REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° d'ordre : …………..….
N° de série : ……………..

THESE
Présentée pour obtenir le diplôme de
DOCTORAT EN SCIENCES EN PHYSIQUE
Option : ENERGETIQUE

Thème

PHENOMENES DE CONVECTION MIXTE A PROPRIETES VARIABLES DANS LES CONDUITS CYLINDRIQUES A AILETTES ET SANS AILETTES

Par :

TOUAHRI SOFIANE

Soutenue le : 06/12/2012

Devant le Jury :

Président	:	A. CHAKER	**Professeur**	**Univ. Mentouri Constantine**
Rapporteur	:	T. BOUFENDI	**Professeur**	**Univ. Mentouri Constantine**
Examinateurs	:	N. BELLEL	**Professeur**	**Univ. Mentouri Constantine**
		N. BOUCEREDJ	**Professeur**	**Univ. Badji Mokhtar Annaba**
		A. GUERZIZ	**M.C.A**	**Univ. Badji Mokhtar Annaba**
		M. GUELLAL	**M.C.A**	**Univ. Ferhat Abbas Sétif**

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de Physique Energétique de l'université Mentouri Constantine.

Je remercie tout d'abord Monsieur ***BOUFENDI Toufik*** Professeur à l'université Mentouri Constantine pour m'avoir encadré le long de cette recherche. Ses précieux conseils, son expérience, sa compétence et son savoir m'ont été d'une grande utilité dans le bon déroulement de ce travail.

J'adresse mes profonds remerciements aux membres de Jury qui ont bien voulu accepter de lire cette thèse et d'apporter des critiques pertinentes. Il s'agit du Professeur ***CHAKER Abla*** du département de physique de l'université Mentouri Constantine qui a gentiment accepté de présider ce Jury, du Professeur ***BELLEL Nadir*** du département de physique de l'université Mentouri-Constantine, du Professeur ***BOUCEREDJ Noureddine*** du département de physique de l'université Badji Mokhtar-Annaba, de Monsieur ***GUELLAL Messaoud*** Maitre de conférence du département de physique de l'université Ferhat Abbas-Sétif et de Monsieur ***GUERZIZ Allaoua*** Maitre de conférence du département de physique de l'université Badji Mokhtar-Annaba qui ont accepté de consacrer de leur temps à l'examen de cette thèse.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près où de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Nomenclature

A	rapport d'aspect (L/D)
a	coefficient de l'équation discrétisée
b^*	terme de source globale adimensionnelle
D_i	Diamètre interne du conduit, m
D_e	Diamètre externe du conduit, m
D_{1i}	Diamètre intérieur du cylindre interne de l'espace annulaire, m
D_{1e}	Diamètre extérieur du cylindre interne de l'espace annulaire, m
D_{2i}	Diamètre intérieur du cylindre externe de l'espace annulaire, m
D_{1e}	Diamètre extérieur du cylindre externe de l'espace annulaire, m
F	densité de flux massique convectif, Kg/m^2
g	accélération gravitationnelle, $(= 9.81 m/s^2)$
Gr^*	nombre de Grashof modifié $\left(g\ \beta\ G\ D_i^5\ /K_s\ \nu^2\right)$
G	source de chaleur volumique, W/m^3
G^*	source de chaleur volumique adimensionnelle$(K_d^*\ /Re_0\ Pr_0)$
H	La hauteur de l'ailette, m
$h(\theta, z)$	coefficient local de convection, W/m^2K
h_{co}	coefficient de transfert convectif (conduit- air ambiant), W/m^2K
h_{ro}	coefficient de transfert radiatif (conduit- air ambiant), W/m^2K
K	conductivité thermique du fluide, W/mK
K^*	conductivité thermique du fluide adimensionnelle,(K/K_0)
K_d^*	conductivité thermique du solide adimensionnelle, (K_d/K_0)
L	longueur du conduit, m
$Nu(\theta, z^*)$	nombre de Nusselt local $[h(\theta, z)D_i/K_0\ ]$
$Nu(z^*)$	nombre de Nusselt local axial moyen circonférentiel $[h\ (z)D_i/K_0]$
Nu_m	nombre de Nusselt moyen.
P	pression, Pa
P^*	pression adimensionnelle $[(P - P_0)/\rho_0\ V_0^2]$
P_r	nombre de Prandtl $(\nu/\propto)$
q	densité de flux de chaleur, W/m^2
r	coordonné radiale, m

r^*	coordonné radiale adimensionnelle $(r/\ D_i)$
R	rayon du conduit, m
Ra	nombre de Rayleigh$\lfloor g\ \beta\ (T(R_0\ ,\theta,z)-T_\infty)D_0^3/\propto_{air}\ \ v_{air}\rfloor$
Re	nombre de Reynolds $(V_0 D_i/\ v_0)$
S^*	terme de source dans la forme générale de l'équation de conservation
t	temps, s
t^*	temps adimensionnel $(V_0\ t/\ D_i)$
T	température, K^0
T^*	température adimensionnelle $(T-T_0)/(G\ D_i^2/K_s)$
T_b	température moyenne de mélange, K
T_b^*	température moyenne dimensionnelle $(T_b-T_0)/(G\ D_i^2/K_s)$
V_0	vitesse axiale moyenne à l'entrée du conduit, m/s
V_r	composante radiale de la vitesse, m/s
V_r^*	composante radiale de la vitesse adimensionnelle (V_r/V_0)
V_θ	composante circonférentielle de la vitesse, m/s
V_θ^*	composante circonférentielle de la vitesse adimensionnelle (V_θ/V_0)
V_z	composante axiale de la vitesse, m/s
V_z^*	composante axiale de la vitesse adimensionnelle (V_z/V_0)
z	coordonnée axiale, m
z^*	coordonnée axiale adimensionnelle (z/D_i)

Symboles Grecs

$\propto$	diffusivité thermique, m^2/s
β	coefficient d'expansion thermique, $1/K^0$
Δ	intervalle fini
$\emptyset$	variable dépendante généralisée
Γ	coefficient de diffusion
μ	viscosité dynamique, kg .m/s
μ^*	viscosité dynamique adimensionnelle (μ/μ_0)
v	viscosité cinématique, m^2/s
θ	coordonnée angulaire, rad
ρ	densité, Kg/m^3
τ	contrainte, N/m^2
τ^*	contrainte adimensionnelle $[\tau/(\mu_0 V_0/D_i)]$

Indices

c	relatif à la position de la face d'un volume fini typique
CP	désigne les propriétés constantes en convection forcée
d	désigne la paroi du conduit
i,o	fait référence aux surfaces interne et externe du conduit
m	respectivement moyen
p	fait référence au nœud P d'un volume fini typique
n,s,e,w,t,b	fait référence aux faces d'un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
N,S,E,W,T,B	fait référence aux nœuds entourant un volume fini typique respectivement nord, sud, est, ouest, frontale et dorsale
nb	désigne les nœuds voisins à P
r, θ, z	référence aux directions radiale, tangentielle et axiale respectivement
∞	fait référence à l'air ambiant loin de la paroi externe
0	entrée du conduit

Exposants

*	variable adimensionnelle
t	désigne l'instant t
$t + \Delta t$	désigne l'instant $t + \Delta t$

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

Ce travail rentre dans la continuité des perspectives de recherche mises en exergue à la suite d'un travail de recherche initié et développé par **Boufendi et Afrid [1, 2]** et traduit par une thèse de Doctorat d'Etat de **Boufendi [3]** réalisée au Laboratoire du Physique Energétique de l'Université Mentouri Constantine. Pour rappel, il s'agissait d'une simulation numérique de la convection mixte tridimensionnelle laminaire dans un conduit cylindrique horizontal uniformément chauffé. Un modèle de base à propriétés physiques constantes et un modèle conjugué à propriétés physiques variables ont été parfaitement étudié à l'aide de développement d'outils numériques tel l'algorithme SIMPLER mis en fonctionnement avec une discrétisation spatio-temporelle du premier ordre.

La problématique posée dans notre travail nous a amené à développer plusieurs axes:

- Un premier axe de type numérique. Il consiste à œuvrer dans le perfectionnement de l'outil de calcul en procédant à l'augmentation de la précision du schéma numérique de discrétisation du premier ordre vers le second ordre et le raffinage du maillage suivant les trois directions.

- Un second axe non moins important concerne l'exploration des transferts thermiques en mode de convection mixte combinés aux écoulements de fluide dans les conduits cylindriques horizontaux parcourus par un fluide newtonien et incompressible à propriétés physiques dépendantes de la température. Dans cet axe, plusieurs aspects seront étudiés selon la géométrie du problème et décomposés en trois parties :

- La première partie concerne l'étude spécifique de la convection mixte dans un cylindre plein avec une épaisseur finie de sa paroi soumise à une augmentation du chauffage volumétrique produit dans toute l'épaisseur du conduit. Cette augmentation entraînera automatiquement l'augmentation du nombre de Grashof. Dans l'intervalle admissible de la convection mixte, le mode opératoire consiste à augmenter progressivement le nombre de Grashof et à analyser son influence sur l'écoulement et le transfert thermique.

- Dans la deuxième partie, on passe de la géométrie cylindrique pleine à la géométrie annulaire dans laquelle on étudie la convection mixte entre deux cylindres concentriques longs et horizontaux dont le cylindre extérieur sera soumis à un chauffage volumétrique dans toute l'épaisseur de sa paroi tandis que le cylindre intérieur sera adiabatique. Les champs dynamiques et thermiques dans les milieux solide et fluide de l'espace annulaire seront présentés et analysés lorsque le chauffage volumétrique sera augmenté. Une comparaison des résultats obtenus avec ceux de la géométrie pleine consolidera ces deux parties ainsi qu'avec ceux publiés par d'autres chercheurs, obtenus avec les mêmes paramètres de contrôle, pour l'évaluation de la précision de nos résultats et leur validation.

- Dans la troisième partie deux nouvelles géométries seront considérées. La première concerne un cylindre plein muni d'ailettes sur sa paroi intérieure alors que la seconde concerne le conduit cylindrique annulaire muni d'ailettes intérieures. Pour ces deux géométries et pour des ailettes géométriquement identiques et de même nature physique que la paroi mère, l'influence de la forme géométrique et la position des ailettes sera mise en évidence.

La plupart des études numériques sur la convection mixte dans les conduits négligent la conduction de chaleur dans la paroi. Deux conditions aux limites sont généralement étudiées : une température constante ou un flux de chaleur uniforme. Il est supposé que ces conditions prévalent à l'interface solide-fluide en négligeant la redistribution possible de chaleur dans la paroi. En réalité, plusieurs études prouvent que pour certains cas la conduction thermique pariétale affecte de façon significative l'écoulement interne. Dans ce cas, on est devant une situation qualifiée d'un transfert conjugué ou tout simplement une convection mixte conjuguée.

Le premier chapitre de cette thèse est consacré à une étude bibliographique détaillée qui se compose de trois parties: une étude bibliographique couvrant les études analytiques, numériques et expérimentales de la convection mixte conjuguée et non conjuguée dans les conduits cylindriques simples avec des différentes positions et conditions aux limites. Une deuxième partie concernant les études numériques et expérimentales réalisés sur les espaces annulaires. La troisième partie de cette recherche bibliographique concerne plutôt les conduits cylindriques équipés d'ailettes longitudinales et transversales et renseigne sur leurs rôles dans l'amélioration du transfert de chaleur.

Le deuxième chapitre est réservé à la modélisation mathématique des différents problèmes posés. La première partie de ce chapitre concerne la géométrie et les systèmes d'équations de conservation, avec leurs conditions initiales et aux limites de la convection mixte conjuguée d'un écoulement laminaire à l'intérieur d'un conduit cylindrique horizontale. Ce dernier est chauffé par une génération de chaleur produite par effet Joule dans toute l'épaisseur de la paroi. Dans la deuxième partie, la modélisation mathématique est faite pour un écoulement qui aura lieu entre deux cylindres concentriques. Dans la troisième partie, la configuration, les équations de conservation et les conditions aux limites sont présentées pour le cas d'un conduit équipé par des ailettes identiques que ce soit longitudinales ou bien transversales.

La méthodologie de la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des volumes finis est présentée dans le troisième chapitre. L'influence du maillage suivant les directions axiale, radiale et azimutale, la validation du code de calcul par la confrontation avec différents travaux seront aussi discutées dans ce chapitre.

Dans le quatrième chapitre, nous présenterons les résultats obtenus concernant la convection mixte laminaire conjuguée à une conduction thermique dans la paroi d'un cylindre plein. Les propriétés physiques du fluide sont thermo-dépendantes et les pertes thermiques vers le milieu externe seront prises en compte. La variation de la vitesse axiale, la vitesse secondaire et le champ de température ainsi que le flux de chaleur et le nombre de Nusselt local à l'interface solide-fluide seront bien détaillé. Une corrélation du nombre de Nusselt moyen et le nombre de Richardson sera donnée.

Les résultats de la convection mixte dans un espace annulaire seront l'objet du cinquième chapitre. Nous gardons le même cylindre du chapitre précédent, nous lui rajoutons un autre cylindre à l'intérieur, de telle sorte qu'ils vont avoir le même axe. La surface intérieure du cylindre interne est adiabatique. Les évolutions de l'écoulement axial et secondaire ainsi que le champ thermique seront illustrées le long du conduit.

Le sixième chapitre contiendra les résultats importants de cette étude, il s'agit des conduits ailettés. D'abord nous présenterons les résultats du cylindre plein avec des ailettes internes, ensuite les résultats concernant l'espace annulaire avec des ailettes internes. Une comparaison entre les cas avec ailettes et les cas sans ailettes sera donnée.

Finalement nous conclurons ce travail par un récapitulatif des différentes étapes abordées dans tous les chapitres ainsi que par une synthèse des importants résultats que nous pouvons tirer à travers cette étude. Une présentation des perspectives ultérieures qui pourraient être engagées sera détaillée.

Chapitre 1

Etude bibliographique

1.1 Introduction

La convection mixte laminaire dans les conduits cylindriques est retrouvée dans plusieurs applications pratiques telles que les échangeurs de chaleur, les capteurs solaires, le refroidissement des composantes électroniques, les procédés chimiques et le refroidissement dans les réacteurs nucléaires. Ces nombreuses applications sont la cause de la richesse dans la production bibliographique. À travers cette dernière, on trouve de nombreuses investigations analytiques, numériques et expérimentales menées dans ce domaine. La plupart des études numériques et analytiques sont basées sur des hypothèses de simplification qui mènent ces travaux vers des cas très particuliers, il s'agit de la négligence de la conduction thermique des parois (la condition thermique est appliquée directement à l'interface solide-fluide), ou bien une application d'une condition thermique aux limites uniforme.

Quantitativement, les travaux expérimentaux concernant la convection mixte dans les conduits sont moins nombreux, cela est dû aux coûts très élevés des réalisations expérimentales. Généralement nous trouvons deux techniques dans les traitements expérimentaux. La première est quantitative ; elle consiste à prendre des mesures de température ou de vitesse dans plusieurs sections du conduit. La deuxième est qualitative ; elle consiste à visualiser l'écoulement dans un tube transparent.

1.2 Convection mixte dans les conduits cylindriques pleins

La convection mixte dans les conduits cylindriques pleins est le problème le plus traité, car c'est la géométrie standard utilisée dans la plupart des applications simples. Il existe deux types d'application des conditions aux limites: conditions thermiques appliquées à l'interface solide-fluide et conditions thermiques appliquées à la surface extérieure (problème conjugué).

1.2.1 Convection mixte dans les conduits pleins avec des conditions thermiques appliquées à l'interface

Le problème de la convection mixte dans les conduits qui néglige la conduction au niveau des surfaces est un problème souvent traité. Théoriquement, ce dernier a été étudié pour la première fois dans des conduits cylindriques verticaux par **Martinelli et Boelter [4]**. Les auteurs ont traité l'écoulement laminaire développé dans lequel ils ont supposé une variation linéaire de la densité avec la température. Ils ont supposé aussi que la vitesse du fluide prêt de l'interface change linéairement suivant la composante de l'écoulement axial. Ces suppositions rendent la solution du problème correspondante à une simple analyse mathématique. Les résultats obtenus ont permis d'obtenir une corrélation du nombre de Nusselt en fonction du rapport des viscosités, des nombres de Grashof, Reynolds et Prandtl et du diamètre du conduit :

$$Nu_m = 1.24 \left[\left(Re\,Pr\,D/x \right) + 0.025 \left(Gr\,Pr \right)^{0.75} \right]^{1/3} \left(\mu_e / \mu_s \right)^{0.14}$$

Orfi et al. [5], ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte laminaire dans une conduite inclinée soumis à un flux de chaleur uniforme appliqué à l'interface solide-fluide. Le nombre de Reynolds est fixé à 500, tandis que les trois autres paramètres (nombre de Prandtl, nombre de Grashof et l'angle d'inclinaison) sont variables. Les résultats obtenus montrent que pour chaque nombre de Prandtl entre 0.7 et 7, il y a un nombre de Grashof critique, pour le quel la structure de l'écoulement secondaire à une section axiale donnée se transforme de 2 vortex à 4 vortex. Pour Pr=7 et α=0, le nombre de Grashof critique est entre 10^5 et $2.5 \cdot 10^5$. Les profiles de la température et de la vitesse axiale obtenues sont comparées avec ceux de l'étude analytique de **Orfi [6]**, la différence relative entre les deux résultats ne dépasse pas 0.1%.

Wang et al. [7] ont mené une analyse numérique sur la convection mixte dans les conduits circulaires horizontaux et verticaux, les nombres de Prandtl, de Grashof et de Reynolds varient de 10^{-5} à 7, de $3 \cdot 10^3$ à $2 \cdot 10^4$ et de 100 à 300 respectivement. Leurs résultats montrent clairement que les variations dans le profile de la vitesse augmentent avec *Gr/Re* mais diminuent considérablement lorsque *Pe* augmente avec un *Gr/Re* constant. Ils ont montré aussi que pour un $Gr=2 \cdot 10^4$ et $Pr=7 \cdot 10^{-3}$, il y a un important phénomène de renversement dans la partie supérieure des conduits horizontaux qui est accompagné par une diminution intéressante dans le nombre de Nusselt locale et automatiquement dans le transfert thermique.

Choudhury et al. [8] ont montré que l'effet de la convection naturelle sur les profiles de l'écoulement axial et de la température augmente depuis l'entrée du conduite jusqu'a atteindre un maximum, puis il diminue dans la région où l'écoulement est développé. Leurs résultats montrent aussi que lorsque le nombre de Prandtl dépasse 10, l'effet de ce dernier sur l'écoulement et le transfert thermique devient faible.

Dans l'étude analytique de **Reynolds [9]**, le problème d'un écoulement développé est traité à l'intérieur d'une conduite soumise à un flux thermique circonférentiellement non uniforme à l'interface solide-fluide. Le profil de flux thermique imposé suivant la circonférence de l'interface solide-fluide est du type périodique (cosinus), Il est maximum en haut de la conduite ($\theta=0$) et nul en bas ($\theta=\pi$). L'auteur a montré qu'il existe une position circonférentielle dans laquelle la température moyenne du fluide est égale à celle de l'interface, ce qui fait tendre la valeur de Nusselt local vers l'infini. Après cette position, le nombre de Nusselt devient négatif, ce qui fait que le sens de chaleur est inversé, c'est le fluide qui chauffe la paroi.

Nguyen et Galanis [10], s'intéressent à étudier l'influence du nombre du Rayleigh sur le problème de la convection mixte en développement simultané, on utilisant la méthode des volumes finis. Le maillage utilisé est 15×18×100 suivant r, θ et z. Dans leurs résultats, les auteurs montrent que l'augmentation du nombre de Rayleigh de $5 \cdot 10^5$ à $3 \cdot 10^6$ rendre l'écoulement secondaire plus intense, la stratification des profils des températures est plus important, la zone de développement est plus courte et une augmentation considérable dans le nombre de Nusselt.

La convection mixte complètement développée dans une conduite horizontale avec un flux de chaleur non uniforme à l'interface solide-fluide a été étudiée par **Patankar et al. [11]**. Un chauffage uniforme est imposé sur la moitié supérieure tandis que l'autre moitié est adiabatique et vis-versa. Le chauffage par le bas procure un écoulement secondaire plus intense qui fait augmenter le nombre de Nusselt par rapport à celui de la convection forcée. Par contre, dans le cas du chauffage appliqué par le haut, la superposition dans les profiles de la température réduise l'écoulement secondaire et le transfert thermique.

Choi et al. [12], ont étudié le même problème de **Patankar et al. [11]**, mais ils ont trouvé que lorsque le nombre de Grashof est élevé, il existe des solutions double pour tous les nombres de Prandtl entre 0.2 et 10.

Kholai et al. [13] ont étudié numériquement la convection mixte dans un tube circulaire incliné soumis à un flux de chaleur constant et uniforme sur toute sa surface circonférentielle. L'écoulement à l'intérieur du tube est supposé laminaire pour un fluide newtonien et incompressible (l'eau). Les équations différentielles elliptiques régissantes sont résolues par la méthode des volumes finis. Le maillage considéré est de 30×70×80 suivant r, θ et Z. Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds égale à 500 et différentes combinaisons du nombre de Grashof (10^4, 10^5 et 10^6) et de l'angle d'inclinaison (0° ,30° ,60° et 90°). Ils ont trouvé que le transfert de chaleur s'améliore avec l'augmentation du nombre de Grashof et la diminution de l'angle d'inclinaison.

Le problème de la convection mixte laminaire et turbulente à faible nombre de Reynolds dans un tube vertical chauffé par un flux de chaleur constant est étudié par **Behzadmher et al. [14]**. Les nombre de Reynolds considérés sont 1000 et 1500, le nombre de Grashof est inférieur à 10^8. Avec les conditions et les paramètres de cette étude, le nombre de Nusselt moyen est bien corrélé avec le nombre de Grashof et le nombre de Reynolds par la corrélation suivante : $Nu_m = 4.36\left(1 + \frac{Gr^{0.468}}{750 + 0.24\ \mathrm{Re}}\right)$

1.2.2 Convection mixte dans les conduits pleins avec des conditions thermiques appliquées à la surface extérieure (problème conjugué)

L'hypothèse de négliger la conduction thermique dans l'épaisseur des conduits n'est pas toujours correcte. A cet effet plusieurs auteurs **Afrid et Boufendi [1,2], Abboudi et Papini [15]**, **Piva et al. [16]**, **Bilir et Ateş [17]**, **Susec [18]**, **Nasredine et al. [19], Mokrane [20]** et **Touahri et Boufendi [21]** montrent que la prise en compte de cette dernière rend les résultats numériques en excellent accord avec ceux obtenus expérimentalement.

Ouzzane et al. [22] ont étudié l'effet de la conduction pariétale et la non uniformité du flux de chaleur imposé sur la convection mixte d'un écoulement laminaire ascendant dans une conduite cylindrique inclinée, quatre configurations différentes sont traitées: un flux thermique uniforme appliqué sur toute la surface extérieure, un flux uniforme appliqué sur la moitié supérieure de la surface extérieure, tandis que l'autre moitié est isolé, un flux thermique appliqué sur l'interface (épaisseur nulle) et finalement un flux thermique appliqué sur la moitié supérieure de l'interface. Leurs objectif est de voire la possibilité de négliger la conduction thermique dans la paroi des conduits. Les auteurs ont utilisé un maillage non uniforme qui est raffiné dans les régions ou les variations des champs de la température et de la vitesse sont relativement importantes (à l'entrée de tube et à l'interface solide-fluide). Ils montrent que le fait de négliger la conduction dans la paroi en appliquant le flux thermique directement à l'interface fluide-solide peut conduire à des résultats erronés notamment quand le nombre de Grashof est élevé. Leurs résultats montrent que pour un flux de chaleur imposé sur la surface externe, le nombre de Nusselt moyen est égal à *16.47* pour $Gr=10^6$, $Re=500$, $Pr=7$, tandis que pour un flux de chaleur imposé sur l'interface, le nombre de Nusselt moyen devient 26.14.

Dans les travaux numériques réalisés par **Chehboub [23], Chehboub et Boufendi [24]**, les auteurs ont étudié l'influence de la conduction pariétale sur les transferts thermiques dans un conduit horizontal, pour cela trois matériaux sont traités: l'inconel (K_i=15 W/m°K), l'acier (K_a=48.5 W/m°K) et le tantale (K_t=57.5 W/m°K). Les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie avec les conditions initiale et aux limites appropriées sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. La convection mixte dans le fluide est conjuguée avec la conduction thermique dans la paroi du conduit. Les propriétés physiques du fluide sont thermo-dépendantes, le rapport d'aspect géométrique (L/Di) est fixé à 104.17, les nombres de Reynolds et de Prandtl sont calculés à l'aide des propriétés physiques de l'eau évaluées à la température de référence (T_0 = 288°K à l'entrée du tube), Re =143.28, Pr =8.082. Les résultats obtenus montrent que la convection mixte avec les paramètres de contrôle utilisés conduit à une considérable variation circonférentielle de la température de la paroi loin de l'entrée, cette importante variation est modérée avec l'augmentation de la conductivité thermique du matériau et que le transfert thermique s'améliore avec l'augmentation de la conductivité pariétale du matériau

Le problème de la convection mixte laminaire conjuguée à une conduction dans la paroi d'une conduite verticale est étudié par **Bernier et Baliga [25]** pour un flux de chaleur uniforme appliqué sur la paroi externe de la conduite. Ils ont montré que la diffusion axiale de la chaleur dans la paroi de la conduite devient importante pour des grandes valeurs du rapport des conductivités thermiques solide-fluide. La diminution du nombre de Reynolds entraîne également l'augmentation de l'importance de la diffusion axiale de chaleur dans le matériau de la conduite. Une étude analytique similaire de **Baughn [26]** prouve que l'effet de la conduction thermique dans l'épaisseur du conduit peut être réduit par une sélection d'un matériau à très faible conductivité thermique, d'une paroi à faible épaisseur ou à grand diamètre.

Boufendi et Afrid. [1] ont fait une simulation numérique, tridimensionnelle d'un transfert de chaleur en convection mixte laminaire conjuguée à une conduction dans une conduite horizontale dont la paroi est de faible épaisseur. Au sein de cette paroi se produit un chauffage volumique constant et uniforme. Les propriétés physiques du fluide sont thermodépendantes et les pertes thermiques entre la surface extérieure du conduit et le milieu ambiant sont prises en compte. Les équations modélisantes de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie sont résolues par la méthode des volumes finis discrétisées au premier ordre. Les résultats obtenus montrent que les champs thermique et dynamique sont tridimensionnels, la non-uniformité du flux thermique à l'interface paroi-fluide est significative, le nombre de Nusselt moyen dans le tube augmente considérablement avec l'augmentation du chauffage volumétrique dans l'épaisseur du conduit. Les résultats numériques obtenus sont en bon accord avec ceux d'une étude expérimentale produite avec les mêmes paramètres géométriques, dynamiques et thermiques.

L'effet de la conduction thermique dans la paroi d'un conduit vertical sur le transfert de chaleur par convection mixte est étudié par **Heggs et coll [27]** en présence du phénomène de renversement. Par comparaison avec le cas où la conduction de chaleur est négligeable, les résultats obtenus montrent que la conduction dans la paroi du conduit a une influence très importante sur l'écoulement et le transfert thermique.

1.2.3 Études expérimentales

Expérimentalement l'effet de la convection naturelle sur la convection forcée a été pris en considération dans les conduits à partir de la fin des années cinquante. En 1958, **Hanratty et al [28]** ont étudié expérimentalement la convection mixte dans une conduite verticale pour de faibles nombres de Reynolds. Les conditions aux limites (Imposition du flux de chaleur sur la paroi) ont été réalisées à l'aide d'une enveloppe en plastique fixée d'une façon concentrique autour du tube. Deux cas sont traités dans ce travail : un écoulement ascendant chauffé dans le quel ils ont observé que l'écoulement prés de la paroi est accéléré, alors qu'il est ralenti au centre du conduit et un écoulement descendant chauffé, dans ce cas l'écoulement prés de la paroi est ralenti, alors qu'il est accéléré au centre du conduit. Pour un nombre de Reynolds égale à 10 et une différence de température entre la paroi et la zone d'entrée égale à 10°C, l'écoulement se transforme en régime transitoire.

Abid et al. [29] ont fait une étude expérimentale sur la convection mixte dans un écoulement d'eau dans une conduite cylindrique horizontal uniformément chauffé. Ils ont trouvé que pour les faibles nombres de Reynolds et de Rayleigh, le régime est stable, mais si le nombre de Reynolds ou le nombre de Rayleigh augmente le régime devient instable, cette instabilité thermique est le résultat d'un changement dans le mode de transfert de chaleur dans la partie inférieure de la section transversale à partir d'une convection à un mode de diffusion. Ce changement se produit en raison d'une concurrence entre les composantes axiales et transversales de la vitesse sous l'effet de la chaleur fournie par la paroi.

Hussein et al [30] ont effectué un travail expérimental sur la convection mixte laminaire hydrodynamiquement développé d'un écoulement d'air dans un conduit cylindrique horizontal. Le conduit soumis à un flux de chaleur surfacique variant de $60 W/m^2$ à $400 W/m^2$ et un nombre de Reynolds allant de 400 à 1600. Les résultats obtenus sont présenté sous forme d'une distribution de la température de la surface externe du conduit et la variation du nombre de Nusselt local et moyen avec la distance axiale Z^*. Ils ont montré aussi que pour une section donnée, lorsque le flux de chaleur augmente, ce dernier est suivi par une augmentation du nombre de Nusselt. Ils ont conclu que les faibles nombre de Reynolds diminuent le transfert de chaleur. Les valeurs de Nusselt moyen sont corrélées dans une équation empirique en fonction des deux nombres de Rayleigh et de Reynolds, comme suit : $Nu_m = 3.1894 \left(Ra/\mathrm{Re}\right)^{0.2635}$

Dans le travail expérimental de **Morcos et Bergles [31]**, les auteurs étudient la convection mixte dans deux tubes différents, en acier et en verre. Les fluides utilisés sont l'eau et le glycol d'éthylène. Le chauffage du fluide est assuré par un fil électrique enroulé sur la paroi extérieure et parcouru par un courant alternatif. L'ensemble tube-fil électrique est isolé thermiquement avec de la fibre de verre permettant ainsi d'approximer la condition de flux uniforme. Les résultats obtenus montrent que le nombre de Nusselt moyen ne dépend pas seulement des nombres de Grashof et de Prandtl mais aussi du matériau et de l'épaisseur de la conduite. Les effets de l'épaisseur de la paroi et du nombre de Prandtl deviennent importants en augmentant le flux imposé.

D'autres études expérimentales concernant le problème de la convection mixte dans les conduits cylindriques peuvent être consultées dans les références **[32-41]**.

1.3 Convection mixte dans les espaces annulaires

L'objectif de la plupart des travaux concernant le transfert de chaleur dans les espaces annulaires, c'est d'augmenter la surface d'échange entre le fluide et les parois des conduits. Dans les espaces annulaires entre deux cylindres concentriques, plusieurs cas sont étudiés, la majorité de ces études supposent que la paroi de l'un des deux cylindres est adiabatique, tandis que l'autre est soumise à un flux de chaleur. L'uniformité et la manière d'application de ce flux varie d'un travail à l'autre.

1.3.1 Études théoriques et numériques

Mojtabi et Calatagirone [42] ont étudié l'effet du nombre de Rayleigh et l'angle d'inclinaison sur la convection mixte entre deux cylindres concentriques d'un écoulement laminaire développé. Le cylindre intérieur de rayon r_i est maintenu à une température constante T_i ; le cylindre extérieure de rayon r_e maintenu à une température $T_e < T_i$. Trois hypothèses sont considérées : une dissipation visqueuse négligeable, propriétés physiques du fluide thermo-indépendant et un gradient de pression axial constant. Le nombre de Prandtl est celui de l'air est égal à 0.7, le rapport des deux rayons $r_e/r_i = 2$. Les résultats obtenus sont présentés sous forme d'une comparaison graphique de l'écoulement axial entre la convection mixte et la convection forcée. Pour des faibles nombres de Rayleigh, le champ de l'écoulement axial pour la convection mixte est confondu avec celui de l'écoulement forcé, lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté, l'effet de l'écoulement secondaire sur l'écoulement axial devient de plus en plus intense. Ce qui concerne l'angle d'inclinaison, les auteurs ont montré que la position horizontale du système est la plus idéale pour avoir le maximum du transfert de chaleur.

Une étude numérique bidimensionnelle sur la convection naturelle laminaire et turbulente entre deux cylindres concentriques horizontaux est réalisée par **Farouk et Guceri [43]**, les deux cylindres ont des températures constantes différentes et un rapport de diamètre égale à 2.6. Les résultats du cas laminaire sont obtenus pour un nombre de Rayleigh égale 10^5, pour le cas turbulent le nombre de Rayleigh est entre 10^6 et 10^7. Le modèle de turbulence ε,k est appliqué pour obtenir des résultats. La comparais des résultats à donnée un bon accord avec ceux obtenus expérimentalement par **Kuehn et Goldstein [56].**

Le problème de la convection mixte entre deux cylindres concentriques horizontaux est traité numériquement par **Kotake et Hatorry [44]**. Deux cas des conditions aux limites thermiques sont considérés, flux thermique constant et température pariétale constante, ce qui conduisent à une différence considérable dans le comportement de l'écoulement. Les équations différentielles régissantes sont résolues par la méthode des différences finis. Les champs de température et de vitesse sont présentés sous forme des graphes. Les résultats numériques du nombre de Nusselt moyen sont comparés avec ceux obtenus expérimentalement par **[56]** qui seront discutés plus tard. Cette comparaison a donné un bon accord entre les deux résultats.

Dans le travail de **Nguyen et al. [45]**, une étude théorique de la convection mixte de l'eau entre deux cylindres concentriques horizontaux est présentée, les surfaces du système sont considérées isothermes et le gradient de pression le long de l'écoulement et constant. Le système d'équation régissant est résolu par la méthode des perturbations ainsi qu'un modèle des différences finies. Les résultats sont obtenus pour une température de l'eau entre 0 et 150°C, cet intervalle de température correspond à un nombre de Prandtl entre 14 et 1. Les auteurs ont montré que l'écoulement axial est influencé par la convection naturelle, ce qui change la forme axisymétrique des champs de vitesse et de température. L'effet du nombre de Prandtl sur l'écoulement axial est présenté pour le cas du $Ra=10^4$ et un rapport de rayon $R_e/R_i=2$. Les résultats obtenus montrent que l'augmentation du nombre de Prandtl rend les champs de la vitesse axiale proche à celle de la convection forcée. Un bon accord est obtenu avec des résultats numériques et expérimentaux existants.

Nazrul et al. [46] ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte laminaire dans un espace annulaire horizontale entre deux cylindres concentriques. Les fluides utilisés sont l'air et l'eau. Le transfert convectif dans la zone d'entrée été la première partie de ce travail. Les conditions aux limites thermiques sont : flux de chaleur uniforme à la paroi intérieure et une paroi externe adiabatique. La procédure numérique de base utilisée est l'algorithme SIMPLER. La méthode numérique utilisée est la méthode des différences finies. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement secondaire est plus intense dans la partie supérieure de la section transversale. Le nombre de Nusselt à la fin de la zone d'entrée est environ 30% plus élevé que celui de la convection forcée pure pour un rapport de rayon =1,5 et 110% plus élevé que celui de la convection forcée pour un rapport de rayon =10. Dans ce travail les résultats obtenus sont validé par les résultats numériques de **Carlo et Guidice. [47]** et les résultats expérimentaux discutés par **Nazrul et al. [48]**.

L'effet de la viscosité dynamique sur la convection mixte entre deux cylindres concentriques horizontaux est numériquement étudié par **Nouar [49]**. Le cylindre intérieur et le cylindre extérieur sont soumis à un flux de chaleur constante. A l'entrée de l'espace annulaire, l'écoulement est pleinement développé et le profil de température est uniforme, l'hypothèse de Boussinesq est adoptée. Les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie sont résolues numériquement par la méthode des différences finies. Près de la section d'entrée, la convection forcée est le mécanisme dominant. Ensuite, le fluide se réchauffe et l'effet de la convection mixte devient plus important. Le fluide près des parois est plus chaud, et donc plus léger que le fluide dans la partie centrale de l'espace annulaire, il coule donc vers le haut le long des parois. Une continuité nécessite un descendant du fluide relativement lourd entre les deux cylindres, cet écoulement secondaire modifie la structure des champs dynamiques et thermiques. Les résultats obtenus montrent que la diminution de la viscosité du fluide provoque une augmentation de la vitesse axiale dans la partie supérieure de l'espace annulaire et augmente l'intensité des l'écoulement secondaire et réduit l'écart de la température entre le haut et le bas de l'espace annulaire, ce qui permis d'augmenter le nombre de Nusselt moyen.

La convection mixte laminaire d'un fluide totalement développé entre deux cylindres concentriques horizontaux est étudiée numériquement par **Habib et al. [50]** pour le cas d'un flux circonférentiel non uniforme. Deux cas pour les conditions aux limites sont étudiés:

1- La partie supérieure du cylindre interne est adiabatique, la partie inférieure est soumise à un flux de chaleur constant.

2- La moitié adiabatique et la partie soumise à un flux constant sont inversées.

Les résultats obtenus montre que : pour le premier cas, Lorsque la chaleur est ajoutée le long de la moitié inférieure du cylindre interne alors que la moitié supérieure est adiabatique, l'écoulement secondaire est très important, il donne lieu à une augmentation significative du nombre de Nusselt moyen par rapport à celle du deuxième cas lorsque la chaleur est ajoutée à la moitié supérieure. Car dans ce dernier cas, l'écoulement secondaire aura lieu seulement dans la partie supérieure de l'espace annulaire.

Le transfert de chaleur par convection mixte laminaire entre deux cylindres horizontaux isothermes est étudié par **Teamah et al. [51]**. Le cylindre intérieur à une température uniforme T_i tandis que le cylindre extérieur est tournant avec une vitesse angulaire constante et à une température $T_e<T_i$. Cette étude couvre une larges gammes de nombre de Rayleigh de 10^3 à 10^6, Reynolds, de 0 à 2000, Prantdl 0,01 à 10, et $r_i/(r_o- r_i)$ de 0.25 à 2.5. Les résultats obtenus montrent que pour des faibles nombres de Prandtl, l'effet d'augmentation du nombre de Reynolds sur le nombre de Nusselt moyen est négligeable. Lorsque la convection naturelle est dominante, le nombre de Nusselt moyen prend une

valeur constante pour une augmentation des nombres de Prandtl et de Reynolds. Le nombre de Nusselt moyen à l'interface solide-fluide du cylindre interne est bien corrélé avec les nombres de Prandtl, Rayleigh et Reynolds par la corrélation : $Nu_m = 0.166 \quad Ra^{0.336} \quad \Pr^{-0.008} \quad \mathrm{Re}^{-1263}$ .Une comparaison est faite avec des études précédentes. La comparaison montre un bon accord avec les résultats publiés.

Dans son mémoire de magistère **Hariz [52]** a étudié numériquement la convection forcée et mixte dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques horizontaux. Le tube extérieur est soumis à un flux de chaleur pariétal constant tandis que l'intérieur est adiabatique. Les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie avec les conditions initiale et aux limites appropriées sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre. Les résultats sont obtenus pour un écoulement d'air dont le nombre de Prandtl est fixé à 0.7, un nombre de Reynolds égale à 50 et une longueur du conduit égale à 10 fois le diamètre hydraulique. Le nombre de Grashof varie de 0 à 2.5 10^4. Les résultats obtenus montrent que la convection mixte est caractérisée par l'apparition d'écoulements secondaires formés par quatre cellules contrarotatives symétriques par rapport au diamètre vertical, l'augmentation du nombre de Grashof empêche une amélioration progressive du transfert thermique traduit par l'augmentation remarquable du nombre de Nusselt axial.

Dans une analyse numérique, **Padilla et al. [53]** ont étudié l'effet du nombre de Rayleigh sur la convection naturelle de l'air entre deux cylindres concentriques. Le cylindre externe a une température uniforme égale à T_o, tandis que celle du cylindre interne est égale à $T_i > T_o$. Les équations modélisantes sont résolues par la méthode des volumes finis avec une discrétisation spatio-temporelle de second ordre. Le nombre de Rayleigh varie de 10^2 à 10^5, le rapport des rayons est testé pour deux géométrie : 2 et 2.6. Les résultats obtenus montrent que pour des faibles nombre de Rayleigh ($Ra=10^2$), le processus du transfert de chaleur dans l'espace annulaire est principalement dû à la conduction thermique, dans ce cas les isothermes sont des cercles concentriques. Pour des nombres de Rayleigh relativement élevé ($Ra=10^2$), le processus convectif devient le mode dominant sur le transfert de chaleur. Les variations du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh sont comparaient avec des résultats expérimentaux **[56]** pour le cas d'un rapport de rayon égale à 2.6, cette comparaison à donné un bon accord entre les deux résultats.

Les travaux concernant le transfert de chaleur dans les espaces annulaires avec des conditions aux limites appliquées à la surface externe (problème conjugué), sont beaucoup moins nombreux que ceux des conditions aux limites appliquées directement à l'interface solide-fluide. Parmi ces travaux nous citons l'étude de **Touahri et Boufendi [54, 55]**, il s'agit d'une étude numérique de la convection mixte laminaire de l'eau distillée entre deux cylindres concentriques, La convection thermique dans le domaine fluide est conjuguée à une conduction thermique dans les parois des cylindres. Les propriétés physiques du fluide sont thermo-dépendantes et les pertes thermiques vers le milieu externe sont prises en compte. A l'entrée de l'espace annulaire, le fluide a une température uniforme égale à 15°C, le nombre de Reynolds est fixé à 399.02, le nombre de Prandtl égale à 8.082, le rapport des deux rayons D_e/D_i=1.92. Les équations modélisantes sont numériquement résolues par la méthode des volumes finis avec une discrétisation spatiotemporelle du second ordre. Les résultats obtenus montrent l'aspect tridimensionnel des champs thermiques et dynamiques avec des variations considérables de la viscosité et des variations modérées de la conductivité thermique du fluide. Le nombre de Nusselt de la convection mixte devient plus important que celui de la convection forcée lorsque le nombre de Grashof est augmenté. Les résultats à l'interface solide-fluide du cylindre externe montrent clairement les variations azimutales et axiales du flux de chaleur local et du nombre de Nusselt local. Avec les conditions et les paramètres de cette étude, le nombre de Nusselt moyen est bien corrélé avec le nombre de Richardson par la corrélation suivante : $Nu_m = 12.8678 \quad Ri^{0.1426}$.

1.3.2 Études expérimentales

En 1976, **Kuehn et Goldstein [56]** Ont étudié expérimentalement et numériquement la convection naturelle entre deux cylindres concentriques horizontaux en cuivre ayant un rapport de diamètre (De/Di) égale à 2.6, les fluides utilisés sont l'air et l'eau. Les enregistrements des températures de l'appareil expérimental ont été faits par un interféromètre. Numériquement, les équations modélisantes sont résolues par la méthode des différences finies. L'étude est faite pour un nombre de Rayleigh entre $2.11 \cdot 10^4$ et $9.56 \cdot 10^5$ pour le cas expérimentale et entre 10^2 et $7 \cdot 10^4$ pour le cas numérique. La figure 1.1 montre une comparaison du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques.

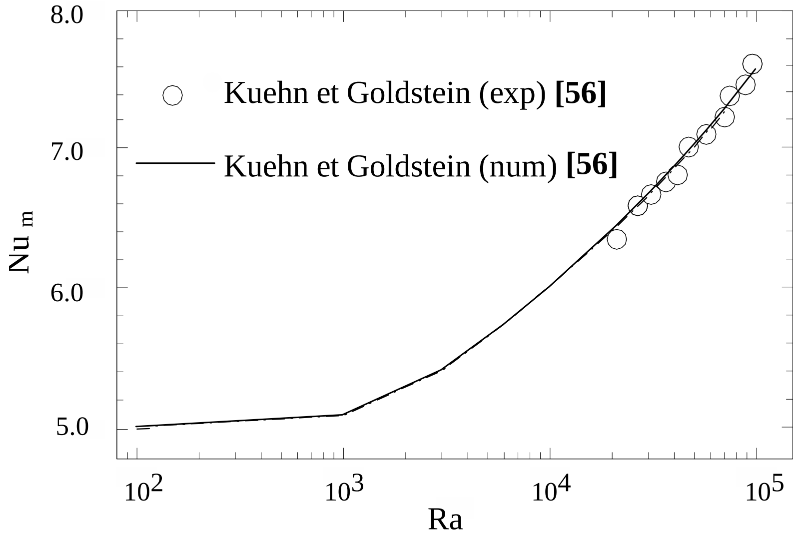


Figure 1.1 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats numérique du nombre de Nusselt moyen en fonction de nombre de Rayleigh de la référence **[56].**

En 1978, un travail complémentaire de **Kuehn et Goldstein [57]** qui traite expérimentalement le même problème précédent, mais cette fois avec un nombre de Rayleigh allant jusqu'au 10^7. Les résultats de cette étude expérimentale ont été les données de validation de plusieurs travaux. Parmi les études qui ont validé leurs résultats par **[57]**, on note celle de **Farouk et Guceri [43]**, les travaux numériques de **Prusa et Yao [58]**, **Yoo [59], Mahony et al. [60]** et **Sherbiny et Moussa [61]**.

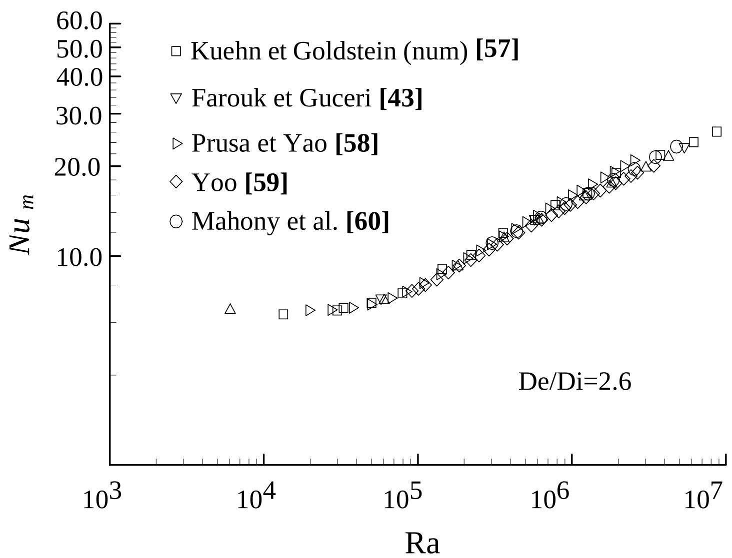


Figure 1.2 : Validation des différent résultats numérique par les résultats expérimentaux de la référence **[57]**.

Dans la figure1.2, nous présentons une comparaison de la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh des différents travaux précédents.

Hatorry et Kotake [62] ont fait une investigation expérimentale du transfert de chaleur par convection mixte pour un écoulement laminaire développé dans des tubes circulaires et dans des espaces annulaires. Leurs résultats ont permis d'obtenir une première corrélation du nombre de Nusselt valable pour les conduis cylindrique simple et les espaces annulaires lorsque le cylindre interne est isolé : $Nu_e = 0.38\ Gr^{0.20}\ \Pr^{0.28}$. Une deuxième corrélation valable pour les espaces annulaires lorsque le cylindres externe est isolé : $Nu_i = 0.44\ Gr^{0.20}\ \Pr^{0.28}\ (d_2/d_1)^{0.35}$.

Dans un travail expérimental de **Mohammed et al. [63]**, la convection mixte laminaire thermiquement développé est étudiée pour un écoulement d'aire entre deux cylindres concentrique en acier. Un chauffage volumétrique est appliqué seulement dans la région d'entrée de l'espace annulaire où le cylindre interne est soumis à un flux de chaleur constant, tandis que le cylindre externe est adiabatique. Deux cas sont étudiés : une zone d'entrée avec une longueur égale à 540 mm et 2520 mm, le rapport des rayons est égal à 2. La variation du nombre de Reynolds est entre 200 et 1000, tandis que le nombre de Grashof varie de 6.2 10^5 et 1.2 10^7.

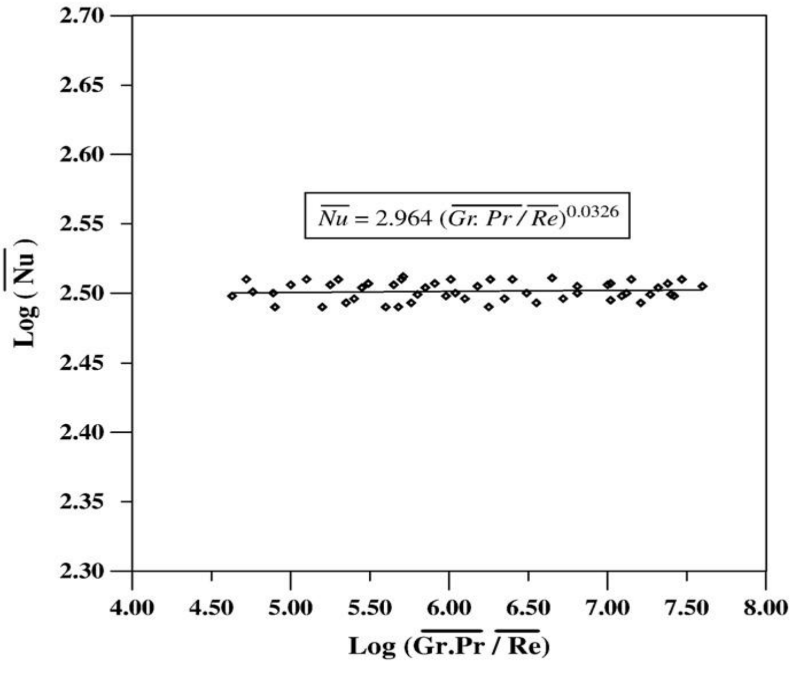


Figure 1.3 : Corrélation du nombre de Nusselt moyen en fonction de des nombres adimensionnels Gr, Pr et Re, prise de la référence **[63]**

La figure 1.3 montre que le nombre de Nusselt moyen peut être en fonction des différents nombres adimensionnels (Gr, Pr et Re) sous la corrélation suivante : $Nu_m = 2.964 \quad (Gr \ \ Pr \ \ / \ Re)^{0.0326}$ avec une erreur relative de ±10%.

Le processus du transfert chaleur dans une région thermiquement développé entre deux cylindres concentriques est étudié expérimentalement par **Mohammed et Jadoaa [64]**, le tube interne est adiabatique tandis que cylindre externe est uniformément chauffé, le fluide utilisé est l'air. Trois longueurs de la section d'entrée ont été utilisées pour atteindre un écoulement pleinement développé : L/D_h= 50, 75 et 100. Le nombre de Reynolds varie de 450 à 2000, le nombre de Richardson de 01 à 0.7. La figure 1.4 présente un diagramme de l'expérience.

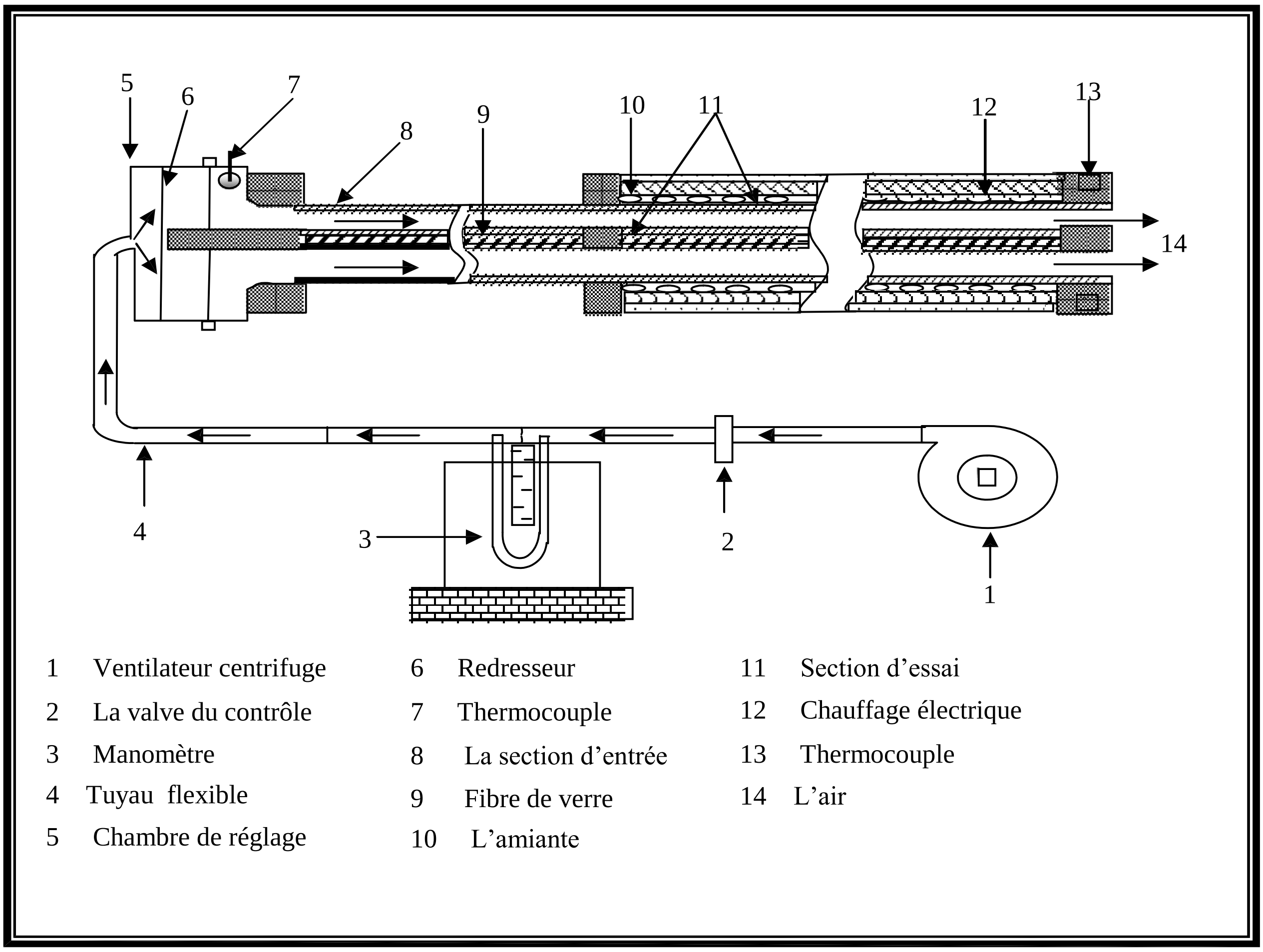


Figure 1.4 : Diagramme de l'expérience **[64].**

Les résultats obtenus montrent que le transfert de chaleur dans la partie inferieur de l'espace annulaire est très élevé que celui dans la partie supérieur, l'intensité des vortex augmente avec l'augmentation des nombres de Reynolds et de Rayleigh. Une corrélation empirique pour le nombre de Nusselt moyen en fonction des nombres de Reynolds et de Rayleigh et L/D_h est présentée dans la figure 1.5.

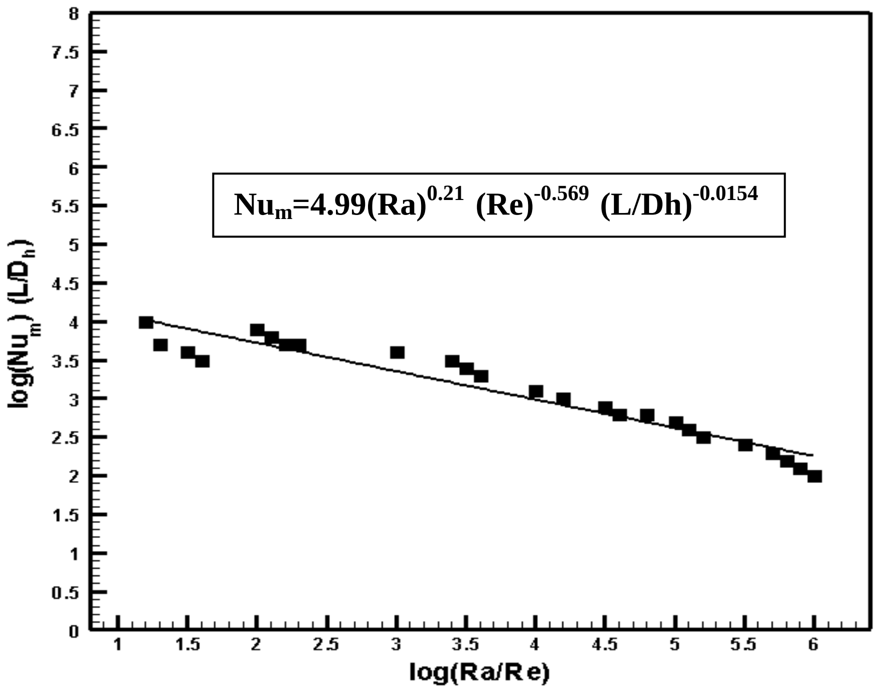


Figure 1.5 : Corrélation empirique du Nusselt moyen, **[64].**

1.4 Convection dans les conduits avec ailettes

Dans les études rencontrées dans la littérature concernant les conduits avec ailettes, nous trouvons deux modèles d'emplacement des ailettes : un emplacement interne valable en générale lorsque le fluide dans les conduits absorbe la chaleur et un emplacement externe des ailettes valable lorsque le fluide dans les conduits dégage la chaleur vers un autre fluide externe. Dans la figure 1.6, **Lienhard et al [65]** ont présenté des différents modèles des conduits avec ailettes.

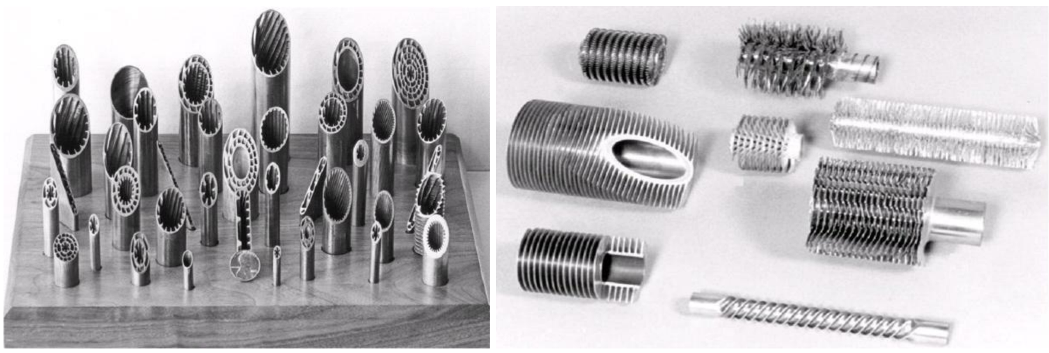


Figure 1.6 : Quelques-unes des nombreuses variétés des conduits à ailettes **[65]**.

1.4.1 Études théoriques et numériques

Dans la thèse de doctorat de **Ouzzane [66]**, l'auteur a étudié numériquement le transfert thermique par convection mixte d'un écoulement développé, laminaire en régime permanent à l'intérieur d'une conduite cylindriques horizontale ou incliné avec un flux de chaleur non uniforme sur sa surface externe, deux cas sont étudiés : avec et sans ailettes longitudinales. Les équations différentielles ont été intégrées et discrétisées selon l'approche des volumes finis. Les résultats obtenus montrent que dans le cas d'une conduite munie de deux ailettes, la valeur asymptotique du nombre de Nusselt a augmenté de 37% par rapport à une conduite sans ailettes. Dans une conduite munie de huit ailettes longitudinales externe, l'ailette située en haut évacue approximativement deux fois plus de chaleur que celle située en bas de la section, dans ce cas une conduite ailettée de 0.848 mètres de longueur évacue la même quantité d'énergie qu'une conduite lisse (sans ailettes) ayant une longueur de 2.139 mètres. L'auteur a étudié aussi l'effet de la conduction pariétale sur les évolutions des champs thermique et hydrodynamique. Il trouve que dans le cas des matériaux ayant une bonne conductivité thermique, la température de l'interface solide-fluide a tendance à s'uniformiser. Cependant un écart de température relativement important entre le haut et le bas dans le cas d'un matériel à faible conductivité thermique. Dans le cas d'un conduit horizontal ou incliné, pour l'amélioration de l'échange thermique, l'auteur recommande de placer plus d'ailettes sur la partie supérieure de la section dans le cas de refroidissement et sur la partie inférieure dans le cas du réchauffement.

Ouzzane et Galanis [67] ont poursuivi leur travail par une étude numérique sur l'analyse détaillée de la convection mixte laminaire dans la région d'entrée d'un tube incliné avec des ailettes longitudinales extérieures (correspondant à l'élément de base d'un collecteur plat solaire). Le système est soumis à un flux solaire uniforme la surface inférieure du système est isolée. Les résultats montrent que le flux secondaire induit par la flottabilité a un effet très significatif sur le flux axial et sur les isothermes à la fois dans le liquide et le solide. D'autre part, due à la conduction circonférentielle dans la paroi du tube, la chaleur atteignant le fluide à partir de la moitié inférieure de l'interface du fluide-solide est plus importante que celle de la moitié supérieure. Le nombre de Nusselt axial diminue avec la distance axiale à partir de l'entrée du tube vers une valeur constante dans la région pleinement développée, cette valeur constante est considérablement plus élevée pour le tube à ailettes que celle d'un tube lisse. Ces deux valeurs sont significativement plus élevées que celui pour convection forcée pleinement développé.

La convection mixte laminaire dans une conduite horizontale intérieurement ailetté est étudiée numériquement par **Rustum et Soliman [68]** pour un flux de chaleur et une température circonférentiellement uniformes. Le nombre de Grashof varie de 0 à $2 \cdot 10^6$, le nombre de Prandtl est *fixé à 7*, le nombre d'ailettes M égale à 4 et 16, la hauteur relative de l'ailette H = 0, 0.2, 0.5 et 0.8. Les résultats obtenus montrent que la géométrie du tube (M et H) a une grande influence sur l'intensité de l'écoulement secondaire qui est à son tour réfléchi sur l'écoulement axial, le champ de température et surtout sur le nombre de Nusselt. En général pour chaque nombre de Grashof, l'augmentation de M et N freine l'écoulement secondaire dans les baies formées par les ailettes. Une comparaison des résultats avec une étude expérimentale **[69]** pour M=16, H=0.318 et M=10, H=0.325. Dans les deux cas, la comparaison est faite sur le nombre de Nusselt, la différence relative entre l'étude numérique et l'expérience est entre 10 et 15%.

Dans les travaux numériques de **Benkhedda** et **Boufendi [70] et Benkhedda [71]**, les auteurs ont étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte dans un espace annulaire dont le cylindre interne subit un flux de chaleur surfacique constant au niveau de sa paroi interne, tandis que le cylindre externe est muni d'ailettes longitudinales sur la paroi interne et adiabatique au niveau de la paroi extérieur. Les équations de conservation de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie avec les conditions initiale et aux limites appropriées sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Plusieurs configurations d'ailettes ont été traitées : deux ailettes horizontales, deux ailettes verticales, quatre et huit ailettes. Pour chaque cas, le mode de convection forcée est le cas de référence, ainsi que les cas de convection mixte obtenue pour un nombre de Grashof (Gr=2500) et différents nombres de Reynolds Re=50 et 100, ont été explorés.

Dans une étude de **Yucel et Dinler [72]**, l'effet des ailettes transversal attachées à l'intérieur d'une conduite cylindrique verticale (effet du nombre+hauteur des ailettes) est étudié numériquement. Les simulations sont réalisées pour quatre fluides différents et pour un écoulement laminaire et turbulent. Les résultats sont présentés sous forme des graphes, dans le cas d'un écoulement laminaire, l'augmentation des nombres d'ailettes est suivie par une augmentation de coefficient de frottement et une diminution du nombre de Nusselt moyen. Pour le cas d'un écoulement turbulent, l'augmentation des nombres d'ailettes est suivie par une augmentation de coefficient de frottement et du nombre de Nusselt moyen au même temps. D'une autre part, l'augmentant de la hauteur de l'ailette augmente coefficient de frottement pour tous les nombres de Reynolds considérés.

Un travail numérique a été mené par **Andrew et al. [73]** pour étudier l'écoulement du fluide et les caractéristiques de transfert de chaleur d'un micro-canal carré avec quatre ailettes longitudinales internes. La simulation numérique est effectuée pour trois conditions : un écoulement laminaire hydrodynamiquement et thermiquement développement, un rapport de la hauteur d'ailette (H/R) variable et des différents flux de chaleur sur la surface externe du micro-canal. Le problème est traité pour H/R=0 (sans ailettes), 0.3, 0.5 et 0.8. Les résultats concernant le nombre de Nusselt locale le long du canal sont présentés graphiquement en fonction du rapport de la hauteur d'ailette, les auteurs ont montré aussi qu'il y a une hauteur d'ailette optimal pour la quelle le transfert de chaleur est idéal, cette valeur est égale 0.67.

Ozceyhan et al. [74] ont réalisés une étude numérique concernant l'amélioration du transfert de chaleur dans un tube avec des ailettes transversales sous forme des bagues ayant une coupe circulaire attachées à la paroi du tube. Cinq différents espacements entre les anneaux ont été considérés P = d / 2, d, 3d / 2, 2d et 3d. Un flux de chaleur uniforme est appliqué à la surface externe du tube, l'air est sélectionné comme fluide de travail. Le nombre de Reynolds vari de 4475 à 43725. Les résultats obtenus pour un tube sans ailettes sont comparés avec ceux des études dans la littérature pour valider le code de calcul, les auteurs ont montré que pour tous les cas étudiés le nombre de Nusselt augmente et le coefficient de frottement diminue avec l'augmentation du nombre de Reynolds, pour le cas de P = d / 2, le frottement du fluide domine le transfert de chaleur, donc l'utilisation de ces anneaux, avec un espacement de d / 2 n'est pas thermodynamiquement avantageux sur la base de l'amélioration de transfert de chaleur, la meilleure amélioration globale de 18% a été atteint pour Re = 15600 dans laquelle l'espacement entre les anneaux est 3d.

L'influence des ailettes internes sur la convection mixte dans la région complètement développée de tubes horizontaux est étudiée par **Farinas et al. [75].** Les auteurs ont étudié et numériquement la convection mixte laminaire dans un espace annulaire avec ailettes internes pour deux, quatre et seize ailettes. La paroi intérieure chaude et la paroi extérieure froide, et pour des nombres du Grashof variant de 10^2 à 10^4.

Les équations de conservation sont résolues par la méthode des différences finies. Les résultats sont présentés pour l'air (Pr = 0.7) avec des nombres de Rayleigh variant de10^3 à 10^6 pour différentes configurations d'ailettes (fine, arrondie ou divergente) et différentes longueurs d'ailettes (L = 0.25, 0,5 et 0,75). Les résultats sont illustrés sous forme des graphes des isothermes, de champs de vitesse, des nombres de Nusselt. Le transfert de chaleur est amélioré pour une configuration arrondie de l'ailette.

Shome [76] a présenté des travaux sur la convection mixte dans une conduite horizontale munie d'ailettes trapézoïdales le long le l'axe de l'écoulement avec variation du nombre de Prandtl. L'écoulement est en développement thermique et hydrodynamique. L'auteur a utilisé un modèle parabolique étant donné que la diffusion axiale de chaleur et de quantité du mouvement a été négligée. Il a été constaté qu'il n'est pas avantageux d'augmenter ni le nombre ni la hauteur des ailettes au-delà de certaines valeurs, car ceci réduit considérablement le coefficient d'échange thermique étant donné que la vitesse de l'écoulement devient faible.

D'une autre part, plusieurs auteurs ont jette la lumière sur l'effet des ailettes dans les conduits sur la convection libre ou forcé, parmi ces travaux nous citons les études numériques de **Mir et al. [77], Ha et Kim [78], Yang et al. [79], Rahnama et Farhadi [80], Kiwan et Zeitoun [81],** dans ces travaux l'objectif c'est la recherche de trouver le nombre et l'emplacement idéal pour l'amélioration du transfert thermique en tenant compte des pertes de charge.

1.4.2 Études expérimentales

Les travaux expérimentaux concernant les conduits à ailettes sont très nombreux à cause de la grande utilisation de ces derniers dans les différentes applications industrielles.

Dans un travail expérimental, **Barozzi et coll [82]** ont étudié les effets de l'inclinaison, du nombre de Reynolds et de l'intensité du chauffage sur l'évolution du nombre de Nusselt le long d'une conduite inclinée munie de deux ailettes longitudinales. Les conditions aux limites thermiques sont : un flux uniforme suivant la direction axiale et une température constante suivant la direction circonférentiel, ceci a été réalisé par l'insertion des fils résistants en Ni-Cr parallèlement dans les ailettes et les tubes. L'utilisation du cuivre comme matériel des tubes et des ailettes permet d'uniformiser la température à l'interface solide-fluide. Les auteurs ont montré que l'influence de l'inclinaison sur le flux thermique transféré au fluide est très faible. Le nombre de Nusselt moyen est très important prés de l'entrée de la conduite, puis diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne jusqu'à un minimum puis augmente pour atteindre une valeur constante dans la zone complètement développée.

Mafizul et al. [83], ont fait une étude expérimentale sur le transfert de chaleur et l'écoulement d'un fluide turbulent dans un tube à ailettes internes. Les ailettes sont attachées avec le tube par l'aluminium pour éviter toute résistance thermique de contact. La longueur de la section d'essai est de 15,2 m. Le diamètre intérieur du tube est de 70 mm. Le tube contient six ailettes longitudinales identiques de 15 mm de hauteur. L'air est utilisé comme fluide de travail dans toutes les expériences. Le nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique varie de $2{,}6 \cdot 10^4$ à $7{,}9 \cdot 10^4$. La chaleur est fournie à partir un système de chauffage électrique fournissant un flux de chaleur uniforme sur toute la surface externe du tube. Les résultats montrent qu'il y a des gradients de pression et des coefficients de transfert de chaleur élevés dans la région d'entrée. Se rapprochant de la zone pleinement développée loin de la section d'entrée, la comparaison des nombres de Nusselt des tubes ailettés avec les tubes sans ailettes (lisse) pour un nombre de Reynolds constant et une puissance de pompage constante montre que le transfert de chaleur dans le premier cas est très important sur toute la gamme de débit étudié dans cette expérience. D'une autre part les valeurs du coefficient de transfert de chaleur dans le cas des tubes ailettés dépassé celles des tubes sans ailettes par 112%. Toujours pour une puissance de pompage constante, l'amélioration du taux de transfert de chaleur global atteint une valeur de 52%. Les résultats de cette étude indiquent aussi que l'amélioration significative du transfert de chaleur est possible en utilisant des ailettes internes sans ajouter une puissance de pompage supplémentaire.

Rustum et Soliman [84] ont réalisées des expériences pour étudier la chute de pression et les caractéristiques de transfert de chaleur pour un écoulement laminaire dans un tube lisse et quatre tubes avec ailettes longitudinales interne, le bute c'est de voir la différence entre résultats expérimentaux et les travaux analytiques. Les quantités mesurées sont le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt local pleinement développé. De bons accords ont été obtenus entre les résultats des coefficients de frottement et des prévisions analytiques précédentes, et entre les résultats de nombre Nusselt pour le tube lisse et des expériences précédentes. Dans le cas de la convection libre il y a une forte influence des ailettes sur le transfert de chaleur, elles diminuent l'intensité du courant de la convection libre et lorsque le nombre de Rayleigh diminue, les résultats se rapprochent à ceux de la convection forcée.

Une étude expérimentale a été réalisée par **Yu et al. [85]** pour déterminer le transfert thermique et les caractéristiques de chute de pression à l'entrée et loin de l'entrés (dans la région pleinement développée) d'une vague d'ailettes longitudinales attaché à l'intérieur d'un espace annulaire s'étendent sur toute sa largeur. Deux cas sont étudiés : l'un avec un tube interne bloqué (pas d'air qui le traverse) et l'autre avec un tube interne débloqué. Le tube externe est chauffé par un courant électrique passant comme il est montré dans la figure 1.7. Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds entre $9 \cdot 10^2$ et $3.5 \cdot 10^3$, dans ce domaine des corrélations pour le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt sont présentées.

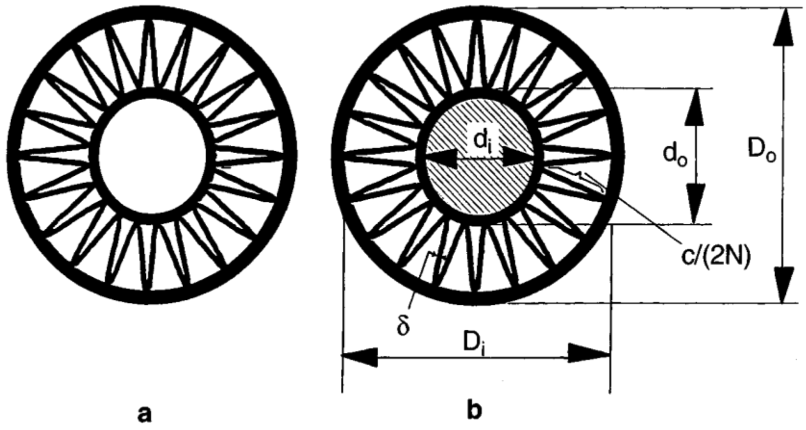


Figure 1.7 : Section axiale du système (a) débloqué (b) bloqué.

1) Cylindre intérieure débloqué : $Nu = 0.00981\ Re^{0.789}$, $f = 0.971\ Re^{0.419}$.

2) Cylindre intérieure bloqué : $Nu = 0.00668\ Re^{0.678}$, $f = 0.991\ Re^{0.407}$.

On note que la vague d'ailette améliore le transfert thermique d'une manière significative lorsque le cylindre interne est bloqué.

Kuvvet et **Yavuz [86]** ont étudié expérimentalement le transfert de chaleur et les caractéristiques d'un écoulement de fluide dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques avec et sans ailettes transversale. Le rapport des deux rayons $D_i/D_e = 0.2$, deux intervalle de nombre de Reynolds sont étudiés, le premier pour calculer le débit et la chute de pression vari de $1.8 \cdot 10^4$ à $1.24 \cdot 10^5$ et le deuxième pour calculer le transfert thermique varie de $1.65 \cdot 10^4$ à $7.65 \cdot 10^4$. L'épaisseur de l'ailette est de 2 mm, son hauteur H=2, 4, 6 et 8 mm tandis que sont la distance entre les ailettes P= 20, 30 et 40 mm. Les résultats obtenus montrent que :

- La position de la vitesse maximale dans le passage à ailettes tend vers la surface extérieure et sa distance radiale diminue avec la hauteur d'ailettes.

- Les facteurs de frottement dans la section d'essai diminuent avec P pour H = 2 mm mais ils augmentent avec P pour H = 4 mm.

- Les intensités de turbulence augmentent avec la hauteur des ailettes et diminuent avec le nombre de Reynolds. Les intensités de turbulence diminue avec P pour H = 2 mm, mais augmente avec P pour $H \geq 4$ mm.

- Dans le passage concentrique à ailettes, le transfert de chaleur maximale se produit sur la partie supérieure de l'ailette et le transfert de chaleur minimale se produit à l'arrière de l'ailette.

1.5 Conclusion

A travers cette étude bibliographique, on peut diviser les travaux qui traitent la convection mixte dans les conduits en trois parties :

- La littérature concernant la convection mixte dans les conduits cylindriques simples, dans laquelle on trouve de nombreux travaux numériques et expérimentaux où les auteurs réalisent des études particulières ou bien ils donnent certaines corrélations valables pour d'autres cas similaires dans un intervalle limité des nombres adimensionnels. On note que contrairement aux anciens travaux qui supposent que les conditions aux limites sont appliquées directement sur l'interface solide-fluide, La plupart des travaux récents tiennent compte de la conduction dans les parois des conduits.
- Dans les études numériques de la convection mixte dans les espaces annulaires nous trouvons que la région d'entrée des conduits annulaires prend un grand cercle des travaux réalisés, car dans cette région il y a une variation rapide dans les champs dynamiques et thermique, d'ailleurs dans cette partie la plupart des courbes en fonction de Z sont présentées sur l'échelle logarithmique. Par contre dans les études expérimentales

nous trouvons en générale les appareillages des mesures sont placées dans la région thermiquement et hydrodynamiquement développé. Les nombre adimensionnels de Re, Pr, Gr, Ra, Le rapport des diamètres (De/Di) et les conditions aux limites thermiques et dynamique sont en générale les paramètres de contrôle changés d'un travail à l'autre. Dans cette partie, on note le manque dans les travaux qui considèrent la conduction thermique dans les parois des conduits (le problème conjuguée).

- L'insertion des ailettes dans les conduits nous plonge dans le monde des échangeurs de chaleurs, à cet effet plusieurs études numériques et expérimentales ont été réalisées. Les problèmes rencontrés dans la littérature c'est la géométrie et l'emplacement des ailettes. Si l'emplacement des ailettes est à l'intérieure des conduits, l'objectif d'une grande partie des auteurs c'est de trouver le cas idéal entre le gain dans le transfert de chaleur et les pertes de charge qui coute plus d'énergie de pompage et. Si l'emplacement des ailettes est à l'extérieure des conduits où elles transfèrent la chaleur vers un autre fluide (en générale c'est l'air), dans se cas il n y a pas des pertes de charge et on trouve dans une petite zone un grand nombre d'ailettes qui sont attachées aux conduits. Dans cette partie, malgré la richesse dans la bibliographie nous trouvons que les ailettes jouent leur rôle traditionnel c'est d'augmenter la surface d'échange pour améliorer le transfert de chaleur et on n'a pas trouvé des études dans les qu'elles l'ailette elle-même génère la chaleur.

1.6 Objectif de notre travail

L'objectif du présent travail consiste à étudier le transfert thermique en mode de convection mixte combinée aux écoulements de fluide dans les conduits cylindriques horizontaux parcourus par un fluide newtonien et incompressible à propriétés physiques dépendantes de la température. Selon la géométrie du problème cette étude se compose de trois parties. La première, concerne un cylindre plein avec une épaisseur finie de sa paroi. La deuxième partie, un espace annulaire entre deux cylindres concentriques et horizontaux. La troisième partie traitera les conduits munis d'ailettes. Pour ces trois cas les conditions thermiques sont les suivantes : un chauffage volumique uniforme dans toute l'épaisseur du conduit pour la première partie. La deuxième et la troisième partie, le chauffage volumique est produit seulement dans la paroi du cylindre externe. Le cylindre interne étant adiabatique. Aussi pour les trois cas la température est constante à l'entrée du conduit tandis qu'à la sortie il sera considéré que le conduit est assez long pour admettre un quasi développement. Les pertes de type radiatif et convectif vers le milieu ambiant seront prises en compte.

Parmi les parties étudiées, il y en a une qui est particulière que nous avons qualifié de nouveauté dans notre étude qui constitue l'originalité de ce travail réside dans l'introduction d'un nouveau type d'ailettes considérée comme un dispositif générateur de chaleur permettant l'augmentation du transfert de chaleur entre l'ailette et le fluide et un meilleur chauffage du fluide.

Chapitre 2

Modélisation mathématique

2.1 Introduction

Comme il a été mentionné précédemment, ce présent chapitre se compose de trois parties. Dans la première, nous présentons la géométrie et les systèmes d'équations de conservation, avec leurs conditions initiales et aux limites de la convection mixte conjuguée d'un écoulement laminaire à l'intérieur d'un conduit cylindrique horizontale. Dans la deuxième partie, la géométrie et la modélisation mathématique seront faites pour un écoulement qui aura lieu entre deux cylindres concentriques horizontaux. Dans la troisième partie, la configuration, les équations de conservation et les conditions aux limites sont présentées pour le cas d'un conduit équipé d'ailettes identiques que ce soit longitudinales ou bien transversales.

Le point commun dans ces trois parties c'est la thermo dépendance des propriétés physiques du fluide ainsi que la prise en compte simultanée du transfert thermique dans les deux milieux solide et fluide ce qui a permis de classer ce problème dans la catégorie des problèmes de transfert conjugué. Ainsi, ce sont les mêmes équations de conservation qui seront appliquées dans les trois parties avec des différentes conditions initiales et aux limites spécifiques.

2.2 Les hypothèses simplificatrices communes

Les différentes parties de notre travail ont des hypothèses de simplification communes qui sont les suivantes :

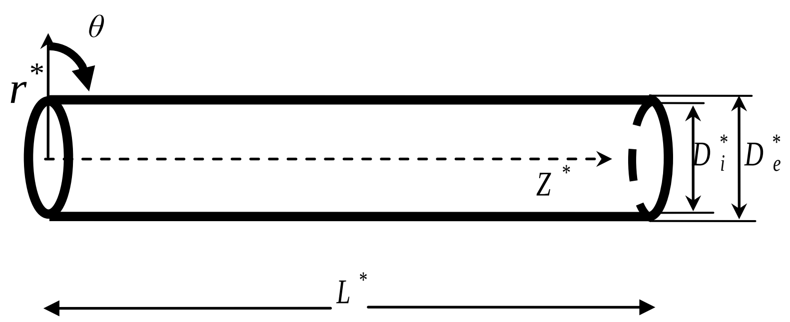
- L'écoulement est laminaire et incompressible.
- Le fluide est newtonien (l'eau distillée).
- La dissipation visqueuse dans le fluide est négligeable.
- Le rayonnement thermique à l'intérieur des conduits est négligeable.

2.3 La convection mixte à propriétés physiques variables dans un conduit horizontal

Dans cette partie on va étudier la convection mixte laminaire dans un conduit horizontal et on va la prendre comme cas de référence pour les deux autres parties (espace annulaire et conduits ailetté).

2.3.1 La géométrie du modèle

La figure 2.1 illustre la géométrie du problème étudié. Un long conduit horizontal de longueur L=1m, de diamètre intérieur D_i=0.96cm et extérieur D_e=1cm. L'épaisseur de la paroi solide est égale à 0.02cm. Le conduit est en Inconel qui est un alliage composé de 72% de Nickel, de 14-17% Chrome et de 6-10% Fer, de résistivité électrique $\rho = 0.9852 \cdot 10^{-6}$ **Ω**·m et de conductivité thermique $K_s = 20 \; W/m°K$, le tube a une résistance électrique égale à 0.16 **Ω**. Un courant électrique passant le long du conduit (dans l'épaisseur solide) produit une génération de chaleur par l'effet Joule, cette chaleur est transférée à l'écoulement de l'eau distillé dans le conduit. Des pertes de chaleurs par convection et rayonnement vers le milieu externe sont prisent en considération.



$L^* = 104.17, \; D_i^* = 1, \; D_e^* = 1.04$

Figure 2.1 : géométrie du conduit.

A l'entrée, la température du fluide est constante et égale à 15°C. Le profile de l'écoulement est de type Poiseuille avec une vitesse moyenne égale à 7.2 10^{-2} m/s, le débit massique qui correspond à cette vitesse et cette géométrie est égale à 5.212 $\cdot 10^{-6}$ m^3/s. Les nombres adimensionnels de Reynolds (Re_0=606.85) et de Prandtl (Pr_0=8.082) sont évalués à la température d'entrée du fluide.

2.3.2 Equations modélisantes

Les équations de conservations modélisantes sont celles de conservation de la masse, de conservation des trois quantités de mouvement et de conservation de l'énergie, avec leurs conditions initiales et aux limites :

A $t^* = 0$:

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = T^* = 0 \tag{2.1}$$

A $t^* > 0$:

Equation de conservation de la masse :

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0 \tag{2.2}$$

Equation de conservation de quantité de mouvement radiale :

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^* V_r^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta^* V_r^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* V_r^*\right) - \frac{V_\theta^{*2}}{r^*} = \\ -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{Gr_0^*}{\mathrm{Re}_0^2}\cos\theta\, T^* + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \tau_{rr}^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\tau_{r\theta}^*\right) - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*} + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{rz}^*\right)\right]\end{gathered} \tag{2.3}$$

Equation de conservation de quantité de mouvement angulaire :

$$\begin{gathered}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^* V_\theta^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta^* V_\theta^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* V_\theta^*\right) + \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*} = \\ -\frac{1}{r^*}\frac{\partial P^*}{\partial \theta} - \frac{Gr_0^*}{\mathrm{Re}_0^2}\sin\theta\, T^* + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^{*2}\tau_{\theta r}^*\right) + \\ \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\tau_{\theta\theta}^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{\theta z}^*\right)\end{array}\right]\end{gathered} \tag{2.4}$$

Equation de conservation de quantité de mouvement axiale :

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\ V_r^*\ V_z^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta^*\ V_z^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* V_z^*\right) = \\ -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\mathrm{Re}_0}\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\ \tau_{rz}^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\tau_{\theta z}^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{zz}^*\right)\right] \tag{2.5}$$

Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^* T^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta^* T^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* T^*\right) = \\ G^* - \frac{1}{\mathrm{Re}_0 \mathrm{Pr}_0}\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* q_r^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(q_\theta^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(q_z^*\right)\right] \tag{2.6}$$

Avec $G^* = \begin{cases} K_S^* / \left(\mathrm{Re}_0\ \mathrm{Pr}_0\right) & \textit{dans le solide} \\ 0 & \textit{dans le fluide} \end{cases}$

Les composants du tenseur des contraintes visqueuses sont :

$$\tau_{rr}^* = 2\mu^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \qquad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^*\left[r^*\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{V_\theta^*}{r^*}\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{\theta\theta}^* = 2\mu^*\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{V_r^*}{r^*}\right] \qquad \tau_{\theta z}^* = \tau_{z\theta}^* = \mu^*\left[\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial V_z^*}{\partial \theta}\right] \tag{2.7}$$

$$\tau_{zz}^* = 2\mu^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} \qquad \tau_{zr}^* = \tau_{rz}^* = \mu^*\left[\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right]$$

Les flux thermique sont :

$$q_r^* = -K^*\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\ , \qquad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial \theta^*} \qquad \textit{et} \qquad q_z^* = -K^*\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \tag{2.8}$$

Les nombres adimensionnels Re_0, Pr_0 et Gr_0 sont évalués à la température d'entrée :

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{V_0\ D_i}{\nu_0}\ , \qquad \mathrm{Pr}_0 = \frac{\nu_0}{a_0}\ , \qquad Gr_0^* = \frac{g\beta\, D_i^3\, \Delta T}{\nu_0^2} = \frac{g\beta\, D_i^3 \left(G\, D_i^2 / k_s\right)}{\nu_0^2}$$

2.3.3 Les conditions aux limites

Les équations différentielles précédentes sont résolues en appliquant les conditions aux limites suivantes :

A l'entrée du tube : $Z^* = 0$

Dans le domaine fluide : $0 \leq r^* \leq 0.5$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, le profil de l'écoulement axial est de type poiseuille

$$V_r^* = V_\theta^* = T^* = 0, \quad V_z^* = 2(1 - 4r^{*2}) \tag{2.9}$$

Dans le domaine solide : $0.5 \leq r^* \leq 0.5208$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = T^* = 0 \tag{2.10}$$

A la sortie du tube : $Z^* = 104.17$

Dans le domaine fluide : $0 \leq r^* \leq 0.5$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, le conduit est considéré assez long pour permettre une invariance axiale des composantes de vitesse et du flux thermique diffusif axial.

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right) = 0 \tag{2.11}$$

Dans le domaine solide : $0.5 \leq r^* \leq 0.5208$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right) = 0 \tag{2.12}$$

Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$ et $0 \leq Z^* \leq 104.17$

$$\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right) = 0 \tag{2.13}$$

Sur la paroi extérieure : $r^* = 0.5208$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 \leq Z^* \leq 104.17$

La condition de non-glissement est imposée tandis que la condition aux limites thermiques est de troisième type (condition de Fourier).

$$\begin{cases} V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0 \\ -K^* \dfrac{\partial T^*}{\partial r^*} = \dfrac{(h_r + h_c)D_i}{K_0} T^* \end{cases} \tag{2.14}$$

Avec :

$$h_r = \varepsilon\,\sigma\left(T^2 + T_\infty^2\right)\left(T + T_\infty\right) \tag{2.15}$$

Comme il a été mentionné précédemment, l'émissivité de la surface extérieure ε est arbitrairement choisie à 0.9, $\sigma = 5.67 \quad 10^{-8} \quad W/m^2K^4$ est la constante de Stéphane-Boltzman.

Le coefficient de transfert convectif h_c entre la paroi cylindrique externe et l'air ambiant est donné par la corrélation de **Churchill et Chu [87]** valable pour tous les nombres de Pr et de Ra dans l'intervalle $10^{-6} < Ra < 10^{9}$:

$$Nu = \left[h_c \; D_i \; / \; K_{air}\right] = \left[0.6 + \left(0.387 \; Ra^{1/6} \; / \left(1 + \left(0.559 \; / \; Pr_{air}\right)^{9/16}\right)^{8/27}\right)\right]^2 \tag{2.16}$$

Avec cette corrélation on peut déterminer un nombre de Nusselt moyen externe sur la distance du conduit.

Les nombres locaux de Rayleigh et de Prandtl sont définis par :

$$Ra = \frac{g\beta\left[T\left(R_o,\theta,z\right)\text{-}T_\infty\right]D_o^3}{\alpha_{air}\,\nu_{air}}, \quad Pr_{air} = \nu_{air} \; / \; \alpha_{air} \tag{2.17}$$

Les propriétés thermo-physiques de l'air sont évaluées à la température locale du film :

$$T_{film} = \left[T(R_o,\theta,z) + T_\infty\right]/2 \tag{2.18}$$

Les nombres de Prandtl Pr_0=8.082, de Reynolds Re_0=606.85 et les différents nombres de Grashof étudiés sont calculés avec des propriétés physiques de l'eau évaluées à la température d'entrée (T_0=15°C).

Les propriétés physiques du fluide sont thermo-dépendantes, la viscosité et la conductivité adimensionnelle de l'eau en fonction de la température adimensionnelle sont obtenues par un fitting correspond à des valeurs tabulées citées dans **Baehr et Stephan [88]**, ces fonctions sont :

$$\mu^*(T^*) = 0.23087 + 0.78727 \; \exp\left(-T^* \; / \; 0.11386\right) \tag{2.19}$$

$$K^*(T^*) = 1.00111 + 0.80477 \; T^* - 1.06002 \; T^{*2} \tag{2.20}$$

La conductivité thermique du solide est celle de l'Inconel est égale à $K_s = 20 \quad W/m\,°K$.

La conductivité thermique du fluide à l'entrée du conduit est égale à $K_0 = 0.5893 \quad W/m\,°K$.

La conductivité thermique adimensionnelle du solide est égale à $K_s^*(T^*) = K_s / K_0 = 33.94$.

La viscosité dynamique adimensionnelle du solide est infinie, égale à $\mu_s^*(T^*) = 10^{30}$, cette valeur de viscosité dans le domaine solide assure que la vitesse dans cette partie reste nulle et que le transfert de chaleur est seulement par conduction.

