IV-3-27) \quad 1 \lesssim 2 \varepsilon G_{kq} \left(3 \sqrt{\langle N_k \rangle} + 2 \sqrt{\langle N_q \rangle} \right)$$

Il apparaît clairement la nécessité de valeurs élevées pour $\langle N_k \rangle$ et $\langle N_q \rangle$. En supposant un ordre de grandeur identique pour ces quantités, la relation (IV-3-27) se met sous la forme

$$(IV-3-28) \quad 1 \lesssim 10 \varepsilon G_{kq} \sqrt{\langle N_k \rangle}$$

En négligeant dans (IV-3-20) la quantité $\delta \langle N_q \rangle_s$, on estime l'ordre de grandeur optimal sous la forme

$$(IV-3-29) \quad \delta \langle N_q \rangle \sim g \varepsilon^2 (\alpha_{kq})^2 \langle N_k \rangle$$

Supposons la relation (IV-3-28) satisfaite ; la relation (IV-3-29) implique alors

$$\delta \langle N_q \rangle \gtrsim 1$$

Compte tenu des faibles intensités détectables (1 photon/min dans le domaine optique [15]) il ne semble pas que les effets du premier ordre présentent a priori un intérêt plus grand que les effets du second ordre.

IV-3-D Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le formalisme général permettant l'étude du couplage intrinsèque dans le cadre d'une théorie semi-quantique.

Nous nous sommes particulièrement attaché à l'évolution du nombre moyen de photons dans les divers modes.

Nous avons mis en évidence des effets du second ordre lorsque le mode considéré est initialement vide et des effets du premier ordre lorsque le nombre de photons initial, N , présente une indétermination ΔN .

L'étude des modèles envisagés permet de penser que les effets du premier ordre sont plus intéressants que les effets du second ordre si est satisfaite la relation

$$\Delta N \ll \sqrt{N} \quad (\text{cf IV-3-26})$$

Il semble donc que les possibilités de détection, des perturbations gravitationnelles sont étroitement liées à la mesure précise des nombres de photons ou de leur variation, et à la possibilité de réaliser des états quantiques dont le nombre de photons est tout à la fois élevé et bien défini.

CHAPITRE IV

ETUDE PARTICULIERE D'UN COUPLAGE INTRINSEQUE

IV-4-A : Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre d'utiliser le cadre théorique introduit précédemment pour étudier les effets d'une onde de gravitation de type (IV-0-1) sur le rayonnement d'une cavité parallélépipédique. Dans un repère orthonormé quasi-galiléen $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, cette cavité est caractérisée par les relations

$$0 < x < L_1 \quad 0 < y < L_2 \quad 0 < z < L_3$$

Nous supposerons les hypothèses admises ci-dessus (IV-3-A) et nous considérerons un modèle particulier qui permet d'introduire deux paramètres physiques importants :

- la fréquence de l'onde de gravitation
- la durée de l'interaction gravitationnelle avec un système physique localisé.

Nous déterminerons tout d'abord une base de vecteurs $u^k_\mu(\vec{x})$ permettant de décomposer le rayonnement électromagnétique en ses modes propres pour la cavité considérée.

Nous obtiendrons ensuite l'expression correspondante pour les coefficients A_{kp} et B_{kp} de la matrice S (cf IV-3-6).

Il nous sera alors possible de choisir les transitions qui conduisent aux ordres de grandeurs optimaux pour l'effet considéré. Nous obtiendrons effectivement ces ordres de grandeur dans un cas particulier.

IV-4-B : Choix d'une base

Le rayonnement électromagnétique, satisfaisant aux conditions (IV-3-4) est caractérisé par son potentiel vecteur \vec{A} :

$$(\vec{A})_{(P)} \equiv A \vec{P}$$

Introduisons les fonctions $f_i(\vec{x})$

$$f_{1n}(\vec{x}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{L_1 L_2 L_3}} \cdot \cos n_1 \frac{\pi x}{L_1} \sin n_2 \frac{\pi y}{L_2} \sin n_3 \frac{\pi z}{L_3} & ; n_1 \neq 0 \\ \sqrt{\frac{4}{L_1 L_2 L_3}} \sin n_2 \frac{\pi y}{L_2} \sin n_3 \frac{\pi z}{L_3} & ; n_1 = 0 \end{cases}$$

$$(IV-4-1) \quad f_{2n}(\vec{x}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{L_1 L_2 L_3}} \sin n_1 \frac{\pi x}{L_1} \cos n_2 \frac{\pi y}{L_2} \sin n_3 \frac{\pi z}{L_3} & ; n_2 \neq 0 \\ \sqrt{\frac{4}{L_1 L_2 L_3}} \sin n_1 \frac{\pi x}{L_1} \sin n_3 \frac{\pi z}{L_3} & ; n_2 = 0 \end{cases}$$

$$f_{3n}(\vec{x}) = \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{L_1 L_2 L_3}} \sin n_1 \frac{\pi x}{L_1} \sin n_2 \frac{\pi y}{L_2} \cos n_3 \frac{\pi z}{L_3} & ; n_3 \neq 0 \\ \sqrt{\frac{4}{L_1 L_2 L_3}} \sin n_1 \frac{\pi x}{L_1} \sin n_2 \frac{\pi y}{L_2} & ; n_3 = 0 \end{cases}$$

Compte tenu des conditions aux limites, la partie non statique du potentiel \vec{A} se décompose sous la forme^(*)

$$(IV-4-2) \quad \vec{A} = \sum_n a_{1n}(t) f_{1n}(\vec{x}) \vec{i} + a_{2n}(t) f_{2n}(\vec{x}) \vec{j} + a_{3n}(t) f_{3n}(\vec{x}) \vec{k}$$

(*) Cf référence [16] par exemple

A tout vecteur $\vec{W}_h = A_n \vec{i} + B_n \vec{j} + C_n \vec{k}$, nous associons un

$$\text{vecteur } \vec{W}_h(\vec{x}) = A_n f_{1n}(\vec{x}) \vec{i} + B_n f_{2n}(\vec{x}) \vec{j} + C_n f_{3n}(\vec{x}) \vec{k}.$$

En utilisant la règle qui vient d'être définie, on obtient le potentiel vecteur

$\vec{A}(\vec{x}, t)$ à partir des vecteurs $\vec{a}_n(t)$:

$$(IV-4-3) \quad \vec{a}_n(t) = a_{1n}(t) \vec{i} + a_{2n}(t) \vec{j} + a_{3n}(t) \vec{k}$$

$$(IV-4-4) \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_n \vec{a}_n(\vec{x}, t)$$

Considérons le vecteur \vec{h} défini par la relation

$$\vec{h} = \alpha_n \vec{i} + \beta_n \vec{j} + \gamma_n \vec{k}$$

avec

$$\alpha_n = \frac{n_1 \pi}{L_1 \omega_n} \quad ; \quad \beta_n = \frac{n_2 \pi}{L_2 \omega_n} \quad ; \quad \gamma_n = \frac{n_3 \pi}{L_3 \omega_n}$$

(IV-4-5)

$$\omega_n = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}}$$

Soit une base orthonormée arbitraire \vec{h} , \vec{e}_n , \vec{e}_n .

Compte tenu de la condition (IV-3-4), $\text{div } \vec{A} = 0$, on trouve

$$(IV-4-6) \quad \vec{a}_n(t) = q_{1n}(t) \vec{e}_n + q_{2n}(t) \vec{e}_n$$

Nous posons

$$\vec{u}^{1n}(\vec{x}) = \vec{e}_n(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \vec{u}^{2n}(\vec{x}) = \vec{e}_n(\vec{x})$$

Nous notons p l'ensemble (i, n_x, n_y, n_z) avec $i=1, 2, 3$.
 Les relations (IV-4-2) à (IV-4-6) conduisent à la décomposition

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_p q_p(t) \vec{u}^p(\vec{x})$$

avec

$$\Delta \vec{u}^p(\vec{x}) = -\omega_p^2 \vec{u}^p(\vec{x})$$

L'équation de d'Alembert satisfaite par $\vec{A}(\vec{x}, t)$ permet alors une décomposition de la forme

$$(IV-4-7) \quad A_p = \sum_p \frac{a_p}{\sqrt{2\omega_p}} u_p^p(\vec{x}) e^{-i\omega_p t} + \frac{a_p^\dagger}{\sqrt{2\omega_p}} u_p^p(\vec{x}) e^{i\omega_p t}$$

avec

$$\int_V \vec{u}^p(\vec{x}) \cdot \vec{u}^q(\vec{x}) d\vec{x} = \delta^{pq}$$

$$(IV-4-8) \quad \begin{cases} u_p^p(\vec{x}) = - \left(\vec{u}^p(\vec{x}) \right)_{(p)} \\ u_0^p(\vec{x}) = 0 \end{cases}$$

$$q_p(t) = \frac{a_p}{\sqrt{2\omega_p}} e^{-i\omega_p t} + \frac{a_p^\dagger}{\sqrt{2\omega_p}} e^{i\omega_p t}$$

La vérification des relations (IV-3-5) est alors immédiate.

Dans la suite de notre travail nous choisirons les vecteurs \vec{e}_n et \vec{e}_n^\perp sous la forme

$$\vec{e}_n = \frac{\beta_n \vec{i} - \alpha_n \vec{j}}{(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vec{e}_n^\perp = \frac{\gamma_n \alpha_n \vec{i} + \gamma_n \beta_n \vec{j} - (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \vec{k}}{(\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{\frac{1}{2}}}$$

On trouve alors l'expression des vecteur $\vec{u}^p(\vec{z})$

$$\vec{u}^{1n}(\vec{z}) = \frac{1}{(\alpha_n^2 + d_n^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \alpha_n f_{1n}(\vec{z}) \vec{i} - d_n f_{2n}(\vec{z}) \vec{j} \right\}$$

(IV-4-9)

$$\vec{u}^{2n}(\vec{z}) = \frac{1}{(\beta_n^2 + d_n^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \gamma_n d_n f_{1n}(\vec{z}) \vec{i} + \gamma_n \beta_n f_{2n}(\vec{z}) \vec{j} - (d_n^2 + \beta_n^2) f_{3n}(\vec{z}) \vec{k} \right\}$$

La décomposition effectuée ici est tout à fait habituelle ; nous l'avons développée afin de préciser les notations et les conventions qui seront utilisées par la suite. Remarquons que la quantification du rayonnement s'effectue soit à partir du développement (IV-4-6) en représentation q , soit dans l'espace des modes (*) à partir du développement (IV-4-7) comme nous l'avons introduit au chapitre précédent.

(*) Nous caractérisons un mode par son vecteur d'onde \vec{n} et par sa polarisation (1 ou 2).

IV-4-C : Calcul des coefficients de la matrice S

Dans l'étude des ondes de structure (IV-0-1)^(*), il est commode de décomposer $\phi^{a\beta}$ sous la forme

$$\phi^{a\beta} = \phi_f^{a\beta} + \phi_g^{a\beta}$$

avec

$$\phi_f'' = -\phi_f^{22} = -f(t-z) \quad \phi_f^{12} = \phi_f^{21} = 0$$

$$\phi_g'' = \phi_g^{22} = 0 \quad \phi_g^{12} = \phi_g^{21} = -g(t-z)$$

Les coefficients $A_{\kappa\rho}$ et $B_{\kappa\rho}$ définis par (IV-3-7) s'obtiennent sous la forme

$$A_{\kappa\rho} = A_{\kappa\rho}(f) + A_{\kappa\rho}(g)$$

Les quantités $A_{\kappa\rho}(f)$ sont obtenues en remplaçant $\phi^{a\beta}$ par $\phi_f^{a\beta}$ dans l'expression correspondante.

Nous supposons pour $f(t-z)$ une décomposition en intégrales de Fourier :

$$f(t-z) = \int f(\omega) e^{i\omega(t-z)} d\omega$$

$$f(\omega) = f^*(-\omega)$$

Il est alors possible de définir les quantités $A_{\kappa\rho}(f)^{(\omega)}$ et $B_{\kappa\rho}(f)^{(\omega)}$ par les relations

$$A_{\kappa\rho}(f) = - \int f(\omega) A_{\kappa\rho}(f)^{(\omega)} d\omega$$

$$B_{\kappa\rho}(f) = - \int f(\omega) B_{\kappa\rho}(f)^{(\omega)} d\omega$$

(*) Les expressions obtenues dans ce paragraphe ne supposent pas la nature parallélépipédique de la cavité.

De même nous supposons la décomposition

$$g(t-z) = \int g(\omega) e^{i\omega(t-z)} d\omega$$

Nous définissons $A_{KP}(\omega)$ et $B_{KP}(\omega)$ par les relations

$$A_{KP}(\omega) = - \int g(\omega) A_{KP}(\omega) d\omega$$

$$B_{KP}(\omega) = - \int g(\omega) B_{KP}(\omega) d\omega$$

Pour une cavité donnée les quantités de type $A_{KP}(\omega)$ sont déterminées indépendamment de la fonction f . Une fois calculées, elles permettent l'étude des ondes de type (IV-0-1) pour diverses expressions de f et g .