A cet effet, le concept utilisé dans le problème de transfert de chaleur conjugué, discuté dans **Patankar [89]**, consiste à considérer le même champ de travail pour les domaines fluide et solide. Cela est évident pour le domaine fluide, mais pour le domaine solide, nous avons considéré le solide comme un fluide de viscosité dynamique égale à 10^{30}. Cette viscosité très grande dans le domaine solide assure que la vitesse de cette partie reste nulle, et par conséquent le transfert de chaleur est seulement par conduction d'après l'équation (2.6).

2.3.4 Le nombre de Nusselt

A l'interface solide-fluide, le nombre de Nusselt local est défini par :

$$Nu\ (\theta,\ z^*) = \frac{h\ (\theta, z^*)\ D_i}{K_0} = \left[\frac{\left(K^*\ \partial T^* / \partial r^*\right)\Big|_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)}\right] \tag{2.21}$$

La température moyenne adimensionnelle $T_m^*\left(z^*\right)$ dans une section est donnée par la relation suivante :

$$T_m^*\left(z^*\right) = \frac{\int_0^{0.5}\int_0^{2\pi} V^*\left(r^*, \theta, z^*\right) T^*\left(r^*, \theta, z^*\right) r^*\ dr^*\ d\theta}{\int_0^{0.5}\int_0^{2\pi} V^*\left(r^*, \theta, z^*\right) r^*\ dr^*\ d\theta} \tag{2.22}$$

Le nombre de Nusselt local axial et moyen circonférentiel est :

$$Nu\ (z^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Nu\ (\theta, z^*)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\left(K^*\ \partial T^* / \partial r^*\right)\Big|_{r^*=0.5}}{T^*(0.5, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)}\right] d\theta \tag{2.23}$$

Enfin, on peut calculer la valeur du nombre de Nusselt moyen pour toute l'interface solide-fluide par la relation suivante :

$$Nu_m = \frac{1}{(2\pi)\ (104.17)}\int_0^{2\pi}\int_0^{104.17} Nu\,(\theta, z^*)\ \ dz^*\ \ d\theta \tag{2.24}$$

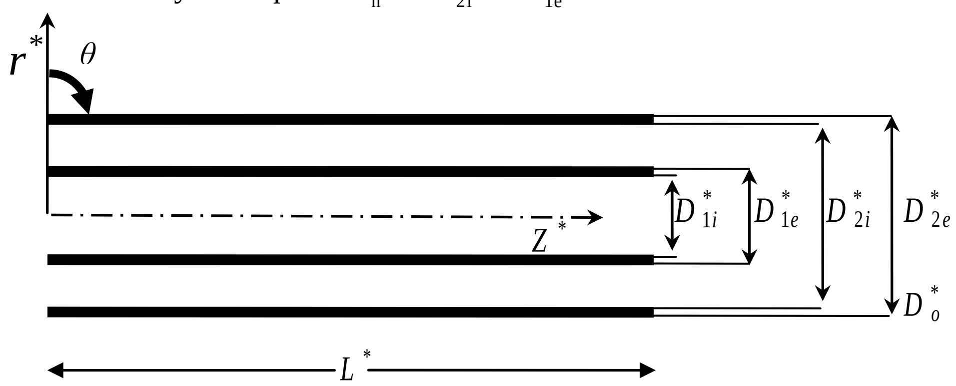
2.4 La convection mixte à propriétés physiques variables dans un espace annulaire

Le tube étudié dans la partie précédente est utilisé comme un cylindre externe de l'espace annulaire dans cette partie en gardant la même géométrie et les mêmes caractéristiques électriques. Le cylindre intérieur est de la même matière (inconel) que le cylindre extérieur.

2.4.1 La géométrie du système

Dans la figure 2.2 nous présentons la géométrie du problème étudié dans cette partie, il s'agit d'un long espace annulaire de longueur L=1m entre deux cylindres concentriques horizontaux en Inconel de conductivité thermique $K_s = 20 \ W/m\,°K$. Le cylindre intérieur a un diamètre interne D_{1i} = 0.46 cm et un diamètre externe D_{1e} = 0.5 cm est adiabatique au niveau de sa paroi interne tandis que le cylindre extérieur a un diamètre interne D_{2i} = 0.96 cm et un diamètre externe D_{2e} = 1 cm et une résistance électrique égale à 0.16 Ω.

Pour adimensionnaliser les paramètres géométriques, toutes les dimensions sont divisées par le diamètre hydraulique : $D_h = D_{2i} - D_{1e} = 0.46 \ cm$.



$L^* = 217.39,\ D^*_{1i} = 1,\ D^*_{1e} = 1.09,\ D^*_{2i} = 2.09,\ D^*_{2e} = 2.17$

Figure 2.2 : géométrie de l'espace annulaire.

Pour simplifier la comparaison des résultats dans les suivants chapitres, la chaleur générée par effet Joule dans l'épaisseur du cylindre externe doit être transférée à la même quantité de matière dans les différents cas. A cet effet, une égalité dans le débit massique du cas du cylindre plein et le cas de l'espace annulaire est obligatoire. Comme il a été mentionné dans la configuration du cylindre plein, le débit massique est égale à $5.212 \cdot 10^{-6}$ m^3/s, dans la configuration de l'espace annulaire ce débit permit d'avoir une vitesse moyenne égale à 9.88 10^{-2} m/s. Cette vitesse avec cette géométrie nous donne un nombre de Reynolds égal à 399.02.

2.4.2 Equations modélisantes

Les équations de conservations modélisantes sont celles de conservation de la masse (2.2), de conservation des trois quantités de mouvement (2.3), (2.4), (2.5) et de conservation de l'énergie (2.6). Les composants du tenseur des contraintes visqueuses sont définis dans (2.7).

Les nombres adimensionnels Re_0, Pr_0 et Gr_0 sont évalués à la température d'entrée :

$$\mathrm{Re}_0 = \frac{V_0\, D_h}{\nu_0}, \qquad \mathrm{Pr}_0 = \frac{\nu_0}{a_0}, \qquad Gr_0^* = \frac{g\beta D_h^3\,\Delta T}{\nu_0^2} = \frac{g\beta D_h^3\left(G D_h^2/k_s\right)}{\nu_0^2}$$

2.4.3 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites qui s'appliquent à ce problème lorsque $t^* > 0$ sont les suivantes:

A l'entrée du tube : $Z^* = 0$

Dans le domaine fluide : $0.5435 \le r^* \le 1.0435 \quad et \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$V_r^* = V_\theta^* = T^* = 0 \tag{2.25}$$

L'écoulement axial V_z^* a un profil hydro-dynamiquement développé à l'entrée détaillé dans l'Annexe.

$$V_z^*\left(r^*\right) = \frac{C_3\, r^{*\,2} + C_2\,\ln\left(r^*\right) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2\left(\frac{R_{2i}^2\,\ln(R_{2i}) - R_{1e}^2\,\ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2}\right)} \tag{2.26}$$

$$C_1 = R_{2i}^2\,\ln(R_{1e}) - R_{1e}^2\,\ln(R_{2i}) \Big/ \ln\left(\frac{R_{2i}}{R_{1e}}\right) \tag{2.27}$$

$$C_2 = R_{1e}^2 - R_{2i}^2 \Big/ \ln\left(\frac{R_{2i}}{R_{1e}}\right) \tag{2.28}$$

$$C_3 = \left(R_{2i} - R_{1e}\right)^2 \tag{2.29}$$

$$C_4 = C_1 + C_2\,\ln\left(R_{2i} - R_{1e}\right) \tag{2.30}$$

Dans le domaine solide : $0.5 \leq r^* \leq 0.5435$ *ou* $1.0435 \leq r^* \leq 1.0870$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = T^* = 0 \tag{2.31}$$

A la sortie du tube : $Z^* = 217.39$

Dans le domaine fluide : $0.5435 \leq r^* \leq 1.0435$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$, le conduit est considéré assez long pour permettre une invariance axiale des composantes de vitesse et du flux thermique diffusif axial.

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right) = 0 \tag{2.32}$$

Dans le domaine solide : $0.5 \leq r^* \leq 0.5435$ *ou* $1.0435 \leq r^* \leq 1.0870$ *et* $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right) = 0 \tag{2.33}$$

Sur la paroi intérieure du cylindre interne : $r^* = 0.5$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq Z^* \leq 217.39 : \quad V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0 \quad et \quad \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \tag{2.34}$$

Sur la paroi extérieure du cylindre externe : $r^* = 1.0870$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq Z^* \leq 217.39 : \begin{cases} V_r^* = V_\theta^* = V_z^* = 0 \\ -K^* \dfrac{\partial T^*}{\partial r^*} = \dfrac{(h_r + h_c) D_h}{K_0} T^* \end{cases} \tag{2.35}$$

Comme il a été détaillé précédemment, h_r et h_c sont donnés par les relations (2.15) et (2.16) respectivement.

2.4.4 Le nombre de Nusselt

A l'interface solide-fluide du cylindre externe, le nombre de Nusselt local est défini par :

$$Nu\ (\theta, z^*) = \frac{h\ (\theta, z^*)\ D_h}{K_0} = \left[\frac{\left(K^*\ \partial T^* / \partial r^*\right)\Big|_{r^* = 1.0435}}{T^*(1.0435, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)}\right] \tag{2.36}$$

La température moyenne adimensionnelle $T_m^*\left(z^*\right)$ dans une section droite est donnée par la relation suivante :

$$T_m^*\left(z^*\right)=\frac{\int_{0.5435}^{1.0435}\int_0^{2\pi} V^*\left(r^*,\theta,z^*\right)T^*\left(r^*,\theta,z^*\right)r^*\,dr^*\,d\theta}{\int_{0.5435}^{1.0435}\int_0^{2\pi} V^*\left(r^*,\theta,z^*\right)r^*\,dr^*\,d\theta} \tag{2.37}$$

Le nombre de Nusselt axial est :

$$Nu\ (z^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Nu\ (\theta, z^*)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\left(K^*\ \partial T^*/\partial r^*\right)\Big|_{r^*=1.0435}}{T^*(1.0435,\theta,z^*)-T_m^*(z^*)}\right]d\theta \tag{2.38}$$

Le nombre de Nusselt moyen pour toute l'interface solide-fluide est donné par la relation suivante :

$$Nu_m = \frac{1}{(2\pi)\,(217.39)}\int_0^{2\pi}\int_0^{217.39} Nu\,(\theta,z^*)\ dz^*\ d\theta \tag{2.39}$$

2.5 La convection mixte à propriétés physiques variables dans les conduits à ailettes

Dans cette partie, les conduits précédents sont équipés par des ailettes identiques longitudinales ou bien transversales. Dans le cas d'un tube horizontal, les ailettes sont placées sur la paroi interne du tube en contact direct avec le fluide qui circule à l'intérieur. Dans le cas de l'espace annulaire, les ailettes sont placées sur la paroi interne du cylindre extérieur, le cylindre intérieur est adiabatique au niveau de sa paroi interne.

Les équations de conservations de la masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie sont discutées dans les parties 2.3.2 et 2.4.2.

2.5.1 Conduits à ailettes longitudinales

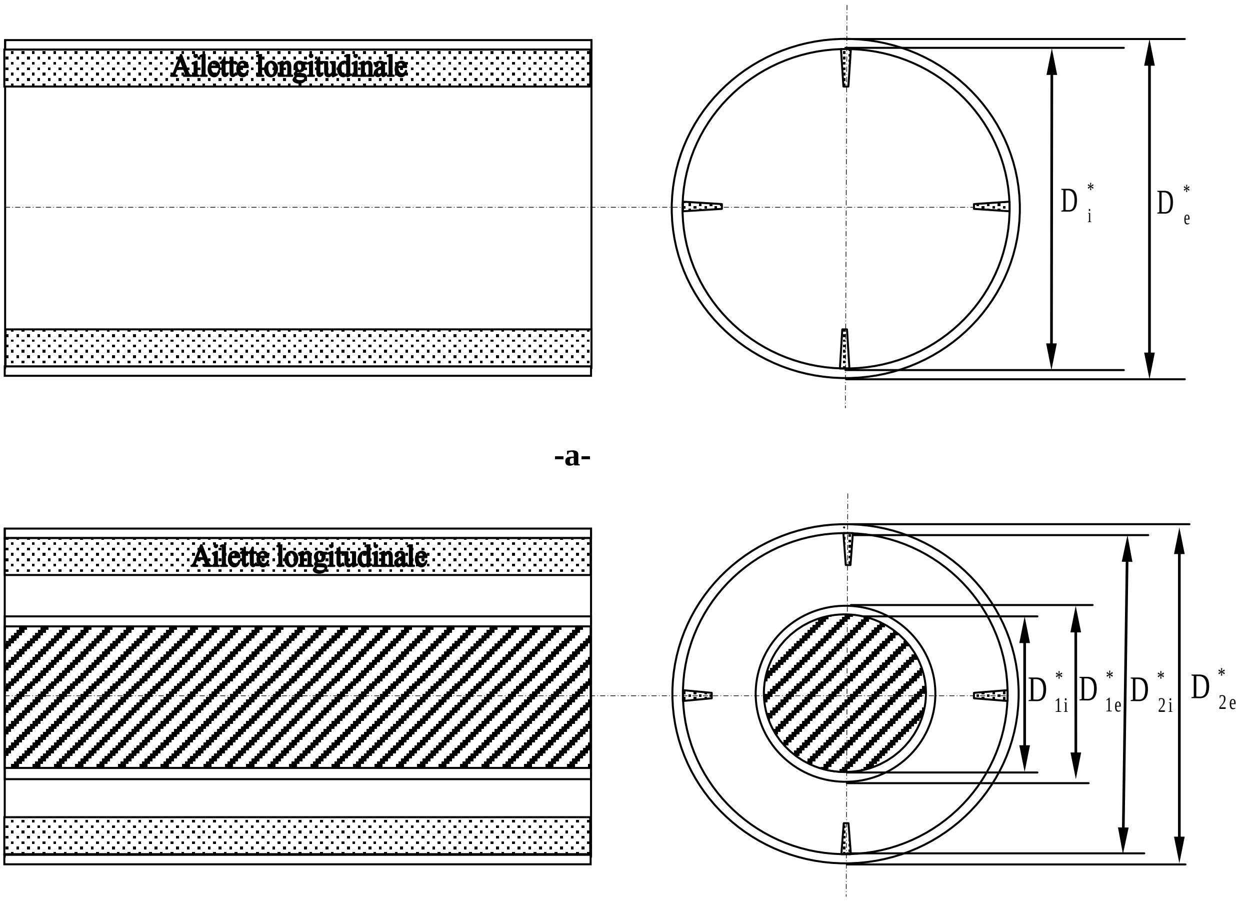
2.5.1.1 Emplacement et géométrie des ailettes

L'emplacement et la géométrie des ailettes longitudinales nous exige à étudier plusieurs configurations qui sont synthétisés dans les figures 2.3.a et 2.3.b.

Dans la figure 2.3.a, nous présentons la géométrie d'un tube horizontale équipé par des ailettes longitudinales, la section axiale de chaque ailette est sous forme d'un trapèze dont la grande base de ce dernier est attachée à la paroi mère. La longueur de l'ailette est similaire à celle du conduit L=1m, sa hauteur (H=0.12 cm) correspond à 25 % du rayon interne (R_i=0.48cm) du tube, sa largeur est proportionnel au maillage angulaire utilisé.

Pour un maillage 52×88×162, la largeur de l'ailette varie de 0.343 mm (grande base du trapèze conique) à 0.257 mm (petite base du trapèze conique). Avec ces dimensions et une résistivité électrique de l'Inconel $\rho = 0.9852 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot m$, la résistance électrique de chaque ailette longitudinale est $R_{ailette} = 2.74\ \Omega$.

Dans la figure 2.3.b, l'espace annulaire horizontale discuté précédemment est équipé par les mêmes ailettes longitudinales qui sont attachées sur la paroi interne du cylindre extérieur.



-b-

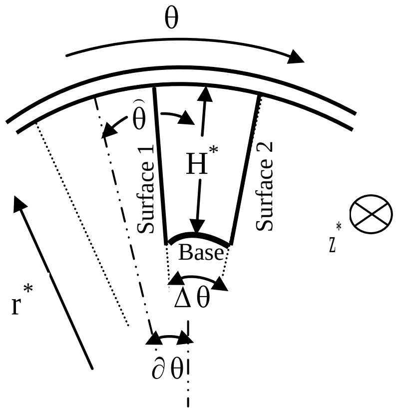
Figure 2.3 : visualisation des ailettes longitudinales.

Les conditions aux limites en présence des ailettes sont les mêmes conditions aux limites présentées dans les parties 2.3.3 et 2.4.3, car comme on a vu précédemment, le domaine solide (ailettes longitudinales) est considéré comme un fluide avec une très grande viscosité (10^{30}).

2.5.1.2 Le nombre de Nusselt

A l'interface solide-fluide du conduit horizontal et de l'espace annulaire, le nombre de Nusselt local est défini par les équations (2.21) et (2.36) respectivement.

Lorsque l'état stationnaire atteint, un bilan d'énergie sur une petite portion de l'ailette longitudinale impose une égalité des flux conductif et convectif dans la direction azimutale de la surface de cette dernière (coté fluide), cela permet de déterminer le nombre de Nusselt local de la surface de l'ailette (dépend de r^* et z^*) :



$$Nu\,(r^*,\,z^*) = \frac{h\,(r^*,z^*)\,D_h}{K_0} = \left[\frac{K^*\left(\partial T^*/\,\hat{\theta}\right)}{T^*(r^*\,,\theta_{ailette}\,,z^*) - T_m^*(z^*)}\right] \tag{2.40}$$

Sachant que $\hat{\theta} = r^*\,\partial\theta$, l'équation (2.40) peut être exprimée comme suit :

$$Nu\,(r^*,\,z^*) = \frac{h\,(r^*,z^*)\,D_h}{K_0} = \left[\frac{\left(K^*/r^*\right)\left(\partial T^*/\partial\theta\right)\Big|_{\theta=\theta_{ailette}}}{T^*(r^*\,,\theta_{ailette}\,,z^*) - T_m^*(z^*)}\right] \tag{2.41}$$

La température moyenne adimensionnelle $T_m^*\left(z^*\right)$dans une section droite est donnée par les équations (2.22) et (2.37) pour le cas du cylindre plein et l'espace annulaire respectivement.

Sachant que chaque ailette a deux surfaces et une base en contacte avec le fluide, le nombre de Nusselt axial de la première surface de l'ailette pour un conduit horizontale est :

$$Nu_1\,(z^*) = \frac{1}{H^*}\int_{R_i^*-H^*}^{R_i^*} Nu\,(r^*,z^*)\,dr^* = \frac{1}{H^*}\int_{R_i^*-H^*}^{R_i^*}\left[\frac{\left(K^*/r^*\right)\left(\partial T^*/\partial\theta\right)\Big|_{\theta=\theta_{ailette}}}{T^*(r^*\,,\theta_{ailette}\,,z^*) - T_m^*(z^*)}\right]dr^* \tag{2.42}$$

Pour un espace annulaire, le nombre de Nusselt axial de la première surface de l'ailette est :

$$Nu_1\,(z^*) = \frac{1}{H^*}\int_{R_{2i}^*-H^*}^{R_{2i}^*} Nu\,(r^*,z^*)\,dr^* = \frac{1}{H^*}\int_{R_{2i}^*-H^*}^{R_{2i}^*}\left[\frac{\left(K^*/r^*\right)\left(\partial T^*/\partial\theta\right)\Big|_{\theta=\theta_{ailette}}}{T^*(r^*\,,\theta_{ailette}\,,z^*) - T_m^*(z^*)}\right]dr^* \tag{2.43}$$

H^* est la valeur adimensionnelle de la hauteur de l'ailette.

Le nombre de Nusselt axial de la deuxième surface de l'ailette pour un conduit horizontale est :

$$Nu_2(z^*) = \frac{1}{H^*}\int_{R_i^*-H^*}^{R_i^*} Nu\,(r^*, z^*)\,dr^* = \frac{1}{H^*}\int_{R_i^*-H^*}^{R_i^*}\left[\frac{\left(K^*/r^*\right)\left(\partial T^*/\partial\theta\right)\big|_{\theta=\theta_{ailette}+\Delta\theta}}{T^*(r^*, \theta_{ailette}+\Delta\theta, z^*) - T_m^*(z^*)}\right]dr^* \quad (2.44)$$

Pour un espace annulaire, le nombre de Nusselt axial de la deuxième surface de l'ailette est :

$$Nu_2(z^*) = \frac{1}{H^*}\int_{R_{2i}^*-H^*}^{R_{2i}^*} Nu\,(r^*, z^*)\,dr^* = \frac{1}{H^*}\int_{R_{2i}^*-H^*}^{R_{2i}^*}\left[\frac{\left(K^*/r^*\right)\left(\partial T^*/\partial\theta\right)\big|_{\theta=\theta_{ailette}+\Delta\theta}}{T^*(r^*, \theta_{ailette}+\Delta\theta, z^*) - T_m^*(z^*)}\right]dr^* \quad (2.45)$$

Le nombre de Nusselt axial de la base de l'ailette en contact avec le fluide pour le cas du cylindre plein est :

$$Nu_3(z^*) = \frac{1}{\Delta\theta}\int_{\theta_{ailette}}^{\theta_{ailette}+\Delta\theta} Nu\,(\theta, z^*)\,d\theta = \frac{1}{\Delta\theta}\int_{\theta_{ailette}}^{\theta_{ailette}+\Delta\theta}\left[\frac{\left(K^*\,\partial T^*/\partial r^*\right)\big|_{r^*=R_i^*-H^*}}{T^*(R_i^*-H^*, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)}\right]d\theta \quad (2.46)$$

Pour un espace annulaire, le nombre de Nusselt axial de la base de l'ailette en contact avec le fluide est :

$$Nu_3(z^*) = \frac{1}{\Delta\theta}\int_{\theta_{ailette}}^{\theta_{ailette}+\Delta\theta} Nu\,(\theta, z^*)\,d\theta = \frac{1}{\Delta\theta}\int_{\theta_{ailette}}^{\theta_{ailette}+\Delta\theta}\left[\frac{\left(K^*\,\partial T^*/\partial r^*\right)\big|_{r^*=R_{2i}^*-H^*}}{T^*(R_{2i}^*-H^*, \theta, z^*) - T_m^*(z^*)}\right]d\theta \quad (2.47)$$

Pour un maillage 52×88×162, $\Delta\theta = 2\pi / 88$.

Le nombre de Nusselt axial de chaque ailette longitudinale est :

$$Nu_{ailette}(z^*) = Nu_1(z^*) + Nu_2(z^*) + Nu_3(z^*) \quad (2.48)$$

Le nombre de Nusselt moyen de N ailettes longitudinales le long du conduit est :

$$Nu_{m\ ailette} = \frac{1}{L^*}\sum_{ailette=1}^{N}\int_0^{L^*} Nu_{ailette}\,(z^*)\,dz^* \quad (2.49)$$

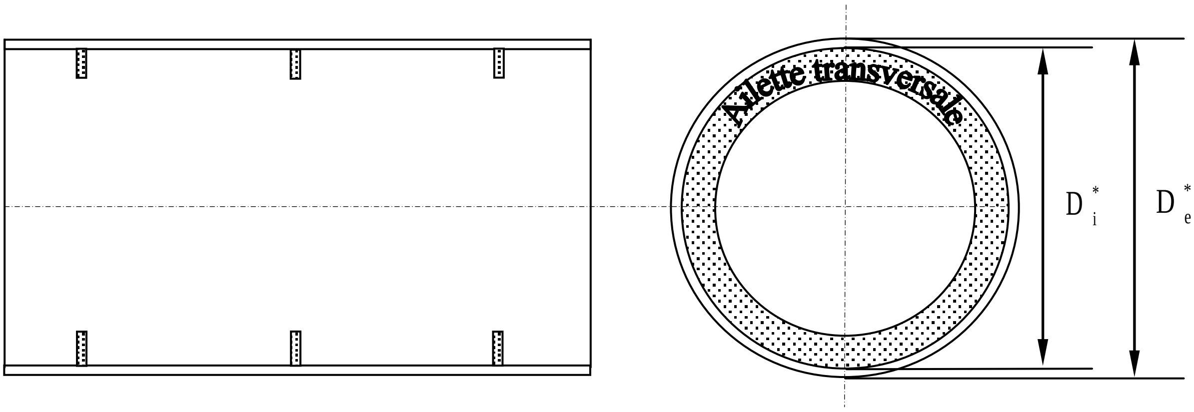
Enfin, le nombre de Nusselt moyen de tout le système est égal à la somme du Nusselt moyen de l'interface cylindrique et le Nusselt moyen des ailettes considérées.

$$Nu_m = \frac{1}{L^*}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{L^*} Nu\,(\theta,z^*)\,dz^*\,d\theta + \sum_{ailette=1}^{N}\int_0^{L^*} Nu_{ailette}\,(z^*)\,dz^*\right] \tag{2.50}$$

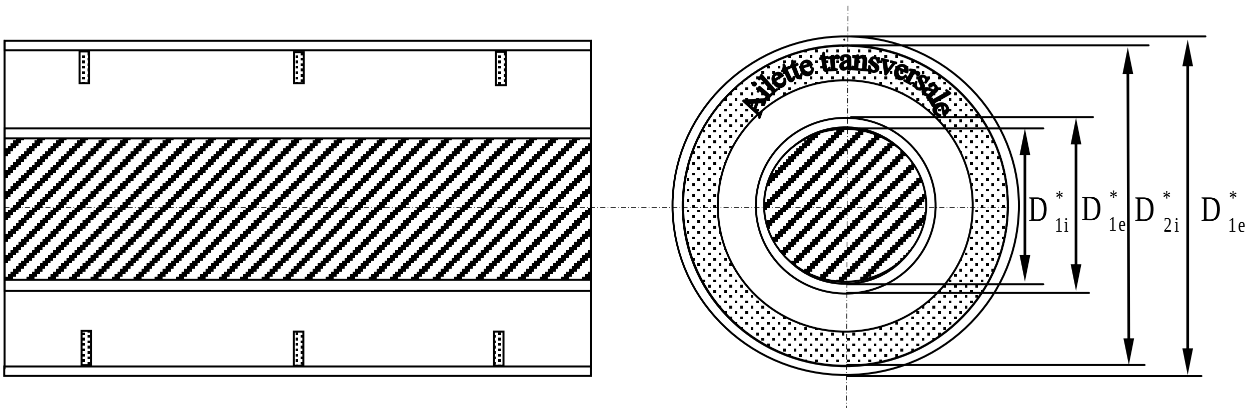
2.5.2 Conduits à ailettes transversales

2.5.2.1 Emplacement et géométrie des ailettes

Des ailettes transversales attachées à la paroi interne d'un tube horizontale sont présentées dans la figure 2.4.a. l'ailette est sous forme d'un anneau qui a un rayon externe égale à R_i=0.48cm et un rayon interne égale à R_i-H=0.36cm, la section de cet anneau est un rectangle de 0.12cm de largeur × 0.63cm de longueur.



-a-

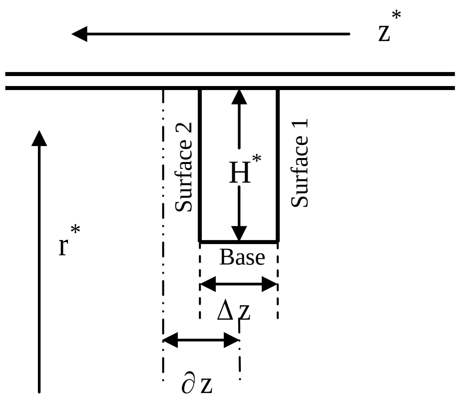


-b-

Figure 2.4 : visualisation des ailettes transversales.

Dans la figure (figure 2.4.b), les mêmes ailettes transversales sont utilisées dans l'espace annulaire, mais cette fois elles sont attachées à la paroi interne du cylindre extérieur.

2.5.2.2 Le nombre de Nusselt



L'égalité des flux conductif et convectif dans la direction axiale d'une petite portion de la surface de l'ailette transversale permet de déterminer le nombre de Nusselt local (dépend de r^* et θ) de cette surface qui est défini par la relation suivante :

$$Nu\,(r^*,\,\theta)=\frac{h\,(r^*,\theta)\,D_h}{K_0}=\left[\frac{\left(K^*\right)\left(\partial T^*/\partial z\right)\Big|_{z=z_{ailette}}}{T^*(r^*,\theta,z^*_{ailette})-T^*_m(z^*)}\right] \tag{2.51}$$

Pour le cas du cylindre plein et l'espace annulaire, la température moyenne adimensionnelle $T_m^*\left(z^*\right)$dans une section droite est donnée par les relations (2.22) et (2.37) respectivement

Le nombre de Nusselt axial de la première surface de l'ailette transversale pour un conduit horizontale est :

$$Nu_1\,(z^*)=\frac{1}{(2\pi)H^*}\int_0^{2\pi}\int_{R_i^*-H^*}^{R_i^*}\left[\frac{\left(K^*\right)\left(\partial T^*/\partial z\right)\Big|_{z^*=z^*_{ailette}}}{T^*(r^*,\theta,z^*_{ailette})-T^*_m(z^*)}\right]dr^*\,d\theta \tag{2.52}$$

Pour un espace annulaire, le nombre de Nusselt axial de la première surface de l'ailette transversale est :

$$Nu_1\,(z^*)=\frac{1}{(2\pi)H^*}\int_0^{2\pi}\int_{R_{2i}^*-H^*}^{R_{2i}^*}\left[\frac{\left(K^*\right)\left(\partial T^*/\partial z\right)\Big|_{z^*=z^*_{ailette}}}{T^*(r^*,\theta,z^*_{ailette})-T^*_m(z^*)}\right]dr^*\,d\theta \tag{2.53}$$

Le nombre de Nusselt axial de la deuxième surface de l'ailette pour un conduit horizontale est :

$$Nu_2\,(z^*)=\frac{1}{(2\pi)H^*}\int_0^{2\pi}\int_{R_i^*-H^*}^{R_i^*}\left[\frac{\left(K^*\right)\left(\partial T^*/\partial z\right)\Big|_{z^*=z^*_{ailette}+\Delta z^*}}{T^*(r^*,\theta,z^*_{ailette}+\Delta z^*)-T^*_m(z^*)}\right]dr^*\,d\theta \tag{2.54}$$

Pour un espace annulaire, le nombre de Nusselt axial de la deuxième surface de l'ailette est :

$$Nu_2(z^*) = \frac{1}{(2\pi)H^*}\int_0^{2\pi}\int_{R_{2i}^*-H^*}^{R_{2i}^*}\left[\frac{\left(K^*\right)\left(\partial T^*/\partial z\right)\Big|_{z^*=z^*_{ailette}+\Delta z^*}}{T^*(r^*,\theta,z^*_{ailette}+\Delta z^*)-T^*_m(z^*)}\right]dr^*\,d\theta \qquad (2.55)$$

Pour un maillage 52×88×162, $\Delta z^* = L^*/162$.

Le nombre de Nusselt axial de la base de l'ailette transversale en contact avec le fluide pour le cas du cylindre plein est :

$$Nu_3(z^*) = \frac{1}{(2\pi)\Delta z^*}\int_0^{2\pi}\int_{z^*_{ailette}}^{z^*_{ailette}+\Delta z^*}\left[\frac{\left(K^*\,\partial T^*/\partial r^*\right)\Big|_{r^*=R_i^*-H^*}}{T^*(R_i^*-H^*,\theta,z^*)-T^*_m(z^*)}\right]dz^*\,d\theta \qquad (2.56)$$

Pour un espace annulaire, le nombre de Nusselt axial de la base de l'ailette transversale en contact avec le fluide est :

$$Nu_3(z^*) = \frac{1}{(2\pi)\Delta z^*}\int_0^{2\pi}\int_{z^*_{ailette}}^{z^*_{ailette}+\Delta z^*}\left[\frac{\left(K^*\,\partial T^*/\partial r^*\right)\Big|_{r^*=R_{2i}^*-H^*}}{T^*(R_{2i}^*-H^*,\theta,z^*)-T^*_m(z^*)}\right]dz^*\,d\theta \qquad (2.57)$$

Le nombre de Nusselt axial de chaque ailette transversale est :

$$Nu_{ailette}(z^*) = Nu_1(z^*)+Nu_2(z^*)+Nu_3(z^*) \qquad (2.58)$$

Le nombre de Nusselt moyen de N ailettes transversales le long du conduit est :

$$Nu_{m\ ailette} = \sum_{ailette=1}^{N} Nu_{ailette}(z^*) \qquad (2.59)$$

La comparaison entre l'équation (2.49) et (2.59) montre l'absence de l'intégrale axiale dans l'équation (2.59) car les ailettes longitudinales sont dans des positions axiales séparées.

Finalement, le nombre de Nusselt moyen d'un conduit horizontal ou bien d'un espace annulaire équipé par des ailettes transversales est égal à la somme du Nusselt moyen de l'interface cylindrique et le Nusselt moyen des ailettes transversales considérées.

$$Nu_m = \frac{1}{L^*}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{L^*} Nu(\theta,z^*)\,dz^*\,d\theta + \sum_{ailette=1}^{N} Nu_{ailette}(z^*) \qquad (2.60)$$

Chapitre 3

Résolution numérique

3.1 Introduction

Le système d'équations différentielles aux dérivées partielles, non linéaires du second ordre (2.2)-(2.6) et leurs conditions aux limites spatio-temporelles (2.1), (2.9)-(2.14) et (2.25)-(2.35) du chapitre précédent ne peut pas être résolu analytiquement dans le cas général, sauf dans certains cas classiques qui sont pédagogiquement intéressants mais demeurent beaucoup trop limités pour l'industriel en particulier au niveau des géométries considérées, à cette effet l'approximation numérique est nécessaire pour résoudre ce genre de problème.

3.2 Choix de la méthode numérique de résolution

Parmi les méthodes numériques de résolution existant, trois grandes méthodes numériques sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations à dérivées partielles régissant les différents écoulements de transfert de chaleur qui sont : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis.

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations à l'aide d'un développement en séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant les valeurs des inconnues en un nœud aux valeurs de ces mêmes inconnues aux nœuds voisins.

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles d'une géométrie même très complexes à condition qu'elle soit continue et décrite par une équation aux dérivées partielles linéaire, à l'aide d'éléments géométriques simples. Par exemple le comportement d'un fluide arrivant à grande vitesse sur un obstacle, déformation d'une structure métallique, etc.

Dans notre étude, nous avons travaillé avec la méthode des volumes finis détaillée par **Patankar [89]**. Cette méthode est basée sur la discrétisation du domaine physique en un nombre fini de volume dit volume de contrôle. Sa particularité réside dans l'intégration des équations de conservation dans chaque volume du domaine numérique étudié, et les dérivées partielles sont évaluées à l'aide des profils ou loi d'interpolation, le résultat de cette discrétisation donne un système d'équations algébriques linéaires sur un domaine discret. La discrétisation des équations gouvernantes par cette méthode présente certains avantages du fait qu'elle garantit la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie dans chaque volume de contrôle.

3.3 Le maillage

Les domaines physiques inclus entre $0 \le r^* \le (R_e / D_i)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ et $0 \le z^* \le (L/D_i)$ pour un cylindre horizontal et entre $(R_{1i} / D_h) \le r^* \le (R_{2e} / D_h)$, $0 \le \theta \le 2\pi$ et $0 \le z^* \le L/D_h$ pour un espace annulaire sont découpés selon les directions radiale, angulaire et axiale r^*, θ et z^* respectivement en un ensemble de volume finis ou «volumes de contrôle» dont les dimensions pour un volume typique sont Δr^*, $r^*\Delta\theta$ et Δz^*. Une schématisation d'un volume de contrôle typique ainsi que les domaines numériques d'un conduit horizontale et un espace annulaire sont présentés dans les figures (3.1)-(3.3) respectivement. Les variables scalaires (pression, température) sont stockées au centre de chaque volume de contrôle associé au nœud **P** tandis que les trois composantes des vitesses sont stockées aux centres des six faces latérales : les faces Nord et Sud dans la direction radiale dont leurs centres sont (**n**) et (**s**), Est et Ouest dans la direction angulaire dont leurs centres sont (**e**) et (**w**) et Frontale et Dorsale dans la direction axiale dont leurs centres sont

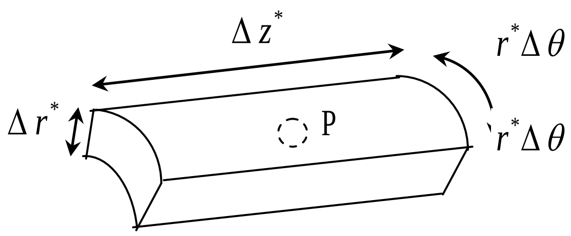


Figure 3.1 : Volume typique.

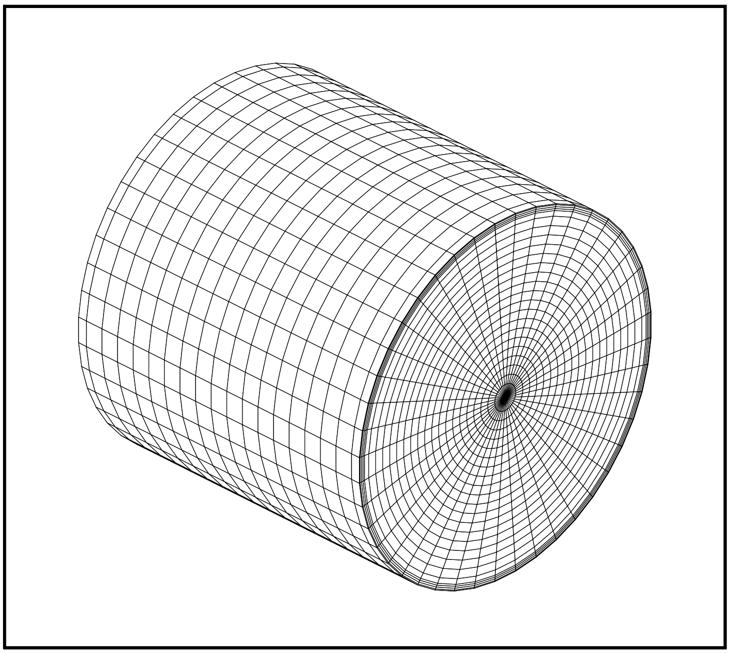


Figure 3.2 : Le maillage d’un conduit horizontal.

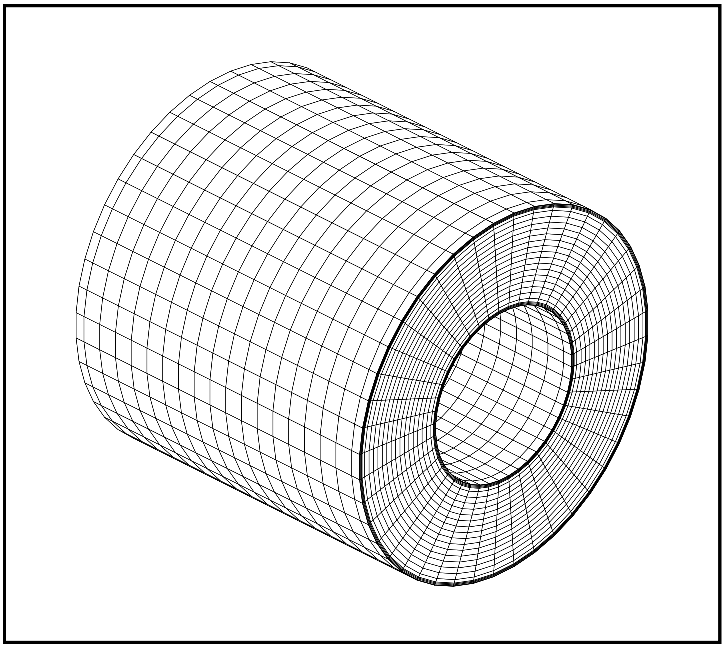


Figure 3.3 : Le maillage d’un espace annulaire.

(**t**) et (**b**). Chaque volume fini sera directement entouré de six autres volumes, dans la direction radiale deux volumes adjacents aux faces Nord et Sud et contenant en leurs centres les nœuds **N** et **S**, dans la direction angulaire deux autres volumes adjacents aux faces Ouest et Est contenant en leurs centres les nœuds **W** et **E** et en fin dans la direction axiale les deux volumes adjacents aux faces Frontale et Dorsale contenant en leurs centres les nœuds **T** et **B**.

Dans le maillage les différentes dimensions sont importantes à connaitre et elles seront bien explicitées dans les figures qui suivent et qui présentent différents plans de vue du volume considéré. Les angles et les distances entre le nœud **P** et les nœuds voisins **E**, **W**, **N**, **S**, **T** et **B** sont $d\theta_e$, $d\theta_w$, dr_n^*, dr_s^*, dz_t^* et dz_b^*, respectivement tandis que les angles et les distances séparant les faces des nœuds voisins sont respectivement Δr_N^*, Δr_S^*, $\Delta\theta_E$, $\Delta\theta_W$, Δz_T^* et Δz_B^*. Des projections du volume typique suivant les trois plans : (r^*,θ), (r^*,z^*) et (θ,z^*) sont présentées dans les figures (3.4)-(3.6) respectivement.

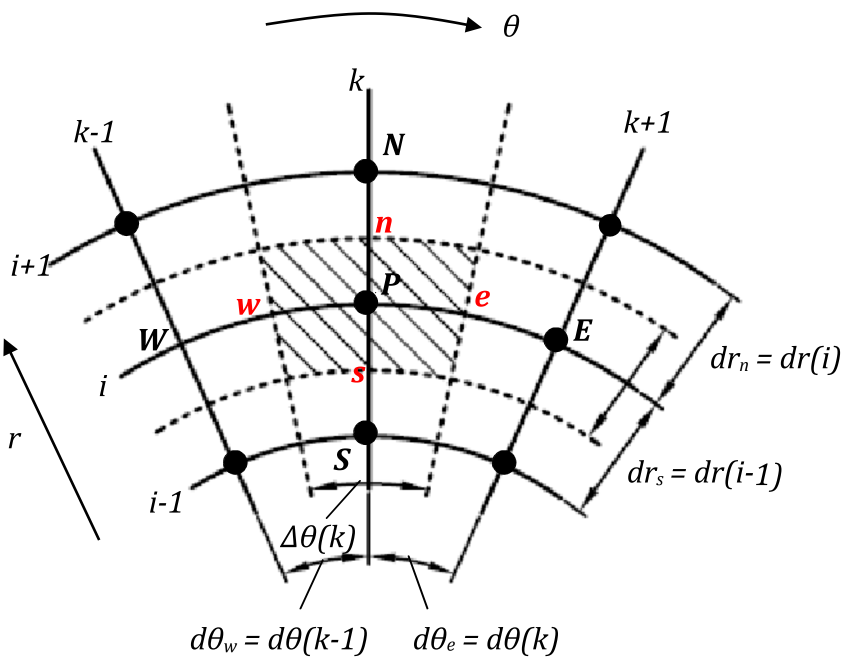


Figure 3.4 : Projection du volume typique dans le plan (r^*,θ).

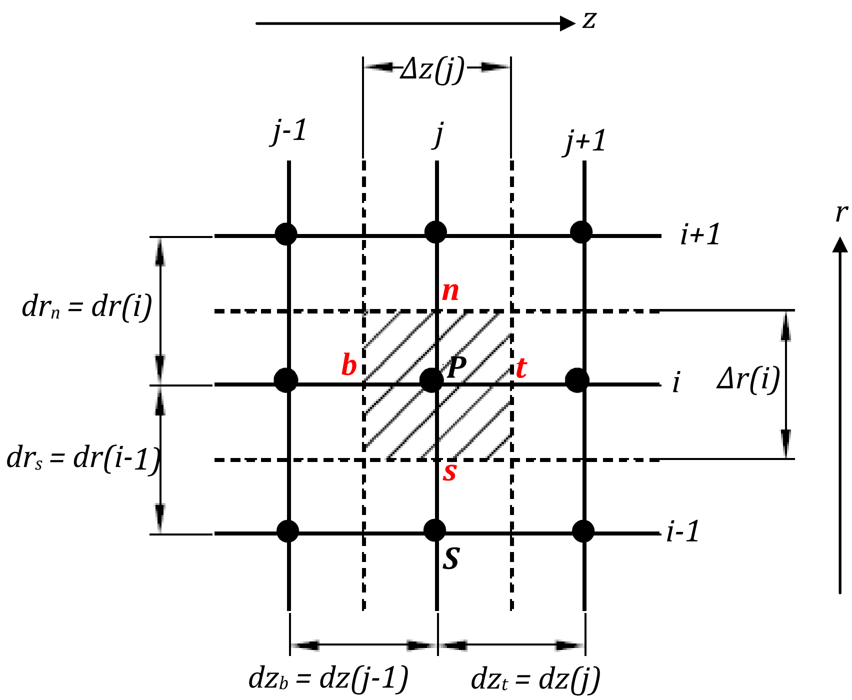


Figure 3.5 : Projection du volume typique dans le plan (r^*,z^*).

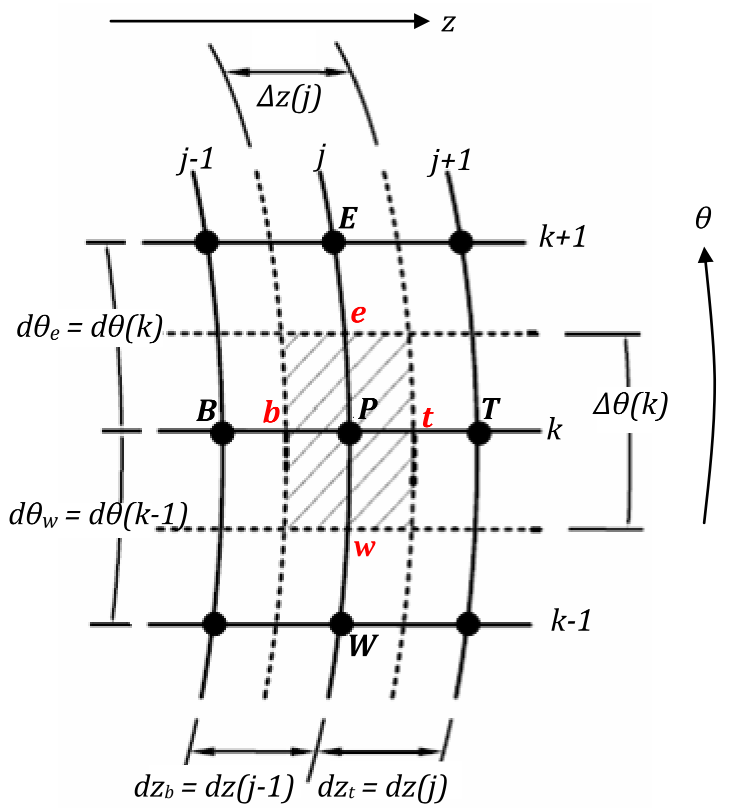


Figure 3.6 : Projection du volume typique dans le plan (θ,z^*).

Les équations de transfert des variables scalaires sont discrétisées dans le volume fini typique ; cependant, celles des composantes de la vitesse sont intégrées dans des volumes finis décalés. Celui de la composante de vitesse radiale est décalé vers la droite, celui de la composante azimutale est décalé vers le haut et celui de la composante axiale est décalé vers le front. Il est bien connu que ce décalage est nécessaire pour éviter certaines instabilités numériques [83].

3.4 Discrétisation des équations de conservation

Les équations de conservation de la variable dépendante ϕ peuvent être écrites sous une forme générale conservative suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^* \phi\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta^* \phi\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* \phi\right) = \left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\Gamma_\phi r^* \frac{\partial \phi}{\partial r^*}\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\Gamma_\phi \frac{1}{r^*}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z^*}\right)\right] + S_\phi \tag{3.1}$$

Où ϕ est la variable généralisée, S_ϕ est le terme de source, Γ_ϕ est le coefficient de diffusion (de quantité de mouvement ou de chaleur dans notre cas).

L'équation de discrétisation d'une variable ϕ est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans son volume fini typique ou décalé selon le cas.

3.4.1 La discrétisation temporelle au second ordre

Parmi les objectifs recherchés dans les développements des résolutions numériques, c'est l'amélioration des précisions des résultats numériques. Pour cella on a fait le choix d'une discrétisation spatiotemporelle du second ordre.

La discrétisation temporelle au second ordre d'une variable dépendante ϕ est obtenue à partir d'un développement limité en séries de Taylor par rapport au temps :

$$\phi^t = \phi^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{1!}\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|^{t+\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\bigg|^{t+\Delta t} - \frac{(\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}\bigg|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \tag{3.2}$$

$$\phi^{t-\Delta t} = \phi^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)}{1!}\frac{\partial \phi}{\partial t}\bigg|^{t+\Delta t} + \frac{(2\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\bigg|^{t+\Delta t} - \frac{(2\Delta t)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3}\bigg|^{t+\Delta t} + O(\Delta t)^4 \tag{3.3}$$

Si l'équation (3.3) est diminuée de l'équation (3.2) multipliée par 4, on peut montrer que :

$$4\phi^t - \phi^{t-\Delta t} = 3\phi^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{\partial \phi^{t+\Delta t}}{\partial t} + O(\Delta t)^2$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|^{t+\Delta t} \approx \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^{t} + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2 \qquad (3.4)$$

Et donc, la discrétisation de la variation temporelle locale avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$ est :

$$\frac{\partial\phi^{t+\Delta t}}{\partial t} = \frac{3\phi^{t+\Delta t} - 4\phi^{t} + \phi^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \qquad (3.5)$$

Cette discrétisation est celle d'**Euler** retardée.

La discrétisation des termes convectifs et non linéaires dans l'ensemble des équations suit le schéma explicite d'**Adam-Bashforth**. Ce schéma est obtenu par une expansion en série de Taylor au deuxième ordre de la variable $\phi^{t+\Delta t}$.

On multiplie l'équation (3.2) par 2 et retranche du produit l'équation (3.3), on peut montrer que :

$$\phi^{t+\Delta t} = 2\phi^{t} - \phi^{t-\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2}\frac{\partial^2\phi^{t+\Delta t}}{\partial t^2}$$

$$\phi^{t+\Delta t} \approx 2\phi^{t} - \phi^{t-\Delta t} + O(\Delta t)^2 \qquad (3.6)$$

Et donc, une approximation, avec une erreur de troncature d'ordre deux, $(\Delta t)^2$ d'une variable $\phi^{t+\Delta t}$ est :

$$\phi^{t+\Delta t} = 2\phi^{t} - \phi^{t-\Delta t} \qquad (3.7)$$

Cette discrétisation est celle d'**Adams-Bashforth**.

3.4.2 La discrétisation spatiale au second ordre

Les discrétisations spatiales se feront selon le schéma des différences centrées qui est un schéma d'une précision du second ordre.

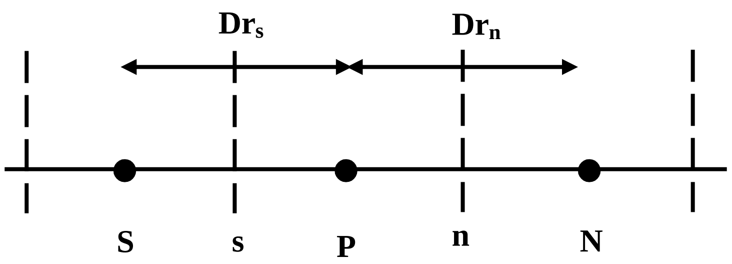


Figure 3.7 : Maillage dans la direction axiale.

Considérons, dans la direction axiale (figure 3.7), les développements en série de Taylor suivants :

$$\phi_p = \phi_n - \frac{(dr_n/2)}{1!}\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_n + \frac{(dr_n/2)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}\right|_n - \frac{(dr_n/2)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3}\right|_n + \dots \tag{3.8}$$

$$\phi_N = \phi_n + \frac{(dr_n/2)}{1!}\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_n - \frac{(dr_n/2)^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}\right|_n + \frac{(dr_n/2)^3}{3!}\left.\frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3}\right|_n + \dots \tag{3.9}$$

Avec la différence entre (3.9) et (3.8) on trouve :

$$\phi_N - \phi_P = dr_n \left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_n - \frac{1}{4}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}\right|_n (dr_n)^2 + \dots$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_n \approx \frac{\phi_N - \phi_P}{dr_n} + \frac{1}{4}\left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}\right|_n (dr_n)^2 \tag{3.10}$$

Et donc,

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial r}\right|_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{dr_n}, \text{ avec une erreur de troncature d'ordre } (dr_n)^2 \tag{3.11}$$

Avec La même manière, la démonstration peut se faire dans les deux autres directions *z* et *θ*. Alors notre discrétisations est du second ordre : une discrétisation temporelle avec une erreur de troncature d'ordre $(\Delta t)^2$ et une discrétisation spatiale avec une erreur de troncature d'ordre $(\Delta r)^2$, $(\Delta z)^2$ et $(\Delta \theta)^2$.

La forme d'Euler retardée du second ordre donnée par l'équation (3.5) sera appliquée à toutes les dérivées par rapport au temps tandis que la discrétisation d'Adam-Bashforth donnée équation (3.7) sera appliquée à tout les termes non linéaires tels que les termes advectifs et les termes de force de poussée thermique qui se retrouvent dans les différents sources. Enfin la discrétisation selon un schéma totalement implicite au temps $(t + \Delta t)$ sera appliquée à tous les termes de gradients purement diffusifs et ceux de pression. Quant à la discrétisation dans l'espace, il lui sera appliqué le schéma des différences centrées qui est d'ordre deux (comme on l'a vu précédemment).

3.4.3 Discrétisation de l'équation de continuité

L'équation de continuité (2.2) est discrétisée dans le volume de contrôle typique comme suit :

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^*\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta}+\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}\right]\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\, dr^*\, d\theta\, dz^* = 0$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^*\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\, dr^*\, d\theta\, dz^* = \left(r_n^*\ V_{rn}^* - r_s^*\ V_{rs}^*\right)\Delta\theta_P\,\Delta z_P^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta}\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\, dr^*\, d\theta\, dz^* = \left(V_{\theta e}^{*\ t^*+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*\ t^*+\Delta t^*}\right)\Delta r_P^*\ \Delta z_P^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\, dr^*\, d\theta\, dz^* = \left(V_{zt}^{*\ t^*+\Delta t^*} - V_{zb}^{*\ t^*+\Delta t^*}\right) r_P^*\ \Delta r_P^*\ \Delta\theta_P$$

La forme finale discrétisée de l'équation de continuité est :

$$\left(r_n^* V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*+\Delta t^*}\right)\Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left(V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*}\right)\Delta r_p^* \Delta z_p^* + \left(V_{zt}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*+\Delta t^*}\right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = 0 \quad (3.12)$$

Dans cette équation (3.12) tous les termes sont évalués à l'instant $t+\Delta t$.

3.4.4 Discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement radiale

On rappelle que l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale (2.3) est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses comme suit:

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^* V_r^*\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta^* V_r^*\right)+\frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* V_r^*\right)-\frac{V_\theta^{*2}}{r^*}=$$
$$-\frac{\partial P^*}{\partial r^*}+\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\ T^*+\frac{1}{Re_0}\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\tau_{rr}^*\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\tau_{r\theta}^*\right)-\frac{\tau_{\theta\theta}^*}{r^*}+\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{rz}^*\right)\right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{rr}^* = 2\mu^*\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*} \quad , \quad \tau_{r\theta}^* = \tau_{\theta r}^* = \mu^*\left[r^*\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{V_\theta^*}{r^*}\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial \theta}\right]$$

$$\tau_{rz}^* = \tau_{zr}^* = \mu^*\left[\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}+\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right] \quad , \quad \tau_{\theta\theta}^* = 2\mu^*\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial \theta^*}+\frac{V_r^*}{r^*}\right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement radiale est intégré dans le volume de contrôle décalé $r_n^* dr_n^*\, \Delta\theta\, \Delta z_p^*$ suivant la direction radiale (voir les figures **(3.8.a)** et **(3.8.b)**).

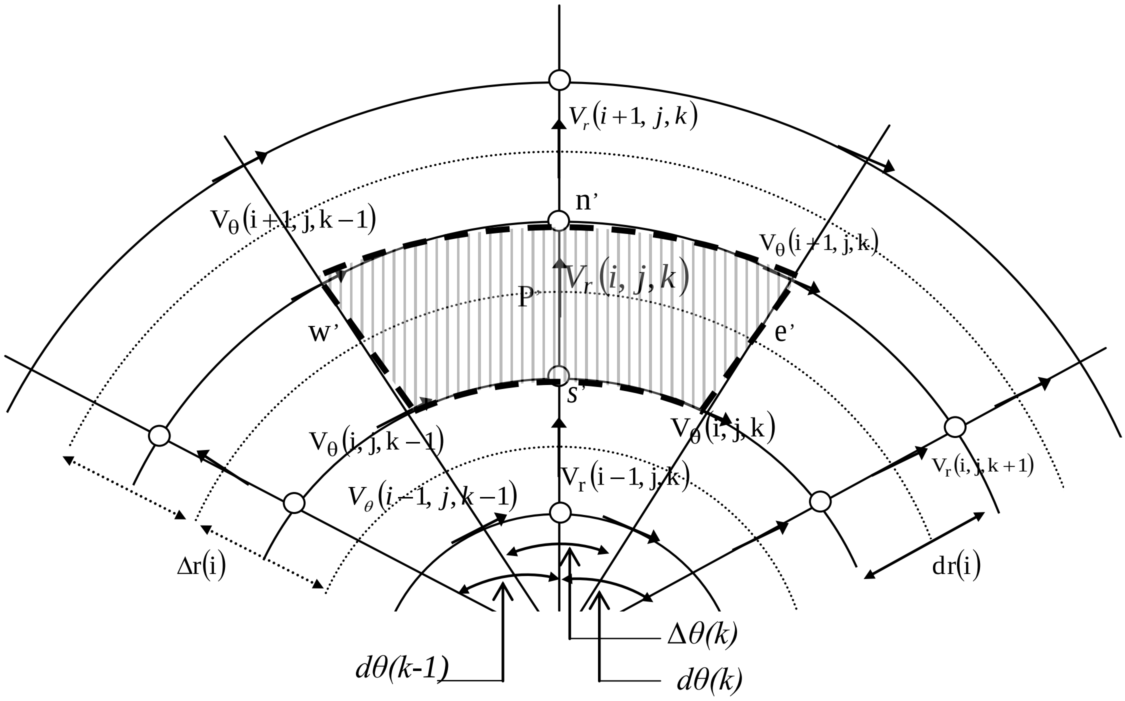


Figure 3.8(a) Identification et positionnement des vitesses dans la direction radiale du plan (r, θ).

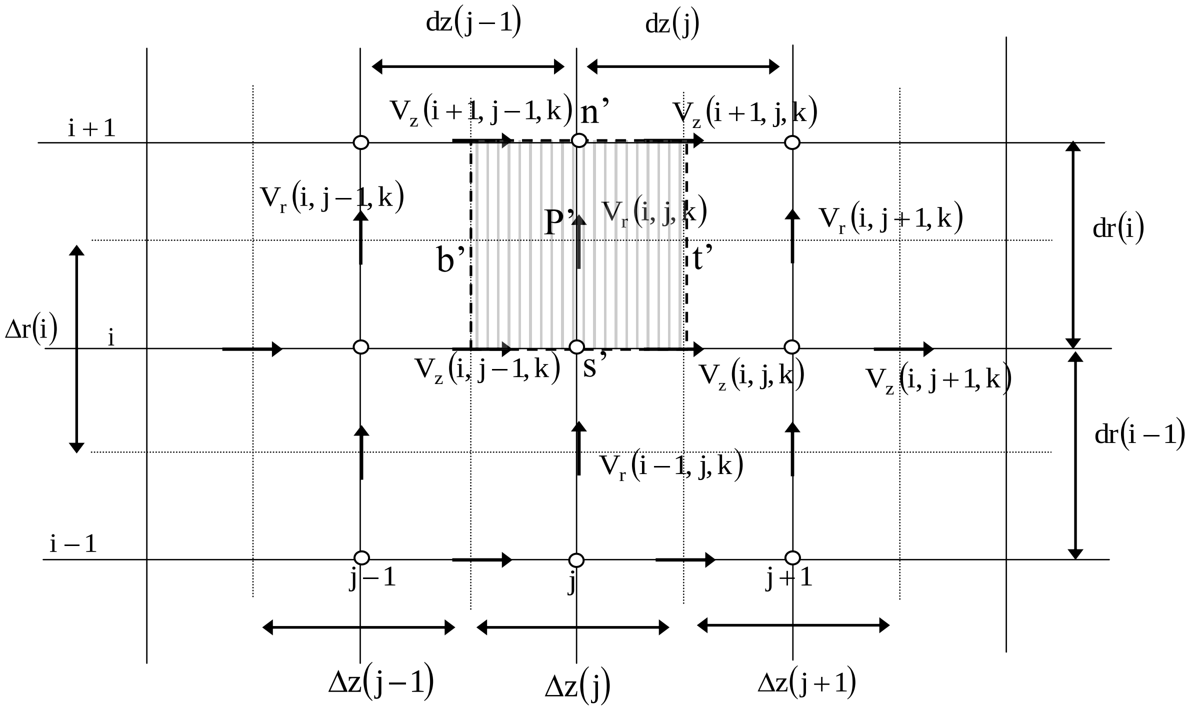


Figure 3.8(b) Identification et positionnement des vitesses dans la direction radiale du plan (r, z).

- Terme transitoire :

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left.\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*}\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \frac{3V_{rp}^{*t^*+\Delta t^*} - 4V_{rp}^{*t^*} + V_{rp}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* d\theta_p dz_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* V_r^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[2\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* V_r^*\right)\right|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* V_r^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*}\right]_s^n dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2(r_n^* V_{rn}^{*t^*} V_{rn}^{*t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*} V_{rs}^{*t^*}) - (r_n^* V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*})\right]\Delta\theta_p \Delta z^*{}_p$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* V_r^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[2\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* V_r^*\right)\right|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* V_r^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*}\right]_w^e dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2(V_{\theta e}^{*t^*} V_{re}^{*t^*} - V_{\theta w}^{*t^*} V_{rw}^{*t^*}) - (V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{re}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rw}^{*t^*-\Delta t^*})\right] dr_n^* \Delta z_P^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^* V_r^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[2\frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^* V_r^*\right)\right|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^* V_r^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*}\right]_b^t r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2(V_{zt}^{*t^*} V_{rt}^{*t^*} - V_{zb}^{*t^*} V_{rb}^{*t^*}) - (V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rb}^{*t^*-\Delta t^*})\right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left.\frac{V_\theta^{*2}}{r^*}\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \left(2\left[V_{\theta p}^{*t^*}\right]^2 - \left[V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}\right]^2\right) dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$2\left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*} + V_{\theta se}^{*t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*}}{4}\right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* -$$

$$\left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4}\right]^2 dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Terme de pression :

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t -\left.\frac{\partial P^*}{\partial r^*}\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}\right) r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

- Termes diffusifs :

∗ Le terme $\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \tau_{rr}^*\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\tau^*_{rr}\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left(2r^*\mu^{*t^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right)dr^*\,d\theta\,dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left(2r^*\mu^{*t^*-\Delta t^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right)dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\left(4r^*\mu^{*t^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_s^n \Delta\theta_p\Delta z_p^* - \left(2r^*\mu^{*t^*-\Delta t^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_s^n\Delta\theta_p\Delta z_p^* =$$

$$2\left(2\mu_n^{*t^*}-\mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(r_n^*\frac{V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{rp}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*}\right)\Delta\theta_p\Delta z_p^* - 2\left(2\mu_s^{*t^*}-\mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(r_s^*\frac{V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_S^*}\right)\Delta\theta_p\Delta z_p^*$$

Avec

$\mu_n^* = \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k)$, $\mu_s^* = \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$

$r_n^* = r_p^*(i+1)$, $r_s^* = r_p^*(i)$

$dr_n^* = \Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1)$, $dr_s^* = \Delta r_p^* = \Delta r^*(i)$

$V_{rN}^* = V_r^*(i+1, j, k)$, $V_{rp}^* = V_r^*(i, j, k)$ et $V_{rs}^* = V_r^*(i-1, j, k)$

*** le terme** $\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau^*_{r\theta}\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau^*_{r\theta}\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau^*_{r\theta}\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mu^{*t^*}\left[\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*} + \left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]\right\}dr^*\,d\theta\,dz^* -$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left[\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r}-\frac{V_\theta^*}{r}\right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]\right\}dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\left[2\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*} + \left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_w^e dr_n^*\,\Delta z_p^* - \left[\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_w^e dr_n^*\,\Delta z_p^* =$$

$$\left[\left(2\mu^{*t^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*} + \mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}\right)\right]_w^e dr_n^*\,\Delta z_p^* + \left[\left(2\mu^{*t^*}-\mu^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]_w^e dr_n^*\,\Delta z_p^* =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2\mu^{*t^*}\left(\dfrac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\dfrac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*}\Bigg|_e -2\mu^{*t^*}\left(\dfrac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\dfrac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*}\Bigg|_w + \\ \mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\dfrac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\dfrac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}\Bigg|_w -\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\dfrac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}-\dfrac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}\Bigg|_e \end{pmatrix}\right] dr_n^*\Delta z_p^*$$

$$+\left[\left(2\mu^{*t^*}-\mu^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]_w^e d r_n^*\,\Delta z_p^* =$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2\left(\mu_e^{*t^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*}-V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*}-\mu_w^{*t^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*}\right)+ \\ \left(\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}-\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}\right)\end{pmatrix}\right] dr_n^*\Delta z_p^* -$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2\left(\mu_w^{*t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*}}{2}-\mu_e^{*t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*}-V_{\theta se}^{*t^*}}{2}\right)+ \\ \left(\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}-\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}-\right)\end{pmatrix}\right] dr_n^*\Delta z_p^* +$$

$$\left(2\mu_e^{*t^*}-\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r_n^*}\frac{V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e}\right)dr_n^*\Delta z_p^* -\left(2\mu_w^{*t^*}-\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r_n^*}\frac{V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w}\right)dr_n^*\Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_e^* = \frac{d\theta_e}{\dfrac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*}+\dfrac{\Delta\theta_{NE}}{\mu_{NE}^*}}+\frac{d\theta_e}{\dfrac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*}+\dfrac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}} \quad , \quad \mu_w^* = \frac{d\theta_w}{\dfrac{\Delta\theta_N}{\mu_N^*}+\dfrac{\Delta\theta_{NW}}{\mu_{NW}^*}}+\frac{d\theta_w}{\dfrac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*}+\dfrac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$\mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k)$, $\mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$, $\mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1)$, $\mu_W^* = \mu^*(i, j, k-1)$

$\mu_{NE}^* = \mu^*(i+1, j, k+1)$, $\mu_{NW}^* = \mu^*(i+1, j, k-1)$

$d\theta_e = d\theta(k)$, $d\theta_w = d\theta(k-1)$

$\Delta\theta_N = \Delta\theta_P = \Delta\theta(k)$, $\Delta\theta_{NE} = \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1)$, $\Delta\theta_{NW} = \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$

$r_n^* = r_p^*(i+1)$, $dr_n^* = \Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1)$

$V_{\theta ne}^* = V_\theta^*(i+1, j, k)$, $V_{\theta nw}^* = V_\theta^*(i+1, j, k-1)$, $V_{\theta se}^* = V_\theta^*(i, j, k)$, $V_{\theta sw}^* = V_\theta^*(i, j, k-1)$

$V_{rE}^* = V_r^*(i, j, k+1)$, $V_{rP}^* = V_r^*(i, j, k)$, $V_{rW}^* = V_r^*(i, j, k-1)$

*** le terme** $\frac{\tau^*_{\theta\theta}}{r^*}$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\tau^*_{\theta\theta}}{r^*}\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \tau^*_{\theta\theta}\Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[2\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V^*_\theta}{\partial\theta}\right)^{t^*}+\left(\frac{V^*_r}{r^*}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\right] dr^*\,d\theta\,dz^* -$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[2\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V^*_\theta}{\partial\theta}\right)^{t^*-\Delta t^*}+\left(\frac{V^*_r}{r^*}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\right] dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\left\{2\left[2\mu^{*t^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V^*_\theta}{\partial\theta}\right)^{t^*}-\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V^*_\theta}{\partial\theta}\right)^{t^*-\Delta t^*}\right]_P+\left[2\left(2\mu^{*t^*}-\mu^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V^*_r}{r}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]_P\right\} dr^*_n\Delta\theta_p\Delta z^*_p =$$

$$2\left[\begin{array}{l}\left(2\mu_P^{*t^*}\right)\dfrac{1}{2r^*_n}\left(\dfrac{V^{*t^*}_{\theta ne}-V^{*t^*}_{\theta nw}}{\Delta\theta_P}+\dfrac{V^{*t^*}_{\theta se}-V^{*t^*}_{\theta sw}}{\Delta\theta_P}\right)- \\ \left(\mu_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)\dfrac{1}{2r^*_n}\left(\dfrac{V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta ne}-V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta nw}}{\Delta\theta_P}+\dfrac{V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta se}-V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta sw}}{\Delta\theta_P}\right)\end{array}\right] dr^*_n\Delta\theta_p\,\Delta z^*_p +$$

$$2\left(2\mu_P^{*t^*}-\mu_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left[\frac{V^{*t^*+\Delta t^*}_{r\,P}}{r^*_n}\right] d\,r^*_n\Delta\theta_p\,\Delta z^*_p =$$

$$2\left[\frac{\left(\mu_P^{*t^*}\right)}{r^*_n}\left(V^{*t^*}_{\theta ne}-V^{*t^*}_{\theta nw}+V^{*t^*}_{\theta se}-V^{*t^*}_{\theta sw}\right)-\frac{\left(\mu_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)}{2r^*_n}\left(V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta ne}-V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta nw}+V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta se}-V^{*t^*-\Delta t^*}_{\theta sw}\right)\right] dr^*_n\Delta z^*_p +$$

$$2\left(2\mu_P^{*t^*}-\mu_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left[\frac{V^{*t^*+\Delta t^*}_{r\,P}}{r^*_n}\right] d\,r^*_n\Delta\theta_p\,\Delta z^*_p$$

Avec :

$$\mu^*_p = \frac{2dr^*_n}{\dfrac{\Delta r^*_p}{\mu^*_p}+\dfrac{\Delta r^*_N}{\mu^*_N}}\ ,\quad \mu^*_N=\mu^*(i+1,j,k)\quad ,\quad \mu^*_p=\mu^*(i,j,k)$$

$$\Delta\theta_p = d\theta_e = d\theta(k)\qquad ,\quad r^*_n = r^*_c(i)$$

$$V^*_{\theta ne}=V^*_\theta(i+1,j,k),\ V^*_{\theta nw}=V^*_\theta(i+1,j,k-1)\ ,V^*_{\theta se}=V^*_\theta(i,j,k)\ ,\ V^*_{\theta sw}=V^*_\theta(i,j,k-1)$$

$$V^*_{r\,P}=V^*_r(i,j,k)$$

*** le terme** $\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau^*_{rz}\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau^*_{rz}\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\mu^{*t^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}-\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$2\left[\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*}+\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_b^t r_n^* d\,r_n^*\,\Delta\theta_p - \left[\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}+\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_b^t r_n^* d\,r_n^*\,\Delta\theta_p =$$

$$\left[2\mu^{*t^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*} - \mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}\right]_b^t r_n^* d\,r_n^*\,\Delta\theta_p + \left[\left(2\mu^{*t^*}-\mu^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]_b^t r_n^* d\,r_n^*\,\Delta\theta_p =$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_t^{*t^*}\dfrac{V_{znt}^{*t^*}-V_{zst}^{*t^*}}{dr_n^*}-\mu_b^{*t^*}\dfrac{V_{znb}^{*t^*}-V_{zsb}^{*t^*}}{dr_n^*}\right)+ \\ \left(\mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{znb}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{zsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}-\mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{znt}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{zst}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}\right)\end{array}\right] r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p^* +$$

$$\left(2\mu_t^{*t^*}-\mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{rT}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_t^*}\right) r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p - \left(2\mu_b^{*t^*}-\mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_b^*}\right) r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p$$

Avec :

$$\mu_t^* = \frac{dz_t^*}{\dfrac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*}+\dfrac{\Delta z_{NT}^*}{\mu_{NT}^*}} + \frac{dz_t^*}{\dfrac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*}+\dfrac{\Delta z_T^*}{\mu_T^*}} \quad , \quad \mu_b^* = \frac{dz_b^*}{\dfrac{\Delta z_N^*}{\mu_N^*}+\dfrac{\Delta z_{NB}^*}{\mu_{NB}^*}} + \frac{dz_b^*}{\dfrac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*}+\dfrac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\mu_n^* = \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k) \quad , \quad \mu_S^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{NT}^* = \mu^*(i+1, j+1, k) \quad , \quad \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k)$$

$$\mu_{NB}^* = \mu^*(i+1, j-1, k) \quad , \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j-1, k)$$

$$dr_n^* = dr^*(i) \quad , \quad dz_t^* = dz^*(j) \quad , \quad r_n^* = r_c^*(i)$$

$$V_{znt}^* = V(i+1, j, k) \;,\; V_{zst}^* = V_z^*(i, j, k) \;,\; V_{znb}^* = V_z^*(i+1, j-1, k),\; V_{zsb}^* = V_z^*(i, j-1, k)$$

$$V_{rT}^* = V_r^*(i, j+1, k) \;,\; V_{rp}^* = V_r^*(i, j, k) \;,\; V_{rB}^* = V_r^*(i, j-1, k)$$

*** le terme** $\left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\right)T^*$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\right) T^*\Big|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\right) T^*\Big|^{t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\right) T^*\Big|^{t^*-\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\left\{\left[2\left(T^*\right)_P\Big|^{t^*} - \left(T^*\right)_P\Big|^{t^*-\Delta^* t}\right]\right\} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}\right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\left(\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{rT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*} + S_r^{t^*+\Delta t^*} \tag{3.13}$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{2}{Re_0}\left(2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_n^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*}{dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{2}{Re_0}\left(2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_s^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{dr_n^*\Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{dr_n^*\Delta z_p^*}{r_n^* d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_t^{*t^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p^*}{dz_t^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p^*}{dz_b^*}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2}\frac{r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{\Delta t^*} + \frac{1}{Re_0}(2\mu_P^{*t^*} - \mu_P^{*t^*-\Delta t^*})\frac{dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{r_n^*} \tag{3.14}$$

$$S_r^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{rp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p\, \Delta z_p^* - \frac{V_{rP}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p\, \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*}\right)^2 - 2\left(V_{rn}^{*t^*}\right)^2\right] r_n^* \Delta\theta_p\, \Delta z_p^* + \left[2\left(V_{rs}^{*t^*}\right)^2 - \left(V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*}\right)^2\right] r_s^* \Delta\theta_p\, \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{re}^{*t^*-\Delta t^*}\right) - 2\left(V_{\theta e}^{*t^*} V_{re}^{*t^*}\right)\right] dr_n^*\, \Delta z_p^* + \left[2\left(V_{\theta w}^{*t^*} V_{rw}^{*t^*}\right) - \left(V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rw}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right] dr_n^*\, \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rt}^{*t^*-\Delta t^*}\right) - 2\left(V_{zt}^{*t^*} V_{rt}^{*t^*}\right)\right] r_n^* dr_n^*\, \Delta\theta_p + \left[2\left(V_{zb}^{*t^*} V_{rb}^{*t^*}\right) - \left(V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{rb}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right] r_n^* dr_n^*\, \Delta\theta_p +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_e^{*t^*}\,\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_w^{*t^*}\,\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*}\right) + \\ \left(\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\,\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\,\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}\right) \end{array}\right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_w^{*t^*}\,\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}}{2} - \mu_e^{*t^*}\,\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta se}^{*t^*}}{2}\right) + \\ \left(\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\,\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\,\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) \end{array}\right] dr_n^* \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\,\dfrac{\left(\mu_p^{*t^*}\right)}{r_n^*}\left(V_{\theta ne}^{*t^*} - V_{\theta nw}^{*t^*} + V_{\theta se}^{*t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*}\right) - \\ \dfrac{\left(\mu_p^{*t^*-\Delta t^*}\right)}{r_n^*}\left(V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}\right) \end{array}\right] dr_n^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_t^{*t^*}\,\dfrac{V_{znt}^{*t^*} - V_{zst}^{*t^*}}{dr_n^*} - \mu_b^{*t^*}\,\dfrac{V_{znb}^{*t^*} - V_{zsb}^{*t^*}}{dr_n^*}\right) + \\ \left(\mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\,\dfrac{V_{znb}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\,\dfrac{V_{znt}^{*t^*} - V_{zst}^{*t^*}}{dr_n^*}\right) \end{array}\right] r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p +$$

$$2\left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*}+V_{\theta nw}^{*t^*}+V_{\theta se}^{*t^*}+V_{\theta sw}^{*t^*}}{4}\right]^2 dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* -$$

$$\left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4}\right]^2 dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* +$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\left(T_N^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\left(\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^*$$

$$+(P_p^{*t^*+\Delta t^*}-P_N^{*t^*+\Delta t^*})\,r_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^*$$

On peut écrire aussi :

$$S_r^{t^*+\Delta t^*}=\frac{4V_{rp}^{*t^*}}{2\Delta t^*}r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* - \frac{V_{rp}^{*t^*+\Delta t^*}}{2\Delta t^*}r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* +$$

$$\left[fn^{t^*-\Delta t^*}-fn^{t^*}\right]+\left[fs^{t^*}-fs^{t^*-\Delta t^*}\right]+\left[fe^{t^*-\Delta t^*}-fe^{t^*}\right]+\left[fw^{t^*}-fw^{t^*-\Delta t^*}\right]+\left[ft^{t^*-\Delta t^*}-ft^{t^*}\right]+\left[fb^{t^*}-fb^{t^*-\Delta t^*}\right]+$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_e^{*t^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*}-V_{\theta se}^{*t^*}}{dr_n^*}-\mu_w^{*t^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*}}{dr_n^*}\right)+ \\ \left(\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}-\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}\right)\end{array}\right]dr_n^*\Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_w^{*t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*}}{2}-\mu_e^{*t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*}-V_{\theta se}^{*t^*}}{2}\right)+ \\ \left(\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}-\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{1}{r_n^*}\dfrac{V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)\end{array}\right]dr_n^*\Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\dfrac{\left(\mu_p^{*t^*}\right)}{r_n^*}\left(V_{\theta ne}^{*t^*}-V_{\theta nw}^{*t^*}+V_{\theta se}^{*t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*}\right)- \\ \dfrac{\left(\mu_p^{*t^*-\Delta t^*}\right)}{r_n^*}\left(V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\end{array}\right]dr_n^*\Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_t^{*t^*}\dfrac{V_{znt}^{*t^*}-V_{zst}^{*t^*}}{dr_n^*}-\mu_b^{*t^*}\dfrac{V_{znb}^{*t^*}-V_{zsb}^{*t^*}}{dr_n^*}\right)+ \\ \left(\mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{znb}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{zsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}-\mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{V_{znt}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{zst}^{*t^*-\Delta t^*}}{dr_n^*}\right)\end{array}\right]r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p +$$

$$2\left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*}+V_{\theta nw}^{*t^*}+V_{\theta se}^{*t^*}+V_{\theta sw}^{*t^*}}{4}\right]^2 dr_n^*\Delta\theta_p\Delta z_p^* -$$

$$\left[\frac{V_{\theta ne}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta nw}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta se}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta sw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4}\right]^2 dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* +$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\left(T_N^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right) r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\cos\theta\left(\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) r_n^* dr_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^*$$
$$+(P_p^{*t^*+\Delta t^*}-P_N^{*t^*+\Delta t^*})\, r_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^*$$

On peut écrire aussi

$$S_r^{t^*+\Delta t^*} = b_r^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*}-P_N^{*t^*+\Delta t^*})\, r_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^*$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$A_P\, V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N\, V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S\, V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E\, V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W\, V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T\, V_{rT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B\, V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^* + (P_p^{t^*+\Delta t^*} - P_N^{t^*+\Delta t^*})\, r_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* \qquad (3.15)$$

Comme $V_{rP}^{*t^*+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse V_r^* à l'interface n du volume typique$\left(V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*}\right)$, on peut écrire l'équation donnant la vitesse $V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*}$:

$$A_P\, V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N\, V_{rN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S\, V_{rS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E\, V_{rE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W\, V_{rW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T\, V_{rT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B\, V_{rB}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^* + (P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*})\, r_n^*\Delta\theta_p\,\Delta z_p^* \qquad (3.16)$$

3.4.5 Discrétisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale

L'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale (2.4) est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses comme suit:

$$\frac{\partial V_\theta^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^* V_\theta^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\theta^* V_\theta^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_Z^* V_\theta^*\right) + \frac{V_r^* V_\theta^*}{r*} = -\frac{1}{r^*}\frac{\partial P^*}{\partial\theta} -$$
$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta \quad T^* + \frac{1}{Re_0}\left[\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^{*2}\tau_{\theta r}^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta\theta}^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{\theta z}^*\right)\right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau^*_{\theta\theta} = 2\mu^*\left[\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V^*_\theta}{\partial\theta}+\frac{V^*_r}{r^*}\right)\right] \qquad \tau^*_{r\theta} = \tau^*_{\theta r} = \mu^*\left[\left(r^*\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{V^*_\theta}{r^*}\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial V^*_r}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$\tau^*_{\theta z} = \tau^*_{z\theta} = \mu^*\left[\left(\frac{\partial V^*_\theta}{\partial z^*}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial V^*_z}{\partial\theta}\right)\right]$$

Chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction azimutale (voir les figures **(3.9.a)** et **(3.9.b)**).

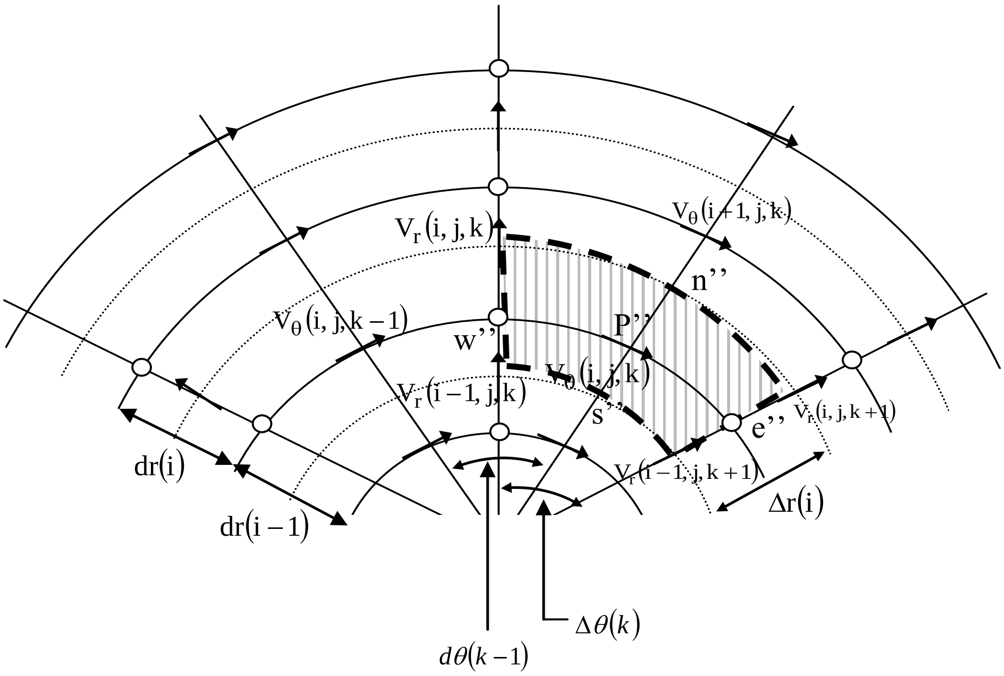


Figure 3.9(a) Identification et positionnement des vitesses dans la direction angulaire dans le plan (r, θ)

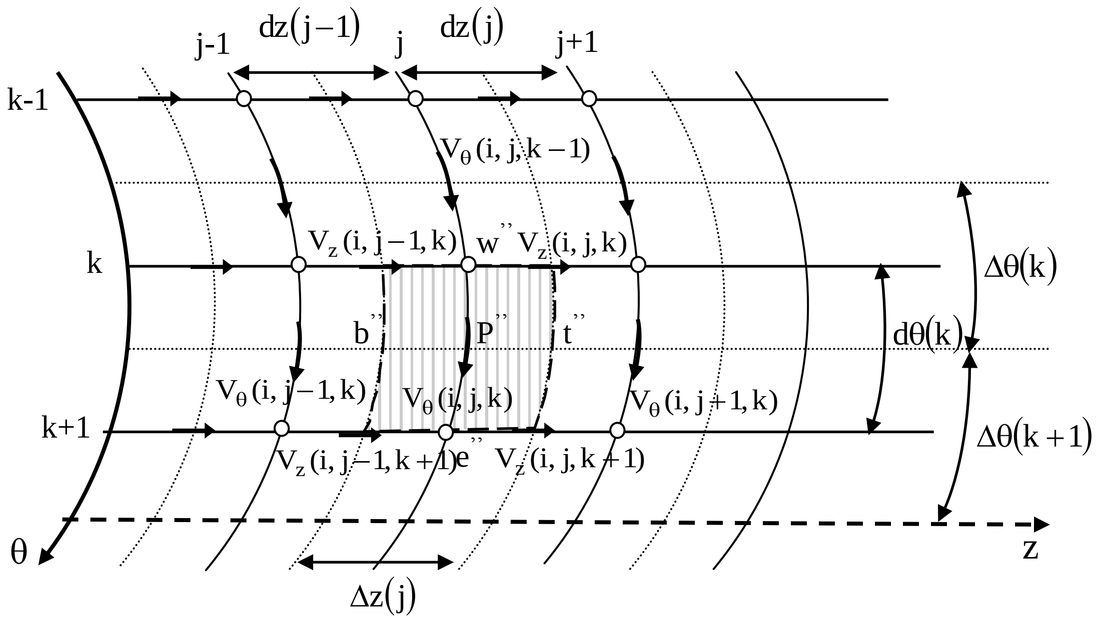


Figure 3.9(b) : les faces dans le plan $\theta - z$, des volumes finis décalés suivant la direction azimutale.