En utilisant les expressions (IV-3-7) et le développement (IV-4-7) on trouve les résultats ci-dessous dans lesquels on a posé

$$\omega(+)=\omega_k+\omega_p$$

$$\omega(-)=\omega_k-\omega_p$$

$$A_{KP}(f) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega-\omega(+)) \sqrt{\omega_k \omega_p} \int_V e^{-i\omega z} \{u_2^k u_2^p - u_1^k u_1^p\} dz$$

$$- \frac{\pi}{2} \delta(\omega-\omega(+)) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{-i\omega z} \{u_{1,3}^k - u_{3,1}^k\} \cdot \{u_{1,3}^p - u_{3,1}^p\} dz$$

$$+ \frac{\pi}{2} \delta(\omega-\omega(-)) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{-i\omega z} \{u_{2,3}^k - u_{3,2}^k\} \cdot \{u_{2,3}^p - u_{3,2}^p\} dz$$

(IV-4-10)

$$\begin{aligned}
A_{KPF}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) \sqrt{\omega_k \omega_p} \int_V e^{-i\omega_0 \vec{z}} \{u_1^K u_2^P + u_1^P u_2^K\} d\vec{z} \\
&\quad - \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{-i\omega_0 \vec{z}} \{u_{1,3}^P - u_{3,1}^P\} \\
&\quad \quad \quad \cdot \{u_{2,3}^K - u_{3,2}^K\} d\vec{z} \\
&\quad - \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{-i\omega_0 \vec{z}} \{u_{1,3}^K - u_{3,1}^K\} \\
&\quad \quad \quad \cdot \{u_{2,3}^P - u_{3,2}^P\} d\vec{z}
\end{aligned}$$

(IV-4-10)

$$\begin{aligned}
B_{KPF}(\omega) &= \pi \delta(\omega + \omega_0) \sqrt{\omega_k \omega_p} \int_V e^{i\omega_0 \vec{z}} \{u_1^K u_1^P - u_2^K u_2^P\} d\vec{z} \\
&\quad - \pi \delta(\omega + \omega_0) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{i\omega_0 \vec{z}} \{u_{1,3}^K - u_{3,1}^K\} \\
&\quad \quad \quad \cdot \{u_{1,3}^P - u_{3,1}^P\} d\vec{z} \\
&\quad + \pi \delta(\omega + \omega_0) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{i\omega_0 \vec{z}} \{u_{2,3}^K - u_{3,2}^K\} \\
&\quad \quad \quad \cdot \{u_{2,3}^P - u_{3,2}^P\} d\vec{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{KPG}(\omega) &= \pi \delta(\omega + \omega_0) \sqrt{\omega_k \omega_p} \int_V e^{i\omega_0 \vec{z}} \{u_1^K u_2^P + u_1^P u_2^K\} d\vec{z} \\
&\quad - \pi \delta(\omega + \omega_0) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{i\omega_0 \vec{z}} \{u_{1,3}^K - u_{3,1}^K\} \\
&\quad \quad \quad \cdot \{u_{2,3}^P - u_{3,2}^P\} d\vec{z} \\
&\quad - \pi \delta(\omega + \omega_0) \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_p}} \int_V e^{i\omega_0 \vec{z}} \{u_{1,3}^P - u_{3,1}^P\} \\
&\quad \quad \quad \cdot \{u_{2,3}^K - u_{3,2}^K\} d\vec{z}
\end{aligned}$$

La présence des distribution de Dirac conduisent aux règles de sélection

$$1) \quad \omega_k + \omega_p = \omega$$

$$2) \quad |\omega_k - \omega_p| = \omega$$

Ces règles permettent des transitions entre des états du domaine microondes et du domaine optique pour de hautes fréquences gravitationnelles ($\omega \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$) L'intérêt d'une telle situation est la large séparation en fréquence entre les divers états.

La seconde règle de sélection permet d'envisager des transitions entre modes voisins, induites par une onde de gravitation dont la pulsation ω , peut en principe être très inférieure aux plus basses pulsations propres ω_0 de la cavité ($\omega_0 \sim 10^9 \text{ s}^{-1}$, pour une cavité dont les dimensions sont de l'ordre du mètre).

IV-4-D : Choix d'une transition

Afin de mettre en évidence les ordres de grandeurs optimaux, nous ne prendrons en considération que les expressions théoriques obtenues, sans références aux possibilités expérimentales.

Considérons la cavité parallélépipédique introduite ci-dessus et les fonctions $u_p^r(\vec{x})$ définies en (IV-4-8) et (IV-4-9).

Pour que les coefficients $A_{kp}^{(\omega)}(\vec{f})$ et $B_{kp}^{(\omega)}(\vec{f})$ ne soient pas négligeables il est nécessaire que l'intégration sur \vec{z} dans les expressions (IV-4-10) ne conduisent pas à un terme petit devant l'unité.

Cette intégration se présente sous la forme

$$\mathcal{J} = \int_0^{L_3} e^{i\omega z} e^{i\Omega z} \frac{dz}{L_3} = \frac{e^{i(\omega+\Omega)L_3} - 1}{(\omega+\Omega)L_3}$$

avec les diverses combinaisons possibles

$$\omega = \begin{cases} -\omega_{(+)}, \\ +\omega_{(-)} \end{cases} \quad \Omega = \pm \begin{cases} \gamma_p \omega_p - \gamma_k \omega_k \\ \gamma_p \omega_p + \gamma_k \omega_k \end{cases}$$

La condition, $(\omega + \omega_0) L_3 \leq \pi$, nécessaire pour que γ soit non négligeable s'explique sous l'une des relations suivantes :

$$L_3 | \omega_k (1 - \gamma_k) \pm \omega_p (1 - \gamma_p) | \leq \pi$$

$$L_3 | \omega_k (1 \pm \gamma_k) - \omega_p (1 - \gamma_p) | \leq \pi$$

Un raisonnement analogue sur les variables α et β conduit aux deux relations nécessaires

$$L_1 | \omega_p \alpha_p - \omega_k \alpha_k | \leq \pi$$

$$L_2 | \omega_p \beta_p - \omega_k \beta_k | \leq \pi$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites il est alors possible de choisir des transitions telles que les intégrales dans l'expression (IV-4-10) sont de l'ordre de l'unité, ceci constitue une situation optimal compte tenu du fait que ces intégrales sont majorées par 4.

A titre d'exemple considérons une cavité cubique ($L_1 = L_2 = L_3 = L$) et les modes k et p définis par leurs nombres d'ondes

$$K : \quad n_1 = 4N \quad n_2 = 0 \quad n_3 = 3N$$

$$P : \quad m_1 = 4N \quad m_2 = 0 \quad m_3 = 3N + 1$$

Supposons en outre la relation $N \gg 1$.

Un calcul long mais sans difficultés particulières conduit aux résultats

$$A_{kp}(f) \approx \frac{\pi}{2} \delta(\omega - \omega_0) \sqrt{\omega_k \omega_p} \cdot o\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$A_{kp}(g) = 0$$

$$B_{kp}(f) \approx \pi \delta(\omega + \omega_0) \sqrt{\omega_k \omega_p} \left\{ \frac{2}{5\pi^2} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right\} \left\{ e^{i\omega_k L} + e^{i\omega_p L} \right\}^{(2)}$$

$$B_{kp}(g) = 0$$

L'intérêt d'utiliser des hautes fréquences apparaît clairement sur ces expressions. La deuxième règle de sélection permet, théoriquement, d'étudier des ondes de gravitation de fréquences très inférieures à celles des modes électromagnétiques considérés. Dans l'exemple précédent, pour $L = 1 \text{ m}$ et $N = 4 \cdot 10^5$ on trouve

$$\omega_k \approx \omega_p \approx 2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \omega_{k=1} \approx 6 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$$

Nous poursuivons l'étude des ordres de grandeurs en supposant les conditions optimales satisfaites. Nous étudierons les transitions permises par la seconde règle de sélection en supposant que seul $B_{kp}(f)$ est non nul.

IV-4-E : Modèle de rayonnement gravitationnel

Nous poursuivons l'étude en particulier en prenant $f(t-z)$ sous la forme

$$(IV-4-11) \quad \varepsilon f(t-z) = \varepsilon f e^{-\frac{(t-z)^2}{\sigma^2}} \sin\{\Omega(t-z) + \varphi\}$$

Pour un tel paquet d'ondes, la grandeur σ caractérise le temps de passage du paquet en un point, c'est l'ordre de grandeur de la durée de l'interaction sur un système localisé, d'extension inférieure à $c\sigma$.

Si la relation $\sigma\Omega \gg 1$, est satisfaite, la grandeur Ω s'interprète comme la pulsation de l'onde de gravitation.

Il est possible d'exprimer f en fonction de l'énergie E contenue dans un cylindre de section unité.

(*) Compte tenu des simplifications effectuées, la condition $B_{kp}^*(\omega) = B_{kp}(\omega)$ n'apparaît pas à l'évidence. Elle est néanmoins satisfaite car le terme $3/(5\pi^2)$ est l'expression particulière de la quantité $\frac{\omega_p (\gamma_k \gamma_p - 1)}{iL(\omega_p^2 - \alpha^2)}$ avec $\alpha = \frac{\pi}{L} (m_3 - m_2)$

L'utilisation du pseudo tenseur impulsion énergie [17] donne :

$$E = \frac{\epsilon^2}{16 \pi G} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial f(t, z)}{\partial t} \right\}^2 dz$$

on obtient ici

$$(IV-4-12) \quad E = \frac{\epsilon^2 f^2}{32 G \sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + (\sigma R)^2 - e^{-\frac{(\sigma R)^2}{2}} \cos 2\varphi \right\}$$

Pour un paquet d'ondes bien défini en fréquence il vient

$$\sigma R \gg 1$$

$$(IV-4-13) \quad \epsilon f = \left(32 \sqrt{2\pi} \frac{G}{c^3} \frac{\epsilon}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{R} \quad (*)$$

Pour un paquet d'ondes très bref, on trouve

$$\sigma R \ll 1$$

$$(IV-4-14) \quad \epsilon f = \left(16 \sqrt{2\pi} \frac{G}{c^3} \epsilon \sigma \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \varphi + 3 \left(\frac{\sigma R}{2} \right)^2}}$$

La valeur maximale de ϵf est obtenue pour $\varphi = 0$ ou π , il vient alors

$$\epsilon f = \left(\frac{64}{3} \sqrt{2\pi} \frac{G}{c^3} \frac{\epsilon}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{R}$$

Pendant des temps très brefs la quantité ϵf peut atteindre des valeurs élevées : il apparaît que le problème de la mise en évidence du rayonnement gravitationnel n'est pas indépendant de la structure du paquet d'ondes.

(*) Pour une onde sinusoïdale dont le flux d'énergie est I il vient

$$\epsilon f(t-z) = \epsilon f \sin \{ \Omega(t-z) + \varphi \}$$

$$\epsilon f = \left(32 \pi \frac{G}{c^3} I \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{R}$$

Ceci suggère que le temps de passage du paquet d'ondes soit identifié à $\sigma \sqrt{\frac{R}{2}}$ de préférence à σ .

Il est possible de décomposer la fonction $f(t-z)$ en intégrales de Fourier :

$$f(t-z) = \int f(\omega) e^{i\omega(t-z)} d\omega$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int f(t-z) e^{-i\omega(t-z)} d(t-z)$$

$$(IV-4-15) \quad f(\omega) = f \frac{i\sigma}{4\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-i\psi} e^{-\frac{\sigma^2(\Omega+\omega)^2}{4}} - e^{i\psi} e^{-\frac{\sigma^2(\Omega-\omega)^2}{4}} \right\}$$

En utilisant les résultats précédents, nous posons

$$B_{kp}(\omega) = \pi \delta(\omega + \omega_k) \sqrt{\omega_k \omega_p} b_{kp}(\omega) \quad (*)$$

La quantité b_{kp} sera notée b et nous supposons

$$|b| \sim 1$$

On obtient le coefficient $-B_{kp}$ en remplaçant dans (IV-4-15) la quantité ω par $-\omega_k$

$$B_{kp} = b \sqrt{\omega_k \omega_p} f \frac{i\sigma\sqrt{\pi}}{4} \left\{ e^{i\psi} e^{-\frac{\sigma^2(\Omega+\omega_k)^2}{4}} - e^{-i\psi} e^{-\frac{\sigma^2(\Omega-\omega_k)^2}{4}} \right\}$$

Nous poursuivons le calcul en supposant la relation

$$\Omega = \omega_k$$

L'expression de B_{kp} devient alors

$$B_{kp} = -b \sqrt{\omega_k \omega_p} f \frac{i\sigma\sqrt{\pi}}{4} e^{-i\psi} \quad \text{pour } \sigma\Omega \gg 1$$

$$B_{kp} = -b \sqrt{\omega_k \omega_p} f \frac{\sqrt{\pi}}{4} \{ 2 \sin \psi + i(\sigma\Omega)^2 \cos \psi \} \quad \text{pour } \sigma\Omega \ll 1$$

(*) $b_{kp}(-\omega) = b_{pk}(\omega)^*$

Il est maintenant possible d'estimer les ordres de grandeurs correspondants aux cas théoriques envisagés précédemment (IV-3-C)

a) Cavité monomode

La relation (IV-3-16) permet de calculer le nombre moyen de photons apparus dans le mode q . Soit $\langle N_p \rangle$ le nombre moyen de photons dans le seul mode initialement occupé; en négligeant le phénomène de création spontanée on trouve

$$(IV-4-16) \quad \delta \langle N_q \rangle = \frac{\epsilon^2 f^2 \sigma^2 \pi}{16} \omega_q \omega_p \langle N_p \rangle$$

pour $\sigma \Omega \gg 1$

$$(IV-4-17) \quad \delta \langle N_q \rangle = \frac{\epsilon^2 f^2 \sigma^2 \pi}{4} \omega_q \omega_p \langle N_p \rangle \left\{ \sin^2 \varphi + O((\sigma \Omega)^{-1}) \right\}$$

pour $\sigma \Omega \ll 1$

b) Cavité bimode

En supposant $\sigma \omega_{(p)} \gg 1$, compte tenu de la présence du terme $\delta(\omega - \omega_{(p)})$ dans les expressions (IV-4-10) et de la condition $\Omega = \omega_p$, nous négligeons les coefficients A_{qq} et A_{kp} dans les expressions (IV-3-23) et (IV-3-24). Pour les deux modèles étudiés nous obtenons les résultats suivants :

b₁ état cohérent

$$\delta \langle N_q \rangle = - \frac{\epsilon f \sigma \sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\omega_q \omega_p} \left\{ b e^{-i\varphi} f_p^* f_q + b^* e^{i\varphi} f_p f_q^* \right\}$$