- Terme transitoire :

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left.\frac{\partial V_\theta^*}{\partial t^*}\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \frac{3V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*} - 4V_{\theta P}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e dz_p^*$$

- Termes advectifs :

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^*V_r^*V_\theta^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[\frac{2}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.(r^*V_r^*V_\theta^*)\right|^{t^*} - \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.(r^*V_r^*V_\theta^*)\right|^{t^*-\Delta t^*}\right] r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2\left(r_n^*V_{rn}^{*t^*}V_{\theta n}^{*t^*} - r_s^*V_{rs}^{*t^*}V_{\theta s}^{*t^*}\right) - \left(r_n^*V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*}V_{\theta n}^{*t^*-\Delta t^*} - r_s^*V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*}V_{\theta s}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right] d\theta_e\, \Delta z_p^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^*V_\theta^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[\frac{2}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^*V_\theta^*\right)\right|^{t^*} - \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^*V_\theta^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*}\right] r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2\left(V_{\theta e}^{*t^*}V_{\theta e}^{*t^*} - V_{\theta w}^{*t^*}V_{\theta w}^{*t^*}\right) - \left(V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*}V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t}\, V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right]\Delta r_p^*\, \Delta z_p^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^*V_\theta^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz_z^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[2\frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^*V_\theta^*\right)\right|^{t^*} - \frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^*V_\theta^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*}\right] r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2\left(V_{zt}^{*t^*}V_{\theta t}^{*t^*} - V_{zb}^{*t^*}V_{\theta b}^{*t^*}\right) - \left(V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*}V_{\theta t}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*}V_{\theta b}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right] r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial P^*}{\partial\theta}\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\, dr^* d\theta\, dz^* = \left(P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}\right) r_p^*\Delta r_p^*\Delta z_p^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*}\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left[2\frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*}\Bigg|^{t^*} - \frac{V_r^* V_\theta^*}{r^*}\Bigg|^{t^*-\Delta t^*} \right] r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left(2V_{rp}^{*t^*} V_{\theta p}^{*t^*} - V_{rp}^{*t^*-\Delta t^*} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* = \left(\begin{array}{l} \dfrac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rnw}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{2} V_{\theta p}^{*t^*} - \\ \dfrac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4} V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*} \end{array} \right) \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*$$

Termes diffusifs :

***Le terme** $\frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^{*2}\tau_{\theta r}^*\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^{*2}\tau_{\theta r}^*\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\, dr^*\, d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^{*2}\tau_{\theta r}^*\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} dr^*\, d\theta\, dz^* =$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^{*2}\mu^*\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*} - \frac{V_\theta^*}{r^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right) dr^*\, d\theta\, dz^* =$$

$$\frac{2}{r_p^*}\left[r^{*2}\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{r_p^*}\left[r^{*2}\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\frac{1}{r_p^*}\left[2r^{*2}\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*} + r^{*2}\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_r^*}{\partial\theta} - \frac{V_\theta^*}{r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}\right)\right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* -$$

$$\frac{1}{r_p^*}\left[2r^{*2}\mu^{*t^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*} - r^{*2}\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right]_s^n d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\mu_n^{*t^*}\dfrac{r_n^*}{r_p^*}\dfrac{V_{rne}^{*t^*}-V_{rnw}^{*t^*}}{d\theta_e}-2\mu_s^{*t^*}\dfrac{r_s^*}{r_p^*}\dfrac{V_{rse}^{*t^*}-V_{rsw}^{*t^*}}{d\theta_e}- \\ \mu_n^{*t^*}\dfrac{r_n^*}{r_p^*}\left(V_{\theta N}^{*t^*}+V_{\theta P}^{*t^*}\right)+\mu_s^{*t^*}\dfrac{r_s^*}{r_p^*}\left(V_{\theta S}^{*t^*}+V_{\theta P}^{*t^*}\right)+ \\ \mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{r_s^*}{r_p^*}\dfrac{V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e}-\mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{r_n^*}{r_p^*}\dfrac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e}+ \\ \mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{r_n^*}{r_p^*}\dfrac{V_{\theta N}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}-\mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\dfrac{r_s^*}{r_p^*}\dfrac{V_{\theta S}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \end{array}\right]d\theta_e\Delta z_p^*+$$

$$\left(2\mu_n^{*t^*}-\mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left[\frac{r_n^{*2}}{r_p^*}\left(\frac{V_{\theta N}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*}\right)\right]d\theta_e\Delta z_p^*-$$

$$\left(2\mu_s^{*t^*}-\mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left[\frac{r_s^{*2}}{r_p^*}\left(\frac{V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{\theta S}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*}\right)\right]d\theta_e\Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_n^*=\frac{1}{\dfrac{1}{\mu_e^*}+\dfrac{1}{\mu_{NE}^*}}+\frac{1}{\dfrac{1}{\mu_P^*}+\dfrac{1}{\mu_N^*}} \quad , \quad \mu_s^*=\frac{1}{\dfrac{1}{\mu_e^*}+\dfrac{1}{\mu_{SE}^*}}+\frac{1}{\dfrac{1}{\mu_P^*}+\dfrac{1}{\mu_S^*}}$$

$$\mu_e^*=\mu_E^*=\mu^*(i,j,k+1) \quad , \quad \mu_P^*=\mu^*(i,j,k)$$

$$\mu_{NE}^*=\mu^*(i+1,j,k+1) \quad , \quad \mu_N^*=\mu^*(i+1,j,k)$$

$$\mu_{SE}^*=\mu^*(i-1,j,k+1) \quad , \quad \mu_S^*=\mu^*(i-1,j,k)$$

$$r_n^*=r_c^*(i) \quad , \quad r_s^*=r_c^*(i)$$

$$dr_s^*=dr^*(i-1) \quad , \quad dr_n^*=dr^*(i)$$

*** le terme** $\dfrac{1}{r^*}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta\theta}^*\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta\theta}^*\right)\bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^*=\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta\theta}^*\right)\bigg|^{t^*+\Delta t^*} dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left(2\mu^*\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial\theta}+\frac{V_r^*}{r^*}\right)\right)\bigg|^{t^*+\Delta t^*} dr^*\,d\theta\,dz^*=\left[2\mu^*\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial\theta}+\frac{V_r^*}{r^*}\right)\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]_w^e\Delta r_p^*\Delta z_p^*=$$

$$2\left[2\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{V_r^*}{r^*}\right)^{t^*}+\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_w^e \Delta r_p^*\Delta z_p^* - \left[2\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{V_r^*}{r^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}+\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_\theta^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_w^e \Delta r_p^*\Delta z_p^* =$$

$$2\mu_e^{*t^*}\left(\frac{V_{rne}^{*t^*}-V_{rse}^{*t^*}}{r_p^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^* - 2\mu_w^{*t^*}\left(\frac{V_{rnw}^{*t^*}-V_{rsw}^{*t^*}}{r_p^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^* -$$

$$\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^* + \mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^* +$$

$$2\left[\left(2\mu_e^{*t^*}-\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r_p^*}\frac{V_{\theta E}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e}\right)\right]\Delta r_p^*\Delta z_p^* - \left[\left(2\mu_w^{*t^*}-\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r_p^*}\frac{V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{\theta W}^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w}\right)\right]\Delta r_p^*\Delta z_p^*$$

Avec :

$$\mu_e^* = \mu_E^* = \mu^*(i,j,k+1) \quad , \quad \mu_w^* = \mu_P^* = \mu^*(i,j,k)$$

$$d\theta_e = \Delta\theta(k+1) \quad , \quad d\theta_w = \Delta\theta(k) \quad , \quad r_p^* = r_p^*(i)$$

$$V_{rne}^* = V_r^*(i,j,k+1),\ V_r^* = V_{rse}^*(i-1,j,k+1) \ ,\ V_{rnw}^* = V_r^*(i,j,k),\ V_{rsw}^* = V_r^*(i-1,j,k)$$

$$V_{\theta E}^* = V_\theta^*(i,j,k+1) \quad , \quad V_{\theta P}^* = V_\theta^*(i,j,k) \quad , \quad V_{\theta W}^* = V_\theta^*(i,j,k-1)$$

*** le terme** $\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{\theta z}^*\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{\theta z}^*\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\mu^*\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_z^*}{\partial\theta}\right)\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*\,dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\left\{2\left[\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_z^*}{\partial\theta}\right)^{t^*}+\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_b^t - \left[\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_z^*}{\partial\theta}\right)^{t^*-\Delta t^*}+\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_b^t\right\} r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p =$$

$$\left[2\mu_t^{*t^*}\left(\frac{1}{r_p^*}\frac{V_{zet}^{*t^*}-V_{zwt}^{*t^*}}{d\theta_e}\right) - 2\mu_b^{*t^*}\left(\frac{1}{r_p^*}\frac{V_{zeb}^{*t^*}-V_{zwb}^{*t^*}}{d\theta_e}\right)\right] r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e -$$

$$\left[\mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{1}{r_p^*}\frac{V_{zet}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{zwt}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e}\right) - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{1}{r_p^*}\frac{V_{zeb}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{zwb}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e}\right)\right] r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e +$$

$$\left[\left(2\mu_t^{*t^*}-\mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{\theta T}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_t^*}\right)\right] r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e - \left[\left(2\mu_b^{*t^*}-\mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{\theta B}^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_b^*}\right)\right] r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e$$

Avec :

$$\mu_t^* = \frac{dz_t^*}{\dfrac{\Delta z_E^*}{\mu_e^*} + \dfrac{\Delta z_T^*}{\mu_{TE}^*}} + \frac{dz_t^*}{\dfrac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \dfrac{\Delta z_T^*}{\mu_T^*}} \quad , \quad \mu_b^* = \frac{dz_b^*}{\dfrac{\Delta z_E^*}{\mu_e^*} + \dfrac{\Delta z_T^*}{\mu_{BE}^*}} + \frac{dz_b^*}{\dfrac{\Delta z_P^*}{\mu_P^*} + \dfrac{\Delta z_B^*}{\mu_B^*}}$$

$$\mu_e^* = \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1) \quad , \quad \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{TE}^* = \mu^*(i, j+1, k+1) \quad , \quad \mu_B^* = \mu^*(i, j-1, k)$$

$$\mu_{BE}^* = \mu^*(i, j-1, k+1) \quad , \quad \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k)$$

$$dz_t^* = dz(j) \quad , \quad dz_b^* = dz^*(j-1) \quad , \quad d\theta_e = d\theta(k)$$

$$V_{zet}^* = V_z^*(i, j, k+1)\ ,\ V_{zeb}^* = V_z^*(i, j-1, k+1)\ ,\ V_{zwt}^* = V_z^*(i, j, k),\ \ V_{zwb}^* = V_z^*(i, j-1, k)$$

$$V_{\theta T}^* = V_\theta^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{\theta P}^* = V_\theta^*(i, j, k) \quad , \quad V_{\theta B}^* = V_\theta^*(i, j-1, k)$$

*** le terme** $\left(\dfrac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\right)T^*$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\right)T^*\Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\right)T^*\Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \left(\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\right)T^*\Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\left\{\left[2\left(T^*\right)\Big|_P\Big|^{t^*} - \left(T^*\right)\Big|_P\Big|^{t^*-\Delta t^*}\right]\right\} r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* =$$

$$\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\left(T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}\right) r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* - \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\left(\frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*$$

L'ensemble des termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{\theta P}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{\theta N}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{\theta S}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{\theta E}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{\theta W}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{\theta T}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{\theta B}^{*t^*+\Delta t^*} + S_\theta^{t^*+\Delta t^*} \tag{3.17}$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_n^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_s^{*2} d\theta_e \Delta z_p^*}{r_p^* dr_n^*}$$

$$A_E = de = \frac{2}{Re_0}\left(2\mu_e^{*t^*} - \mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{2}{Re_0}\left(2\mu_w^{*t^*} - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_t^{*t^*} - \mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e}{dz_t^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_b^{*t^*} - \mu_b^{*t-\Delta t^*}\right)\frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_e}{dz_b^*}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2}\frac{r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^*}{\Delta t^*} \tag{3.18}$$

$$S_\theta^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{\theta p}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e\, \Delta z_p^* - \frac{V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e\, \Delta z_p^* +$$

$$\left[fn^{t^*-\Delta t^*} - fn^{t^*}\right] + \left[fs^{t^*} - fs^{t^*-\Delta t^*}\right] + \left[fe^{t^*-\Delta t^*} - fe^{t^*}\right] + \left[fw^{t^*} - fw^{t^*-\Delta t^*}\right] + \left[ft^{t^*-\Delta t^*} - ft^{t^*}\right] + \left[fb^{t^*} - fb^{t^*-\Delta t^*}\right] +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\mu_n^{*t^*} \dfrac{r_n^*}{r_p^*} \dfrac{V_{rne}^{*t^*} - V_{rnw}^{*t^*}}{d\theta_e} - 2\mu_s^{*t^*} \dfrac{r_s^*}{r_p^*} \dfrac{V_{rse}^{*t^*} - V_{rsw}^{*t^*}}{d\theta_e} - \\ \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{r_s^*}{r_p^*} \dfrac{V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{r_n^*}{r_p^*} \dfrac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*}}{d\theta_e} \end{array}\right] d\theta_e\, \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} \mu_n^{*t^*} \dfrac{r_n^*}{r_p^*}\left(V_{\theta N}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}\right) + \mu_s^{*t^*} \dfrac{r_s^*}{r_p^*}\left(V_{\theta S}^{*t^*} + V_{\theta P}^{*t^*}\right) + \\ \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{r_n^*}{r_p^*} \dfrac{V_{\theta N}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{r_s^*}{r_p^*} \dfrac{V_{\theta S}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{2} \end{array}\right] d\theta_e\, \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\mu_e^{*t^*}\left(\dfrac{V_{rne}^{*t^*} + V_{rse}^{*t^*}}{r_p^*}\right) - 2\mu_w^{*t^*}\left(\dfrac{V_{rnw}^{*t^*} + V_{rsw}^{*t^*}}{r_p^*}\right) - \\ \mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\left(\dfrac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*}\right) - \mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\left(\dfrac{V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*} + V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^*}\right) \end{array}\right] \Delta r_p^* \Delta z_p^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\left(\mu_t^{*t^*} \dfrac{V_{zet}^{*t^*} - V_{zwt}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_b^{*t^*} \dfrac{V_{zeb}^{*t^*} - V_{zwb}^{*t^*}}{r_p^* d\theta_e}\right) + \\ \left(\mu_t^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{V_{zet}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zwt}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e} - \mu_b^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{V_{zeb}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zwb}^{*t^*-\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e}\right) \end{array}\right] r_p^* \Delta r_p^* d\theta_e +$$

$$\left(\frac{V_{rne}^{*t^*}+V_{rnw}^{*t^*}+V_{rse}^{*t^*}+V_{rsw}^{*t^*}}{2}V_{\theta p}^{*t^*}-\frac{V_{rne}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{rnw}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{rse}^{*t^*-\Delta t^*}+V_{rsw}^{*t^*-\Delta t^*}}{4}V_{\theta p}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\Delta r_p^* d\theta_e \Delta z_p^* +$$

$$-\frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\left(T_E^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e\Delta z_p^* + \frac{Gr_0^*}{Re_0^2}\sin\theta\left(\frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)r_p^*\Delta r_p^* d\theta_e\Delta z_p^* +$$

$$\left(P_p^{*t^*+\Delta t^*}-P_E^{*t^*+\Delta t^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^*$$

La source peut s’écrire :

$$S_\theta^{t^*+\Delta t^*}=b_\theta^*+\left(P_p^{*t^*+\Delta t^*}-P_E^{*t^*+\Delta t^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^*$$

Et l’équation de discrétisation serait :

$$\begin{aligned} A_P\, V_{\theta\,P}^{*\;t^*+\Delta t^*} &= A_N\, V_{\theta\,N}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_S\, V_{\theta\,S}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_E\, V_{\theta\,E}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_W\, V_{\theta\,W}^{*\;t^*+\Delta t^*}+ \\ & A_T\, V_{\theta\,T}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_B\, V_{B\,\theta}^{*\;t^*+\Delta t^*}+b_\theta^*+\left(P_p^{*\;t^*+\Delta t^*}-P_E^{*\;t^*+\Delta t^*}\right)\Delta r_p^*\,\Delta z_p^* \end{aligned} \tag{3.19}$$

Comme $V_{\theta p}^{*t^*+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse V_θ^* à l’interface **e** du volume typique $\left(V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*}\right)$, on peut écrire l’équation donnant la vitesse $V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*}$:

$$\begin{aligned} A_P\, V_{\theta\,e}^{*\;t^*+\Delta t^*} &= A_N\, V_{\theta\,N}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_S\, V_{\theta\,S}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_E\, V_{\theta\,E}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_W\, V_{\theta\,W}^{*\;t^*+\Delta t^*}+ \\ & A_T\, V_{\theta\,T}^{*\;t^*+\Delta t^*}+A_B\, V_{\theta\,B}^{*\;t^*+\Delta t^*}+b_\theta^*+\left(P_p^{*\;t^*+\Delta t^*}-P_E^{*\;t^*+\Delta t^*}\right)\Delta r_p^*\,\Delta z_p^* \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.4.6 Discrétisation de l’équation de conservation de la quantité de mouvement axiale

L’équation de conservation de la quantité de mouvement azimutale (2.5) est exprimée en termes de vitesses et de contraintes visqueuses comme suit:

$$\frac{\partial V_Z^*}{\partial t^*}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*V_r^*V_z^*\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(V_\theta^*V_z^*\right)+\frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^*V_z^*\right)=-\frac{\partial P^*}{\partial z^*}+\frac{1}{Re_0}\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\tau_{rz}^*\right)+\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta z}^*\right)+\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{zz}^*\right)\right]$$

Les composantes du tenseur des contraintes visqueuses, normales et tangentielles, sont :

$$\tau_{zr}^*=\tau_{rz}^*=\mu^*\left[\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}+\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right]\quad,\quad \tau_{\theta z}^*=\tau_{z\theta}^*=\mu^*\left[\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_z^*}{\partial\theta}\right]\qquad \tau_{zz}^*=2\mu^*\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}$$

Chaque terme de l’équation de conservation de la quantité de mouvement axiale est intégré dans le volume de contrôle décalé suivant la direction axiale (voir les figures **(3.10.a)** et **(3.10.b)**).

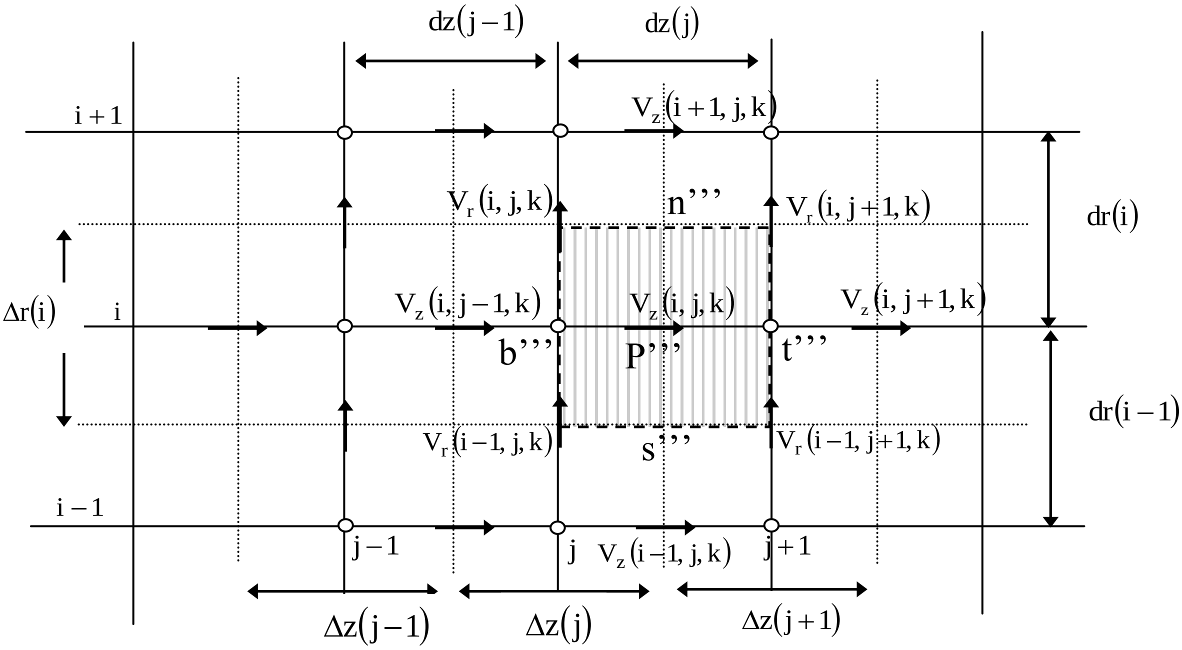


Figure 3.10.a : les faces, dans le plan (*r*,*z*) des volumes finis décalés suivant la direction axiale.

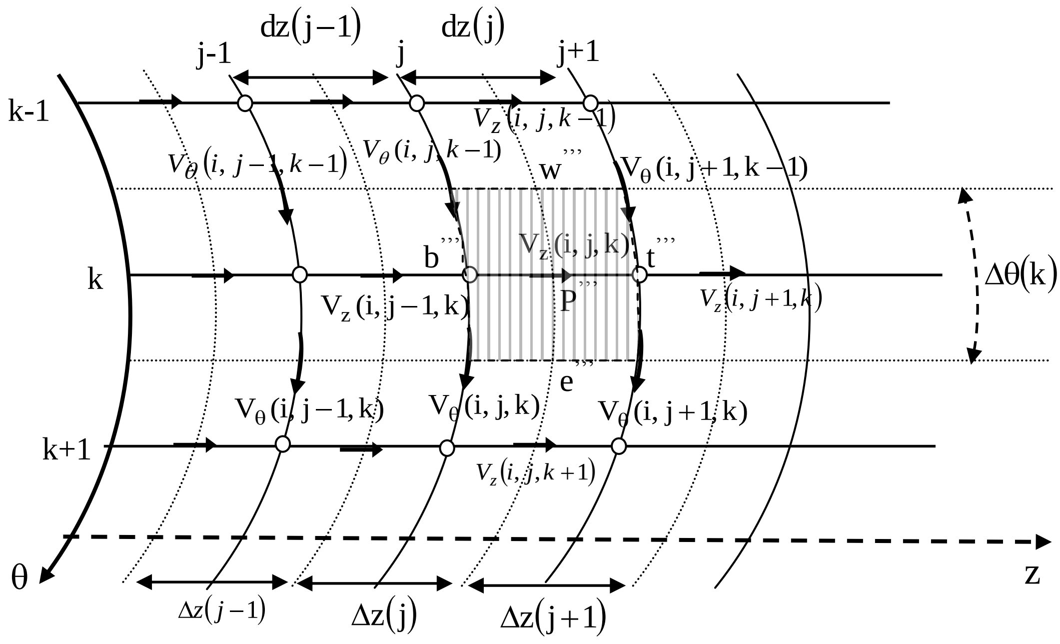


Figure 3.10.b : les faces, dans le plan (θ,z), des volumes finis décalés suivant la direction axiale.

- **Terme transitoire :**

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left.\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*}\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz = \frac{3V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} - 4V_{zP}^{*t^*} + V_{zP}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p dz_p^*$$

- **Termes advectifs :**

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* V_z^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^*$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* V_z^*\right)\right|^{t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* V_z^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^*$$

$$\left[2\left(r_n^* V_{rn}^{*t^*} V_{zn}^{*t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*} V_{zs}^{*t^*}\right) - \left(r_n^* V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zn}^{*t^*-\Delta t^*} - r_s^* V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zs}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right] \Delta\theta_p dz_t^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* V_z^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = 2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* V_z^*\right)\right|^{t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* V_z^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2\left(V_{\theta e}^{*t^*} V_{ze}^{*t^*} - V_{\theta w}^{*t^*} V_{zw}^{*t^*}\right) - \left(V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} V_{ze}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zw}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right] \Delta r_p^*\, dz_t^*$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^* V_z^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = 2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^* V_z^*\right)\right|^{t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left.\left(V_z^* V_z^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left[2\left(V_{zt}^{*t^*} V_{zt}^{*t^*} - V_{zb}^{*t^*} V_{zb}^{*t^*}\right) - \left(V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*}\right)\right] r_p^*\, \Delta r_p^*\, \Delta\theta_p$$

- **Terme de pression :**

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t -\left.\frac{\partial P^*}{\partial z^*}\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*}\right) r_p^*\, \Delta r_p^* \Delta\theta_p$$

- **Termes diffusifs :**

$*$ **Le terme** $\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \tau_{rz}^*\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* \tau_{rz}^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* \tau_{rz}^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left[r^* \mu^{*t^*}\left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right] dr^* d\theta\, dz^* -$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left[r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right] dr^*\, d\theta\, dz^* =$$

$$\left\{ 2\left[r^* \mu^{*t^*}\left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)^{t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_s^n - \left[r^* \mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial z^*}\right)^{t^*-\Delta t^*} + \left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_s^n \right\} \Delta\theta_p dz_t^* =$$

$$\left[2\mu_n^{*t^*} r_n^* \left(\frac{V_{rnt}^{*t^*} - V_{rnb}^{*t^*}}{dz_t^*}\right) - 2\mu_s^{*t^*} r_s^* \left(\frac{V_{rst}^{*t^*} - V_{rsb}^{*t^*}}{dz_t^*}\right)\right] \Delta\theta_p\, dz_t^* -$$

$$\left[\mu_n^{*t^*-\Delta t^*} r_n^* \left(\frac{V_{rnt}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rnb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*}\right) - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} r_s^* \left(\frac{V_{rst}^{*t^*-\Delta t^*} - V_{rsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*}\right)\right] \Delta\theta_p dz_t^* +$$

$$\left(2\mu_n^{*t^*} - \mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(r_n^* \frac{V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*}\right)\Delta\theta_p\, d z_t^* - \left(2\mu_s^{*t^*} - \mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(r_s^* \frac{V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*}\right)\Delta\theta_p\, d z_t^*$$

Avec

$$\mu_n^* = \frac{dr_n^*}{\dfrac{\Delta r_P^*}{\mu_t^*} + \dfrac{\Delta r_N^*}{\mu_{NT}^*}} + \frac{dr_n^*}{\dfrac{\Delta r_P^*}{\mu_p^*} + \dfrac{\Delta r_N^*}{\mu_N^*}} \quad , \quad \mu_s^* = \frac{dr_s^*}{\dfrac{\Delta r_P^*}{\mu_t^*} + \dfrac{\Delta r_S^*}{\mu_{ST}^*}} + \frac{dr_s^*}{\dfrac{\Delta r_P^*}{\mu_P^*} + \dfrac{\Delta r_S^*}{\mu_S^*}}$$

$$\mu_t^* = \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{NT}^* = \mu^*(i+1, j+1, k) \quad , \quad \mu_N^* = \mu^*(i+1, j, k)$$

$$\mu_{ST}^* = \mu^*(i-1, j+1, k) \quad , \quad \mu_S^* = \mu^*(i-1, j, k)$$

$$V_{rnt}^* = V_r^*(i, j+1, k) \ , V_{rst}^* = V_r^*(i-1, j+1, k) \ , \ V_{rnb}^* = V_r^*(i, j, k), \ \ V_{rsb}^* = V_r^*(i-1, j, k)$$

$$V_{zN}^* = V_z^*(i+1, j, k) \quad , \quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{zS}^* = V_z^*(i-1, j, k)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1) \quad , \quad dr_s^* = dr^*(i-1) \quad , \quad dr_n^* = dr^*(i)$$

$$\Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) \quad , \quad \Delta r_P^* = \Delta r^*(i) \quad , \quad \Delta r_S^* = \Delta r^*(i-1)$$

*** le terme** $\dfrac{1}{r^*}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta z}^*\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta z}^*\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*} r^*\, dr^*\, d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tau_{\theta z}^*\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*} dr^*\, d\theta\, dz^* =$$

$$2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{ \mu^{*t^*}\left[\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*} + \left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_z^*}{\partial\theta}\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right]\right\} dr^*\, d\theta\, dz^* \ -$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left[\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}+\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_Z^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]\right\}dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\left\{\left[2\mu^{*t^*}\left(\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*}+\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_Z^*}{\partial\theta}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_w^e-\left[\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}+\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_Z^*}{\partial\theta}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_w^e\right\}\Delta r_p^*\,dz_t^* =$$

$$\left[\left(2\mu^{*t^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*}+\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial z^*}\right)^{t^*-\Delta t^*}\right)\right]_w^e\Delta r_p^* dz_t^* + \left[\left(2\mu^{*t^*}-\mu^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial V_z^*}{\partial\theta}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right]_w^e\Delta r_p^* dz_t^* =$$

$$\left[2\mu_e^{*t^*}\left(\frac{V_{\theta et}^{*t^*}-V_{\theta P}^{*t^*}}{dz_t^*}\right)-2\mu_w^{*t^*}\left(\frac{V_{\theta wt}^{*t^*}-V_{\theta wb}^{*t^*}}{dz_t^*}\right)\right]\Delta r_p^* dz_t^* -$$

$$\left[\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{V_{\theta et}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*}\right)-\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{V_{\theta wt}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta wb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*}\right)\right]\Delta r_p^* dz_t^* +$$

$$\left(2\mu_e^{*t^*}-\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_e}\right)\Delta r_p^* d\,z_t^* - \left(2\mu_w^{*t^*}-\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*}}{r_p^* d\theta_w}\right)\Delta r_p^* d\,z_t^*$$

Avec :

$$\mu_e^* = \frac{d\theta_e}{\dfrac{\Delta\theta_P}{\mu_t^*}+\dfrac{\Delta\theta_E}{\mu_{ET}^*}}+\frac{d\theta_e}{\dfrac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*}+\dfrac{\Delta\theta_E}{\mu_E^*}} \quad , \quad \mu_w^* = \frac{d\theta_w}{\dfrac{\Delta\theta_P}{\mu_t^*}+\dfrac{\Delta\theta_W}{\mu_{WT}^*}}+\frac{d\theta_w}{\dfrac{\Delta\theta_P}{\mu_P^*}+\dfrac{\Delta\theta_W}{\mu_W^*}}$$

$$\mu_t^* = \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \qquad , \quad \mu_p^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\mu_{ET}^* = \mu^*(i, j+1, k+1) \qquad , \quad \mu_E^* = \mu^*(i, j, k+1)$$

$$\mu_{WT}^* = \mu^*(i, j+1, k-1) \qquad , \quad \mu_W^* = \mu^*(i, j, k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \qquad , \quad d\theta_w = d\theta(k-1) \qquad , \qquad r_p^* = r_p^*(i)$$

$$\Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1) \qquad , \quad \Delta\theta_P = \Delta\theta(k) \qquad , \qquad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$V_{\theta et}^* = V_\theta^*(i, j+1, k),\; V_{\theta wt}^* = V_\theta^*(i, j+1, k-1),\; V_{\theta wb}^* = V_\theta^*(i, j, k-1),\; V_{\theta P}^* = V_\theta^*(i, j, k)$$

$$V_{zE}^* = V_z^*(i, j, k+1)\,,\quad V_{zP}^* = V_z^*(i, j, k) \qquad , \quad V_{zW}^* = V_z^*(i, j, k-1)$$

*** le terme** $\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{zz}^*\right)$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tau_{zz}^*\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*dr^*\,d\theta\,dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(2\mu^*\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}\right)\Bigg|^{t^*+\Delta t^*} r^*dr^*\,d\theta\,dz^* =$$

$$\left\{2\left[2\mu^{*t^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right]_b^t-\left[2\mu^{*t^*-\Delta t^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial z^*}\right)^{t^*+\Delta t^*}\right]_b^t\right\}r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p =$$

$$\left[2\left(2\mu_t^{*t^*}-\mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}}{\Delta z_T^*}\right)\right]r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p-\left[2\left(2\mu_b^{*t^*}-\mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}-V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*}}{\Delta z_P^*}\right)\right]r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p$$

Avec :

$$\mu_t^* = \mu_T^* = \mu^*(i, j+1, k) \quad , \quad \mu_b^* = \mu_P^* = \mu^*(i, j, k)$$

$$\Delta z_T^* = \Delta z^*(j+1) \quad , \quad \Delta z_P^* = \Delta z^*(j)$$

$$V_{zT}^* = V_z^*(i, j+1, k) \quad , \quad V_{zp}^* = V_z^*(i, j, k) \quad , \quad V_{zB}^* = V_z^*(i, j-1, k)$$

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*} = A_N V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*} + A_T V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*} + S_z^{t^*+\Delta t^*}$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_n^{*t^*}-\mu_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_n^*\Delta\theta_p dz_t^*}{dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_s^{*t^*}-\mu_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_s^*\Delta\theta_p dz_t^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_e^{*t^*}-\mu_e^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{\Delta r_P^* dz_t^*}{r_P^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{1}{Re_0}\left(2\mu_w^{*t^*}-\mu_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{\Delta r_p^* dz_t^*}{r_p^* d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{2}{Re_0}\left(2\mu_t^{*t^*}-\mu_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p}{\Delta z_T^*}$$

$$A_B = db = \frac{2}{Re_0}\left(2\mu_b^{*t^*}-\mu_b^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p}{\Delta z_P^*}$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B + \frac{3}{2}\frac{r_P^*\Delta r_P^*\Delta\theta_p dz_t^*}{\Delta t^*} \tag{3.21}$$

$$S_z^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4V_{zp}^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_P\, dz_t^* - \frac{V_{zp}^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_P^*\Delta r_P^*\Delta\theta_P\, dz_t^* +$$

$$\left[fn^{t^*-\Delta t^*}-fn^{t^*}\right]+\left[fs^{t^*}-fs^{t^*-\Delta t^*}\right]+\left[fe^{t^*-\Delta t^*}-fe^{t^*}\right]+\left[fw^{t^*}-fw^{t^*-\Delta t^*}\right]+\left[ft^{t^*-\Delta t^*}-ft^{t^*}\right]+\left[fb^{t^*}-fb^{t^*-\Delta t^*}\right]+$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\mu_n^{*t^*} r_n^* \dfrac{V_{rnt}^{*t^*}-V_{rnb}^{*t^*}}{dz_t^*} - 2\mu_s^{*t^*} r_s^* \dfrac{V_{rst}^{*t^*}-V_{rsb}^{*t^*}}{dz_t^*} - \\ \mu_n^{*t^*-\Delta t^*} r_n^* \dfrac{V_{rnt}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{rnb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} + \mu_s^{*t^*-\Delta t^*} r_s^* \dfrac{V_{rst}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{rsb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \end{array}\right]\Delta\theta_p dz_t^* +$$

$$\frac{1}{Re_0}\left[\begin{array}{l} 2\mu_e^{*t^*} \dfrac{V_{\theta et}^{*t^*}-V_{\theta P}^{*t^*}}{dz_t^*} - 2\mu_w^{*t^*} \dfrac{V_{\theta wt}^{*t^*}-V_{\theta wb}^{*t^*}}{dz_t^*} - \\ \mu_w^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{V_{\theta wt}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta wb}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} + \mu_e^{*t^*-\Delta t^*} \dfrac{V_{\theta et}^{*t^*-\Delta t^*}-V_{\theta P}^{*t^*-\Delta t^*}}{dz_t^*} \end{array}\right]\Delta r_p^* dz_t^* +$$

$$\left(P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*}\right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p$$

On peut écrire aussi

$$S_z^{t^*+\Delta t^*} = b_z^* + \left(P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*}\right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p$$

Et l'équation de discrétisation serait :

$$\begin{aligned} A_P V_{zP}^{*\ t^*+\Delta t^*} = {} & A_N V_{zN}^{*\ t^*+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*\ t^*+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*\ t^*+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*\ t^*+\Delta t^*} + \\ & A_T V_{zT}^{*\ t^*+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*\ t^*+\Delta t^*} + b_z^* + \left(P_P^{*\ t^*+\Delta t^*} - P_T^{*\ t^*+\Delta t^*}\right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \end{aligned} \quad (3.22)$$

Comme $V_{zP}^{*t^*+\Delta t^*}$ correspond à la vitesse V_z^* à l'interface **t** du volume typique$\left(V_{zt}^{*t^*+\Delta t^*}\right)$, on peut écrire l'équation donnant la vitesse $V_{zt}^{*t^*+\Delta t^*}$:

$$\begin{aligned} A_P V_{zt}^{*\,t^*+\Delta t^*} = {} & A_N V_{zN}^{*\,t^*+\Delta t^*} + A_S V_{zS}^{*\,t^*+\Delta t^*} + A_E V_{zE}^{*\,t^*+\Delta t^*} + A_W V_{zW}^{*\,t^*+\Delta t^*} + \\ & A_T V_{zT}^{*\,t^*+\Delta t^*} + A_B V_{zB}^{*\,t^*+\Delta t^*} + b_z^* + \left(P_P^{*\,t^*+\Delta t^*} - P_T^{*\,t^*+\Delta t^*}\right) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.4.7 Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie (2.6) est exprimée en termes de vitesses et de flux thermiques comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* V_r^* T^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta^* T^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* T^*\right) = G^* - \\ \frac{1}{Re_0\ Pr_0}\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* q_r^*\right) + \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(q_\theta^*\right) + \frac{\partial}{\partial z^*}\left(q_z^*\right)\right] \end{aligned}$$

Avec $G^* = \begin{cases} K_s^* / (Re_0\ Pr_0) & \text{dans le solide} \\ 0 & \text{dans le fluide} \end{cases}$

Et les densités de flux thermiques sont :

$$q_r^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \quad , \quad q_\theta^* = -\frac{K^*}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad q_z^* = -K^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*}$$

L'équation de l'énergie est discrétisée dans un volume de contrôle typique, donc :

- **Terme transitoire :**

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \left.\frac{\partial T^*}{\partial t^*}\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = \frac{3T_P^{*t^*+\Delta t^*} - 4T_P^{*t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

- **Termes advectifs :**

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* T^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = 2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* T^*\right)\right|^{t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left.\left(r^* V_r^* T^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left\{2\left[\left.\left(r^* V_r^* T^*\right)\right|_n^{t^*} - \left.\left(r^* V_r^* T^*\right)\right|_s^{t^*}\right] - \left[\left.\left(r^* V_r^* T^*\right)\right|_n^{t^*-\Delta t^*} - \left.\left(r^* V_r^* T^*\right)\right|_s^{t^*-\Delta t^*}\right]\right\}\Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$\left\{2\left[\left(r_n^* V_{rn}^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2}\right) - \left(r_s^* V_{rs}^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2}\right)\right]^{t^*} - \left[\left(r_n^* V_{rn}^* \frac{T_N^* + T_P^*}{2}\right) - \left(r_s^* V_{rs}^* \frac{T_P^* + T_S^*}{2}\right)\right]^{t^*-\Delta t^*}\right\}\Delta\theta_p \Delta z_p^* =$$

$$\left\{\left[r_n^* V_{rn}^{*t^*}\left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}\right)\right] - \left[r_s^* V_{rs}^{*t^*}\left(T_P^{*t^*} + T_S^{*t^*}\right)\right]\right\}\Delta\theta_p \Delta z_p^* -$$

$$\left[\left(r_n^* V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) - \left(r_s^* V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)\right]\Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Avec :

$$T_N^* = T^*(i+1, j, K) \quad , \quad T_P^* = T^*(i, j, K) \quad , \quad T_S^* = T^*(i-1, j, K)$$

$$V_{rn}^* = V_r^*(i, j, K) \quad , \quad V_{rs}^* = V_r^*(i-1, j, K)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1)$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* T^*\right)\right|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = 2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* T^*\right)\right|^{t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial \theta}\left.\left(V_\theta^* T^*\right)\right|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left\{2\left[\left(V_{\theta e}^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2}\right) - \left(V_{\theta w}^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2}\right)\right]^{t^*} - \left[\left(V_{\theta e}^* \frac{T_E^* + T_P^*}{2}\right) - \left(V_{\theta w}^* \frac{T_P^* + T_W^*}{2}\right)\right]^{t^*-\Delta t^*}\right\}\Delta r_p^* \Delta z_p^* =$$

$$\left\{\left[V_{\theta e}^{*t^*}\left(T_E^{*t^*} + T_P^{*t^*}\right)\right] - \left[V_{\theta w}^{*t^*}\left(T_P^{*t^*} + T_W^{*t^*}\right)\right]\right\}\Delta r_p^* \Delta z_p^* -$$

$$\left[\left(V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) - \left(V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_W^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)\right]\Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

Avec :

$$T_E^* = T^*(i,j,K+1) \quad , \quad T_P^* = T^*(i,j,K) \quad , \quad T_W^* = T^*(i,j,K-1)$$

$$V_{\theta e}^* = V_\theta^*(i,j,K) \quad , \quad V_{\theta w}^* = V_\theta^*(i,j,K-1)$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* T^*\right)\Big|^{t^*+\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* = 2\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* T^*\right)\Big|^{t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(V_z^* T^*\right)\Big|^{t^*-\Delta t^*} r^* dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left\{2\left[\left(V_z^* T^*\right)\Big|_t^{t^*} - \left(V_z^* T^*\right)\Big|_b^{t^*}\right] - \left[\left(V_z^* T^*\right)\Big|_t^{t^*-\Delta t^*} - \left(V_z^* T^*\right)\Big|_b^{t^*-\Delta t^*}\right]\right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p =$$

$$\left\{2\left[\left(V_{zt}^* \frac{T_T^* + T_P^*}{2}\right) - \left(V_{zb}^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2}\right)\right]^{t^*} - \left[\left(V_{zt}^* \frac{T_T^* + T_P^*}{2}\right) - \left(V_{zb}^* \frac{T_P^* + T_B^*}{2}\right)\right]^{t^*-\Delta t^*}\right\} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p =$$

$$\left\{\left[V_{zt}^{*t^*}\left(T_T^{*t^*} + T_P^{*t^*}\right)\right] - \left[V_{zb}^{*t^*}\left(T_P^{*t^*} + T_B^{*t^*}\right)\right]\right\} r_p \Delta r_p^* \Delta\theta_p -$$

$$\left[\left(V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_T^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) - \left(V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*} \frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_B^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)\right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p$$

Avec :

$$T_T^* = T^*(i,j+1,K) \quad , \quad T_P^* = T^*(i,j,K) \quad , \quad T_B^* = T^*(i,j-1,K)$$

$$V_{zt}^* = V_z^*(i,j,K) \quad , \quad V_{zb}^* = V_z^*(i,j-1,K)$$

- **Termes diffusifs :**

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* q_r^*\right) r^* dr^* d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* q_r^*\right) dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left(2r^* K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right) dr^* d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right) dr^* d\theta\, dz^* =$$

$$\left(2r^* K^{*t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_s^n \Delta\theta\,\Delta z^* - \left(r^* K^{*t^*-\Delta t^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_s^n \Delta\theta\,\Delta z^* = \left[\left(2K^{*t^*} - K^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}\Big|^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_s^n \Delta\theta\,\Delta z^* =$$

$$\left\{\left(2K_n^{*t^*} - K_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(r_n^* \frac{T_N^{*t^*+\Delta t^*} - T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_n^*}\right) - \left(2K_s^{*t^*} - K_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(r_s^* \frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*} - T_S^{*t^*+\Delta t^*}}{dr_s^*}\right)\right\} \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

Avec :

$$K_n^* = \frac{2dr_n^*}{\dfrac{\Delta r_P^*}{K_P^*} + \dfrac{\Delta r_N^*}{K_N^*}} \quad , \quad K_s^* = \frac{2dr_s^*}{\dfrac{\Delta r_P^*}{K_P^*} + \dfrac{\Delta r_S^*}{K_S^*}}$$

$$K_N^* = K^*(i+1,j,K) \quad , \quad K_P^* = K^*(i,j,K) \quad , \quad K_S^* = K^*(i-1,j,K)$$

$$dr_n^* = dr^*(i) \quad , \quad dr_s^* = dr^*(i-1)$$

$$\Delta r_N^* = \Delta r^*(i+1) \quad , \quad \Delta r_P^* = \Delta r^*(i) \quad , \quad \Delta r_S^* = \Delta r^*(i-1)$$

$$r_n^* = r_c^*(i) \quad , \quad r_s^* = r_c^*(i-1)$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(q_\theta^*\right)r^*dr^*d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left(q_\theta^*\right)dr^*d\theta\, dz^* =$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left(2K^{*t^*}\frac{1}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)dr^*d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial\theta}\left(K^{*t^*-\Delta t^*}\frac{1}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)dr^*d\theta\, dz^* =$$

$$\left(2K^{*t^*}\frac{1}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_w^e \Delta r_p^*\Delta z_p^* - \left(K^{*t^*-\Delta t^*}\frac{1}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_w^e \Delta r_p^*\Delta z_p^* = \left[\left(2K^{*t^*}-K^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial\theta}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_w^e \Delta r_p^*\Delta z_p^* =$$

$$\left\{\left(2K_e^{*t^*}-K_e^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r_P^*}\frac{T_E^{*t^*+\Delta t^*}-T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_e}\right) - \left(2K_w^{*t^*}-K_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{1}{r_P^*}\frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*}-T_W^{*t^*+\Delta t^*}}{d\theta_w}\right)\right\}\Delta r_p^*\Delta z_p^*$$

Avec :

$$K_e^* = \frac{2d\theta_e}{\dfrac{\Delta\theta_p}{K_p^*}+\dfrac{\Delta\theta_E}{K_E^*}} \quad , \quad K_w^* = \frac{2d\theta_w}{\dfrac{\Delta\theta_p}{K_p^*}+\dfrac{\Delta\theta_W}{K_W^*}}$$

$$K_E^* = K^*(i,j,k+1) \quad , \quad K_W^* = K^*(i,j,k-1)$$

$$d\theta_e = d\theta(k) \qquad d\theta_w = d\theta(k-1) \qquad \Delta\theta_E = \Delta\theta(k+1)$$

$$\Delta\theta_P = \Delta\theta(k) \quad , \quad \Delta\theta_W = \Delta\theta(k-1)$$

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(q_z^*\right)r^*dr^*d\theta\, dz^* = \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(2K^{*t^*}\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)r^*dr^*d\theta\, dz^* - \int_w^e\int_s^n\int_b^t \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^{*t^*-\Delta t^*}\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)r^*dr^*d\theta\, dz^* =$$

$$\left(2K^{*t^*}\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_b^t r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p - \left(K^{*t^*-\Delta t^*}\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\Bigg|_b^t r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p = \left[\left(2K^{*t^*}-K^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\bigg|^{t^*+\Delta t^*}\right)\right]_b^t r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p =$$

$$\left\{\left(2K_t^{*t^*}-K_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{T_T^{*t^*+\Delta t^*}-T_P^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_t^*}\right) - \left(2K_b^{*t^*}-K_b^{*t^*-\Delta t^*}\right)\left(\frac{T_P^{*t^*+\Delta t^*}-T_B^{*t^*+\Delta t^*}}{dz_b^*}\right)\right\}r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p$$

Avec :

$$K_t^* = \frac{2dz_t^*}{\dfrac{\Delta z_p^*}{K_p^*}+\dfrac{\Delta z_T^*}{K_T^*}} \quad , \quad K_b^* = \frac{2dz_b^*}{\dfrac{\Delta z_p^*}{K_p^*}+\dfrac{\Delta z_B^*}{K_B^*}}$$

$$K_T^* = K^*(i,j+1,k) \quad , \quad K_P^* = K^*(i,j,k) \quad , \quad K_B^* = K^*(i,j-1,k)$$

$\Delta z_T^* = \Delta z^*(j+1)$, $\Delta z_P^* = \Delta z^*(j)$, $\Delta z_B^* = \Delta z^*(j-1)$

$dz_t^* = dz^*(j)$, $dz_b^* = dz^*(j-1)$

Termes de production d'énergie :

$$\int_w^e\int_s^n\int_b^t G^* r^* dr^* d\theta\, dz^* = G^*\int_w^e\int_s^n\int_b^t r^* dr^* d\theta\, dz^* = G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

La production G^* est constante $\left(G^* = \dfrac{K_s^*}{Re_0\, Pr_0}\right)$.

Les termes intégrés sont réarrangés dans une équation de discrétisation algébrique sous la forme standard :

$$A_P T_p^{*t^*+\Delta t^*} = A_N T_N^{*t^*+\Delta t^*} + A_S T_S^{t^*+\Delta t^*} + A_E T_E^{*t^*+\Delta t^*} + A_W T_W^{*t^*+\Delta t^*} + A_T T_T^{*t^*+\Delta t^*} + A_B T_B^{t^*+\Delta t^*} + S^{t^*+\Delta t^*} \quad (3.24)$$

Avec :

$$A_N = dn = \frac{1}{Re_0\, Pr_0}\left(2K_n^{*t^*} - K_n^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_n^*}$$

$$A_S = ds = \frac{1}{Re_0\, Pr_0}\left(2K_s^{*t^*} - K_s^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{dr_s^*}$$

$$A_E = de = \frac{1}{Re_0\, Pr_0}\left(2K_e^{*t^*} - K_e^{t^*-\Delta t^*}\right)\frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p^* d\theta_e}$$

$$A_W = dw = \frac{1}{Re_0\, Pr_0}\left(2K_w^{*t^*} - K_w^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{r_p d\theta_w}$$

$$A_T = dt = \frac{1}{Re_0\, Pr_0}\left(2K_t^{*t^*} - K_t^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_P}{dz_t^*}$$

$$A_B = db = \frac{1}{Re_0\, Pr_0}\left(2K_b^{*t^*} - K_b^{*t^*-\Delta t^*}\right)\frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_P}{dz_b^*}$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W + A_T + A_B + \frac{3}{2}\frac{r_p^* \Delta r_P^* \Delta\theta_p dz_t^*}{\Delta t^*} \quad (3.25)$$

$$S^{t^*+\Delta t^*} = \frac{4T_p^{*t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* - \frac{T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* + G^* r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*}\frac{T_N^{*t^*-\Delta t^*} + T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right) - V_{rn}^{*t^*}\left(T_N^{*t^*} + T_P^{*t^*}\right)\right] r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[V_{rs}^{*t^*}\left(T_P^{*t^*} + T_S^{*t^*}\right) - \left(V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*}\frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*} + T_S^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)\right] r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* +$$

$$\left[\left(V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*}\frac{T_E^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)-V_{\theta e}^{*t^*}\left(T_E^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)\right]\Delta r_p^*\Delta z_p^*+$$

$$\left[V_{\theta w}^{*t^*}\left(T_P^{*t^*}+T_W^{*t^*}\right)-\left(V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*}\frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*}+T_W^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)\right]\Delta r_p^*\Delta z_p^*+$$

$$\left[\left(V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*}\frac{T_T^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)-V_{zt}^{*t^*}\left(T_T^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)\right]r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p+$$

$$\left[V_{zb}^{*t^*}\left(T_P^{*t^*}+T_B^{*t^*}\right)-\left(V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*}\frac{T_P^{*t^*-\Delta t^*}+T_B^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\right)\right]r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p$$

$$S^{t^*+\Delta t^*}=\frac{4T_p^{*t^*}}{2\Delta t^*}r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*-\frac{T_p^{*t^*-\Delta t^*}}{2\Delta t^*}r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*+G^*r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*$$

$$\left(f_n^{t^*-\Delta t^*}-f_n^{t^*}\right)+\left(f_s^{t^*}-f_s^{t^*-\Delta t^*}\right)+\left(f_e^{t^*-\Delta t^*}-f_e^{t^*}\right)+\left(f_w^{t^*}-f_w^{t^*-\Delta t^*}\right)+\left(f_t^{t^*-\Delta t^*}-f_t^{t^*}\right)+\left(f_b^{t^*}-f_b^{t^*-\Delta t^*}\right)$$

Où:

$$f_n^{*t^*}=V_{rn}^{*t^*}\left(T_N^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)r_n^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*\quad,\qquad f_n^{*t^*-\Delta t^*}=\frac{V_{rn}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\left(T_N^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)r_n^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*$$

$$f_s^{*t^*}=V_{rs}^{*t^*}\left(T_S^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)r_s^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*\quad,\qquad f_s^{*t^*-\Delta t^*}=\frac{V_{rs}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\left(T_S^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)r_s^*\Delta\theta_p\Delta z_p^*$$

$$f_e^{*t^*}=V_{\theta e}^{*t^*}\left(T_E^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^*\quad,\qquad f_e^{*t^*-\Delta t^*}=\frac{V_{\theta e}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\left(T_E^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^*$$

$$f_w^{*t^*}=V_{\theta w}^{*t^*}\left(T_W^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^*\quad,\qquad f_w^{*t^*-\Delta t^*}=\frac{V_{\theta w}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\left(T_W^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)\Delta r_p^*\Delta z_p^*$$

$$f_t^{*t^*}=V_{zt}^{*t^*}\left(T_T^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p\quad,\qquad f_t^{*t^*-\Delta t^*}=\frac{V_{zt}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\left(T_T^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p$$

$$f_b^{*t^*}=V_{zb}^{*t^*}\left(T_B^{*t^*}+T_P^{*t^*}\right)r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p\quad,\qquad f_b^{*t^*-\Delta t^*}=\frac{V_{zb}^{*t^*-\Delta t^*}}{2}\left(T_B^{*t^*-\Delta t^*}+T_P^{*t^*-\Delta t^*}\right)r_p^*\Delta r_p^*\Delta\theta_p$$

3.5 Discrétisation des conditions aux limites

Toutes les conditions sur les champs de vitesses et de température et sur les flux seront chacune transformées en une forme discrète, conformément au maillage. Il s'agira toujours d'identifier pour chaque condition aux limites les coefficients des variables dépendantes ainsi que les termes de source correspondants. Etant donné que la procédure est identique pour l'ensemble des conditions on l'explicitera seulement pour certaines conditions spécifiques, tandis que les autres conditions seront directement données. Le domaine numérique est défini par : $i = 1, IL$; $j = 1, JL$ et $k = 1, KL$ balayant les directions radiales, axiales et angulaires.

3.5.1 Discrétisation des conditions aux limites d'un conduit horizontal

3.5.1.1 A l'entrée du conduit :

Domaine solide :

Le domaine numérique correspondant est : $j = 1, \quad ILs \le i \le IL, \quad 1 \le k \le KL$

$$V_r^*(r^*,\theta,0) = V_\theta^*(r^*,\theta,0) = V_z^*(r^*,\theta,0) = T^*(r^*,\theta,0) = 0$$

Domaine fluide :

Le domaine numérique correspondant est : $j = 1, \quad 1 \le i < IL, \quad 1 \le k \le KL$

$$V_r^*(r^*,\theta,0) = V_\theta^*(r^*,\theta,0) = T^*(r^*,\theta,0) = 0, \quad V_z^*(r^*,\theta,0) = 2(1-4r^{*2})$$

a) pour la composante axiale, par exemple, $V_z^*(r^*,\theta,0) = 2(1-4r^{*2})$ elle doit vérifier l'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_p^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k)V_{zp}^{*t^*+\Delta t^*}(i,j,k) = {} & A_N^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k)V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*}(i+1,j,k) + A_S^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k)V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*}(i-1,j,k) + \\ & A_E^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k)V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*}(i,j,k+1) + A_W^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k)V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*}(i,j,k-1) + \\ & A_T^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k)V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*}(i,j+1,k) + A_B^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k)V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*}(i,j-1,k) + \\ & S_z^{t^*+\Delta t^*}(i,j,k) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Qui devra donc s'écrire :

$$1.V_{zp}^{*t^*+\Delta t^*} = 0.V_{zN}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zS}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zE}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zW}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zT}^{*t^*+\Delta t^*} + 0.V_{zB}^{*t^*+\Delta t^*} + 2\left[1-4r_p^{*2}(i)\right]$$

Par identification les coefficients et le terme de source sont :

$$\begin{aligned} & A_P^{t^*+\Delta t^*} = 1 \\ & A_N^{t^*+\Delta t^*} = A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = 0 \\ & S_z^{t^*+\Delta t^*} = 2\left[1-4r_p^{*2}(i)\right] \end{aligned} \tag{3.27}$$

b) de même pour les autres variables V_r^*, V_θ^* et la température T^*, qui sont nulles à l'entrée, les coefficients et les termes de source seraient :

$$\begin{aligned} & A_P^{t^*+\Delta t^*} = 1 \\ & A_N^{t^*+\Delta t^*} = A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = 0 \\ & S_r^{t^*+\Delta t^*} = 0 \ (\text{pour } V_r^*), \quad S_\theta^{t^*+\Delta t^*} = 0 \ (\text{pour } V_\theta^*), \quad S^{t^*+\Delta t^*} = 0 \ (\text{pour } T^*) \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.5.1.2 A la sortie du conduit : $z^* = L / D_i$

Domaine solide : $j = JL,\quad ILs \le i \le IL,\quad 1 \le k \le KL$

$$V_r^*(r^*,\theta,L/D_i) = V_\theta^*(r^*,\theta,L/D_i) = V_z^*(r^*,\theta,L/D_i) = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^*\frac{\partial T^*(r^*,\theta,L/D_i)}{\partial z^*}\right) = 0$$

Domaine fluide : $j = JL,\quad 1 \le i < IL,\quad 1 \le k \le KL$

$$\frac{\partial V_r^*(r^*,\theta,L/D_i)}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*(r^*,\theta,L/D_i)}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*(r^*,\theta,L/D_i)}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^*\frac{\partial T^*(r^*,\theta,L/D_i)}{\partial z^*}\right) = 0$$

Ces conditions sont discrétisées par des différences régressives. On présente cette discrétisation pour la vitesse radiale qui est similaire à celles des autres composantes de la vitesse:

$$\frac{\left(V_r^*(i,JL,k) - V_r^*(i,JL-1,k)\right)}{dz^*(JL-1)} = 0$$

$$V_r^*(i,JL,k) = V_r^*(i,JL-1,k)$$

Si la dernière équation est identifiée à la forme standard de l'équation de discrétisation, les coefficients sont :

$$A_p^{*t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1 \qquad , A_B^{*t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1$$

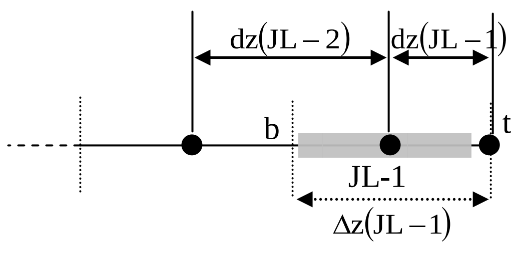
$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_E^{t\;+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 0 \qquad (3.29)$$

$$S_r^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 0$$

La condition sur la température : $\left.\frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^*\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right)\right|_{z^*=L/Di} = 0$ se discrétise autour de **JL-1**

selon les différences centrées à l'ordre 2 :

$$\left.K^*\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right|_t - \left.K^*\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right|_b = 0 \quad \Rightarrow$$



$$K_t^*\frac{T^*(i,JL,k) - T^*(i,JL-1,k)}{dz^*(JL-1)} - K_b^*\frac{T^*(i,JL-1,k) - T^*(i,JL-2,k)}{dz^*(JL-2)} = 0$$

$$T^*(i,JL,k) = T^*(i,JL-1,k) + \frac{K_b^*}{K_t^*}\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^*(i,JL-1,k) - T^*(i,JL-2,k)\right]$$

Dans la partie solide : la conductivité est constante $K_n^* = K_s^* = K_t^* = K_b^*$ donc

$$T^*(i,JL,k) = T^*(i,JL-1,k) + \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^*(i,JL-1,k) - T^*(i,JL-2,k)\right]$$

La discrétisation temporelle du deuxième terme à droite de cette équation est approché par l'approximation d'Adam-Bashforth et on déduit les différents coefficients :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 0$$

$$\begin{aligned} S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = {} & 2\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*}(i,JL-1,k) - T^{*t^*}(i,JL-2,k)\right] - \\ & \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-1,k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-2,k)\right] \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dans la partie fluide : la conductivité en **t** est directement celle du nœud **JL** alors que celle à l'interface **b** elle sera déduite par la moyenne harmonique entre les nœuds **JL-1** et **JL-2**.

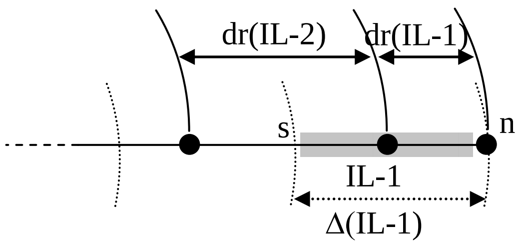
$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 0$$

$$\begin{aligned} S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = {} & 2\frac{K_b^{*t^*}}{K_t^{*t^*}}\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*}(i,JL-1,k) - T^{*t^*}(i,JL-2,k)\right] - \\ & \frac{K_b^{*t^*-\Delta t^*}}{K_t^{*t^*-\Delta t^*}}\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-1,k) - T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-2,k)\right] \end{aligned}$$

3.5.1.3 Sur la paroi

La condition thermique à la paroi est :



$$-K_s^*\left.\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right|_{r^*=D_e/2D_i} = \frac{(h_{ro}+h_{co})D_i}{K_o}\left.T^*\right|_{r^*=D_e/2D_i}$$

En discrétisant selon des différences régressives, on obtient :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(IL,J,K) = 1 + \frac{(h_{ro}+h_{co})D_i}{K_o}\frac{dr^*(IL-1)}{cof}$$

$$cof = 2K^*(IL-1,j,k)\Big|^{t^*} - K^*(IL-1,j,k)\Big|^{t^*-\Delta t^*}$$

$$A_S^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 1 \tag{3.31}$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 0$$

$$S^{t^*+\Delta t^*}(IL, j, k) = 0$$

3.5.1.4 Sur l'axe du conduit : $r^* = 0$

Le problème traité n'est pas axisymétrique, Il est caractérisé par des gradients de vitesse et de température finis (non nuls) à travers l'axe du conduit traduisant une dynamique du champ découlement du fluide. Les conditions dynamiques à l'axe du conduit sont :

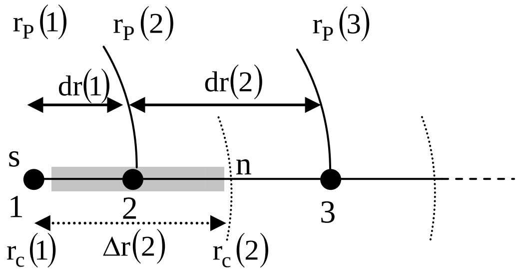
Pour $0 \le \theta \le 2\pi$ et $0 \le z^* \le L/D_i$, $\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right) = \frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right) = 0$

a) La condition sur la température est : $\left.\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right)\right|_{r^*=0} = 0$

Une première intégration autour du nœud 2 donne :

$$\left.\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right|_n - \left.\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right|_s = 0$$

$$\frac{T^*(3, j, k) - T^*(2, j, k)}{dr(2)} - \frac{T^*(2, j, k) - T^*(1, j, k)}{dr(1)} = 0$$



Ou $dr(2) = r_p^*(3) - r_p^*(2)$ et $dr(1) = r_p^*(2) - r_p^*(1)$

On peut donc en déduire la température au nœud 1 (sur l'axe) sous la forme :

$$T^*(1, j, k) = (1 + F^*)T^*(2, j, k) - F^* T^*(3, j, k) \tag{3.32}$$

$$F^* = \frac{r_p^*(2) - r_p^*(1)}{r_p^*(3) - r_p^*(2)}$$

Cette approximation est utilisée pour l'interpolation des températures à l'axe. Les températures interpolées seront imposées comme conditions aux limites à l'axe, mais avec la discrétisation d'Adam-Bashforth pour les termes à droite de l'équation (3.32). Les coefficients de l'équation de discrétisation de la condition à l'axe sont :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 1$$

$$\begin{aligned} &A_N^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = \\ &A_W^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1, j, k) = 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

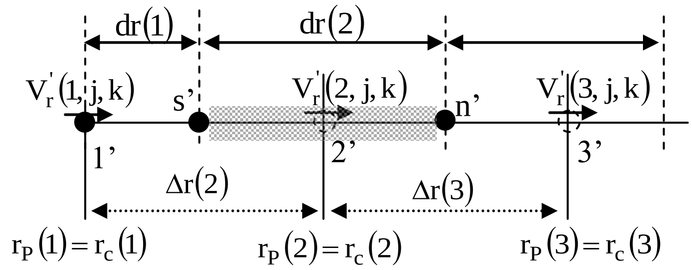
Le terme de source contiendrait alors:

$$S^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 2\left[\left(1+F^*\right)T^{*t^*}(2,j,k) - F^*T^{*t^*}(3,j,k)\right] - \left[\left(1+F^*\right)T^{*t^*-\Delta t^*}(2,j,k) - F^*T^{*t^*-\Delta t^*}(3,j,k)\right] \quad (3.34)$$

b) La condition sur la composante V_r^* est : $\left.\dfrac{\partial}{\partial r^*}\left(\dfrac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\right)\right|_{r^*=0} = 0$

Le maillage étant décalé suivant la direction radiale, l'intégration se fait entre les faces s et n du le volume de contrôle décalé :

$$\left.\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\right|_n - \left.\frac{\partial V_r^*}{\partial r^*}\right|_s = 0$$



$$\frac{V_r^*(3,j,k) - V_r^*(2,j,k)}{\Delta r^*(3)} - \frac{V_r^*(2,j,k) - V_r^*(1,j,k)}{\Delta r^*(2)} = 0$$

Ou $\Delta r^*(3) = r_c^*(3) - r_c^*(2)$ et $\Delta r^*(2) = r_c^*(2) - r_c^*(1)$

On obtient :

$$V_r^*(1,j,k) = \left(1+F_r^*\right)V_r^*(2,j,k) - F_r^*V_r^*(3,j,k) \quad \text{avec } F_r^* = \frac{r_c^*(2) - r_c^*(1)}{r_c^*(3) - r_c^*(2)} \quad (3.35)$$

Les coefficients de discrétisation sont :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 0 \quad (3.36)$$

Le terme de source contiendrait alors:

$$S_r^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 2\left[\left(1+F_r^*\right)V_r^{*t^*}(2,j,k) - F_r^*V_r^{*t^*}(3,j,k)\right] - \left[\left(1+F_r^*\right)V_r^{*t^*-\Delta t^*}(2,j,k) - F_r^*V_r^{*t^*-\Delta t^*}(3,j,k)\right]$$

c) La condition sur la composante V_θ^* est : $\left.\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right)\right|_{r^*=0} = 0$

Par rapport à r^* l'intégration de cette condition se fait sans avoir à utiliser le maillage décalé donc entre les faces n et s:

$$\left.\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right|_n - \left.\frac{\partial V_\theta^*}{\partial r^*}\right|_s = 0 \Rightarrow \frac{V_\theta^*(3,j,k) - V_\theta^*(2,j,k)}{dr^*(2)} - \frac{V_\theta^*(2,j,k) - V_\theta^*(1,j,k)}{dr^*(1)} = 0$$

On déduit, donc :

$$\begin{aligned} &V_\theta^*(1,j,k) = (1+F_\theta^*)V_\theta^*(2,j,k) - F_\theta^* V_\theta^*(3,j,k) \\ &F_\theta^* = \frac{r_p^*(2) - r_p^*(1)}{r_p^*(3) - r_p^*(2)} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Par rapport au nœud 1, les coefficients et la source sont identifiés par:

$$\begin{aligned} &A_N^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = \\ &A_W^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 0 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$S_\theta^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 2\left[(1+F_\theta^*)V_\theta^{*t^*}(2,j,k) - F_\theta^* V_\theta^{*t^*}(3,j,k)\right] - \left[(1+F_\theta^*)V_\theta^{*t^*-\Delta t^*}(2,j,k) - F_\theta^* V_\theta^{*t^*-\Delta t^*}(3,j,k)\right]$$

d) la condition sur la composante V_z^* est : $\left.\frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial V_z^*}{\partial r^*}\right)\right|_{r^*=0} = 0$

De la même manière que précédemment on obtient:

$$\begin{aligned} &A_p^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 1 \\ &A_N^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = \\ &A_W^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$S_z^{t^*+\Delta t^*}(1,j,k) = 2\left[(1+F_z^*)V_z^{*t^*}(2,j,k) - F_z^* V_z^{*t^*}(3,j,k)\right] - \left[(1+F_z^*)V_z^{*t^*-\Delta t^*}(2,j,k) - F_z^* V_z^{*t^*-\Delta t^*}(3,j,k)\right]$$

3.5.2 Discrétisation des conditions aux limites d'un espace annulaire

3.5.2.1 A l'entrée de l'espace annulaire :

<u>Domaine solide</u> :

$$V_r^*(r^*,\theta,0) = V_\theta^*(r^*,\theta,0) = V_z^*(r^*,\theta,0) = T^*(r^*,\theta,0) = 0$$

<u>Domaine fluide</u> :

$$V_r^*(r^*,\theta,0) = V_\theta^*(r^*,\theta,0) = T^*(r^*,\theta,0) = 0$$

$$V_z^*(r^*,\theta,0) = \frac{C_3\ r^{*\,2} + C_2\ \ln\left(r^*\right) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2\left(\frac{R_{2i}^2\ \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2\ \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2}\right)}$$

C1, C2, C3 et C4 sont donnés respectivement par les équations (2.27), (2.28), (2.29) et (2.30).

Dans ce cas, les coefficients et le terme de source de l'équation (3.26) sont :

$$A_P^{t^*+\Delta t^*} = 1$$
$$A_N^{t^*+\Delta t^*} = A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = 0 \qquad (3.40)$$
$$S_z^{t^*+\Delta t^*} = \frac{C_3\ r_p^{*2}(i) + C_2\ \ln\left(r_p^*(i)\right) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2\left(\frac{R_{2i}^2\ \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2\ \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2}\right)}$$

Pour les autres variables V_r^*, V_θ^* et la température T^* qui sont nulles à l'entrée, les coefficients et les termes de source seraient :

$$A_P^{t^*+\Delta t^*} = 1$$
$$A_N^{t^*+\Delta t^*} = A_S^{t^*+\Delta t^*} = A_E^{t^*+\Delta t^*} = A_W^{t^*+\Delta t^*} = A_T^{t^*+\Delta t^*} = A_B^{t^*+\Delta t^*} = S_r^{t^*+\Delta t^*} = S_\theta^{t^*+\Delta t^*} = S_T^{t^*+\Delta t^*} = 0 \qquad (3.41)$$

3.5.2.2 A la sortie du conduit : $z^* = L/D_h$

Domaine solide :

$$V_r^*(r^*,\theta,L/D_h) = V_\theta^*(r^*,\theta,L/D_h) = V_z^*(r^*,\theta,L/D_h) = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^*\ \frac{\partial T^*(r^*,\theta,L/D_h)}{\partial z^*}\right) = 0$$

Domaine fluide :

$$\frac{\partial V_r^*(r^*,\theta,L/D_h)}{\partial z^*} = \frac{\partial V_\theta^*(r^*,\theta,L/D_h)}{\partial z^*} = \frac{\partial V_z^*(r^*,\theta,L/D_h)}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^*\ \frac{\partial T^*(r^*,\theta,L/D_h)}{\partial z^*}\right) = 0$$

On présente cette discrétisation pour la vitesse radiale qui est similaire à celles des autres composantes de la vitesse:

$$\frac{\left(V_r^*(i,JL,k) - V_r^*(i,JL-1,k)\right)}{dz^*(JL-1)} = 0$$

$$V_r^*(i,JL,k) = V_r^*(i,JL-1,k)$$

Si la dernière équation est identifiée à la forme standard de l'équation de discrétisation, les coefficients sont :

$$A_p^{*t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1 \quad , \quad A_B^{*t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 1 \qquad (3.42)$$
$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = A_T^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = S_r^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k) = 0$$

La condition sur la température : $\left.\frac{\partial}{\partial z^*}\left(K^*\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right)\right|_{z^*=L/D_h}=0$ se discrétise autour de **JL-1** selon les différences centrées à l'ordre 2 :

$$\left.K^*\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right|_t-\left.K^*\frac{\partial T^*}{\partial z^*}\right|_b=0 \quad \Rightarrow$$

$$K_t^*\,\frac{T^*(i,JL,k)-T^*(i,JL-1,k)}{dz^*(JL-1)}-K_b^*\,\frac{T^*(i,JL-1,k)-T^*(i,JL-2,k)}{dz^*(JL-2)}=0$$

$$T^*(i,JL,k)=T^*(i,JL-1,k)+\frac{K_b^*}{K_t^*}\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^*(i,JL-1,k)-T^*(i,JL-2,k)\right]$$

Dans la partie solide : la conductivité est constante $K_n^*=K_s^*=K_t^*=K_b^*$ donc

$$T^*(i,JL,k)=T^*(i,JL-1,k)+\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^*(i,JL-1,k)-T^*(i,JL-2,k)\right]$$

Les coefficients et les termes de source seraient :

$$\begin{aligned}
&A_p^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=1 \quad , \quad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=1\\
&A_N^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_E^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_W^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_T^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=0\\
&S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=2\,\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*}(i,JL-1,k)-T^{*t^*}(i,JL-2,k)\right]-\\
&\qquad\qquad \frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-1,k)-T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-2,k)\right]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Dans la partie fluide : la conductivité en **t** est directement celle du nœud **JL** alors que celle à l'interface **b** elle sera déduite par la moyenne harmonique entre les nœuds **JL-1** et **JL-2**.

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=1 \qquad , \qquad A_B^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_E^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_W^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=A_T^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=0$$

$$\begin{aligned}
S^{t^*+\Delta t^*}(i,JL,k)=\;&2\frac{K_b^{*t^*}}{K_t^{*t^*}}\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*}(i,JL-1,k)-T^{*t^*}(i,JL-2,k)\right]-\\
&\frac{K_b^{*t^*-\Delta t^*}}{K_t^{*t^*-\Delta t^*}}\frac{dz^*(JL-1)}{dz^*(JL-2)}\left[T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-1,k)-T^{*t^*-\Delta t^*}(i,JL-2,k)\right]
\end{aligned}$$

3.5.2.3 Sur la paroi externe

La condition thermique à la paroi externe du cylindre extérieur est :

$$-K_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}\bigg|_{r^*=D_{2e}/2D_h} = \frac{(h_{ro}+h_{co})D_i}{K_o} T^*\Big|_{r^*=D_{2e}/2D_h}$$

En discrétisant selon des différences régressives, on obtient :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(IL,J,K) = 1 + \frac{(h_{ro}+h_{co})D_i}{K_o}\frac{dr^*(IL-1)}{cof}$$

$$cof = 2K^*(IL-1,j,k)\Big|^{t^*} - K^*(IL-1,j,k)\Big|^{t^*-\Delta t^*}$$

$$A_S^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = 1 \tag{3.44}$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = 0$$

$$A_T^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = S^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = 0$$

3.5.2.4 Sur la paroi interne

La condition thermique à la paroi interne du cylindre intérieur est :

$$-K_s^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*}\bigg|_{r^*=D_{1i}/2D_h} = 0$$

En discrétisant selon des différences régressives, on obtient :

$$A_p^{t^*+\Delta t^*}(IL,J,K) = 1$$

$$A_N^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = 1$$

$$A_S^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = A_E^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = A_W^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = 0 \tag{3.45}$$

$$A_T^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = A_B^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = S^{t^*+\Delta t^*}(IL,j,k) = 0$$

3.6 Equations de la pression et de correction de la pression

La résolution des systèmes d'équations algébriques (3.15), (3.17) et (3.19) nécessite la connaissance du champ de pression qui apparaît dans les termes sources. Malheureusement, ce champ est généralement inconnu. Une équation de discrétisation de la pression, à chaque point du calcul, est nécessaire pour une estimation de la pression. Cette estimation doit être corrigée. L'utilisation des équations de discrétisation des vitesses (3.15), (3.17) et (3.19) dans l'équation de discrétisation de continuité permet l'obtention d'une équation de discrétisation de la pression. On réécrit les équations de discrétisation des quantités de mouvement sous la forme suivant :

$$V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^{6} A_{nb} V_{rnb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^*(i,j,k)}{A_p} + d_{rn}\left[P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad \text{avec} \quad d_{rn} = \frac{r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*}{A_p}$$

$$V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^{6} A_{nb} V_{\theta nb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_\theta^*(i,j,k)}{A_p} + d_{\theta e}\left[P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad \text{avec} \quad d_{\theta e} = \frac{\Delta r_p^* \Delta z_p^*}{A_p}$$

$$V_{zt}^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^{6} A_{nb} V_{znb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_z^*(i,j,k)}{A_p} + d_{zt}\left[P_p^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad \text{avec} \quad d_{zt} = \frac{r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p}{A_p}$$

On définit à ce niveau des **pseudos vitesses** $\hat{V}_r^*, \hat{V}_\theta^*, \hat{V}_z^*$ **,** sans les termes de pression, telles que :

$$\hat{V}_r^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^{6} A_{nb} V_{rnb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_r^*(i,j,k)}{A_p} \tag{3.46}$$

$$\hat{V}_\theta^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^{6} A_{nb} V_{\theta nb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_\theta^*(i,j,k)}{A_p} \tag{3.47}$$

$$\hat{V}_z^{*t^*+\Delta t^*} = \frac{\sum_{nb=1}^{6} A_{nb} V_{nb}^{*t^*+\Delta t^*} + b_z^*(i,j,k)}{A_p} \tag{3.48}$$

Les équations de quantité de mouvement peuvent s'écrire en fonction des pseudos vitesses sous la forme suivante :

$$V_r^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_r^{*t^*+\Delta t^*} + d_{rn}\left[P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}\right] \tag{3.49}$$

$$V_\theta^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_\theta^{*t^*+\Delta t^*} + d_{\theta e}\left[P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}\right] \tag{3.50}$$

$$V_z^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_z^{*t^*+\Delta t^*} + d_{zt}\left[P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*}\right] \tag{3.51}$$

On peut exprimer les composantes du champ de vitesse sur les six faces telle que :

$$V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{rn}\left[P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_N^{*t^*+\Delta t^*}\right], \qquad V_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{\theta w}\left[P_W^{*t^*+\Delta t^*} - P_P^{*t^*+\Delta t^*}\right]$$

$$V_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{rs}\left[P_S^{*t^*+\Delta t^*} - P_P^{*t^*+\Delta t^*}\right], \qquad V_{zt}^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_{zt}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{zt}\left[P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_T^{*t^*+\Delta t^*}\right]$$

$$V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{\theta e}\left[P_P^{*t^*+\Delta t^*} - P_E^{*t^*+\Delta t^*}\right], \qquad V_{zb}^{*t^*+\Delta t^*} = \hat{V}_{zb}^{*t^*+\Delta t^*} + d_{zb}\left[P_B^{*t^*+\Delta t^*} - P_P^{*t^*+\Delta t^*}\right]$$

Sachant que l'équation de discrétisation de continuité est :

$$\left(V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} r_n^* - V_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} r_s^*\right)\Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left(V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*}\right)\Delta r_p^* \Delta z_p^* + (V_{zt}^{*t^*+\Delta t^*} - V_{zb}^{*t^*+\Delta t^*}) r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p = 0 \qquad (3.52)$$

Et en remplaçant les vitesses par leurs expressions précédentes qui introduisent le champ de pression entre les faces du volume de contrôle, on obtient l'équation de pression discrétisée au nœud typique P, qui s'écrit dans sa forme final :

$$A_P\, P_p^{*t^*+\Delta t^*} = A_N P_N^{*t^*+\Delta t^*} + A_S P_S^{*t^*+\Delta t^*} + A_E P_E^{*t^*+\Delta t^*} + A_W P_W^{*t^*+\Delta t^*} + A_T P_T^{*t^*+\Delta t^*} + A_B P_B^{*t^*+\Delta t^*} + S_p \qquad (3.53)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$A_N = r_n^* dr_n^* \Delta\theta_p \Delta z_P^* \quad , \quad A_S = r_s^* dr_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \qquad (3.54)$$

$$A_E = d\theta_e \Delta r_p^* \Delta z_p^* \quad , \quad A_W = d\theta_w \Delta r_p^* \Delta z_p^* \qquad (3.55)$$

$$A_T = r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_P dz_t^* \quad , \quad A_B = r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_P dz_b^* \qquad (3.56)$$

$$S_p^{*t^*+\Delta t^*} = \left[r_s^* \hat{V}_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} - r_n^* \hat{V}_{rn}^{*t^*+\Delta t^*}\right]\Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[\hat{V}_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*} - \hat{V}_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*}\right]\Delta r_p^* \Delta z_p^* + \left[\hat{V}_{zb}^{*t^*+\Delta t^*} - \hat{V}_{zt}^{*t^*+\Delta t^*}\right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \qquad (3.57)$$

Les équations de discrétisation du champ de vitesse et du champ de pression obtenues dépendent l'une de l'autre. On ne peut tirer la pression sans la connaissance des vitesses (et les pseudo-vitesses) ainsi que l'on ne peut tirer la vitesse sans connaître la pression. On peut comprendre qu'il faudrait des séquences successives d'estimation et de correction de la vitesse et de la pression pour aboutir à un champ de vitesses corrects.

Supposons que :

$$P^* = P^{**} + P'^* \quad , \quad V_r^* = V_r^{**} + V_r'^* \quad , \quad V_\theta^* = V_\theta^{**} + V_\theta'^* \quad , \quad V_z^* = V_z^{**} + V_z'^*$$

$V_r^{**}, V_\theta^{**}, V_z^{**}$ sont les vitesses estimées associées à la pression estimée P^{**}.

$V_r'^*, V_\theta'^*, V_z'^*$ sont les corrections des vitesses associées à la correction de pression corrigée P'^*.

Les estimations des vitesses sont corrigées comme suit :

$$V_{rn}^{*t^*+\Delta t^*} = V_{rn}^{**t^*+\Delta t^*} + d_{rn}\left[P_P'^{*t^*+\Delta t^*} - P_N'^{*t^*+\Delta t^*}\right] \qquad (3.58)$$

$$V_{rs}^{*t^*+\Delta t^*} = V_{rs}^{**t^*+\Delta t^*} + d_{rs}\left[P_S'^{*t^*+\Delta t^*} - P_P'^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad (3.59)$$

$$V_{\theta e}^{*t^*+\Delta t^*} = V_{\theta e}^{**t^*+\Delta t^*} + d_{\theta e}\left[P_P'^{*t^*+\Delta t^*} - P_E'^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad (3.60)$$

$$V_{\theta w}^{*t^*+\Delta t^*} = V_{\theta w}^{**t^*+\Delta t^*} + d_{\theta w}\left[P_W'^{*t^*+\Delta t^*} - P_P'^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad (3.61)$$

$$V_{zt}^{*t^*+\Delta t^*} = V_{zt}^{**t^*+\Delta t^*} + d_{zt}\left[P_P'^{*t^*+\Delta t^*} - P_T'^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad (3.62)$$

$$V_{zb}^{*t^*+\Delta t^*} = V_{zb}^{**t^*+\Delta t^*} + d_{zb}\left[P_B'^{*t^*+\Delta t^*} - P_P'^{*t^*+\Delta t^*}\right] \quad (3.63)$$

L’introduction de ces nouvelles expressions des vitesses dans l’équation de continuité discrétisée permettront d’une équation de discrétisation de la correction de pression P'^* avec des vitesses estimées : V_r^{**}, V_θ^{**}, V_z^{**}

$$A_P\, P_p'^{*t^*+\Delta t^*} = A_N P_N'^{*t^*+\Delta t^*} + A_S P_S'^{t^*+\Delta t^*} + A_E P_E'^{*t^*+\Delta t^*} + A_W P_W'^{t^*+\Delta t^*} + A_T P_T'^{*t^*+\Delta t^*} + A_B P_B'^{t^*+\Delta t^*} + S_p'^{t^*+\Delta t^*} \quad (3.64)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_T + A_B$$

$$A_N = d_{rn} r_n^* \Delta\theta_p \Delta z_p^* \quad , \quad A_S = d_{rs} r_s^* \Delta\theta_p \Delta z_p^*$$

$$A_E = d_{\theta e} \Delta r_p^* \Delta z_P \quad , \quad A_W = d_{\theta w} \Delta r_p^* \Delta z_p^*$$

$$A_T = d_{zt} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_P \quad , \quad A_B = d_{zb} r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_P$$

$$S_p'^{t^*+\Delta t^*} = \left[r_s^* V_{rs}^{**t^*+\Delta t^*} - r_n^* V_{rn}^{**t^*+\Delta t^*}\right]\Delta\theta_p \Delta z_p^* + \left[V_{\theta w}^{**t^*+\Delta t^*} - V_{\theta e}^{**t^*+\Delta t^*}\right]\Delta r_p^* \Delta z_p^* + \left[V_{zb}^{**t^*+\Delta t^*} - V_{zt}^{**t^*+\Delta t^*}\right] r_p^* \Delta r_p^* \Delta\theta_p \quad (3.65)$$

3.7 Algorithme de calcul SIMPLER

La résolution des systèmes d’équations de discrétisation des champs de vitesse, de pression et de la température suit l’algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Linked-Equation-Revised) [83] qui est la forme révisée de la version SIMPLE, [83]. Les différentes étapes de cet algorithme sont les suivantes :

1 - initialisation (estimation) des champs des vitesses et de température.

2 - calcul des coefficients des équations de discrétisation des quantités de mouvement et des pseudo-vitesses

3 - utilisation des pseudo-vitesses calculées pour calculer la source de l’équation de la pression.

- calcul des coefficients de discrétisation de cette équation de pression.

- Résolution de l'équation de pression pour tirer la pression P^*.

4 - considérer cette solution P^* comme étant une pression estimée P^{**} et calculer les vitesses estimées

5 - utilisation de ces vitesses estimées $V_r^{**}, V_\theta^{**}, V_z^{**}$ pour calculer la source de l'équation de correction de la pression.

- résolution de l'équation de correction de la pression pour tirer la correction de pression P'^*.

6 - A l'aide de la pression corrigée P'^*, des nouvelles vitesses corrigées V_r^*, V_θ^*, V_z^* sont calculées.

7 - Résolution de l'équation de discrétisation de l'énergie pour déterminer le champ des températures.

8 - Vérification de la convergence des calculs (l'atteinte du régime permanent). On arrête les calculs si ce régime est atteint et on stocke les résultats. Sinon, on revient à l'étape 2 pour effectuer un autre cycle en démarrant avec les vitesses calculées (corrigées) comme une nouvelle estimation (ou initialisation). On continue cette procédure jusqu'à la convergence des calculs.

Deux critères qui contrôle la convergence sont considères :

a) Un critère de convergence de type numérique définie par :

$\text{dif } \phi = \sum_{\phi} \left| \phi^n - \phi^{n-1} \right| \leq \varepsilon$ où ϕ représente les variables V_r^*, V_θ^*, V_z^* et T^* et n le nombre d'itération final, ε égale à 10^{-5}.

b) Un critère de convergence de type énergétique dans le quelle la chaleur produite par effet Joule dans la paroi du conduit soit égale à la chaleur transférée au fluide + les pertes vers le milieu externe.

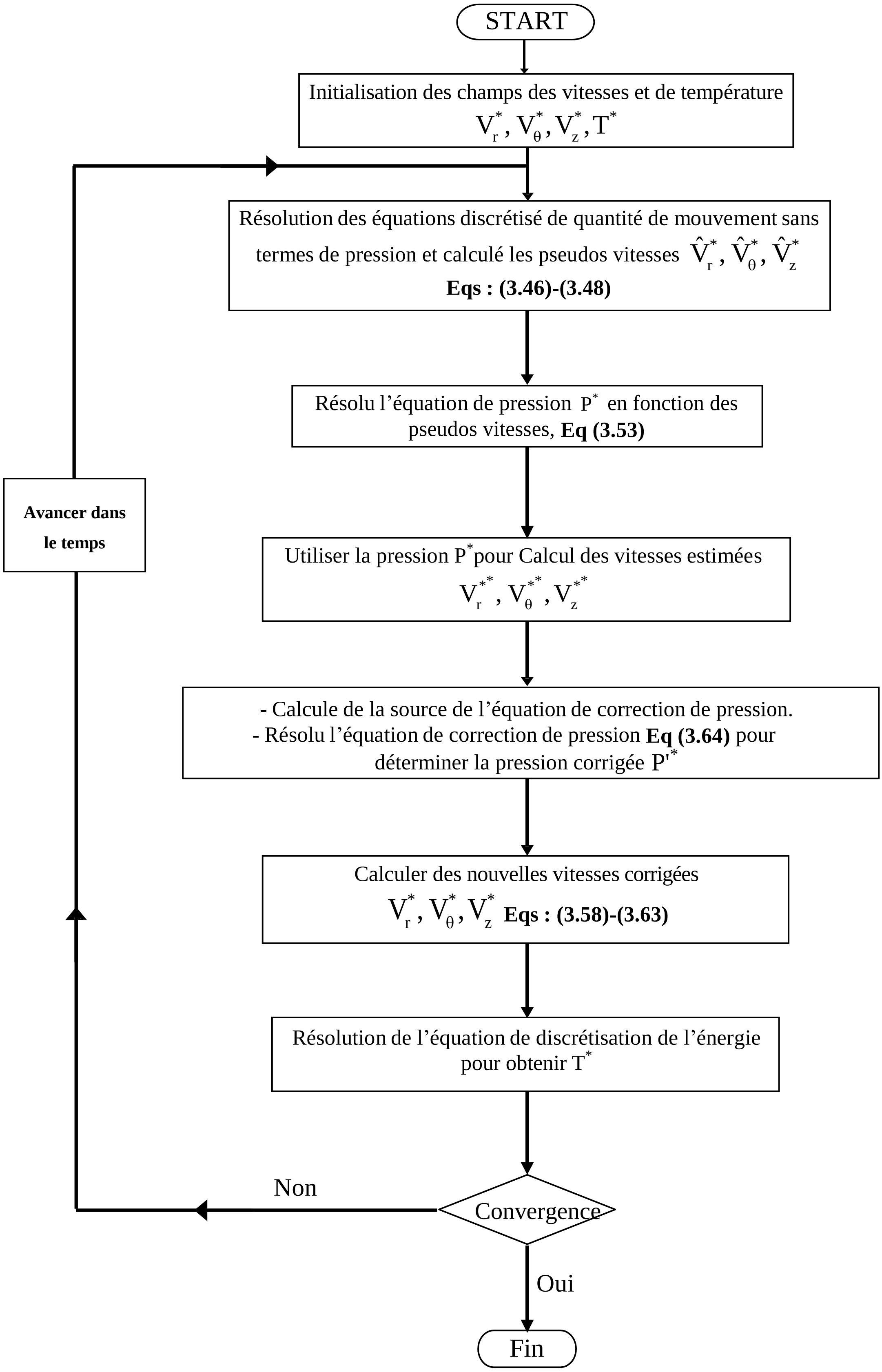


Figure 3.11 : Algorithme **SIMPLER**

3.8 Technique numérique de résolution d'un système d'équations de discrétisation

On utilise la technique de balayage qui est une méthode de résolution itérative. Pour une représentation convenable de l'algorithme, il est nécessaire d'utiliser une écriture indicielle aux termes de l'équation générale :

$$\begin{aligned} A_p(i,j,k)\phi_{i,j,k} = & A_N(i,j,k)\phi_{i+1,j,k} + A_S(i,j,k)\phi_{i-1,j,k} + \\ & A_T(i,j,k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i,j,k)\phi_{i,j-1,k} + \\ & A_E(i,j,k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i,j,k)\phi_{i,j,k-1} + S_\phi(i,j,k) \end{aligned} \tag{3.66}$$

Le balayage est effectué séquentiellement suivant les trois directions.

Comme exemple, on prend le balayage suivant la direction radiale, et on suppose que les valeurs de la variable ϕ le long des deux autres directions z et θ sont connues (par une certaine initialisation). L'équation (3.66) est réécrite :

$$a_i\phi_i = b_i\phi_{i+1} + c_i\phi_{i-1} + d_i \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} a_i &= A_p(i,j,k) \\ b_i &= A_N(i,j,k) \\ c_i &= A_S(i,j,k) \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$d_i = A_T(i,j,k)\phi_{i,j+1,k} + A_B(i,j,k)\phi_{i,j-1,k} + A_E(i,j,k)\phi_{i,j,k+1} + A_W(i,j,k)\phi_{i,j,k+1} + S_\phi(i,j,k)$$

Le système d'équation (3.67) est tri diagonal et peut être résolu avec l'algorithme classique TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm).

Le balayage suivant la direction **z** est similaire à celui de balayage suivant la direction radiale ; cependant le balayage suivant la direction azimutale implique l'utilisation de l'algorithme tri diagonal cyclique qui est représenté par l'équation indicielle suivante :

$$a_k\phi_k = b_k\phi_{kkk} + c_k\phi_{kk} + d_k \tag{3.69}$$

k=1,2,……..,KL

avec

$$kkk = \begin{cases} k+1, & \text{si} \quad k \neq KL \\ 1, & \text{si} \quad k = KL \end{cases}$$

$$kk = \begin{cases} k-1, & \text{si} \quad k \neq 1 \\ KL, & \text{si} \quad k = 1 \end{cases}$$

3.9 Effet du maillage

L'effet du maillage sur la précession des résultats est testé pour deux configurations. Pour le cas d'un conduit horizontal, **Boufendi [3]** a testé quatre différents maillages : 26×22×42, 26×44×83, 26×44×162 et 26×88×162 dans les directions radiale, azimutale et axiale respectivement. Les trois derniers donnent des résultats similaires, pour cela on a choisi d'utiliser le maillage 26×44×162.

Pour le cas d'un espace annulaire on a testé deux maillages : 26×44×162 et 52×88×162. Les deux maillages ont donné des résultats pareils mais on a choisi le deuxième maillage pour deux raisons :

- Avoir une présentation graphique des résultats plus significative.
- L'utilisation de ce maillage dans les conduits ailettés permet d'une part de doubler les nœuds des volumes en contacte avec la surface de l'ailette dans la direction radiale et d'autre part de diminuer l'épaisseur des ailettes longitudinales pour qu'elles soient plus fines, car l'épaisseur de l'ailette longitudinale dépend de nombre des nœuds dans la direction azimutale.

3.10 Validation du code de calcul

Ce code de calcul a été validé pour le cas d'un conduit horizontal par **Boufendi et Afrid [1,2]**,**Boufendi [3]**, le nombre de Nusselt circonférentiel moyen est comparé avec celui de **Ouzzane et Galanis [22]** qui ont étudié la convection mixte conjuguée à propriétés physiques constantes dans un conduit en acier soumis à un flux de chaleur appliqué à la surface externe (modèle conjugué) pour un nombre de Grashof égale à 10^4 et un flux de chaleur appliqué à l'interface solide-fluide (modèle non conjugué) pour un nombre de Grashof égale à 10^4 et 10^6, le rapport des conductivités thermiques solide-fluide est K_s/K_f = 70 et D_o/D_i = 1.166. La figure 3.12 montre un bon accord entre les deux résultats.

Une deuxième validation pour le cas d'un espace annulaire, Cette fois avec l'étude de **Carlo et Giudice [47]**, où les auteurs ont traités numériquement le phénomène de la convection mixte laminaire dans la région d'entrée d'un espace annulaire horizontal avec un flux de chaleur constant sur la paroi du cylindre interne tandis que le cylindre externe est adiabatique. Les paramètres de contrôle sont : $Pr=0.7$, $Re=1000$, $Gr=10^6$ et un rapport de rayon R_e/R_i = 2. La figure 3.13 montre que nos résultats sont en excellent accord (±4%) avec ceux de **Carlo et Giudice [47]**.