pour $\sigma \Omega \gg 1$

$$\delta \langle N_q \rangle = \frac{\epsilon f \sigma \sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\omega_q \omega_p} \left\{ 2i \sin \varphi (b f_p^* f_q - b^* f_p f_q^*) - (\sigma \Omega)^2 \cos \varphi (b f_p^* f_q + b^* f_p f_q^*) \right\}$$

pour $\sigma\Omega \ll 1$

b₂ Modèle particulier

$$\delta \langle N_q \rangle = - \frac{\varepsilon f \sigma \sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\omega_p \omega_q} \sqrt{\langle N_p \rangle \langle N_q \rangle} \{ b e^{-i\psi} + b^* e^{i\psi} \}$$

pour $\sigma\Omega \gg 1$

$$\delta \langle N_q \rangle = \frac{\varepsilon f \sigma \sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\omega_p \omega_q} \sqrt{\langle N_p \rangle \langle N_q \rangle} \left\{ 2i \sin \psi (b - b^*) - (\sigma\Omega)^2 \cos \psi (b + b^*) \right\}$$

pour $\sigma\Omega \ll 1$

Ces diverses expressions peuvent être majorées :

$$(IV-4-18) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\Omega \gg 1 \\ |\delta \langle N_q \rangle| \ll \frac{\varepsilon f \sigma \sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\omega_p \omega_q} \sqrt{\langle N_p \rangle \langle N_q \rangle} \end{array} \right.$$

$$(IV-4-19) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\Omega \ll 1 \\ |\delta \langle N_q \rangle| \ll \frac{\varepsilon f \sigma \sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\omega_p \omega_q} \sqrt{\langle N_p \rangle \langle N_q \rangle} \{ 2|\sin \psi| + (\sigma\Omega)^2 |\cos \psi| \} \end{array} \right.$$

Les relations (IV-4-16) à (IV-4-19) serviront de base aux discussions physiques que nous allons développer.

IV-4-F : Discussion physique

Dans les expressions (IV-4-16) à (IV-4-19), nous remplaçons εf par sa valeur, obtenue à partir de (IV-4-13) ou (IV-4-14).

Les expressions de $\delta \langle N_q \rangle$ obtenues sont présentées dans le tableau ci-dessous

	$\sigma \Omega \gg 1$	$\sigma \Omega \ll 1; \sin \psi \approx 1$
1 ^{er} ordre $\langle N_q \rangle \neq 0$	$\left(\frac{8\pi \sqrt{2\pi} G E \sigma}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega_p \omega_q}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \langle N_p \rangle \langle N_q \rangle^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{16\pi \sqrt{2\pi} G E \sigma}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega_p \omega_q}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \langle N_p \rangle \langle N_q \rangle^{\frac{1}{2}} \sigma \Omega$
2 ^{es} ordre $\langle N_q \rangle = 0$	$\frac{2\pi \sqrt{2\pi} G E \sigma}{c^3} \cdot \frac{\omega_p \omega_q}{\Omega^2} \langle N_p \rangle$	$\frac{4\pi \sqrt{2\pi} G E \sigma}{c^3} \cdot \frac{\omega_p \omega_q}{\Omega^2} \langle N_p \rangle \cdot (\sigma \Omega)^2$

L'intérêt d'utiliser des ondes électromagnétiques de fréquence élevée pour détecter des ondes de gravitation de fréquence très inférieure apparaît clairement dans la présence du terme $\frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2}$ (*). Avec les ordres de grandeurs ci-dessus on a

$$\frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2} \approx 10^{13}$$

La cavité électromagnétique est caractérisée par le temps maximal possible d'accumulation du signal pour le mode q étudié. Ce temps τ , est relié au facteur de qualité électromagnétique Q , par la relation

$$\tau \sim \frac{Q}{\omega_q}$$

(*) Cf ci-dessus (III-2-D) paragraphe D-3

Considérons une impulsion gravitationnelle isolée de type (IV-4-11). Si le temps de passage σ , de l'impulsion gravitationnelle est inférieur à $\bar{\sigma}$, nous considérerons la condition nécessaire d'observation (IV-3-11): $|\delta \langle N_q \rangle| \gg \Delta N_q$.

Si le temps de passage σ est supérieur à $\bar{\sigma}$ nous introduirons le flux moyen ϕ_q de photons créés dans le mode q et le flux minimal observable ϕ_m . La condition d'observation s'écrit alors

$$\frac{\delta \langle N_q \rangle}{\sigma} \sim \phi_q > \phi_m$$

Nous noterons l'ordre de grandeur du flux moyen d'énergie associé au paquet d'ondes gravitationnelles ($I \sim \frac{E}{\sigma}$). Pour effectuer les calculs numériques nous utiliserons les ordres de grandeurs suivants :

$$\begin{aligned} \sigma &\sim 1 \text{ s} \\ \omega_q \sim \omega_p &\sim 2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1} \\ \Omega = \omega_{T1} &\sim 6 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} \\ \langle N_p \rangle \sim \langle N_q \rangle &\sim 10^{16} \\ (*) \Delta N_q &\sim \sqrt{\langle N_q \rangle} \\ \phi_m &\sim 10^{-2} \text{ photons/secondes [15]} \end{aligned}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessous, concernant uniquement les paquets d'ondes gravitationnelles bien définies en fréquence : $\Omega \sigma \gg 1$

	$\sigma < \bar{\sigma}$	$\sigma > \bar{\sigma}$
1 ^{er} ordre $\langle N_q \rangle \neq 0$	$\frac{\Delta N_q}{\sqrt{\langle N_q \rangle}} < \left(\frac{8\pi \sqrt{2\pi} G I \sigma^2}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \langle N_p \rangle^{\frac{1}{2}}$ $I \gtrsim 6 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$	$\frac{\Delta N_q}{\sqrt{\langle N_q \rangle}} < \left(\frac{8\pi \sqrt{2\pi} G I \bar{\sigma}^2}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \langle N_p \rangle^{\frac{1}{2}}$ $\phi_m < \left(\frac{8\pi \sqrt{2\pi} G I}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\langle N_p \rangle \langle N_q \rangle)^{\frac{1}{2}}$
2 ^e ordre $\langle N_q \rangle = 0$	$\Delta N_q < \frac{2\pi \sqrt{2\pi} G I \sigma^2}{c^3} \frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2} \langle N_p \rangle$	$\Delta N_q < \frac{2\pi \sqrt{2\pi} G I \bar{\sigma}^2}{c^3} \frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2} \langle N_p \rangle$ $\phi_m < \frac{2\pi \sqrt{2\pi} G I \bar{\sigma}}{c^3} \frac{\omega_q \omega_p}{\Omega^2} \langle N_p \rangle$ $I \gtrsim 2 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$

(*) Cette relation correspond à celle obtenue dans l'étude d'états cohérents. Le modèle particulier introduit ci-dessus permet théoriquement la relation plus favorable : $\Delta N_q \ll \sqrt{\langle N_q \rangle}$. Dans le cas d'un mode initialement vide, ΔN_q représente le bruit : Bruit thermique, Emission spontanée dans le cas d'une cavité Laser...

Pour des ondes gravitationnelles bien définies en fréquence, la meilleure situation physique consiste à étudier les photons créés dans un mode initialement vide. L'effet sera d'autant plus important que l'onde a une durée grande et que le nombre de photons dans le mode initialement occupé est élevé.