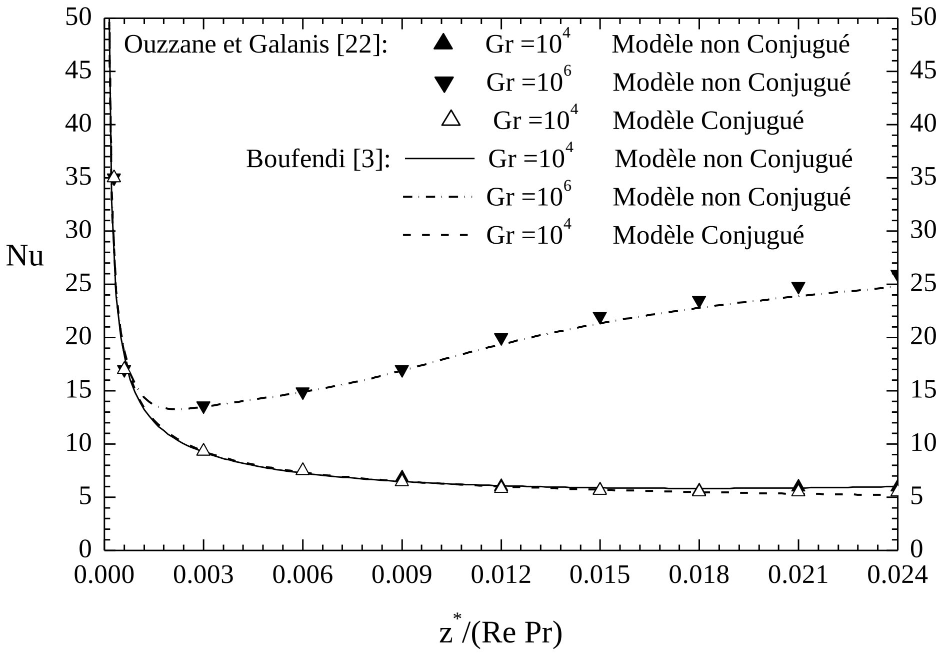


Figure 3.12 : Validation du code de calcul pour un conduit horizontal : Comparaison avec les valeurs du Nusselt circonférentiel moyen obtenues par **Ouzzane et Galanis [22].**

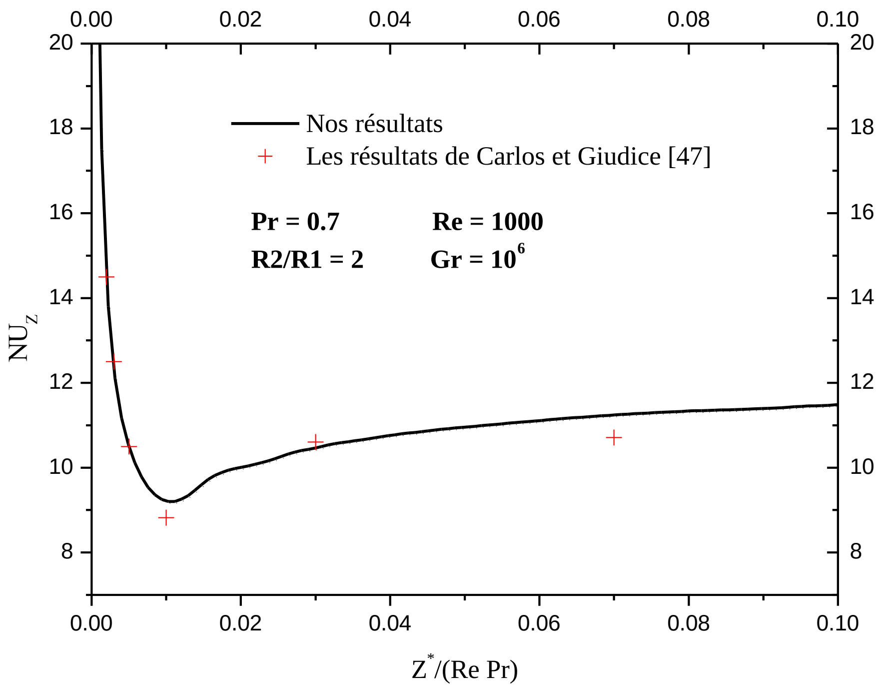


Figure 3.13 : Validation du code de calcul pour un espace annulaire : Comparaison avec les valeurs du Nusselt circonférentiel moyen obtenues par **Carlo et Giudice [47]**.

Chapitre 4

Convection mixte conjuguée d'un fluide à propriétés physiques variables dans un conduit horizontal

4.1 Introduction

Comme il a été mentionné précédemment, dans ce chapitre on présente et on discute les résultats de la convection mixte laminaire d'un fluide à propriétés physiques thermo-dépendantes. L'écoulement de ce dernier se fait à une vitesse moyenne égale à 7.2 10^{-2} m/s dans un conduit horizontal en Inconel de faible épaisseur 0.02 cm et d'une résistance électrique égale à 0.16 Ω. Le passage d'un courant électrique à travers l'épaisseur de la paroi produit une génération de chaleur volumique uniforme qui permet le chauffage du fluide. La convection mixte dans le domaine fluide est conjuguée à une conduction thermique dans l'épaisseur solide du conduit, le rapport des conductivités thermiques $K_s^* = K_s / K_0 = 20/0.5893 = 33.94$ et le rapport d'aspect du conduit A=104.17. Les pertes thermiques de la surface extérieure du conduit vers le milieu ambiant sont prises en considération. Le nombre de Reynolds est fixé à 606.85 alors que le nombre de Prandtl, évalué à la température d'entrée de l'eau, est égal à 8.082.

Dans ce chapitre on désire étudier l'influence de la variation de l'intensité du courant électrique sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que sur le transfert thermique. Pour cela, on fait varier l'intensité du courant et les valeurs considérées sont I = 40, 45, 50, 55, 60 et 65 Ampères. Ces intensités correspondent aux nombres de Grashof: 193179, 244492, 301842, 365229, 434653, et 510000, respectivement. Un courant de 40 Ampères produit une génération de chaleur par effet Joule égale à 4.16 10^7 W/m^3. Pour des courants de 45, 50, 55, 60 et 65 Ampères, la chaleur fournie en W/m^3 serait égale successivement à 5.26 10^7, 6.49 10^7, 7.86 10^7, 9.35 10^7 et 10.98 10^7 W/m^3.

4.2 Le cas de référence : la convection forcée (Gr=0)

4.2.1 Champ dynamique de l'écoulement

A l'entrée (Z^*=0) l'écoulement axial a un profil parabolique de type Poiseuille, les composantes radiale et azimutale de l'écoulement sont nulles. Après, la composante azimutale de l'écoulement restera nulle le long du conduit car l'approximation de Boussinesq est adoptée ainsi que le nombre de Grashof est nul, en revanche la composante radiale de l'écoulement ne sera nulle qu'après la zone d'entrée du conduit, où l'écoulement axial sera pleinement développé. Dans la figure 4.1 nous représentons le profil de la vitesse axiale à l'entrée (Z^*=0) et à la sortie du conduit (Z^*=104.17), Il est clair que ce profil est axisymétrique et radialement parabolique le long du conduit avec une vitesse nulle sur la paroi du conduit (condition de non-glissement) et une vitesse V_z^* sur l'axe varie entre 2.0 à l'entrée et 1.721 lorsque l'écoulement est pleinement développé.

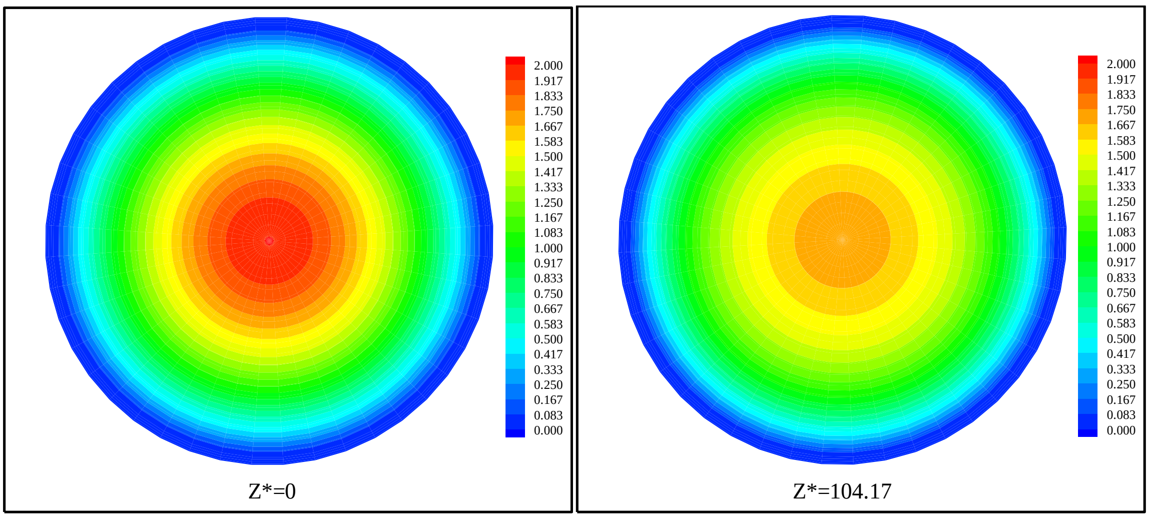


Figure 4.1 Les contours de vitesse axiale en convection forcée.

4.2.2 Le champ thermique de l'écoulement

A l'entrée le fluide a une température constante, ensuite il rentra en développement thermique accompagné d'une augmentation de température due à la chaleur dégagée par la paroi du conduit. A cause de la valeur nulle de la composante azimutale et le profile parabolique de la composante axiale de l'écoulement, le champ de température garde une distribution axisymétrique pour chaque section axiale le long du conduit. La variation du champ de température dans des positions axiales arbitrairement choisies : $Z^* = L^*/4$, $L^*/2$, $3L^*/4$ et L^*est représentée dans la figure 4.2. Dans chaque section axiale, les isothermes sont des cercles concentriques avec une température maximale sur la paroi et une température minimale sur l'axe du conduit. Il est clair que la température maximale dans tout le conduit ($T^*_{max} = 0.175$) est située à la sortie sur l'interface Paroi-fluide du conduit.

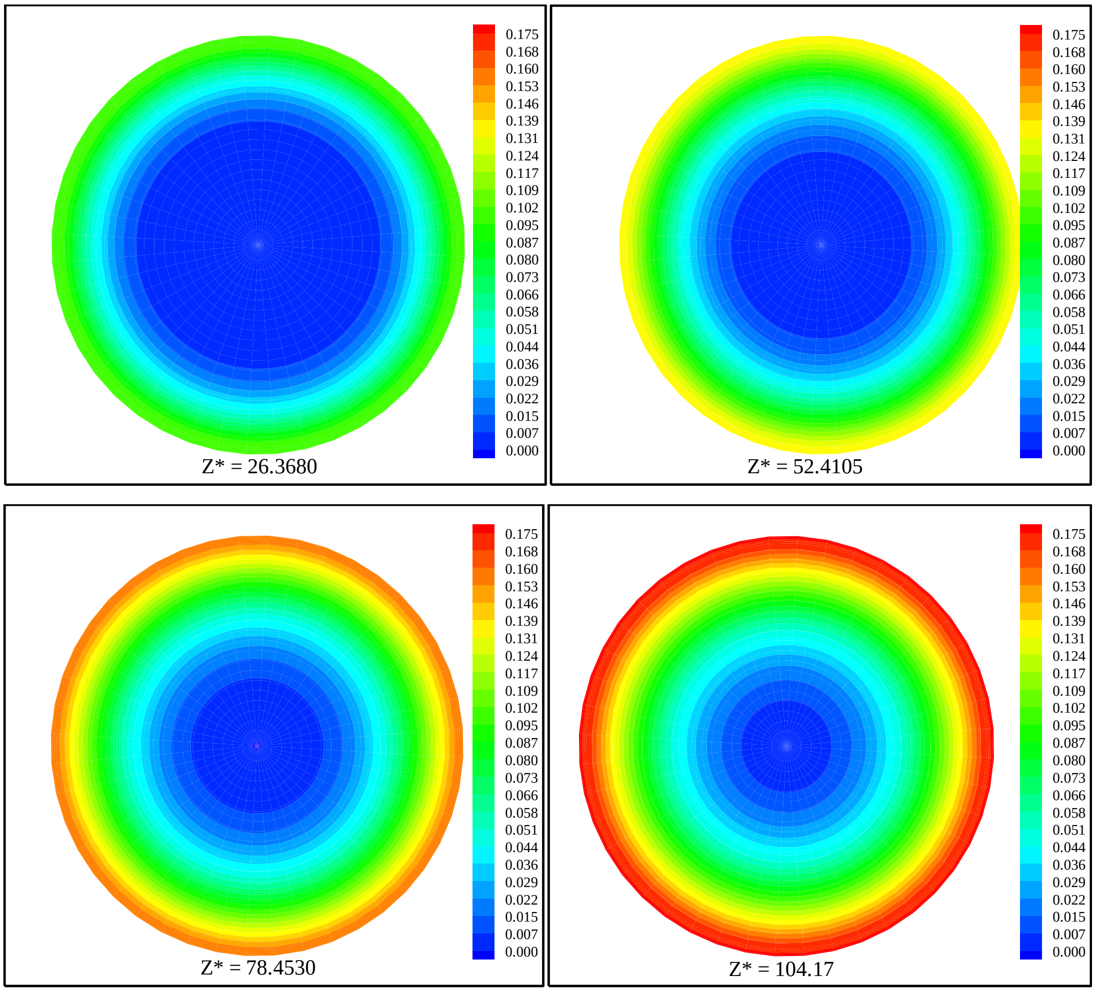


Figure 4.2 Champ de température dans des positions axiales arbitrairement choisies pour la convection forcée.

L'augmentation axiale de la température moyenne T^*_m est illustrée dans la figure 4.3, cette augmentation linière est le résultat d'un échauffement continu du fluide le long du conduit. Sur le même graphe on a rajouté la température de la paroi interne du conduit T^*_i , prés de l'entrée la température de la paroi interne augmente rapidement ensuite cette augmentation devient de plus en plus lent. A la sortie du conduit, la température moyenne du fluide est égale à 0.0585 tandis que la température de la paroi interne est égale à 0.1749.

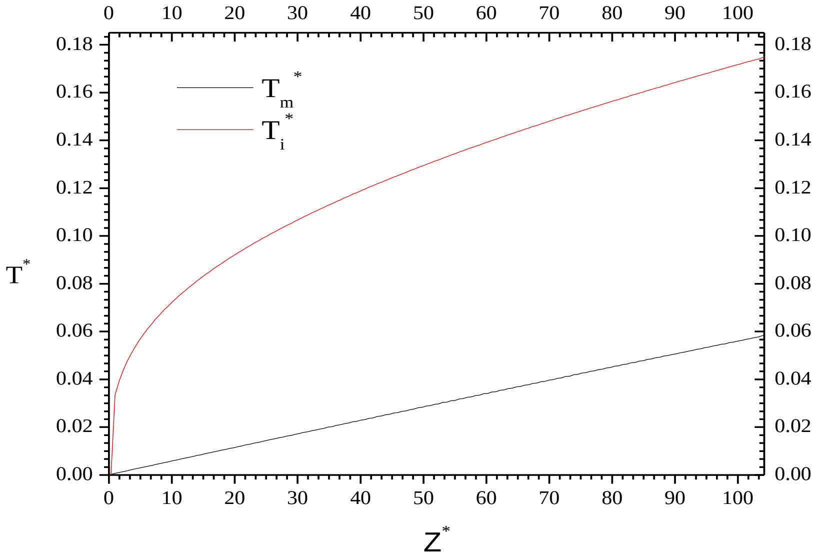


Figure 4.3 Variation axiale de la température moyenne du fluide et la température de la paroi interne du conduit pour Gr=0.

4.2.3 Nombre de Nusselt

La distribution circonférentielle et axiale du nombre de Nusselt local à l'interface, définie par l'équation (2.21) est représentée pour le cas de la convection forcée dans la figure 4.4. Le nombre de Nusselt local varie seulement suivant la direction axiale, son variation angulaire est nulle cella est due à la variation axisymétrique de la température vu précédemment. Prés de l'entrée du conduit, l'écart entre la température moyenne du fluide et la température à l'interface est très faible ce qui donne un nombre de Nusselt important, ensuite la décroissance de ce dernier devient de plus en plus modérée en s'éloignant de l'entrée, et il se stabilise dans la fin de la longueur d'entrée thermique. A la sortie du conduit, la valeur du nombre de Nusselt locale est égale à 5.81. Dans la figure 4.5, la variation du nombre de Nusselt circonférentielle moyen obtenu avec notre code est comparée par **Boufendi et Afrid [1]** avec celle obtenue par la corrélation analytique de **Polyakov [90]** $Nu = 4.36 + 1.31\left(z^* / Re\,Pr\right)^{1/3} \exp\left(-13\left(z^* / Re\,Pr\right)^{1/2}\right)$, l'écoulement est hydrodynamiquement développé en convection forcée pure dans un conduit cylindrique. Les résultats sont en bon accord, avec une erreur relative maximum de 6.84 %.

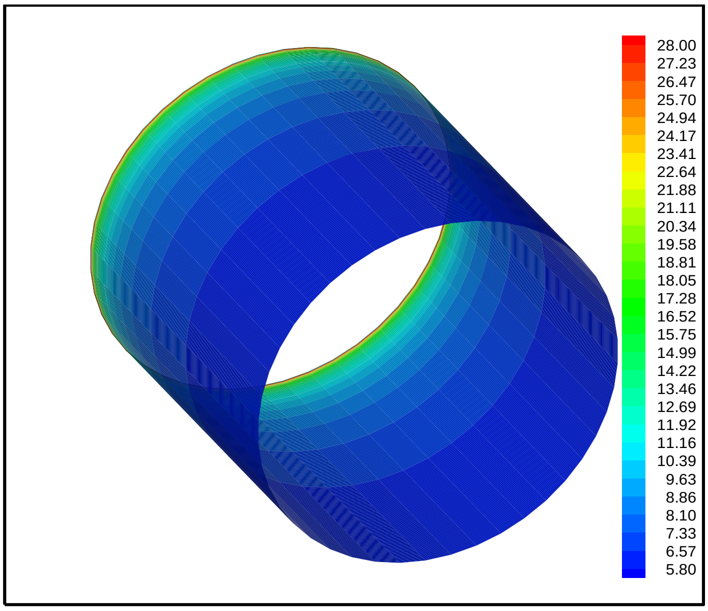


Figure 4.4 Distribution du nombre de Nusselt local Nu (θ, z^*) à l'interface pour Gr=0.

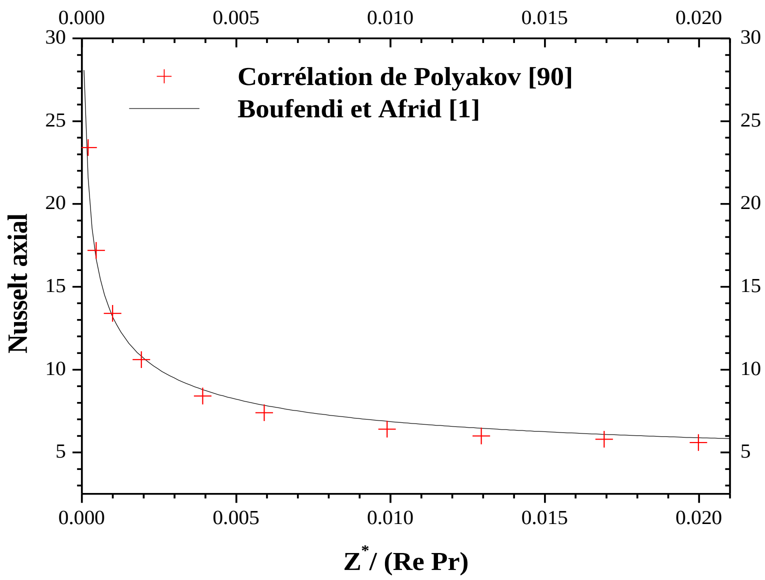


Figure 4.5 Variation du nombre de Nusselt axial Nu (z^*/Re Pr) pour la convection forcée ; comparaison avec les résultats calculés par la corrélation de **Polyakov [90]**.

4.3 Convection mixte

Le passage de la convection purement forcée vers la convection mixte impose une augmentation dans le nombre de Grashof, cette augmentation change complètement la structure axisymétrique des champs thermique et dynamique de l'écoulement, une variation angulaire s'ajoute aux variations radiale et axiale discutées dans la convection forcée.

4.3.1 Champ dynamique de l'écoulement

A cause de la similarité qualitative des résultats, dans cette partie on va présenter une étude complète de l'intensité électrique I=65 Ampères et qui correspond à un nombre de Grashof égale à 510000. Les autres résultats sont utilisés dans les comparaisons quantitatives des différents cas étudiés.

4.3.1.1 L'écoulement secondaire

Le passage d'un courant électrique d'intensité I = 65 Ampères dans l'épaisseur de la paroi du conduit ayant un volume (de la matière solide) égale à 6.1575 10^{-6} m^3 et une résistance électrique égale à 0.16 Ω produit une génération de chaleur uniforme par effet Joule égale à 10.98 10^7 W/m^3 dans toute l'épaisseur de la paroi. La grande partie de cette chaleur est utiliser pour le chauffage de l'écoulement dans le conduit, l'autre partie est transférée au milieu extérieur sous forme des pertes thermiques.

A l'entrée (z^*=0), l'écoulement transversal est inexistant car la température du fluide est constante. Juste après l'entrée, la chaleur générée dans la paroi du conduit crée un gradient thermique radial orienté vers l'intérieur du conduit de telle sorte que le fluide chaud est au voisinage de la paroi interne du conduit tandis que le fluide relativement froid est au centre entouré par le fluide chaud. Cette situation induit nécessairement la force de poussée thermique qui dépend de la variation de la température à créer un mouvement transversal du fluide dans le plan ($r^* - \theta$). Le mouvement transversal est expliqué comme suit : le fluide chaud se déplace le long de la paroi chaude du bas du conduit $(\theta = \pi)$ vers le haut $(\theta = 0)$ et redescend ensuite du haut vers le bas dans le centre du conduit. Le plan verticale passant à travers les angles $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$ est un plan de symétrie. Deux cellules contrarotatives identiques sont crées par ce mouvement, ces deux cellules se déplacent du haut vers le bas le long du tube. Cette forme de la circulation du fluide par convection mixte dans le plan transversal du conduit est appelé l'écoulement secondaire.

Pour Gr=510000, la valeur maximale de l'écoulement secondaire $V^*_{\theta\,max} = 4.887 \cdot 10^{-2}$ du coté droit est située à $z^* = 17.2532$, $r^* = 0.4375$ et $\theta = 1.4994$.

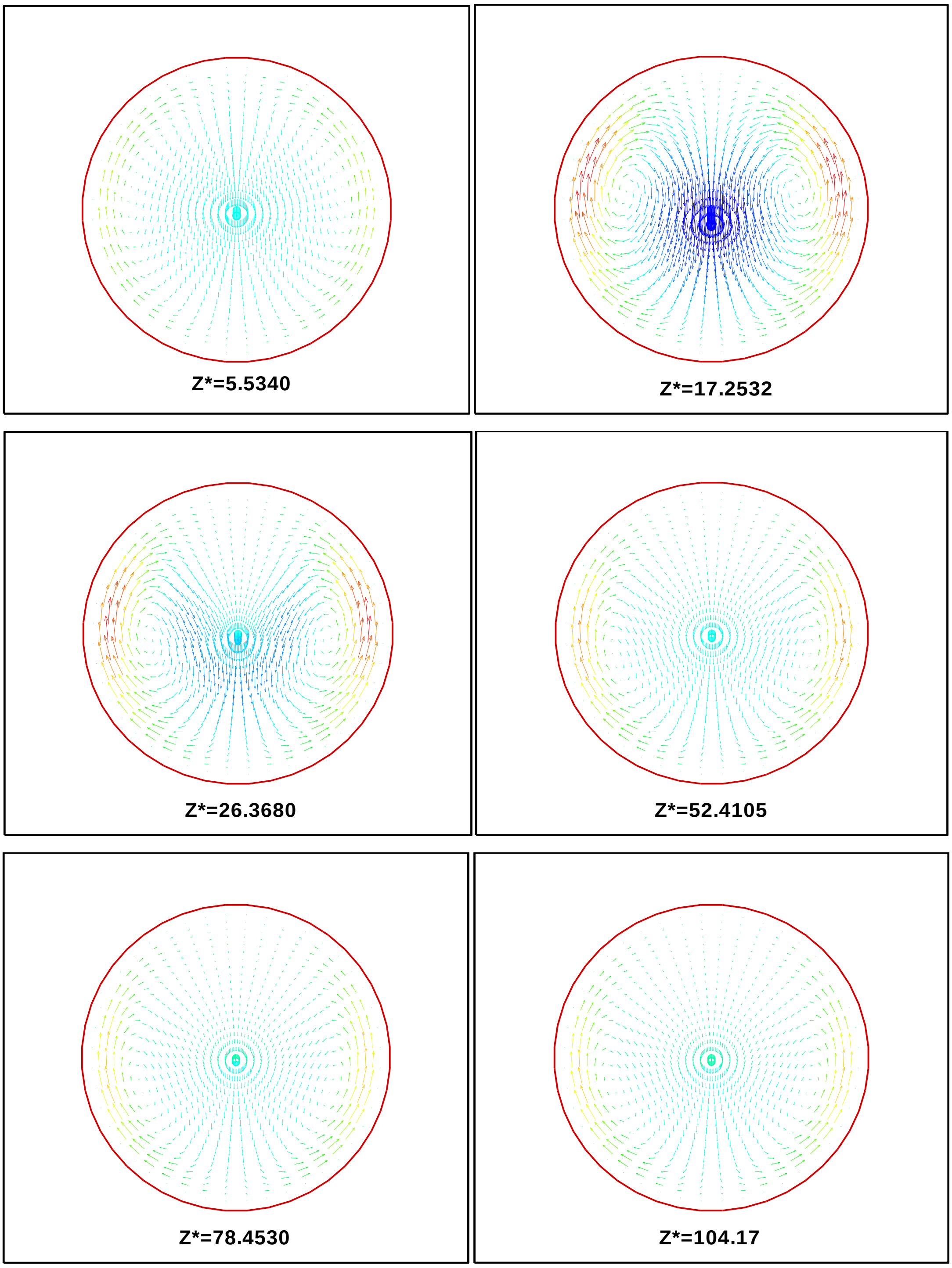


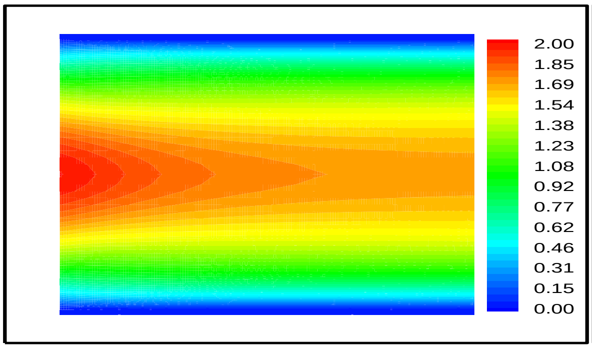
Figure 4.6 Développement de l'écoulement secondaire dans des positions axiales sélectionnées.

Le champ des vecteurs de l'écoulement secondaire est représenté dans la figure 4.6 sur le plan ($r^* - \theta$) en des positions axiales sélectionnées : à z^* = 5.5340 où l'écoulement secondaire commence à être remarquable, ensuite à $z^* = 17.2532$ où l'écoulement secondaire est plus intense et après à $z^* = L^*/4$, $L^*/2$, $3L^*/4$ et L^* pour voir à quel niveau l'écoulement secondaire devient invariant.

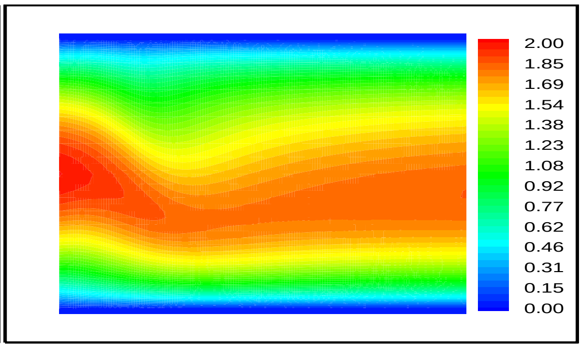
Entre la section d'entrée et la section $z^* = 17.2532$, l'écoulement secondaire s'intensifie rapidement, à $z^* = 17.2532$ le centre de la cellule contrarotative droite est situé à $r^* = 0.2875$ et $\theta = 1.0710$. Dans la section $z^* = 26.3680$, l'écoulement secondaire prend une valeur maximale $V^*_{\theta\,max} = 4.610 \cdot 10^{-2}$ à $r^* = 0.4375$ et $\theta = 1.6422$, le centre de la cellule contrarotative droite dans cette section est situé à $r^* = 0.3125$ et $\theta = 1.3566$. A $z^* = 52.4105$, la vitesse maximale de l'écoulement secondaire $V^*_{\theta\,max} = 3.7480 \cdot 10^{-2}$ à $r^* = 0.4375$ et $\theta = 1.6422$, le centre de la cellule contrarotative droite dans cette section est situé à $r^* = 0.3375$ et $\theta = 1.4994$. A partir de $z^* = 78.4530$, l'écoulement secondaire devient invariant, à la sortie du conduit ($z^* = 104.17$) la vitesse maximale de l'écoulement secondaire prend la valeur $V^*_{\theta\,max} = 3.7480 \cdot 10^{-2}$ à $r^* = 0.4375$ et $\theta = 1.7850$, dans cette section axiale le centre de la cellule contrarotative droite est situé à $r^* = 0.3625$ et $\theta = 1.7850$.

4.3.1.2 L'écoulement axial

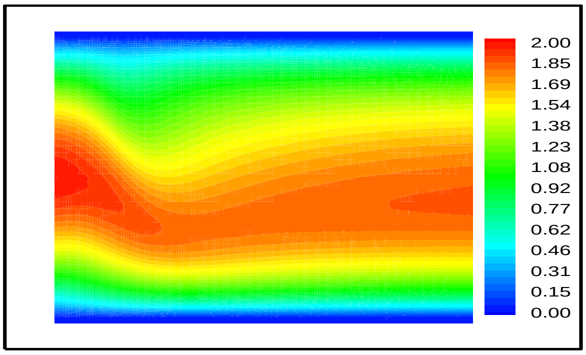
A l'entrée l'écoulement est de type Poiseuille, la seule composante de cet écoulement est dans la direction axiale dont le maximum ($V^*_{z\,0} = 2$) est sur l'axe du conduit et le minimum ($V^*_{z\,0} = 0$) est sur la paroi interne du conduit. En présence du chauffage volumétrique, la configuration de l'écoulement axial se change automatiquement car l'écoulement secondaire induit par la contribution de la convection naturelle provoque une variation angulaire qui a une influence directe sur la distribution axisymétrique de l'écoulement axial. Dans les figures 4.7(a)-(f) on représente une illustration de la variation de la vitesse axiale adimensionnelle dans le plan verticale qui passe à travers les angles $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$ qui est un plan de symétrie pour six cas étudiés : $Gr=0$, $Gr=1.93 \cdot 10^5$, $Gr=3.02 \cdot 10^5$, $Gr=5.1 \cdot 10^5$, $Gr=10^6$ et $Gr=10^7$ respectivement.



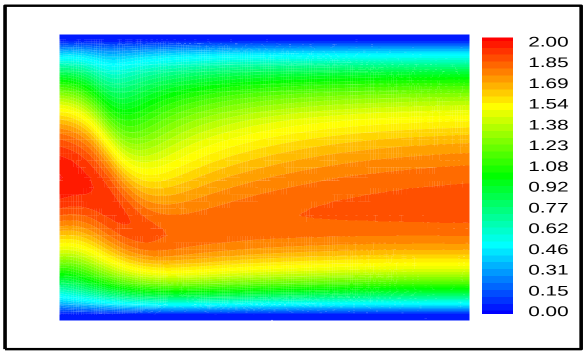
(a) Convection Forcée



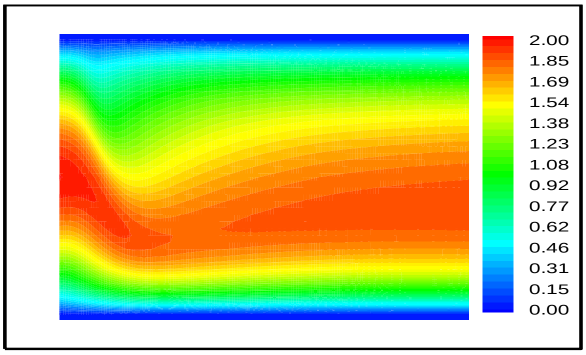
(b) $Gr=1.93{\cdot}10^5$



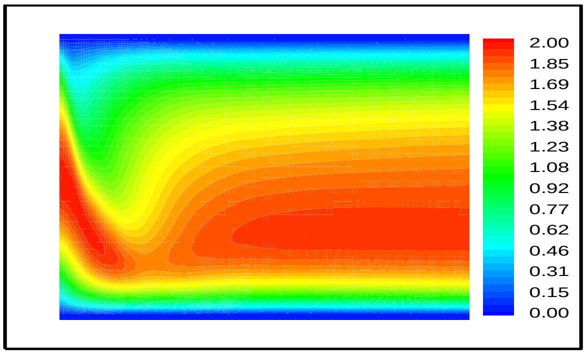
(c) $Gr=3.02{\cdot}10^5$



(d) $Gr=5.1{\cdot}10^5$



(e) $Gr=10^6$



(f) $Gr=10^7$

Figure 4.7 Développement de l'écoulement axial en fonction du nombre de Grashof.

Les résultats obtenus montrent clairement que l'effet de la poussée thermique sur l'écoulement axial devient de plus en plus important avec l'augmentation du chauffage volumétrique, cet effet prend une valeur maximale à $z^* = 26.3680$, 21.8106, 17.9042, 13.9978 et 11.3936 pour $Gr = 1.93{\cdot}10^5$, $3.02{\cdot}10^5$, $5.1{\cdot}10^5$, 10^6 et 10^7 respectivement.

La variation polaire de l'écoulement principal en des positions axiales choisies ($z^* =$ 0, 13.3468, $L^*/4$, $L^*/2$, $3L^*/4$ et L^*) pour le cas $Gr=5.1{\cdot}10^5$ est illustrée dans la figure 4.8. A l'entrée l'écoulement est de type Poiseuille, la vitesse axiale adimensionnelle prend une valeur maximale $V^*_{z\,max} = 2.0$ située en $r^* = 0$.

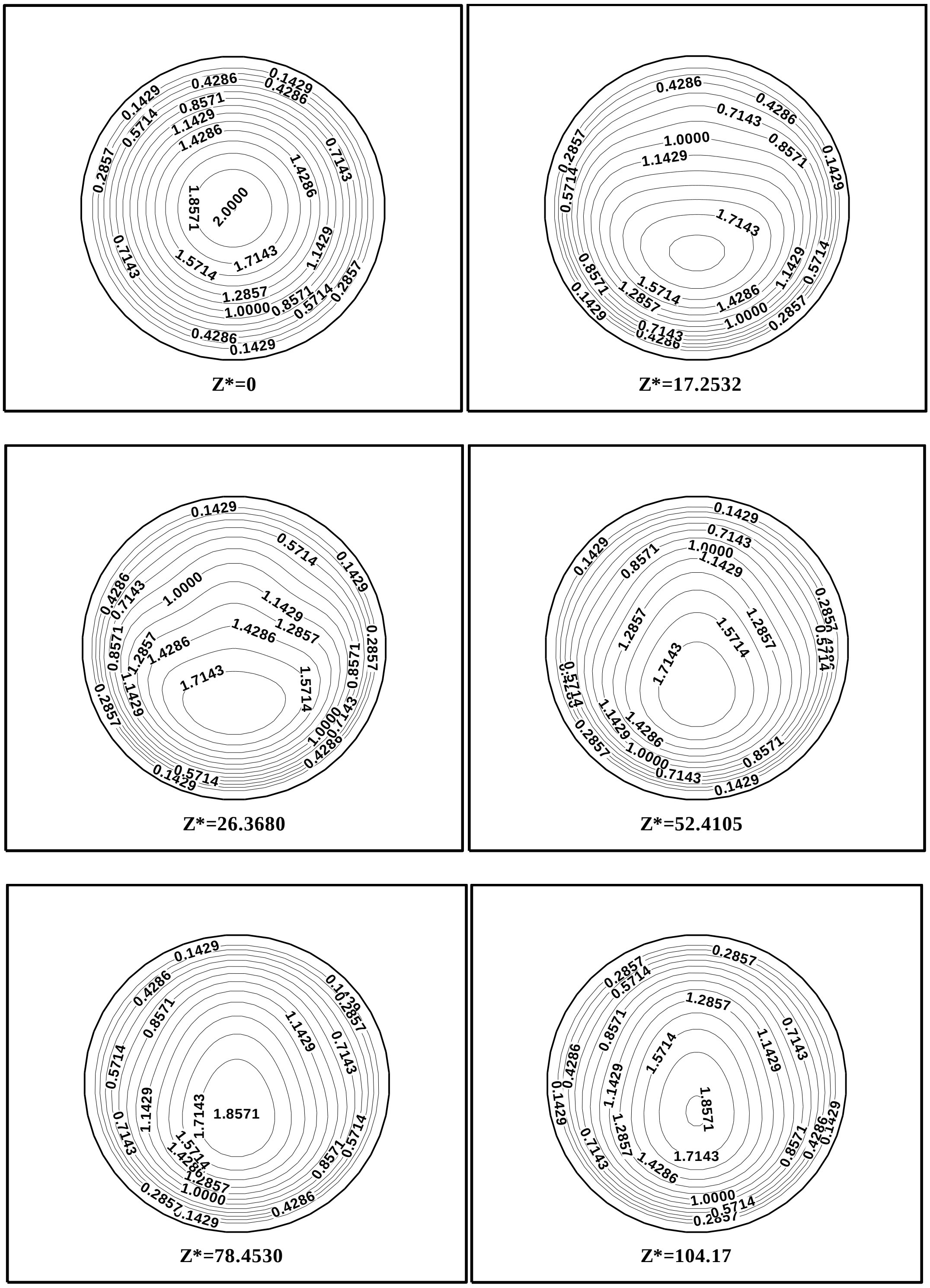


Figure 4.8 Variation polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies.

Entre l'entrée et z^*=17.2532, le maximum de la vitesse axiale change de position rapidement vers le bas du conduit $(\theta = \pi)$: à z^*=17.2532, le maximum $V^*_{z\,max} = 1.902$ est située à $r^* = 0.1625$ et $\theta = \pi$. Entre z^*=17.2532 et z^*=26.3680, le maximum de la vitesse axiale continue le changement de position vers le bas mais d'une façon moins intense : à

z^*=26.3680, le maximum $V^*_{z\,max} = 1.849$ est située à $r^* = 0.2125$ et $\theta = \pi$. Entre z^*=26.3680 et z^*=52.4105, le faible effet relatif de l'écoulement secondaire entraine la position du maximum de la vitesse axiale vers le haut : à z^*=52.4105, le maximum $V^*_{z\,max} = 1.838$ est située à $r^* = 0.1375$ et $\theta = \pi$. Entre z^*=52.4105 et la sortie du conduit (z^*=104.17), la distribution polaire de la vitesse axiale est invariante : à z^*=104.17, le maximum $V^*_{z\,max} = 1.870$ est située à $r^* = 0.1375$ et $\theta = \pi$.

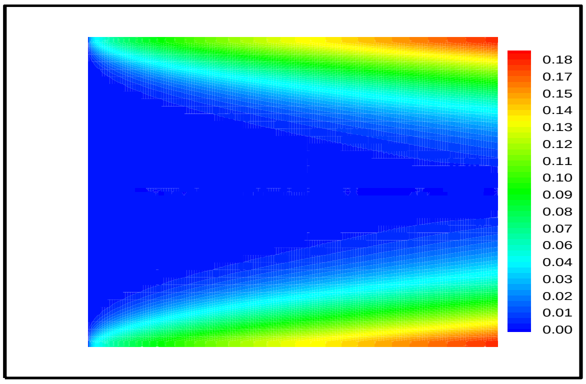
4.3.2 Champ thermique de l'écoulement

Comme il a été décrit précédemment, le passage du courant électrique à travers l'épaisseur de la paroi produit une génération de chaleur volumique uniforme, la grande portion de cette chaleur est transférée au fluide par un flux radial à l'interface solide-fluide.

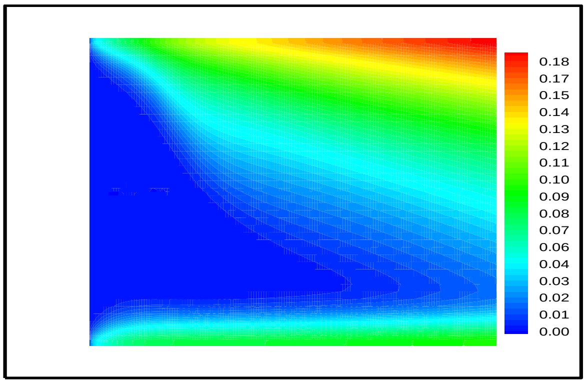
4.3.2.1 Champ de température

Dans le cas de référence (convection forcée) le champ de température est axisymétrique, pour chaque section axiale les isothermes sont des cercles concentriques avec une température maximum sur l'interface fluide-paroi et une température minimum sur l'axe du conduit. Dans le cas de la convection mixte, la distribution axisymétrique de la température est détruite par le mouvement transversal du fluide qui provoque une variation angulaire sur la température du fluide et la paroi du conduit, cette variation est expliquée comme suit : à une section axiale donnée, le fluide chaud prés de la paroi du conduit se déplace vers le haut sous l'effet de la force de poussée thermique, le fluide relativement froid redescend dans le centre du conduit. La même opération se répète dans la section axiale suivante avec une augmentation dans la température du fluide et de la paroi. L'effet de l'augmentation du chauffage volumétrique sur la variation axiale de la température adimensionnelle dans le plan verticale central est bien illustré dans les figures 4.9(a)-(f). A travers ces figures nous observons que le gradient radial de température après la zone d'entrée s'intensifie rapidement en augmentant le nombre de Grashof cela est dû à l'importante intensification de l'écoulement secondaire qui porte le fluide relativement froid vers la partie inferieur du conduit $(\theta = \pi)$.

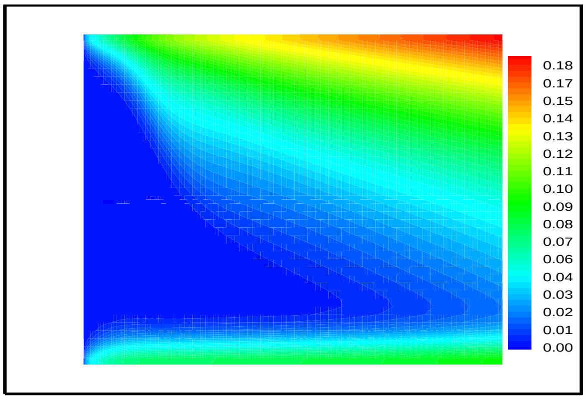
Pour compléter la visualisation du champ de température, on représente dans la figure 4.10 la distribution polaire des isothermes en des positions axiales choisies (z^* = 5.5340, 17.2532, $L^*/4$, $L^*/2$, $3L^*/4$ et L^*) pour le cas du $Gr=5.1 \cdot 10^5$, sachant que z^*= 17.2532 est la position axiale où l'écoulement secondaire est plus intense. A l'entrée le fluide a une température constante. Après, la température maximale du fluide est toujours localisée en le haut de l'interface solide-fluide à $r^* = 0.5$ et $\theta = 0$ car le fluide chaud prés de la paroi est véhiculé vers le haut du conduit, la température minimale est au sein de la partie inferieure du fluide à $\theta = \pi$. A $z^* = L^*/4$, la position de la température minimale est située à $r^* = 0.2125$. Cette position se déplace à $r^* = 0.3125$, $r^* = 0.3375$ et $r^* = 0.3625$ pour $z^* = L^*/2$, $z^* = 3L^*/4$ et $z^* = L^*$ respectivement.



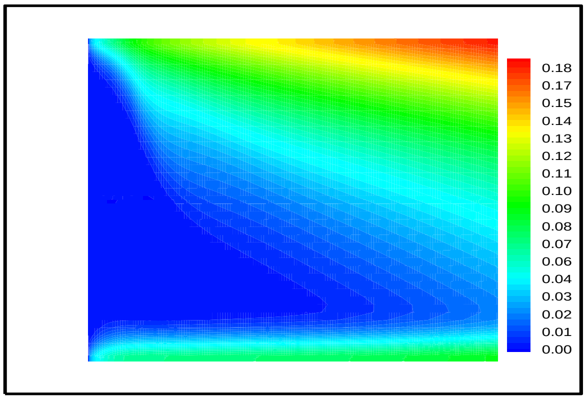
(a) Convection Forcée



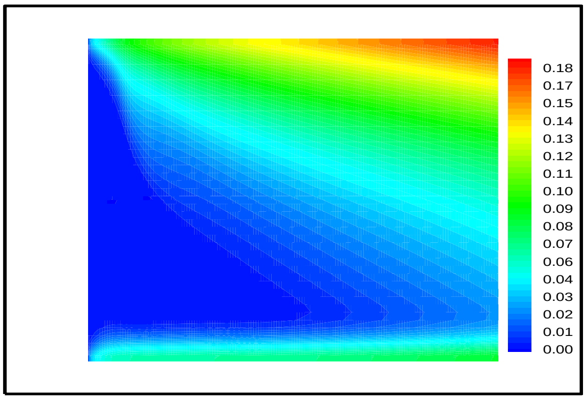
(b) Gr=1.93·10^5



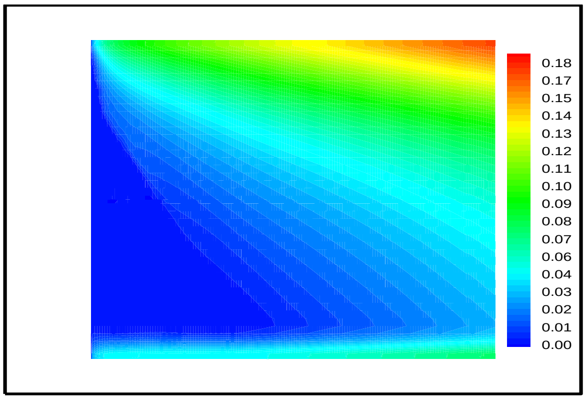
(c) Gr=3.02·10^5



(d) Gr=5.1·10^5



(e) Gr=10^6



(f) Gr=10^7

Figure 4.9 Distribution axiale des isothermes en fonction du nombre de Grashof.

A travers les résultats obtenus, il est bien clair que le niveau des températures augmente d'une manière considérable lorsque le nombre de Grashof augmente.

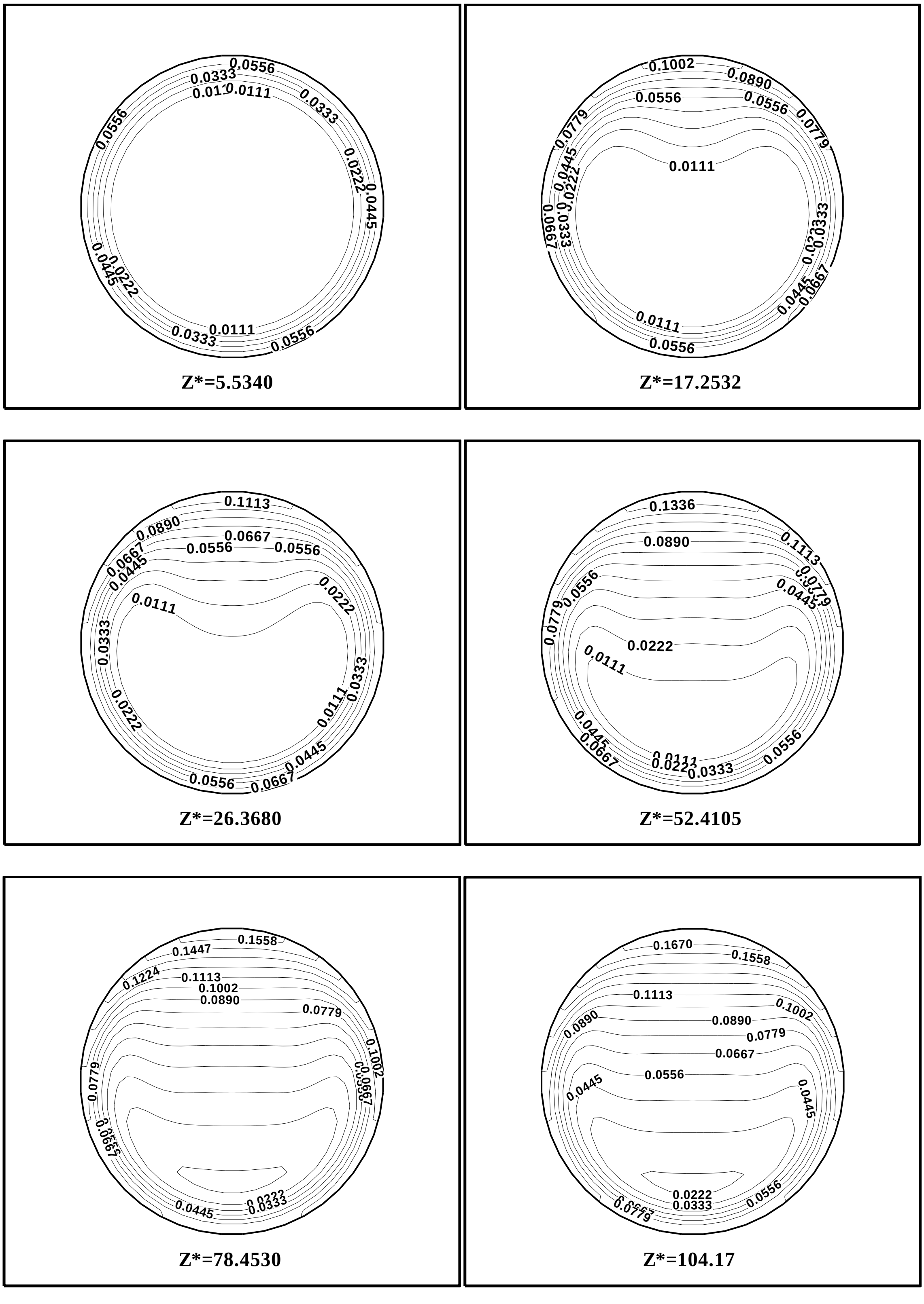


Figure 4.10 Distribution polaire des isothermes en des positions axiales choisies.

Pour le même nombre de Grashof les températures du fluide et de la paroi subies une augmentation continue dans la direction axiale, cela est traduit dans la figure 4.11 par l'augmentation linière de la température moyenne depuis l'entrée jusqu'à la sortie du conduit. Bien qu'à l'entrée la température moyenne est uniforme pour tous les cas (15°C), à la sortie du conduit l'écart dans la température moyenne du fluide arrive jusqu'à 18.66°C entre le cas du Grashof égale à $1.93 \cdot 10^5$ et $5.1 \cdot 10^5$.

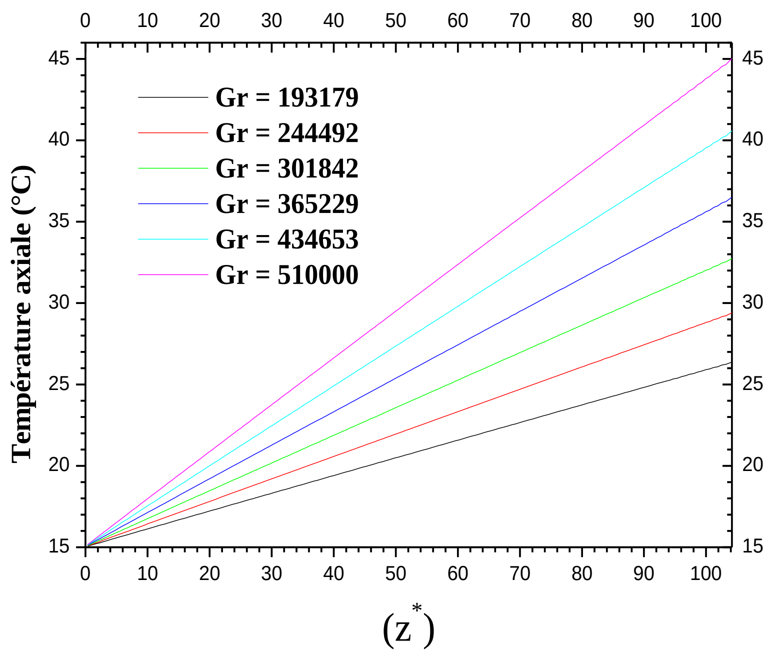


Figure 4.11 Evolution axiale de la température moyenne du fluide pour les différents cas étudiés.

Les pertes thermiques vers le milieu externe par rayonnement ou bien par convection thermique sont liées directement à la température de la paroi externe du conduit, alors il est très important d'étudier sa variation azimutale et axiale pour voir exactement sur qu'elles niveaux les pertes sont considérables. Dans la Figure 4.12 nous présentons les variations axiales des températures de la paroi externe en haut ($\theta = 0$) et en bas ($\theta = \pi$) du conduit pour les cas Gr=1.93 10^5 et Gr=5.1 10^5. Entre l'entrée et Z^*=4.883, la variation de température de la paroi est similaire à celle de la convection forcée, autrement dit dans cette zone la température augmentent rapidement mais sans variation angulaire. Juste après, la variation azimutale commence à être significative, en haut du conduit la température augmente considérablement alors que celle du bas subit une croissance moins intense. Il est important de faire remarquer que l'écart des températures entre le haut et le bas augmente d'une façon remarquable en augmentant le nombre de Grashof. A la sortie du conduit cet écart varie de 17.15°C pour $Gr=1.93\cdot10^5$ à 46.66°C pour $Gr=5.1\cdot10^5$.

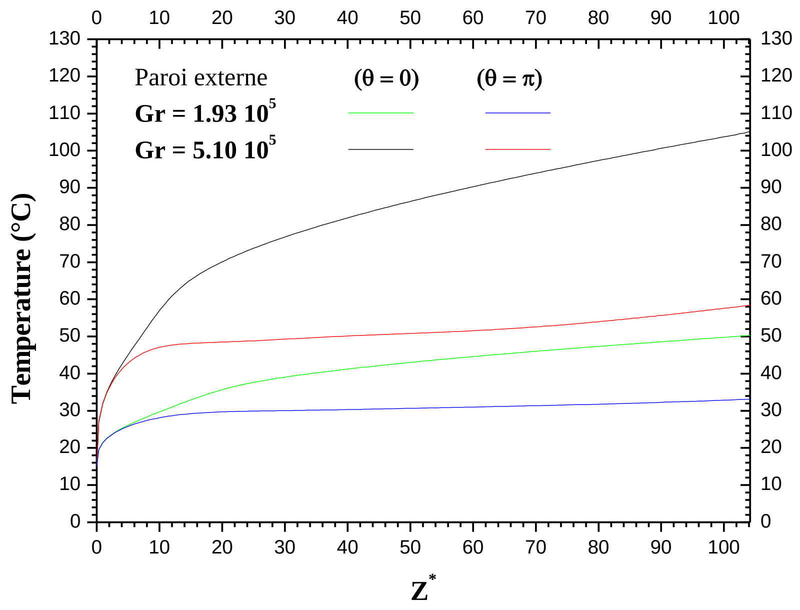


Figure 4.12 Evolution axiale de la température de la paroi externe en haut et en bas du conduit.

4.3.2.2 Flux thermique radial aux interfaces

La génération de chaleur produite par effet Joule dans l'épaisseur de la paroi du conduit est transférée radialement vers le fluide interne et vers l'air externe comme des pertes thermiques. Malgré que cette génération de chaleur soit uniforme dans toute l'épaisseur du conduit, le flux de chaleur radial (défini par $K^*\partial T^* / \partial r^*$) aux interfaces interne ($r^*=0.5$) et externe ($r^*=0.5208$) a des variations axiale et azimutale à cause de la variation de température dans ces directions. Dans la figure 4.13 nous représentons le flux de chaleur local à l'interface solide-fluide pour le cas du Grashof égale $5.1\cdot10^5$. A l'entrée le flux est nul car la température est constante dans toute la section. Entre $Z^*=0.3255$ et $Z^*=4.883$ la variation angulaire du flux thermique est très faible à cause de la distribution axisymétrique de la température dans cette courte zone. Loin de l'entrée, en une section donnée, le flux de chaleur prend une valeur minimale en haut de l'interface (θ=0) puis il subit une augmentation rapide pour atteindre une valeur maximale à un angle inférieur ou égale à θ=π/2 (dépendant de la position axiale), ensuite il subit une diminution jusqu'à θ=π de telle sorte que le flux à θ=π est plus important que celui à θ=0. La symétrie par apport au diamètre vertical impose une distribution de flux entre θ=2π et θ=π similaire à celle entre θ=0 et θ=π. Pour tous les cas étudiés, le flux de chaleur maximale dans le coté droit de l'interface est situé à z^*=103.1934 et θ=1.4993, son valeur adimensionnelle est égale à 0.811, 0.814, 0.815, 0.817, 0.819 et 0.820 pour Gr= 193179, 244492, 301842, 365229, 434653, et 510000, respectivement.

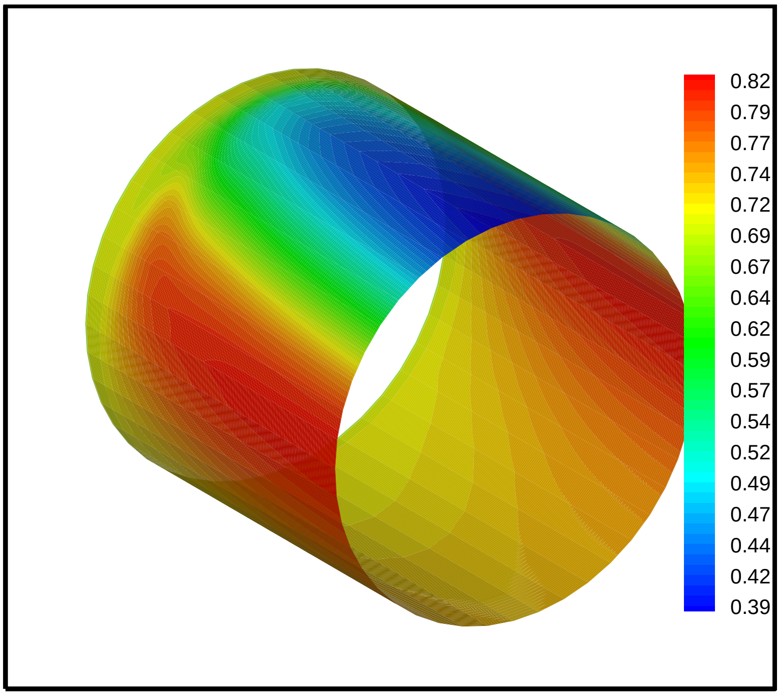


Figure 4.13 Variation angulaire du flux local le long du conduit pour Gr=$5.1\cdot10^5$.

Ce qui concerne les pertes thermique, pour chaque cas on a calculé le taux des pertes thermiques. Pour le cas du Gr=193179, on a trouvé que les pertes globales représente 3.21% de la chaleur générée, cette valeur devient : 3.28%, 3.34%, 3.41%, 3.48% et 3.56% pour Gr=244492, 301842, 365229, 434653, et 510000, respectivement.

4.4 Nombre de Nusselt

Le phénomène de transfert de chaleur est caractérisé par le nombre de Nusselt local à l'interface solide-fluide, obtenu par l'équation (2.21) et représenté dans la figure 4.14 pour le cas du Grashof égal à $5.1\cdot10^5$. Entre l'entrée est Z^*=4.883, il y a une chute du nombre de Nusselt local similaire à celle de la convection forcée (très faible variation angulaire). A partir de Z^*=4.883 jusqu'à la sortie du conduit il y'a une forte variation axiale et angulaire dans le nombre de Nusselt local. En une section axiale donnée, le minimum du Nusselt local est toujours en haut de l'interface (θ=0), le maximum est en bas à (θ=π), le diamètre verticale est un axe de symétrie.

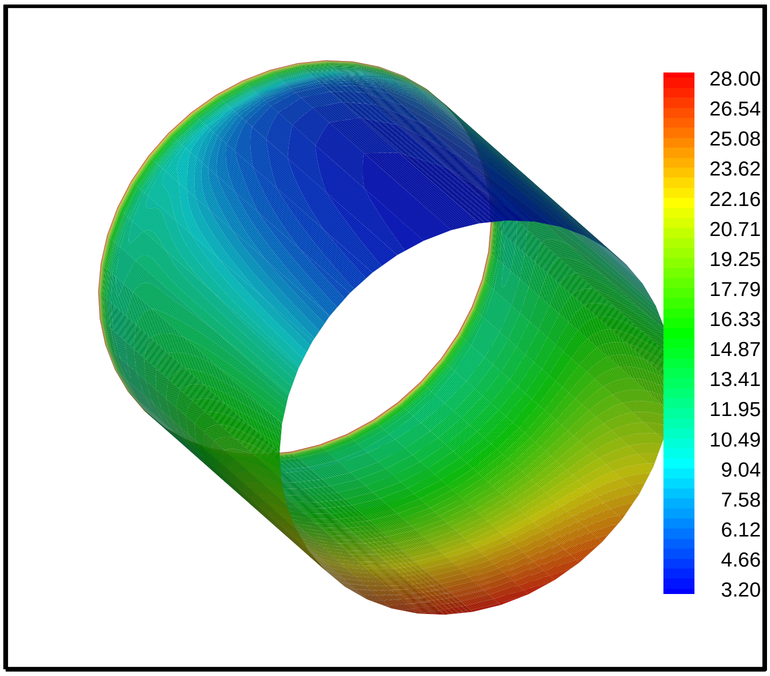


Figure 4.14 Variation angulaire du Nusselt local le long du conduit pour $Gr=5.1 \cdot 10^5$.

Le nombre de Nusselt circonférentiel moyen localement axial défini par l'équation (2.23) est représenté dans la figure 4.15 pour tous les cas étudiés y compris le cas de la convection forcée. Qualitativement il y'a une similarité dans la structure de la variation du nombre de Nusselt axial en fonction de Z^*. A l'exception du cas de la convection forcée, dans la courte zone d'entrée il y'a une chute du nombre de Nusselt axial pour tous les cas vers une valeur minimale, ce minimum augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof. Ensuite le nombre de Nusselt axial subit une augmentation vers une valeur maximale située à la sortie du conduit. Dans le tableau 4.1 nous représentons le nombre de Nusselt axial minimale, la position qui correspond et le nombre de Nusselt axial à la sortie du conduit pour tous les cas étudiés :

Tableau 4.1 : Distance correspond au Nusselt axial minimal, et Nusselt axial à la sortie.

Gr	0	10^5	$1.93 \cdot 10^5$	$2.44 \cdot 10^5$	$3.02 \cdot 10^5$	$4.35 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	10^6	$5 \cdot 10^6$	10^7
Z^*_{min}	104.17	29.6233	21.8106	19.2063	17.9042	15.2930	14.6489	12.0447	9.4404	9.4404
$Nu\ (Z^*_{min})$	5.8125	8.6145	9.4186	9.7316	10.0132	10.5339	10.7713	11.8050	14.4335	15.5844
$Nu\ (L^*)$	5.8125	10.9950	12.8082	13.5086	14.1549	15.2764	15.7896	18.7377	24.3291	28.0121

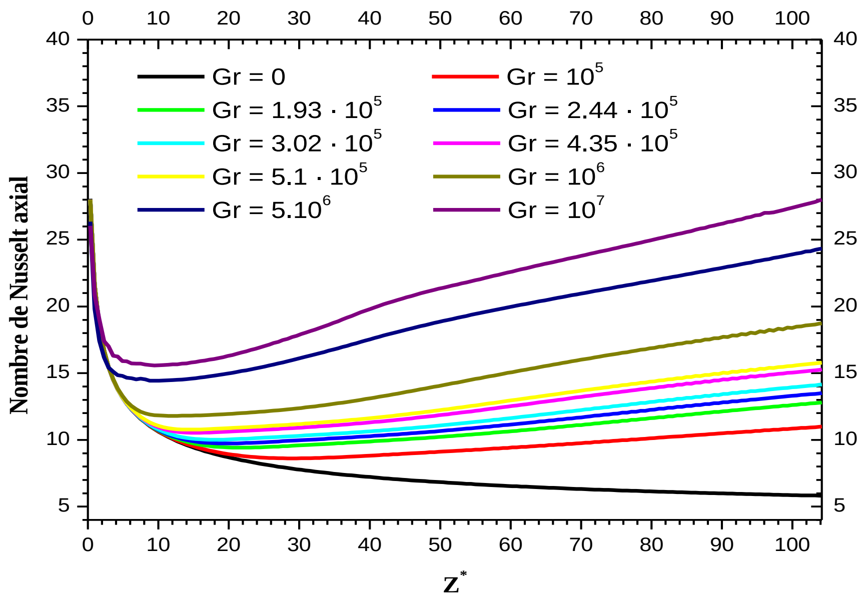


Figure 4.15 Variation du nombre de Nusselt axial pour les différents nombres de Grashof.

Le nombre de Nusselt moyen défini par l'équation (2.24) est représenté dans le tableau 4.2 pour chaque nombre de Grashof et le nombre de Richardson équivalent.

Tableau 4.2 : Le nombre de Nusselt moyen.

Gr	10^5	$1.93 \cdot 10^5$	$2.44 \cdot 10^5$	$3.02 \cdot 10^5$	$3.65 \cdot 10^5$	$4.35 \cdot 10^5$	$5.1 \cdot 10^5$	10^6	$5 \cdot 10^6$	10^7
Ri	0.272	0.5246	0.6639	0.8196	0.9918	1.1803	1.3849	2.715	13.577	27.154
Nu_m	10.121	11.185	11.624	12.037	12.434	12.791	13.144	14.932	19.112	21.478

Les résultats obtenues Nous a permis de modéliser le nombre de Nusselt moyen de la convection mixte en fonction du nombre de Richardson (nombre de Grashof sur le carré du nombre de Reynolds), pour cela on a utilisé le site Web d'ajustement des courbes « ZunZun.com» et nous avons trouvé que les résultats, avec les paramètres utilisés, sont bien corrélés avec la corrélation :

$$Nu_m = 12.753\ Ri^{\ 0.156}$$

Dans la figure 4.16, les nombres de Nusselt moyen obtenus sont présentés sur le même graphe avec le fitting de la corrélation. L'erreur absolue et l'erreur relative de chaque Nusselt moyen est représentée dans le tableau 4.3. Avec ces résultats, pour chaque nombre de Richardson entre 0 et 28 sous les mêmes conditions nous pouvons obtenir directement le nombre de Nusselt moyen.

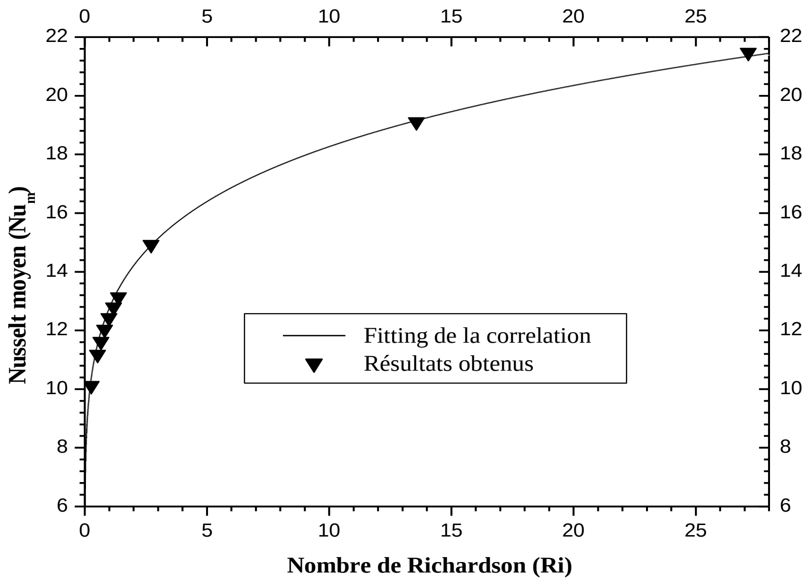


Figure 4.16 Le fitting de la corrélation.

Tableau 4.3 : L'erreur absolue et l'erreur relative.

Ri	**0.272**	**0.5246**	**0.6639**	**0.8196**	**0.9918**	**1.1803**	**1.3849**	**2.715**	**13.577**	**27.154**
Erreur Absolue	0.2819	0.3484	0.3398	0.3272	0.3030	0.2956	0.2737	0.0288	0.0451	0.1333
Erreur Relative	2.71 %	3.02 %	2.84 %	2.65 %	2.38 %	2.26 %	2.04 %	0.19 %	0.24 %	0.62 %

La comparaison entre les résultats numériques et la corrélation obtenue montre que cette dernière présente une excellente liaison des différent cas étudiés avec une erreur qui ne dépasse pas 3.02 %.

4.5 Propriétés thermo-physiques du fluide

Parmi les caractéristiques spécifiques de notre étude c'est la thermo-dépendance des propriétés physiques (viscosité + conductivité thermique). La prise en compte de la grande variation de ces dernières en fonction de la température rend le problème étudié très proche à la réalité.

4.5.1 Variation de la viscosité du fluide

La variation de la viscosité du fluide en fonction de la température défini par l'équation (2.1) est représentée dans la figure 4.17 pour le cas du $Gr=5.1\cdot10^5$. De l'entrée jusqu'à la sortie il y'a une large variation axiale et azimutale de la viscosité adimensionnelle. A l'entrée la température est constante ($T^*=0$), la viscosité dans cette section prend une valeur maximale $\mu^*=1.0$. Ensuite, la variation de la viscosité est inversement proportionnelle à celle de la température discuté dans la partie 4.3.2, à une section donnée la viscosité du fluide prend une valeur minimale en haut de l'interface solide-fluide ($r^*=0.5$, $\theta=0$) et une valeur maximale au sein de la partie inferieure du fluide à $\theta = \pi$. A la sortie du conduit, la viscosité minimale est égale à 0.4021 tandis que la viscosité maximale est égale à 0.8890 situé à $r^*=0.3625$, $\theta=\pi$.

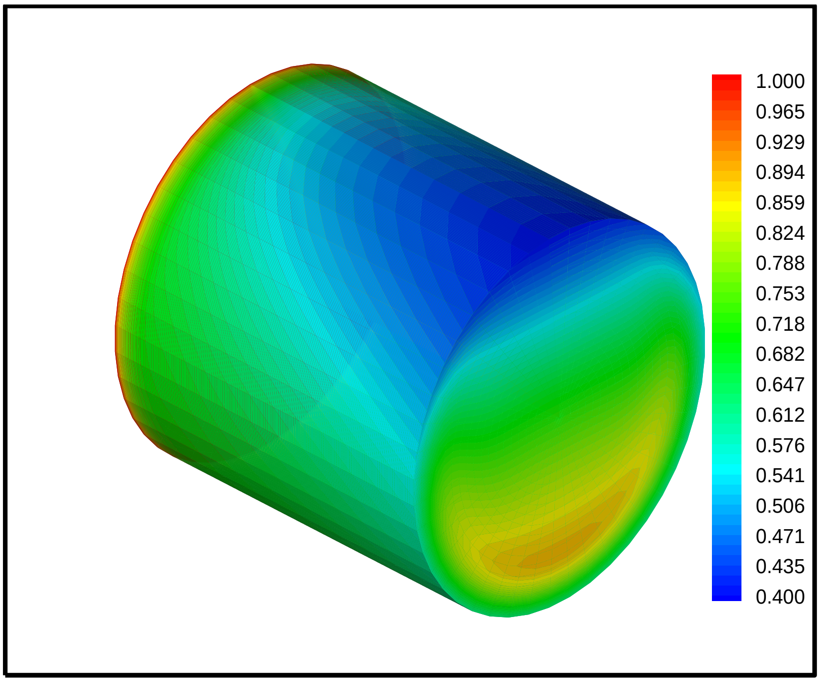


Figure 4.17 Variation de la viscosité du fluide.

4.5.2 Variation de la conductivité thermique du fluide

La variation de la conductivité thermique du fluide représentée dans la figure 4.18 est moins intense que celle de la viscosité. A l'entrée la conductivité est uniforme et égale à 1.001, après il y'a une augmentation axiale et angulaire proportionnelle à l'augmentation de la température. A une section donnée la conductivité thermique maximale est toujours localisée en haut de l'interface, sa valeur minimale est dans la partie inferieur. A la sortie du conduit, la conductivité thermique maximale est égale à 1.109 tandis que la viscosité minimale est égale à 1.017 situé à $r^*=0.3625$, $\theta=\pi$.

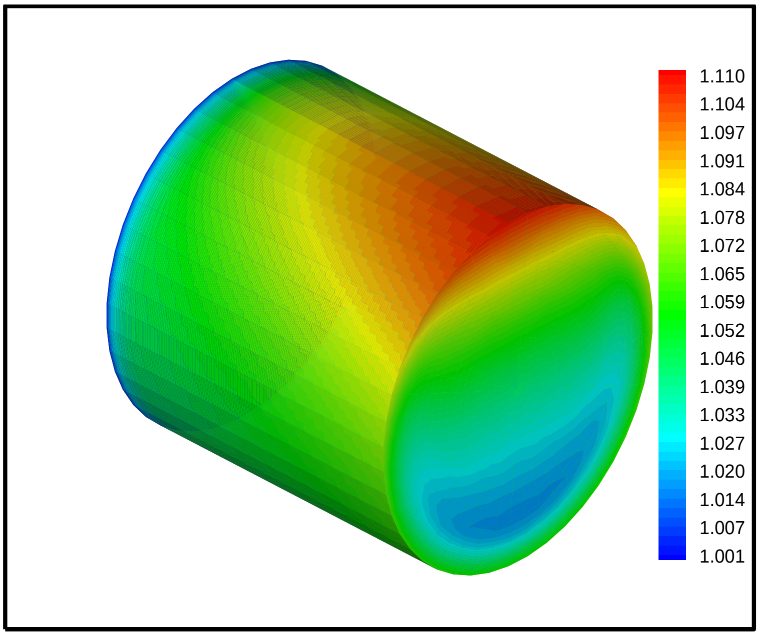


Figure 4.18 Variation de la conductivité thermique du fluide.

4.6 L'effet de la thermo-dépendance des propriétés physiques sur le transfert thermique

Dans la figure 4.19 on a fait une comparaison des nombres de Nusselt axiales obtenus pour un fluide à propriétés physiques constantes avec ceux obtenus pour un fluide à propriétés thermo-dépendantes. La comparaison est faite pour trois nombres de Grashof : $Gr=10^5$, $Gr=10^6$ et $Gr=10^7$. Il claire que le transfert thermique s'améliore lorsque les propriétés physiques sont thermo-dépendantes, ce phénomène est expliqué comme suit : dans le cas des propriétés constantes, la viscosité adimensionnelle $\mu^*=1$ dans l'ensemble du domaine fluide, dans ce cas la force de la poussée thermique est réduite à cause de la viscosité relativement importante, alors la convection forcée devient relativement supérieure à la convection naturelle et on a une diminution du transfert thermique, cette diminution devient de plus en plus importante en augmentant le nombre de Grashof. A la sortie du conduit, pour un fluide à propriétés variables le nombre de Nusselt axial est égal à 10.9949, 18.7377 et 28.0121 pour les nombres de Grashof : 10^5, 10^6 et 10^7 respectivement, pour un fluide à propriétés constantes le nombre de Nusselt axial devient 9.0979, 15.2242 et 23.6985 pour les mêmes nombres de Grashof précédents.

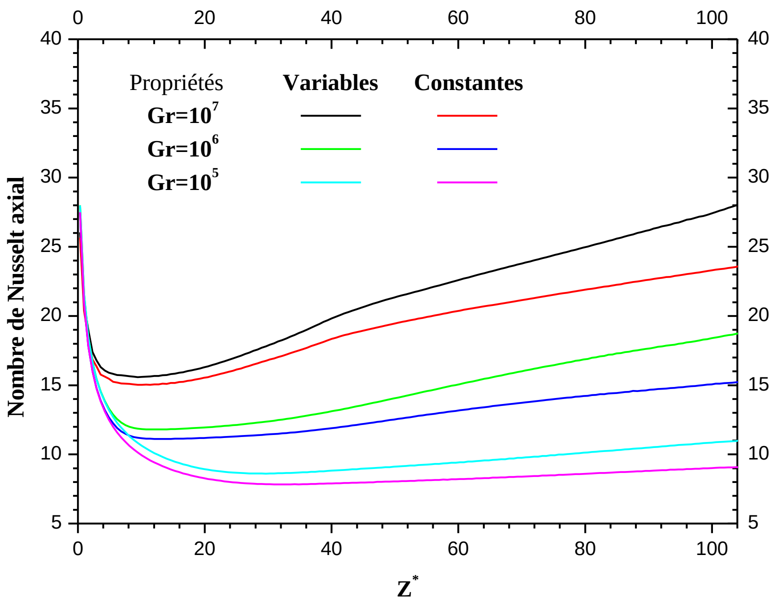


Figure 4.19 Comparaison des nombres de Nusselt axial entre le fluide à propriétés variables et constantes.

4.7 Conclusion

Dans le présent chapitre on a étudié la convection laminaire dans un conduit horizontal chauffé par un courant électrique passant à travers sont épaisseur. Le système d'équation de conservation est résolu par la méthode des volumes fini avec un maillage 26×44×162 suivant les directions radiale, azimutale et axiale respectivement. Les résultats présentés sont obtenus pour un rapport d'aspect du conduit égal à 104.17, un nombre de Prandtl Pr=8.082 évalué à la température de l'eau distillé à l'entée du conduit (15°C), un nombre de Reynolds Re=606.85 et un nombre de Grashof varie entre 0 et 10^7 suivant le chauffage volumétrique utilisé. Les résultats obtenus montrent que les champs dynamiques et thermiques de la convection mixte sont qualitativement et quantitativement différents de ceux de la convection forcée. Bien que l'apport de chaleur volumétrique dans l'épaisseur solide du conduit soit uniforme, le flux de chaleur à l'interface solide-fluide n'est pas constant : il varie suivant θ et Z, ce constat est une caractéristique de la convection mixte considérée. La variation azimutale de la température, à une section donnée est importante, ce phénomène est démontré par la variation circonférentielle de température de la paroi du conduit : on trouve un écart de température important entre le haut et le bas du conduit. Les pertes thermiques par rayonnement et convection naturelle vers le milieu externe ne représentent qu'une faible portion de la chaleur produite par effet joule (maximum 3.56% pour le cas du Gr=510000). La prise en compte de la thermo-dépendance des propriétés physique du fluide est très importante cela est justifiée par la grande variation de la viscosité thermique du fluide en fonction de la température. Pour la convection forcée, le nombre de Nusselt moyen est 7.78. Ainsi, Pour la convection mixte les paramètres utilisés, sont bien corrélés avec la corrélation : $Nu_m = 12.753\ Ri^{\ 0.156}$.

Chapitre 5

Convection mixte conjuguée d'un fluide à propriétés physiques variables dans un espace annulaire

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie et on discute les résultats de la deuxième partie de notre étude concernant la convection mixte laminaire d'un fluide à propriétés physiques thermo-dépendantes. Ce dernier s'écoule à une vitesse moyenne égale à 9.88 10^{-2} m/s dans un espace annulaire entre deux cylindres concentriques de telle sorte qu'on va garder le conduit de la partie précédente comme un cylindre externe dans cette partie. Il s'agit d'un conduit horizontal en Inconel de faible épaisseur 0.02 cm à un diamètre interne égal à 0.96 cm, un diamètre externe égal à 1 cm et une résistance électrique égale à 0.16 Ω. Le cylindre interne est adiabatique au niveau de sa paroi interne, il a la même nature et l'épaisseur du cylindre externe avec un diamètre intérieur égal à 0.46 cm et un diamètre extérieur égale à 0.5 cm. Le cylindre externe est chauffé par une génération de chaleur uniforme produite par effet Joule à cause du passage d'un courant électrique à travers son épaisseur. On a gardé les mêmes intensités du courant électrique de la partie précédente I=

40, 45, 50, 55, 60 et 65 Ampères. Avec un diamètre hydraulique égal à 0.46 cm, les nombres de Grashof corresponds aux intensités précédentes seront : 4848, 6135, 7575, 9165, 10908, et 12801, respectivement. Le rapport d'aspect du conduit A=217.39, le nombre de Reynolds est égal à 399.2. Le nombre de Prandtl évalué à la température d'entrée de l'eau est égal à 8.082.

5.2 La convection forcée

5.2.1 Champ dynamique de l'écoulement

A l'entrée de l'espace annulaire, l'écoulement axial suit un profil parabolique défini par l'équation (2.26) où la vitesse axiale est nulle sur les parois des cylindres et elle prend une valeur maximale égale à 1.507 située au centre radial de l'espace annulaire à $r^*=0.7779$, les composantes radiale et angulaire de l'écoulement dans cette section sont nulles. L'utilisation de ce profile permet d'atteindre rapidement le développement hydrodynamique de l'écoulement. Ensuite, la composante radiale de l'écoulement subira une faible variation axisymétrique le long de la zone d'entrée de l'espace annulaire jusqu'à l'écoulement axial sera pleinement développé. Une présentation du profil de la vitesse axiale est illustrée dans la figure 5.1. Il est bien clair que la distribution de la vitesse axiale garde sa forme axisymétrique de l'entrée jusqu'à la sortie, les isotacs sont des cercles concentriques avec une vitesse nulle sur les parois des tubes et une vitesse maximale au centre de l'espace annulaire, ce maximum subit une diminution varie entre 1.507 à l'entrée et 1.476 lorsque l'écoulement est pleinement développé.

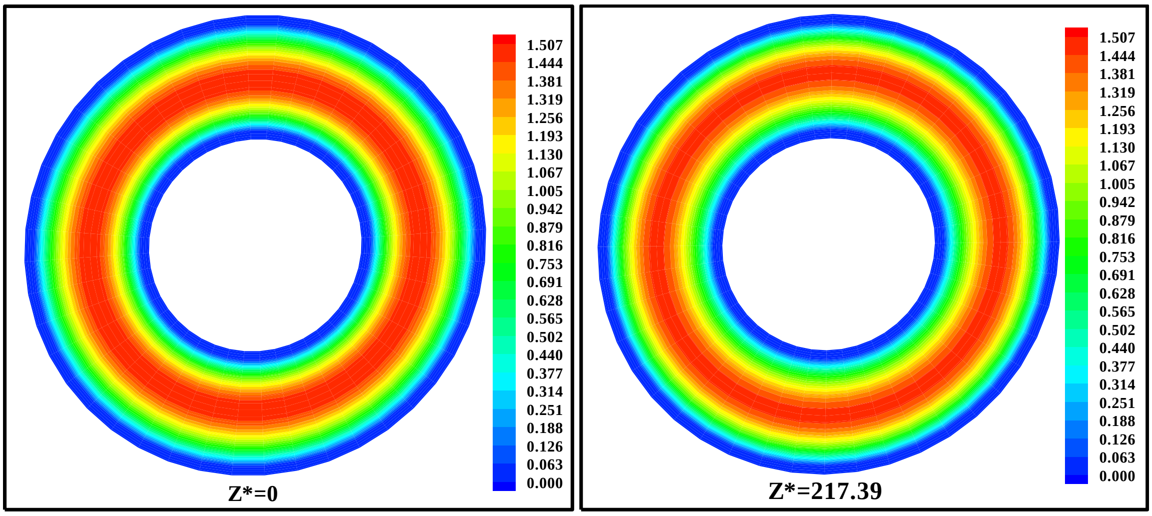


Figure 5.1 Les contours de vitesse axiale en convection forcée.

5.2.2 Champ thermique de l'écoulement

Contrairement à l'écoulement axial, la température du fluide à l'entrée de l'espace annulaire est uniforme. Ensuite, la chaleur dégagée par la paroi du cylindre externe impose un gradient de température orienté vers le cylindre interne de telle sorte que la distribution des isothermes garde une variation axisymétrique le long de la direction axiale, cette symétrie est due à l'absence de l'écoulement transversal qui permet d'avoir une variation du champ de température seulement suivant la direction radiale. La variation du champ de température dans des sections axiales arbitrairement choisies : $Z^* = L^*/4$, $L^*/2$, $3L^*/4$ et L^*, est représentée dans la figure 5.2. Dans chaque section axiale, les isothermes du fluide sont des cercles concentriques avec une température maximale sur la paroi intérieure du cylindre externe et une température minimale sur la paroi extérieure du cylindre interne, la température du fluide atteint son maximum absolu qui est égal à 0.4717 à la sortie de l'espace annulaire sur l'interface fluide-paroi du cylindre externe.

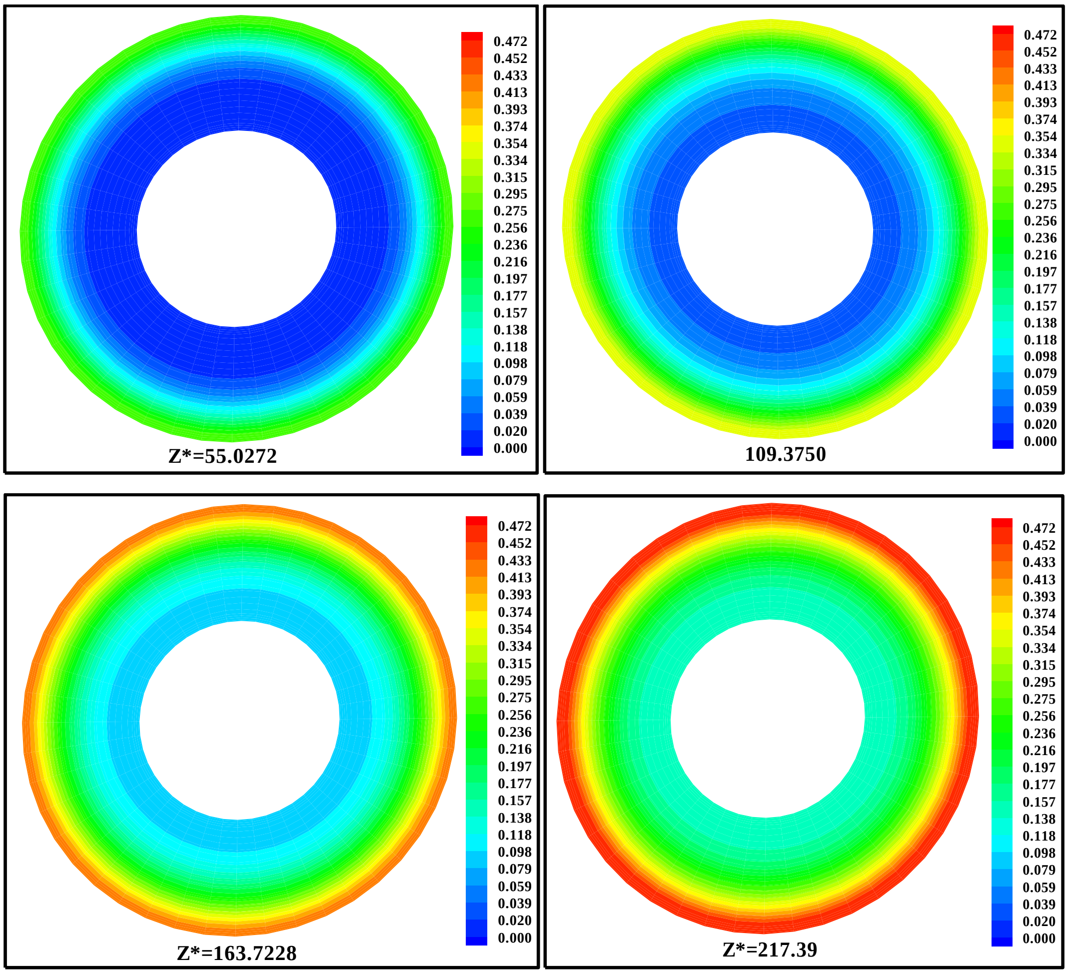


Figure 5.2 Champ de température dans des positions axiales arbitrairement choisies pour la convection forcée.

La variation de la température axiale moyenne du fluide T^*_m , la température de l'interface fluide-paroi du cylindre interne T^*_i et la température de l'interface fluide-paroi du cylindre externe T^*_e en fonction de la distance axiale sont représentées dans la figure 5.3. La température moyenne du fluide augmente linéairement en fonction de Z^* à cause du chauffage continu vers le fluide le long de l'espace annulaire. Ce qui concerne la température des interfaces, cette dernière varie seulement suivant la direction axiale. A une section donnée, cette température est constante. Prés de l'entrée, la température de l'interface externe augmente rapidement ensuite cette augmentation devient de plus en plus lente, en revanche la température de l'interface interne augmente lentement ensuite cette augmentation devient de plus en plus importante en s'éloignant de l'entrée. La comparaison entre la température moyenne du fluide d'une part et les températures aux interfaces d'une autre part montre que la température moyenne à une section axiale donnée est plus prés à celle de l'interface froide. A la sortie de l'espace annulaire, la température moyenne du fluide est égale à 0.2521 tandis que la température des deux interfaces interne et externe sont 0.1454 et 0.4522 respectivement.

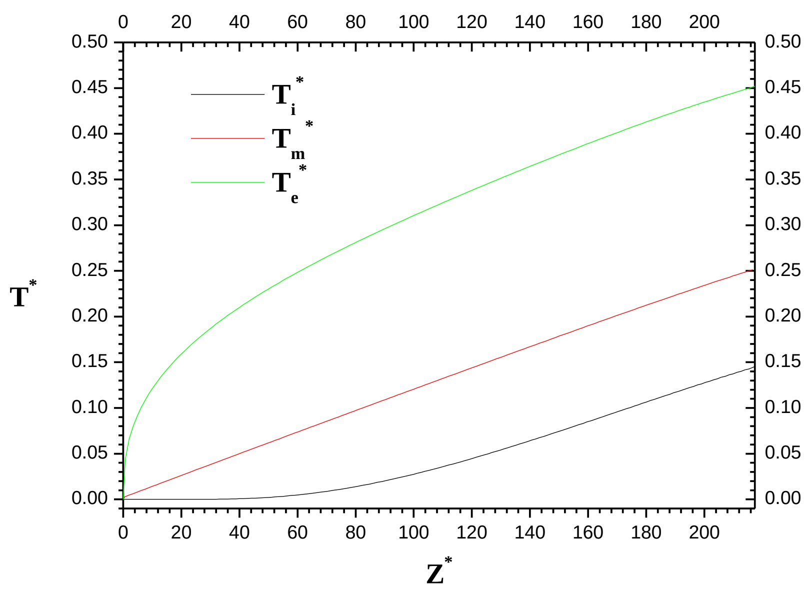


Figure 5.3 Variation axiale de la température moyenne du fluide et les températures aux interfaces fluide-paroi du cylindre interne et externe pour Gr=0.