Compte tenu des ordres de grandeur obtenus il semble que les détecteurs électromagnétiques puissent atteindre en principe la sensibilité des détecteurs mécaniques.

L'accroissement de leur sensibilité est liée à divers facteurs technologiques :

- augmentation du nombre de photons et meilleure définition physique de cette quantité.
- accroissement du facteur de qualité électromagnétique.
- construction de cavités de grandes dimensions.

Considérons dans le tableau précédent, le cas $\sigma > \xi$ avec la condition initiale $\langle N_q \rangle = 0$. Utilisons les ordres de grandeurs suivants :

$$\omega_p \cdot \omega_q = 10^{31} \text{ s}^{-2} ; \quad \Omega = 10^8 \text{ s}^{-1} ; \quad \langle N_p \rangle = 10^{21} ; \quad \xi = 10^3 \text{ s}$$

Pour $I = 3 \cdot 10^{-6} \text{ w/m}^2$ on trouve $\Delta N_q \approx 100$.

Dans ces conditions, si on a $\sigma < \xi$, l'effet du premier ordre ($\langle N_q \rangle \neq 0$),

pour $\Delta N_q / \sqrt{\langle N_q \rangle} \sim 0,1$, donne :

$$I = 6 \cdot 10^{-5} \text{ w/m}^2$$

Les cavités électromagnétiques possèdent des modes d'ordre élevé dont les fréquences sont aussi voisines que l'on veut ceci permet d'envisager la détection d'ondes gravitationnelles de fréquences très basses permises par la règle de sélection $\omega = \omega_p$

Deux difficultés surgissent :

- la nécessité de conserver les ordres de grandeur optimaux utilisés ici et pour ce faire, de choisir les transitions qui conduisent à des coefficients de la matrice S non négligeables.
- la nécessité de maintenir un faible bruit dans le mode q alors qu'en même temps il est nécessaire d'amplifier le mode p pour y conserver un nombre élevé de photons.

Il apparaît néanmoins que les cavités électromagnétiques présentent un intérêt certain pour la détection des ondes de gravitation.

IV-4-G : Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude de couplage intrinsèque dans un formalisme semi quantique en limitant nos développements au premier ou au second ordre d'une théorie de perturbation.

Après avoir obtenu la forme générale de la matrice S , nous avons fait choix d'une transition particulière pour étudier une cavité parallélépipédique.

Nous avons considéré un paquet d'ondes gravitationnelles et obtenu alors les ordres de grandeurs des effets attendus.

La discussion physique de ces ordres de grandeurs montre clairement l'intérêt de tels systèmes pour l'étude de la radiation gravitationnelle.

Les cavités électromagnétiques offrent la possibilité théorique d'être sensibles à une large gamme de fréquences gravitationnelles. Elles semblent en outre pouvoir conduire aujourd'hui, à la même sensibilité que les premières antennes mécaniques [7] et il est vraisemblable que celle-ci puisse être accrue considérablement dans un proche avenir.

CONCLUSION

Dans cette dernière partie, nous avons présenté un ensemble de travaux concernant les interactions entre les champs électromagnétique et gravitationnel. L'approximation eikonale développée précédemment est en effet insuffisante pour décrire complètement les phénomènes électromagnétiques en présence de gravitation. Il est apparu que les cavités électromagnétiques présentaient un intérêt particulier par la diversité des effets qui s'y produisent.

Afin de ne pas négliger a priori les phénomènes d'élasticité dans les parois, nous nous sommes attachés dans le premier chapitre à décrire trois modèles particuliers permettant d'obtenir l'ordre de grandeur des effets mécaniques :

- Le modèle visco-élastique
- Le modèle basse fréquence $BF_{//}$
- Le modèle basse fréquence BF_{\perp}

Après avoir généralisé les équations de l'élasticité de façon à introduire les phénomènes de viscosité, nous avons plus particulièrement considéré le feuillet plan et nous avons obtenu l'expression des déformations de la surface, induites par la gravitation.

Dans le second chapitre nous avons étudié l'effet des déformations des parois sur une onde électromagnétique confinée dans une cavité (couplage aux limites).

Les conditions aux limites d'un conducteur électrique parfait ont été généralisées sous une forme covariante et un modèle particulier a été étudié. Il est apparu que les effets de résonance aux limites pouvaient être négligés dans l'étude du couplage intrinsèque.

Dans le troisième chapitre nous avons étudié plus particulièrement le couplage intrinsèque dans le cadre d'une théorie semi quantique. Bien que la quantification du rayonnement électromagnétique ne soit pas inévitable dans le cas qui nous préoccupe, la simplicité du formalisme justifie son emploi. Après avoir construit le cadre théorique nécessaire nous nous sommes attaché à l'étude de l'évolution des nombres de photons, sous l'effet d'une perturbation gravitationnelle agissant sur des états particuliers.

Dans le quatrième chapitre nous avons étudié les cavités parallélépipédiques soumises à un paquet d'ondes gravitationnelles. Nous avons obtenus les ordres de grandeurs optimaux pour les phénomènes de création de photons. Il est apparu que le couplage intrinsèque présente un intérêt certain pour l'étude de la radiation gravitationnelle.

Compte tenu de l'importance des phénomènes de double résonance, évoquée en partie III , il est légitime de poser le problème des effets conjoints de couplage intrinsèque et de couplage aux limites. Dans le cadre des théories linéarisées employées ici aucun phénomène de double résonance ne saurait apparaître pour cette raison. Il est en effet toujours possible de décomposer la perturbation électromagnétique en une somme de deux perturbations chacune de celles-ci étant soumise soit au couplage aux limites soit au couplage intrinsèque.

Il reste néanmoins vrai que les cavités électromagnétiques présentent un grand intérêt pour l'étude des ondes de gravitation. C'est là une voie de recherche privilégiée qui s'ouvre au domaine expérimental.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] J.L. GROSSIORD et P. TOURENC : C.R.Ac. Sc. B 278 , p.563, Paris (1974).
- [2] F.I. COOPERSTOCK : Annals of Physics 47, p.173, (1968).
- D. BOCCALETTI et Al : Nuov. Cim. X 70 B , p.129, (1970).
- P. TOURENC : C.R.Ac. Sc. A 274 , p.1857, (1972).
- V.B. BRAGINSKII et Al : J.E.T.P. 38 , 5 , p.865, (1974).
- [3] J. WEBER : General relativity and Gravitational waves, Intersciences Publishers, inc. New York (1961).
- J. WEBER : Dans les théories relativistes de la gravitation - Editions du C.N.R.S. - Paris (1962).
- [4] A. PAPAPETROU : Ann. Inst. Henri Poincaré XVI - 1 - p.63 , (1972).
- [5] L. LANDAU et E. LIFCHITZ : Théorie de l'élasticité - Edition Mir - Moscou (1967)
- [6] R. GAMBINI : Thèse de spécialité - Paris (1974).
- [7] V.B. BRAGINSKII : Dans Proceedings of the International school of Physics "Enrico Fermi" - Experimental gravitation Academic Press Londres (1974).
- [8] R. GAMBINI : Ann. Inst. Henri Poincaré XXIII - 4 - p.389 , (décembre 1975)
- [9] N.N. BOGOLIUBOV et D.V. CHIRKOV : Introduction à la théorie quantique des champs - Dunod - Paris (1960).

- [10] S.S. SCHWEBER : An introduction to relativistic quantum field theory - Harper and Row - New York (1962).
- [11] B.S. DE WITT : Dynamical theory of groups and fields Gordon and Breach - New York (1965).
- [12] T.W.B. KIBBLE : Dans quantum optics - Proceedings of the tenth session of the scottish universities summer school in physics , Edité par S.M. Kay et A. Maitland Academic Press London (1970).
- W.H. LOUISELL : Statistical Properties of radiation wiley and sons - London (1973).
- [13] D. BOCCALETTI et Al : Nuov. Cim. X , 70B , p.129, (1970).
- [14] P. TOURENC : C.R. Acad. Sc. 281 B , p.417 , Paris (1975)
C.R. Acad. Sc. 281 B , p.461 , Paris (1975).
- [15] E.R. PIKE : Dans Quantum Optics - cf [12] .
- [16] F. PERRIN : Mécanique statistique Quantique - Gauthier--Villars Paris (1939).
- [17] L. LANDAU et E. LIFCHITZ : Théorie du champ - Edition Mir Moscou (1966).

CONCLUSION

Les développements qui précèdent sont consacrés à l'étude de manifestations observables du champ de gravitation ou du champ d'inertie, sur des systèmes de nature quantique, pour la plupart d'entre eux.

En considérant la situation actuelle des théories de la gravitation, nous avons reconnu l'observation et l'expérience comme des objectifs prioritaires.

La grande diversité des effets gravitationnels implique que l'on construise les moyens d'étudier des phénomènes physiques très différents, éventuellement dans un cadre conceptuel provisoire^(*) distinguant les caractères actif et passif des divers champs .

Les éléments théoriques ainsi introduits doivent permettre l'étude de modèles et l'estimation des ordres de grandeurs des effets attendus.

C'est à ce type de recherches que nous avons apporté une contribution théorique dont nous allons donner un rapide résumé.

Dans la première partie nous proposons un cadre général, admis par la suite, compatible avec les structures de la mécanique ondulatoire ; celui-ci conduit au principe de quantification des charges et permet une interprétation géométrique, claire des effets de type Aharonov-Bohm.

Dans la seconde partie, après avoir analysé le problème des déplacements spectraux d'origine interne à l'atome, nous appliquons les résultats obtenus à des situations particulières (trou noir, effondrement gravitationnel). Il semble douteux, dans ce cas, que l'on puisse observer les modifications du spectre de raies étudiées.

(*) Il est préférable de parler de cadre conceptuel provisoire plutôt que d'équations approchées dans un cadre définitif encore inconnu à bien des égards.

Dans la troisième partie, nous proposons un système de nature quantique pour lequel une onde de gravitation est susceptible de produire des effets intéressants, à basse température, pour des états collectifs de bosons. Nous poursuivons l'étude des ondes de matière à l'approximation eikonale, en construisant une méthode destinée au calcul des déphasages et des déplacements de fréquences, pour une onde scalaire quelconque dont on se donne l'état initial et la géométrie des rayons non perturbés. Une étude des ordres de grandeur est effectuée et conduit à des résultats généraux pour les phénomènes inertiels et gravitationnels. Nous proposons alors le principe d'une configuration optimale, permettant éventuellement des phénomènes de double résonance.

Dans la quatrième partie nous proposons une généralisation des équations de l'élasticité susceptible de prendre en considération des frottements visqueux. Plusieurs modèles de feuillets plans sont étudiés et les déformations d'origine gravitationnelle sont interprétés physiquement. Nous généralisons les conditions aux limites d'un conducteur parfait satisfaites par le champ électromagnétique. Nous étudions alors l'effet du couplage aux limites sur le rayonnement électromagnétique confiné dans une cavité, pour des configurations résonantes.

Nous introduisons également, dans cette dernière partie, l'étude du couplage intrinsèque dans le cadre d'une théorie semi quantique. Nous développons une méthode générale qui permet d'étudier l'évolution du rayonnement électromagnétique pour une cavité quelconque, soumise à un paquet d'ondes gravitationnelles. En particulierisant les résultats obtenus aux cavités parallélépipédiques, nous obtenons les ordres de grandeurs optimaux concernant l'évolution des nombres de photons dans les divers modes. Pour la détection des ondes de gravitation, un gain de plusieurs ordres de grandeurs sur les antennes mécaniques, paraît envisageable.

Parmi les divers systèmes étudiés, il semble que les ondes électromagnétiques de hautes fréquences et les états collectifs de bosons à basse température, sont des détecteurs privilégiés pour les ondes de gravitation. Nous pensons, en outre que de nombreuses autres voies de recherche, encore inexploitées peuvent être fructueuses :

- Physique du solide et plus particulièrement l'état supraconducteur.
- Etats instables pour les sollicitations gravitationnelles brèves.
- Systèmes à résonances multiples.
- Systèmes électromagnétiques et couplage aux limites locales
- etc

A la suite des travaux présentés ci-dessus, il nous paraît vraisemblable que dans un proche avenir des expériences conjointes d'émission et de détection des ondes gravitationnelles soient possibles en laboratoire.

En résumé, l'apport théorique et pratique que constituent les développements précédents devrait faciliter l'étude de principes nouveaux d'expériences et l'évaluation des ordres de grandeurs pour les effets attendus. En parallèle, nous pensons avoir contribué au rapprochement entre les théories abstraites de la gravitation et les aspects plus concrets de l'expérimentation.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages généraux

- BERTOTTI B. (Editeur) : Experimental Gravitation - Proceedings the international school of physics "Enrico Fermi" - Academic Press New York (1974).
- BOGOLIUBOV N.N. et CHIRKOV D.V. : Introduction à la théorie quantique des champs - Dunod , Paris-(1960).
- COHEN-TANNOUDJI C. , DIU B. , LALOË F. : Mécanique Quantique - Hermann Paris-(1973).
- D'ESPAGNAT B. : Conceptual foundation of quantum mechanics - W.A. Benjamin inc-Menlo Park - California - (1971).
- DE WITT B.S. : Dynamical theory of groups and fields - Gordon and Breach, New York - (1965).
- GRAY D.O. : (Editor) American Institute of physics hand book - Mac Graw Hill New York - (1972).
- KITTEL C. : Introduction à la Physique de l'état solide - Dunod Paris - (1972).
- LANDAU L. et LIFSCHITZ E. :
- Théorie du champ - Mir - Moscou (1966),
- Mécanique Quantique - Mir - Moscou (1966),
- Théorie de l'élasticité - Mir - Moscou (1967).
- Théorie Quantique Relativiste - Mir - Moscou (1972).