Dans la figure 5.4, les résultats obtenus concernant le nombre de Nusselt axial à l'interface externe de l'espace annulaire défini par l'équation (2.38) sont comparés avec ceux obtenus numériquement par **Nazrul et al. [46]** pour le cas de la convection forcée. La comparaison montre un excellent accord entre les deux résultats. Dans la courte zone d'entrée, le nombre de Nusselt axial subit une chute brutale varie de 22.11 à 8.93 due à la l'augmentation rapide de la différence entre la température de la paroi du cylindre externe et la température moyenne du fluide suivie par une lente diminution du Nusselt axial à cause de la stabilisation dans la différence de la température. A la sortie de l'espace annulaire, la valeur du nombre de Nusselt axial est égale à 6.235.

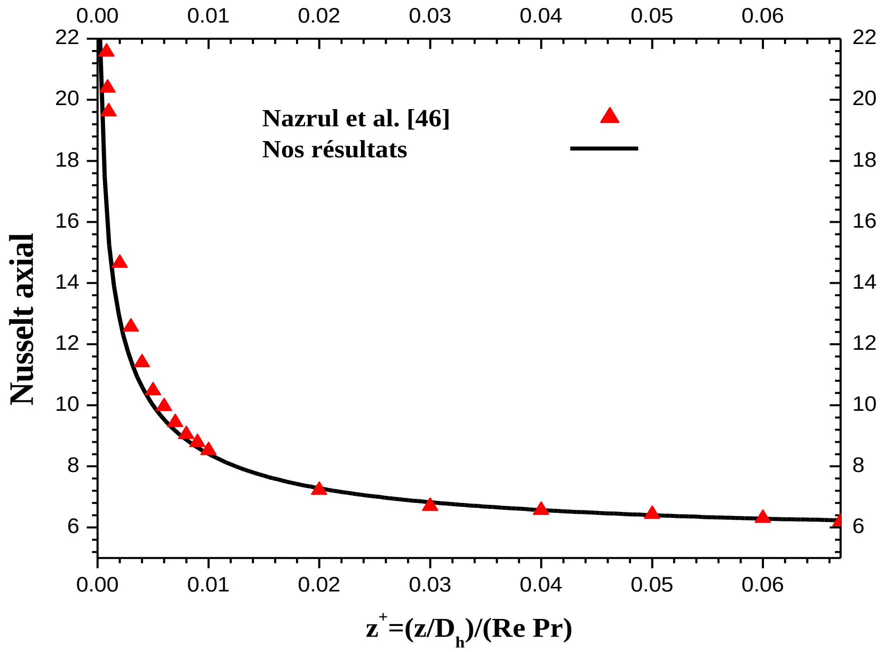


Figure 5.4 Distribution du nombre de Nusselt axial à l'interface fluide-Paroi du cylindre externe pour Gr=0; une comparaison avec les résultats de **Nazrul et al. [46]**.

5.3 La convection mixte

Le passage d'un courant électrique varie entre 40 et 65 Ampères et accompagné par une augmentation dans le nombre de Grashof varie de 4848 à 12801. Cette augmentation dans le nombre de Grashof impose une variation angulaire qui change la structure axisymétrique des champs thermique et dynamique de l'écoulement. La seule symétrie est celle par rapport au plan verticale qui passe à travers les angles $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$.

5.3.1 Champ dynamique de l'écoulement

Les résultats discutés dans cette partie correspond au nombre de Grashof le plus élevé : Gr=12801. Mais, dès qu'il y aura nécessité on introduira les résultats obtenus pour les autres valeurs du nombre de Grashof.

5.3.1.1 L'écoulement secondaire

Une génération de chaleur uniforme égale à 10.98 10^7 W/m^3 produite par effet Joule dans la paroi du cylindre externe de l'espace annulaire est la cause directe de la naissance d'une force de poussée thermique dépendante de la température. Cette dernière créée un mouvement transversale dans le plan (r^*, θ) qui est influencé par la variation de la viscosité du fluide avec la température. A l'entrée la température est constante, l'écoulement secondaire est inexistant. Après, la chaleur dégagée par la paroi du cylindre externe impose un gradient de température radial orienté vers le cylindre interne de telle sorte que le fluide chaud est au voisinage du cylindre externe et le fluide relativement froid est au voisinage du cylindre interne. Le mouvement transversal dans le plan (r^*, θ) créé par ce gradient de température est expliqué comme suit : le fluide chaud se déplace le long de la paroi intérieur du cylindre externe du bas ($\theta=\pi$) vers le haut ($\theta=0$) et redescend ensuite du haut vers le bas le long de la paroi extérieur du cylindre interne. Deux cellules contrarotatives identiques sont crées par ce mouvement, ces deux cellules se déplacent du haut vers le bas de l'espace annulaire le long de la direction axiale. Pour Gr=12801, l'écoulement secondaire s'intensifie rapidement en atteignant une valeur maximale égale à $V^*_{\theta\,max}$= $2.935 \cdot 10^{-2}$, le coté droit de ce maximum est située à z^*=103.94, r^*=0.9435 et θ=1.5351. Ensuite l'écoulement secondaire subit un freinage accompagné par une diminution relative dans l'intensité de l'écoulement secondaire. A z^*=86.5625, $V^*_{\theta\,max}$est égale à $2.5 \cdot 10^{-2}$, à partir de cette position axiale l'intensité de l'écoulement secondaire est invariante jusqu'à la sortie de l'espace annulaire. Le champ des vecteurs de l'écoulement secondaire est représenté dans la figure 5.5 sur le plan (r^*, θ) en des positions axiales sélectionnées (z^* = 18.342, L^*/4, 103.94, L^*/2, 3L^*/4 et L^*), sachant que z^*= 103.94 est la position axiale où l'écoulement secondaire est plus intense. Comme il à été mentionné dans la partie 3.9, il est bien claire que l'utilisation d'un maillage 52×88×162 améliore la présentation graphique surtout lorsque il s'agit d'une présentation des vecteurs de l'écoulement secondaire.

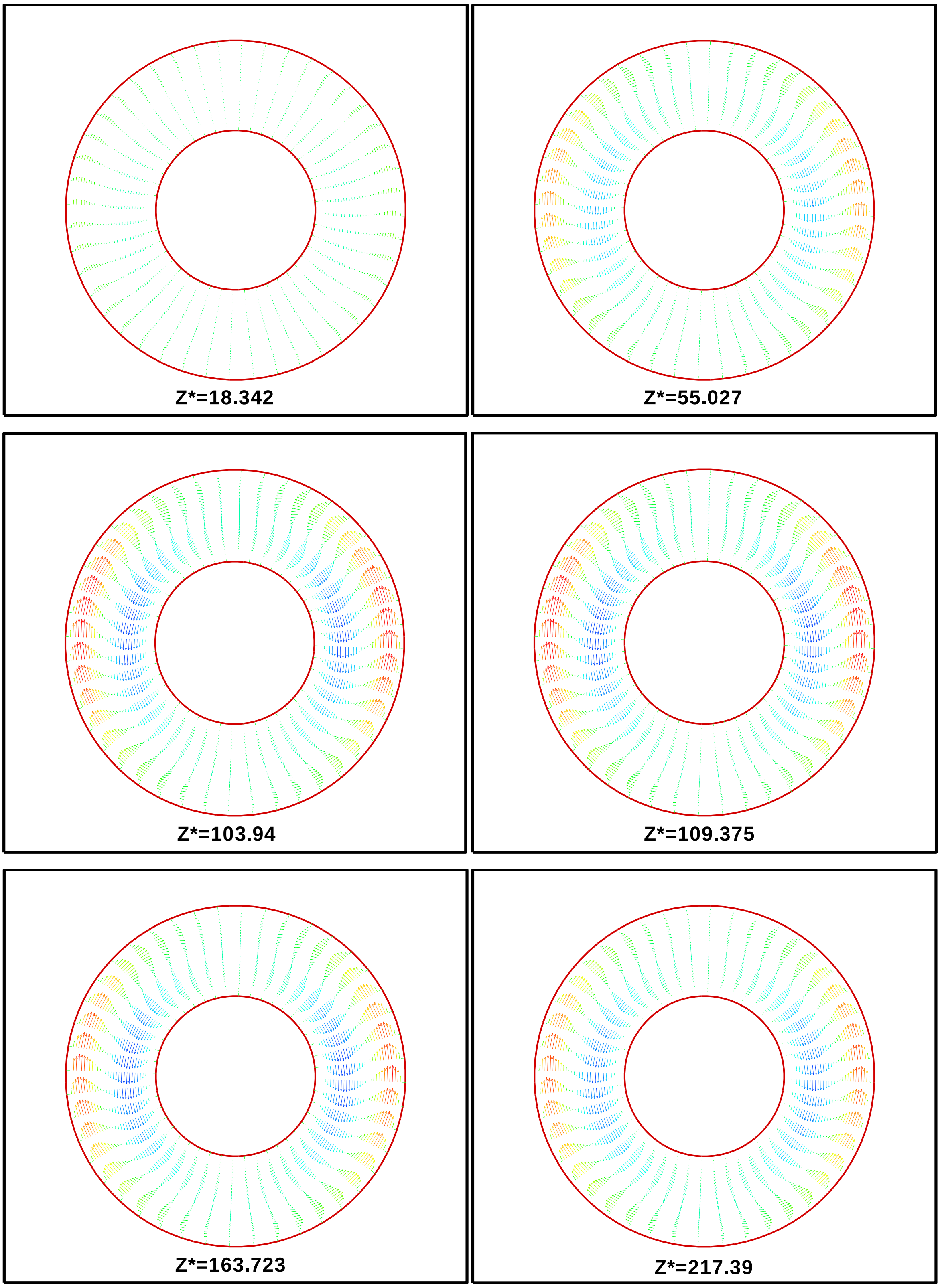


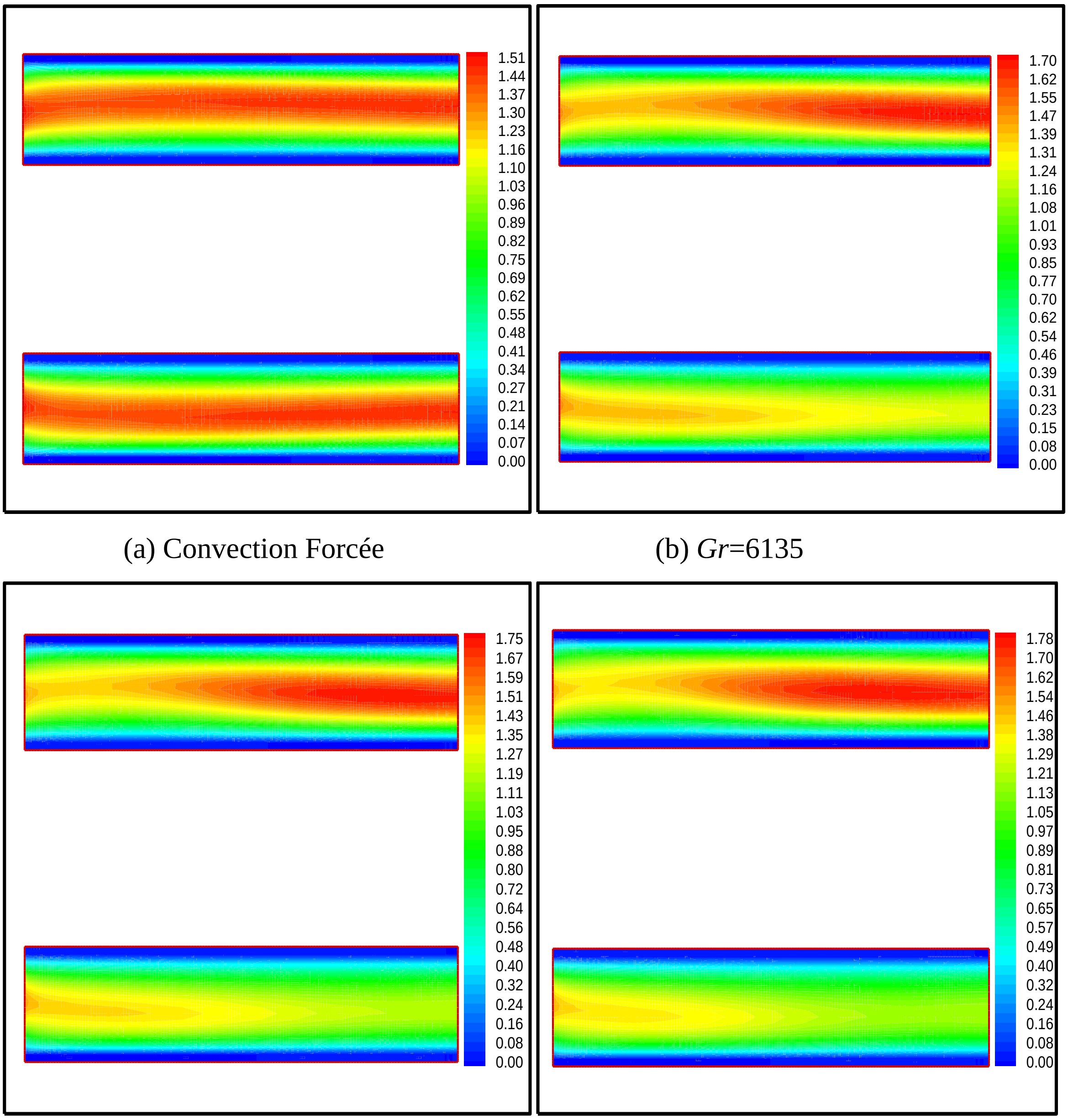
Figure 5.5 Développement de l'écoulement secondaire dans des positions axiales sélectionnées.

5.3.1.2 L'écoulement axial

A l'entrée l'écoulement axial a un profil parabolique où les contours de vitesse axiale sont des cercles concentriques dont le maximum $\left(V^*_{z\,0} = 1.507\right)$ est au centre radial de l'espace annulaire et le minimum $\left(V^*_{z\,0} = 0\right)$ est sur les parois des cylindres. Ensuite la distribution axisymétrique de l'écoulement axial est influencé par la génération d'un mouvement transversal et par la variation de la viscosité en fonction de la température qui provoquent une variation angulaire de la vitesse axiale expliquée comme suit : comme la viscosité thermique est inversement proportionnelle à la température du fluide et la vitesse axiale augmente avec la diminution de la viscosité, automatiquement on va avoir une vitesse axiale relativement élevé dans la partie supérieur de l'espace annulaire où la température du fluide est supérieur à celle de la partie inférieur. Dans les figures 5.6(a)-(d) on représente une illustration de la variation de la vitesse axiale dans le plan verticale qui passe à travers les angles $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$ qui est un plan de symétrie pour quatre cas étudiés : Gr=0, Gr=6135, Gr=9165 et Gr=12801. Les résultats obtenus montrent clairement que l'effet de la diminution de la viscosité dans la partie supérieur de l'espace annulaire sur l'écoulement axial devient de plus en plus important avec l'augmentation du chauffage volumétrique. Pour Gr=6135, la vitesse axiale $V^*_{z\,max}$ prend une valeur maximale égale à 1.705 située à r^*=0.7779, θ=0 et z^*=199.0489. Pour Gr=9165, $V^*_{z\,max} = 1.749$ est située à r^*=0.7779, θ=0 et z^*=177.3098 et finalement pour Gr=12801, $V^*_{z\,max} = 1.781$ est située à r^*=0.7779, θ=0 et z^*=166.4402. On remarque que le maximum de la vitesse axiale s'approche de la sortie de l'espace annulaire en diminuant le nombre de Grashof.

La variation polaire de l'écoulement axiale pour le cas du Gr=12801 en des positions axiales choisies (z^* = 0, 18.342, L^*/4, L^*/2, 166.4402 et L^*) est illustrée dans la figure 5.7, sachant que z^*= 166.4402 est la position axiale où l'écoulement axiale prend une valeur maximale égale à 1.781. A l'entrée l'écoulement axiale est axisymétrique, la vitesse axiale adimensionnelle prend une valeur maximale $V^*_{z\,max} = 1.507$ située au centre radial de l'espace annulaire (r^*=0.7779). Entre l'entrée et z^*=18.342, le maximum de la vitesse axiale subit une diminution à une valeur égale 1.414 avec une très faible variation azimutale dans cette courte zone. A partir de z^*=18.342 la variation angulaire de V^*_z commence à être remarquable avec un changement de la position de $V^*_{z\,max}$ vers le haut de l'espace annulaire (θ=0), à z^*=55.0272, le maximum $V^*_{z\,max} = 1.468$ est située à $r^* = 0.7984$ et

$\theta = 0$. Ensuite ce maximum subit une augmentation dans la direction axiale en gardant la même position jusqu'à z^*=166.4402 où $V^*_{z\,max}$ prend une valeur maximum de tout l'espace annulaire égale à 1.781. Après cette position axiale, le maximum $V^*_{z\,max}$ subit une légère diminution continue jusqu'à la sortie de l'espace annulaire, à z^*=217.39, $V^*_{z\,max}$ est égale 1.739.



(a) Convection Forcée (b) *Gr*=6135

(c) *Gr*=9165 (d) *Gr*=12801

Figure 5.6 Développement de l'écoulement axial dans le plan vertical en fonction du nombre de Grashof.

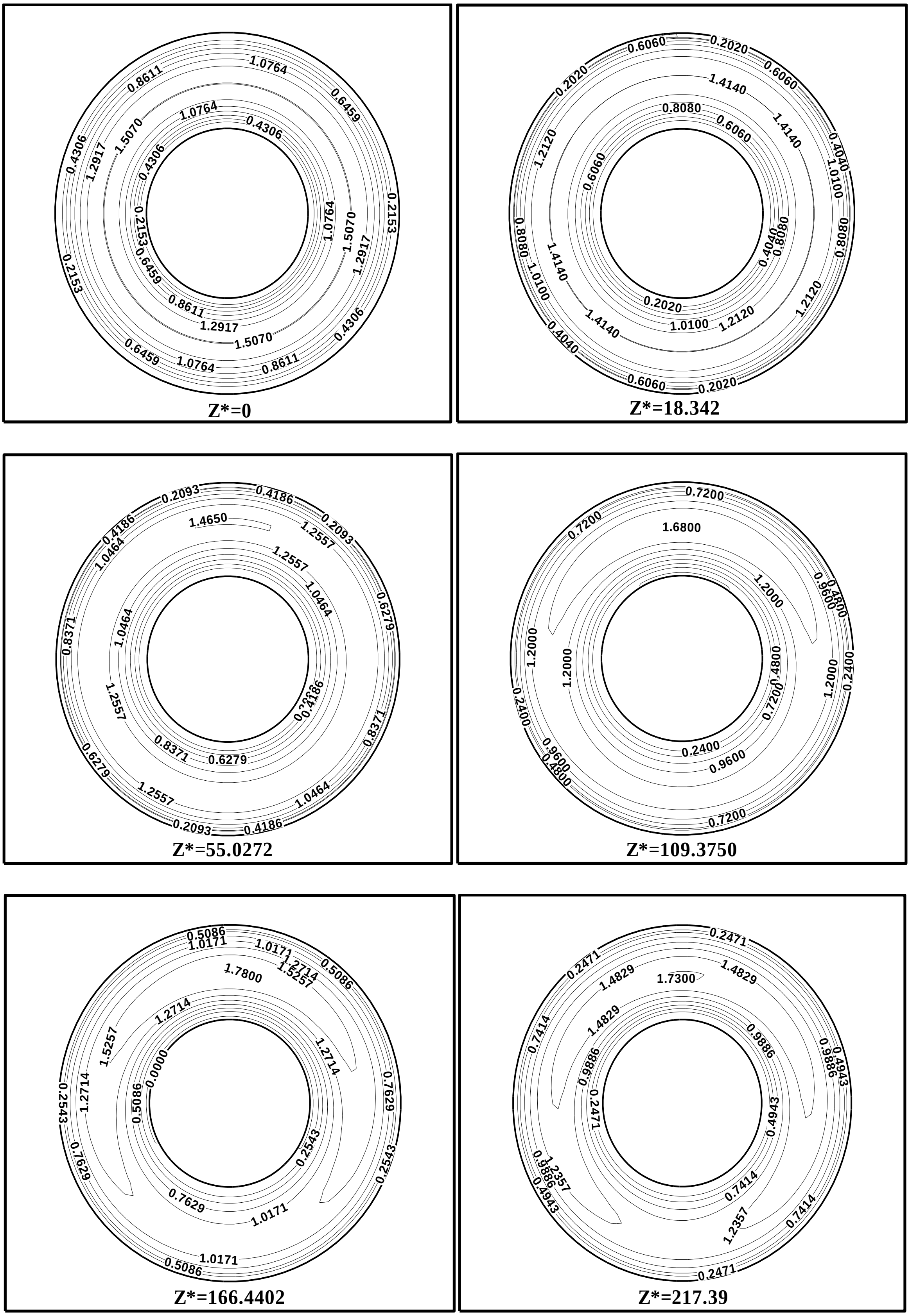
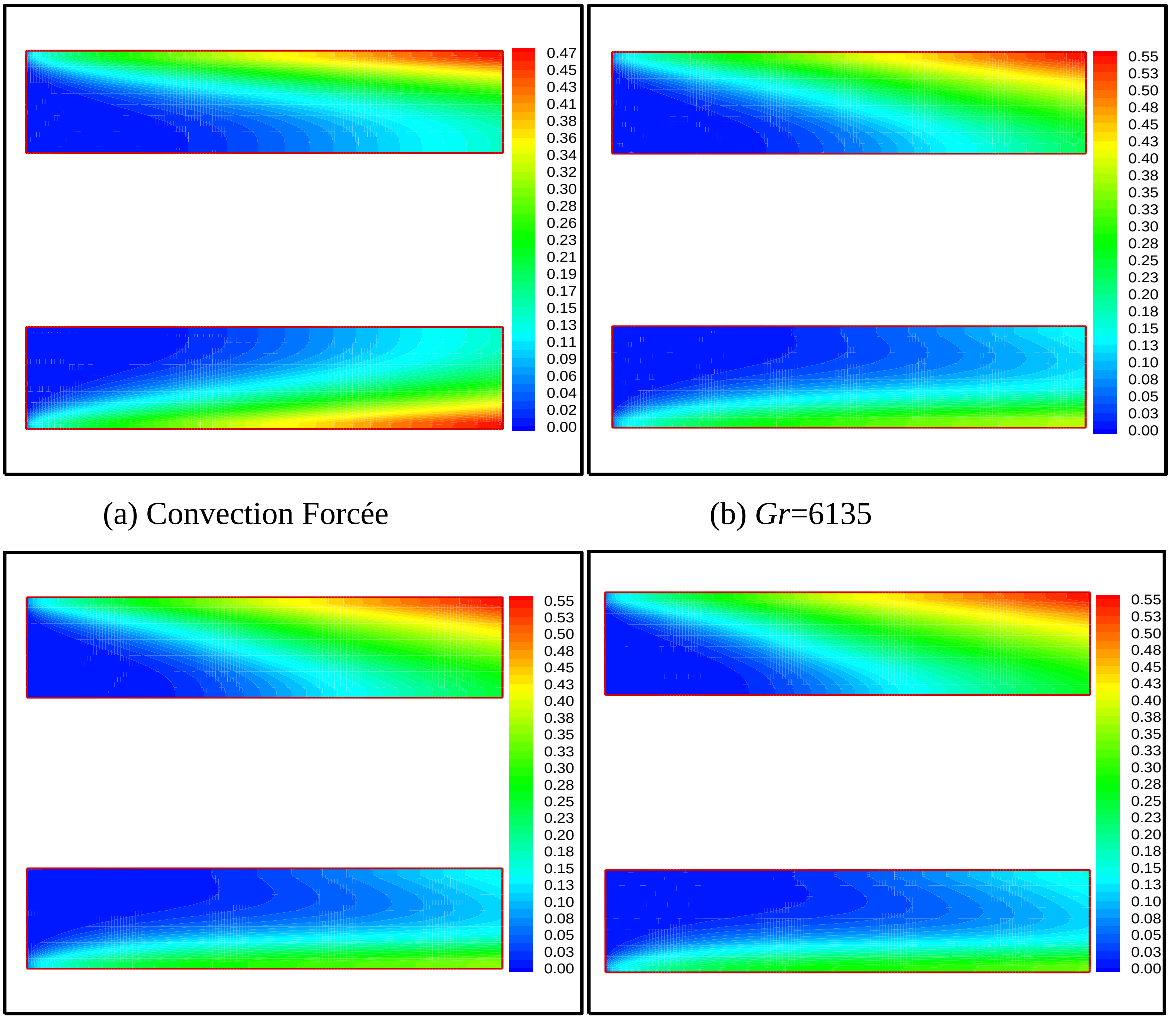


Figure 5.7 Variation polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies.

5.3.2 Champ de température

En présence de l'écoulement secondaire, l'axisymétrie de la distribution de température vue dans le cas de la convection forcée est influencée par le mouvement transversal du fluide, une variation angulaire de la température est imposée. Cette variation est expliquée comme suit : à une section axiale donnée, le fluide chaud prés de la paroi externe de l'espace annulaire est transporté par le mouvement transversal vers le haut sous l'effet de la force de poussée thermique, le fluide relativement froid redescend au voisinage de la paroi interne. L'avancement dans la direction axiale avec une génération de chaleur uniforme dans toute la paroi externe permet d'augmenté la température de chaque point du fluide par apport à la section axiale précédente. L'effet d'augmentation du nombre de Grashof sur la variation axiale de la température adimensionnelle dans le plan verticale central est représenté dans les figures 5.8(a)-(d). A travers ces figures nous observons que l'écart de température du fluide entre le haut et le bas de l'espace annulaire devient de plus en plus important avec l'augmentation du nombre de Grashof, cela est dû à l'intensification du mouvement transversal qui porte le fluide chaud vers la partie supérieur $(\theta = 0)$de l'espace annulaire. A la sortie de l'espace annulaire, l'écart de température adimensionnelle entre le haut et le bas des interfaces (fluide-cylindre externe) est égal à 0.1816, 0.2081 et 0.2208 pour Gr=6135, Gr=9165 et Gr=12801 respectivement.

La variation angulaire de la température du fluide en des positions axiales sélectionnées (z^* = 18.342, L^*/4, 103.94, L^*/2, 3L^*/4 et L^*) pour le cas du Gr=12801 est représentée dans la figure 5.9, sachant que z^*= 103.94 est la position axiale où l'écoulement secondaire est plus intense. A l'entrée le fluide a une température constante. Après, la température maximale du fluide est située à l'interface fluide-paroi externe de l'espace annulaire à $\theta = 0$ dans toute la direction axiale. A z^*=18.342, la température maximale est égale à 0.1670, cette température augmente à 0.2712, 0.3897, 0.3798, 0.4731 et 0.5453 pour z^*= L^*/4, z^*= L^*/2, z^*= 103.94, z^*= 3L^*/4 et z^*= L^* respectivement. La température minimale du fluide est au sein de la partie inferieure à $\theta = \pi$. A z^*= L^*/4, la position de la température minimale est située à r^* = 0.5565. Cette position se déplace à r^* = 0.6201, r^* = 0.6532, r^* = 0.7177 et r^* = 0.750 pour z^*= L^*/2, z^*= 103.94, z^*= 3L^*/4 et z^*= L^* respectivement. A travers les résultats obtenus concernant le champ de température, il est clair que le niveau des températures augmente en augmentant le nombre de Grashof, pour le même nombre de Grashof la température du fluide subie une augmentation continue dans la direction axiale,



(a) Convection Forcée (b) *Gr*=6135

(c) Gr=9165 (d) Gr=12801

Figure 5.8 Distribution axiale des isothermes dans le plan vertical en fonction du nombre de Grashof.

Dans la figure 5.10, on n a comparé nos résultats avec les résultats numérique de **Nouar [49]**, les paramètres de contrôle pour la référence citée sont : Re=35, Gr=6000, Pr=557.3 et un rapport d'aspect du conduit L/D_h=125. Dans cette figure, nous présentons la variation de température en haut (θ=0) et en bas ($\theta=\pi$) de l'interface externe de l'espace annulaire (fluide-cylindre externe). La température et la position axiale sont présentées sous forme adimensionnelle conformément à la référence **[49]**, la position axiale est normalisée par le produit ($Re{\cdot}Pr$). Dans La courte zone d'entrée, la variation de la température adimensionnelle de l'interface est similaire a celle de la convection forcée, elle subit une augmentation rapide mais sans variation angulaire. Ensuite et sous l'effet de l'écoulement secondaire, la variation azimutale de la température à l'interface devienne importante, en haut la température augmente considérablement alors que celle du bas, sa variation est moins intense. Il est bien clair que nos résultats sont en bon accord avec ceux de la référence citée.

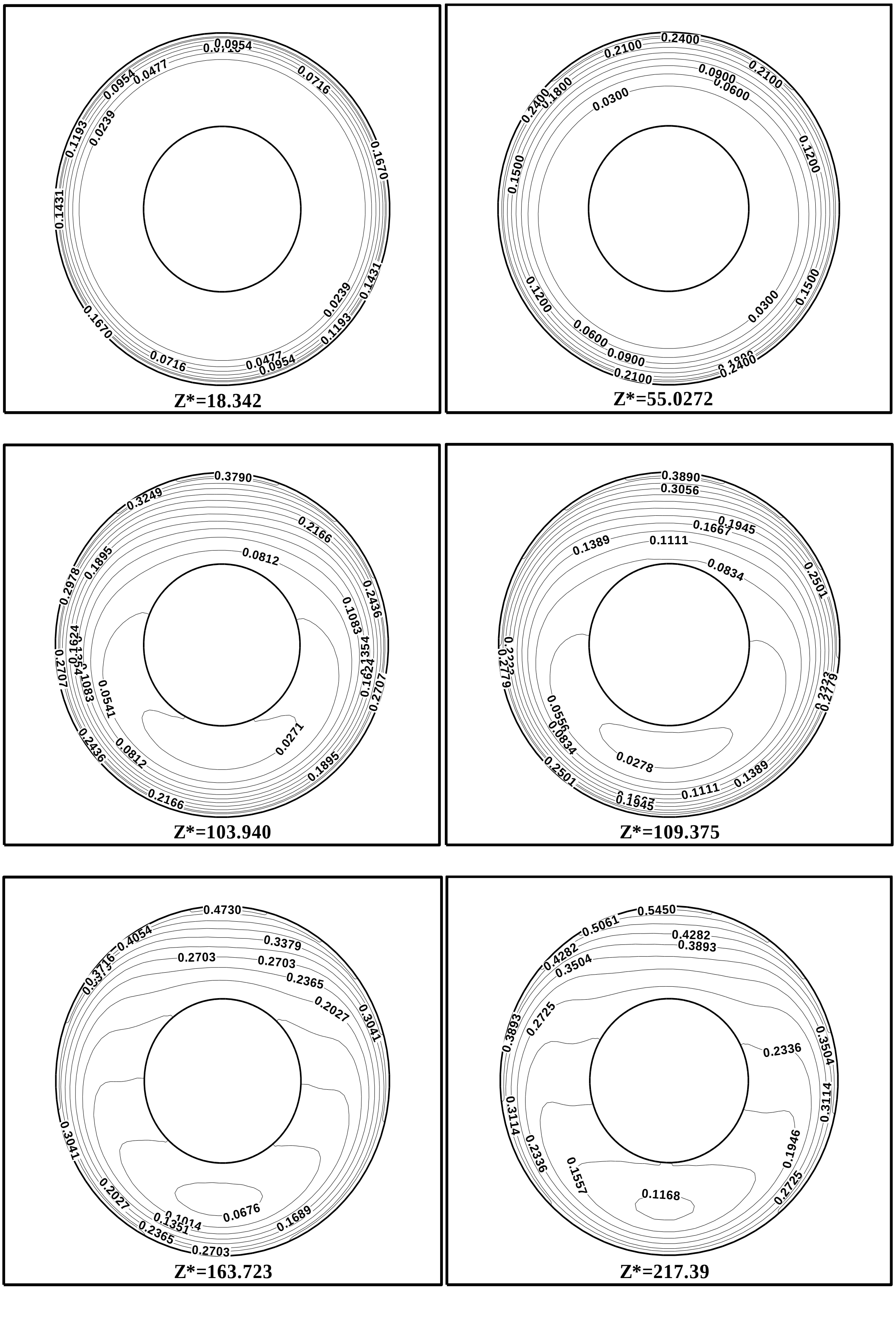


Figure 5.9 Variation polaire de la température du fluide en des positions axiales choisies.

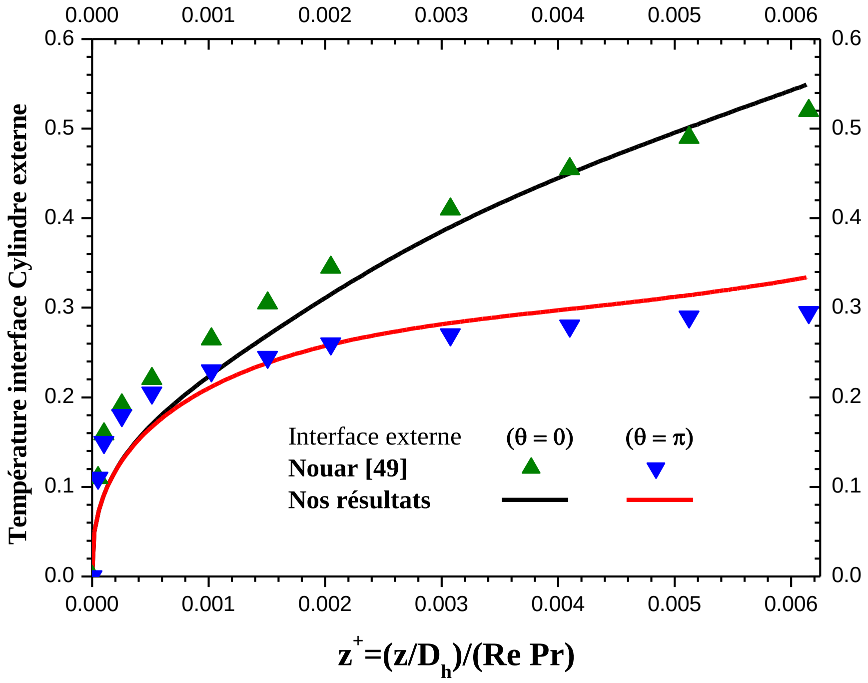


Figure 5.10 Evolution axiale de la température de l'interface fluide-paroi du cylindre externe ; une comparaison avec les résultats de **Nouar [49]**.

5.4 Nombre de Nusselt

La variation angulaire du nombre de Nusselt local est illustrée dans la figure 5.11 pour un nombre de Grashof égale à 12801. Entre l'entrée est Z^*=18.342, la variation du nombre de Nusselt local est similaire à celle de la convection forcée, autrement dit dans cette zone la variation angulaire est négligeable, la seule variation est suivant la direction axiale. Ensuite le nombre de Nusselt local subit une importante variation angulaire due à la variation azimutale de la distribution de température. A une section axiale donnée, le minimum du Nusselt local est toujours en haut de l'interface (θ=0), le maximum est en bas à (θ=π).

Dans la figure 5.12, on représente la variation du nombre de Nusselt axiale pour tous les cas étudiés. Dans la courte zone d'entrée il y'a une chute du nombre de Nusselt axial pour tous les cas vers une valeur minimale, ensuite le nombre de Nusselt axial subit une augmentation vers une valeur maximale située à la sortie du conduit. Dans le tableau 5.1 nous représentons le nombre de Nusselt axial à la sortie de l'espace annulaire et le nombre de Nusselt moyen pour chaque nombre de Grashof et nombre de Richardson qui correspond.

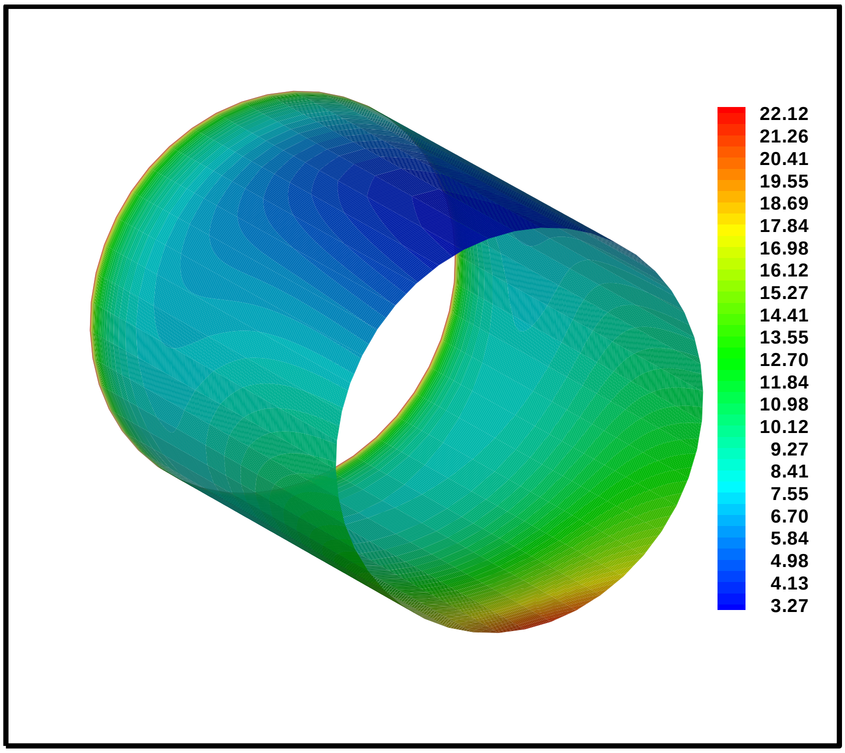


Figure 5.11 Variation angulaire du Nusselt local le long du conduit pour Gr=12801.

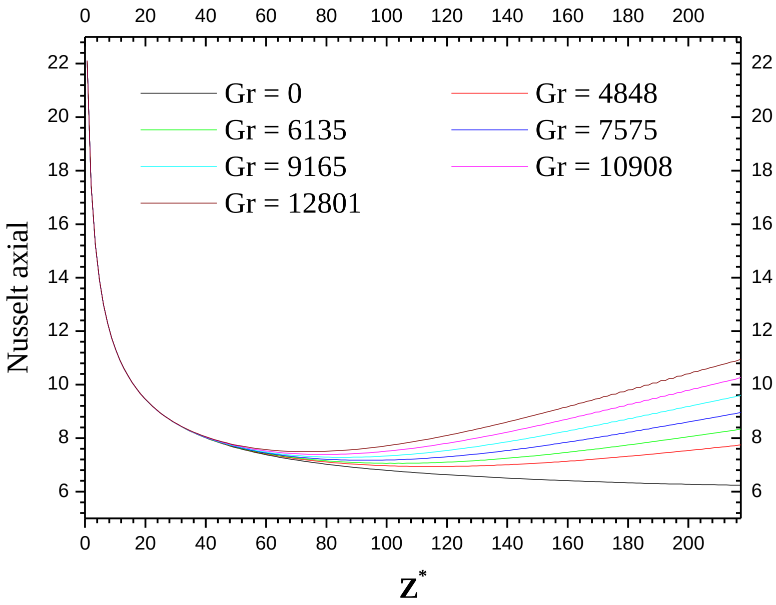


Figure 5.12 Variation du nombre de Nusselt axial pour les différents nombres de Grashof.

Tableau 5.1 : Nombre de Nusselt axial à la sortie et nombre de Nusselt moyen.

Gr	**4848**	**6135**	**7575**	**9165**	**10908**	**12801**
Ri	0.03045	0.03853	0.04758	0.05756	0.06851	0.08040
Nu (L^*)	7.7484	8.3396	8.9631	9.6042	10.2667	10.9502
Nu_m	7.8804	8.0708	8.2872	8.5221	8.7786	9.0502

A travers les résultats obtenus et les paramètres du contrôle utilisés, le nombre de Nusselt moyen de la convection mixte peut être exprimé en fonction du nombre de Richardson par la corrélation suivante :

$$Nu_m = 12.8678 \ Ri^{0.1426}$$

L'erreur absolue et l'erreur relative de chaque Nusselt moyen est représentée dans le tableau 5.2. Avec une erreur relative qui ne dépasse pas 0.76 %, La corrélation obtenue représente une très bonne approximation des résultats obtenus.

Tableau 5.2 : L'erreur absolue et l'erreur relative.

Ri	0.03045	0.03853	0.04758	0.05756	0.06851	0.08040
Erreur absolue	0.0594	0.0172	0.0478	0.0423	0.0011	0.0678
Erreur relative	0.753 %	0.213 %	0.577 %	0.496 %	0.013 %	0.749 %

5.5 L'effet du diamètre hydraulique sur le transfert thermique

Dans cette partie on va voir l'effet de la géométrie de l'espace annulaire sur l'amélioration du transfert thermique, pour cela on a étudié une autre géométrie : il s'agit d'un espace annulaire dont le cylindre externe est le même du cas précédent tandis que le cylindre interne à un diamètre externe égale à 0.6 cm et un diamètre interne égale 0.56 cm, ce qui donne un diamètre hydraulique égale à 0.36 cm. Dans la figure 5.13 nous présentons une comparaison entre les nombres de Nusselt axiaux des cas étudiés : D_h=4.6 cm, D_h=3.6 cm et le cylindre plein (D_h=0.96 cm) pour la convection forcée. Dans les figures 5.14-5.19, la comparaison est faite pour le cas de la convection mixte lorsque l'intensité du courant électrique utilisée dans le chauffage volumétrique est égale à 40, 45, 50, 55, 60 et 65 Ampères respectivement. Pour obtenir une comparaison homogène, La position axiale est présentée sous forme dimensionnelle, tandis que les nombres de Nusselt sont normalisés par le diamètre hydraulique.

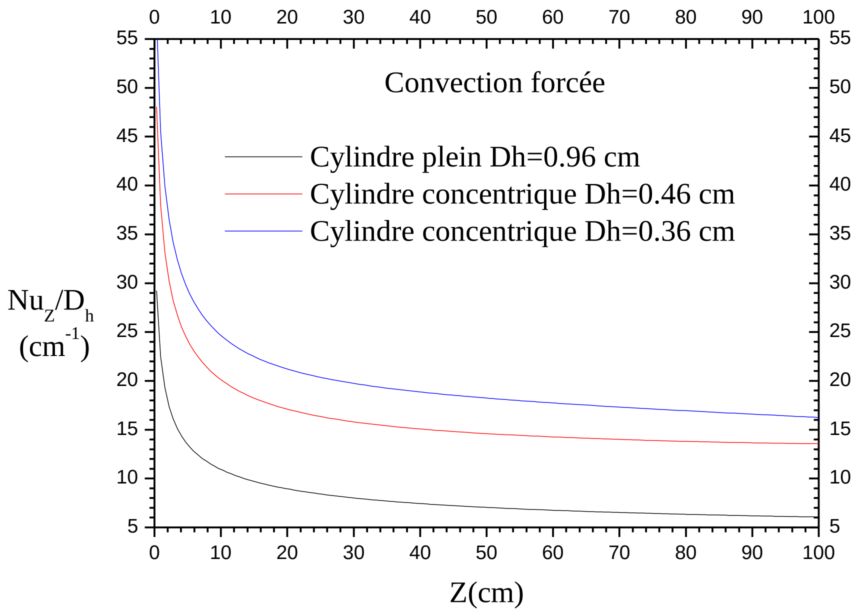


Figure 5.13 Influence du diamètre hydraulique sur le nombre de Nusselt axial pour le cas de la convection forcée.

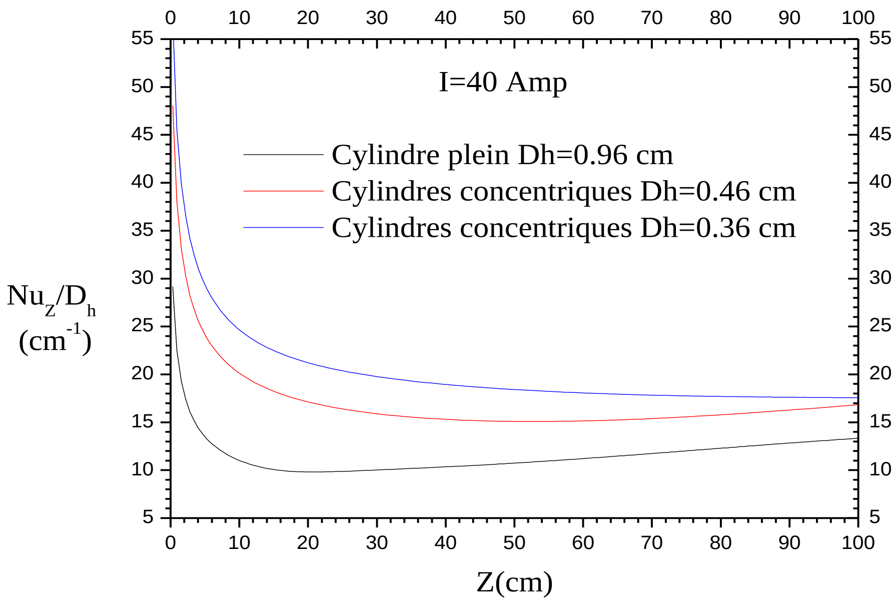


Figure 5.14 Influence du diamètre hydraulique sur le nombre de Nusselt axial pour une intensité du courant électrique I=40 Ampères.

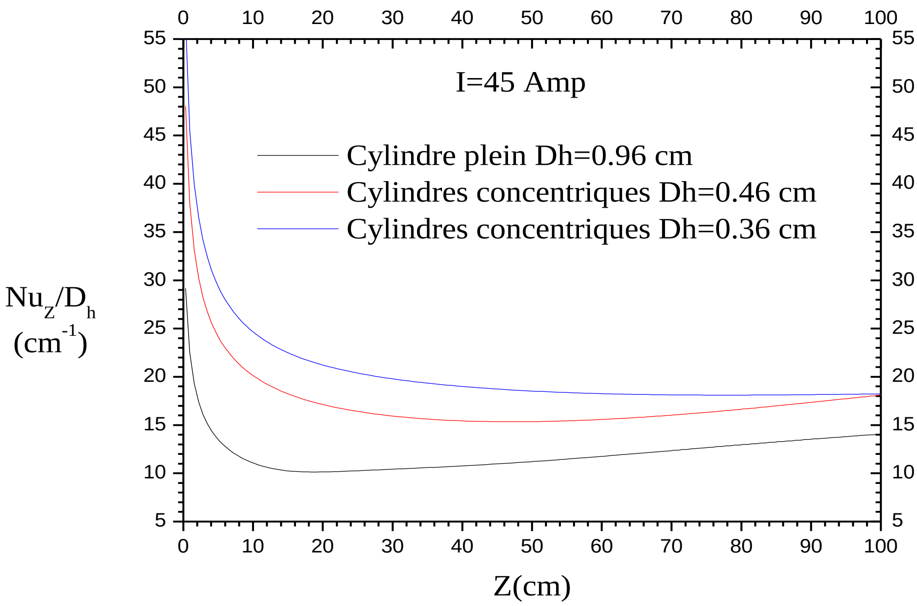


Figure 5.15 Influence du diamètre hydraulique sur le nombre de Nusselt axial pour une intensité du courant électrique I=45 Ampères.

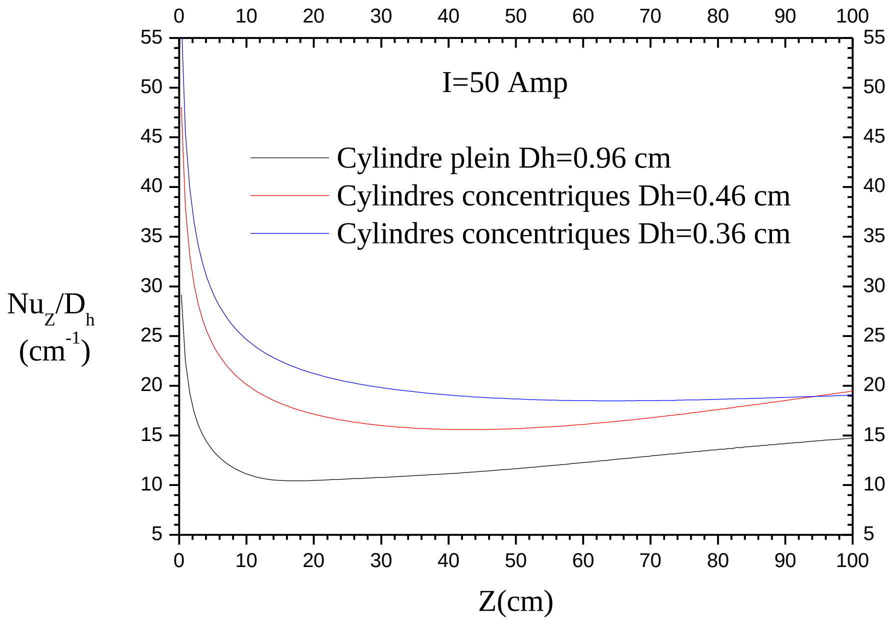


Figure 5.16 Influence du diamètre hydraulique sur le nombre de Nusselt axial pour une intensité du courant électrique I=50 Ampères.

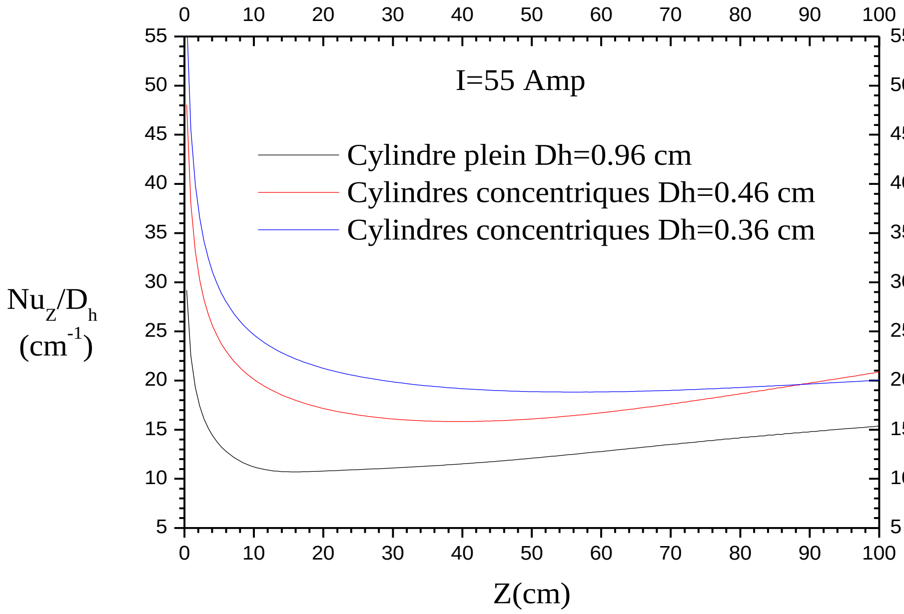


Figure 5.17 Influence du diamètre hydraulique sur le nombre de Nusselt axial pour une intensité du courant électrique I=55 Ampères.

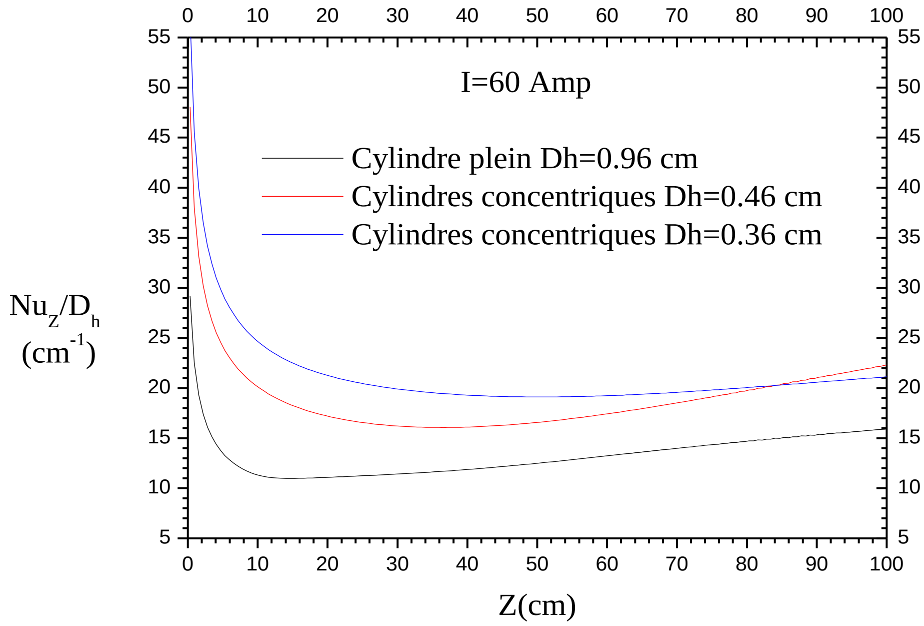


Figure 5.18 Influence du diamètre hydraulique sur le nombre de Nusselt axial pour une intensité du courant électrique I=60 Ampères.

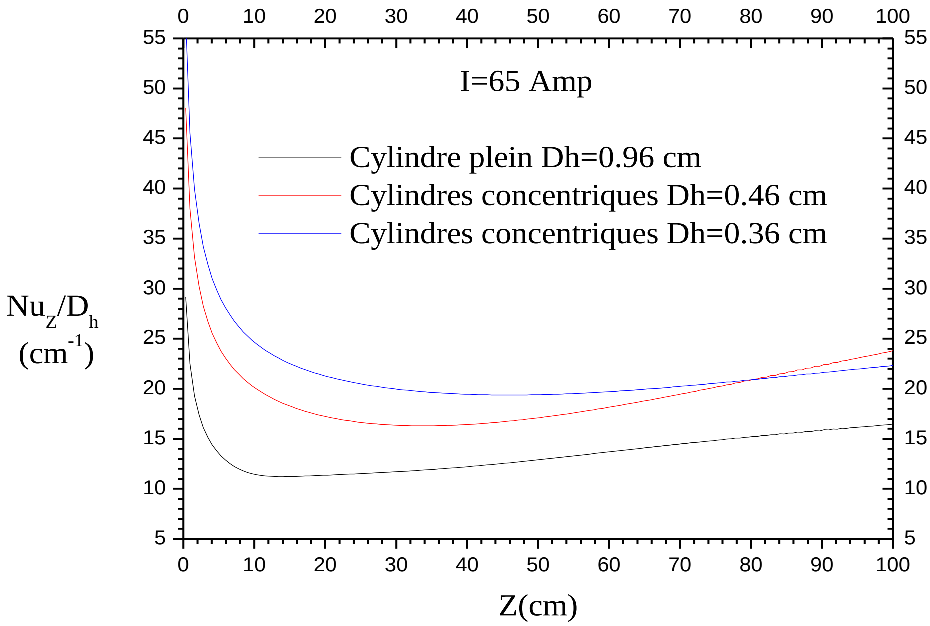


Figure 5.19 Influence du diamètre hydraulique sur le nombre de Nusselt axial pour une intensité du courant électrique I=65 Ampères.

Les résultats représentés dans les figures précédentes nous a permis de voir l'effet de la géométrie de l'espace annulaire sur l'amélioration du transfert thermique et faire comparer ces résultats avec le cas du cylindre plein. Qualitativement, l'augmentation du chauffage volumétrique est suivie par une augmentation du nombre de Nusselt axial et une amélioration dans le transfert thermique quelque soit la géométrie du système. Quantitativement, le nombre de Nusselt axial subit une augmentation lorsque le diamètre hydraulique (D_{2i}-D_{1e}) diminue, ce phénomène est expliqué comme suit : la diminution du diamètre hydraulique réduit l'épaisseur de l'espace annulaire, dans ce cas l'écart de température entre la paroi externe et la paroi interne de ce dernier va subir une diminution ce qui conduise automatiquement à une diminution dans l'écart entre la température de la paroi externe et la température moyenne du fluide. Cette dernière diminution est la cause directe de l'augmentation du nombre de Nusselt. La comparaison avec le cas du cylindre plein montre que l'utilisation d'un espace annulaire à un diamètre hydraulique égale à 0.46 cm augmente le nombre de Nusselt moyen de : 47.04%, 44.90%, 43.71%, 43.04%, 43.23% et 43.62% pour des intensités du courant électrique égale à 40, 45, 50, 55, 60 et 65 Ampères respectivement. L'utilisation d'un espace annulaire à un diamètre hydraulique égale à 0.36 cm augmente le nombre de Nusselt moyen par apport au cas du cylindre plein de : 74.50%, 69.51%, 65.67%, 62.67%, 60.75% et 59.35% pour des intensités du courant électrique égale à 40, 45, 50, 55, 60 et 65 Ampères respectivement.

5.6 Conclusion

La convection mixte laminaire dans un espace annulaire est étudiée dans ce chapitre. Pour cette objectif, on a utilisé deux cylindres concentriques dont le cylindre externe est chauffé par un courant électrique passant à travers sont épaisseur tandis que le cylindre interne est adiabatique au niveau de sa paroi interne. Le maillage utilisé pour cette géométrie est 52×88×162 suivant les directions radiale, azimutale et axiale respectivement. L'espace annulaire à un rapport d'aspect égal à 217.39, à l'intérieur le fluide s'écoule avec un nombre de Reynolds constant Re=399.02, un nombre de Prandtl Pr=8.082, sept nombres de Grashof sont considérés : Gr=0 correspondant à la convection forcée et Gr=4848, Gr=6135, Gr=7575, Gr=9165, Gr=10908, et Gr=12801 correspondent à l'augmentation du chauffage volumétrique. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement transversal est toujours la cause de la variation circonférentielle de la température et des propriétés physiques du fluide. La diminution dans l'épaisseur de l'espace annulaire augmente le transfert de chaleur, cela est justifié par l'augmentation du nombre de Nusselt en diminuant le diamètre hydraulique. La comparaison entre la convection mixte dans un espace annulaire et celle dans un conduit horizontal simple montre que l'utilisation d'un espace annulaire augmente le nombre de Nusselt moyen jusqu'à 74.5%. A travers les résultats obtenus et les paramètres du contrôle utilisés, le nombre de Nusselt moyen de la convection mixte peut être exprimé en fonction du nombre de Richardson par la corrélation suivante : $Nu_m = 12.8678\ Ri^{0.1426}$.

Chapitre 6

Convection mixte conjuguée d'un fluide à propriétés physiques variables dans les conduits ailettés

6.1 Introduction

Les résultats de la convection mixte dans les conduits horizontaux et les espaces annulaires à ailettes sont présentés et discutés dans ce chapitre. Dans la première partie de ce dernier, des ailettes longitudinales et transversales sont attachées sur la paroi interne d'un conduit horizontal, tandis que dans la deuxième partie, les ailettes sont attachées sur la paroi interne du cylindre extérieur de l'espace annulaire. Le passage d'un courant électrique à travers l'épaisseur du tube externe et l'épaisseur des ailettes attachées, produit une génération de chaleur par effet Joule dans les parois de ces derniers, cette chaleur est transférée à l'écoulement de l'eau distillé dans le conduit et dans l'espace annulaire. A cet effet, plusieurs configurations sont traitées dont les paramètres de contrôle géométriques sont: le nombre, la hauteur et l'emplacement des ailettes.

6.2 Conduit horizontal à ailettes

Le conduit horizontal étudié dans le chapitre 4 est équipé dans cette partie par des ailettes longitudinales et transversales de la même matière que la paroi mère. La chaleur transférée vers le fluide dans ce cas n'est pas seulement générée par la paroi du conduit mais aussi par les ailettes attachées à cette paroi. Dans ce conduit ailetté, le fluide s'écoule à une vitesse moyenne égale à 7.2 10^{-2} m/s, le rapport d'aspect du conduit A=104.17, le nombre de Reynolds est fixé à 606.85 alors que le nombre de Prandtl, évalué à la température d'entrée de l'eau, est égal à 8.082.

6.2.1 Conduit horizontal à ailettes longitudinales

Dans l'étude des ailettes longitudinales, il faut noter que dans tous les cas étudiés il y a une axisymétrie dans la distribution diamétrale des ailettes. Autrement dit, pour chaque ailette longitudinale positionnée à un angle θ, il y a forcément une autre ailette située à $\theta+\pi$.

6.2.1.1 Le cas de référence : la convection forcée (Gr=0)

6.2.1.1.1 Champ dynamique de l'écoulement

La convection forcée dans un conduit horizontale muni d'ailettes longitudinales identiques est traitée pour trois configuration différentes : deux ailettes verticales à ($\theta=0$) et ($\theta=\pi$), quatre ailettes à ($\theta=0$), ($\theta=\pi/2$), ($\theta=\pi$) et ($\theta=3\pi/2$) et huit ailettes à ($\theta=0$), ($\theta=\pi/4$), ($\theta=\pi/2$), ($\theta=3\pi/4$), ($\theta=\pi$), ($\theta=5\pi/4$), ($\theta=3\pi/2$) et ($\theta=7\pi/4$). A l'entrée, l'écoulement imposé a un profil hydrodynamiquement développé de type Poiseuille dont la seule composante axiale prend une valeur maximale au centre et une valeur minimale sur la paroi interne du conduit. La prise en compte d'une viscosité adimensionnelle égale à 10^{30} dans le domaine solide assure que les trois composantes de vitesse resteront nulles même dans les parois des ailettes le long du conduit. La distribution polaire de la vitesse axiale en certaines stations axiales choisies : au voisinage de l'entrée à $z^* = 6.8362$, ensuite à $z^* = 26.3680$ où l'effet des ailettes sur l'écoulement axial commence à être remarquable, à $z^* = 52.4105$ et enfin à la sortie du conduit où l'écoulement axial sera pleinement développé. Cette distribution est représentée dans les figures 6.1-6.3 pour les différents cas de la convection forcée pour une hauteur d'ailette H^* égale à 0.125 (25% du rayon interne du conduit). Qualitativement le profil de la vitesse axiale est axisymétrique, il prend une valeur maximale au centre du conduit quelque soit le nombre des ailettes. Quantitativement, le maximum de la vitesse axiale augmente en augmentant le nombre des ailettes, car l'augmentation du nombre des ailettes diminue la section traversée par le fluide ce qui conduit automatiquement à une augmentation dans la vitesse axiale du fluide.

Pour le cas de deux ailettes verticales, le maximum de la vitesse axiale $V^*_{z\,max}$ à la section d'entrée est égal à 2.0, ensuite $V^*_{z\,max}$ augmente à une valeur maximale égale à 2.028 située à z^*=9.4404, après $V^*_{z\,max}$ subit une légère diminution continue jusqu'à la sortie du conduit. A z^*=26.3680, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.936. A z^*=52.4105, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.893 et à la sortie du conduit $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.863.

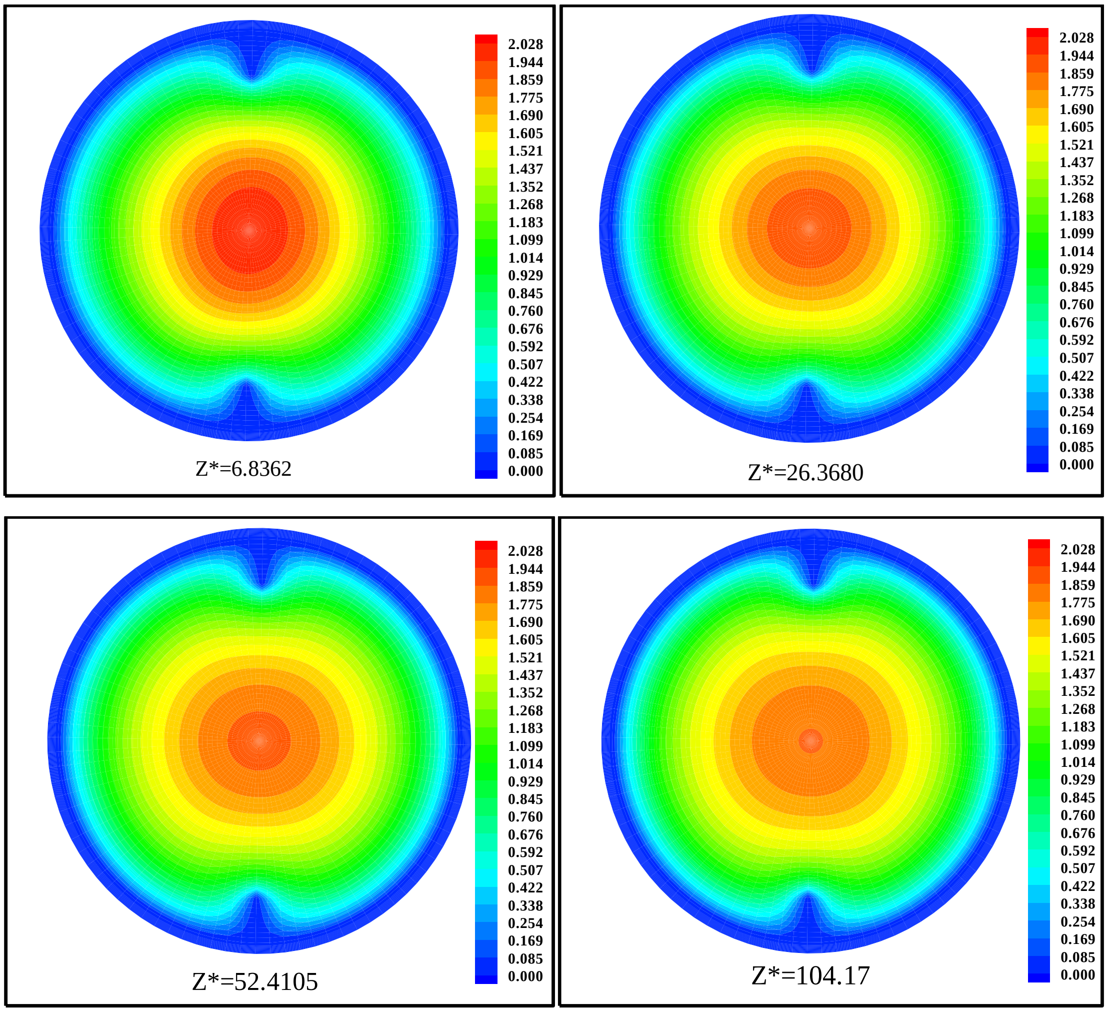


Figure 6.1 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies Pour le cas de deux ailettes ; Gr=0, H^*=0.125.

Dans un conduit équipé de quatre ailettes longitudinales, le maximum de la vitesse axiale $V^*_{z\,max}$ augmente à une valeur maximale égale à 2.093 située à z^*=11.3936, après $V^*_{z\,max}$ subit une diminution continue jusqu'à la sortie du conduit. A z^*=26.3680, $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.031. A z^*=52.4105, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.948 et à la sortie du conduit $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.879.

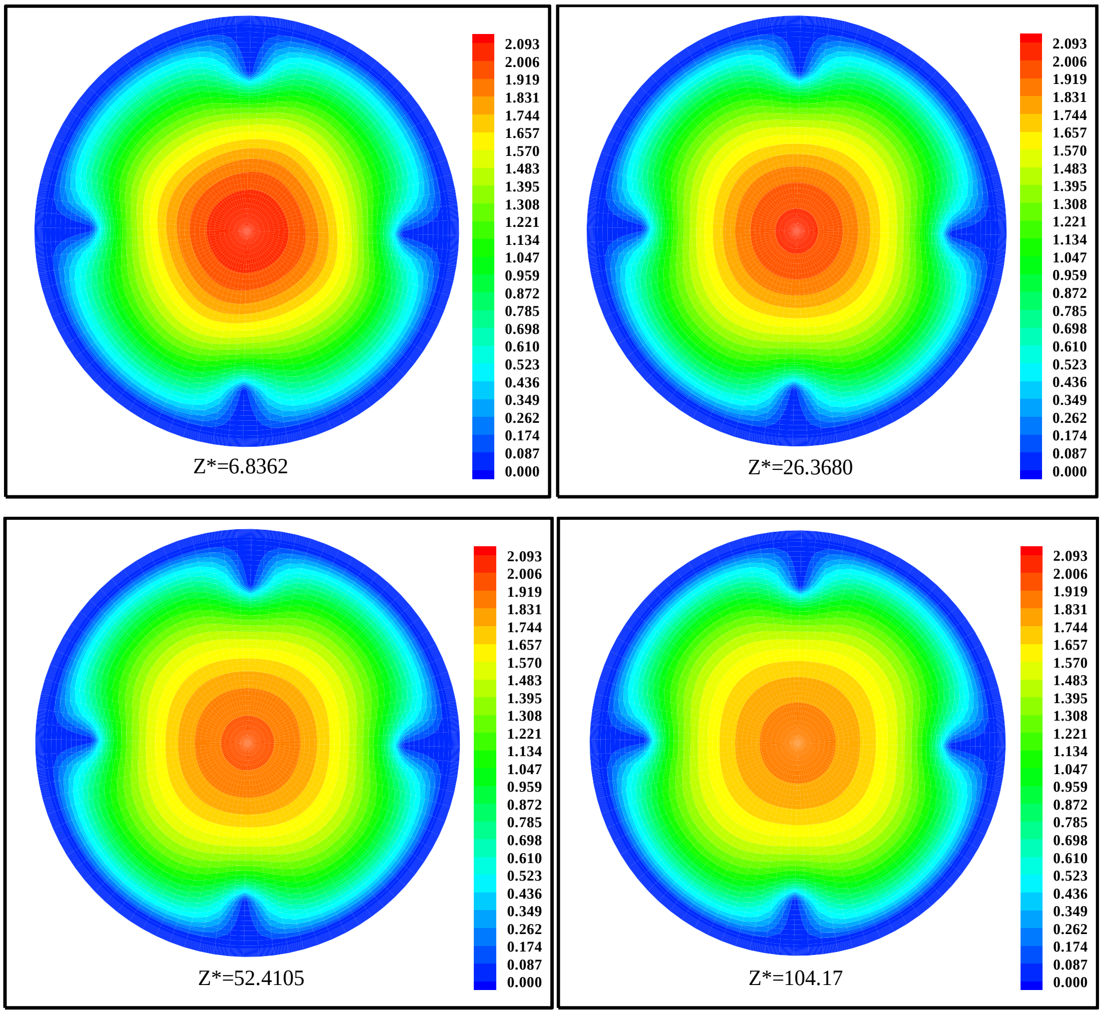


Figure 6.2 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies Pour le cas de quatre ailettes ; Gr=0, H^*=0.125.

En présence de huit ailettes longitudinales, $V^*_{z\,max}$ prend une valeur maximale égal à 2.213 située à z^*=15.2999. A z^*=26.3680, $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.176. A z^*=52.4105, $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.092 et à la sortie du conduit $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.03.

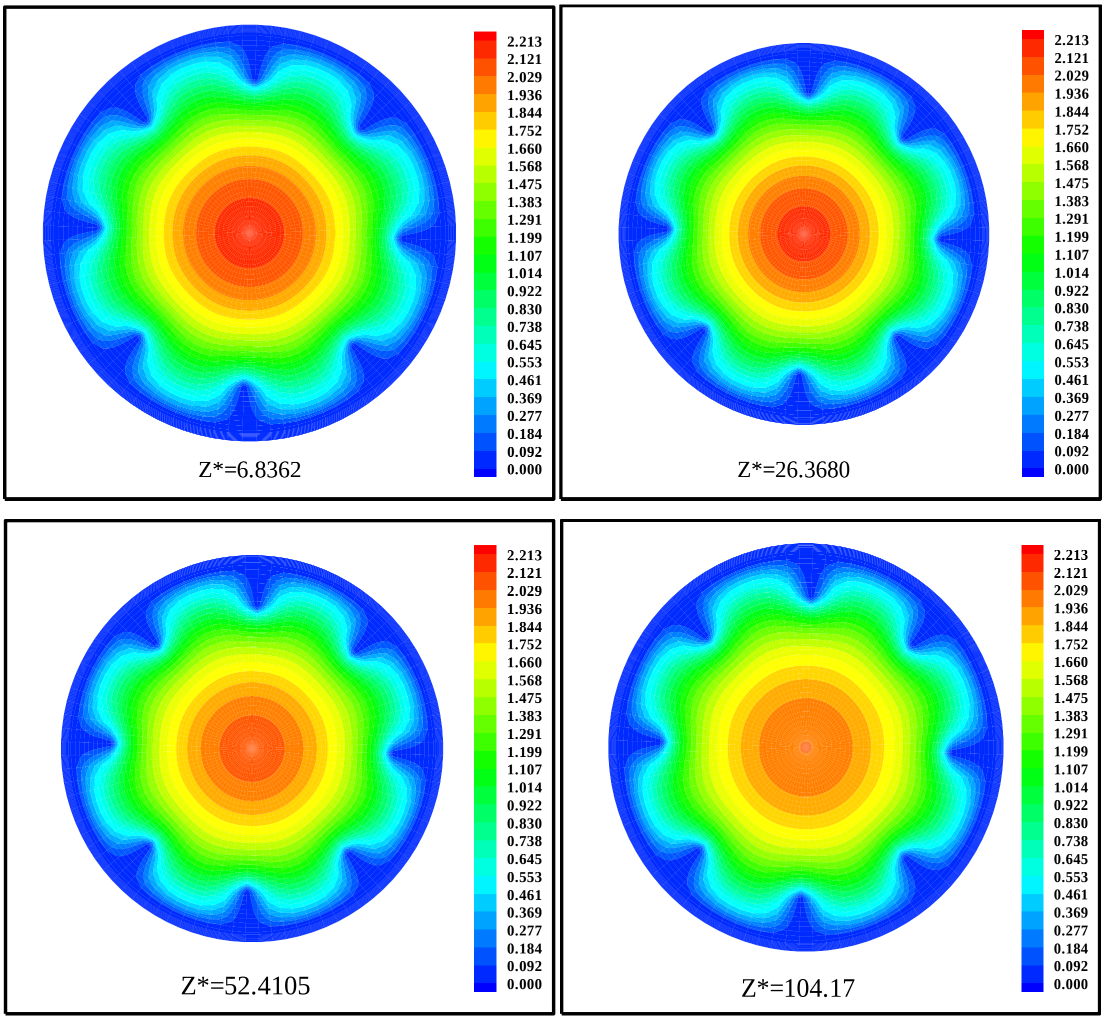


Figure 6.3 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.125.

Dans la figure 6.4, la distribution polaire de la vitesse axiale est représentée pour une hauteur d'ailettes H^* égale à 0.1875 (37.5% du rayon interne), cette augmentation dans la hauteur de l'ailette permet d'augmenter le maximum de la vitesse axiale. A la section d'entrée, le maximum de la vitesse axiale $V^*_{z\,max}$ est égal à 2.0, après $V^*_{z\,max}$ augmente à une valeur maximale égale à 2.470 située à z^*=14.6489, ensuite $V^*_{z\,max}$ subit une légère diminution continue jusqu'à la sortie du conduit. A z^*=26.3680, $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.450. A z^*=52.4105, $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.357 et à la sortie du conduit $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.262.

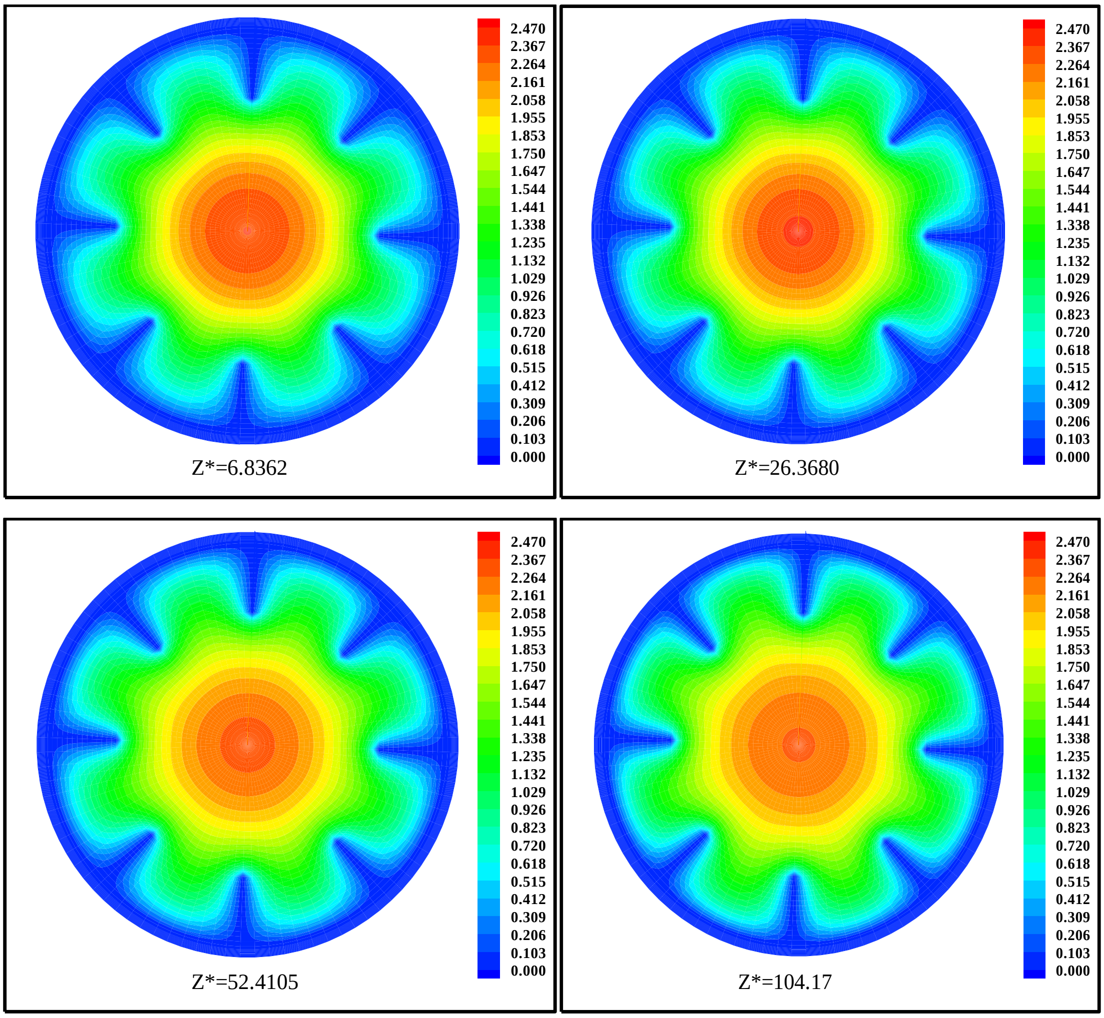


Figure 6.4 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.1875.

6.2.1.1.2 Champ thermique de l'écoulement

A l'entrée du conduit aileté, la température du fluide est uniforme. Après, la chaleur dégagée par les parois des ailettes et du cylindre, impose un gradient de température orienté vers le centre du conduit de telle sorte que la distribution des isothermes garde une variation axisymétrique le long de la direction axiale. Cette symétrie est due à l'absence de l'écoulement transversal, cela permet d'avoir une variation du champ de température seulement suivant les directions axiale et radiale.

La distribution polaire du champ de température en certaines stations axiales choisies : z^*=6.8362, $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$ et $z^*=L^*$ pour les différents cas de la convection forcée est illustrée dans les figures 6.5-6.8. Dans chaque section axiale au voisinage de l'axe, les isothermes du fluide sont des cercles concentriques avec une température minimale sur l'axe du conduit. En s'éloignant de l'axe, la distribution circulaire des isothermes est détruite sous l'effet de la chaleur dégagée par les ailettes de telle sorte que la température maximale du fluide est sur l'interface solide-fluide du conduit loin de la partie aileté. Dans l'interface solide-fluide des ailettes, la température du fluide est inférieure à celle de la l'interface cylindrique car la paroi de l'ailette dégage la chaleur sur les deux cotés ce qui donne une température relativement moins intense que l'interface cylindrique.

Pour le cas de deux ailettes verticales, à une section donnée, le maximum de température du fluide est situé toujours à r^*=0.5 et $\theta=\pi/2$ et $3\pi/2$, le minimum est toujours sur l'axe. A z^*=6.8362, $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.06765, cette température augmente à 0.1036, 0.1331 et 0.1756 dans les positions axiales $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$ et $z^*=L^*$ respectivement. A la sortie du conduit, la température de chaque ailette varie de 0.1551 à 0.1674.

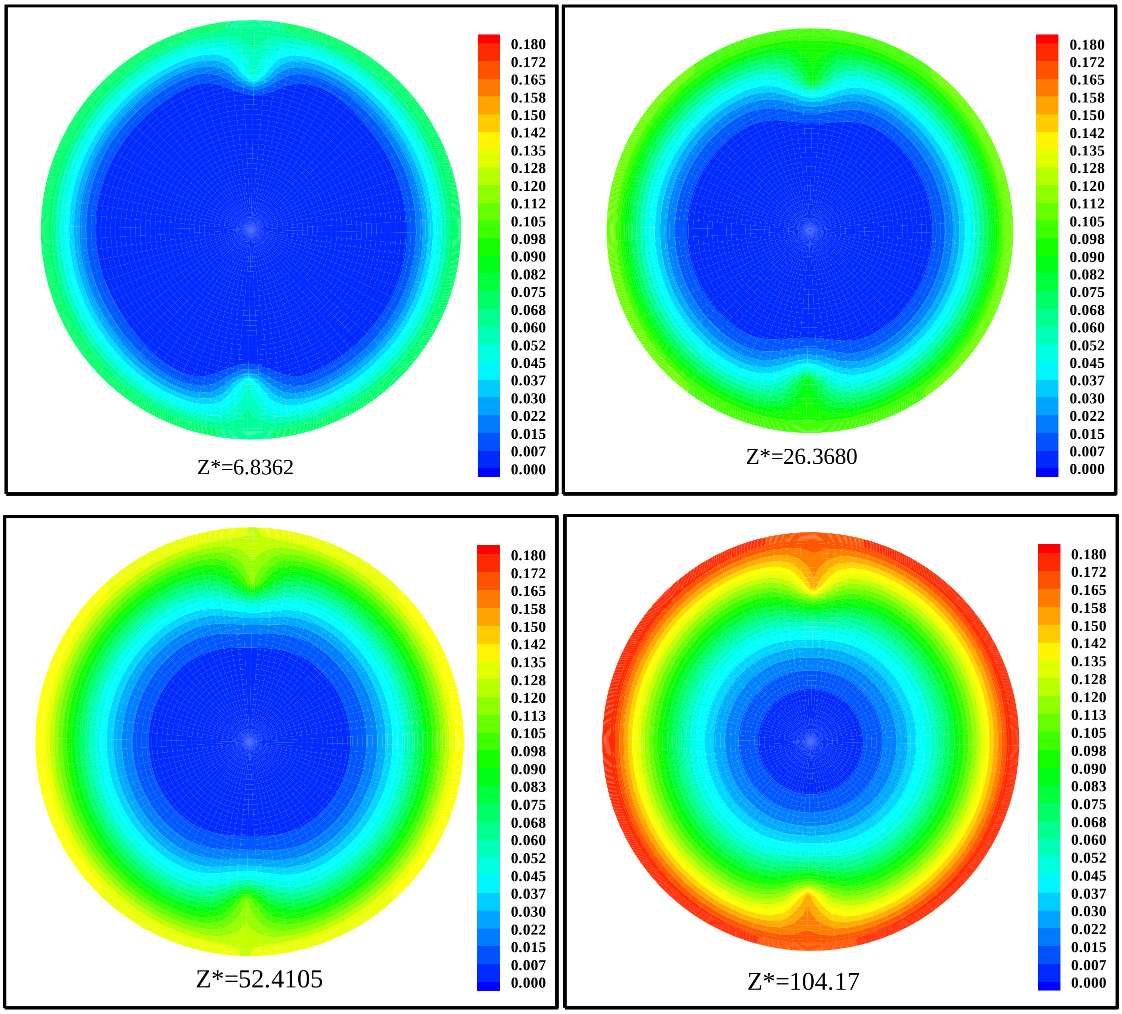


Figure 6.5 Champ de température dans des positions axiales choisies Pour le cas de deux ailettes ; Gr=0, H^*=0.125.

Dans un conduit équipé de quatre ailettes longitudinales, le maximum de température du fluide est situé à r^*=0.5 et θ=π/4, 3π/4, 5π/4 et 7π/4. A z^*=6.8362, $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.06546, cette température augmente à 0.09975, 0.1282 et 0.1702 dans les positions axiales $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$ et $z^*=L^*$ respectivement. A la sortie du conduit, la température de chaque ailette varie de 0.1546 à 0.1663.

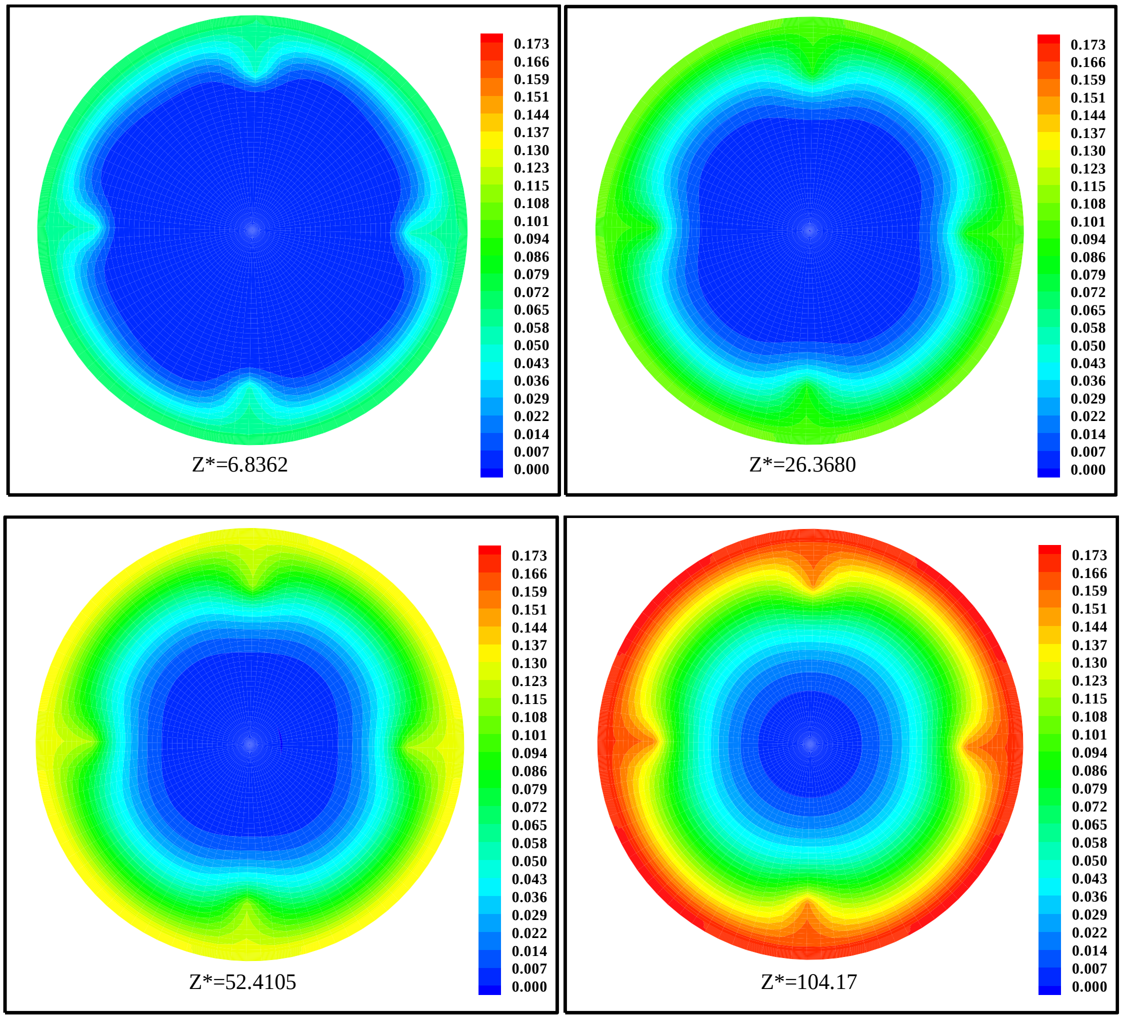


Figure 6.6 Champ de température dans des positions axiales choisies Pour le cas de quatre ailettes ; Gr=0, H^*=0.125.

Pour le cas de huit ailettes longitudinales, le fluide prend une température maximale situé à r^*=0.5 et θ=π/8, 3π/8, 5π/8, 7π/8, 9π/8, 11π/8, 13π/8 et 15π/8. A z^*=6.8362, $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.05582, cette température augmente à 0.1239, 0.1507 et 0.1913 dans les positions axiales $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$ et $z^*=L^*$ respectivement. A la sortie du conduit, la température de chaque ailette varie de 0.1777 à 0.1902.

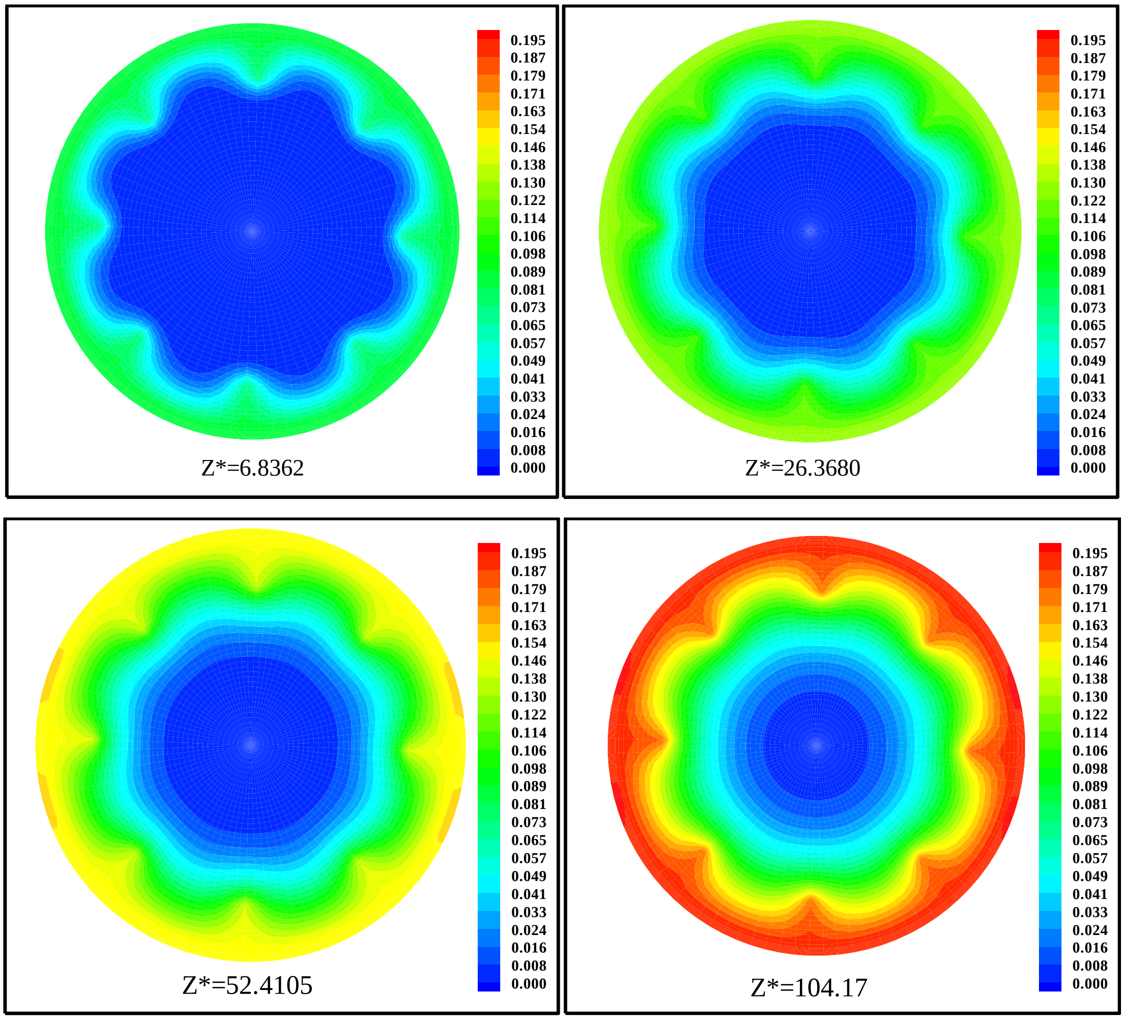


Figure 6.7 Champ de température dans des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.125.

Pour le cas de huit ailettes verticales et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.1875, le fluide prend une température maximale situé à r^*=0.5 et θ=π/8, 3π/8, 5π/8, 7π/8, 9π/8, 11π/8, 13π/8 et 15π/8. A z^*=6.8362, $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.03299, cette température augmente à 0.08997, 0.117 et 0.1569 dans les positions axiales $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$ et $z^*=L^*$ respectivement. A la sortie du conduit, la température de caque ailette varie de 0.1423 à 0.1565.

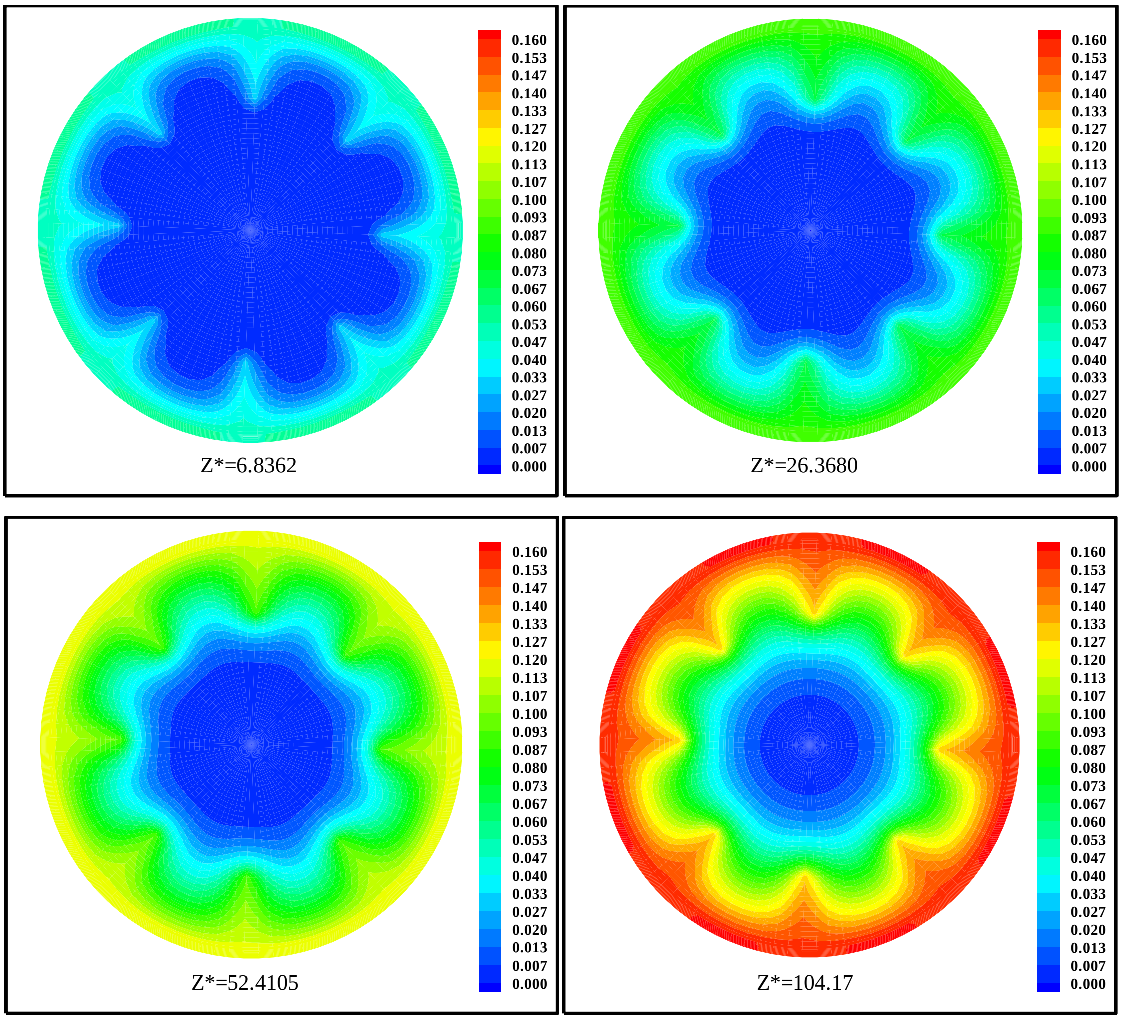


Figure 6.8 Champ de température dans des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.1875.

6.2.1.1.3 Flux thermique adimensionnel aux interfaces

Le flux de chaleur transféré au fluide à travers l'interface cylindrique du conduit et l'interface des ailettes dans le cas de la convection forcée est axisymétrique. Sur l'interface cylindrique paroi-fluide du conduit, à une section donnée le flux de chaleur dégagé vers le fluide prend une valeur minimale égale à 0 sur l'interface conduit-ailette et une valeur maximale entre chaque deux ailettes. Dans la figure 6.9 le flux de chaleur cylindrique est illustré pour le cas de huit ailettes transversales et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.1875. De l'entrée à la sortie, à une section choisie le flux de chaleur local prend une valeur maximale dans les positions azimutales suivantes $\theta=\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$, $7\pi/8$, $9\pi/8$, $11\pi/8$, $13\pi/8$ et $15\pi/8$. Dans la courte zone d'entrée, le flux de chaleur cylindrique subit une augmentation rapide à une valeur maximale égale à 0.6579 situé à z^*=8.1383 suivie par une lente diminution jusqu'à la sortie du conduit, A z^*=104.17 le flux de chaleur est égal à 0.5691.

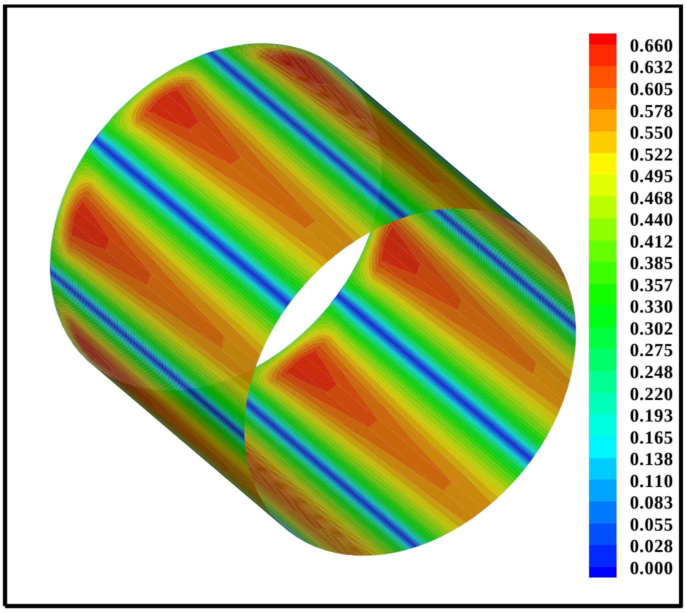


Figure 6.9 Distribution du flux local à l'interface cylindrique pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.1875.

Le flux de chaleur dégagé par la surface de chaque ailette dans le cas de la convection forcée subit une variation radiale et axiale dont le maximum de ce flux comme il est présenté dans la figure 6.10 est égale 0.366 situé à z^*=104.17 et r^*= 0.32.

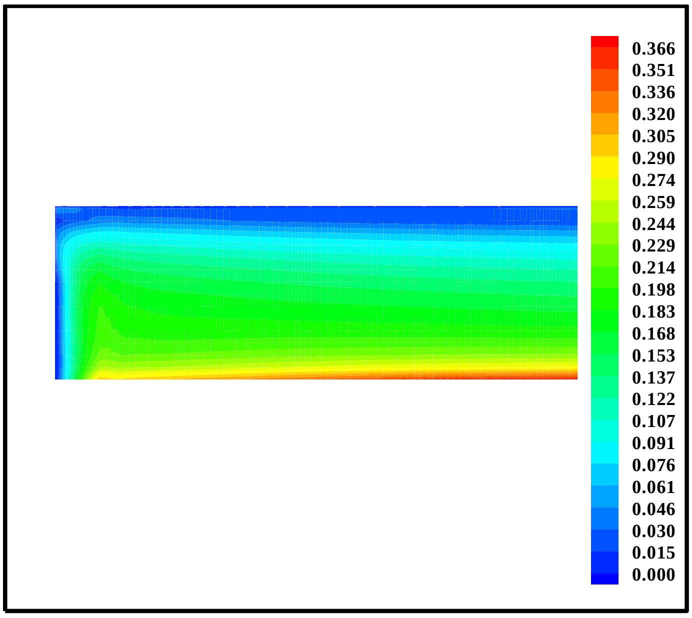


Figure 6.10 Distribution du flux local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.1875.

6.2.1.1.4 Nombre de Nusselt

La variation du nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique pour le cas de huit ailettes transversales et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.1875 est illustrée dans la figure 6.11. Il est bien clair que le nombre de Nusselt local à l'interface (paroi cylindrique-ailette) est nul à cause du flux de chaleur inexistant vers le fluide dans cette interface, en dehors de cette dernière le nombre de Nusselt local subit une diminution axiale intense dans la courte zone d'entrée suivie par une diminution modérée à partir de z^*=6.8362 jusqu'à la sortie du conduit. Dans la direction azimutale, le nombre de Nusselt local prend une valeur minimale égale à 0 sur l'interface (paroi cylindrique-ailette) et une valeur maximale entre chaque deux ailettes.

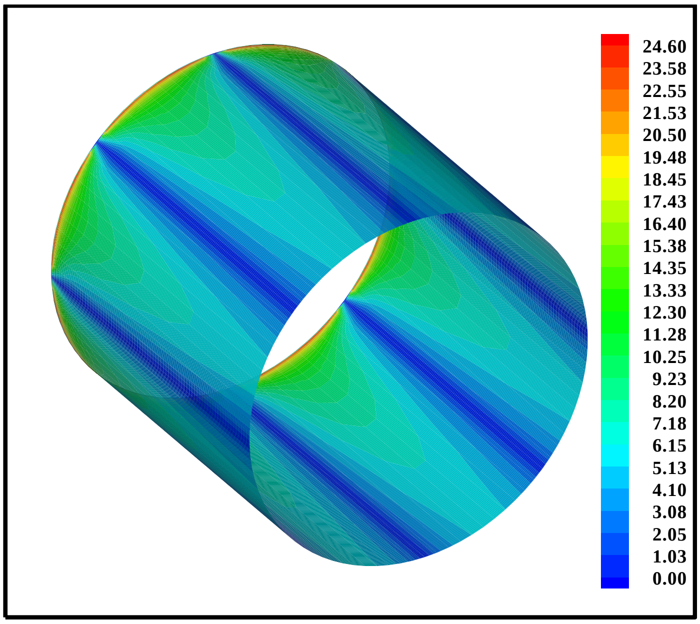


Figure 6.11 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.1875.

Le nombre de Nusselt local de chaque ailette longitudinale pour le cas de la convection forcée subit une variation suivant la direction radiale et axiale. Dans la direction axiale, à l'exception de l'interface ailette-paroi cylindrique (r^*=0.5), le nombre de Nusselt local diminue en s'approchant de la sortie du conduit tandis que dans la direction radiale, le nombre de Nusselt local augmente en s'éloignant de l'interface cylindrique, cela est due à l'augmentation du flux de chaleur dans cette direction. Dans la figure 6.12, une présentation du nombre de Nusselt local d'une ailette longitudinale est illustrée pour le cas de huit ailettes transversales et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.1875.

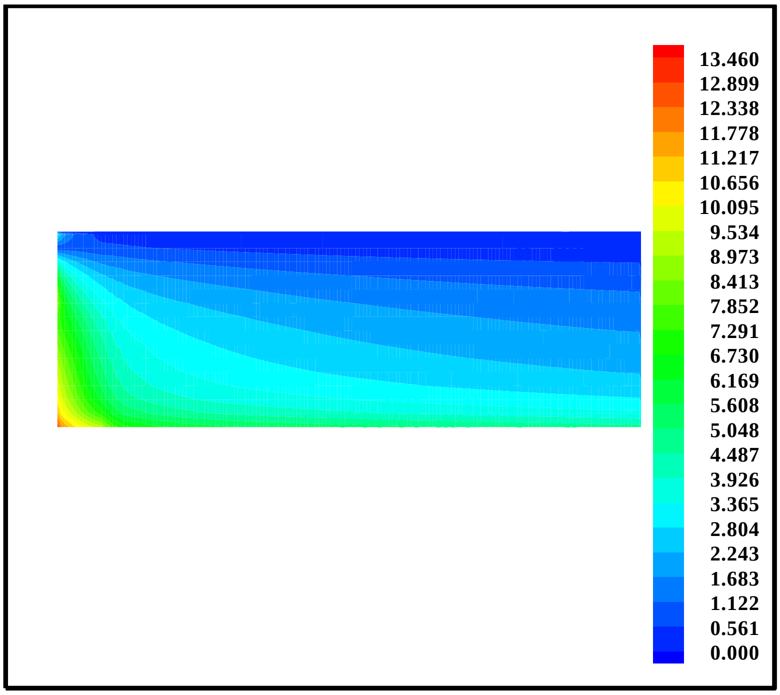


Figure 6.12 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.1875.

La variation du nombre de Nusselt axial de la convection forcée pour les différents cas étudiés est illustrée dans la figure 6.13. Qualitativement et quantitativement on note la similarité des résultats pour tout les cas.

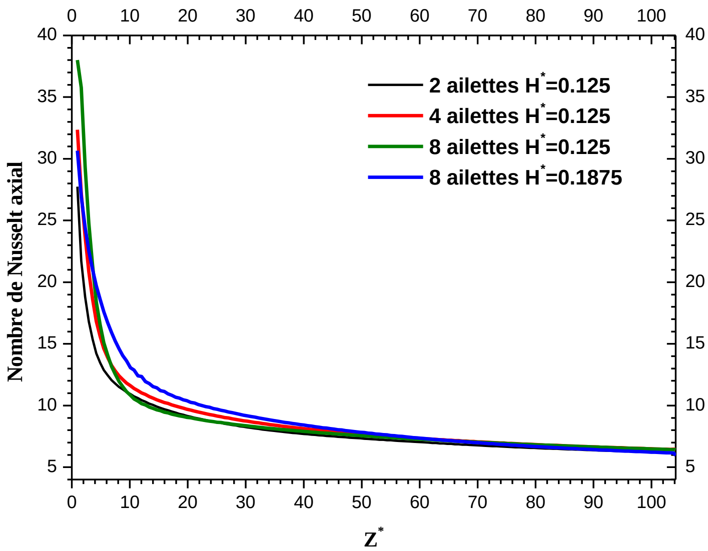


Figure 6.13 Variation du nombre de Nusselt axial Nu(z^*) de la convection forcée pour les différentes cas étudiés.

6.2.1.2 Convection mixte (Gr=510000)

6.2.1.2.1 L'écoulement secondaire

L'augmentation dans le nombre de Grashof de 0 à 510000 permet de passer de la convection purement forcée vers la convection mixte. Dans cette partie, on va traiter la convection mixte dans un conduit horizontal muni d'ailettes longitudinales identiques pour trois configuration différentes : deux ailettes verticales à (θ=0) et (θ=π), quatre ailettes à (θ=0), (θ=π/2), (θ=π) et (θ=3π/2) et huit ailettes à (θ=0), (θ=π/4), (θ=π/2), (θ=3π/4), (θ=π), (θ=5π/4), (θ=3π/2) et (θ=7π/4). Le phénomène de la convection mixte change la structure axisymétrique des champs thermiques et dynamiques discutée dans la convection forcée, la seule symétrie possible est celle par apport au plan vertical qui passe à travers l'axe du conduit. La destruction de l'axisymétrie des champs thermiques et dynamiques est due à un mouvement transversal dans le plan ($r^* - \theta$) induit par la force de poussée thermique qui dépend de la distribution des températures dans le conduit.

A l'entrée (z^*=0), l'écoulement transversal est inexistant car la température du fluide est constante. Juste après l'entrée, la chaleur générée dans les parois des ailettes et du conduit crée un gradient thermique de telle sorte que le fluide chaud est au voisinage des ailettes et de la paroi du conduit tandis que le fluide relativement froid est au centre entouré par le fluide chaud. Cette situation oblige la force de poussée thermique qui dépend de la variation de la température à créer un mouvement transversal du fluide dans le plan ($r^* - \theta$), ce mouvement transversal est expliqué comme suit : le fluide chaud se déplace le long de la paroi chaude du bas du conduit $(\theta = \pi)$vers le haut$(\theta = 0)$, ce déplacement prés de la paroi du conduit est freiné par les ailettes longitudinales en lui changeant la direction vers l'axe du conduit. Après, une partie du fluide continue le déplacement vers le haut sous l'effet de la force de poussée thermique tandis qu'une autre partie est transportée vers le bas avec le fluide relativement froid qui redescend au centre du conduit. Ce mouvement transversal sous chaque ailette longitudinale est la cause de la naissance des cellules contrarotatives, le nombre de ces cellules dépend des ailettes longitudinales utilisées, le plan verticale qui passe à travers les angles $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$ est un plan de symétrie. Le champ des vecteurs de l'écoulement secondaire des différents cas étudiés est représenté dans les figures 6.14-6.16 dans le plan ($r^* - \theta$) en des positions axiales sélectionnées : à z^*=6.8362 où l'écoulement secondaire commence à être remarquable, ensuite à la position axiale où l'écoulement secondaire est plus intense (cette position se change d'un cas à l'autre) et après à $z^* = L^*/2$ et L^* où la variation de l'écoulement secondaire devienne négligeable. Cette représentation est faite pour un nombre de Grashof égale à 510000 et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.125 (25% du rayon interne du conduit). Chaque configuration est accompagnée par deux tableaux, dans le premier nous présentons la valeur de la vitesse azimutale maximale avec les trois cordonnés de sa position et dans le deuxième nous présentons la position du centre des cellules contrarotatives dans le coté droit du conduit à la section axiale où l'écoulement secondaire est plus intense.

Tableau 6.1 : Vitesse azimutale maximale en certaines positions axiales (2 ailettes verticales).

	$V^*_{\theta\,max}$	0.0341	0.0510	0.0394	0.0337
Position	z^*	6.8362	17.2532	52.4105	104.17
	r^*	0.4451	0.4329	0.4451	0.4451
	θ	1.4637	1.4637	1.6779	1.7493

Tableau 6.2 : Centre des cellules contrarotatives à z^*=17.2532.

Position	z^*	17.2532
	r^*	0.3232
	θ	1.3923

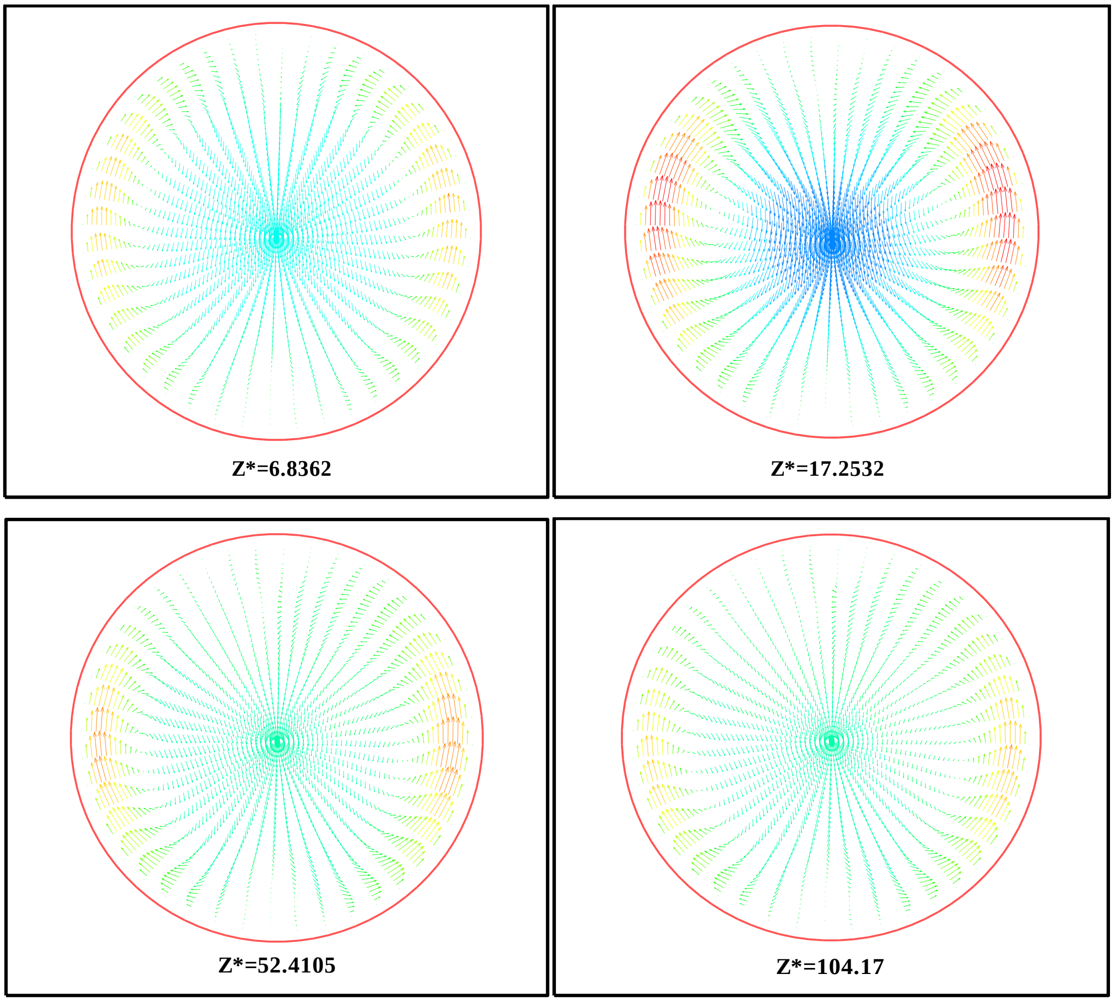


Figure 6.14 Développement de l'écoulement secondaire dans des positions axiales sélectionnées pour le cas de deux ailettes verticales ; Gr=510000, H^*=0.125.

Le champ des vecteurs de l'écoulement secondaire pour le cas de deux ailettes verticales est similaire à celui d'un conduit horizontal non ailetté.

Tableau 6.3 : Vitesse azimutale maximale en certaines positions axiales (4 ailettes).

	$V^*_{\theta\,max}$	0.0350	0.0458	0.0398	0.0343
Position	z^*	6.8362	13.9978	52.4105	104.17
	r^*	0.4451	0.4451	0.4451	0.4451
	θ	1.4637	1.1781	1.9635	1.9635

Tableau 6.4 : Centre des cellules contrarotatives pour 4 ailettes à z^*=13.9978.

		Cellule 1	Cellule 2
Position	z^*	13.9978	13.9978
	r^*	0.3232	0.3232
	θ	1.1070	1.9635

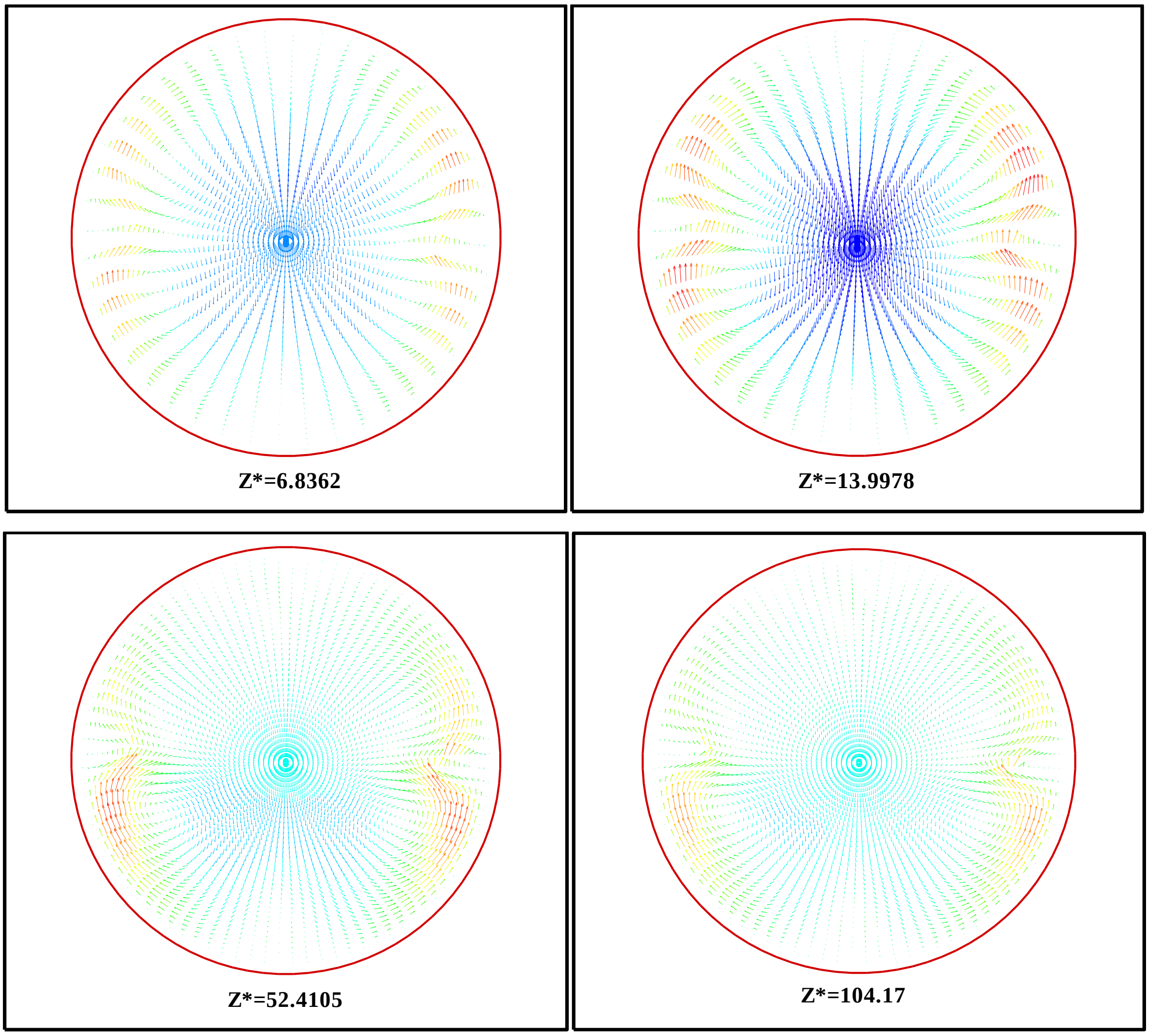


Figure 6.15 Développement de l'écoulement secondaire dans des positions axiales sélectionnées pour le cas de quatre ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

	$V^*_{\theta\,max}$	0.0354	0.0451	0.0355	0.0335
Position	z^*	6.8362	15.2999	52.4105	104.17
	r^*	0.4451	0.4329	0.3716	0.3719
	θ	1.2495	1.2495	1.6779	1.6779

Tableau 6.5 : Vitesse azimutale maximale en certaines positions axiales (8 ailettes).

		Cel 1	Cel 2	Cel 3	Cel 4
Position	z^*	15.2999	15.2999	15.2999	15.2999
	r^*	0.1768	0.3109	0.3109	0.3476
	θ	0.6069	0.1178	1.8921	2.6061

Tableau 6.6 : Centre des cellules contrarotatives pour 8 ailettes à z^*=15.2999 .

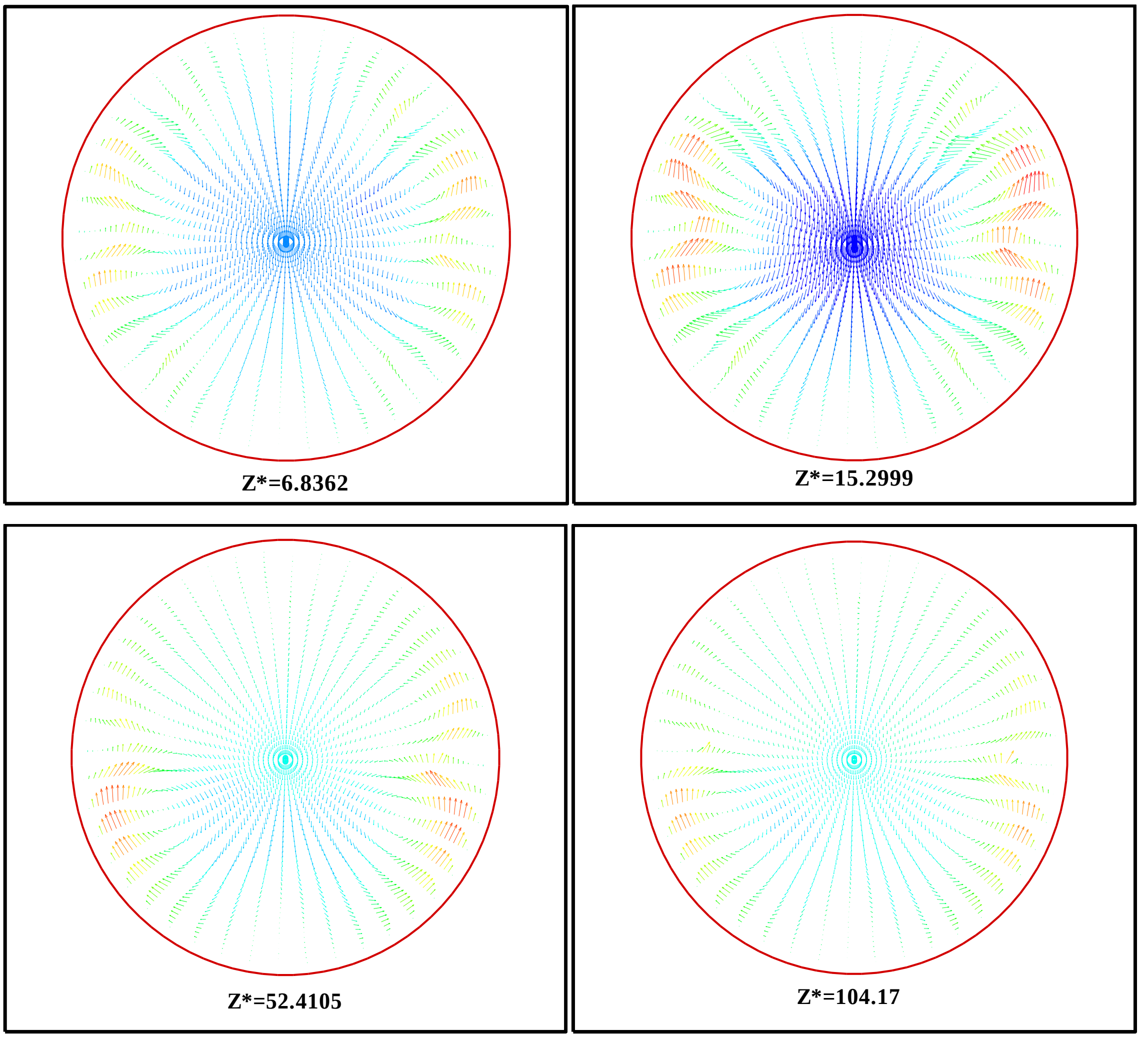


Figure 6.16 Développement de l'écoulement secondaire dans des positions axiales sélectionnées pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

Le champ des vecteurs de l'écoulement secondaire en des positions axiales sélectionnées pour Gr=510000 et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.1875 (37.5% du rayon interne du conduit) est représenté dans la figure 6.17.

	$V^*_{\theta\,max}$	0.0139	0.0252	0.0249	0.0228
Position	z^*	6.8362	43.9467	52.4105	104.17
	r^*	0.4573	0.2866	0.2866	0.0287
	θ	1.3209	1.6065	1.6065	1.6065

Tableau 6.7 : Vitesse azimutale maximale en certaines positions axiales (8 ailettes).

		Cel 1	Cel 2	Cel 3	Cel 4
Position	z^*	43.9467	43.9467	43.9467	43.9467
	r^*	0.4573	0.4451	0.3476	0.4451
	θ	0.0549	0.8925	1.9635	2.7490

Tableau 6.8 : Centre des cellules contrarotatives à z^*=43.9467 (8 ailettes, H^* = 0.1875).

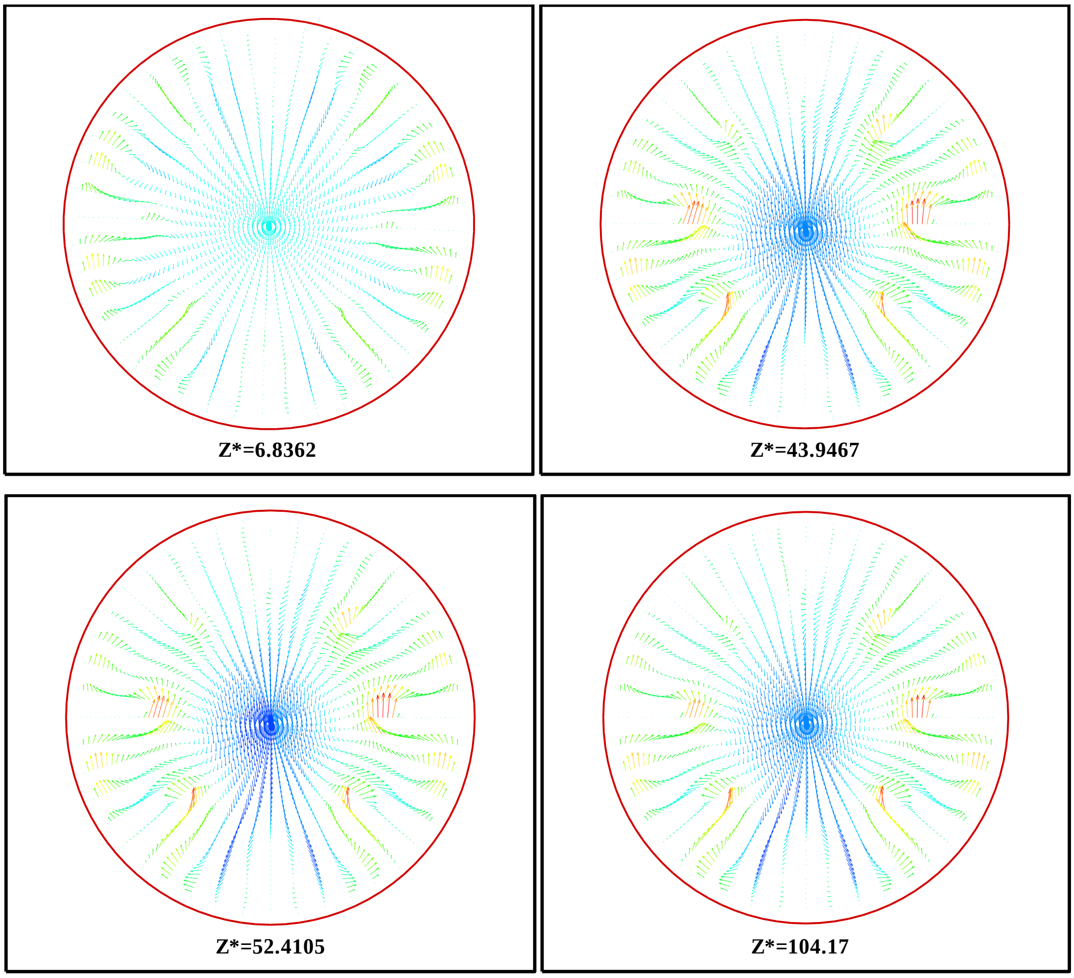


Figure 6.17 Développement de l'écoulement secondaire dans des positions axiales sélectionnées pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.1875.

6.2.1.2.2 L'écoulement axial

A l'entrée l'écoulement est axisymétrique dont le maximum de la vitesse axiale est au centre du conduit. En présence du chauffage volumétrique dans les parois des ailettes et du conduit, la configuration de l'écoulement axial se change complètement car l'écoulement secondaire provoque une variation angulaire qui a une influence directe sur la distribution axisymétrique de l'écoulement axial. Qualitativement, pour tout les cas étudiés le maximum de la vitesse axiale sur l'axe du conduit change de position vers le bas sous l'effet de l'écoulement secondaire descendant au centre de ce dernier. Quantitativement, la vitesse axiale augmente légèrement en augmentant le nombre d'ailettes. La position du maximum de la vitesse axiale pour les différents nombres d'ailettes est représentée dans les tableaux 6.9-6.11. Dans les figures 6.18-6.20 on représente une illustration de la variation de la vitesse axiale adimensionnelle dans le plan ($r^* - \theta$) en des positions axiales sélectionnées pour Gr=510000 et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.125 (25% du Rayon interne du conduit).

La variation de la vitesse axiale pour le cas de huit ailettes longitudinales en augmentant la hauteur des ailettes à H^* égale à 0.1875 (37.5% du rayon interne du conduit) est représenté dans la figure 6.21. Il est bien clair que l'augmentation dans la hauteur des ailettes permit d'augmenter le maximum de la vitesse axiale.

Tableau 6.9 : Vitesse axiale maximale en certaines positions axiales (2 ailettes verticales) ; Gr=510000, H^*=0.125.

	$V^*_{z\,max}$	1.923	1.924	1.939	1.943
Position	z^*	26.3680	52.4105	78.4530	104.17
	r^*	0.1890	0.1402	0.1159	0.0915
	θ	3.1059	3.1059	3.1059	3.1059

Il est bien clair que la composante azimutale du $V_{Z\,max}$ est toujours à $\theta=\pi$.

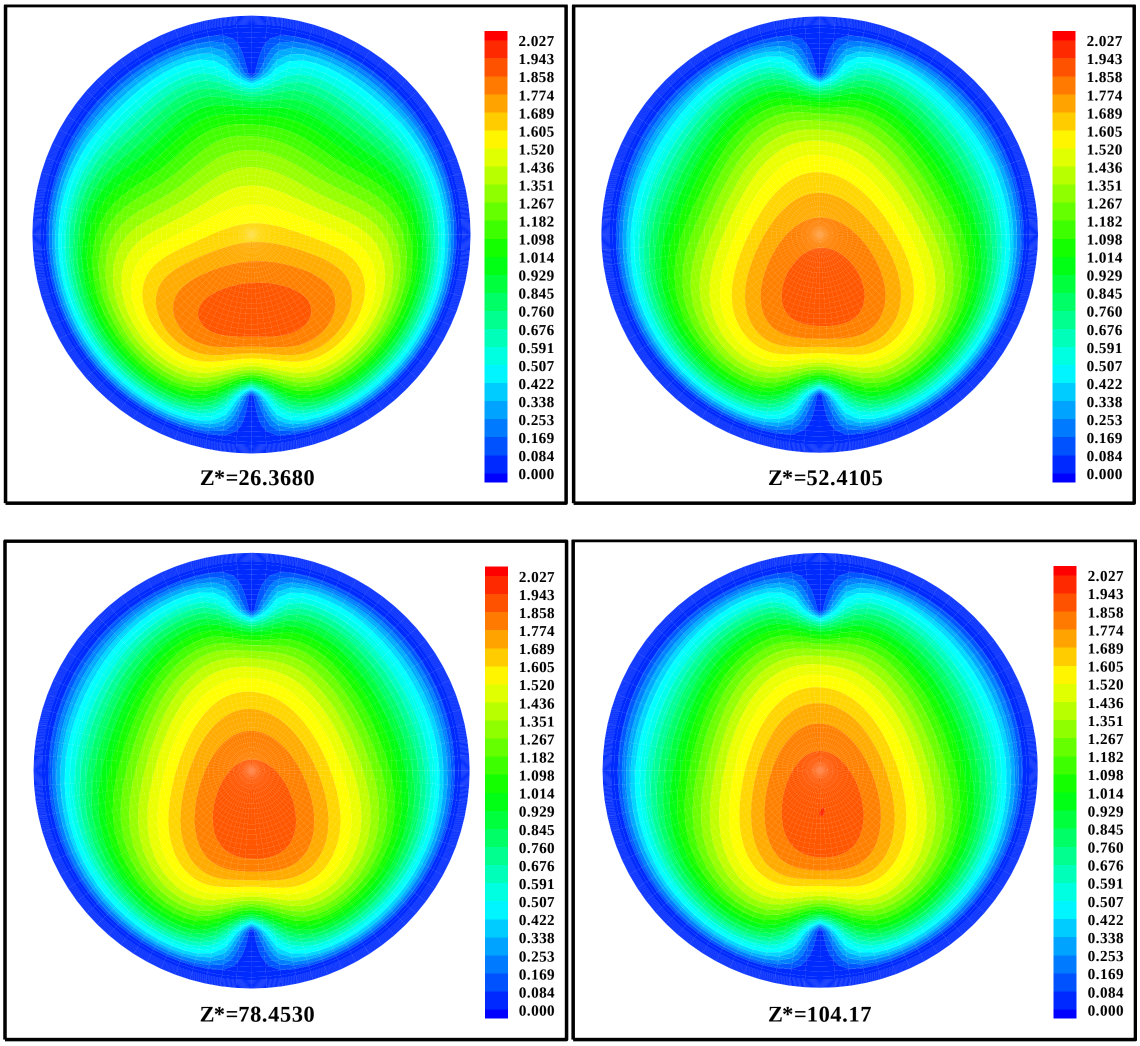


Figure 6.18 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies pour le cas de deux ailettes verticales ; Gr=510000, H^*=0.125.

Tableau 6.10 : Vitesse axiale maximale en certaines positions axiales (4 ailettes) ; Gr=510000, H^*=0.125.

	$V^*_{z\ max}$	2.003	1.992	1.998	1.943
Position	z^*	26.3680	52.4105	78.4530	104.17
	r^*	0.1890	0.1402	0.1159	0.1036
	θ	3.1059	3.1059	3.1059	3.1059

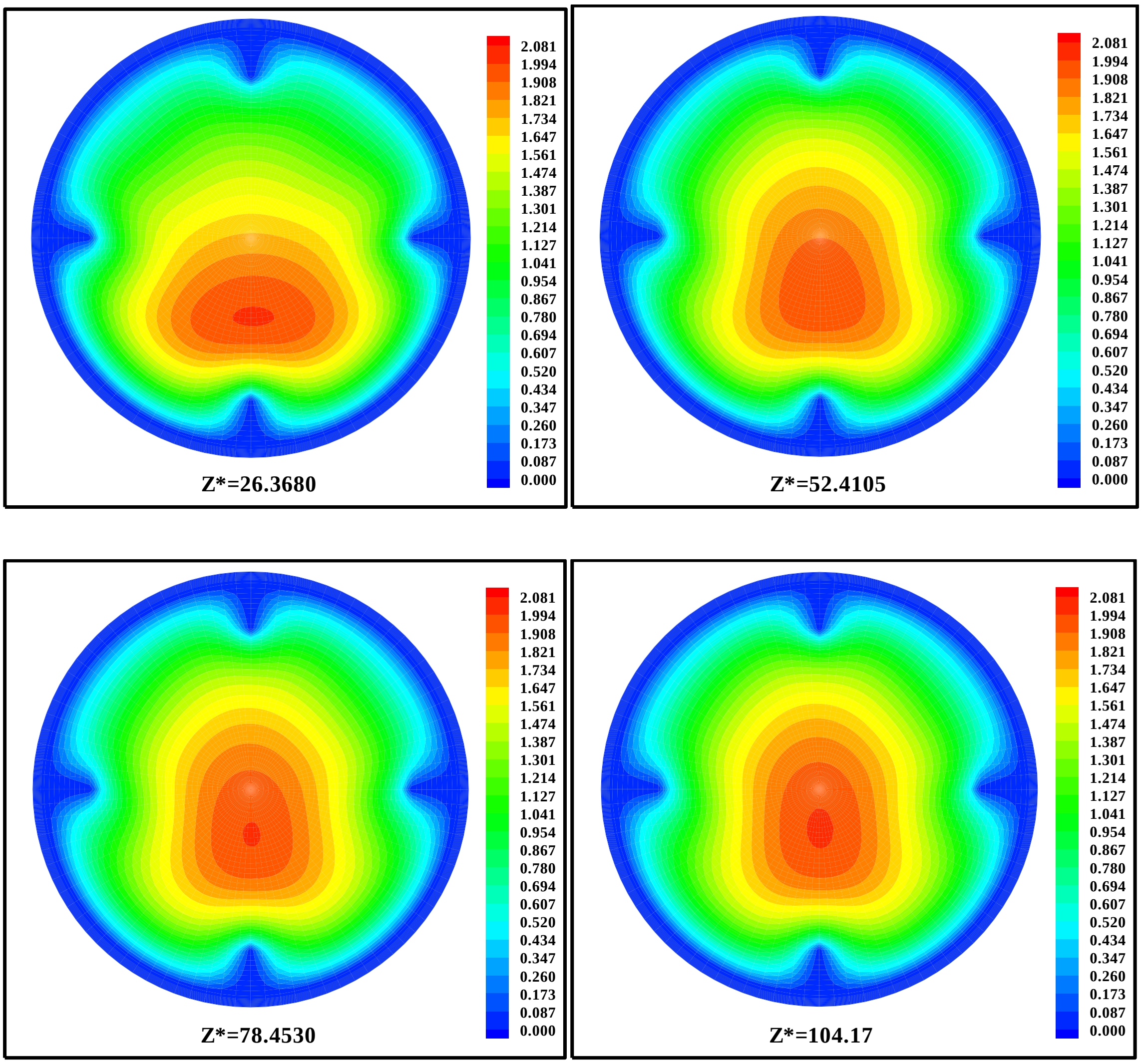


Figure 6.19 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies pour le cas de quatre ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

Tableau 6.11 : Vitesse axiale maximale en certaines positions axiales (8 ailettes) ; Gr=510000, H^*=0.125.

	$V^*_{z\ max}$	2.040	1.991	1.976	1.966
Position	Z^*	26.3680	52.4105	78.4530	104.17
	r^*	0.1768	0.1280	0.1036	0.0915
	θ	3.1059	3.1059	3.1059	3.1059

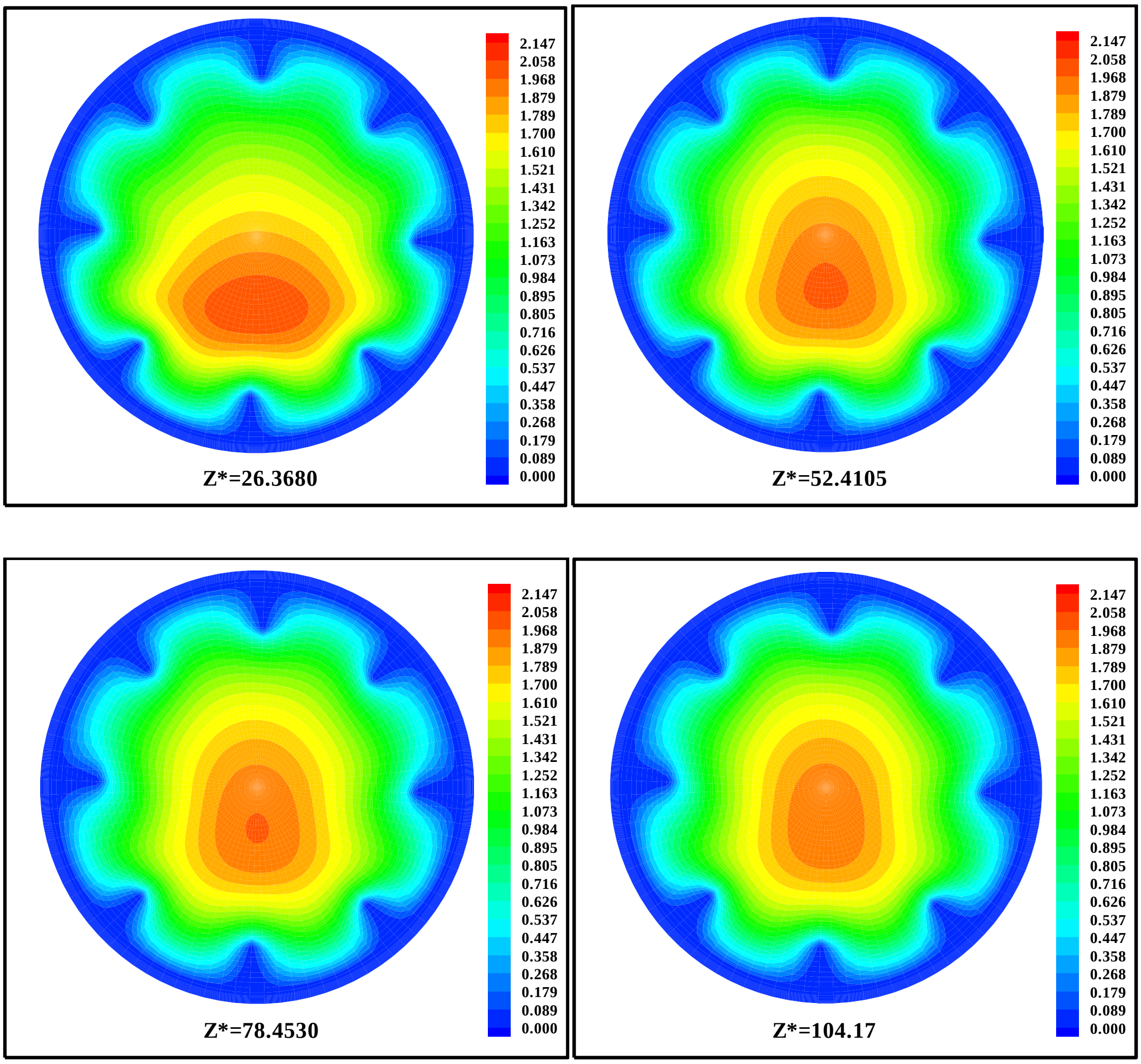


Figure 6.20 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

Tableau 6.12 : Vitesse axiale maximale en certaines positions axiales (8 ailettes) ; Gr=510000, H^*=0.1875.

	$V^*_{z\ max}$	2. 249	2.234	2.270	2.292
Position	z^*	26.3680	52.4105	78.4530	104.17
	r^*	0.1159	0.0793	0.0549	0.0549
	θ	3.1059	3.1059	3.1059	3.1059

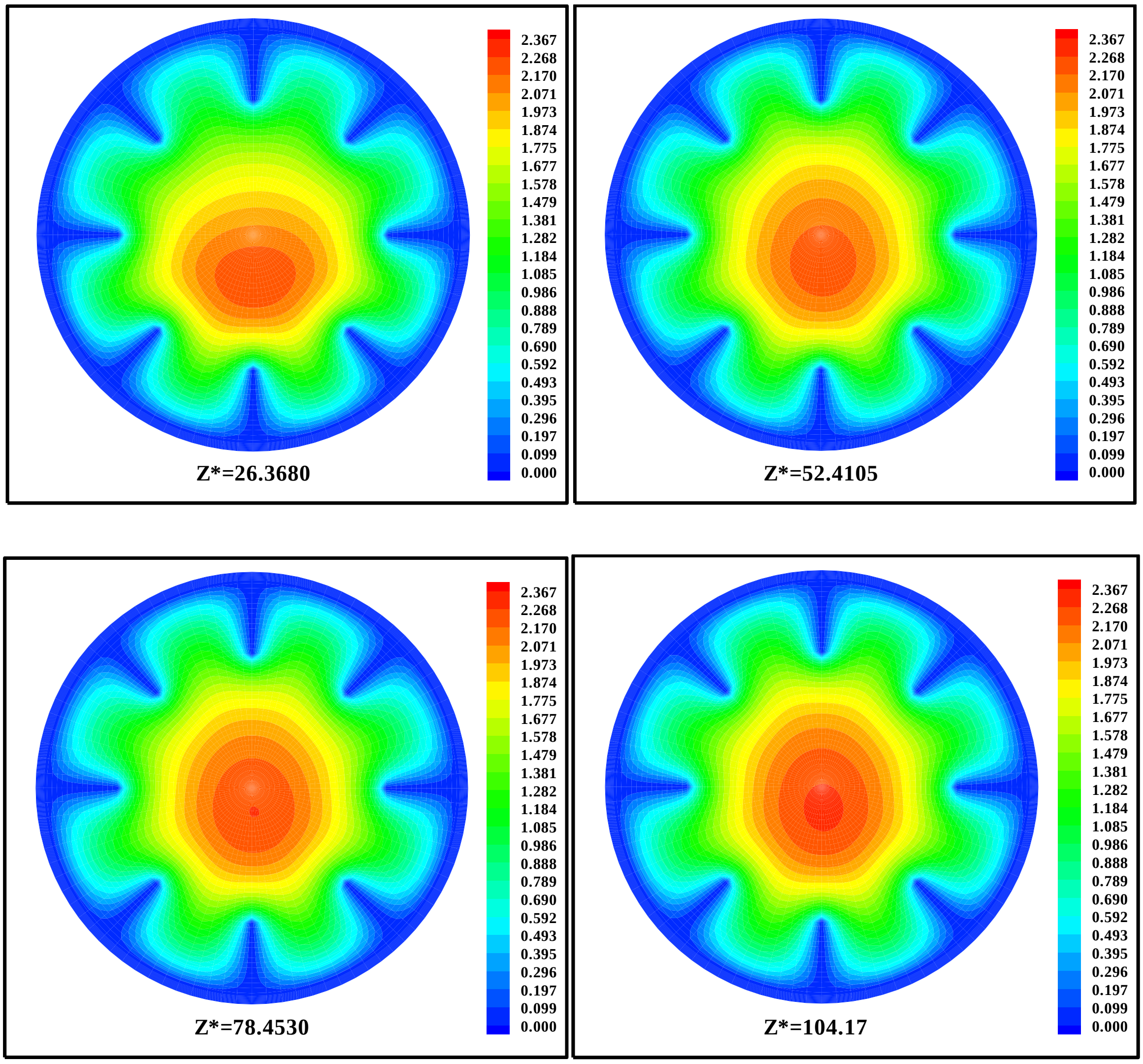


Figure 6.21 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.1875.

6.2.1.2.3 Champ de température

L'axisymétrie du champ de température discutée dans la convection forcée est détruite en présence du chauffage volumétrique par l'écoulement transversal qui provoque une variation angulaire sur la température du fluide, cette variation est expliquée comme suit : à une section axiale donnée, le fluide chaud prés de la paroi du conduit se déplace vers le haut sous l'effet de la force de poussée thermique, le fluide relativement froid redescend dans le centre du conduit. Une génération permanente de la chaleur dans les parois des ailettes et du conduit impose une augmentation continue de la température du fluide jusqu'à la sortie du conduit. Le maximum de la température du fluide est toujours à la sortie du conduit en haut de l'interface fluide-paroi cylindrique à $r^*=0.5$ et $\theta=0$ juste à droite et à gauche de l'ailette verticale placée à $\theta=0$.

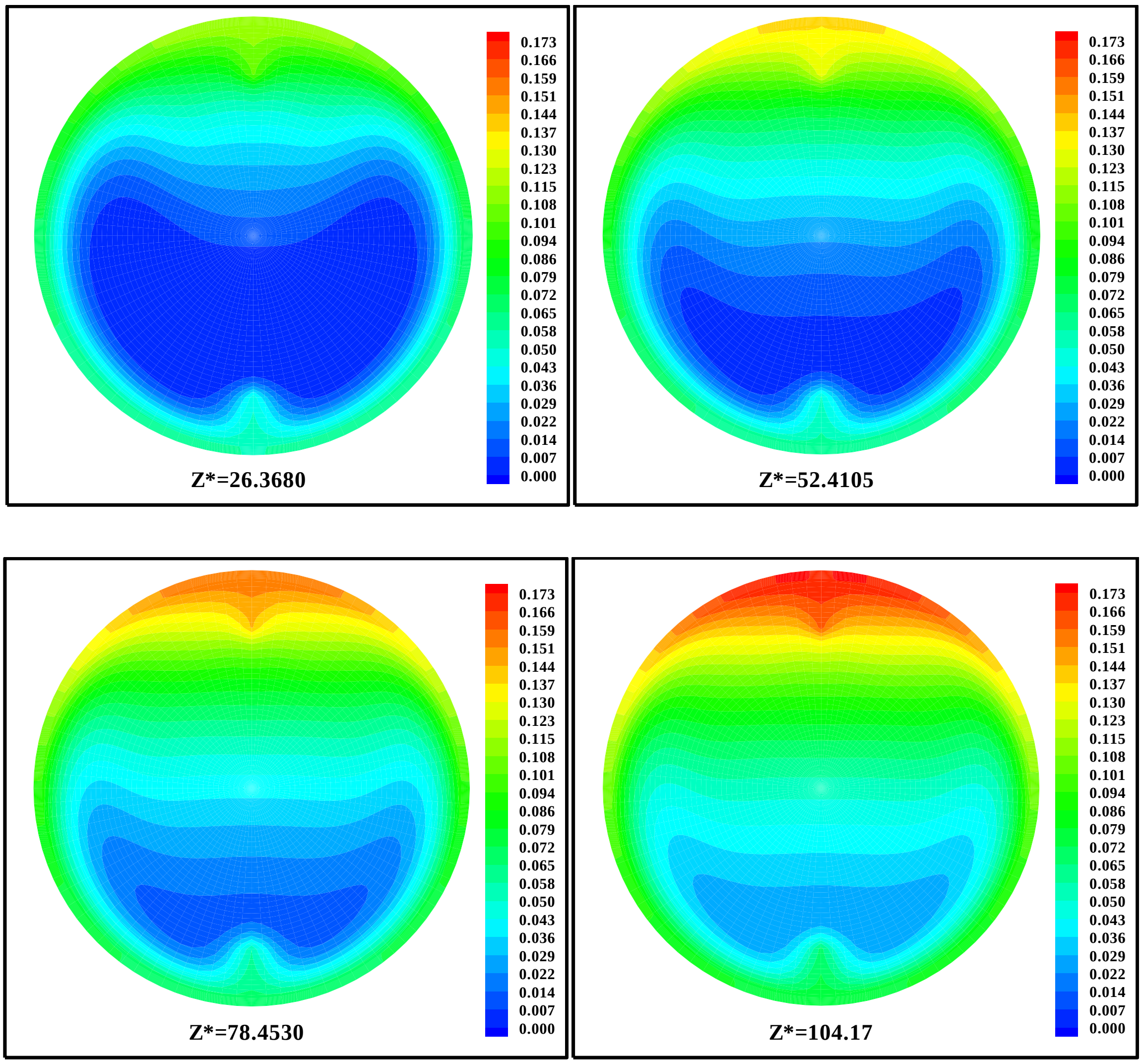


Figure 6.22 Champ de température en des positions axiales choisies pour le cas de deux ailettes verticales ; Gr=510000, $H^*=0.125$.

Pour le cas de deux ailettes verticales ayant une hauteur H^*=0.125, T^*_{max} est égale à 0.1735, cette température diminue à 0.173 et 0.1728 pour huit et quatre ailettes respectivement. Pour le cas de huit ailettes ayant une hauteur H^* égale à 0.1875, T^*_{max} est égale à 0.1715. Dans les figures 6.22-6.24, nous présentons la variation du champ de température en des positions axiale choisies pour les cas : deux ailettes verticales, quatre ailettes et huit ailettes pour H^* égale à 0.125. Dans la figure 6.25, la représentation est faite pour huit ailettes et H^* égale à 0.1875.

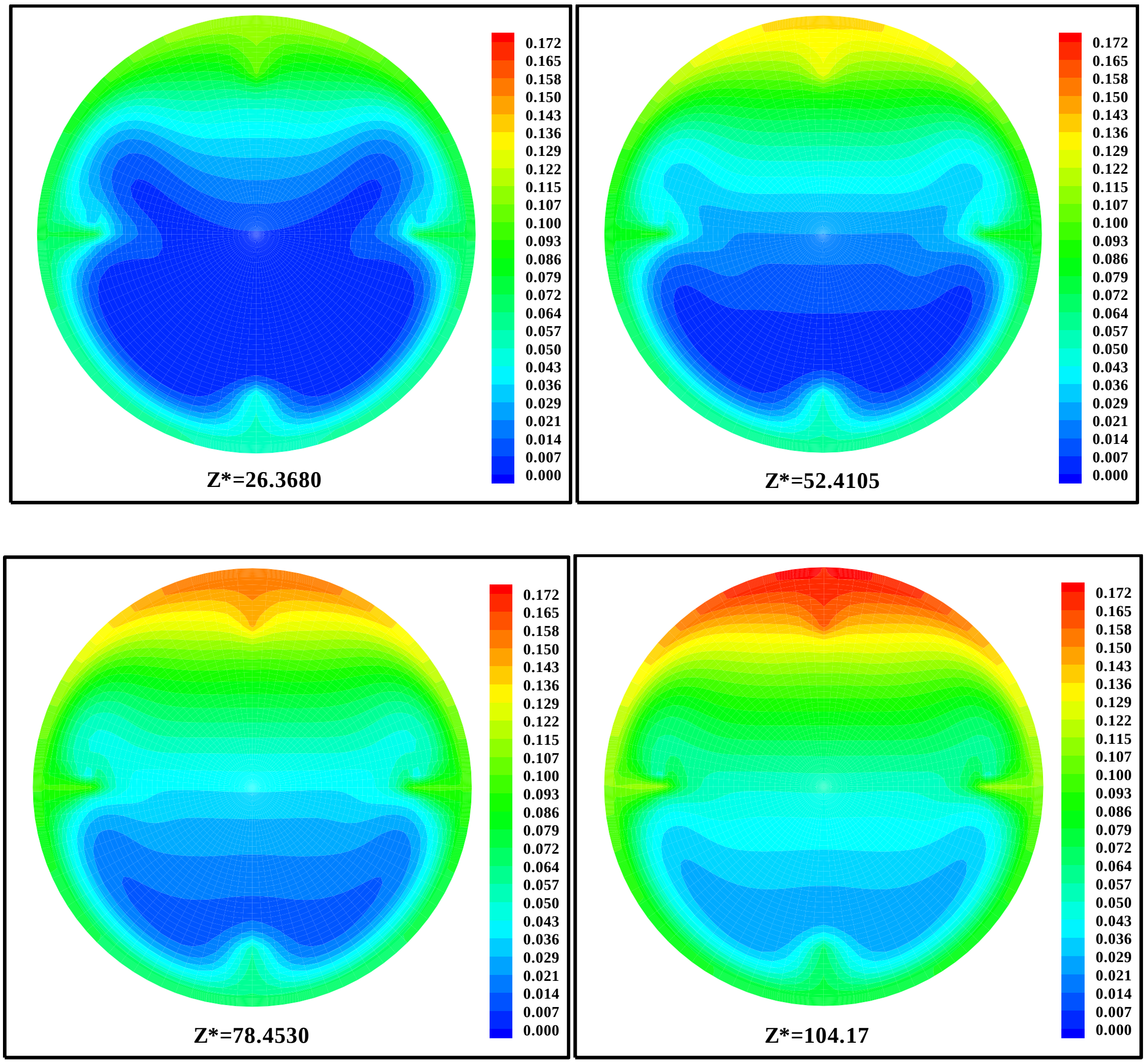


Figure 6.23 Champ de température en des positions axiales choisies pour le cas de quatre ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

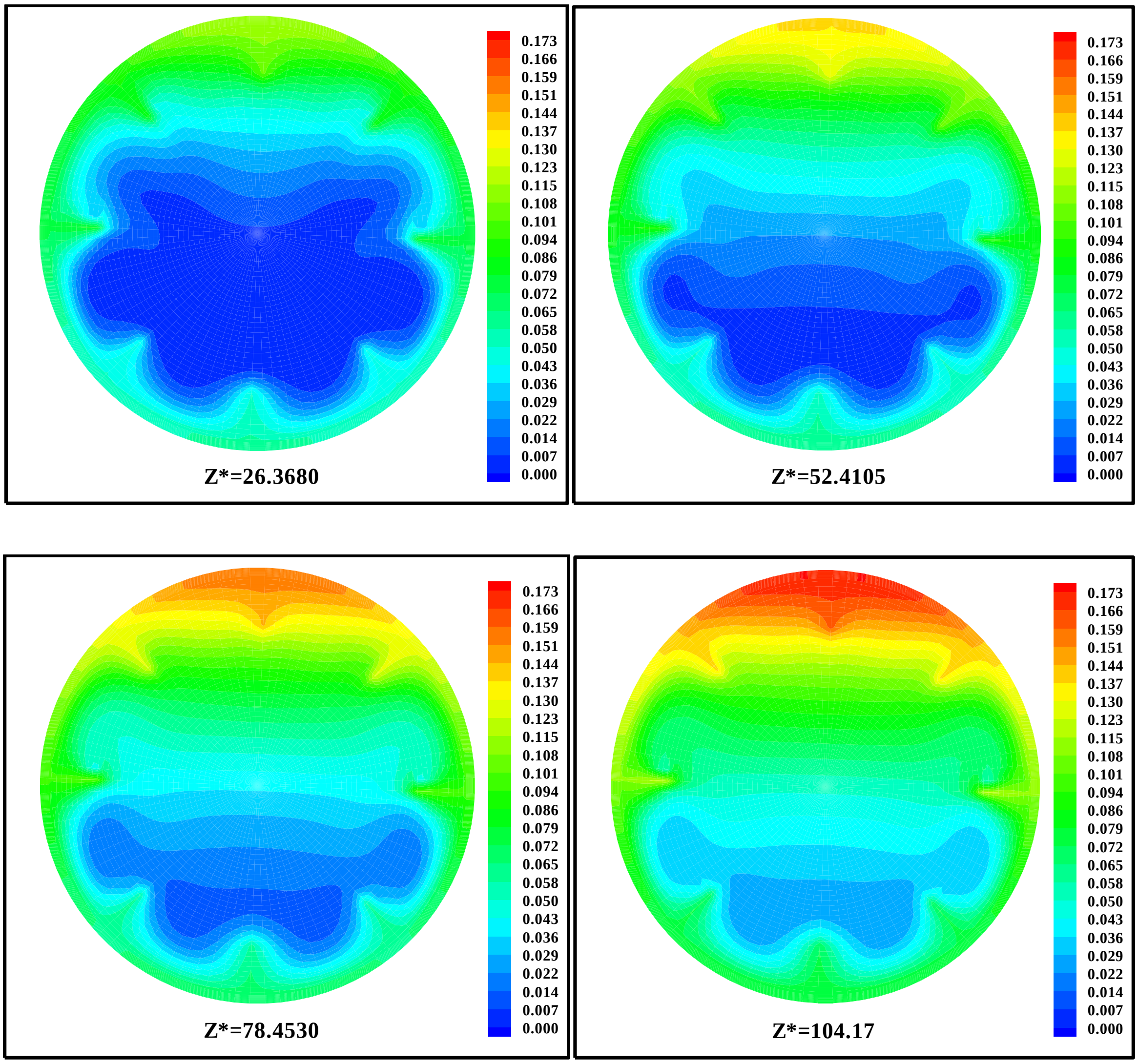


Figure 6.24 Champ de température en des positions axiales choisies pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^{*}=0.125.

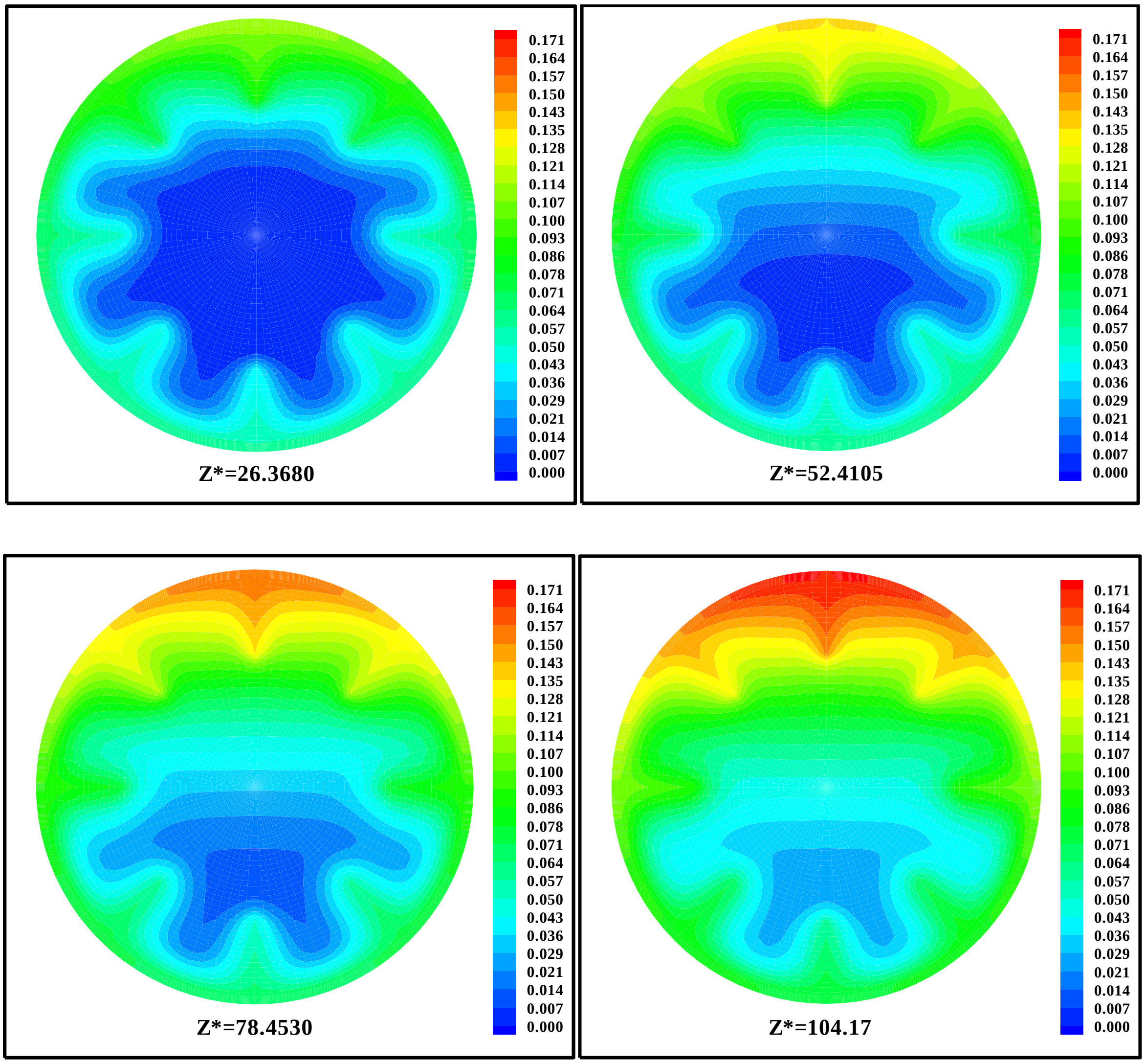


Figure 6.25 Champ de température en des positions axiales choisies pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.1875.

6.2.1.2.4 Flux thermique adimensionnel aux interfaces

Dans le cas de la convection forcée, on a vu que le flux de chaleur à l'interface cylindrique est axisymétrique et que le flux aux interfaces des ailettes est identique à cause de l'axisymétrie des champs thermiques. Dans la convection mixte, le champ de température perd sa structure axisymétrique ce qui change automatiquement la distribution des flux aux interfaces, la seule symétrie est celle par rapport au plan vertical qui passe par l'axe du conduit. Dans ce cas les ailettes vont avoir des distributions de flux de chaleur, indépendantes. Une représentation du flux de chaleur local à l'interface cylindrique du conduit pour le cas de huit ailettes est représentée dans la figure 6.26. Le flux de chaleur dans ce cas prend une valeur maximale égale à 1.136 à z^{*}=103.19 et θ=1.5351.

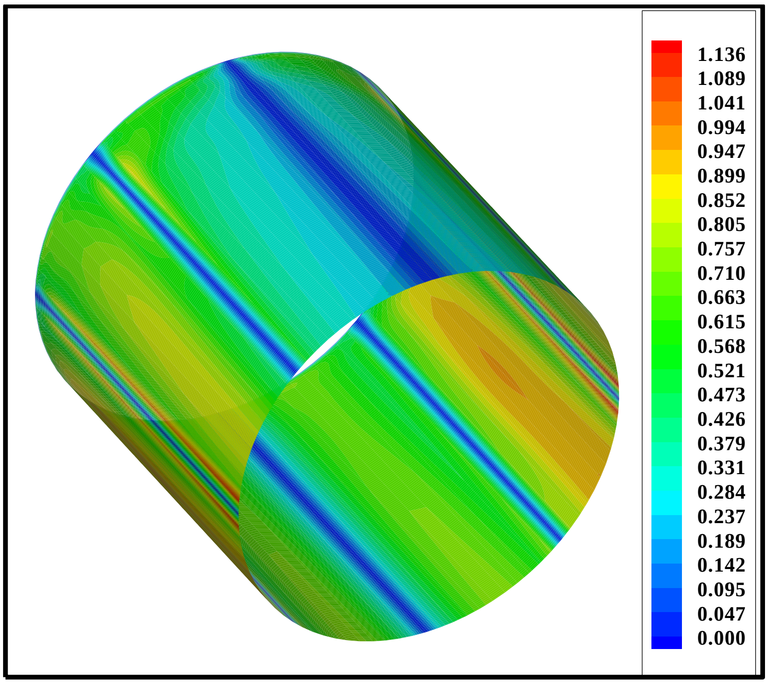
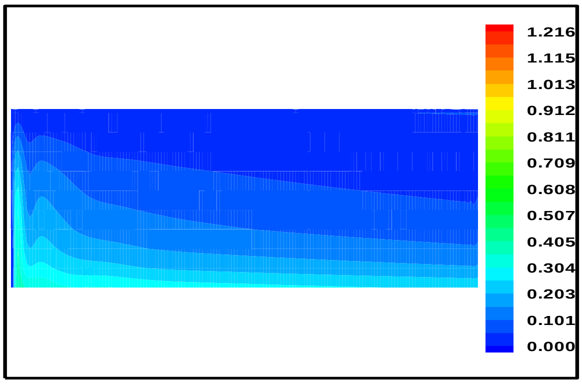
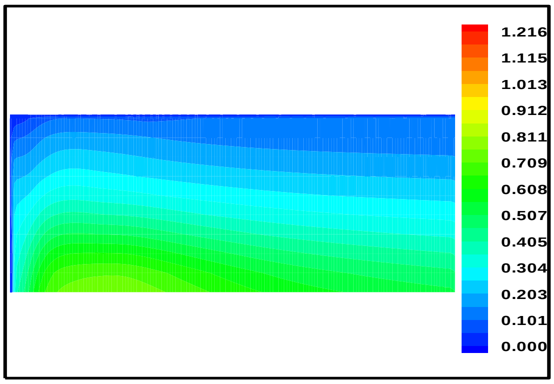


Figure 6.26 Distribution du flux local à l'interface cylindrique pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^{*}=0.125.

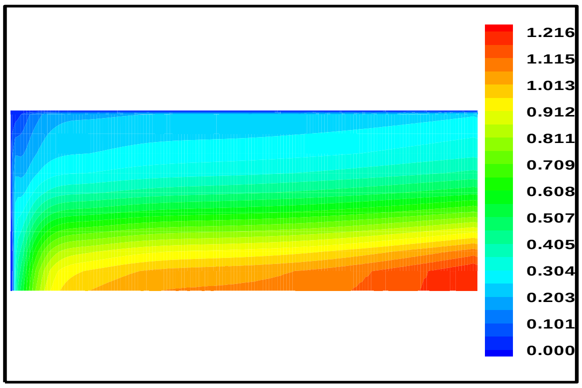
Le flux de chaleur dégagé par les ailettes longitudinales placées sur le coté droit du conduit : (θ=0), ($\theta=\pi/4$), ($\theta=\pi/2$), ($\theta=3\pi/4$) et ($\theta=\pi$) est représenté dans la figure 6.27. Le flux de chaleur prend une valeur maximale égale à 1.216 sur l'ailette placée à ($\theta=\pi/2$), à z^{*}=104.17 et r^{*}=0.3841.



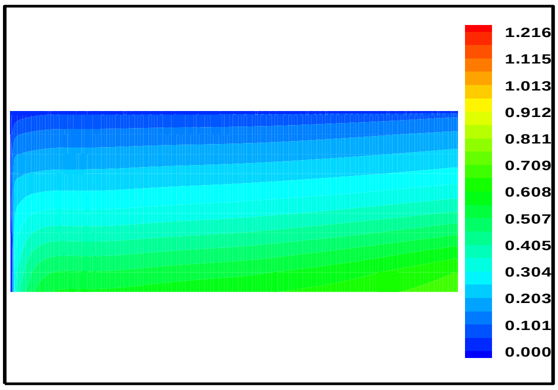
Ailette placée à (θ=0)



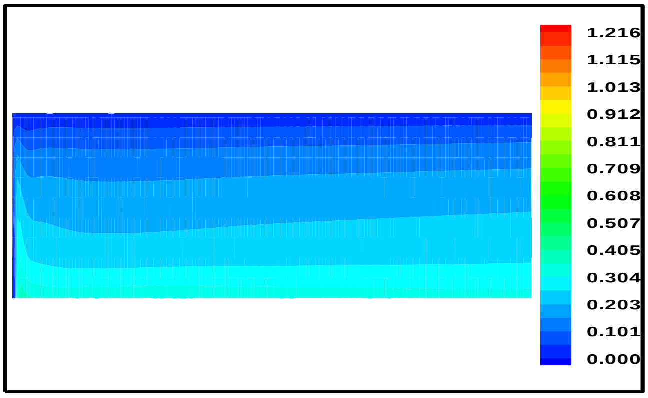
Ailette placée à (θ=π/4)



Ailette placée à (θ=π/2)



Ailette placée à (θ=3π/4)



Ailette placée à (θ=π)

Figure 6.27 Distribution du flux local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

6.2.1.2.5 Nombre de Nusselt

La variation du nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique pour le cas de huit ailettes transversales ayant une hauteur H^* égale à 0.125 est illustrée dans la figure 6.28. Il est bien clair que le nombre de Nusselt local à l'interface (paroi cylindrique-ailette) est nul à cause du flux de chaleur inexistant vers le fluide dans cette interface, en dehors de cette dernière le nombre de Nusselt local subit une augmentation azimutale en allant du haut vers le bas, à la sortie du conduit le nombre de Nusselt locale prend une valeur maximale égale à 48.73 située à θ=2.4633.

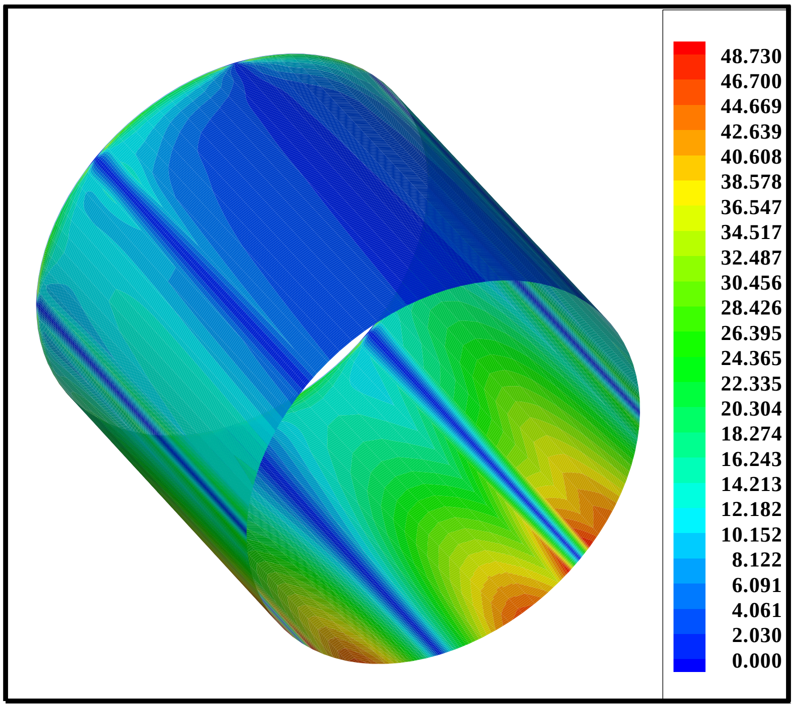
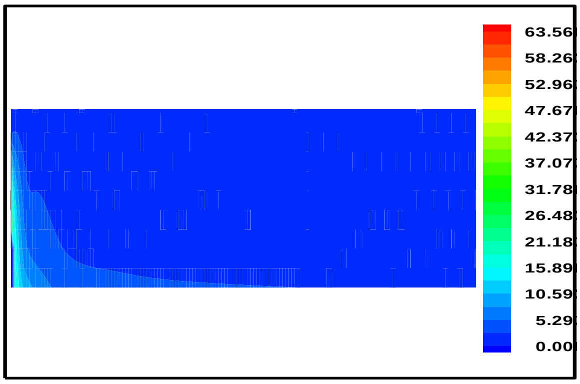
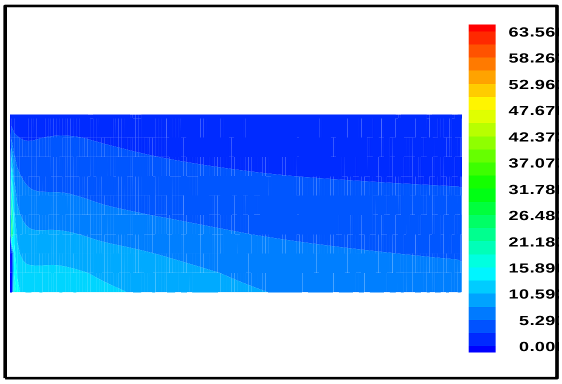


Figure 6.28 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

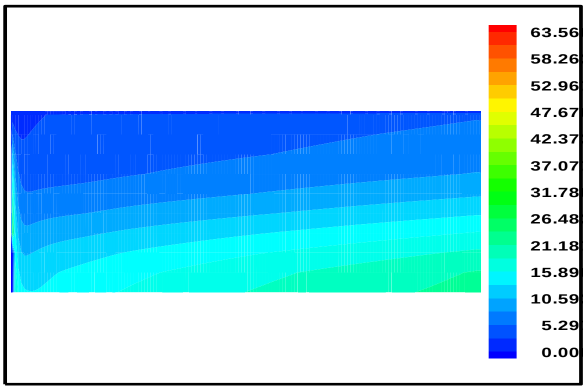
Le nombre de Nusselt local des ailettes longitudinales placées dans le coté droit du conduit : (θ=0), (θ=π/4), (θ=π/2), (θ=3π/4) et (θ=π) est représenté dans la figure 6.29. Le nombre de Nusselt prend une valeur maximale égale à 63.56 sur l'ailette placée à (θ=3π/4), à z^*=104.17 et r^*=0.3841.



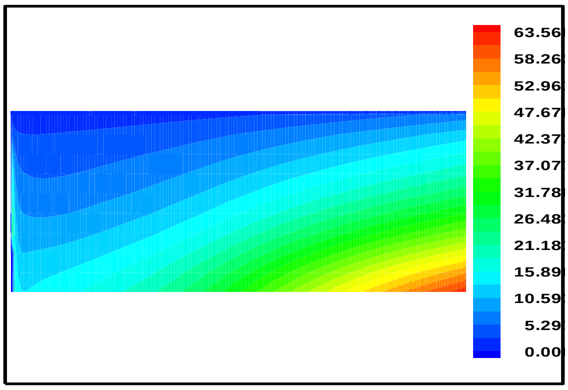
Ailette placée à (θ=0)



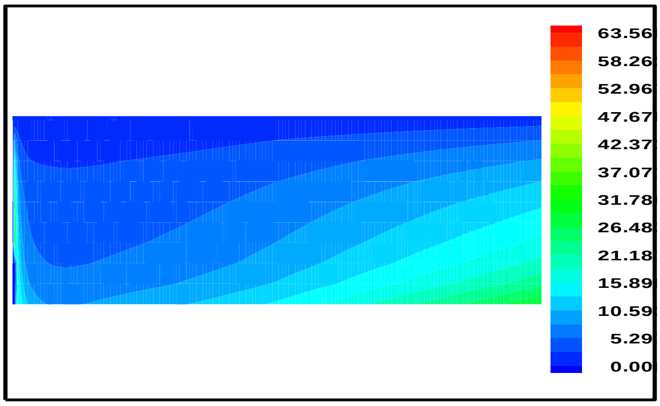
Ailette placée à (θ=π/4)



Ailette placée à (θ=π/2)



Ailette placée à (θ=3π/4)



Ailette placée à (θ=π)

Figure 6.29 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=510000, H^*=0.125.

La comparaison des Nusselt axiales des conduits ailettés avec un conduit non ailetté est illustrées dans la figure 6.30. Quantitativement, il y a une grande augmentation dans le Nusselt axial lorsque le nombre des ailettes est augmenté, cella est due à l'importante variation du Nusselt axiale aux interfaces des ailettes. A la sortie du conduit, le nombre de

Nusselt axiale est égale à 15.79, 23.47, 31.34 et 47.31 pour les cas : conduit non ailetté, deux ailettes verticales, quatre ailettes et huit ailettes respectivement. Les nombres de Nusselt moyen pour ces cas sont : 13.144, 16.830, 22.523 et 32.066

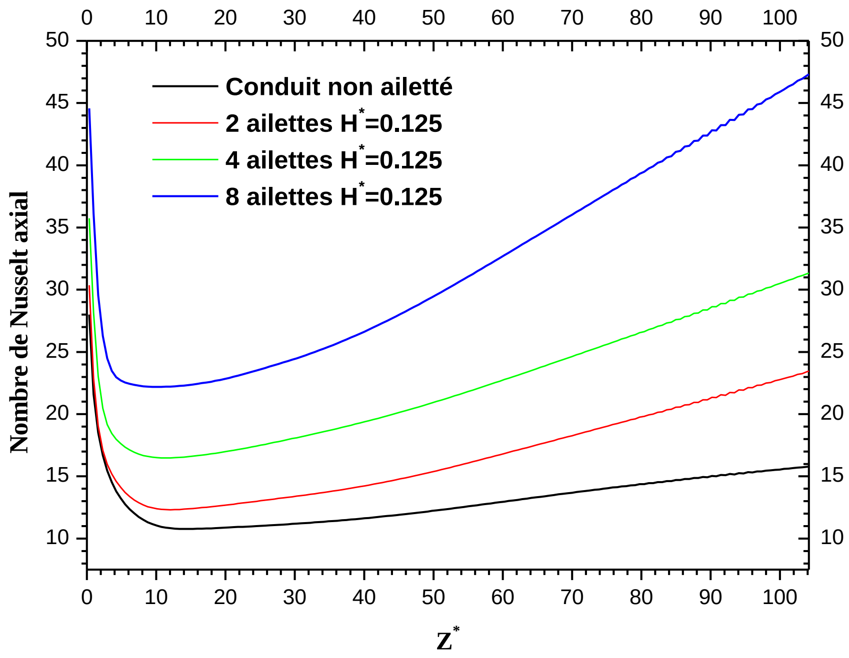


Figure 6.30 Variation du nombre de Nusselt axial Nu(z^*) pour les différentes cas étudiés ; une comparaison avec le cas non ailetté (Gr=510000).

6.2.2 Conduit horizontal à ailettes transversales

6.2.2.1 La convection forcée (Gr=0)

La convection forcée dans un conduit horizontal à ailettes transversales est traitée pour le cas de huit ailettes transversales. A cause de la similarité qualitative des champs thermiques et dynamiques autour des ailettes, les résultats présentés sont ceux de la première et la dernière ailette.

6.2.2.1.1 Champ dynamique de l'écoulement

A l'entrée du conduit, l'écoulement axial est de type poiseuille avec une vitesse nulle sur la paroi et une vitesse maximale $V^*_{z\,max}$ égale à 2.0 sur l'axe du conduit. Les positions axiales des ailettes transversales sont : z^*=9.4404, z^*=19.8574, z^*=30.2744, z^*=40.6914, z^*=51.1084, z^*=61.5254, z^*=75.8488 et z^*=82.3594. De l'entrée à z^*=8.7893 le profile de la vitesse axiale est similaire à celui d'un conduit horizontale non ailetté. Juste avant la section axiale de la première ailette transversale à z^*=8.7893, l'écoulement axiale face à l'ailette change de direction en créant un mouvement radial du fluide orienté vers le centre du conduit pour qu'il passe à z^*=9.4404 (position de la première ailette transversale) au centre de l'ailette transversale. Après, le mouvement radial du fluide est orienté une deuxième fois mais dans ce cas vers la paroi cylindrique du conduit pour que le fluide retourne à l'état initial occupé avant l'ailette. La diminution dans la section de passage du fluide à z^*=9.4404 est accompagnée par une augmentation importante dans la vitesse axiale dans cette position. La distribution de la vitesse axiale dans le plan verticale qui passe à travers les angles (θ=0) et (θ=π) est représentée dans la figure 6.31, à travers cette figure il est bien clair que le maximum de la vitesse axiale $V^*_{z\,max}$ est toujours sur l'axe du conduit et que $V^*_{z\,max}$ prend des valeurs maximale dans les sections axiales des ailettes transversale. A z^*=9.4404, $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.795, cette vitesse diminue à 2.729, 2.690, 2.689, 2.644, 2.582, 2.506 et 2.504 dans les positions axiales z^*=19.8574, z^*=30.2744, z^*=40.6914, z^*=51.1084, z^*=61.5254, z^*=75.8488 et z^*=82.3594 respectivement.

La distribution polaire de la vitesse axiale à z^*=9.4404 (position de la première ailette transversale) est représentée dans la figure 6.32, la vitesse est nulle sur la paroi du conduit et de l'ailette et elle prend une valeur maximale égale à 2.795 sur l'axe du conduit.