- LICHNEROWICZ A. : Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme
- Masson - Paris (1955).
- LOUISELL W.H. : Statistical properties of radiation - Wiley and sons - London (1973).
- MAVRIDES S. : L'Univers Relativiste - Masson et Cie - Paris(1973).
- MISNER W. , THORNE K.S. , WHEELER J.A. : Gravitation -Freeman and Cie - San Francisco
(1973).
- PETIAU G. : La théorie des fonctions de Bessel - C.N.R.S. Paris (1955).
- PERRIN F. : Mécanique statistique quantique - Gauthier-Villars - Paris (1939).
- SCHWEBER S.S. : An Introduction to relativistic quantum field theory - Harper and Row -
New York (1962).
- SYNGE J.L. : Relativity : The General theory - North holland Publishing Company -
Amsterdam (1971).
- TOLMAN R.C. : Relativity thermodynamics and cosmology - Oxford(1966).
- TONNELAT M.A. : - Les Principes de la théorie électromagnétique et de la Relativité
- Masson et Cie - Paris (1959),

- Les vérifications expérimentales de la Relativité Générale -
- Masson et Cie - Paris (1964).
- WEBER J. : General Relativity and Gravitational waves - Intersciences Publishers
inc - New York (1961).
- ZAKHAROV V.D. : Gravitational wave in Einstein's theory - Halsted Press - New York
(1973).

Articles et Mémoires

AHARONOV Y. and BOHM D. : Phys. Rev., 115 , 3 , p.485 , (1959).
Phys. Rev., 123 , 4 , p.1511, (1961).

BOCCALETTI D. , De SABBATA V., FORTINI P., GUALDI C. :
Nuov. Cimento, X , 70 B , p.129 , (1970).

BRAGINSKII V.B. : - The Detection of small Accelerations, gravitational
antennae , Verification of the principle of equivalence ;
dans Proceedings of the international school of physics "Enrico Fermi"- Experimental gravitation Academic
Press - London (1974).

- J.E.T.P. , 39 , 3 , p.387 , (1974).

- J.E.T.P. Lett., 13 , 11 , p.417 , (1971).

- J.E.T.P. , 38 , 5 , p.865 , (1974).

BRILL D.R. and GOWDY R.H. : Rep. Prog. Phys., 33 , p.413 , (1970).

BYERS N. and YANG C.N. : Phys. Rev. Letters , 7 , 2 , p.46 , (1961).

CHAMBERS R.G. : Phys. Rev. Lett. , 5 , p.3 , (1960).

COLELLA R., OVERHAUSER A ., WERNER S.A. : Phys. Rev. Lett., 34, 23, p.1472,
(1975).

COOPERSTOCK F.I. : Annals of Physics 47, p.173 , (1968).

COPSON E.T. : Proc. Roy. Soc. A , 116 , (1927).

COSTA De BEAUREGARD O. :- C.R. Acad. Sc., 275 , B , p.231 , Paris (1972).

- Dans Louis De Broglie, sa conception du monde physique
- Gauthier-Villars - Paris (1973).

COSTA De BEAUREGARD O. et VIGOUREUX J.M. : C.R. Acad. Sc., 277 , B , p.1 ,
Paris (1973).

- COULTER C.A. : Amer. J. Phys. 35 , t.7 , p.603 , (1967).
- DE WITT B.S. : Phys. Rev., 162 , 5 , p.1195 , (1967),
 Phys. Rev. Lett. 16 , 24 , p.1092, (1966),
 Phys. Rev., 125 , p.2189, (1962).
- DOLL R. and NÄBAUER M. : Phys. Rev. Lett., 7 , 2 , p.51 , (1961).
- DOWKER J.S. : Nuov. Cim., 52 - 1 B , p.129 , (1967).
- GAMBINI R. : - Perturbation de la propagation d'une onde gravitationnelle plane dans un corps matériel.
 Thèse de spécialité - Paris-Sud - (1974).
 - Ann. Inst. Henri Poincaré XVIII , 4 , p.389, (1975).
- GERTSENSHTEIN M.E. et PUSTOVOIT V.I. : J.E.T.P., 16 , 2 , p.433, (1963).
- GRISHCHUK L.P. and SAZHIN M.V. : J.E.T.P., 38 , 2 , p.215 , (1974).
- GROSSIORD J.L. et TOURRENC P. : C.R. Acad. Sc. , 278 , B , p.563 , Paris (1974).
- KIBBLE T.W. : Dans Quantum optics - Proceedings of the tenth session of the scottish universities summer school in physics.
 Edité par S.M. KAY et A. Maitland.
 Academic Press London (1970).
- LINET B. : Electrostatics and Magnetostatics in the Schwarzschild Metric
 J. Phys. A (à paraître 1976).
- LINET B. et TOURRENC P. : Changement de phase dans un champ de gravitation : Possibilité de détection interférentielle
 - can. J. Phys., 54 , 11 , (à paraître).
- LYAMOV V.E. et RUDENKO V.N. : J.E.T.P., 40 , 5 , p.787 , (1975).
- MOSS G.E., MILLER L.R. , FORWARD R.L. : Applied Optics , 10 , 11 , p.2495, (1971)

- NEE T.W., ROGOVIN D., MARLAN O, SCULLY : *Annals of Physics*, 77, p.79, (1973).
- ONSAGER L. : *Phys. Rev. Lett.*, 7 , 2 , p.50, (1961).
- PAPAPETROU A. : - *Ann. der Phys.*, 6 , 17 , p.4 , Leipzig (1956),
- *Ann. Inst. Henri Poincaré XVI* , 1 , p.63, (1972).
- PAPINI G. : *Nuov. Cim.*, 52 - 1 B , p.136 , (1967).
- PIKE E.K. : *Dans Quantum optics - Proceedings of the tenth session of the
scottish universities summer school in Physics.*
Edité par S.M. KAY et A. Maitland
Academic Press London (1970).
- PLEBANSKI J. : *Phys. Rev.*, 118 , 5 , p.1396 , (1960).
- POST E.J. : *Rev. Mod. Phys.*, 39 , 2 , p.475 , (1967).
- TAYLOR B.N. , PARKER W.H. , LANGENBERG D.N. : *Rev. of Mod. Phys.*, 41, p.375, (1969).
- TOURRENC P. : - *C.R. Acad. Sc.*, 281, B , p.417, Paris (1975).
- *C.R. Acad. Sc.*, 281, B , p.461, Paris (1975).
- *C.R. Acad. Sc.*, 274, A , p.1857, Paris (1972).
- *Contribution à l'étude d'une théorie quantique des champs
- Thèse de spécialité - Paris (1969).*
- *Etude des phases et des fréquences - Séminaire d'Accélérométrie
S.E.R.A.F. Paris (1976).*
- TOURRENC P. et GROSSIORD J.L. :-*Nuov. Cim.*, 19 B , 1 , p.105, (1974)
-*Nuov. Cim.*, 32 B , p.163, (1976).
- WEBER J. : *Dans les théories relativistes de la Gravitation*
Edition C.N.R.S. - Paris (1962).
- WILKINSON D.T. and CRANE H.R. : *Phys. Rev.*, 130 , 3 , p.852, (1963).

Exchange 81, 1080, " see. see ~ 1 -