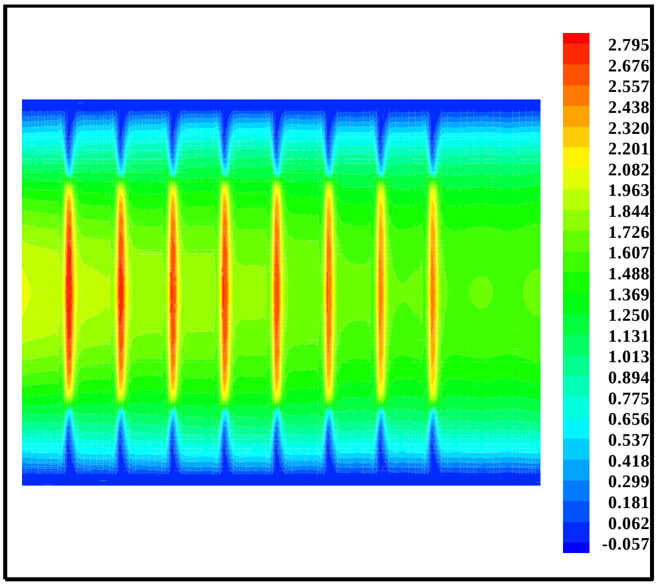


Figure 6.31 Distribution de la vitesse axiale dans le plan verticale qui passe à travers les angles (θ=0) et (θ=π) ; Gr=0, H^*=0.1875.

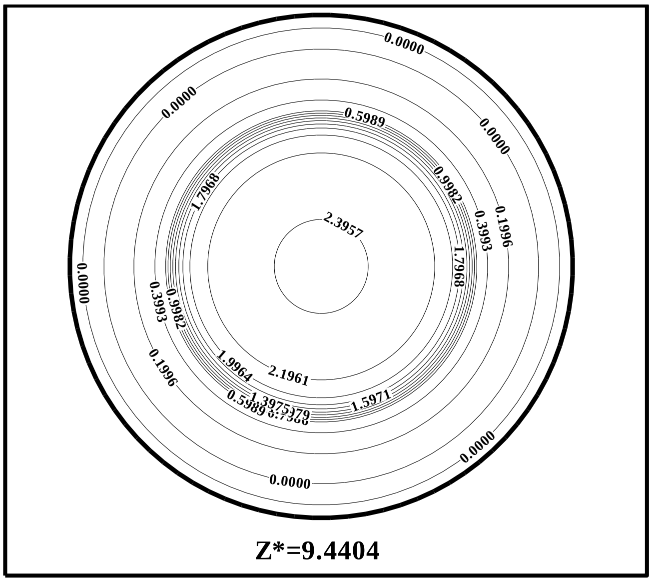


Figure 6.32 Distribution polaire de la vitesse axiale à z^*=9.4404 ; Gr=0, H^*=0.1875.

6.2.2.1.2 Champ thermique de l'écoulement

La distribution du champ de température dans le plan vertical qui passe à travers les angles (θ=0) et (θ=π) pour le cas de huit ailettes transversales est représentée dans la figure 6.33. Loin des sections axiales des ailettes transversales, il y a une continuité dans l'augmentation de la température du fluide, cette variation est coupée par une augmentation brusque de la température dans les sections des ailettes transversales. Cette discontinuité dans la variation de la température participe d'une façon remarquable dans l'augmentation de la température du fluide.

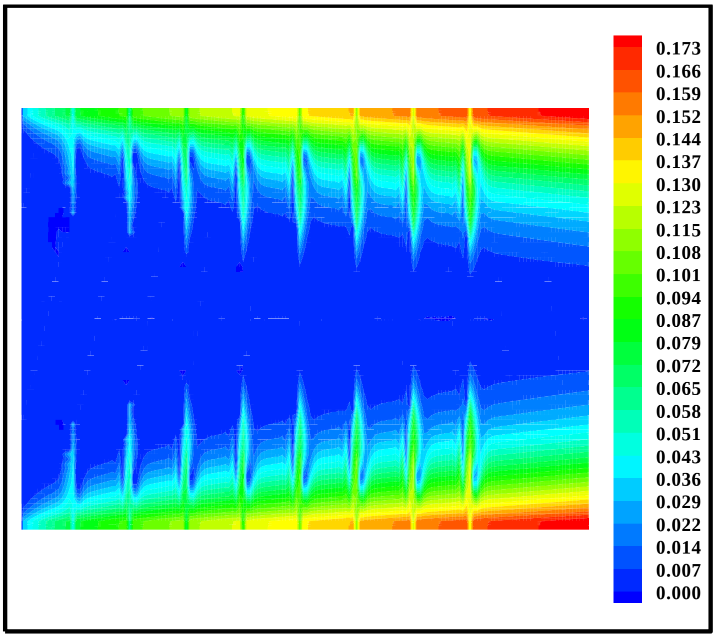


Figure 6.33 Champ de température dans le plan vertical qui passe à travers les angles (θ=0) et (θ=π) ; Gr=0, H^*=0.1875.

Le flux de chaleur et le nombre de Nusselt local à l'interface de la huitième ailette transversale sont représentés respectivement dans les figures 6.34 et 6.35. La distribution du flux local à l'interface de l'ailette est axisymétrique elle prend une valeur maximale égale à 0.361 situé à r^*=0.3963, tandis que la valeur maximale du nombre de Nusselt local est égale à 5.334 situé à r^*=0.3841.

La comparaison entre le nombre de Nusselt local à l'interface du conduit et de l'ailette transversale montre que le nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique qui varie entre 34.19 à l'entrée et 8.74 à la sortie est très supérieur à celui à l'interface des ailettes transversales qui prend une valeur maximale égale à 5.334, mais ces dernières participent d'une façon indirecte dans l'augmentation du Nusselt cylindrique, cela est expliqué comme suit : le passage du fluide au centre de l'ailette transversale permit de mélanger le fluide de telle sorte qu'après la section de l'ailette transversale un fluide relativement froid occupe une place au voisinage de la paroi du conduit ce qui augmente le nombre de Nusselt local dans cette position.

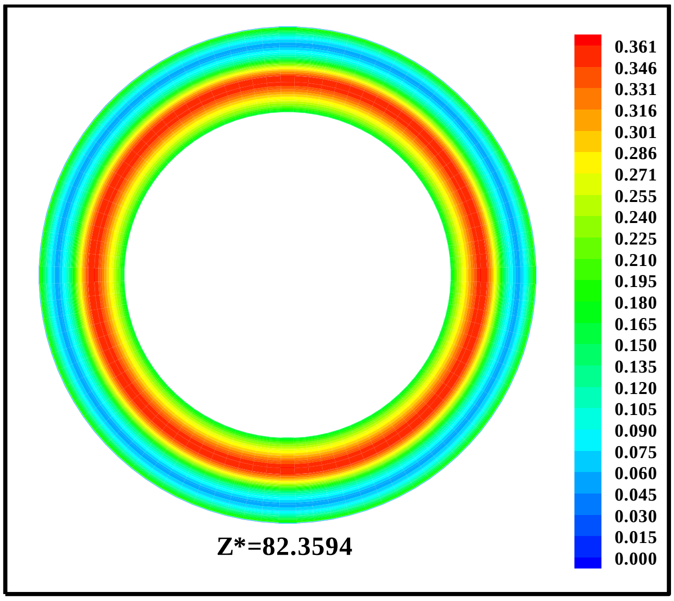


Figure 6.34 Distribution du flux local à l'interface de la huitième ailette transversale ; Gr=0, H^*=0.1875.

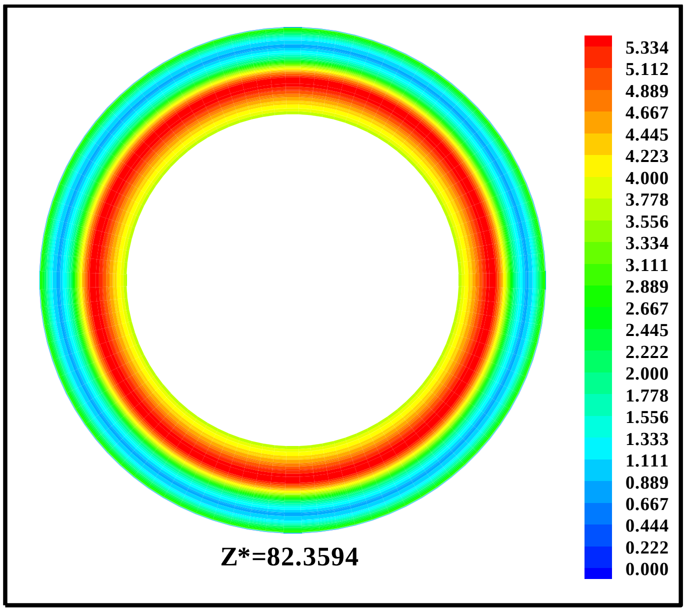


Figure 6.35 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de la huitième ailette transversale ; Gr=0, H^*=0.1875.

6.2.2.2 Convection mixte (Gr=510000)

Les résultats de la convection mixte dans un conduit horizontal mini de huit ailettes transversales ayant une hauteur H^* égale à 0.1875 est présentée dans cette partie. Les positions axiales de ces ailettes sont : z^*=9.4404, z^*=19.8574, z^*=30.2744, z^*=40.6914, z^*=51.1084, z^*=61.5254, z^*=71.9424 et z^*=82.3594. La présentation des résultats est basée sur la variation des champs thermiques et dynamiques autour des ailettes transversales car loin des ailettes, ces champs sont similaires à ceux d'un simple conduit horizontal étudié dans le chapitre 4.

6.2.2.2.1 Ecoulement secondaire

Dans la figure 6.36, les vecteurs du champ de l'écoulement secondaire sont représentés au voisinage de la quatrième ailette transversale à z^*=37.4361, z^*=38.7382, z^*=40.0403, z^*=40.6914, z^*=42.6446 et z^*=43.9467, on a choisi cette ailette car l'écoulement secondaire au voisinage de cette dernière est plus intense. Relativement loin de la section de l'ailette transversale, la structure de l'écoulement secondaire ressemble à celle d'un conduit horizontale simple. A z^*=40.0403, (juste avant l'ailette transversale), les vecteurs de l'écoulement secondaire à coté de la paroi chaude changent de direction en créant un mouvement radial orienté vers le centre du conduit pour que le fluide passe à z^*=40.6914 (position axiale de l'ailette transversale) à travers l'ailette transversale. Ensuite, à z^*=42.6446 le mouvement radial du fluide est orienté une deuxième fois vers le cylindre externe pour que le fluide retourne à l'état initial occupé avant l'ailette. A partir de z^*=43.9467, les vecteurs du champ de l'écoulement secondaire étudiés précédemment commencent à se créer de nouveau.

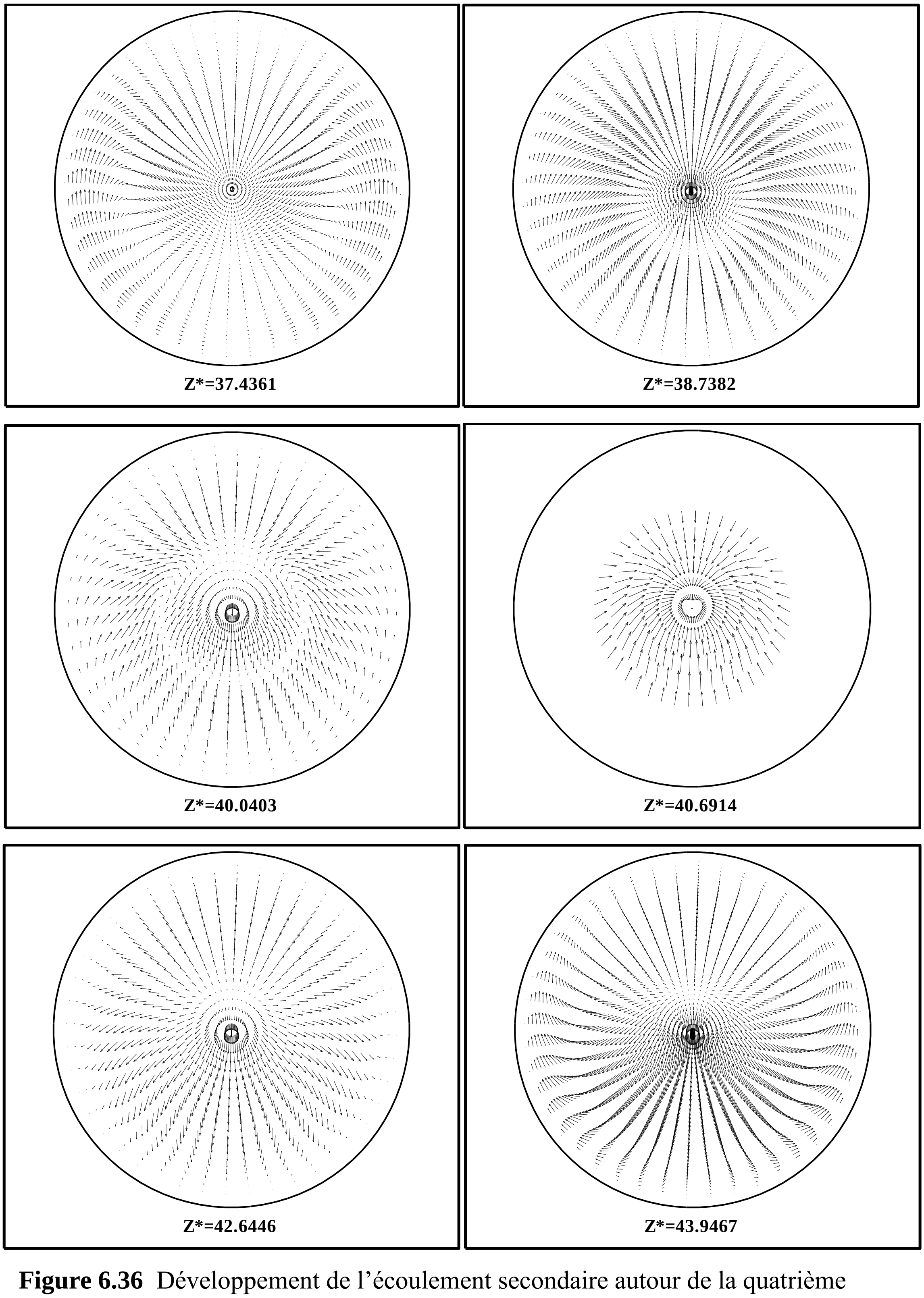


Figure 6.36 Développement de l'écoulement secondaire autour de la quatrième ailette transversale ; Gr=510000, H^*=0.1875.

6.2.2.2.2 Ecoulement axial

Avant la section de l'ailette transversale, l'écoulement axiale ressemble à celui d'un conduit non ailetté. Juste avant l'ailette transversale à z^*=40.0403, un mouvement radial du fluide est créé, ce mouvement permit de changer la direction de la vitesse axiale du fluide face à la paroi de l'ailette vers l'axe du conduit pour qu'il passe à travers l'ailette à z^*=40.6914 (position axiale de l'ailette transversale), cette diminution dans la section de passage augmente l'intensité de la vitesse axiale qui prend une valeur maximale égale 3.949 à z^*=41.9935, cette augmentation brusque dans la vitesse axiale se répète dans chaque section d'une ailette transversale. La distribution polaire de l'écoulement axiale en certaines positions autour de la quatrième ailette transversale à z^*=40.0403, z^*=40.6914, z^*=41.3425 et z^*=41.9935 pour le cas du Gr=510000 et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.1875 est illustrée dans la figure 6.37.

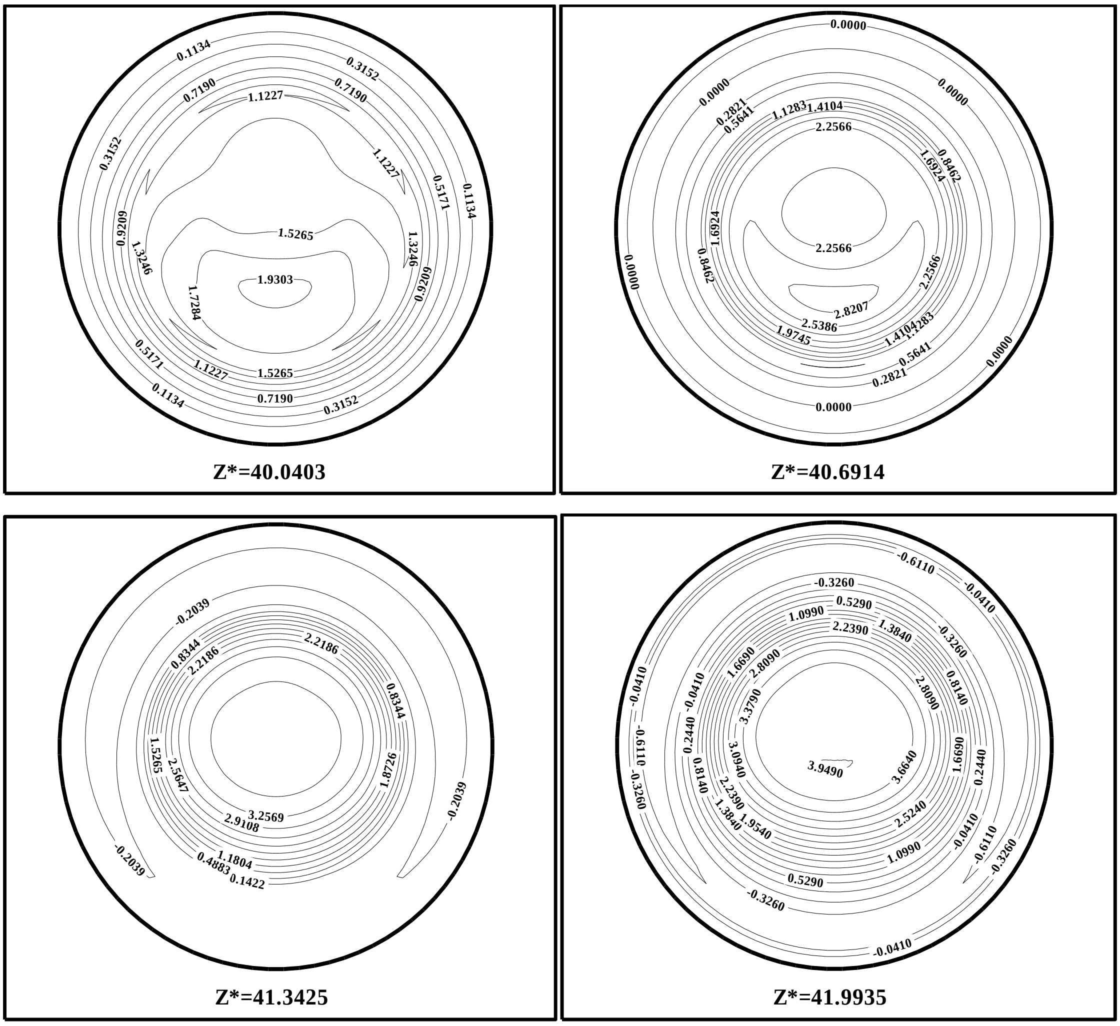


Figure 6.37 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales autour de la quatrième ailette transversale ; Gr=510000, H^*=0.1875.

A z^*=40.0403, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.879 située à r^*=0.1524 et θ=π. A z^*=40.6914 (la position axiale de la quatrième ailette transversale), le maximum de la vitesse axiale augmente à $V^*_{z\,max}$ = 2.896 situé à r^*=0.1768 et θ= π. Juste après, à z^*=41.3425, $V^*_{z\,max}$ prend une valeur maximale égale à 3.949 située à r^*=0.04268 et θ=π.

Dans la section axiale qui suit l'ailette transversale, des vortex axiaux sont créés, ces vortex sont la cause de la vitesse axiale négative après l'ailette transversale. L'intensité de ces vortex est maximale dans la partie supérieure et elle diminue en approchant vers θ égale à π. Dans la figure 6.38, nous représentons la distribution de la vitesse axiale dans le plan verticale qui passe à travers l'axe du conduit pour les huit ailettes, dans la figure 6.39, cette distribution est représentée autour de la quatrième ailette.

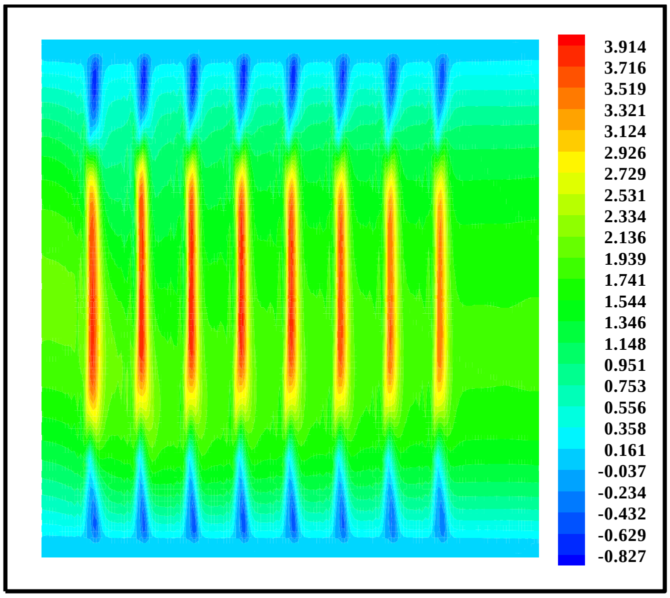


Figure 6.38 Distribution de la vitesse axiale dans le plan verticale qui passe à travers l'axe du conduit ; Gr=510000, H^*=0.1875.

Le centre du vortex axial qui suit la quatrième ailette transversale en haut du conduit est situé à z^*=41.3425, r^*=0.3476 et θ=0, en bas le centre du vortex est situé à z^*=41.3425, r^*=3.4756 et θ=π.

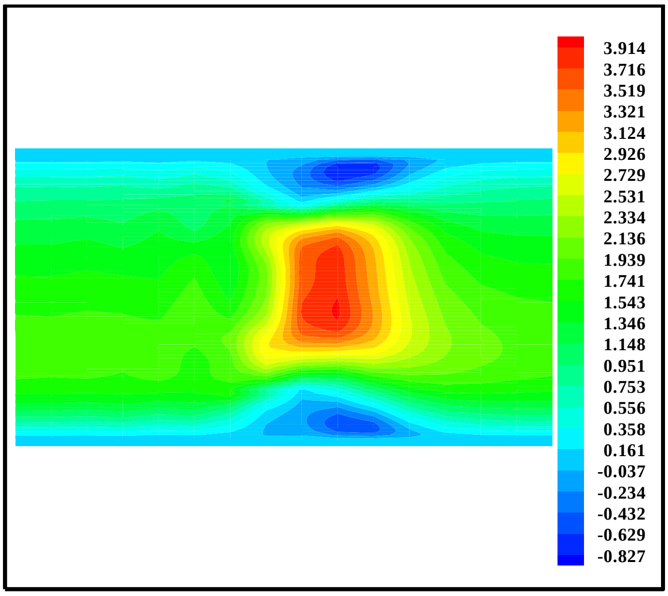


Figure 6.39 Distribution de la vitesse axiale dans le plan verticale qui passe à travers l'axe du conduit autour de la quatrième ailette ; Gr=510000, H^*=0.1875.

6.2.2.2.3 Champ thermique de l'écoulement

La distribution du champ de température en des positions axiales autour de la quatrième ailette transversale est représentée dans la figure 6.40. Avant la section de la quatrième ailette transversal à z^*=38.0872, la température maximale du fluide $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.1395 situé en haut de l'interface paroi-fluide. A z^*=40.6914 (la position axiale de la quatrième ailette transversale) le maximum de la température axiale $T^*_{z\,max}$ diminue à une valeur égale à 0.1056 situé à r^*=0.3110 et θ=0. Juste après la quatrième ailette à z^*=41.9935, $T^*_{z\,max}$ augmente une autre fois à une valeur égale à 0.1284 à l'interface paroi-fluide, à z^*=42.6446 cette température est égale à 0.1353.

La diminution de la température du fluide dans la section axiale de l'ailette transversale est due à la réduction dans le passage du fluide dans cette position cella permit de bien mélanger le fluide chaud avec le fluide relativement froid ce qui donne automatiquement une température maximale du fluide moins importante dans cette position.

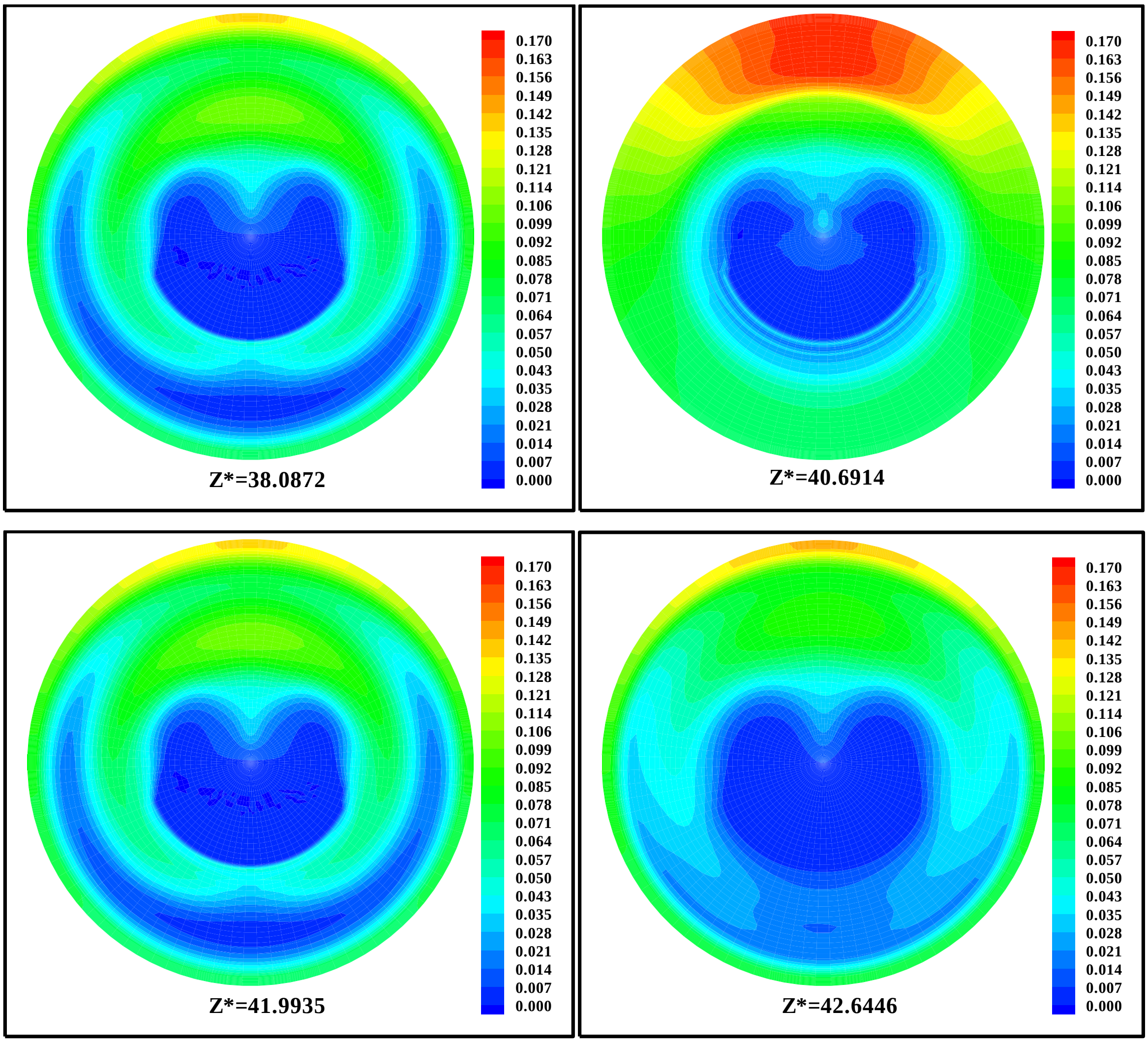


Figure 6.40 Champ de température en des positions axiales autour de la quatrième ailette transversale ; Gr=510000, H^*=0.1875.

Le flux de chaleur et le nombre de Nusselt local aux interfaces sont représentés pour le cas de quatre ailettes transversale et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.12. Dans les figures 6.41 et 6.42, le flux de chaleur et le nombre de Nusselt locale représentés sont ceux à l'interface cylindrique. Il est clair qu'après chaque ailette transversale le flux de chaleur à l'interface cylindrique est relativement augmenté, cella est due au rôle des ailettes transversales qui serrent à mélangé le fluide pour que le nouveau fluide au voisinage du cylindre externe après la section de l'ailette transversale aura une température moins importante, cela permit d'améliorer le transfert thermique. Le flux de chaleur et le nombre de Nusselt à l'interface de la quatrième ailette transversale sont représentés dans les figures 6.43 et 6.44. La variation du nombre de Nusselt local à l'interface de l'ailette suit une variation radiale et angulaire de telle sorte qu'elle prend une valeur maximale égal 16.40 à

r^*=0.8951 et θ= π. Pour la même ailette, le maximum du flux local est égale à 0.315 situé à r^*=1.0044 et (θ=0.9639 et θ=5.3907).

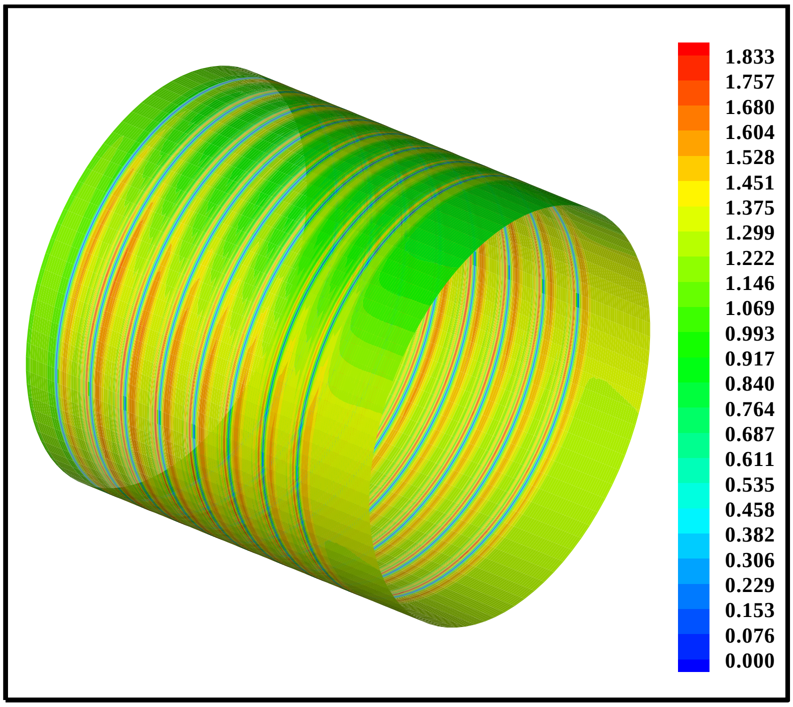


Figure 6.41 Distribution du flux local à l'interface cylindrique du conduit ; Gr=510000, H^*=0.1875.

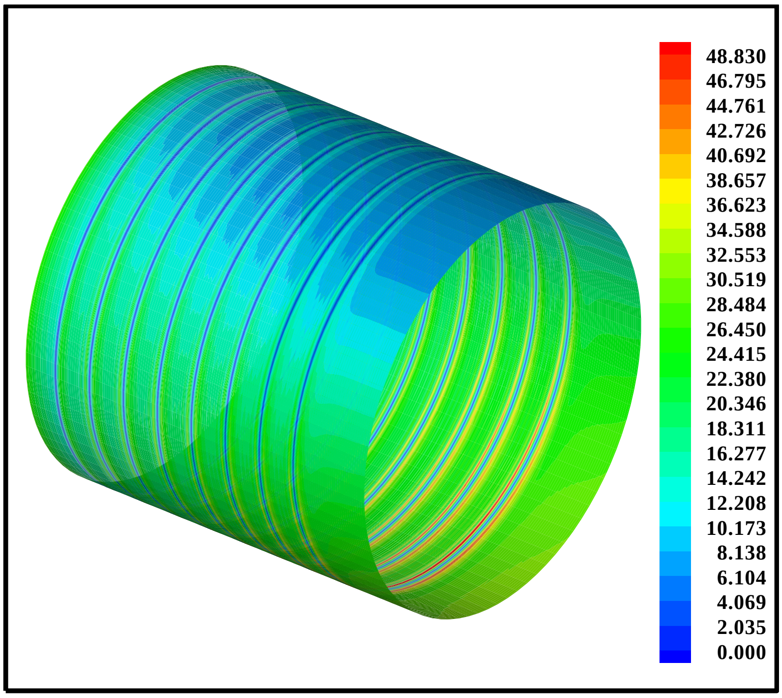


Figure 6.42 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique du conduit ; Gr=510000, H^*=0.1875.

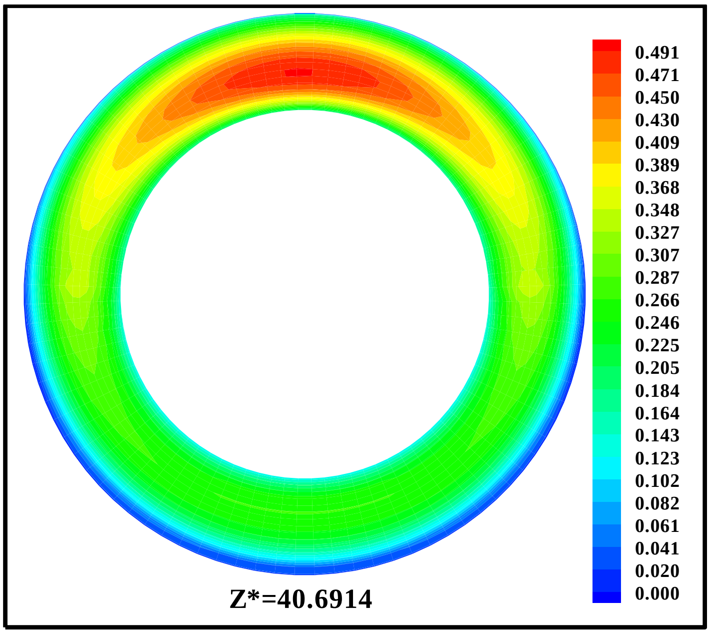


Figure 6.43 Distribution du flux local à l'interface de la quatrième ailette transversale ; Gr=510000, H^*=0.1875.

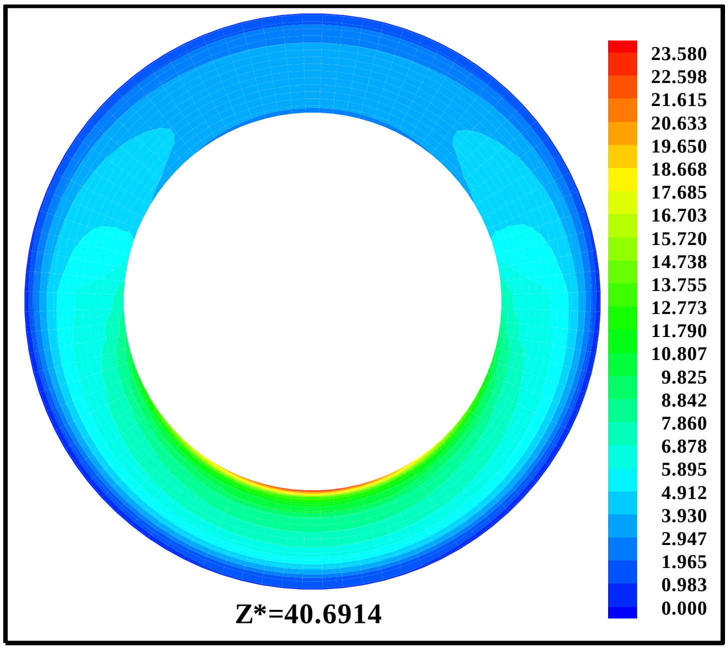


Figure 6.44 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de la quatrième ailette transversale ; Gr=510000, H^*=0.1875.

La variation azimutale du nombre de Nusselt local pour la quatrième ailette transversales en certaines positions radiales : $r^*=(R_i^*-H^*)=0.3125$, $r^*=0.3598$, $r^*=0.3963$, $r^*=0.4329$ et $r^*=0.4695$ et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.1875 est représentée dans la figure 6.45. A r^*=0.3125, le nombre de Nusselt local prend une valeur maximale égale à 21.3970 à $\theta=\pi$. Cette valeur diminue en approchant de la paroi cylindrique et en augmentant vers le haut du conduit.

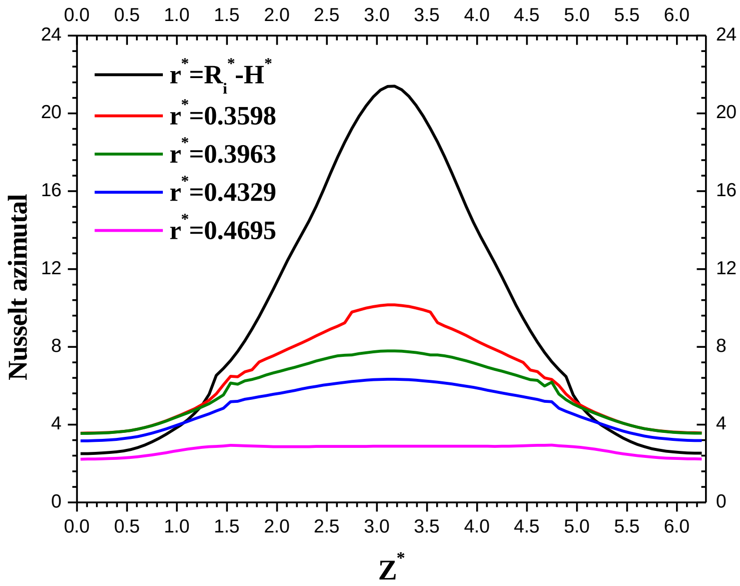


Figure 6.45 Evaluation du nombre de Nusselt local en certaines positions radiales de la quatrième ailette ; Gr=510000, H^*=0.1875.

6.3 Espace annulaire à ailettes

L'espace annulaire étudié dans le chapitre 5 est équipé dans cette partie par des ailettes longitudinales et transversales attachées sur la paroi interne du cylindre extérieur. La chaleur générée par le cylindre externe et les ailettes est transférée à un écoulement de l'eau distillé dans l'espace annulaire. Le fluide s'écoule à une vitesse moyenne égale à 9.88 10^{-2} m/s, le rapport d'aspect du conduit A=217.39, le nombre de Reynolds est fixé à 399.02 alors que le nombre de Prandtl, évalué à la température d'entrée de l'eau, est égal à 8.082.

6.3.1 Espace annulaire à ailettes longitudinales

6.3.1.1 La convection forcée (Gr=0)

A cause de la similarité qualitative des résultats et pour ne pas présenter trop de résultats qui sont physiquement identiques, dans cette partie on va présenter les résultats de la convection forcée pour le cas d'un espace annulaire dont le cylindre externe est équipé par huit ailettes longitudinales avec une hauteur d'ailette H^* égale à 0.24 (48% de l'épaisseur de l'espace annulaire).

6.3.1.1.1 Champ dynamique de l'écoulement

Pour avoir une courte zone d'entrée hydrodynamique, le profil parabolique défini par l'équation (2.26) est imposé à l'entrée de l'espace annulaire. Ce profil permet d'avoir une vitesse nulle sur les parois des cylindres et une vitesse maximale égale à 1.507 située au centre radial de l'espace annulaire. De l'entrée à la sortie, les trois composantes de la vitesse resterons nulles dans les parois des ailettes à cause de la prise en compte d'une viscosité adimensionnelle très élevé (10^{30}) dans le domaine solide, les positions angulaires de ces ailettes sont (θ=0), ($\theta=\pi/4$), ($\theta=\pi/2$), ($\theta=3\pi/4$), ($\theta=\pi$), ($\theta=5\pi/4$), ($\theta=3\pi/2$) et ($\theta=7\pi/4$). La distribution polaire de la vitesse axiale en certaines stations axiales choisies : z^*=2.0380, z^*=7.4728, z^*=14.2663, $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$ et $z^*=L^*$ pour le cas de huit ailettes longitudinales ayant une hauteur H^* égale à 0.24 (48% de l'épaisseur de l'espace annulaire) est illustrée dans la figure 6.46. A cause de l'axisymétrie de l'emplacement des ailettes, la vitesse axiale garde sa forme axisymétrique de l'entrée jusqu'à la sortie. De l'entrée à z^*= 14.2663, le profil de la vitesse axiale se change rapidement en créant huit maximum séparés de la vitesse axiale $V^*_{z\,max}$, dont la position azimutale de chaque vitesse maximale est entre deux ailettes.

A l'entrée la vitesse axiale maximale est égale à 1.507 située au centre de l'espace annulaire à r^*=0.7779. Juste après, le maximum de la vitesse axiale $V^*_{z\,max}$ augmente rapidement à une valeur maximale égale à 1.672 située à z^*=7.4728, r^*=0.8013 et huit positions azimutales : $\theta=\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$, $7\pi/8$, $9\pi/8$, $11\pi/8$, $13\pi/8$ et $15\pi/8$. Après, $V^*_{z\,max}$ subit une légère diminution jusqu'à z^*=33.2880. A z^*=33.2880, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.636 situé à r^*=0.8325. Ensuite $V^*_{z\,max}$ augmente une deuxième fois mais d'une façon moins intense jusqu'à z^*=118.8859. A z^*=118.8859, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.658 situé à r^*=0.8325. Après cette position axiale, la vitesse axiale est invariante jusqu'à la sortie de l'espace annulaire.

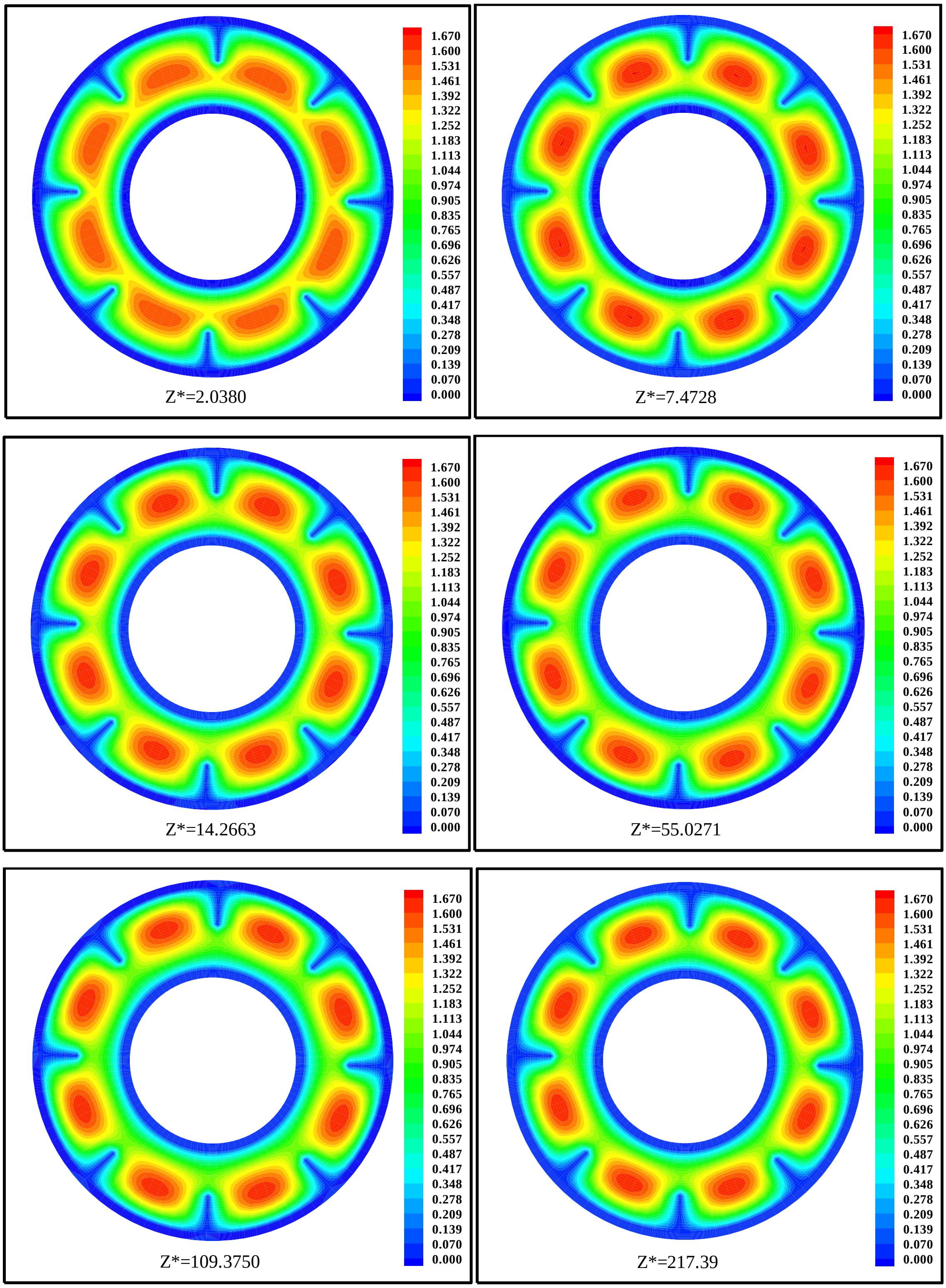


Figure 6.46 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.24.

6.3.1.1.2 Champ thermique de l'écoulement

A l'entrée de l'espace annulaire ailetté, la température du fluide est uniforme. Après, la chaleur dégagée par le cylindre externe et la paroi des ailettes impose un gradient de température orienté vers le cylindre interne.

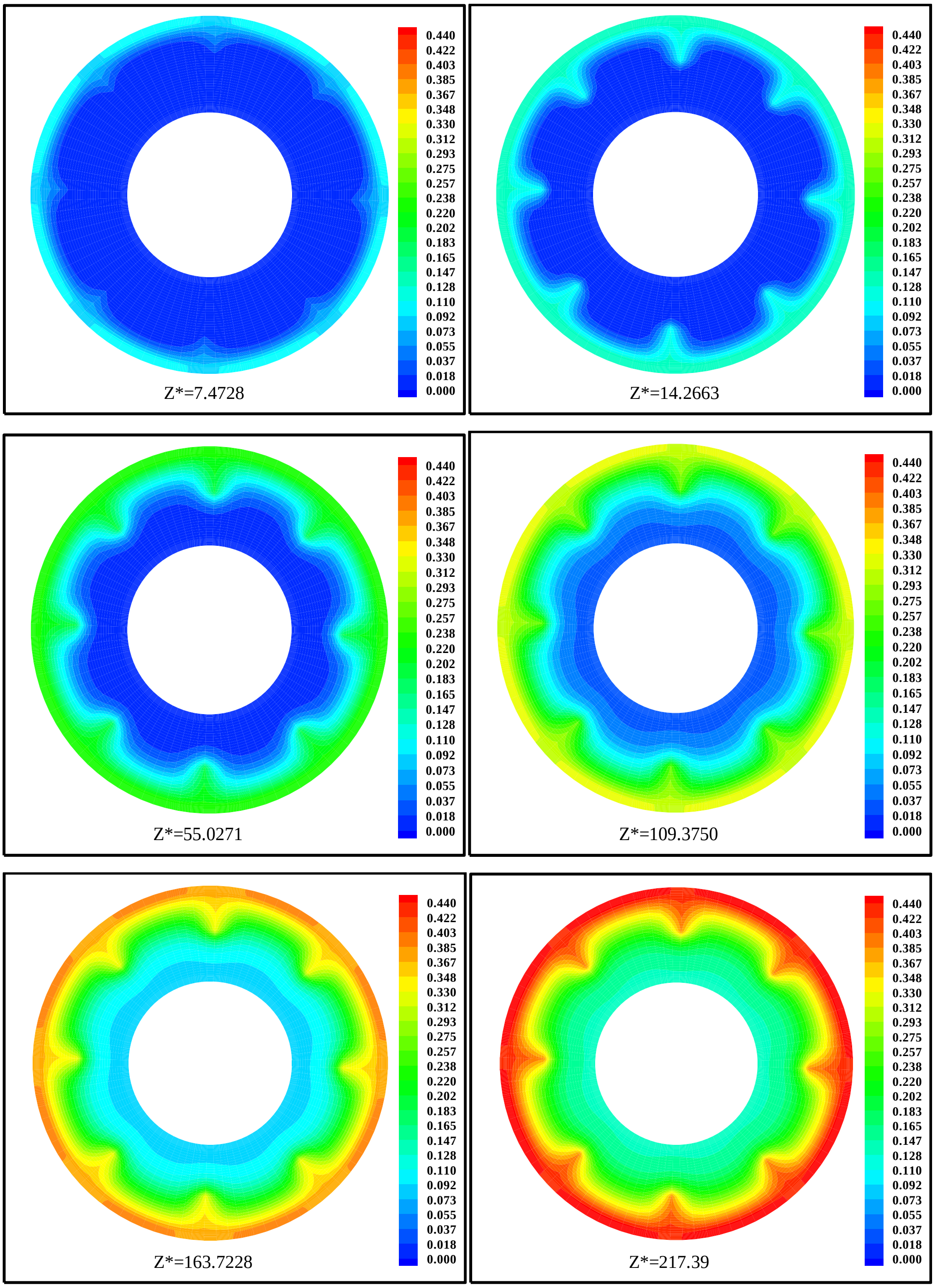


Figure 6.47 Champ de température dans des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.24.

L'absence d'un écoulement transversal est due à la convection purement forcée, cela permit d'obtenir une distribution axisymétrique des isothermes. La distribution polaire du champ de température en certaines stations axiales choisies : z^*=7.4728, z^*=14.2663, $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$, $z^*=3L^*/4$ et $z^*=L^*$ de la convection forcée pour le cas de huit ailettes longitudinales ayant une hauteur H^* égale à 0.24 (48% de l'épaisseur de l'espace annulaire) est illustrée dans la figure 6.47. Dans chaque section axiale, les isothermes du fluide prennent une température minimale sur la paroi extérieure du cylindre interne, cette température augmente de plus en plus en s'approchant aux parois des ailettes et à la paroi intérieure du cylindre externe. A z^*=7.4728, la température maximale du fluide $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.09695 située à r^*=1.044 et $\theta=\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$, $7\pi/8$, $9\pi/8$, $11\pi/8$, $13\pi/8$ et $15\pi/8$. Cette température augmente à 0.1349, 0.2285, 0.3106 et 0.3807 dans les positions axiales z^*=14.2663, $z^*=L^*/4$, $z^*=L^*/2$, $z^*=3L^*/4$ respectivement. A la sortie de l'espace annulaire, la température du fluide atteint son maximum absolu qui est égal à 0.4414, dans cette position la température de chaque ailette varie de 0.3892 à 0.4311.

6.3.1.1.3 Flux thermique adimensionnel aux interfaces

Le flux de chaleur transféré au fluide à travers l'interface du cylindre externe de l'espace annulaire et l'interface des ailettes dans le cas de la convection forcée est axisymétrique. Sur l'interface paroi-fluide du cylindre externe, à une section donnée le flux de chaleur prend une valeur minimale égale à 0 sur l'interface (cylindre externe-ailette) et une valeur maximale entre chaque deux ailettes. Dans la figure 6.48, le flux de chaleur cylindrique est illustré pour le cas de huit ailettes transversales ayant une hauteur H^* égale à 0.24 (48% de l'épaisseur de l'espace annulaire). De l'entrée jusqu'à la sortie, le flux de chaleur local du cylindre externe subit une diminution continue varie de 1.441 à l'entrée jusqu'à 1.180 à la sortie de l'espace annulaire. A une section choisie le flux de chaleur local prend une valeur maximale dans les positions azimutales suivantes $\theta=\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$, $7\pi/8$, $9\pi/8$, $11\pi/8$, $13\pi/8$ et $15\pi/8$.

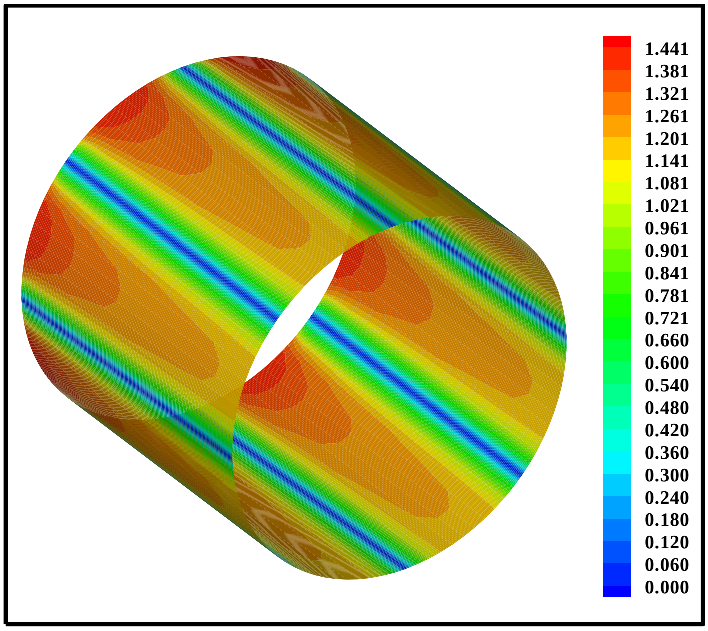


Figure 6.48 Distribution du flux local à l'interface du cylindre externe pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.24.

Le flux de chaleur dégagé par la surface de chaque ailette dans le cas de la convection forcée subit une variation radiale et axiale dont le maximum de ce flux comme il est présenté dans la figure 6.49 est égale 4.082 situé à z^*=217.39 et r^*= 0.8035.

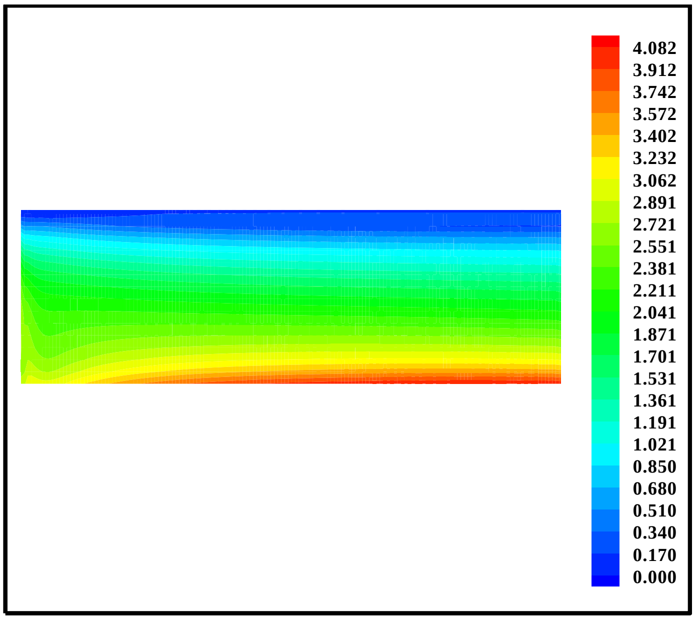


Figure 6.49 Distribution du flux local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.24.

6.3.1.1.4 Nombre de Nusselt

La variation du nombre de Nusselt à l'interface du cylindre externe pour le cas de huit ailettes transversales ayant une hauteur H^* égale à 0.24 (48% de l'épaisseur de l'espace annulaire) est illustrée dans la figure 6.50. Le nombre de Nusselt local à l'interface (cylindre externe-ailette) est nul à cause du flux de chaleur inexistant vers le fluide dans cette position, si non le nombre de Nusselt local subit une diminution axiale continue de l'entrée jusqu'à la sortie varie de 12.95 à l'entrée jusqu' 5.864 à la sortie de l'espace annulaire. Dans la direction azimutale, le nombre de Nusselt local prend une valeur minimale égale à 0 sur l'interface (cylindre externe-ailette) et une valeur maximale entre chaque deux ailettes dans les positions azimutales suivantes $\theta=\pi/8$, $3\pi/8$, $5\pi/8$, $7\pi/8$, $9\pi/8$, $11\pi/8$, $13\pi/8$ et $15\pi/8$.

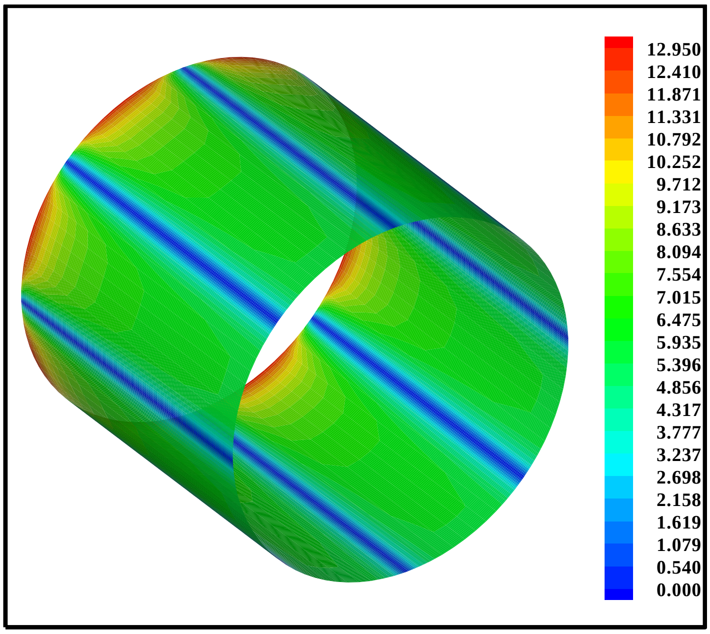


Figure 6.50 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface du cylindre externe pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.24.

Le nombre de Nusselt local d'une ailette longitudinale pour le cas de la convection forcée subit une variation suivant la direction radiale et axiale. Dans la direction axiale, le nombre de Nusselt local diminue en s'approchant de la sortie du conduit tandis que dans la direction radiale, le nombre de Nusselt local augmente en s'éloignant de l'interface (cylindre externe-ailette), cella est due à l'augmentation du flux de chaleur dans cette direction.

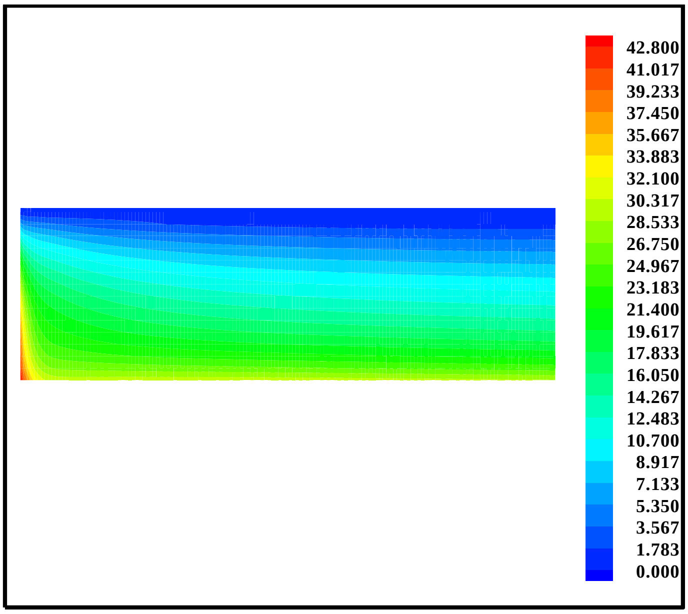


Figure 6.51 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=0, H^*=0.24.

Dans la figure 6.51, une présentation du nombre de Nusselt local d'une ailette longitudinale est illustrée pour le cas de huit ailettes transversales ayant une hauteur H^* égale à 0.24 (48% de l'épaisseur de l'espace annulaire).

La comparaison de la convection forcée entre un conduit horizontal ailetté et un espace annulaire équipé par des ailettes longitudinales montre que la chaleur transférée par les ailettes dans le cas d'un espace annulaire est beaucoup plus importante que celle d'un conduit horizontale, cella est due à l'augmentation de la surface d'échange entre le fluide et les ailettes.

6.3.1.2 La convection mixte (Gr=12801)

La convection mixte dans un espace annulaire muni d'ailettes longitudinales est traitée dans cette partie. Les champs dynamiques et thermiques sont représentés pour le cas de huit ailettes ayant une hauteur H^* est égale à 0.24 (48% de l'épaisseur de l'espace annulaire). L'effet d'augmenter le nombre et la hauteur des ailettes est discuté dans le traitement du nombre de Nusselt.

6.3.1.2.1 L'écoulement secondaire

La chaleur générée dans les parois des ailettes et du cylindre externe par effet Joule pousse la force de poussée thermique a créé un mouvement transversale dans le plan (r^*, θ) qui est influencé par la variation de la viscosité du fluide avec la température. Ce mouvement transversal est inexistant à l'entrée, ensuite il commence à être de plus en plus important jusqu'à une valeur maximale puis il subit une diminution dans son intensité jusqu'à la sortie de l'espace annulaire. Dans la figure 6.52, nous représentons le champ des vecteurs de l'écoulement secondaire pour le cas d'un espace annulaire équipé par huit ailettes longitudinales attachées sur la paroi interne du cylindre extérieur, la hauteur H^* des ailettes utilisées est égale à 0.24. Le mouvement transversal est expliqué comme suit : le fluide chaud se déplace le long de la paroi intérieure du cylindre externe du bas ($\theta=\pi$) vers le haut ($\theta=0$), ce déplacement est bloqué par les parois des ailettes longitudinales en lui changeant la direction vers le cylindre interne. Après, une partie du fluide continue le déplacement vers le haut sous l'effet de la force de poussée thermique tandis qu'une autre partie est transportée vers le bas avec le fluide relativement froid qui redescend au voisinage du cylindre interne. Des cellules contrarotatives sous chaque ailette longitudinale sont créées par ce mouvement, le nombre de ces cellules dépend des ailettes longitudinales utilisées, le plan verticale qui passe à travers les angles $(\theta = 0)$ et $(\theta = \pi)$ est un plan de symétrie.

Dans le tableau 6.13, nous présentons la valeur de la vitesse azimutale maximale avec les trois cordonnés de sa position et dans le tableau 6.14, nous présentons la position du centre des cellules contrarotatives dans le coté droit de l'espace annulaire à la section axiale où l'écoulement secondaire est plus intense.

Tableau 6.13 : Vitesse azimutale maximale en certaines positions axiales (8 ailettes) ; $Gr=510000$, $H^*=0.24$.

	$V^*_{\theta\,max}$	0.0046	0.0163	0.0171	0.0169	0.0164	0.0169
Position	Z^*	11.5489	55.0272	83.5598	109.375	163.723	217.39
	r^*	1.0044	0.9731	0.9732	0.9732	0.9888	0.9888
	θ	1.8921	1.8921	1.8921	1.8921	1.8921	1.8921

Tableau 6.14 : Centre des cellules contrarotatives à $z^*=83.5598$.

		Cel 1	Cel 2	Cel 3	Cel 4
Position	z^*	83.5598	83.5598	83.5598	83.5598
	r^*	1.0044	0.8638	0.8170	0.8794
	θ	0.3213	1.1070	1.8921	2.6775

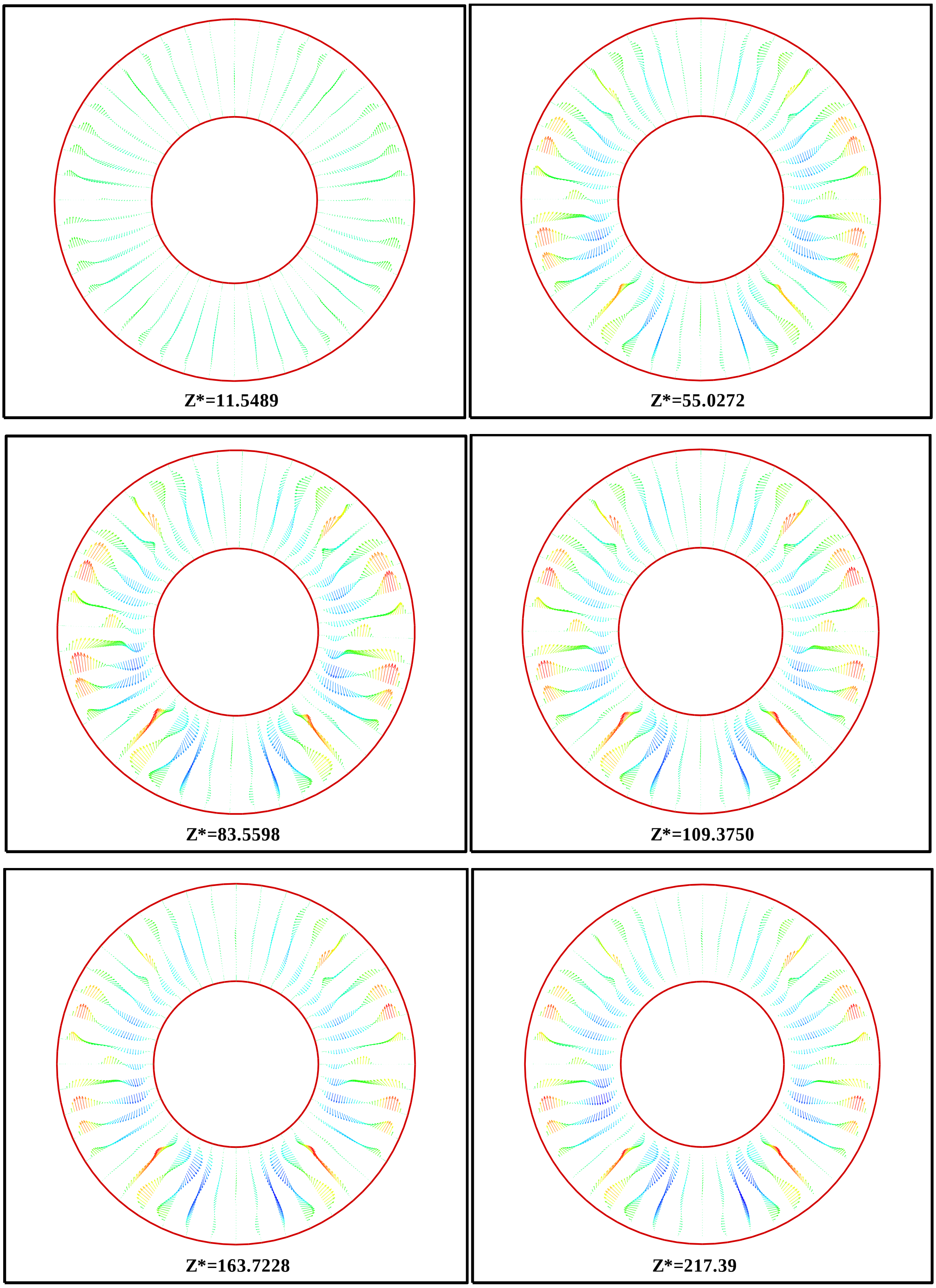


Figure 6.52 Développement de l'écoulement secondaire dans des positions axiales sélectionnées pour le cas de huit ailettes ; Gr=12801, H^*=0.24.

6.3.1.2.2 L’écoulement axial

A l’entrée l’écoulement a un profile axisymétrique définie par l’équation (2.26), la vitesse axiale est nulle sur les parois des cylindres et des ailettes et elle prend une valeur maximale égale à 1.507 située au centre radial de l'espace annulaire à r^*=0.7779, l’utilisation de ce profile réduit la zone d’entrée hydrodynamique. Ensuite, l’écoulement axial est influencé par la génération du mouvement transversal et par la variation de la viscosité en fonction de la température qui provoquent une variation angulaire de la vitesse axiale expliquée comme suit : comme la viscosité thermique est inversement proportionnelle à la température du fluide et la vitesse axiale augmente avec la diminution de la viscosité, automatiquement on va avoir une vitesse axiale relativement élevé dans la partie supérieur de l’espace annulaire où la température du fluide est supérieur à celle de la partie inférieur. Dans la figures 6.53 on représente une illustration de la variation de la vitesse axiale en des positions axiales choisies pour le cas de huit ailettes ayant une hauteur H^* égale à 0.24.

Dans le tableau 6.15, nous présentons la valeur de la vitesse axiale maximale avec les trois cordonnés de sa position et la viscosité dynamique adimensionnelle dans cette position.

Tableau 6.15 : Vitesse azimutale maximale en certaines positions axiales (huit ailettes) ; Gr=510000, H^*=0.24.

z^*	11.5489	55.0272	83.5598	109.3750	163.7228	217.39
$V^*_{z\,max}$	1.671	1.690	1.787	1.885	2.040	2.031
$r^*(V^*_{z\,max})$	0.8013	0.8325	0.8169	0.8013	0.7700	0.7544
$\theta\,(V^*_{z\,max})$	0.4641	0.4641	0.3927	0.3927	0.3927	0.3927
$\mu^*(V^*_{z\,max})$	1.017	0.6959	0.5142	0.4220	0.3198	0.2765

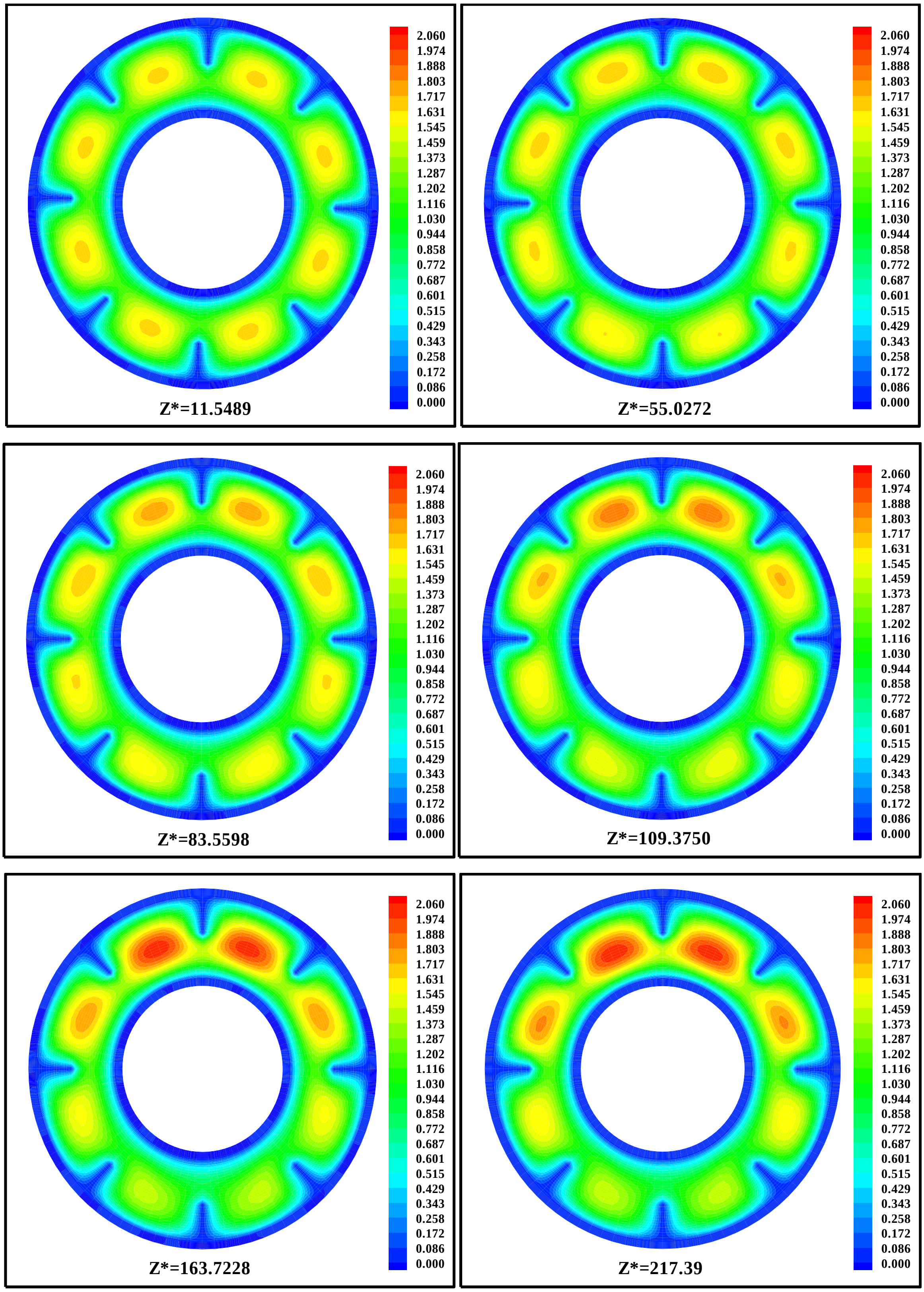


Figure 6.53 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=12801, H^*=0.24.

6.3.1.2.3 Champ de température

La distribution angulaire du champ de température dans un espace annulaire en présence de huit ailettes longitudinales en des positions axiales choisies est représentée dans la figure 6.54.

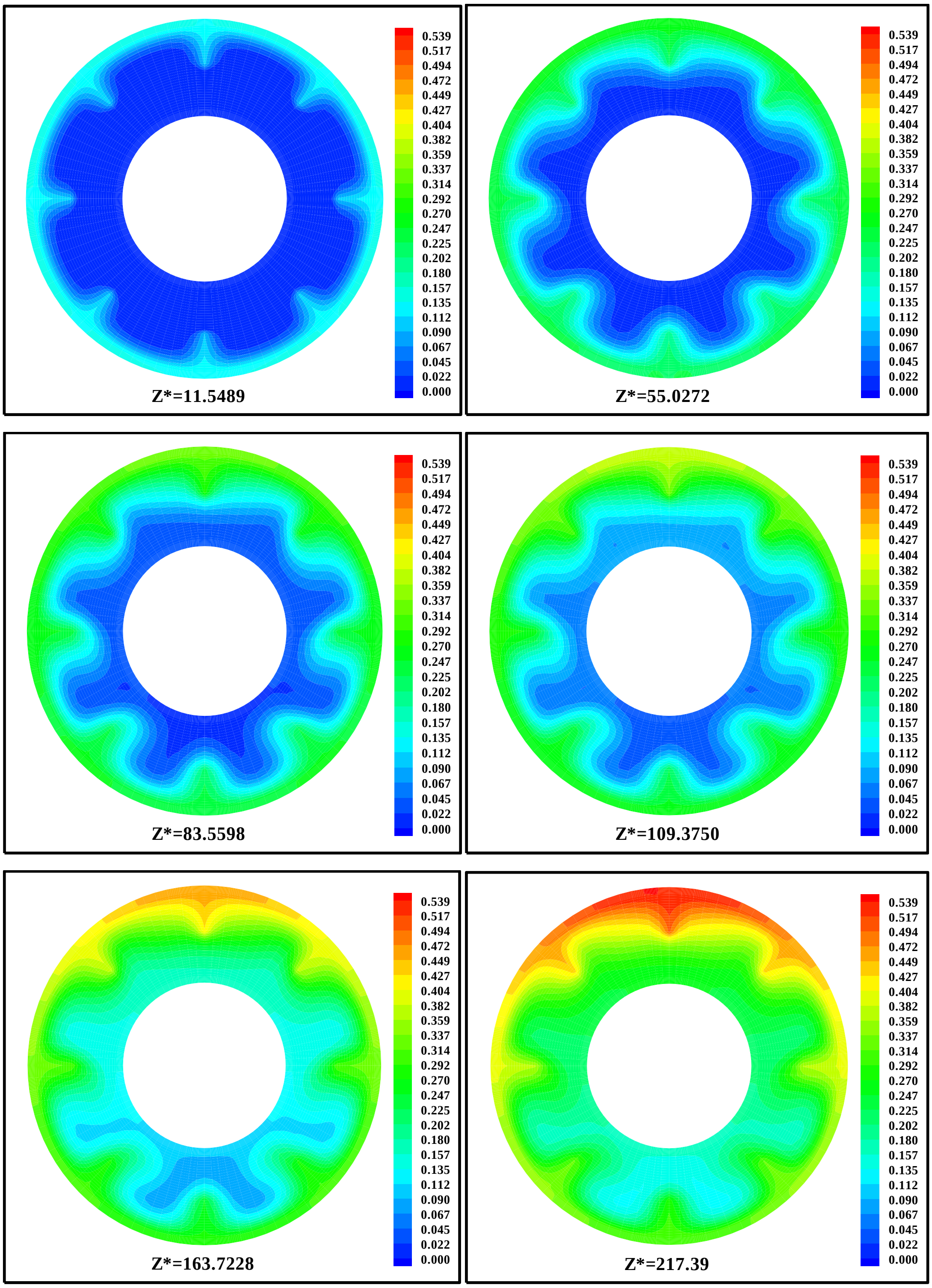


Figure 6.54 Champ de température dans des positions axiales choisies Pour le cas de huit ailettes ; Gr=12801, H^*=0.24.

A z^*=11.5489, la distribution du champ de température ressemble à celle de la convection forcée, cette distribution perde de plus en plus sa forme axisymétrique en s'éloignant de l'entrée de telle sorte que la température maximale du fluide est située à l'interface fluide-paroi cylindre externe de l'espace annulaire à r^*=1.0435 et θ=0 juste à droite et à gauche de l'ailette verticale placée à θ=0. A z^*=11.5489, la température maximale est égale à 0.1301, cette température augmente à 0.2569, 0.3204, 0.3728, 0.4651 et 0.5356 pour $z^*= L^*/4$, z^*= 83.5598, $z^*= L^*/2$, $z^*= 3L^*/4$ et $z^*= L^*$ respectivement. La température minimale du fluide est au sein de la partie inferieure à θ = π. A $z^*= L^*/4$, la position de la température minimale est située à r^* = 0.5513. Cette position se déplace à r^* = 0.5670, r^* = 0.5982, r^* = 0.6294 et r^* = 0.6450 pour z^*= 83.5598, $z^*= L^*/2$, $z^*= 3L^*/4$ et $z^*=$ L^* respectivement.

Dans la figure 6.23, nous représentons la variation de la température axiale au bout de chaque ailette à r^*=0.8169. Il est clair que la température de l'ailette verticale placée à θ=0 est la plus élevée suivie par l'ailette placée à θ=π/4, π/2, 3π/4 et π.

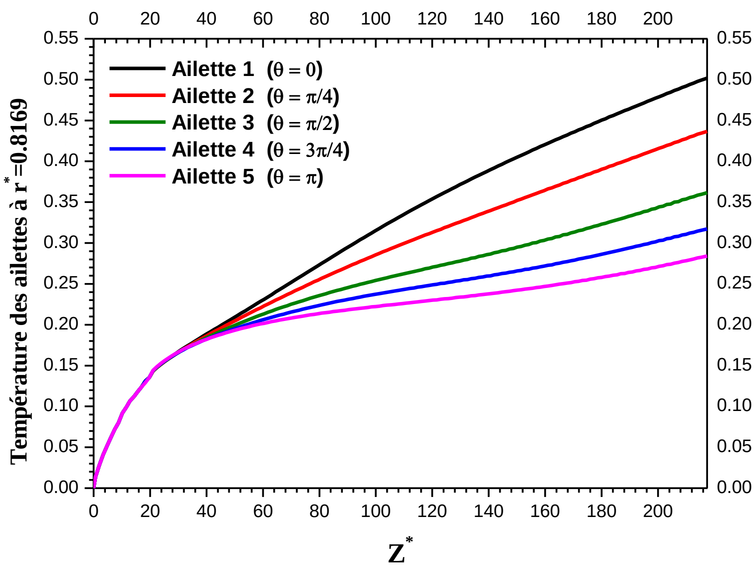


Figure 6.55 Variation axiale de la température des ailettes à r^*=0.8169, Gr=12801, H^*=0.24.

6.3.1.2.4 Flux thermique adimensionnel aux interfaces

Le flux de chaleur transféré au fluide à travers l'interface du cylindre externe de l'espace annulaire dans le cas de la convection mixte a une variation axiale et azimutale de l'entrée jusqu'à la sortie, le plan vertical qui passe par l'axe des cylindres est un plan de symétrie pour cette variation. A $\theta=0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π, $5\pi/4$, $3\pi/2$ et $7\pi/4$, le flux de chaleur cylindrique est nul car dans ces positions le cylindre externe est en contacte avec les ailettes. En dehors de ces positions azimutales, à une section donnée le flux de chaleur cylindrique prend une valeur minimale en haut du cylindre et une valeur maximale dans la partie inférieure à l'extrémité de l'ailette située à $\theta=\pi$. Dans la figure 6.56 le flux de chaleur cylindrique est illustré pour le cas de huit ailettes transversales ayant une hauteur d'ailette H^* égale à 0.24. A la sortie, le flux de chaleur local du cylindre externe prend une valeur maximale égale à 2.038 à $\theta=2.8203$.

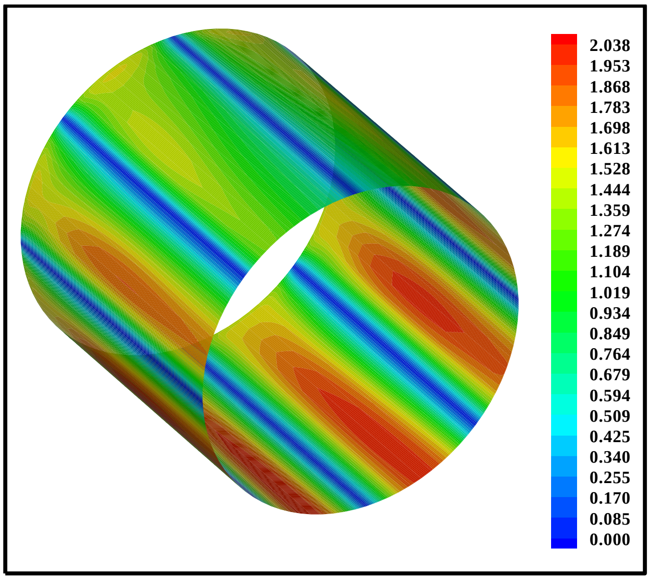
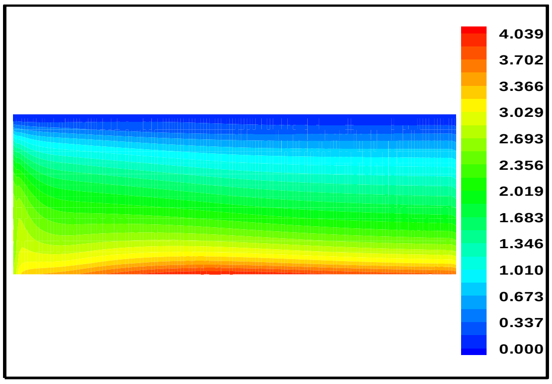
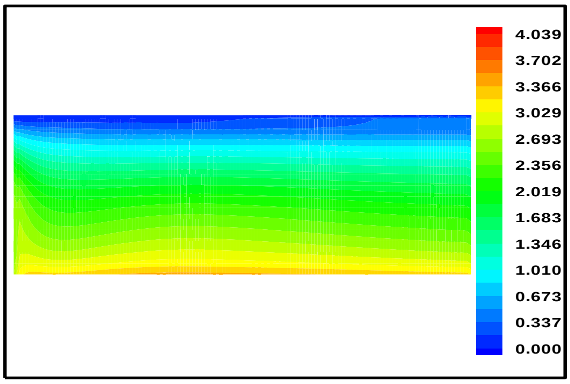


Figure 6.56 Distribution du flux local à l'interface du cylindre externe pour le cas de huit ailettes ; Gr=12801, $H^*=0.24$.

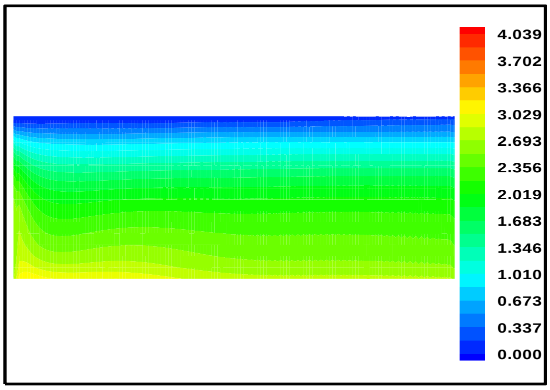
Le flux de chaleur dégagé par les ailettes longitudinales placées dans le coté droit du conduit : ($\theta=0$), ($\theta=\pi/4$), ($\theta=\pi/2$), ($\theta=3\pi/4$) et ($\theta=\pi$) et représenté dans la figure 6.57. Le flux de chaleur prend une valeur maximale égale à 4.039 sur l'ailette placée à ($\theta=0$), à $z^*=93.0707$ et $r^*=0.8169$.



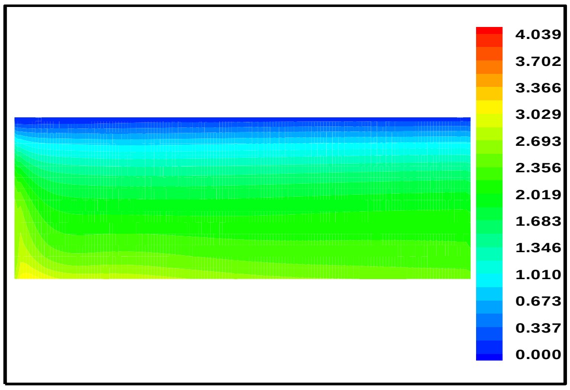
Ailette placée à (θ=0)



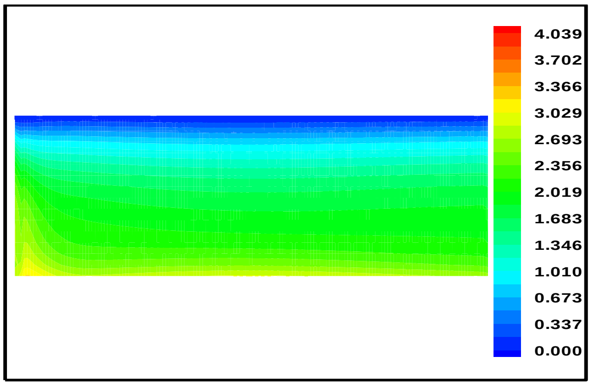
Ailette placée à (θ=π/4)



Ailette placée à (θ=π/2)



Ailette placée à (θ=3π/4)



Ailette placée à (θ=π)

Figure 6.57 Distribution du flux local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=12801, H^*=0.24.

6.3.1.2.5 Nombre de Nusselt

La variation du nombre de Nusselt à l'interface du cylindre externe pour le cas de huit ailettes transversales ayant une hauteur d'ailette H^* égale à 0.24 est illustrée dans la figure 6.58. Le nombre de Nusselt local à l'interface (cylindre externe-ailette) est nul à cause du flux de chaleur inexistant dans cette position. En dehors de ces positions azimutales, la variation angulaire du nombre de Nusselt local prend une valeur minimale en haut de l'interface cylindrique et une valeur maximale en bas de l'interface cylindrique à coté de l'ailette située à $\theta=\pi$. A la sortie de l'espace annulaire, le nombre de Nusselt local du cylindre externe prend une valeur maximale égale à 48.02 à $\theta=2.8203$.

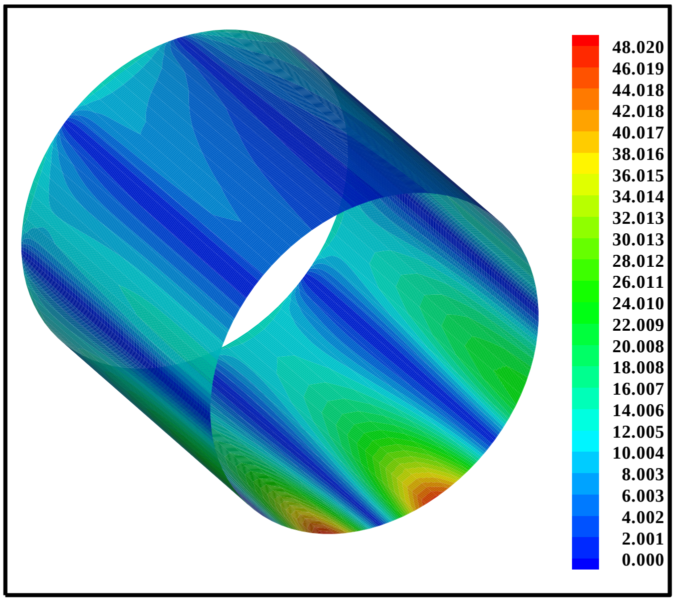
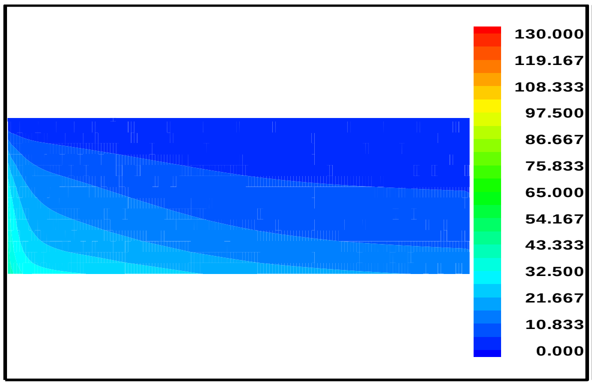
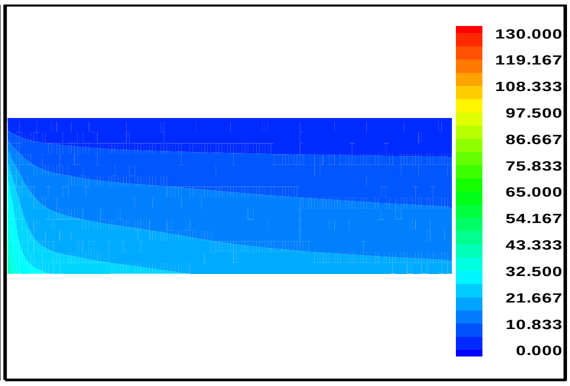


Figure 6.58 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface du cylindre externe pour le cas de huit ailettes ; Gr=12801, $H^*=0.24$.

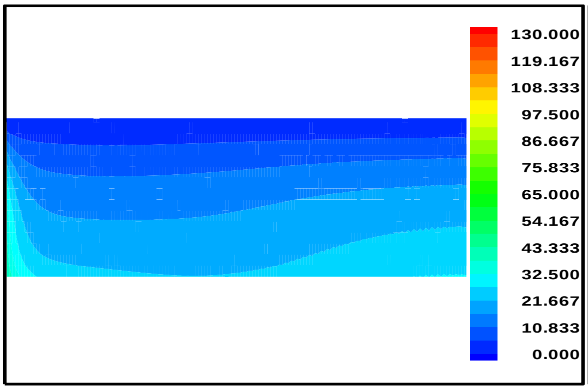
Le nombre de Nusselt des ailettes longitudinales placées dans le coté droit du conduit : ($\theta=0$), ($\theta=\pi/4$), ($\theta=\pi/2$), ($\theta=3\pi/4$) et ($\theta=\pi$) et représenté dans la figure 6.59. Le nombre de Nusselt prend une valeur maximale égale à 130.00 sur l'ailette placée à ($\theta=\pi$), à $z^*=217.39$ et $r^*=0.8169$.



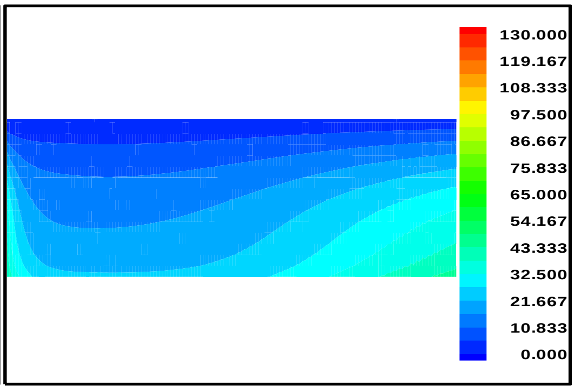
Ailette placée à (θ=0)



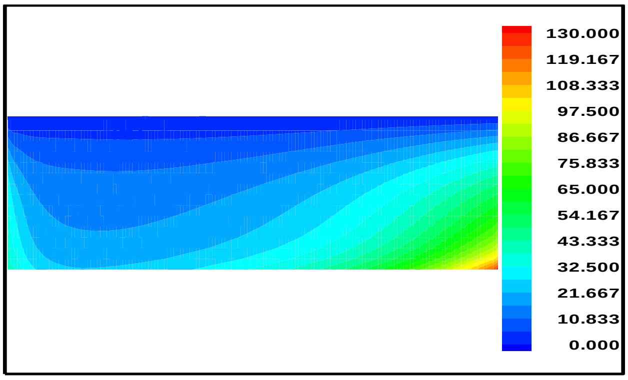
Ailette placée à (θ=π/4)



Ailette placée à (θ=π/2)



Ailette placée à (θ=3π/4)



Ailette placée à (θ=π)

Figure 6.59 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de chaque ailette pour le cas de huit ailettes ; Gr=12801, H^*=0.24.

L'effet d'augmenter la hauteur des ailettes H^* de 0.12 à 0.24 sur le Nusselt axial est représenté dans les figures 6.60-6.62. Dans le cas de deux ailettes verticales, l'écart dans le nombre de Nusselt axial prend une valeur maximale égale à 3.1581 à la sortie de l'espace annulaire, cette valeur augmente à 21.4046 et 33.1948 pour le cas de quatre et huit ailettes respectivement. Les nombres de Nusselt moyen pour les cas : deux ailettes verticales, quatre et huit ailettes pour une hauteur d'ailette égale à 0.12 sont : 16.8810, 27.1668 et

41.8920.Pour une hauteur d'ailette égale à 0.24, les nombres de Nusselt moyen augmentent à 18.9915, 35.3519 et 60.0867 respectivement.

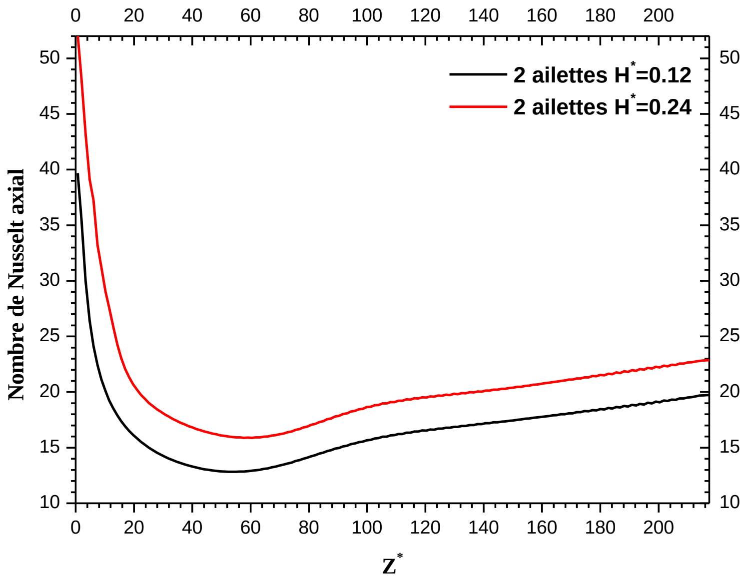


Figure 6.60 Influence de la hauteur d'ailette sur le nombre de Nusselt axial pour le cas de deux ailettes verticales (Gr=12801).

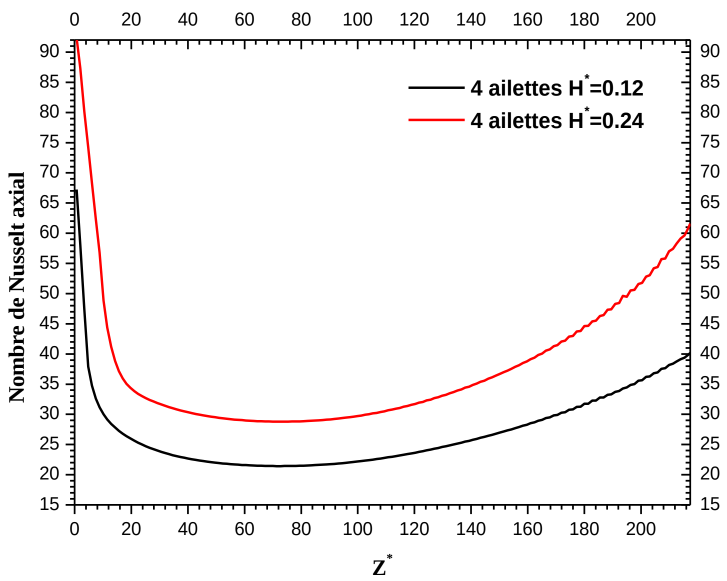


Figure 6.61 Influence de la hauteur d'ailette sur le nombre de Nusselt axial pour le cas de quatre ailettes (Gr=12801).

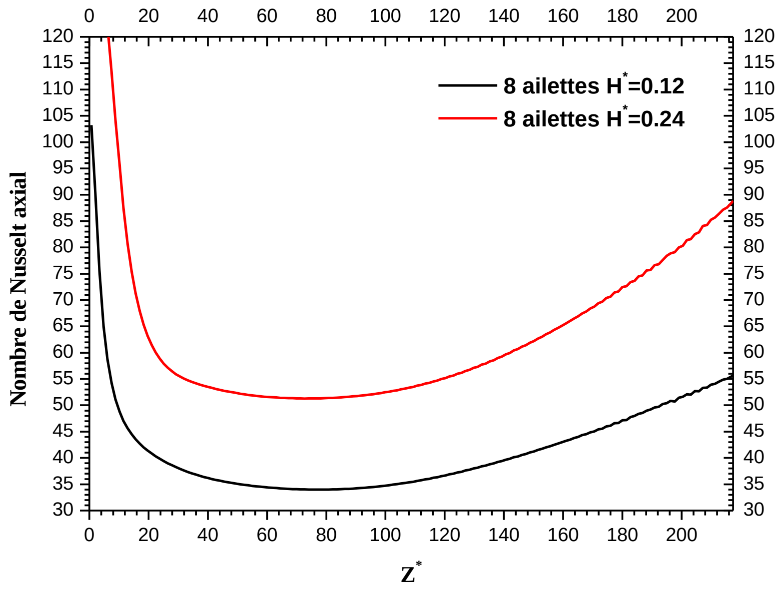


Figure 6.62 Influence de la hauteur d'ailette sur le nombre de Nusselt axial pour le cas de huit ailettes (Gr=12801).

6.3.2 Espace annulaire à ailettes transversales

6.3.2.1 La convection forcée (Gr=0)

La convection forcée dans un espace annulaire à ailettes transversales est traitée pour le cas de huit ailettes transversales. A cause de la similarité qualitative des champs thermiques et dynamiques autour des ailettes, les résultats présentés sont ceux de la première et la dernière ailette.

6.3.2.1.1 Champ dynamique de l'écoulement

A l'entrée de l'espace annulaire, l'écoulement axial à un profil parabolique défini par l'équation (2.26). Ce profil permet d'avoir une vitesse nulle sur les parois des cylindres et une vitesse maximale égale à 1.507 située au centre radial de l'espace annulaire. Les positions axiales des ailettes transversales sont : z^*=19.7011, z^*=41.4402, z^*=63.1793, z^*=84.9184, z^*=106.6576, z^*=128.3967, z^*=150.1359 et z^*=171.8750. De l'entrée à z^*=18.3424, le profil de la vitesse axiale est similaire à celui d'un espace annulaire non ailetté. Juste avant la section axiale de l'ailette transversale à z^*=18.3424, un mouvement radial du fluide est créé, ce mouvement permet de changer la direction de la vitesse axiale face à la paroi de l'ailette vers le cylindre interne pour qu'il passe à z^*=19.7011 (position axiale de l'ailette transversale) entre le cylindre interne et l'ailette. Après l'ailette transversale, le mouvement radial du fluide est orienté une deuxième fois mais dans ce cas vers le cylindre externe pour que le fluide retourne à l'état initial occupé avant l'ailette. La diminution dans la section de passage entre le cylindre interne et chaque ailette transversale est accompagnée par une augmentation importante dans la vitesse axiale dans cette position. La distribution polaire de l'écoulement axiale en certaines positions autour de la première ailette transversale à z^*=18.3424, z^*=19.7011, z^*=21.0598 et z^*=22.4183 pour le cas d'une hauteur d'ailette égale à H^*=0.24 est illustrée dans la figure 6.63.

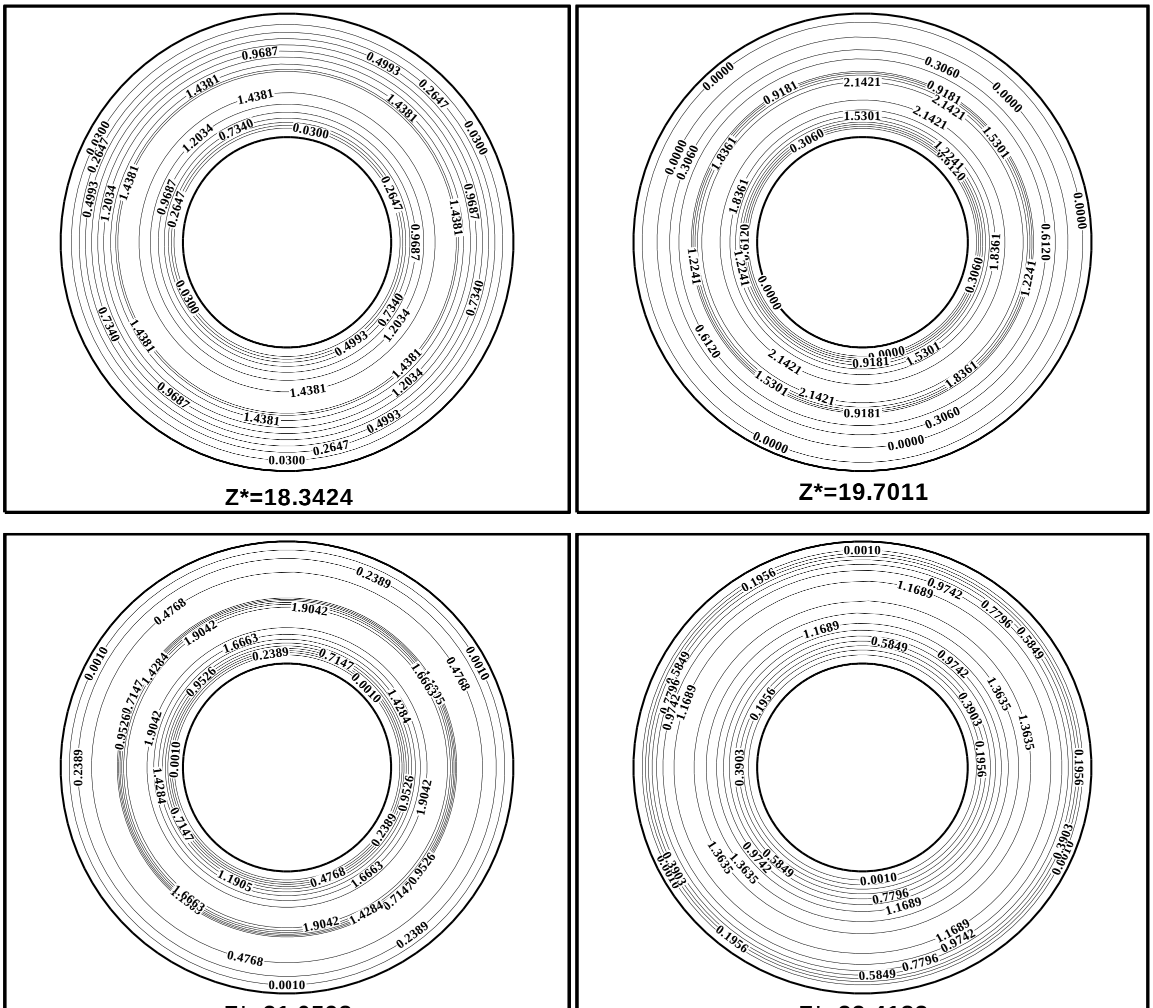


Figure 6.63 Distribution polaire de la vitesse axiale en différentes positions axiales autour de la première ailette transversale ; Gr=0, H^*=0.24.

A l'entrée, la vitesse axiale maximale est égale à 1.507 situé à r^*=0.7779 ensuite le maximum de la vitesse axiale subit une légère diminution jusqu'à z^*=12.9076. Entre

z^*=12.9076 et z^*=18.3424, $V^*_{z\,max}$ augmente lentement. A z^*=19.7011 (la position axiale de la première ailette transversale) le maximum de la vitesse axiale augmente brusquement à une valeur $V^*_{z\,max}$ = 2.292 situé à r^*=0.7231.Juste après, la vitesse axiale retourne à son état initial avant l'ailette. A z^*=21.0598, $V^*_{z\,max}$ est égale à 2.131, cette valeur diminue à 1.406 à z^*=22.4183.

L'augmentation rapide de la vitesse axiale dans la section de l'ailette transversale est due à l'emplacement de cette dernière qui réduit la section de passage du fluide ce qui augmente la vitesse axiale dans cette position.

6.3.2.1.2 Champ thermique de l'écoulement

La distribution du champ de température en des positions axiales autour de la huitième ailette transversale est représentée dans la figure 6.64. Juste avant la huitième ailette à z^*=170.5163, la température maximale du fluide $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.4093 situé à l'interface paroi-fluide du cylindre externe. A z^*=171.8750 (la position axiale de la huitième ailette transversale) le maximum de la température axiale $T^*_{z\,max}$ diminue à une valeur égale à 0.1918 situé à r^*=0.8169. Juste après la huitième ailette à z^*=173.2337 $T^*_{z\,max}$ augmente une autre fois à une valeur égale à 0.414 situé à l'interface paroi-fluide du cylindre externe, à z^*=174.5924, $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.415.

Le flux de chaleur et le nombre de Nusselt local à l'interface de la huitième ailette sont représentés respectivement dans les figures 6.65 et 6.66. La distribution du flux local à l'interface de l'ailette est axisymétrique elle prend une valeur maximale égale à 0.2426 situé à r^*=0.8638, tandis que la valeur maximale du nombre de Nusselt local est égale à 2.249 situé au bout de l'ailette à r^*=0.8170.

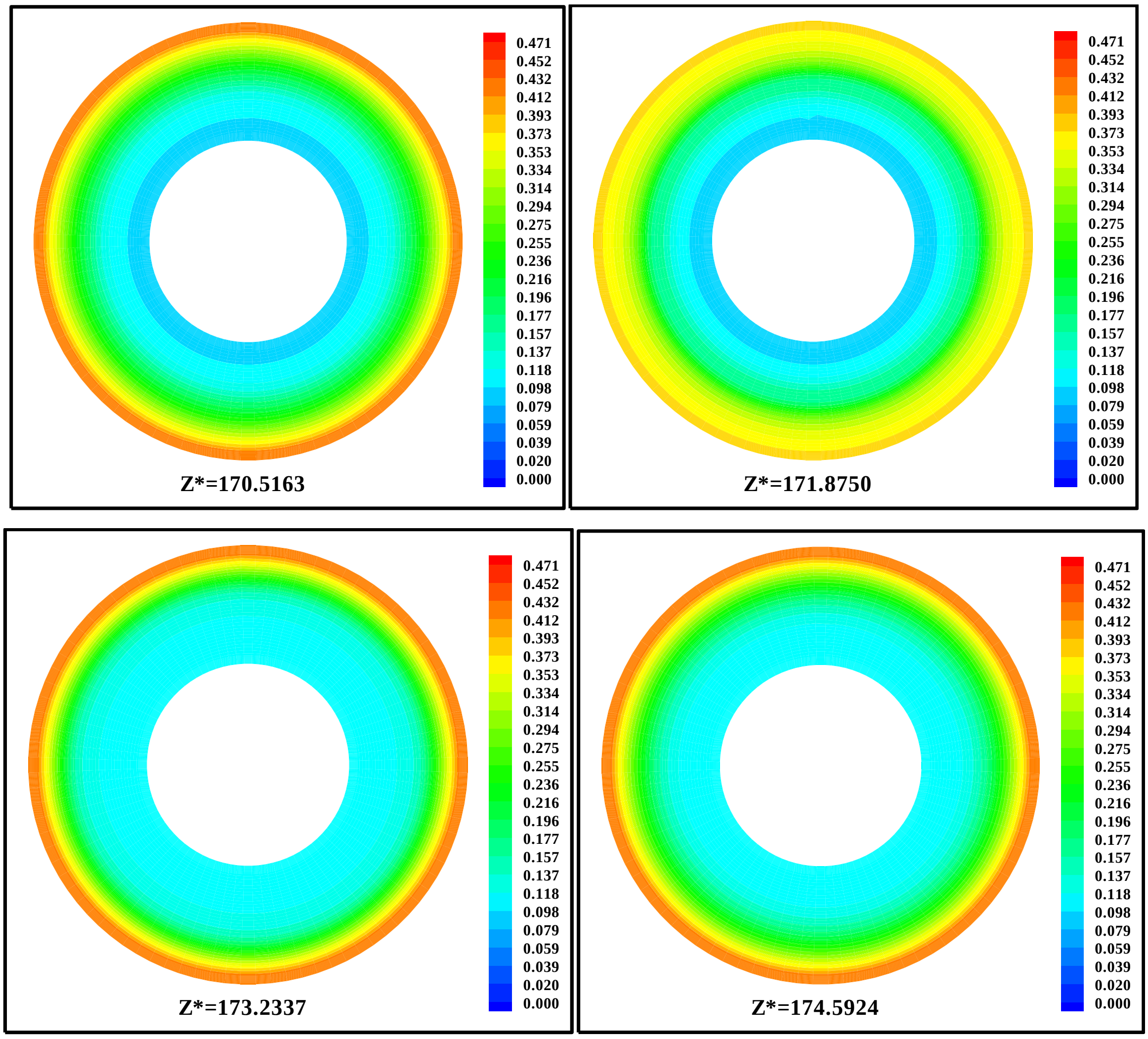


Figure 6.64 Champ de température en des positions axiales autour de la huitième ailette transversale ; Gr=0, H^*=0.24.

La comparaison entre le nombre de Nusselt local à l'interface du cylindre externe et à l'interface de l'ailette transversale montre que le nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique qui varie entre 24.18 à l'entrée et 7.23 à la sortie est très supérieur à celui à l'interface des ailettes transversales qui prend une valeur maximale égale à 2.249, mais ces dernières participent d'une façon indirecte dans l'augmentation du Nusselt cylindrique, cela est expliqué comme suit : le passage du fluide entre l'ailette transversale est le cylindre interne permit de mélanger le fluide de telle sorte qu'après la section de l'ailette transversale un fluide relativement froid occupe une place au voisinage de la paroi du cylindre externe ce qui augmente le nombre de Nusselt local dans cette position.

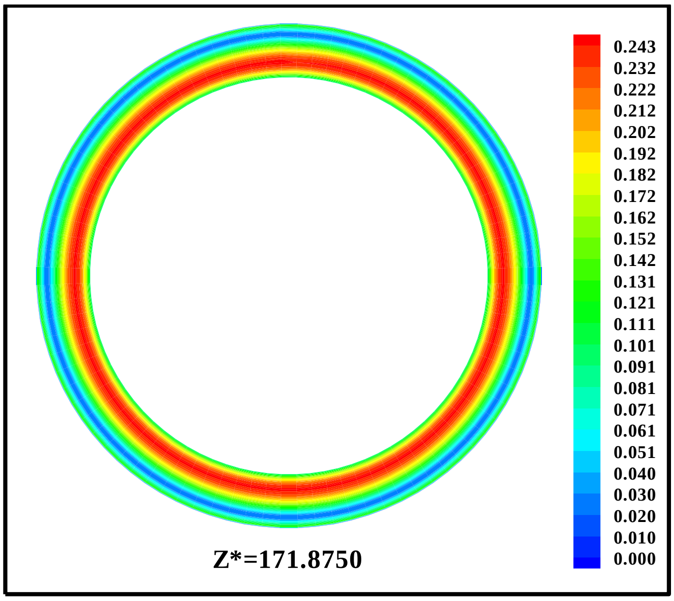


Figure 6.65 Distribution du flux local à l'interface de la huitième ailette transversale ; Gr=0, H^*=0.24.

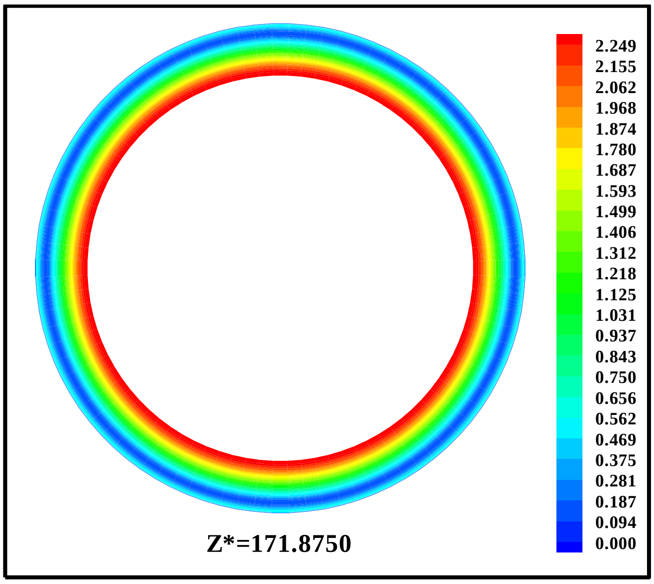


Figure 6.66 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de la huitième ailette transversale ; Gr=0, H^*=0.24.

6.3.2.2 Convection mixte (Gr=12801)

Dans cette partie, on va présenter les résultats concernant la convection mixte dans un espace annulaire mini de huit ailettes transversales ayant une hauteur H^* égale à 0.24. Les positions axiales de ces ailettes sont : z^*=19.7011, z^*=41.4402, z^*=63.1793, z^*=84.9184, z^*=106.6576, z^*=128.3967, z^*=150.1359 et z^*=171.8750. La présentation des résultats est basée sur la variation des champs thermiques et dynamiques autour des ailettes transversales car loin des ailettes, ces champs sont similaire celui d'un espace annulaire non ailetté.

6.3.2.2.1 Ecoulement secondaire

A l'entrée, l'écoulement secondaire est inexistant, entre z^*=0 et z^*=18.9184, le champ de vecteur de l'écoulement secondaire est similaire à celui d'un espace annulaire non ailetté étudié dans le chapitre 5.

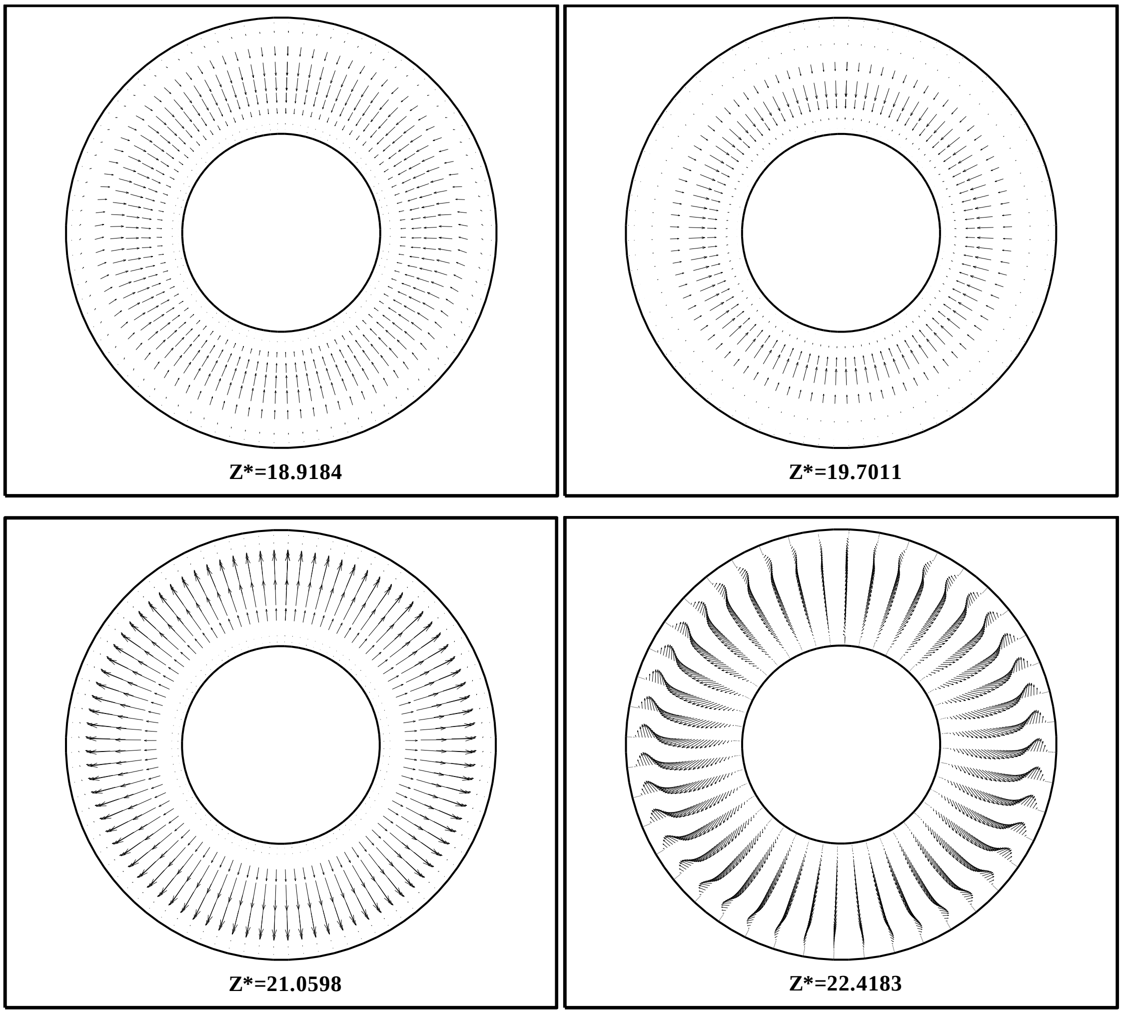


Figure 6.67 Développement de l'écoulement secondaire autour de la première ailette transversale ; Gr=12801, H^*=0.24.

A z^*=18.9184 (juste avant l'ailette transversale), les vecteurs de l'écoulement secondaire à coté de la paroi chaude changent de direction en créant un mouvement radial orienté vers le cylindre interne pour que le fluide passe à z^*=19.7011 (position axiale de l'ailette transversale) entre le cylindre interne et l'ailette. Après avoir traversé l'ailette transversale, le mouvement radial du fluide est orienté une deuxième fois vers le cylindre externe pour que le fluide retourne à l'état initial occupé avant l'ailette. A partir de z^*=21.0598, les vecteurs du champ de l'écoulement secondaire étudiés précédemment commencent à se créer de nouveau. Dans la figure 6.67, les vecteurs du champ de l'écoulement secondaire sont représentés au voisinage de la première ailette transversale à z^*= 18.9184, z^*= 19.7011, z^*= 21.0598 et z^*= 22.4183.

6.3.2.2.2 Ecoulement axial

Avant la section axiale de l'ailette transversale, l'écoulement axiale ressemble à celui d'un espace annulaire non ailetté. Juste avant la section axiale de l'ailette transversale à z^*=18.3424, un mouvement radial du fluide est créé, ce mouvement permit de changer la direction de la vitesse axiale face à la paroi de l'ailette vers le cylindre interne pour qu'il passe à z^*=19.7011 (position axiale de l'ailette transversale) entre le cylindre interne et l'ailette. Après l'ailette transversale, le mouvement radial du fluide est orienté vers le cylindre externe pour que le fluide retourne à l'état initial occupé avant l'ailette. La diminution dans la section de passage entre le cylindre interne et chaque ailette transversale est accompagnée par une augmentation importante dans la vitesse axiale dans cette position. Cette variation brusque de l'écoulement axiale se répète dans chaque section d'une ailette transversale. La distribution polaire de l'écoulement axiale en certaines positions autour de la huitième ailette transversale à z^*=170.5163, z^*=171.8750, z^*=173.2337 et z^*=174.5924 pour le cas d'une hauteur d'ailette égale à H^*=0.24 est illustrée dans la figure 6.68. A z^*=170.5163, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.847 située à r^*=0.7701 et θ=0. A z^*=171.8750 (la position axiale de la huitième ailette transversale) le maximum de la vitesse axiale augmente brusquement à une valeur $V^*_{z\,max}$ = 2.491 situé à r^*=0.7544 et θ=0. Dans la section axiale qui suit l'ailette transversale, des vortex axiaux sont créés, ces vortex sont la cause de la vitesse axiale négative après l'ailette transversale. L'intensité de ces vortex est maximale dans la partie supérieure et elle diminue en approchant vers θ égale à π. Juste après, la vitesse axiale retourne à son état initial avant l'ailette. A z^*=174.5924, $V^*_{z\,max}$ est égale à 1.794 situé à r^*=0.7857.

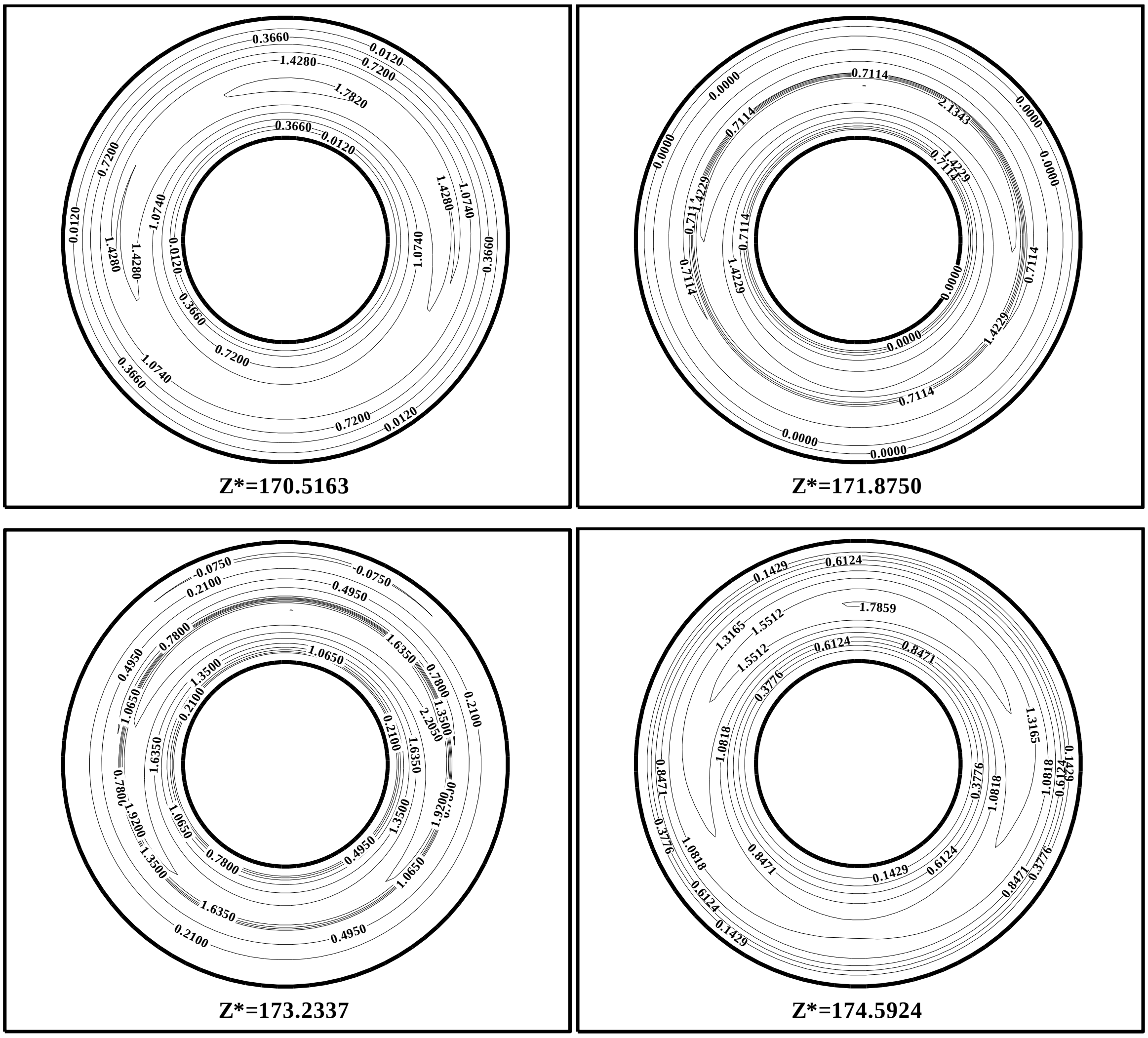


Figure 6.68 Distribution polaire de la vitesse axiale en des positions axiales autour de la huitième ailette transversale ; Gr=12801, H^*=0.24.

6.3.2.2.3 Champ thermique de l'écoulement

La distribution du champ de température en des positions axiales autour de la huitième ailette transversale est représentée dans la figure 6.69. Juste avant la section de la huitième ailette transversal à z^*=170.5163, la température maximale du fluide $T^*_{z\,max}$ est égale à 0.4810 situé en haut de l'interface paroi-fluide du cylindre externe. A z^*=171.8750 (la position axiale de la huitième ailette transversale) le maximum de la température axiale $T^*_{z\,max}$ diminue à une valeur égale à 0.3008 situé à r^*=0.7701 et θ=0. Juste après la huitième ailette à z^*=173.2337, $T^*_{z\,max}$ augmente une autre fois à une valeur égale à

0.4828 à l'interface paroi-fluide du cylindre externe. A z^*=174.5924, $T^*_{z\,max}$ augmente à 0.4856.

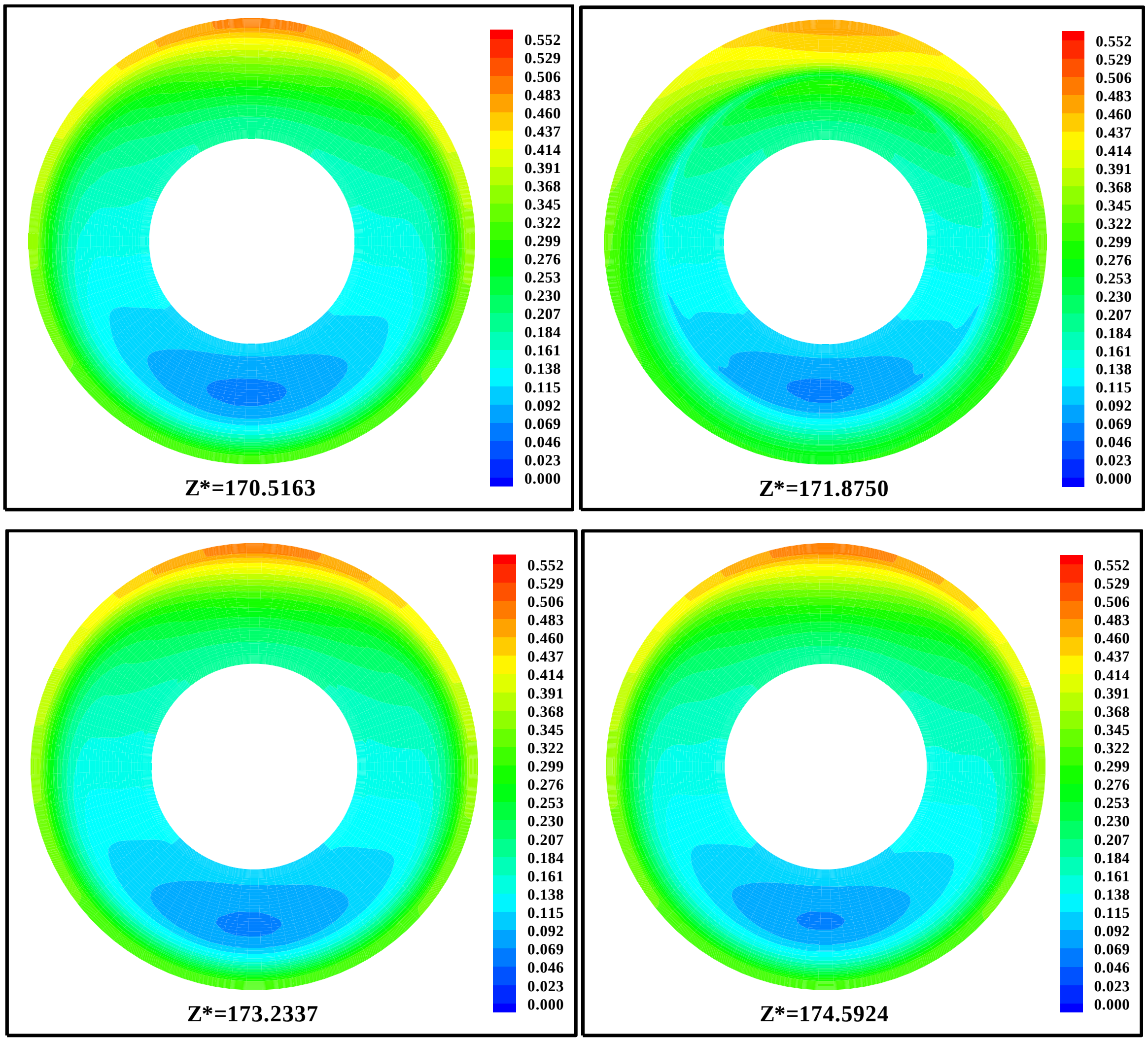


Figure 6.69 Champ de température en des positions axiales choisies autour de la huitième ailette transversale ; Gr=12801, H^*=0.24.

La diminution de la température du fluide dans la section axiale de l'ailette transversale est due à la réduction dans le passage du fluide dans cette position cella permit de bien mélanger le fluide chaud avec le fluide relativement froid ce qui donne automatiquement une température du fluide moins importante dans cette position.

Le flux de chaleur et le nombre de Nusselt local aux interfaces sont représentés pour le cas de quatre ailettes transversale et une hauteur d'ailette H^* égale à 0.12. Dans les figures 6.70 et 6.71, le flux de chaleur et le nombre de Nusselt locale représentés sont ceux à l'interface cylindrique du cylindre externe. Il est clair qu'après chaque ailette transversale le flux de chaleur à l'interface cylindrique est relativement augmenté, cella est due au rôle des ailettes transversales qui serrent à mélangé le fluide pour que le nouveau fluide au voisinage du cylindre externe après la section de l'ailette transversale aura une température moins importante, cela permit d'améliorer le transfert thermique. Le flux de chaleur et le nombre de Nusselt à l'interface de la quatrième ailette transversale sont représentés dans les figures 6.72 et 6.73. La variation du nombre de Nusselt local à l'interface de l'ailette suit une variation radiale et angulaire de telle sorte qu'il prend une valeur maximale égal 16.40 à r^*=0.8951 et θ= π. Pour la même ailette, le maximum du flux local est égale à 0.315 situé à r^*=1.0044 et (θ=0.9639 et θ=5.3907).

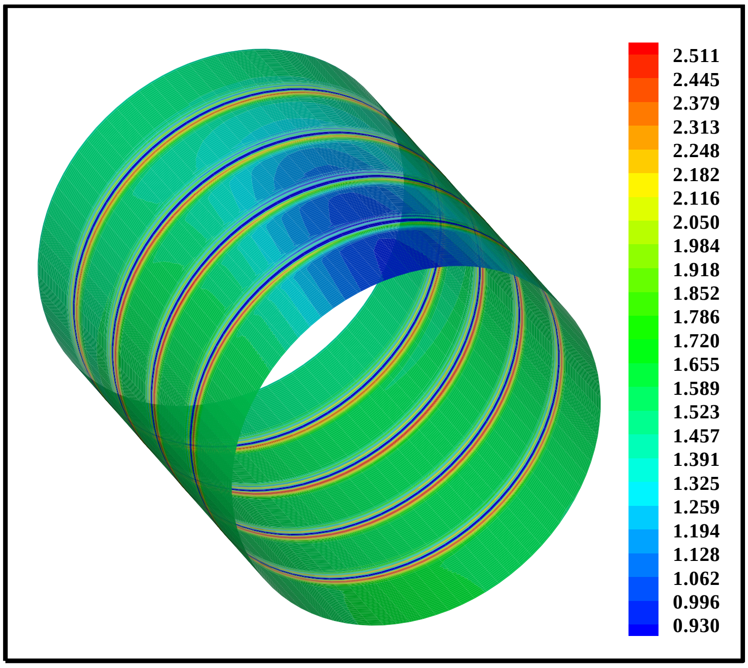


Figure 6.70 Distribution du flux local à l'interface du cylindre externe pour le cas de quatre ailettes ; Gr=12801, H^*=0.12.

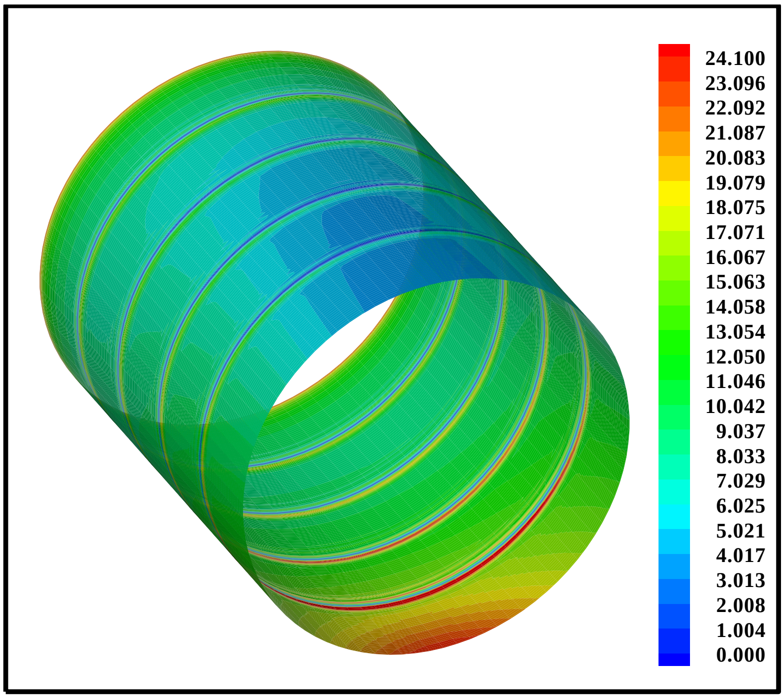


Figure 6.71 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface du cylindre externe pour le cas de quatre ailettes ; Gr=12801, H^*=0.12.

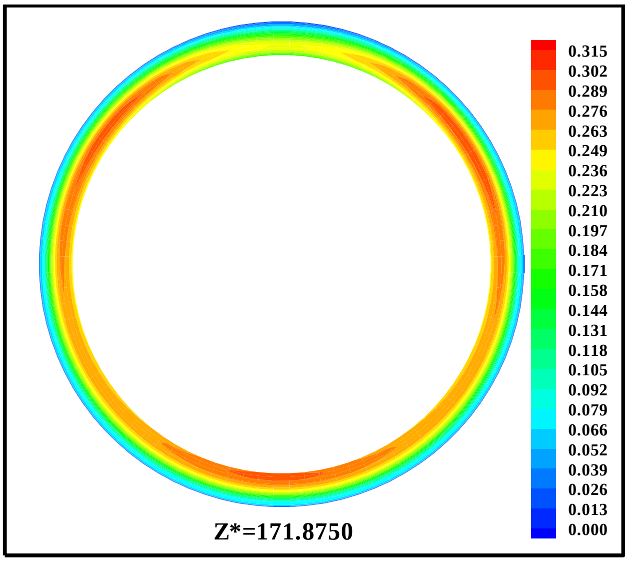


Figure 6.72 Distribution du flux local à l'interface de la huitième ailette transversale ; Gr=12801, H^*=0.24.

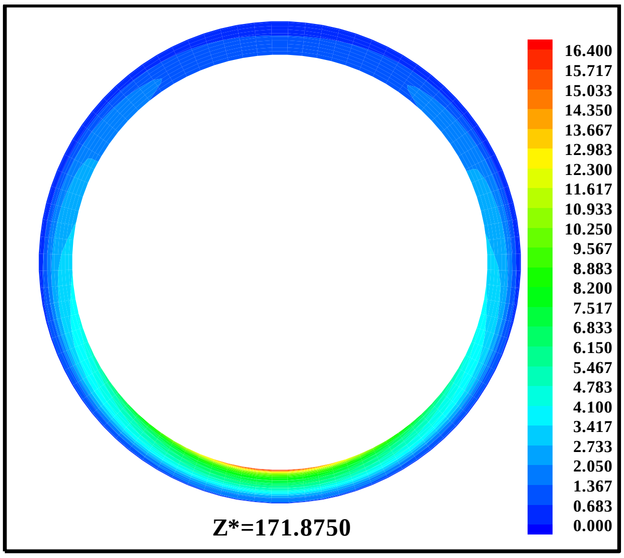


Figure 6.73 Evaluation du nombre de Nusselt local à l'interface de la huitième ailette transversale ; Gr=12801, H^*=0.24.

La variation du Nusselt axiale pour le cas de quatre ailettes transversales ayant une hauteur H^* égale à 0.12 est comparée avec celle d'un espace annulaire non ailetté dans la figure 6.74. Cette comparaison montre clairement qu'après chaque ailette transversale, il y a une augmentation dans l'écart du Nusselt axial par apport au cas non ailetté, cella est due à l'amélioration du transfert thermique après chaque ailette.

Autour de la section axiale d'une ailette transversale, la variation du Nusselt axial est expliquée comme suit : juste avant l'ailette transversale, Nu(z^*) subit une petite chute car dans cette section le mouvement du fluide est orienté vers le cylindre interne. Dans la section axiale de l'ailette transversale, Nu(z^*) augmente considérablement, puis il rechute une deuxième fois dans la section axiale qui suit l'ailette transversale où la direction de l'écoulement est réorienté vers le cylindre externe. Enfin Nu(z^*) augmente d'une façon maximale dans les section axiales qui vient après à des valeurs arrive jusqu'à 100% à celle d'une partie non ailetté.

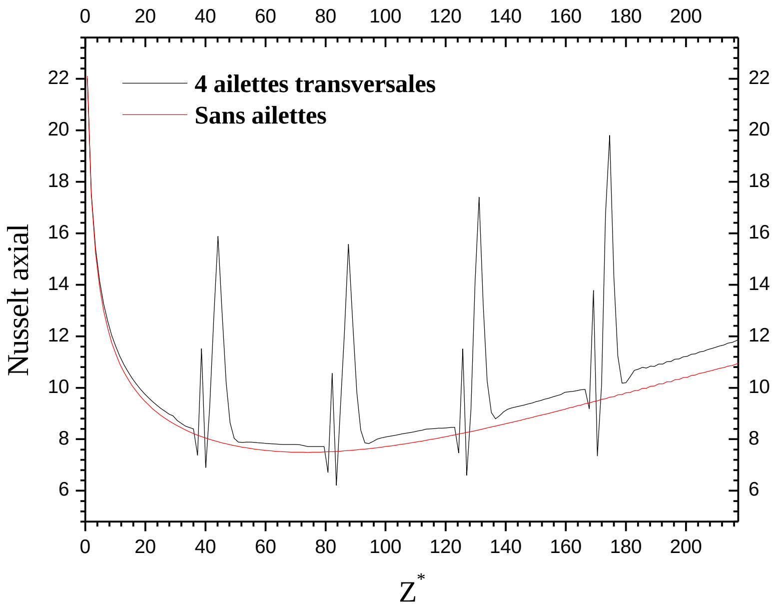


Figure 6.74 Evaluation du nombre de Nusselt axial pour le cas de quatre ailettes transversales ; Gr=12801, H^*=0.12 ; une comparaison avec le cas non ailetté.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le conduit horizontal et l'espace annulaire étudiés précédemment sont équipés par des ailettes longitudinales et transversales. La génération de chaleur produite par effet Joule dans ce cas n'est pas générée seulement dans les parois cylindriques mais aussi dans les parois des ailettes. La simulation numérique de ce problème à montré que les ailettes longitudinales participent d'une façon directe dans l'amélioration du transfert thermique, cela est traduit par le nombre de Nusselt local élevé aux interfaces des ailettes longitudinales. Par contre, les ailettes transversales participent d'une façon indirecte dans l'amélioration du transfert thermique, leur emplacement face à l'écoulement permet de réorganiser la structure de ce dernier pour chaque passage à travers ces ailettes, ce qui sert à mélanger le fluide et à augmenter le transfert thermique aux interfaces cylindriques. Le nombre et la hauteur des ailettes sont aussi des facteurs importants dans l'amélioration du transfert thermique.

Conclusion générale

Dans ce travail de recherche, on a étudié numériquement le transfert de chaleur par convection mixte combinés aux écoulements laminaires dans les conduits cylindriques horizontaux plein et annulaires, parcourus par un fluide newtonien et incompressible à propriétés physiques dépendantes de la température. Selon la géométrie du problème, cette étude se compose de trois parties. La première, concerne un cylindre plein avec une épaisseur finie de sa paroi. La deuxième est un espace annulaire entre deux cylindres concentriques et horizontaux. La troisième partie traitera deux configurations différentes : un cylindre plein muni d'ailettes sur sa paroi intérieure et un conduit cylindrique annulaire muni d'ailettes attachées sur la paroi intérieur du cylindre externe. Les ailettes sont géométriquement identiques et de la même nature physique que la paroi mère.

Pour ces trois parties, les conditions thermiques sont les suivantes : un chauffage volumique uniforme produit dans toute l'épaisseur du conduit pour la première partie. Dans la deuxième partie, le chauffage volumique est produit dans l'épaisseur du cylindre externe, tandis que le cylindre interne est adiabatique. Pour la troisième partie, le chauffage volumique est produit dans l'ensemble des ailettes et leur paroi mère. Aussi pour les trois cas, la convection mixte laminaire est conjuguée à une conduction thermique dans les parois solide. A l'entrée du conduit, la température est constante, le champ de vitesse dans cette section suit un profil parabolique qui sert à minimisé la zone d'entrée hydrodynamique tandis qu'à la sortie il sera considéré que le conduit est assez long pour admettre un quasi développement. Les pertes de type radiatif et convectif vers le milieu ambiant sont prises en compte.

Les équations différentielles aux dérivées partielles modélisantes, de conservation de la masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie dans un système de coordonnées cylindriques sont résolues numériquement par la méthode des volumes finie. Les solutions sont obtenues avec un code de calcule en 3-D basé sur l'algorithme de SIMPLER avec une discrétisation spatio-temporelle du second ordre. Deux maillages sont utilisés pour la résolution numérique des équations différentielles : 26×44×162 nœuds suivant les directions radiale, azimutale et axiale pour le cas d'un conduit horizontal et 52×88×162 nœuds pour le cas d'un espace annulaire et les conduits ailettés. Le pas du temps de calcul utilisé est égal à $5\cdot10^4$. La validation du code de calcul est vérifiée par la comparaison de nos résultats avec ceux trouvés dans la littérature.

Les résultats concernant le cylindre plein sont obtenus pour un nombre de Reynolds égal à 606.85, un nombre de Prandtl évalué à la température d'entrée de l'eau distillé égal à 8.082, un rapport d'aspect géométrique égal à 104.17 et un nombre de Grashof varie de 0 à 10^7. Le passage de la convection forcée vers la convection mixte change complètement la structure axisymétrique des champs thermiques et dynamiques, ce changement devient de plus en plus important en augmentant le nombre de Grashof. Une comparaison entre les résultats obtenus par des propriétés physique du fluide dépendantes de la température avec d'autres obtenus par des propriétés indépendantes a montré que la thermo-dépendance des propriétés physiques augmente le nombre de Nusselt et que cette augmentation s'intensifie en s'éloignant de l'entrée et en augmentant le nombre de Grashof. Les pertes thermiques vers le milieu ambiant sont négligeables car elles ne dépassent pas les 3.56 %. Le nombre de Nusselt moyen de la convection forcée est égal à 7.78, pour la convection mixte les paramètres utilisés, sont bien corrélés avec la corrélation : $Nu_m = 12.753\ Ri^{0.156}$.

La convection mixte dans un espace annulaire est traitée pour un nombre de Reynolds égal à 399.02, un rapport d'aspect géométrique égal à 217.39 et un nombre de Grashof varie de 0 à 12801. Le cas de la convection forcée à permis de garder de l'entrée jusqu'à la sortie une distribution axisymétrique des champs thermiques et dynamiques, les isothermes du fluide sont des cercles concentriques avec une température minimale sur la paroi extérieur du cylindre interne et une température maximale sur la paroi intérieur du cylindre externe. Ce cas de référence à permis d'obtenir une bonne validation du code sur le nombre de Nusselt axial avec les résultats de **Nazrul et al. [46]**. L'augmentation dans le nombre de Grashof provoque une variation angulaire sur les champs thermiques et dynamiques due à un mouvement transversal dans le plan ($r^* - \theta$). Dans chaque station axiale, le maximum de la température du fluide est situé en haut de l'interface paroi-fluide du cylindre externe ainsi que le maximum de la vitesse axiale est dans la partie supérieure de l'espace annulaire. La diminution dans l'épaisseur de l'espace annulaire augmente le transfert de chaleur, cela est justifié par l'augmentation du nombre de Nusselt en diminuant le diamètre hydraulique. A travers les résultats obtenus et les paramètres du contrôle utilisés, le nombre de Nusselt moyen de la convection mixte peut être exprimé en fonction du nombre de Richardson par la corrélation suivante : $Nu_m = 12.8678 \ Ri^{0.1426}$.

La convection mixte dans les conduits ailettés est traitée en deux parties : conduits horizontaux équipés par des ailettes attachées sur la paroi interne et espaces annulaires munis d'ailettes attachées sur la paroi intérieure du cylindre externe. Plusieurs configurations sont traitées dont les paramètres de contrôle géométriques sont: le nombre, la hauteur et l'emplacement des ailettes. Pour le cas de la convection forcée, il y a une axisymétrie dans la distribution des champs thermiques et dynamiques ainsi que dans la distribution des flux et des nombres de Nusselt locaux. L'augmentation dans le nombre et la hauteur des ailettes longitudinales augmente le maximum de la vitesse axiale et le maximum de la température de fluide. En présence des ailettes transversales, le maximum de la vitesse axiale augmente brusquement dans les stations axiales de ces ailettes. Pour le cas de la convection mixte, la seule symétrie possible est celle par apport au plan vertical qui passe à travers l'axe des conduits. Le mouvement transversal poussé par la convection mixte est ralentie par les ailettes longitudinales en lui changeant de direction, ce changement de direction permis de créer des cellules contrarotatives proportionnelles aux nombres des ailettes utilisées. L'augmentation dans le nombre et la hauteur des ailettes améliore le nombre de Nusselt axial, cette amélioration est très importante pour le cas des ailettes longitudinales et elle est modérée pour le cas des ailettes transversales.

Les ailettes longitudinales, participent d'une façon directe dans l'augmentation du transfert de chaleur, cela est justifié par l'important nombre de Nusselt local le long de l'interface des ailettes. La participation des ailettes transversales dans l'amélioration du transfert de chaleur est indirecte, ces derniers servent à mélanger le fluide pour avoir une augmentation dans le nombre de Nusselt local à l'interface cylindrique dans les sections axiales qui suit les ailettes transversales.

D'une autre part, les ailettes utilisées dans les espaces annulaires sont plus participant au transfert de chaleur à ceux d'un conduit horizontal à cause de l'augmentation de la surface d'échange entre le fluide et les ailettes dans le cas d'un espace annulaire.

Perspectives du présent travail

A la fin de ce travail, nous présentons des perspectives qui pourraient être des sujets de recherche dans le proche avenir :

- Ce qui concerne les espaces annulaires, on peut étudier le cas où la génération de chaleur est produite dans la paroi du cylindre interne ou bien dans les parois des deux cylindres à la fois et voir l'influence de ce changement sur les champs thermiques et dynamiques ainsi que sur les flux et les nombres de Nusselt aux interfaces.

- Il serait intéressant d'utiliser des ailettes d'une conductivité thermique différente de celle de la paroi mère, que se soit une conductivité très faible (matière isolante), dans ce cas les ailettes sont des obstacles et leur rôle c'est de changer seulement la direction de l'écoulement, ou bien une conductivité thermique très importante où les ailettes vont absorber une grande quantité de chaleur de leur paroi mère et la transférée vers le fluide.

- La combinaison entre les ailettes longitudinales et les ailettes transversales nous conduise à proposer un modèle géométrique qui assemble entre les deux genres des ailettes, ce modèle est sous forme d'une ailette serpentine dont les paramètres de contrôle sont la hauteur de l'ailette est surtout l'angle d'inclinaison de l'ailette qui varie entre $\theta=0$ (ailette longitudinale) et $\theta=\pi/2$ (ailette transversale).

Bibliographie

[1] **T. Boufendi, M. Afrid,** Three-dimensional Conjugate Conduction-Mixed Convection With Variable Fluid Properties in a Heated Horizontal Pipe, Rev. Energies Renouvelables, Vol. 8, pp.1-18, (2005).

[2] **T. Boufendi, M. Afrid**, The physical Aspect of Three-Dimensional Mixed Convection In a Uniformly Heated Horizontal Pipe, Sciences et Technologie A, N°22, pp. 39-52, (2004).

[3] **T. Boufendi,** Contribution à l'étude théorique des transferts thermiques dans un conduit cylindrique horizontal soumis à un phénomène de convection mixte, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Mentouri Constantine (2005).

[4] **R. C. Martinelli, L. M. K. Boelter,** The Analytical Prediction of Superposed Free and forced Viscous Convection in a Vertical Pipe, University of California, Publications in Engineering, Vol. 5, N°2, pp. 23-58, (1942).

[5] **J. Orfi, N. Galanis,** Bifurcation in Steady Laminar Mixed Convection Flow in Uniformly Heated Inclined Tubes, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, Vol. 09, N°5, pp. 543-567, (1999).

[6] **J. Orfi,** Convection mixte laminaire dans un tuyau incliné: développement simultané et phénomène de bifurcation, thèse de Doctorat, Université A de Sherbrooke, Canada (1995).

[7] **M. Wang, T. Tsuji, Y. Nagano**, Mixed Convection with Flow Reversal in The Thermal Entrance Region of Horizontal and Vertical Pipes, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 37, N°15, pp. 2305-2319, (1994).

[8] **D. Choudhury, S. V. Patankar**, Combined Forced and Free Laminar Convection in the Entrance Region of an Inclined Isothermal Tube, Journal of Heat Transfer. Trans ASME, Vol. 110, pp. 901-909, (1988).

[9] **W. C. Reynolds**, Heat Transfer to Fully Developed Laminar Flow in a Circular Tube With Arbitrary Circumferentially Heat Flux, Journal of Heat Transfer. Trans ASME, Vol. 82, pp. 108-112, (1960).

[10] **C. T. Nguyen, N. Galanis**, Investigation of Rayleigh Number Effects on Combined Forced and Free Convection for Developing Laminar Flow in Uniformly Heated Horizontal Tubes, ASHRAE Trans, Vol. 95, Partie. 1, pp. 171-178, (1989).

[11] **S. V. Patankar, S. Ramadwani, E. M. Sparrow**, Effect of Circumferentially Non Uniform Heating on Laminar Combined Convection in a Horizontal Tube, Journal of Heat Transfer. Trans. ASME, Vol. 100, pp. 63-70, (1978).

[12] **D. K. Choi, D. H. Choi**, Developing Mixed Convection Flow in a Horizontal Tube Under Circumferentially Non Uniform Heating, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 37, N°13, pp. 1899-4913, (1994).

[13] **O. Kholai, A. Bellaouar, M. Kadja**, Etude Numérique de la Convection Mixte dans un Tube Incline, 13èmes Journées Internationales de Thermique, Albi, France (2007).

[14] **A. Behzadmher, N. Galanis, A. Laneville**, Low Reynolds Number Mixed convection in Vertical Tubes with Uniform Wall heat flux, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 46, N°25, pp. 4823-4833, (2003).

[15] **S. Abboudi, F. Papini**, Approche Numérique et Expérimentale du Transfert Thermique Métal-Fluide dans un Conduit Rectangulaire en Régime Instationaire Laminaire, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 33, N°09, pp. 1909-1919, (1990).

[16] **S. Piva, G. S. Barozzi, W. M. Collins,** Combined Convection and Wall Conduction Effects in Laminar Pipe Flow : Numerical and Experimental Validation Under Uniform Wall Heating, Heat and Mass Transfer, Vol. 30, pp. 401-409, (1995).

[17] **S. Bilir, A. Ateş,** Transient Conjugated Heat Transfer in Thick Walled Pipes with Convection Boundary Conditions, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 46, pp. 2701-2711, (2003).

[18] **J. Susec,** Unsteady Forced Convection With Sinusoidal Duct Wall Generation: the Conjugate Heat Transfer Problem, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 45, pp. 125-130, (2002).

[19] **H. Nesreddine, N. Galanis, C. T. Nguyen**, Variable-property effects in laminar aiding and opposing mixed convection of air in vertical tubes, Num. Heat Transfer, Vol. 31, partie. A, pp. 53-69, (1997).

[20] **N. Mokrane,** Corrélation Du Transfert De Chaleur Par Convection Mixte Dans Un Conduit Cylindrique, Mémoire de Magistère en physique Energétique, Département de physique, Université Mentouri Constantine (Oct.2010).

[21] **S. Touahri, T. Boufendi**, Numerical Study of the Conjugate Heat Transfer in a Horizontal Pipe Heated by Joulean Effect, Thermal Science, Vol. 16, pp. 53-67, (2012).

[22] **M. Ouzzane, N. Galanis**, Effets de la conduction pariétale et de la répartition de flux thermique sur la convection mixte prés de l'entrée d'une conduite inclinée, Int. J. Thermal. Science, Vol. 38, pp. 622-633 (1999).

[23] **K. Chahboub,** Influence de la conduction pariétale sur les transferts thermiques conjugués dans un conduit horizontal, Mémoire de Magistère en Physique Energétique, Département de physique, Université Mentouri Constantine (Dec.2011).

[24] **K. Chahboub, T. Boufendi**, Computational Study of the Conjugate Heat Transfer and the Wall Conduction Effects in a Horizontal Pipe with Temperature Dependent Properties, International Review of Mechanical Engineering (IREME), Vol. 5, N°2, pp. 361-368, (Feb. 2011).

[25] **M. A. Bernier, B. R. Baliga**, Conjugate Conduction and Laminar Mixed Convection in Vertical Pipes for Upward Flow and Uniform Wall Heat Flux, Numerical Heat Transfer. Vol. 21, Partie A, pp. 313-332, (1992).

[26] **J. W. Baughn**, Effect of Circumferential Wall Heat Conduction on Boundary Conditions for Heat Transfer in a Circular Tube, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, pp. 537-539, (1978).

[27] **P. J. Heggs, D. B. Ingham, D. J. Keen**, The Effects of Heat Conduction in the Wall on the Development of Recirculating Combined Convection Flows in Vertical Tubes, Int. J. Heat And Mass Transfer, Vol. 33, pp. 517-28, (1990).

[28] **T. J. Hanratty, E. M. Rosen, R. L. Kabel,** Effect of Heat Transfer on Flow Field at Low Reynolds numbers in Vertical Tubes, Industrial Engineering Chemistry, Vol. 50, N°5, pp. 815-820, (1958).

[29] **C. Abid, R. Martin, F. Papini**, Thermal Instabilities in a Horizontal Cylindrical Duct: a Physical Approach, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 45, pp. 2153-2157, (2002).

[30] **A. M. Hussein, Y. K. Salman,** Combined Convection Heat Transfer for Thermally Developing Aiding Flow in an Inclined Circular Cylinder with Constant Heat Flux Applied Thermal Engineering, Vol. 27, pp. 1236-1247, (2007).

[31] **S. M. Morcos, A. E. Bergles,** Experimental Investigation of Combined Forced and Free Laminar Convection in Horizontal Tubes, Journal of Heat Transfer, Vol. 97, pp. 212-219, (1975).

[32] **B. S. Petukhov, A.F. Polyakov**, Experimental Investigation of Visco-Gravitational Fluid Flow in a Horizontal Tube, Scientific Research. Inst of High Temp, Vol. 5 N°01, pp. 87-95, (1967).

[33] **Y. Mori, K. Futagami**, **S. Tokuda, M. Nakamura**, Forced Convective Heat Transfer in Uniformly Heated Horizontal Tubes, 1st report, experimental study, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 09, pp. 453-463, (1967).

[34] **M. Saez,** Contribution à l'Etude Expérimentale de la Convection Mixte, Thèse de Doctorat, Université JOSEPH FOURIER (1998).

[35] **B. Bara, K. Nandakumar, J. H. Masliyah**, An Experimental and Numerical Study of the Dean Problem: Flow Development Towards Two-Dimensional Multiple Solutions, J. Fluid Mech, Vol. 244, pp. 339-76, (1992).

[36] **B. S. Petukhov, A. F. Polyakov**, Experimental Investigation of Visco-gravitational Fluid Flow in a Horizontal Tube, Scientific Research institute of High Temperatures, Vol. 05, N° 01, pp. 87-95, (1967).

[37] **C. Abid, F. Papini, D. Veyret**, Etude de la Convection Mixte Dans un Conduit Cylindrique, Approche Analytique, Numérique et Détermination Expérimentale de la Température de la Paroi par Thermographie Infrarouge J. Phys. III France 3 pp. 255-266, (1993).

[38] **M. Senécal**, Etude Expérimentale des écoulements de Convection Mixte en Conduit Circulaire Soumis à un Flux de Chaleur Uniforme, Mémoire de Maitrise, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada, (2002).

[39] **N. A. Hussain, S. T. Mcomas,** Expérimental Investigation of Combined Convection in a Horizontal Circular Tube with Uniform Heat Flux, Proceeding of the Fourth Int. Heat Transfer conf, Elseiver, Amsterdam, Vol. 4, NC 3.4, (1970).

[40] **S. W. Hong, S. M. Morcos, A. E. Bergles,** Analytical and Experimental Results for Combined Forced and Free Laminar Convection in Horizontal Tubes, Proceeding of the Fifth Int. Heat Transfer conf, Tokyo, Vol. 3, pp. 154-158, (1974).

[41] **S. Kato, S. Murakami, R. Yoshie**, Experimental and Numerical Study on Natural Convection with Strong Density Variation Along a Heated Vertical Plate. Ninth Symposium on Turbulent Shear Flows, Tokyo, Japan, 16-18 August, (1993).

[42] **A. Mojtabi, J.P. Caltagirone**, Analyse du Transfert de Chaleur en Convection Mixte Laminaire Enter Deux Cylindres Coaxiaux Horizontaux, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 23, pp. 1369-1375, (1980).

[43] **B. Farouk, S. I. Guceri**, Laminar and Turbulent Natural Convection in the Annulus between Horizontal Concentric Cylinders, Journal of Heat Transfer, Vol. 104, pp. 631-636, (1982).

[44] **S. Kotake, N. Hattori**, Combined free and forced convection heat transfer for fully developed laminar flow in concentric annuli, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 28, N°11, pp. 2113-2120, (1985).

[45] **T.H. Nguyen, P. Vasseur, L. Robillard, B. Shekhar**, Combined free and forced convection of water between horizontal concentric annuli, J. Heat Transfer, Vol. 105, pp. 498-504, (1983).

[46] **I. Nazrul, U.N. Gaitonde, G.K. Sharma**, Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 44, N°11, pp. 2107-2120, (2001).

[47] **N. Carlo, S.D. Guidice**, Finite element analysis of laminar mixed convection in the entrance region of horizontal annular ducts, Numerical Heat Transfer, Vol. 29, Partie A, pp 313-330, (1996).

[48] **I. Nazrul, U.N. Gaitonde, G.K. Sharma**, Combined free and forced convection heat transfer in a horizontal annulus, Proceedings of 11th International Conference on Heat Transfer, Kyonju, Korea, Vol. 3, pp. 299-304, (1998).

[49] **C. Nouar**, Numerical Solution for Laminar Mixed Convection in a Horizontal Annular Duct: Temperature-Dependent Viscosity Effect, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 29, pp. 849-864, (1999).

[50] **M.A. Habib, A.A.A. Negm,** Laminar mixed convection in horizontal concentric annuli with non-uniform circumferential heating, Heat and Mass Transf, Vol. 37, pp. 427-435, (2001).

[51] **M.A. Teamah, M.M. Sorour, R. A. Saleh,** Mixed Convection Between Two Horizontal Concentric Cylinders When the Cooled Outer Cylinder is Rotating, Alexandria Engineering Journal, Vol. 44, N°03, pp. 347-360, (2005).

[52] **A.K. Hariz,** La Convection Mixte dans un Espace Annulaire entre deux Cylindres Concentriques, Mémoire de Magistère en physique Energétique, Département de physique, Université Mentouri Constantine (2008).

[53] **E. L. M. Padilla, R. Campregher, A. Silveira-Neto,** Numerical Analysis of the Natural Convection in Horizontal Annuli at Low and Moderate Rayleigh**,** Engenharia Térmica (Thermal Engineering), Vol. 5, N°02, pp 58-65, (2006).

[54] **S. Touahri, T. Boufendi**, Conjugate Heat Transfer with Variable Fluid Properties in a Horizontal Annulus, Sciences et Technologie A, N°32, pp 35-41,(2010).

[55] **S. Touahri, T. Boufendi**, Three-Dimensional Mixed Convection in Horizontal Annulus Heated by Joulean Effect, International Conference on Energy and Sustainable Development, Adrar, Algérie, 29-30 November (2011).

[56] **T. H. Kuehn, R. J. Goldstein**, An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 4, pp 695-719, (1976).

[57] **T. H. Kuehn, R. J. Goldstein**, An Experimental Study of Natural Convection Heat Transfer in Concentric and Eccentric Horizontal Cylindrical Annuli, Journal of Heat Transfer, Vol. 100, pp. 635-640, (1978).

[58] **J. Prusa, L. S. Yao**, Natural Convection Heat Transfer between Eccentric Horizontal Cylinders, Journal of Heat Transfer, Vol. 105, pp. 108-116, (1983).

[59] **J. S. Yoo,** , Dual Steady Solutions in Natural Convection between Horizontal Concentric Cylinders, International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 17, pp. 587-593, (1996).

[60] **D. N. Mahony, R. Kumar, E. H. Bishop**, Numerical Investigation of Variable Property Effects on Laminar Natural Convection of Gases between Two Horizontal Isothermal Concentric Cylinders, Journal of Heat Transfer, Vol. 108, pp. 783-789, (1986).

[61] **S. M. El-Sherbiny, A. R. Moussa**, Natural convection in air layers between horizontal concentric isothermal cylinders, Alexandria Engineering Journal, Vol. 43, N°3, pp. 297-311, (2004).

[62] **N. Hattori, S. Kotake**, Combined free and forced convection heat transfer for fully developed laminar flow in horizontal tubes (Experiments), JSME, Vol. 21, N° 155, pp. 861-868, (1978).

[63] **H. A. Mohammed, A. Campo, R. Saidur,** Experimental study of forced and free convective heat transfer in the thermal entry region of horizontal concentric annuli, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol. 37, pp. 739-747, (2010).

[64] **A. Mohammed, A. Jadoaa**, Experimental Study into Effect of Developing Section Length on The Heat Transfer Process in a Horizontal Annulus, Al-Rafidain Engineering, Vol. 19, N°06, pp. 62-72, (2011).

[65] **J. H. Lienhard IV, J. H. Lienhard V**, A heat transfer textbook, 3rd ed, Cambridge, MA, Phlogiston Press, (2005).

[66] **M. Ouzzane**, Développement simultané en convection mixte laminaire dans une conduite avec un flux de chaleur non uniforme sur sa surface externe : cas avec et sans ailettes Thèse de doctorats, Sherbrooke (2000).

[67] **M. Ouzzane, N. Galanis,** Numerical Analysis Of Mixed Convection In Inclined Tubes With External Longitudinal Fins, Solar Energy, Vol. 71, N°03, pp. 199-211, (2001).

[68] **I. M. Rustum, H. M. Soliman**, Numerical Analysis of Laminar Mixed Convection in Horizontal Internally Finned Tubes, Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 33, N°07, pp. 1485-1496, (1990).

[69] **I. M. Rustum, H. M. Soliman**, Experimental Investigation of Laminar Mixed Convection in Tubes with Longitudinal Internal Fins, ASME. J. Heat Transfer, Vol. 110, pp. 366-372, (1988).

[70] **M. Benkhedda, T. Boufendi**, Hydrodynamic and Thermal Characteristics of Conjugate Heat Transfer in an Annular Finned Duct, International Review on Modelling and Simulations, (IREMOS), Vol. 4, N. 5, October 2011.

[71] **M. Benkhadda,** Transferts Thermiques dans un Conduit Cylindrique Annulaire Muni d'Ailettes, Mémoire de Magistère en physique Energétique, Département de physique, Université Mentouri Constantine (2010).

[72] **N. Yucel, N. Dinler**, Numerical Study of Laminar and Turbulent Flow Through a Pipe with Fins Attached, Numerical Heat Transfer, Partie A, Vol. 49, N°02, pp. 195-214, (2006).

[73] **J. Andrew, N. Ramesh, T. Chandratilleke**, Laminar Convective Heat Transfer in a Micro-Channel with Internal Longitudinal Fins, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 48, pp. 1908-1913, (2009).

[74] **V. Ozceyhan, S. Gunes, O. Buyukalaca, N. Altuntop,** Heat Transfer Enhancement in a Tube Using Circular Cross Sectional Rings Separated From Wall, Applied Energy, Vol. 85, pp. 988-1001, (2008).

[75] **M. I. Farinas, A. Garon, K. Saint-Lous,** Study of Heat Transfer in a Horizontal Cylinder with Fins, Revue Générale de Thermique, Vol. 36, pp. 398-410, (1997).

[76] **I. B. SHOME**, Mixed Convection Laminar Flow and Heat Transfer of Liquids in Horizontal Internally Finned Tubes, Numerical Heat Transfer. Partie A, Vol. 33, pp. 65-83. (1998).

[77] **N. Mir, K. Syed, M. Iqbal**, Numerical Solution of Fluid Flow and Heat Transfer in the Finned Double Pipe, Journal of Research Science, Vol. 15, N°03 pp. 253-262. (2004).

[78] **M. Y. Ha, J. G. Kim,** Numerical Simulation of Natural Convection in Annuli with Internal Fins, KSME International Journal, Vol. 18, N°04, pp. 718-730, (2004).

[79] **C. S. Yang, D. Z. Jeng, U. H. Tang, C. Gau,** Flow and Heat Transfer of Natural Convection in Horizontal Annulus With a Heating Element on Inner Cylinder, Journal of Heat Transfer, Vol. 131, pp. 1-6, (2009).

[80] **M. Rahnama, M. Farhadi**, Effect of Radial Fins on Two-Dimensional Turbulent Natural Convection in a Horizontal Annulus, International Journal of Thermal Sciences, Vol. 43, pp 255-264, (2004).

[81] **S. Kiwan, O. Zeitoun**, Natural Convection in a Horizontal Cylindrical Annulus Using Porous Fins, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, Vol. 18, N°05, pp. 618-634, (2008).

[82] **G. S. Barozzi**, **E. Zanchini, M. Mariotti,** Experimental Investigation of Combined Forced and Free Convection in Horizontal and Inclined Tubes, Meccanica, Vol. 20, N°01, pp. 18-27, (1985).

[83] **H. Mafizul, A. M. H. Azizul, M. M. Rahman,** Experimental Measurements of Heat Transfer in an Internally Finned Tube, International Communication in Heat and Mass Transfer, Vol. 25, N°05, pp. 619-630, (1998).

[84] **I.M. Rustum, H.M. Soliman,** Experimental Investigation of Laminar Mixed Convection in Tubes with Longitudinal Internal Fins, J. Heat Transfer, Vol. 110, N°02, pp. 366-372, (1988).

[85] **B. Yu, J. H. Nie, Q. Wang, W. Tao,** Experimental Study on the Pressure Drop and Heat Transfer Characteristics of Tubes with Internal Wave-Like Longitudinal Fins, Heat and Mass Transfer, Vol. 35, pp. 65-73,(1999).

[86] **K. Kuvvet, T. Yavuz,** The Effect of Fin Pitch on Heat Transfer and Fluid Flow Characteristics in the Entrance Region of a Finned Concentric Passage, J. of Thermal Science and Technology, Vol. 31, N°02, pp. 109-122, (2011).

[87] **S. D. Churchill, H. S. Chu**, Correlating equation for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder, Int. J. Heat Transfer, vol. 18, pp. 1049-1053 (1975).

[88] **H. D. Baehr, K. Stephan**, Heat and Mass Transfer, Springer- Verlag, Berlin, (1998).

[89] **S. V. Patankar**, Numerical heat transfer and fluid flow, McGraw-Hill, New-York, (1980).

[90] **A. F. Polyakov**, Mixed convection in single phase flows, in O. G. Marynenko and A.A. Zukanskas , Heat Transfer: Soviet Reviews, convective heat transfer, Vol. 1, pp. 1-95, Emisphere, Washington D. C, (1989)

ANNEXE

A1- Ecoulement axial à l'entrée d'un espace annulaire

L'écoulement axial V_z^* à l'entrée d'un espace annulaire à un profil hydro-dynamiquement développé est détaillé comme suit :

La forme dimensionnelle de l'équation (2.7) est :

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ V_r\ V_z)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(V_\theta\ V_z)+\frac{\partial}{\partial z}(V_z V_z)= -\frac{\partial P}{\partial z}\frac{1}{\mathrm{Re}_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ \tau_{rz})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\tau_{\theta z})+\frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz})\right] \tag{A1}$$

A l'entrée, nous supposons que $V_r=V_\theta=0$ et la variation de V_z est seulement suivant *r*, cela rend l'équation (A1) comme suit :

$$0=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\ \tau_{rz})\right] \tag{A2}$$

La valeur de τ_{rz} est donnée par l'équation (2.9)

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{\mathrm{Re}_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu_0\ r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\right]=\frac{\mu_0}{\mathrm{Re}_0}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\right] \tag{A3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)=\frac{\mathrm{Re}_0}{\mu_0}\quad\frac{\partial P}{\partial z} \tag{A4}$$

Pour assurer un débit constant, il faut que :

$$\frac{\partial P}{\partial z}=cte\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)=Cte \tag{A5}$$

Le problème devient une simple équation différentielle avec les conditions initiales suivantes :

$$A\quad r=R_{1e}\ ,V_z=0$$

$$A\quad r=R_{2i}\ ,V_z=0$$

La solution de cette équation est:

$$V_z=C\ [(r^2+C_1)+C_2\ \ln(r)] \tag{A6}$$

$$C_1 = \frac{R_{2i}^2 \ \ln(R_{1e}) - R_{1e}^2 \ \ln(R_{2i})}{\ln(R_{2i}) - \ln(R_{1e})} \tag{A7}$$

$$C_2 = \frac{R_{1e}^2 - R_{2i}^2}{\ln\left(\frac{R_{2i}}{R_{1e}}\right)} \tag{A8}$$

La vitesse moyenne V_m est donnée par la relation suivante :

$$V_m = \frac{Q}{\pi\left(R_{2i}^2 - R_{1e}^2\right)} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_{R_{1e}}^{R_{2i}} V_z(r) r \partial r \ \partial\theta}{\pi\left(R_{2i}^2 - R_{1e}^2\right)} \Rightarrow V_m = \frac{2\pi \int_{R_{1e}}^{R_{2i}} V_z(r) r \partial r}{\pi\left(R_{2i}^2 - R_{1e}^2\right)} = \frac{\int_{R_{1e}}^{R_{2i}} V_z(r) r \partial r}{\frac{\left(R_{2i}^2 - R_{1e}^2\right)}{2}}$$

$$V_m = C\left[C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2\left(\frac{R_{2i}^2 \ \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2}\right)\right] \tag{A9}$$

$$V_z^*(r) = \frac{V_z}{V_m} = \frac{r^2 + C_2 \ \ln(r) + C_1}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2\left(\frac{R_{2i}^2 \ \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2}\right)} \tag{A10}$$

$$V_z^*(r^*) = \frac{\left(r^* \ D_h\right)^2 + C_2 \ \ln\left(r^* \ D_h\right) + C_1}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2\left(\frac{R_{2i}^2 \ \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2}\right)}$$

Et finalement la valeur de V_z^* est :

$$V_z^*(r^*) = \frac{C_3 \ r^{*2} + C_2 \ \ln\left(r^*\right) + C_4}{C_1 - \frac{C_2}{2} + \frac{R_{2i}^2 + R_{1e}^2}{2} + C_2\left(\frac{R_{2i}^2 \ \ln(R_{2i}) - R_{1e}^2 \ \ln(R_{1e})}{R_{2i}^2 - R_{1e}^2}\right)} \tag{A11}$$

$$C_3 = D_h^2 = \left(R_{2i} - R_{1e}\right)^2 \tag{A12}$$

$$C_4 = C_1 + C_2 \ \ln\left(D_h\right) = C_1 + C_2 \ \ln\left(R_{2i} - R_{1e}\right) \tag{A13}$$

Mixed convection phenomenon with variable physical properties in cylindrical ducts with fins and without fins

Abstract: This research work is a numerical simulation of the three-dimensional mixed convection combined with fluid flows in cylindrical horizontal ducts traveled by an incompressible Newtonian fluid having physical properties dependent on the temperature. Depending on the geometry, this problem consists of three parts: The first: a horizontal pipe with a finite thickness of its wall. The second part: an annular space between two concentric and horizontal pipes. The third part: a horizontal pipe and an annular space with fins. The model equations of continuity, momenta and energy with their initial and boundary conditions are numerically solved by a finite volume method of conjugate mixed convection in a cylindrical coordinate system. Three non-dimensional numbers controlling the problem solution are: the Reynolds number which indicates the flow dynamics, Prandtl number which is a characteristic of the fluid and finally the Grashof number which indicate the effect of buoyancy forces on the flow. The geometric aspect ratios are fixed and we fix two control parameters including the Reynolds and Prandtl numbers and we can study the influence of mixed convection by varying the Grashof number. The study of the effects of the intensification of mixed convection on heat transfer in a horizontal pipe and annular space with fins and without fins is the main objective of this study. The system of nonlinear partial differential equations is solved with a second order spatiotemporal discretization. The SIMPLER algorithm is used for the sequential solution of discretization equations systems.

The results of mixed convection in a horizontal pipe shows the influence of the Grashof number on the dynamic and thermal fields and on the average Nusselt number which was expressed as function of the Richardson number by the following correlation: $Nu_m = 12.753\ Ri^{0.156}$. The flow in an annular space shows that the decrease in the thickness of the annulus increases the heat transfer, this is justify by the increase in the average Nusselt number by decreasing the hydraulic diameter. The comparison between mixed convection in an annular space and that in a simple horizontal pipe shows that the average Nusselt number is increased to 74.5% in the case of an annular space. In this case, the correlation expressing the average Nusselt number according to the Richardson number is : $Nu_m = 12.8678\ Ri^{0.1426}$. The use of fins which generate heat, attached on the inner walls of the ducts participate in improving the heat transfer, this participation is very important in the case of longitudinal fins and it is moderate in the case of transverse fins. On the other hand, the fins used in the annular spaces are more participate in the heat transfer to those of a horizontal duct due to the increase of the exchange surface between the fluid and the fins in the case of an annular space.

Keywords : Conjugate mixed convection / Horizontal pipe / Concentric pipes / Annular space / Longitudinal fins / Transversal fins / Numerical simulation.

ظاهرة الحمل المختلط بخصائص فيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة في قنوات أسطوانية بزعانف وبدون زعانف

ملخص: هذا البحث هو محاكاة عددية للحمل الحراري المختلطة الثلاثي الأبعاد المرافق للتدفقات السوائل في القنوات الأسطوانية الأفقية، يعبر من خلالها سائل نيوتوني غير قابل للضغط ذوخصائص فيزيائية متعلقة بدرجة الحرارة. اعتمادا على هندسة القناة، ينقسم هذا البحث إلى ثلاثة أجزاء: الجزء الأول: أسطوانة أفقية ذات سمك محدود لجدارها. الجزء الثاني: فضاء حلقي مابين أسطوانتان متمركزتان أفقيتان. الجزء الثالث: أسطوانة أفقية و فضاء حلقي مجهزتان بزعانف. التدفقات المدروسة عبر عنها بواسطة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزيئية الثلاثية الأبعاد :معادلة الإستمرارية، كميات الحركة والطاقة، مع أخذ بعين الإعتبار الشروط الابتدائية و الحدية للحمل الحراري المختلط المصرف في جملة الإحداثيات الأسطوانية.الحلول المقدمة تعتمد على ثلاث أعداد لا بعدية، عدد رينولدز الذي يترجم شدة ديناميكا التدفق، عدد براندل الذي هو خاصية من خصائص السائل و أخيرا عدد غراشوف الذي يعكس تأثير قوى الطفو على التدفق. نثبت نسب المظاهر الهندسية كما نثبت عددين لا بعدين هما عدد رينولدز و عدد براندل و ندرس تغيرات الحمل الحراري المختلطة عندما نغير عدد غراشوف. دراسة الآثار المترتبة على تكثيف الحمل الحراري المختلطة على انتقال الحرارة داخل قناة أسطوانية و داخل فضاء حلقي مابين أسطوانتان متمركزتان أفقيتان بزعانف وبدون زعانف هو الهدف الرئيسي من هذه الدراسة. نظام المعادلات التفاضلية الجزئية الغير الخطية يتم معالجته باستعمال طريقة الحجوم المنتهية دقتها من الدرجة الثانية بالنسبة للفضاء و الزمن. نستعمل خوارزميات SIMPLER من أجل الحل المتسلسل لنظام المعادلات.

النتائج المتعلقة بالحمل الحراري المختلطة داخل أسطوانة أفقية أظهرت تأثير عدد غراشوف على الحقول الديناميكية والحرارية وعلى عدد نوسلت المتوسط الذي تم التعبير عنه بواسطة عدد ريتشاردسون بالعلاقة التالية: $Nu_m = 12.753\ Ri^{0.156}$. تدفق السائل في الفضاء الحلقي يبين على أن انخفاض سمك هذا الأخير يزيد من انتقال الحرارة، وذلك بسبب الزيادة في عدد نوسلت عند خفض القطر الهيدروليكي. أظهرت المقارنة بين الحمل الحراري المختلط في الفضاء الحلقي و في قناة أفقية بسيطة أن الزيادة في عدد نسلت المتوسط تصل إلى 74.5 %. في هذه الحالة، العلاقة التي تربط عدد نوسلت المتوسط بعدد ريتشاردسون هي كالتالي: $Nu_m = 12.8678\ Ri^{0.1426}$. استخدام الزعانف المولدة للحرارة الملصوقة على الجدر الداخلية للقنوات تساهم في تحسين التبادل الحراري، هذه المساهمة تكون ذات فاعلية كبيرة في حالة الزعانف الطولية و تكون أقل فعالية في حالة الزعانف العرضية. من جهة أخرى، الزعانف المستعملة في الفضاءات الحلقية هي أكثر مشاركة في انتقال الحرارة من الزعانف المستعملة في القنوات الأفقية العادية بسبب زيادة سطح التلامس بين السائل و الزعانف في حالة الفضاء الحلقي.

الكلمات المفتاحية : الحمل المختلط المصرف / قناة أفقية / أسطوانات متمركزة / فضاء حلقي / زعانف طولية / زعانف عرضية / التحليل العددي.

Phénomène de convection mixte à propriétés variables dans les conduits cylindriques à ailettes et sans ailettes

Résumé : Ce travail de recherche est une simulation numérique de la convection mixte tridimensionnelle combiné aux écoulements de fluide dans les conduits cylindriques horizontaux parcourus par un fluide newtonien et incompressible à propriétés physiques dépendantes de la température. Selon la géométrie, ce problème se compose de trois parties : La première : un cylindre plein avec une épaisseur finie de sa paroi. La deuxième partie: un espace annulaire entre deux cylindres concentriques et horizontaux. La troisième partie : un conduit cylindrique horizontal et un espace annulaire munis d'ailettes. Les écoulements considérés sont modélisés par les équations différentielles aux dérivées partielles, tri dimensionnelles, de conservation de la masse, des trois quantités de mouvement et de l'énergie avec leurs conditions initiales et aux limites de la convection mixte conjuguée dans un système de coordonnées cylindriques. Trois nombres non dimensionnels contrôlant la solution du problème, le nombre de Reynolds qui traduit la dynamique de l'écoulement, le nombre de Prandtl qui est une caractéristique du fluide et enfin le nombre de Grashof qui traduit l'effet des forces ascensionnelles sur l'écoulement. Les rapports d'aspect géométriques étant fixés et en fixant deux des paramètres de contrôle dont les nombres de Reynolds et de Prandtl et on peut étudier l'influence de la convection mixte en faisant varier le nombre de Grashof. L'étude des effets de l'intensification de la convection mixte sur le transfert thermique dans une géométrie cylindrique pleine et une géométrie annulaire cylindrique à ailettes et sans ailettes constitue l'objectif principal de cette étude. Le système d'équations différentielles non linéaires, aux dérivées partielles est résolu avec la méthode des volumes finis. On utilise des schémas de discrétisation (temporel et spatiale) du second ordre. L'algorithme SIMPLER est utilisé pour la solution séquentielle des systèmes d'équations de discrétisation.

Les résultats concernant la convection mixte dans un cylindre plein ont montré l'influence du nombre de Grashof sur les champs dynamiques et thermiques ainsi que sur le nombre de Nusselt moyen qui a été exprimé en fonction du nombre de Richardson par la corrélation suivante : $Nu_m = 12.753\ Ri^{0.156}$. l'écoulement dans un espace annulaire montre que la diminution dans l'épaisseur de ce dernier augmente le transfert de chaleur, cella est justifiée par l'augmentation du nombre de Nusselt en diminuant le diamètre hydraulique. La comparaison entre la convection mixte dans un espace annulaire et celle dans un conduit horizontal simple a exhibé que le Nombre de Nusselt moyen est augmenté jusqu'à 74.5% dans le cas d'un espace annulaire. Dans ce cas, la corrélation exprimant le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson est : $Nu_m = 12.8678\ Ri^{0.1426}$. L'utilisation des ailettes productrices de chaleur, attachées sur les parois internes des conduits participe dans l'amélioration du transfert de chaleur. Cette participation est très importante dans le cas des ailettes longitudinales et elle est modérée dans le cas des ailettes transversales. D'une autre part, les ailettes utilisées dans les espaces annulaires participent plus au transfert de chaleur par rapport à celles d'un conduit horizontal non-ailetté à cause de l'augmentation de la surface d'échange entre le fluide et les ailettes dans le cas d'un espace annulaire.

Mots Clés : Convection mixte conjuguée / Conduit horizontal / Cylindres concentriques / Espace annulaire / Ailettes longitudinales / Ailettes transversales / Simulation numérique.